一、定义

1.去心邻域&邻域

给定$x_0 \in R$。称集合$U^o(x_0;\delta)=\{x\in R|0<|x-x_0|<\delta\}$为以点$x_0$为半径，$\delta$为半径的去心邻域。注意去心邻域不包含中心点$x_0$。相应地，称集合$U(x_0;\delta)=\{x\in R||x-x_0|<\delta\}$为以点$x_0$为半径，$\delta$为半径的邻域。

2.函数极限

设函数$f(x)$在点x_0的某个去心邻域$U^o(x_0;\delta_0)$内有定义，A为一个实数，若对任意给定的$\varepsilon>0$，存在正数$\delta<\delta_0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，总成立$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称当$x\to x_0$时，$f(x)$收敛于A，或称A为函数$f(x)$在点x_0的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A, \qquad \text{或} \qquad f(x)\to A(x\to x_0)。$$

如果不存在具有上述性质的实数，则称函数$f(x)$在点x_0的极限不存在或称$f(x)$在点x_0处发散。

极限定义可以用"ε—δ"语言简单表述为:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,s.t.\forall x\in U^o(x_0;\delta),|f(x)-A|<\varepsilon$$

当x趋于$+\infty$时，函数的极限可表述为:

设函数$f(x)$定义在区间$[a,+\infty)$上，A为常数。若对任意给定的$\varepsilon>0$，存在正数$X>a$，当$x>X$时，成立

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称函数$f(x)$当$x\to+\infty$时以A为极限，记为$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$或$f(x)\to A(x\to+\infty)$。

类似可以定义$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$或$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，只需要把上面定义中刻画自变量变化过程的式子改为$x<X$或$|x|<X$。

3.单侧极限

若对任意给定的$\varepsilon>0$，存在正数δ，使得当$x_0<x<x_0+\delta$时，成立$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称自变量x从右侧趋近于x_0时，$f(x)$收敛于A。A称为函数$f(x)$在x_0点的右极限，记为$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$，或$f(x)\to A(x\to x_0^+)$，也记为$f(x_0+0)=A$或$f(x_0^+)=A$。

若对任意给定的$\varepsilon>0$，存在正数δ，使得当$x_0-\delta<x<x_0$时，成立$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称自变量x从左侧趋近于x_0时，$f(x)$收敛于A。A称为函数$f(x)$在x_0点的左极限，记为$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$，或$f(x)\to A(x\to x_0^-)$I，也记为$f(x_0-0)=A$或$f(x_0^-)=A$。

左右极限的定义也可以利用符号简单表述为

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,s.t.\forall x\in(x_0,x_0+\delta),|f(x)-A|<\varepsilon$$
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,s.t.\forall x\in(x_0-\delta,x_0),|f(x)-A|<\varepsilon$$

4.连续函数

设函数$f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义，且$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称函数$f(x)$在点$x_0$处连续，或者称$x_0$为函数$f(x)$的连续点。

函数$f(x)$在点x_0处连续的"$\varepsilon—\delta$"语言为：

$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, s.t. \forall x \in U(x_0, \delta), |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

5.

若函数$f(x)$在(a,b)的每一点都连续，则称函数$f(x)$在开区间(a,b)内连续。

6.单侧连续

若$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)=f(x_0)$，则称函数$f(x)$在点$x_0$左连续；

若$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)=f(x_0)$，则称函数$f(x)$在点$x_0$右连续。

7.

若函数$f(x)$在开区间(a,b)内连续，且在区间左端点a处右连续，在区间右端点b处左连续，则称函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续。记为$f(x) \in C[a,b]$。

8.不连续点及其类型

按照连续的定义，函数$f(x)$在点x_0连续必须满足以下三个条件：

（1）函数$f(x)$在点x_0有定义；

（2）函数$f(x)$在点x_0的极限存在；

（3）函数$f(x)$在点x_0的极限等于$f(x_0)$。

若上述条件有一个不满足，则点x_0是函数$f(x)$的不连续点，这时也称x_0为间断点。按照单侧极限存在与否可以将间断点分为两大类：第一类间断点和第二类间断点。

1.函数$f(x)$在点x_0左右极限都存在，

（1）若$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$，则称点$x_0$为函数$f(x)$的跳跃间断点。

