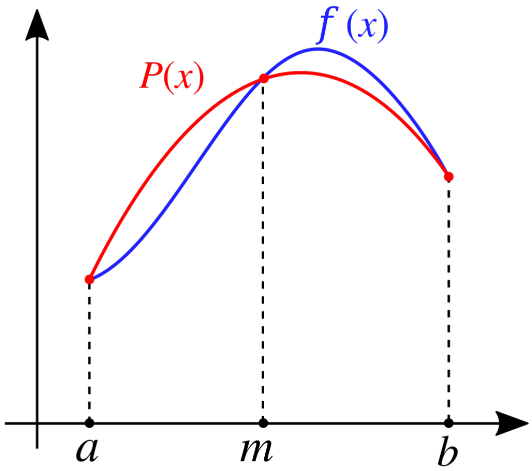
# Lukion pitkä matematiikka
# Soveltavia tehtäviä YO-kertaukseen




Lindell 2022

# Sisällys

# 1 Yleistä tehtäväpaketista

Tämä on kokoelma soveltavia matematiikan tehtäviä ratkaisuineen, jotka voidaan olettaa olevan ratkaistavissa lukion pitkän matematiikan valtakunnallisten pakollisten ja syventävien kurssien tietojen, ja tehtävänannoissa erikseen mainittujen tietojen valossa.

Vaikka stressinhallinta oli ensisijainen taito, jonka koin tarpeelliseksi koetilanteessa, toinen tärkeä taito joka jäi itseltäni jollakin tasolla puuttumaan, oli soveltavien tehtävien lähestyminen. Tehtäväpaketin yleisenä tarkoituksena on siten muodostaa vapaasti jaettava kokelma yo-kokeen vaikeampia tehtäviä simuloivia tehtäviä yksityiskohtaisien ratkaisuijen kanssa, sillä koen, että tämäntyyppisistä tehtäviä ei ole kasattu merkittävästi pl. vanhat yo-kokeet ja yleisessä jaossa olevat harjoituskokeet. Tämä oli pitkälti oma kokemukseni, kun lähdin tavoittelemaan omaa pitkän matematiikan arvosanaani keväällä 2020.

Keskeiset asiat joihin suosittelen kiinnittämään huomiota kertaamisen aikana ovat tottuminen soveltavampien tehtävien lähestymiseen ja ratkaisumetodien tutkiminen. Monien tehtävien on tarkoitus olla vaikeita, mutta niiden ratkaisuissa käytettävistä menetelmistä tulisi saada kiinni lukion oppimäärän puitteissa.

Tehtävissä saa hyödyntää sopivasti matemaattisia ohjelmistoja, koska ylioppilaskokeissakin tämä luksus sallitaan. Ratkaisuissa hyödynnetään pääasiassa Geogebran CAS-toimintoa.

Paketti on ensisijaisesti suunnattu opiskelijalle, jonka tavoitteena on onnistua pitkän matematiikan yo-kokeessa myös soveltavemmissa tehtävissä.


Kuva 1: Matematiikan pitkä oppimäärä yksinkertaistettuna

# 2 Tehtävät

## 2.1 Derivaatta ja raja-arvoja

a) Ratkaise derivaatta kohdassa $x = 0$ funktiolle

$$f(x) = (2^x - 1)(2^x - 2)(2^x - 3)...(2^x - 22)$$

hyödyntämällä tulosta

$$\lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{x} = \ln(2)$$

## 2.2 Harmonisia reaalilukuja

Harmoninen luku H(n) määritellään harmonisen sarjan osasummana:

$$H(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}, n \in \mathbb{N}$$

a) Muodosta rekursiivinen kaava termeille $H(n+1)$ ja $H(n-1)$

b) Muodosta rekursiivinen kaava termille $H(x+n)$ edellisen kohdan perusteella, jossa $x \in \mathbb{R}$

c) Määritä raja-arvo termille $\lim_{n \to \infty} H(n) - H(x+n)$ ja ratkaise funktio $H(x)$, jolla voidaan muodostaa reaaliluvun x harmoninen luku.

## 2.3 Osittaisintegroinnin kaava

Osoita seuraavat kaavat todeksi hyödyntämällä tulon derivaatan kaavaa:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int g'(x)f(x)dx$$

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \Big/_a^b f(x)g(x) - \int_a^b g'(x)f(x)dx$$

## 2.4 Napakoordinaatisto

Napakoordinaatisto on eräs vaihtoehto xy-koordinaatistoille, jossa koordinaatit määritellään yksiselitteisesti origon etäisyyden ja origosta tulkitun suuntakulman avulla.

a) Selvitä miten xy-koordinaatiston piste (x,y) voidaan esittää napakoordinaateissa (r,$\theta$).

b) Ratkaise usean muuttujan raja-arvotehtävä muuttamalla xy-koordinaatit napakoordinaateiksi sopivasti.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}-1}{x^2+y^2}$$

## 2.5 Yhtälönratkaisu sijoituksella

Ratkaise yhtälö $ax^{2n} - bx^n + 1 = 0$ ehdoilla $\{a \neq 0,\ n \in \mathbb{N}\}$ reaalilukujen joukossa algebrallisesti. Huomioi kaikki määrittelyehdot.

## 2.6 Eksponenttiyhtälö

Ratkaise yhtälö $4^{2x+1} = 3^{x-5}$ ilman teknisiä apuvälineitä.

