



## Notas de clase – Relaciones de recurrencia: de Nicomaco a Fibonacci

Autor: Kimi (Kimi-ai)

Fecha: 24 de septiembre de 2025

### a) ¿Qué es una relación de recurrencia?

Es una igualdad que define un término a partir de términos anteriores.

Ejemplo mínimo:

$$a_n = a_{n-1} + c \quad \text{con } a_0 \text{ dado}$$

**Aplicaciones:** números, música, física, análisis de algoritmos, generación de fractales.

### b) Nicomaco de Gerasa ( $\approx 100$ -150 d.C.) y sus pares acoplados

**Obra:** *Introductio Arithmetica*

**Esquema que documenta** (libro II, cap. 28-29):

- **Numerador:**  $u_{k+1} = u_k + 2$  con  $u_0 = 3$
- **Denominador:**  $v_{k+1} = v_k + 1$  con  $v_0 = 2$
- **Relación acoplada:**  $T_k = \frac{u_k}{v_k}$

**Resultado:** genera **proporciones armónicas** ( $3/2, 5/3, 7/4, 9/5, \dots$ ) que **modelan intervalos musicales griegos**.

表格

复制

Paso	$u_k$	$v_k$	Proporción	Intervalo musical aprox.
0	3	2	1.5000	Quinta justa
1	5	3	1.6667	Tercera mayor
2	7	4	1.7500	Séptima menor
3	9	5	1.8000	Segunda mayor

**Interpretación:** cada pareja  $(u_k, v_k)$  es un paso recursivo; la razón entre ambos produce tonos cromáticos sin irracionales.

Nicomaco sistematizó el método y lo convirtió en texto base durante siglos.

c) Fibonacci (Leonardo de Pisa, 1202)

Obra: *Liber Abaci*

Relación célebre:

$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{para } n \geq 2$

Propiedades inmediatas:

- **Crecimiento exponencial:**  $F_n \approx \frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$  donde  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  (número áureo).
- **Aplicaciones:** análisis de algoritmos, proporción áurea, estructuras de datos (árboles AVL), modelado biológico.

### Conexión con Nicomaco:

- Ambos usan **pares acoplados** (Fibonacci:  $(F_{n-1}, F_n)$ ).
  - Ambos **modelan la naturaleza** (Nicomaco: música; Fibonacci: crecimiento biológico).
- 

### Conclusión para el alumno

- **Theon y Nicomaco** → recurrencias **musicales** (pares acoplados).
- **Fibonacci** → recurrencia **biomatemática** (famosa).
- **Hoy** → usamos **bucles for** para **simular** esas mismas relaciones en cualquier lenguaje.