（2）若$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$，但是极限值与$f(x_0)$不相等，或者$f(x)$在点$x_0$无定义，则称点$x_0$为函数$f(x)$的可去间断点。

跳跃间断点与可去间断点统称为第一类间断点。

2.函数$f(x)$在点x_0处的左右极限至少有一个不存在，则称点x_0为函数$f(x)$的第二类间断点（分为无穷间断点和振荡间断点）。

9.无穷小

若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，则称$f(x)$是$x\to x_0$时的无穷小。

10.无穷小阶的比较

设$f(x)$，$g(x)$是当$x\to x_0$时的无穷小，且在x_0的某个去心邻域内$g(x)\neq 0$，

（1）若$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$，则称当$x\to x_0$时$f(x)$是$g(x)$的高阶无穷小；

（2）若$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=l$，$l\neq 0$，则称当$x\to x_0$时$f(x)$是$g(x)$的同阶无穷小；

（3）若$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$，则称当$x\to x_0$时$f(x)$是$g(x)$的等价无穷小，记为

$$f(x)\sim g(x)(x\to x_0)$$

不难发现无穷小的等价“$\sim$”满足等价性质的三条要求：自反性，对称性和传递性。

11.无穷小阶的量化

若

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{(x-x_0)^k}=l\neq 0，k>0$$

则称$f(x)$是当$x\to x_0$时的k阶无穷小。

若

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{-k}}=\lim_{x\to+\infty}x^k f(x)=l\neq 0，k>0$$

则称$f(x)$是当$x\to+\infty$时的k阶无穷小。

12.无穷大

设$f(x)$在x_0的某个去心邻域内有定义，如果对任给的正数M，存在$\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，$|f(x)|>M$，则称$f(x)$为$x\to x_0$时的无穷大，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty，或f(x)\to\infty(x\to x_0)$$

如果任给正数M，存在$\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，$f(x)>M$，则称$f(x)$为$x\to x_0$时的正无穷大，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty，或f(x)\to+\infty(x\to x_0)$$

类似还可以定义负无穷大。

13.无穷大阶的比较

设$f(x)$，$g(x)$是当$x \to x_0$时的无穷大，

（1）若$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$，则称当$x \to x_0$时$g(x)$是$f(x)$的高阶无穷大；

（2）若$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$，$l \neq 0$，则称当$x \to x_0$时$f(x)$是$g(x)$的同阶无穷大；

（3）若$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$，则称当$x \to x_0$时$f(x)$是$g(x)$的等价无穷大，记为

$$f(x) \sim g(x)(x \to x_0)$$

14.无穷大阶的量化

若

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^{-k}} = l \neq 0，k > 0$$

则称$f(x)$是当$x \to x_0$时的k阶无穷大。

若

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^k} = l \neq 0，k > 0$$

则称$f(x)$是当$x \to +\infty$时的k阶无穷大。

15.$o(\cdot)$和$O(\cdot)$记号

设函数$f(x)$和$g(x)$在点x_0的某个去心邻域内有定义，且$g(x) \neq 0$，

（1）若存在$M > 0$，使得在x_0的某个去心邻域内有$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq M$，则记

$$f(x) = O(g(x))(x \to x_0)$$

（2）若当$x \to x_0$时，$\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$，则用$f(x) = o(g(x))(x \to x_0)$表示。

注：这里$o(\cdot)$和$O(\cdot)$应当理解为具有这样一种同样性质的一类函数的集合，“=”应该理解为“属于”。

16.函数的一致连续性

设函数$f(x)$在区间I上有定义，若对任意给定的$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，只要x'，$x'' \in I$，满足$|x' - x''| < \delta$，就有$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$，则称函数$f(x)$在区间$I$上一致连续。

17.函数不一致连续

设函数$f(x)$在区间I上有定义，若存在$\varepsilon_0 > 0$，使得对任意的$\delta > 0$，都存在x'，$x'' \in I$，满足$|x' - x''| < \delta$，但$|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$，则称函数$f(x)$在区间$I$上不一致连续。