## 2.7 Trigonometriset funktioit

Sievennä seuraavat termit reaalilukujen joukossa:

$$\cos^{-1}(\cos(\pi))$$

$$\cos\left(\cos^{-1}(\pi)\right)$$

## 2.8 Kompleksisia trigonometrisiä funktioita

$$\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

Tämä on kosinifunktion määritelmä kompleksiluvulle z.

a) Selvitä funktio, jolle pätee $f(\cos(z)) = z$ edellisen määritelmän perusteella. Funktiota ei ole määritelty yksikäsitteisesti kaikilla arvoilla, joten valitse käytettäväksi funktioksi valittavien merkkien kohdilla positiiviset versiot.

Vihje: CRatkaise GeoGebralla. Algebralliseen ratkaisuun aloita kertomalla puolittain termillä $e^{iz}$. Määritelmä: $i^2 = -1 \Leftrightarrow \sqrt{-1} = i$

b) Valitaan a-kohdasta $f(x) = \cos^{-1}(x)$. Sievennä edellisen tehtävän mukainen termi $\cos\left(\cos^{-1}(\pi)\right)$ kompleksilukujen joukossa.

## 2.9 Todennäköisyyksiä ja simulointia

Yksikköympyrän kehältä valitaan satunnaisesti kolme pistettä ja sisältä yksi piste. Tutki simuloimalla millä todennäköisyydellä ympyrän sisälle piirretty piste on kehäpisteiden muodostaman kolmion sisällä.

## 2.10 Eksponenttifunktioita

Ratkaise arvo c, siten, että epäyhtälöt $0 < c \leq a < b$ ja $a^b > b^a$ toteutuvat.

## 2.11 Lambert W

Lambertin W -funktio määritellään seuraavasti:

$$W(xe^x) = x$$

a) Osoita esim. Bolzanon lauseen avulla, että yhtälöllä $x^2 = 2^x$ on kolme reaalista ratkaisua.

b) Hyödynnä Lambertin W-funktiota ja selvitä reaalinen ratkaisu yhtälölle $x^2 = 2^x$, joka ei kuulu kokonaislukujen joukkoon.

Geogebralla funktion $W(x)$ saa komennolla LambertW(x).

## 2.12 Paraabeleita

Selvitä millä c:n arvolla $c \in \mathbb{R}$ paraabelit $y = x^2 + c$ ja $y^2 = x$ sivuavat toisiaan yhdessä pisteessä.

## 2.13 Eksponenttifunktioita ja polynomeja

L'Hopitalin sääntö on eräs raja-arvoja tulkittaessa hyödyllinen sääntö:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} \to \infty/\infty \Rightarrow \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(Huom: Mikäli tätä sääntöä ei mainita tehtävänannossa, tehtävässä ei ole tarkoitus käyttää kyseistä sääntöä, varsinkaan ylioppilaskokeessa)

Osoita L'Hopitalin säännön avulla, että mikä tahansa eksponenttifunktio $a^x$, $a > 1$ saa jollakin x>0 suurempia arvoja kuin mikä tahansa äärellisesti määritelty polynomi.

## 2.14 Nelikulmion trigonometriaa

Olkoon ABCD nelikulmio siten, että sivujen pituudet ovat: $AB = 4$, $BC = 2$ ja $CD = AD = \sqrt{10}$. Samalla tunnetaan, että kulmat ABC ja CDA ovat suoria kulmia.

Ratkaise kulmalle $\alpha = DAB$ termin $\cos(\alpha)$ tarkka arvo.

## 2.15 Lammas niityllä (K2020 Preliminäärikoe)

Lammas sidotaan niityllä rautakankeen metrin pituisella köydellä, jolloin se syö ympyränmuotoisen alueen ruohoa. Seuraavaksi rautakanki sijoitetaan syntyneen ympyrän kehälle. Kuinka pitkään köyteen lammas tulee nyt laittaa, jotta se pystyisi syömään saman verran ruohoa kuin aluksi?

## 2.16 Käyrä ja normaali (S1994 / 10)

Pisteen $(1, 2)$ kautta kulkee käyrä $k$, jonka mielivaltaiseen pisteeseen $(x, y)$ asetettu normaali kulkee pisteen $(\frac{x}{3}, 0)$ kautta. Määritä käyrä yhtälö.

Ratkaise tehtävä tulkitsemalla käyrä sopivaksi yhdistetyksi funktioksi ja laajenna funktio käyräksi.

Vihje: $f(x) = \pm\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2f(x)}$

## 2.17 Juurivertailua (K1989 / 4b)

Perustele laskemalla kumpi seuraavista luvuista on suurempi:

$$\sqrt[3]{1 + \sqrt[6]{10^{-1001}}},\ \sqrt[6]{1 + \sqrt[3]{10^{-1001}}}$$

## 2.18 Potensseja

Osoita, että luku $1001^{20222} - 9812521849^2$ on jaollinen luvulla 10.

## 2.19 Jaollisuuksia

Osoita induktiolla, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla $n$ luku $3^{3n+3} - 26n - 27$ on jaollinen luvulla 169.

## 2.20 Kiintopisteen olemassaolo

Olkoon g(x) jatkuva funktio vähintään välillä $0 \leq x \leq 1$. Funktiolle tunnetaan g(0)>1 ja g(1)<0. Osoita, että funktiolla g(x) on kiintopiste.

## 2.21 Todennäköisyyksiä ja simulointia 2

Tutkitaan tilannetta, jossa valitaan satunnainen piste pisteiden $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, -1)$, $(-1, 1)$ muodostaman neliön sisältä. Kullakin pisteellä on täsmälleen sama todennäköisyys tulla valituksi. Millä todennäköisyydellä kyseinen piste on myös yksikköympyrän sisällä?

a) Ratkaise analyyttisesti todennäköisyys edellämainitulle tilanteelle.

b) Yrjö pyrkii simuloimalla tuhatta satunnaista pistettä arvioimaan a-kohdan todennäköisyyttä. Tutki simuloimalla millä todennäköisyydellä Yrjön menetelmän virhe on alle $10^{-3}$.

c) Selvitä analyyttisesti b-kohdan todennäköisyys olettamalla a-kohdan todennäköisyys yksittäiselle pisteelle.