二、定理

1.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$的充要的条件是函数$f(x)$在$x_0$点的左右极限存在而且都等于$A$，即

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$。

由函数极限和左右极限的定义，以及关系$U^o(x_0; \delta) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$易得。

2.极限的唯一性

若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在，则极限唯一。

利用函数极限的定义证明。

3.极限的局部有界性

若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在，则函数$f(x)$在点$x_0$的某个去心邻域内有界。

利用函数极限的定义证明。

4.极限的局部保序性

若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$，且$A > B$，则存在$\delta > 0$，使得当$x \in U^o(x_0; \delta)$时，$f(x) > g(x)$。

利用函数极限的定义证明。

5.极限的局部保号性

若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，且$A > 0$（或$A < 0$），则存在$\delta > 0$，使得当$x \in U^o(x_0; \delta)$时，$f(x) > 0$（或$f(x) < 0$）。

在定理4.中取$B = 0$可得。

6.

若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$，且存在$\delta > 0$，使得当$x \in U^o(x_0; \delta)$时，$f(x) \geq g(x)$，则$A \geq B$。

由定理4.可得。注意，与数列的极限类似，即使条件加强到当$x \in U^o(x_0; \delta)$时，$f(x) > g(x)$，也只能得到$A \geq B$而不是$A > B$。

7.函数极限的四则运算

设$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$，则

（1）$\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$;

（2）$\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = AB$;

（3）又若$B \neq 0$，则$\frac{f(x)}{g(x)}$当$x \to x_0$时极限也存在，且有$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$。

利用函数极限的定义证明。

8.夹逼定理

若存在$\delta > 0$，使得当$x \in U^o(x_0;\delta)$时，函数$f(x), g(x), h(x)$满足如下性质：

（1）$g(x) \le f(x) \le h(x)$；

（2）$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$，

则$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在，且极限也为$A$。

利用函数极限的定义证明。

9.Heine定理

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$的充要条件是对任意以$x_0$为极限的数列$\{x_n\}$，$x_n \ne x_0 (n = 1, 2, 3, \cdots)$，其相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$满足$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$。

利用数列极限和函数极限的定义证明。

当x趋于$+\infty$时，Heine定理可表述为：$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$的充要条件是对任意以$+\infty$为极限的数列$\{x_n\}$，其相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$满足$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$。

10.

极限$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在的充要条件是对任意以$x_0$为极限的数列$\{x_n\}$，$x_n \ne x_0 (n = 1, 2, 3, \cdots)$，其相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$收敛。

如果不关心函数极限的具体值，只考察其存在性时，定理9.可以进一步叙述为此形式。

以上两个定理建立了函数极限和数列极限之间的关系。

11.函数极限的Cauthy收敛原理

假设函数$f(x)$在x_0的某个去心邻域有定义，则$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在的充分必要条件是：对任给的$\varepsilon > 0$，存在正数$\delta$，使得当$0 < |x_1 - x_0| < \delta$，$0 < |x_2 - x_0| < \delta$时，成立$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$。

利用数列极限的Cauthy收敛定理和数列极限与函数极限的关系证明。

当x趋于$+\infty$时，Cauthy收敛定理可表述为：假设函数$f(x)$在$[a, +\infty)$有定义，则$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$存在的充分必要条件是：对任给的$\varepsilon > 0$，存在正数$X > a$，使得当$x_1 > X$，$x_2 > X$时，成立$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$。

12.复合函数的极限

设$u = g(x)$，$\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = u_0$，且在$x_0$的某个去心邻域内总有$g(x) \ne u_0$，则$\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A$。

利用函数极限的定义证明。

13.

函数$f(x)$在点x_0连续的充要条件是函数$f(x)$在点x_0既左连续又右连续。

利用连续和左、右连续的定义易得。

14.连续函数的局部有界性

若函数$f(x)$在点x_0连续，则$f(x)$在点x_0的某个邻域内有界。

15.连续函数的局部保号性

若函数$f(x)$在点x_0连续，且$f(x_0) > 0$，则存在$\delta > 0$，使得当$|x - x_0| < \delta$时，$f(x) > 0$。

16.连续函数的四则运算

设$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$，则

（1）$\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = f(x_0) \pm g(x_0)$；

（2）$\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = f(x_0)g(x_0)$；

（3）又若$g(x_0) \neq 0$，则$\frac{f(x)}{g(x)}$也在点x_0处连续，且$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$。

因为在连续点x_0处函数极限存在并且极限就是$f(x_0)$，由函数极限的性质，可以得到以上连续函数的性质。

17.复合函数的连续性

若函数$g(x)$在点x_0连续，$g(x_0) = u_0$，$f(u)$在点u_0连续，则复合函数$f(g(x))$在点x_0连续。

从定理条件可以看出，复合函数的连续性，比复合函数的极限性质少了在x_0附近$g(x) \neq u_0$的限制。

18.反函数的连续性

设函数$g(x)$是区间$[a, b]$上的严格单调递增（递减）的连续函数，假设它的反函数$x = f^{-1}(y)$存在[1]，则$f^{-1}(y)$是$[f(a), f(b)]$（$[f(b), f(a)]$）上的严格单调递增（递减）连续函数。

1.由后面学到的闭区间上连续函数的性质（介值定理）可知，当$f(x)$是闭区间$[a, b]$上的严格单调递增的连续函数时，$f(x)$是一个从$[a, b]$到$[f(a), f(b)]$的满射，又由单调性可知$f(x)$是一个单射，因此是一个一一对应，一定存在反函数，严格单调递减时结论也成立。

利用反函数和连续的定义证明。

19.用$o(\cdot)$和$O(\cdot)$记号表示几个关于无穷小或无穷大的运算性质

注：本定理里"="应该理解为"是"的意思。

设$n, m > 0$，$n > m$，则

（1）当$x \to 0$时，$o(x^n) + o(x^m) = o(x^m)$，$o(x^n)o(x^m) = o(x^{n+m})$。

（2）当$x \to +\infty$时，$O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$，$O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m})$。

（3）若$x \to x_0$时，$\alpha = o(1)$，且在x_0的某个去心邻域内$\alpha(x) \neq 0$，则

$$o(\alpha)+o(\alpha)=o(\alpha) \qquad (o(\alpha))^k=o(\alpha^k)$$

（4）若$x\to x_0$时，$\alpha=o(1)$，且在x_0的某个去心邻域内$\alpha(x)\neq 0$，则对任意$c\neq 0$，

$$c\alpha+o(\alpha)\sim c\alpha(x\to x_0)$$

20.无穷小和无穷大的等价代换（乘除位置）

设函数$f(x),g(x),h(x)$在点x_0的某个去心邻域内有定义，且有$f(x)\sim g(x)(x\to x_0)$，

（1）若$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)h(x)=a$，则有$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=a$；

（2）若$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{h(x)}{g(x)}=a$，则有$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{h(x)}{f(x)}=a$。

21.

设函数$f(x)$在区间I上有定义，则$f(x)$在I上一致连续的充要条件是：对I中的任意两个数列x_n'，x_n''，只要$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$，就有$\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n')-f(x_n''))=0$。

22.

闭区间上的连续函数一定有界。

23.

若函数$f(x)$在开区间(a,b)上一致连续，则$f(x)$在(a,b)有界。

24.最值定理

若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则它在$[a,b]$上必能取到最大值和最小值，即存在$\xi,\eta\in[a,b]$，使得对一切$x\in[a,b]$，都有

$$f(\xi)\leq f(x)\leq f(\eta)$$

25.零点存在定理

设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)f(b)<0$，则一定存在$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=0$。

26.介值定理

设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，γ是介于$f(a)$，$f(b)$之间的一个实数，则必存在$c\in[a,b]$，使得$f(c)=\gamma$。

推论1：设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，M，m分别为$f(x)$在$[a.b]$上的最大值和最小值，则对于任意介于M，m之间的数γ，都存在$c\in[a,b]$，使得$f(c)=\gamma$。