## 2.22 Yhtälöryhmän ratkaisu

Oletetaan seuraavan yhtälöryhmän pätevän:

$$\begin{cases} 6x - 8y - 15z = 524 \\ 52x + 18y + z = 1310 \end{cases}$$

Ratkaise arvo summalle $x + y + z$.

## 2.23 Factorion

Factorion on lukutyyppi, joka on kokonaisluku $d_1 d_2 d_3 ... d_n$ ja sen numerot $d_1, d_2, ..., d_n$ toteuttavat seuraavan ehdon:

$$d_1 d_2 d_3 ... d_n = d_1! + d_2! + d_3! + ... + d_n!$$

Esimerkiksi luvulle 40585 pätee $40585 = 4! + 0! + 5! + 8! + 5!$.

a) Etsi jokin kolminuomeroinen factorion-luku.

b) Osoita, että factorion-lukuja ei ole olemassa luvuille, joissa on enemmän kuin 8 numeroa.

## 2.24 Kolmiulotteisia pinta-aloja

Funktio $f(x, y) = x^2 \cdot y$ muodostaa erään kolmiulotteisen pinnan. Laske pinnan pinta-ala, kun $0 \leq x \leq 4$ ja $0 \leq y \leq 2$. Numeerinen ratkaisu riittää.

### 2.25 Funktionaaliyhtälö

Funktionaaliyhtälöissä yhtälön muuttuja on jokin funktio ja usein tämän funktion muoto on olennaista selvittää.

a) Osoita, että $f(x) = cx$ on eräs ratkaisu Cauchyn funktionaaliyhtälöön: $f(x+y) = f(x) + f(y)$ $c \in \mathbb{R}$.

b) Oletetaan, että funktiolle $g(x)$ pätee: $g(x+y) = g(x)+g(y)+2xy$. Ratkaise tästä yhtälöstä $g(x)$.

### 2.26 Osittaisdifferentiaaliyhtälö

Lämpöyhtälö kuvaa lämmön kulkeutumista tilassa. Se on eräs tärkeimmistä mallinnuksen välineistä fysiikassa. Linkki simulaatioon yhtälön toiminnasta https://editor.p5js.org/simontiger/full/EaHr9886H

Lämpöyhtälö on muotoa:

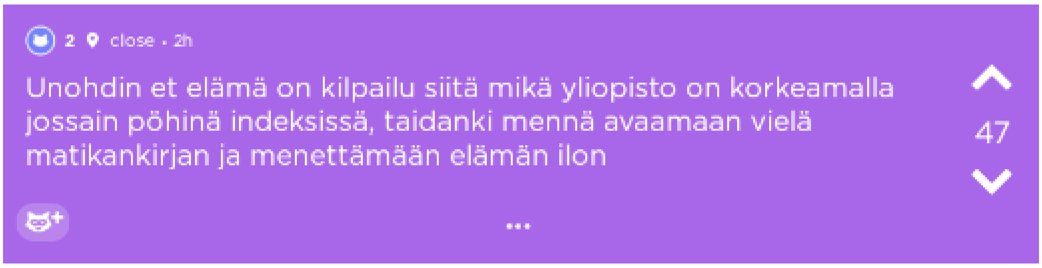
$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

Funktio toteuttaa lämpöyhtälön, jos kyseinen yhtälö pitää paikkansa kyseiselle funktiolle.

Jos funktio $f(x,t)$ toteuttaa lämpöyhtälön, osoita että:

a) Funktio $g(x,t) = c^2 \cdot f(x,t)$, $c \in \mathbb{R}$ toteuttaa lämpöyhtälön

b) Funktio $h(x,t) = f(c \cdot x, c^2 \cdot t)$, $c \in \mathbb{R}$ toteuttaa lämpöyhtälön.




Kuva 2: Elämän tarkoituksesta

## 2.27 Toistuvia desimaalilukuja

a) Osoita, että jokainen luku $n \in \mathbb{N}$ tuottaa desimaaliluvun muotoa $0.\overline{n}$, kun luku n jaetaan luvulla $10^d - 1$, jossa d on luvun n numeroiden määrä.

Esimerkiksi $n = 123$ (luvussa on 3 numeroa, joten $d = 3$)

$$\frac{123}{10^3 - 1} = 0.123123123... = 0.\overline{123}$$

b) Tutki, että tämä pätee myös varmasti tilanteessa, jossa $n = 10^r - 1$, kun $r = 1, 2, 3, ....$

c) Osoita, että vain yksi luku $n \in \mathbb{N}$ toteuttaa seuraavan yhtälön:

$$\frac{1}{n} = 0.\overline{n}$$

Vihje c-kohta: Tämä ratkaisu on helppo löytää, mutta tämä ratkaisu tulee osoittaa ainoaksi mahdolliseksi ratkaisuksi. Tällöin on järkevää tutkia yleisen tilanteen jaollisuutta luvun 4 kanssa.

## 2.28 Pallon tilavuus

Osoita pallon tilavuuden kaava integroimalla.