推论2（广义介值定理）：设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，$x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$，已知正数$\lambda_i,i=1,2,\cdots,n$满足$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$，则一定存在一点$c\in[a,b]$，使得

$$f(c)=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)$$

27.Cantor定理

若函数f(x)在闭区间$[a,b]$上连续，则它在区间$[a,b]$上一致连续。

三、常用结论

1.求证：$\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$

利用函数极限的定义证明。

证明：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\varepsilon$，$s.t.\forall 0<|x-x_0|<\delta$，$|x-x_0|<\varepsilon$。

2.求证：$\lim\limits_{x\to x_0} c=c$

利用函数极限的定义证明。

证明：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta\in R$，$s.t.\forall 0<|x-x_0|<\delta$，$|c-c|=0<\varepsilon$。

3.求证：$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$

利用函数极限的定义证明。

证明：因为

$$|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|=\left|\frac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right|\le\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}$$

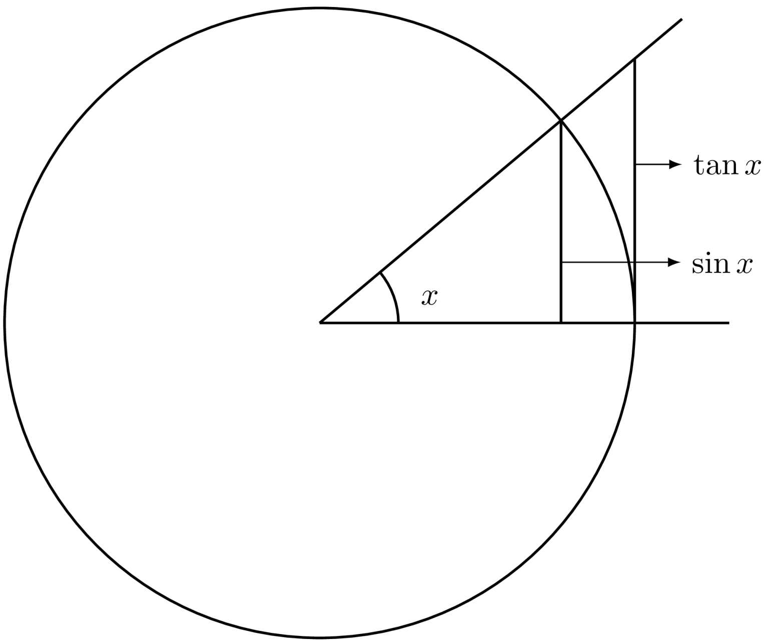
所以$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\sqrt{x_0}\varepsilon$，$s.t.\forall 0<|x-x_0|<\delta$，$|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|<\varepsilon$。

4.求证：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

利用夹逼定理证明。

证明：如右图，在单位圆中，当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，由三角函数的几何含义有不等式

$$\sin x<x<\tan x$$



进一步由$\sin x<x$可得$\frac{\sin x}{x}<1$，由$x<\tan x$可得$\frac{\sin x}{x}>\cos x$，综合起来即有

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1(0<x<\frac{\pi}{2})$$

当$-\frac{\pi}{2}<x<0$时，由这些函数的奇偶性不难验证同样有$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$。

另一方面$0<1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<\frac{x^2}{2}$，由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2}=0$，再由夹逼定理可知

$$\lim_{x\to 0}(\cos x-1)=0$$

从而$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$。再对$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1(0<|x|<\frac{\pi}{2})$使用夹逼定理可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

5.求证：$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$不存在

利用Heine定理证明。

证明：取$\{x_n\}=\left\{\frac{1}{n\pi}\right\}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，且$x_n\neq 0$；

取$\{x'_n\}=\left\{\frac{1}{\frac{4n+1}{2}\pi}\right\}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x'_n=0$，且$x'_n\neq 0$；

而$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\pi=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x'_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{4n+1}{2}\pi=1$。

则我们把$\{x_n\}$和$\{x'_n\}$合并为一个数列$\{x''_n\}$，$\{x''_n\}$不收敛。

所以由Heine定理可得$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$不存在。

6.求证：$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

利用夹逼定理和变量替换证明。

证明：当$x\geq 1$时，有$[x]\leq x\leq [x]+1$，$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}\leq (1+\frac{1}{x})^x\leq\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$，而

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)=e$，

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{-1}=e$，

$\therefore\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$。

令$t=-x$，

$\therefore\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim\limits_{t\to+\infty}(1-\frac{1}{t})^{-t}=\lim\limits_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^t=\lim\limits_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^{t-1}(1+\frac{1}{t-1})=e$。

$\therefore\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$。

令$t=\frac{1}{x}$，

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t=e$。

$\therefore\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$。

类似可得$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x=\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=e^{-1}$（推导：$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+(-x))^{\frac{1}{-x}}]^{-1}=e^{-1}$）。

7.求证：$\sin x$、$\cos x$在R上任意一点连续

利用连续函数的定义证明。

证明：$\forall x_0\in R$，$|\sin x-\sin x_0|=2|\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}|\leq 2|\sin\frac{x-x_0}{2}|\leq 2|\frac{x-x_0}{2}|$，

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=min\{\varepsilon,\frac{\pi}{2}\}$，$|x-x_0|<\delta$，有$|\sin x-\sin x_0|\leq\varepsilon$。

$\therefore\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$。

同理，$\forall x_0 \in R$，$|\cos x - \cos x_0| = 2|\sin\frac{x-x_0}{2}\sin\frac{x+x_0}{2}| \le 2|\sin\frac{x-x_0}{2}| \le 2|\frac{x-x_0}{2}|$，

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta = min\{\varepsilon, \frac{\pi}{2}\}$，$|x-x_0| < \delta$，有$|\cos x - \cos x_0| \le \varepsilon$。

$\therefore \lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$。

8.求证：$f(x) = a^x(a > 0, a \ne 1)$在$(-\infty, +\infty)$处处连续

利用夹逼定理、连续函数的四则运算和变量替换证明。

证明：$\forall x_0 \in R$，$\lim\limits_{x\to x_0} a^{x-x_0+x_0} = a^{x_0} \cdot \lim\limits_{x\to x_0} a^{x-x_0} = a^{x_0} \cdot \lim\limits_{t\to 0} a^t$，

只需证在$x=0$处连续，即$\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1 = f(0)$。

（1）当$a > 1$时，此时函数严格递增，

由$\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$知，$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N^*, s.t. 0 < a^{\frac{1}{N}} - 1 < \varepsilon$。

取$\delta = \frac{1}{N}$，当$0 < x < \delta$时，$0 < a^x - 1 < a^{\frac{1}{N}} - 1 < \varepsilon$。

$\therefore \lim\limits_{x\to 0^+} a^x = 1$。

$\lim\limits_{x\to 0^-} a^x \xlongequal{\text{x=-y}} \lim\limits_{y\to 0^+} a^{-y} = \lim\limits_{y\to 0^+} \frac{1}{a^y} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0^+} a^y} = 1$。

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$。

（2）$a < 1$时，

$\lim\limits_{x\to 0} a^x = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{a}\right)^x} = 1 = f(0)$。

9.一切初等函数在其定义域内连续。

由常用结论7.、连续函数的四则运算以及反函数的连续性，可以证明$\tan x$、$cot x$、$\sec x$、$\csc x$和所有反三角函数在其定义域内皆连续；

由常用结论8.和反函数的连续性，可以证明对数函数$y = \log_a x(a > 0, a \ne 1)$在$(0, +\infty)$内单调且连续；

由对数函数$y = \log_a x(a > 0, a \ne 1)$的连续性和复合函数的连续性，可以证明幂函数$y = x^\mu$在其定义域内连续（推导：$y = x^\mu = a^{\mu\log_a x}$）。

由基本初等函数的连续性和复合函数的连续性，可以证明一切初等函数在其定义域内连续。

10.求证：函数$f(x)$在(a, b)内单调，则$\forall x_0 \in (a, b)$，$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$存在