## 2.29 Aritmeettinen lukujono

Olkoon $a_n$ aritmeettinen lukujono, jolle pätee $a_1 = 1$ ja $a_n \neq a_{n+1}$. Samalla kaikilla $n \geq 1$ suhde $\frac{a_{2n}+a_{2n-1}+...+a_{n+1}}{a_n+a_{n-1}+...+a_1}$ on arvosta n riippumaton vakio. Ratkaise arvo $a_{23}$

## 2.30 Lattia- ja kattofunktioita

Lattiafunktio $\lfloor x \rfloor$ saa arvokseen suurimman kokonaisluvun, joka on pienempi tai yhtäsuuri kuin $x$. Vastaavasti kattofunktio $\lceil x \rceil$ saa arvokseen pienimmän kokonaisluvun, joka on suurempi tai yhtäsuuri kuin $x$.

Ratkaise yhtälö

$$\left\lfloor x - \left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil \right\rfloor = 3$$

## 2.31 Autoilua lukusuoralla

Auto lähtee liikkeelle luvun 2 kohdalta positiiviseen suuntaan lukusuoralla. Sen tankissa on 2 litraa polttoainetta lähtöhetkellä ja se käyttää jokaista yksikköväliä kohden litran polttoainetta. Jokaisen alkuluvun $p > 2$ kohdalla, autoon lisätään $p$ litraa polttoainetta. Kuinka pitkälle polttoaine riittää?

Hyödynnä tulosta: $\forall n \in \mathbb{N} > 1 \quad \exists$Alkuluku $P \in (n, 2n)$

## 2.32 Integrointia ja lukujonoja

Muodostetaan rekursiivinen lukujono, jolle $a_1 = \sqrt{x}$ ja $a_{n+1} = \sqrt{x + a_n}$.

a) Muodosta rekursiivisen kaavan mukainen päättymätön muoto termin $a_n$ raja-arvolle.

Määritellään sitten:

$$A(x) = \lim_{n \to \infty} a_n$$

b) Ratkaise integraali

$$\int A(x)dx$$

## 2.33 Moniulotteisia vektoreita

Vektorit $u$ ja $v$ ovat 7-ulotteisia vektoreita (vektoreita, joilla on enimmillään 7 komponenttia). Edellämainituille vektoreille $u$, $v$ ja vektorille $u - v$ tunnetaan, että niiden pituus on $2\sqrt{2}$. Ratkaise vektorin $u + v$ pituudelle ja vektorien $u$ ja $v$ väliselle kulmalle tarkat arvot.

Vektorien pistetulo käyttäytyy korkeammissa ulottuvuuksissa samalla tavalla kuin 2 tai 3 ulottuvuudessa.

## 2.34 Simpsonin virhe

Oletetaan että $n$ viittaa Simpsonin säännöllä käytettävään välien määrään. Muodosta funktio $v(a)$, joka tuottaa mielivaltaisella $a > 0$ tarvittavien välien määrän, jotta Simpsonin säännön absoluuttinen virhe on varmasti alle 0.01 seuraavalle integraalille:

$$\int_0^a e^{x^2} dx$$

## 2.35 Samansuuruisia kolmioita

Oletetaan, että $f(x)$ on funktio, joka ottaa sisään positiivisen arvon $x$ ja saa arvokseen positiivisen arvon. Funktion mihin tahansa pisteeseen $x_0 > 0$ piirretty tangentti muodostaa positiivisten koordinaattiakselien kanssa yhtäsuuren kolmion.

Ratkaise funktion yleinen muoto $f(x)$ ja yksittäinen funktio $g(x)$, jolle muodostuvien kolmioiden pinta-ala on 2.

## 2.36 Funktioita ja käänteisfunktioita

Oletetaan, että $f$ on jokin aidosti kasvava tai aidosti laskeva kahdesti derivoituva funktio ja $g$ on funktion $f$ käänteisfunktio.

Osoita seuraava yhteys ja varmista yhteys konkreettisesti jollakin funktiolla.

$$g''(x) = -\frac{f''(g(x))}{(f'(g(x)))^3}$$

## 2.37 Funktioiden parillisuuksia

Funktio on parillinen, jos funktiolle $f$ pätee $f(x) = -f(x)$ ja pariton, jos funktiolle pätee $f(x) = -f(-x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

a) Oletetaan, että funktiolle $f$ pätee $f(x)+f^{-1}(x) = x$, jossa $f^{-1}(x)$ on funktion $f$ käänteisfunktio, joka on olemassa. Osoita, että funktio $f$ on pariton funktio.

b) Osoita, että $f'(x)$ on parillinen funktio.

Vihje: Älä tutki funktion f' parillisuutta b-kohdassa, tutki yleisempää tilannetta.

## 2.38 Vektorituloja ja geometriaa

Kahden vektorin välinen ristitulo tuottaa erityisesti kohtisuoran vektorin kahta muuta vektoria kohden. Yhtälössä alla $\overline{\mathrm{e}}$ on kohtisuora yksikkövektori vektoreihin $a$ ja $b$ nähden. Ristitulo määritellään seuraavasti:

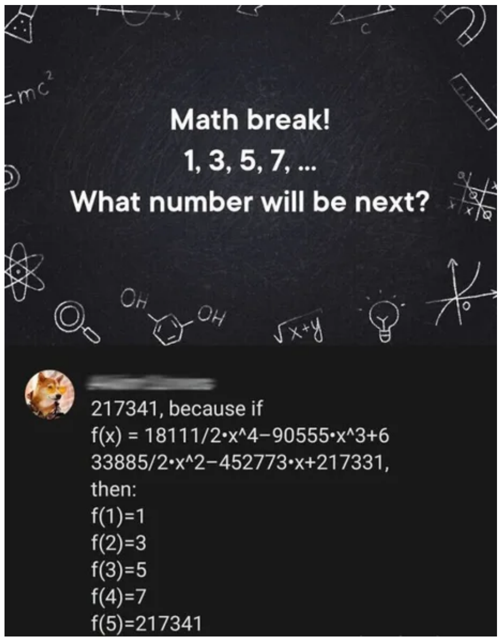
$$\overline{a} \times \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}| \sin(\overline{a}, \overline{b})\overline{\mathrm{e}}$$

a) Osoita, että vektorin $\overline{a} \times \overline{b}$ pituus on ristitulon vektorien "muodostaman" suunnikkaan pinta-ala.

b) Määritellään $\overline{abc} = (\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c}$ skalaarikolmituloksi. Osoita, että skalaarikolmitulon itseisarvo on kuusi kertaa niin suuri kuin kolmen kolmiulotteisen vektorin $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ muodostaman tetraedrin tilavuus.

..


Kuva 3: Tehtävän 2.34 implikaatio




Kuva 4: Miksi todistaminen on tärkeää

# 3 Lyhyet ratkaisut

2.1: $-\ln(2) \cdot 21!$

2.2:
a) $H(n+1) = H(n) + \frac{1}{n+1}$, $H(n-1) = H(n) - \frac{1}{n}$
b) $H(x+n) = H(x) + \Sigma_{i=1}^{n} \frac{1}{x+i}$
c) $H(x) = \Sigma_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} - \frac{1}{x+i}$

2.3: Osoitustehtävä

2.4: a) Katso malliratkaisu b) $\frac{1}{2}$

2.5: Katso malliratkaisu

2.6: $x = \frac{-\ln(4) - 5\ln(3)}{2\ln(4) - \ln(3)}$

2.7:
$\cos^{-1}(\cos(\pi)) = \pi$,
$\cos\left(\cos^{-1}(\pi)\right)$ ei ole määritelty reaaliluvuilla.

2.8:
a) $f(x) = -i \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
b) $\cos\left(\cos^{-1}(\pi)\right) = \pi$

2.9: noin 0.15

2.10: $c = e$

2.11:
b) $x = -e^{-W(\ln(\sqrt{2}))} \approx -0.76$

2.12: $3 \cdot 4^{-\frac{4}{3}}$

2.13: Osoitustehtävä

2.14: $\frac{\sqrt{10}}{10}$

2.15: 1.25m

2.16: $k: \ y^2 = \frac{2}{3}\left(7 - x^2\right)$

2.17: $\sqrt[3]{1 + \sqrt[6]{10^{-1001}}}$

2.18: Osoitustehtävä

2.19: Osoitustehtävä

2.20: Osoitustehtävä

2.21:
a) $\frac{\pi}{4} \approx 0.785$
c) noin 0.061

2.22: $x + y + z = 1$

2.23: a) 145

2.24: $A \approx 45$

2.25: b) $g(x) = x^2 + cx$, $c \in \mathbb{R}$

2.26: Osoitustehtävä

2.27: Osoitustehtävä

2.28: Osoitustehtävä

2.29: $a_{23} = 45$

2.30: $x = 6, \quad 7 \leq x < 8, \quad 8 < x < 9$

2.31: Äärettömän pitkälle

2.32:
a) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots}}}$
b) $\frac{1}{12}\sqrt{(4x+1)^3} + \frac{1}{2}x + C$

2.33:
$|u + v| = 2\sqrt{6}$
Vektorien välinen kulma: $\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$

2.34: $v(a) = \sqrt[4]{\frac{20 \cdot a^5 \cdot e^{a^2}(4a^4 + 12a^2 + 3)}{9}}$

2.35:
$f(x) = \frac{C}{x}$
$g(x) = \frac{1}{x}$

2.36: Osoitustehtävä

2.37: Osoitustehtävä

2.38: Osoitustehtävä

# 4 Malliratkaisut

## 4.1 Ratkaisu 2.1 (Derivaatta ja raja-arvoja)

$$f(x) = (2^x - 1)(2^x - 2)(2^x - 3)...(2^x - 22)$$

Muodostetaan derivaatan määritelmän mukainen muoto funktion derivaatalle kohdassa $x = 0$:

$$f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(2^x - 1)(2^x - 2)...(2^x - 22) - (2^0 - 1)(2^0 - 2)...(2^0 - 22)}{x}$$

Jälkimmäinen osoittajan tulo on yhtä suuri kuin 0 ensimmäisen termin perusteella

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(2^x - 1)(2^x - 2)...(2^x - 22)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{x} \cdot (2^x - 2)...(2^x - 22)$$

Tehtävänannosta tunnetaan, että:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{x} = \ln(2)$$

Tämä arvo voidaan sijoittaa edelliseen raja-arvoon vastaavaan kohtaan sijoittaessa muita raja-arvon termejä:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{x} \cdot (2^x - 2)...(2^x - 22)$$

Sijoitetaan arvo $x = 0$ lausekkeeseen:

$$= \ln(2) \cdot (2^0 - 2)...(2^0 - 22) = \ln(2) \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot ... \cdot (-21)$$

$$= -\ln(2) \cdot 21!$$

## 4.2 Ratkaisu 2.2 (Harmonisia reaalilukuja)

$$H\left(n\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}, n \in \mathbb{N}$$

a)

Summaa tutkimalla saadaan:

$$H\left(n+1\right) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} + \frac{1}{n+1} = H(n) + \frac{1}{n+1}$$

Vastaavasti:

$$H\left(n-1\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \frac{1}{n} = H(n) - \frac{1}{n}$$

b)