利用确界存在定理和单侧极限的定义证明。

证明：不妨设$f(x)$在(a, b)内单调递增，

$\forall x_0 \in (a, b)$，$\forall a < x < x_0$，$f(x) \le f(x_0)$，所以$f(x)$在(a, x_0)上有界，

所以根据确界存在定理，$f(x)$在(a, x_0)上有上确界，令$A = \sup\limits_{x\in(a, x_0)} f(x)$。

（1）$f(x_0)$是上界，$\therefore A \le f(x_0)$；

（2）$\forall \varepsilon > 0$，$\exists x = x - \delta \in (a, x_0)$，使得$f(x_0 - \delta) > A - \varepsilon$；

（3）$f(x)$在(a,b)上单调递增，$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$，有：

$f(x) \ge f(x_0 - \delta) > A - \varepsilon$，即：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当$0 < x_0 - x < \delta$时，
$A - \varepsilon < f(x_0 - \delta) \le f(x) \le A < A + \varepsilon$。

$\therefore |f(x) - A| < \varepsilon$。

即：$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$存在。同理$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$存在。

对$\forall x_0 \in (a,b)$，$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$，$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$存在。

11.常用等价无穷小：

当$x \to 0$时，

$$
\begin{array}{cc}
\sin x \sim x & \arcsin x \sim x \\
1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2 & \ln(1+x) \sim x \\
\tan x \sim x & \arctan x \sim x \\
e^x - 1 \sim x & (1+x)^\lambda - 1 \sim \lambda x \\
\sqrt{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{2} & (1+x)^2 - 1 \sim 2x
\end{array}
$$

下面对于$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$，$\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x \ln a} = 1$和$\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^\lambda - 1}{\lambda x} = 1$进行证明。

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$。

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x \ln a} \xlongequal{a^x - 1 = t} \lim\limits_{t \to 0} \frac{t}{\log_a(t+1) \ln a} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{t \ln a}{\ln(1+t) \ln a} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = 1$。

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^\lambda - 1}{\lambda x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\lambda \ln(1+x)} - 1}{\lambda x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\lambda \ln(1+x)}{\lambda x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$。

12.1^∞型极限求解

1^∞型极限指的是如下类型的极限：

$$\lim_{x \to x_0} u(x)^{v(x)}，\text{其中} \lim_{x \to x_0} u(x) = 1，\lim_{x \to x_0} v(x) = \infty，u(x) > 0$$

由$u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}$及函数$e^x$的连续性知只需求出$v(x) \ln u(x)$的极限即可。

由等价代换定理得

$$\lim_{x \to x_0} v(x) \ln u(x) = \lim_{x \to x_0} v(x) \ln[1 + (u(x) - 1)] = \lim_{x \to x_0} v(x)[u(x) - 1]$$

因此，若$\lim\limits_{x \to x_0} v(x)[u(x) - 1] = A$，则由函数的连续性知，$\lim\limits_{x \to x_0} u(x)^{v(x)} = e^A$。

13.求证：函数$f(x)=\sqrt{x}$在区间$[0,+\infty)$上一致连续

利用不等式$|\sqrt{x}-\sqrt{y}|\leq\sqrt{|x-y|}$和一致连续的定义证明。

证明：$\forall\varepsilon>0$，$x_1,x_2\in[0,+\infty)$且$x_1>x_2$，$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|\leq\sqrt{|x_1-x_2|}$（将两边平方后去绝对值可证明）。

所以$\exists\delta=\varepsilon^2$，$s.t.\forall|x_1-x_2|<\delta$，$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|\leq\sqrt{|x_1-x_2|}<\sqrt{\varepsilon^2}=\varepsilon$。

故函数$f(x)=\sqrt{x}$在区间$[0,+\infty)$上一致连续。

14.求证：函数$f(x)$在(a,b)内一致连续，则$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$存在

利用一致连续的定义和Cauthy收敛原理证明。

证明：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$\forall x_1,x_2\in(a,b)$，且$|x_1-x_2|<\delta$时，有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$。

$\forall x_1,x_2\in(a,a+\delta)$，$0<x_1-a<\delta$，$0<x_2-a<\delta$，有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$。

根据Cauthy收敛原理，$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$存在。

同理，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$存在。