Edellisestä kohdasta voidaan yksiselitteisesti tehdä jatke reaaliluvuille, jos tunnetaan jokin reaaliluku, joka täyttää halutun ehdon. Tällöin arvo $x$ voidaan suoraan sijoittaa arvon $n$ paikalle:

$$H\left(x+1\right) = H(x) + \frac{1}{x+1}, H\left(x-1\right) = H(x) - \frac{1}{x}$$

Nämä muodot vastaavat tilannetta, jossa $n = 1$. Tutkitaan tilannetta, yleisellä arvolla $n$:

$$H(x+n) = H(x+n-1) + \frac{1}{x+n} = ... = H(x) + \frac{1}{x+1} + ... + \frac{1}{x+n}$$

Tästä saadaan muoto:

$$H(x+n) = H(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x+i}$$

c)

Tutkitaan raja-arvoa:

$$\lim_{n\to\infty} H(n) - H(x+n), x \in \mathbb{R}$$

Harmoniselle sarjalle tunnetaan, että se kasvaa erittäin hitaasti suurilla n:n arvoilla, jolloin voidaan tehdä johtopäätös, että:

$$\lim_{n\to\infty} H(n) - H(x+n) = 0, x \in \mathbb{R}$$

Siten:

$$\lim_{n\to\infty} H(n) - H(x+n) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - H(x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x+i} = 0$$

$$\Rightarrow H(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \frac{1}{x+i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} - \frac{1}{x+i}$$

Ekstraa:

Erityisesti $H(x)$ on eräs digammafunktion versio: $H(x) = \psi(x+1) + e_\gamma$.

Digammafunktio $\psi(x)$ ja Euler-Macheronin vakio $e_\gamma$ voidaan määritellä seuraavasti:

$$\psi(x) = \frac{\frac{d}{dx}\left((x-1)!\right)}{(x-1)!}, \quad e_\gamma = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln(n)$$

Tämän tuloksen saa esimerkiksi Geogebran Summa-toiminnolla seuraavasti:

```
H(x):=Summa(1/k-1/(x+k),k, 1, ∞)
```

$$\rightarrow \quad H(x) := \psi(x+1) + e_\gamma$$

### 4.3 Ratkaisu 2.3 (Osittaisintegroinnin kaava)

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int g'(x)f(x)dx$$

$$\Leftrightarrow \int f'(x)g(x)dx + \int g'(x)f(x)dx = f(x)g(x)$$

$$\Leftrightarrow \int f'(x)g(x) + g'(x)f(x)dx = f(x)g(x)$$

Osoitetaan yhtäsuuruuden pitävyys.

Tunnetaan, että:

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

Integraali ja derivaatta kumoavat toisensa analyysin peruslauseen perustein, jolloin saadaan:

$$\int f'(x)g(x) + g'(x)f(x)dx = \int \frac{d}{dx}(f(x)g(x))dx = f(x)g(x)$$

Vastaavasti jos

$$\int f'(x)g(x) + g'(x)f(x)dx = f(x)g(x)$$

niin

$$\int_a^b f'(x)g(x) + g'(x)f(x)dx = \Big/_a^b f(x)g(x)$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b f'(x)g(x) = \Big/_a^b f(x)g(x) - \int_a^b g'(x)f(x)dx$$

### 4.4 Ratkaisu 2.4 (Napakoordinaatisto)

a) Koordinaatit voidaan määrittää yksiselitteisesti trigonometristen funktioiden avulla tietyllä säteellä origosta, jolloin xy-koordinaatiston piste (x,y) on napakoordinaateissa (r,$\theta$) muotoa:

$x = r \cdot cos(\theta)$, $y = r \cdot sin(\theta)$

b) Raja-arvotehtävässä on järkevää muuttaa tehtävä napakoordinaatteihin, jolloin riippumatta suuntakulmasta $\theta$ origoa (0,0) voidaan käytännössä tutkia sädetermin r yhden muuttujan raja-arvotehtävänä.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}-1}{x^2+y^2}$$

Lavennetaan neliöjuuritermi pois osoittajasta:

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}-1}{x^2+y^2} \cdot \frac{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}+1}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}+1}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(1+x^2)(1+y^2)-1}{(x^2+y^2)(\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}+1)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2+x^2y^2}{(x^2+y^2)(\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}+1)}$$

Muutetaan napakoordinaateiksi, jolloin $x = r \cdot cos(\theta)$, $y = r \cdot sin(\theta)$. Tunnetusti myös $cos^2(\theta) + sin^2(\theta) = 1$

Olennaisena ideana on, että raja-arvo lähestyy origoa riippumatta kulmasta, jos säde lähestyy nollaa. Tällöin kahden muuttujan raja-arvo muuttuu käytännössä yhden muuttujan raja-arvoksi.

$$= \lim_{(r,\theta)\to(0,\theta)} \frac{r^2cos^2(\theta)+r^2sin^2(\theta)+r^4sin^2(\theta)cos^2(\theta)}{(r^2cos^2(\theta)+r^2sin^2(\theta))(\sqrt{1+r^2cos^2(\theta)+r^2sin^2(\theta)+r^4sin^2(\theta)cos^2(\theta)}+1)}$$

$$= \lim_{(r,\theta)\to(0,\theta)} \frac{r^2(cos^2(\theta)+sin^2(\theta))+r^4sin^2(\theta)cos^2(\theta)}{(r^2(cos^2(\theta)+sin^2(\theta)))(\sqrt{1+r^2(cos^2(\theta)+sin^2(\theta))+r^4sin^2(\theta)cos^2(\theta)}+1)}$$

$$= \lim_{(r,\theta)\to(0,\theta)} \frac{r^2+r^4sin^2(\theta)cos^2(\theta)}{r^2(\sqrt{1+r^2+r^4sin^2(\theta)cos^2(\theta)}+1)}$$

$$= \lim_{(r,\theta)\to(0,\theta)} \frac{r^2(1 + r^2 sin^2(\theta)cos^2(\theta))}{r^2(\sqrt{1 + r^2 + r^4 sin^2(\theta)cos^2(\theta)} + 1)}$$

$$= \lim_{(r,\theta)\to(0,\theta)} \frac{1 + r^2 sin^2(\theta)cos^2(\theta)}{\sqrt{1 + r^2 + r^4 sin^2(\theta)cos^2(\theta)} + 1}$$

Tehdään raja-arvon mukainen sijoitus $r = 0$, jolloin saadaan:

$$= \frac{1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{2}$$

### 4.5 Ratkaisu 2.5 (Yhtälönratkaisu sijoituksella)

Tehdään sijoitus $x^n = u$:

$$au^2 - bu + 1 = 0$$

Ratkaistaan tämä yhtälö 2. asteen ratkaisukaavalla:

$$u = \frac{-(-b) \pm \sqrt{(-b)^2 - 4a}}{2a}$$
$$\Leftrightarrow u = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2a}$$

Määrittelyehto $b^2 - 4a \geq 0 \Leftrightarrow b^2 \geq 4a$

Ratkaistaan x tämän perusteella.

Jos n on parillinen niin:

$$x^n = u \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[n]{u}, u \geq 0$$

Tällöin:

$$x = \pm \sqrt[n]{\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2a}}$$

Tutkitaan määrittelyehdot:

$$\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2a} \geq 0$$

Plus-merkkinen tilanne:

$$\frac{b + \sqrt{b^2 - 4a}}{2a} \geq 0$$

Tämä termi on pätevä ratkaisu, kun $a > 0$ ja $b^2 - 4a \geq 0$, joka voidaan yhdistää ehdoksi $b^2 \geq 4a > 0$

Miinus-merkkinen tilanne:

$$\frac{b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2a} \geq 0$$

Tällöin $b > \sqrt{b^2 - 4a} > 0 \ \wedge \ a > 0$, tai $b < \sqrt{b^2 - 4a} \ \wedge \ a < 0$

Tutkimalla ensimmäistä termiä on selvää, että a:n ollessa positiivinen, termi $\sqrt{b^2 - 4a}$ on pienempi kuin $\sqrt{b^2}$. Tällöin ratkaisu pätee, kun $\sqrt{b^2 - 4a}$ on määritelty, eli $b^2 \geq 4a$.

Toisen termin kohdalla voidaan tehdä vastaava analyysi, mutta huomataan, että termi $b^2 - 4a$ on aina positiivinen. Tällöin, jos $a < 0$ niin termi on yhtälön reaalinen ratkaisu kaikilla b:n arvoilla.

Jos n on pariton, niin

$$x^n = u \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{u}, u \in \mathbb{R}$$

Tällöin ratkaisut:

$$x = \pm \sqrt[n]{\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2a}}$$

on määritelty kaikilla a:n ja b:n arvoilla, kun ehto $b^2 - 4a > 0 \Rightarrow b^2 > 4a$ on tosi.

### 4.6 Ratkaisu 2.6 (Eksponenttiyhtälö)

$$4^{2x+1} = 3^{x-5}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(4^{2x+1}\right) = \ln\left(3^{x-5}\right)$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)\ln 4 = (x-5)\ln 3$$

$$\Leftrightarrow 2x\ln 4 + \ln 4 = x\ln 3 - 5\ln 3$$

$$\Leftrightarrow 2x\ln 4 - x\ln 3 = -\ln 4 - 5\ln 3$$

$$\Leftrightarrow x(2\ln 4 - \ln 3) = -\ln 4 - 5\ln 3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-\ln 4 - 5\ln 3}{2\ln 4 - \ln 3}$$

### 4.7 Ratkaisu 2.7 (Trigonometriset funktiot)

$$\cos^{-1}(\cos(\pi))$$

Tunnetaan: $cos(\pi) = -1$

$$\cos^{-1}(-1) = \pi$$

$$\cos\left(\cos^{-1}(\pi)\right)$$

Arkuskosinifunktion määrittelyjoukko on välillä $[-1, 1]$. Tämän perustein termiä $\cos^{-1}(\pi)$ ei ole määritelty, jolloin tehtävässä esitettyä termiä ei ole myöskään määritelty.

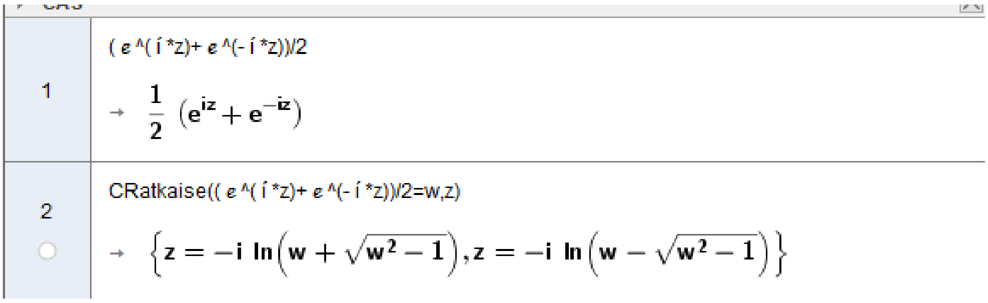
## 4.8 Ratkaisu 2.8 (Kompleksisia trigonometrisiä funktioita)

a)

Käänteisfunktio määritellään siten, että jos $g(f(x)) = x$ niin funktio $g$ on funktion $f$ käänteisfunktio ja toisin päin.

Vaihtoehtoisesti käänteisfunktion voi ratkaista lausekkeelle $f(x) = y$ muodon x:lle y:n suhteen.

Jälkimmäisellä idealla tehtävään sopivan funktion voisi ratkaista laskimella seuraavasti:




Kuva 5: Funktion ratkaisu laskimella

Vaihtoehtoisesti tehtävän voi myös ratkaista algebrallisesti muistamalla kompleksilukujen laskusäännöt. Kerrotaan lauseke puolittain vihjeen innoittamana sopivalla termillä:

$$\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = w \Rightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 2w \mid \cdot e^{iz}$$

$$\Rightarrow e^{iz} \cdot e^{iz} + e^{-iz} \cdot e^{iz} - 2w \cdot e^{iz} = 0$$

$$\Rightarrow (e^{iz})^2 - 2w \cdot e^{iz} + 1 = 0$$

Hyödynnetään 2. asteen ratkaisukaavaa

Tehdään sijoitus $x = e^{iz}$

$$\Rightarrow x^2 - 2w \cdot x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2w \pm \sqrt{4w^2 - 4}}{2} = w \pm \sqrt{w^2 - 1}$$

Sijoittamalla takaisin x:n yhtälöön ratkaistaan z:

$$e^{iz} = w \pm \sqrt{w^2 - 1} \Rightarrow iz = \ln(w \pm \sqrt{w^2 - 1}) \mid \cdot -i$$

$$z = -i \cdot \ln(w \pm \sqrt{w^2 - 1})$$

Otetaan tästä yhtälöstä tehtävänannon mukaisesti vain positiivinen versio, jolloin funktioksi saadaan:

$$f(x) = -i \cdot \ln(w + \sqrt{w^2 - 1})$$

b)

Tutkitaan sitten termiä $\cos\left(\cos^{-1}(\pi)\right)$

a-kohdan perusteella

$$\cos^{-1}(\pi) = -i \cdot \ln(\pi + \sqrt{\pi^2 - 1})$$

$$\cos\left(\cos^{-1}(\pi)\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i\cdot(-i\cdot\ln(\pi+\sqrt{\pi^2-1}))} + e^{-i\cdot(-i\cdot\ln(\pi+\sqrt{\pi^2-1}))}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{\ln(\pi+\sqrt{\pi^2-1})} + e^{-\ln(\pi+\sqrt{\pi^2-1})}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\pi + \sqrt{\pi^2 - 1} + \frac{1}{\pi + \sqrt{\pi^2 - 1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\pi + \sqrt{\pi^2 - 1} + \frac{\pi - \sqrt{\pi^2 - 1}}{(\pi + \sqrt{\pi^2 - 1})(\pi - \sqrt{\pi^2 - 1})}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\pi + \sqrt{\pi^2 - 1} + \frac{\pi - \sqrt{\pi^2 - 1}}{\pi^2 - \pi^2 + 1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\pi + \sqrt{\pi^2 - 1} + \pi - \sqrt{\pi^2 - 1}\right) = \pi$$

## 4.9 Ratkaisu 2.9 (Todennäköisyyksiä ja simulointia)

Todennäköisyys, että ympyrän sisällä oleva piste on satunnaisen kolmion sisällä, on kolmion pinta-ala jaettuna ympyrän pinta-alalla. Voidaan olettaa, että todennäköisyys saada kaksi täsmälleen samaa kehäpistettä on 0.

Selvitetään simuloimalla keskiarvo kolmion pinta-alalle. Tässä ratkaisuvaihtoehdossa on esitetty eräs tapa muodostaa kolmen satunnaisen pisteen pinta-ala kolmiolle.

Muodostetaan ensin kaava kolmen satunnaisen pisteen muodostaman kolmion (ABC) pinta-alalle.

Satunnaisesti muodostettujen pisteiden A ja B kautta kulkee suora s.

Suoran kulmakerroin on muotoa:

$$k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Jolloin suoran yhtälö on muotoa

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$$

Tällöin suora on normaalimuodossa

$$0 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}x - y + y_A - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}x_A$$

Kolmion korkeus on kolmannen pisteen $(x_C, y_C)$ etäisyys tästä suorasta:

$$h = \frac{\left|\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}x_C - y_C + y_A - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}x_A\right|}{\sqrt{\left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right)^2 + 1^2}}$$

Ja kannan pituus on muotoa

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Kolmion pinta-ala saadaan siten kaavalla $\frac{1}{2}hd$. Simuloidaan nyt satunnaisia pisteitä taulukkolaskentaohjelmistolla. Ratkaisussa hyödynnetään englanninkielistä versiota libreoffice calc:ista, joka löytyy Abitista.

Pisteiden koordinaatit ovat muotoa $(\cos(t), \sin(t))$, jossa t on satunnaisluku välillä [0,2pi].

Funktio RAND(), muodostaa tasajakautuneesti satunnaisen reaaliluvun väliltä [0,1]. Kerrotaan tämä 2pi:llä (PI()), jolloin saadaan tasajakautunut satunnainen piste yksikköympyrän kehällä.

Ole kuitenkin tarkkana, että onko taulukkolaskimessa käytössä radiaanit vai asteet!

```
Käyetyt kaavat:
t_A : =2*PI()*RAND()
t_B : =2*PI()*RAND()
t_C : =2*PI()*RAND()
AT1 : =(SIN(t_B)-SIN(t_A))/(COS(t_B)-COS(t_A))
AT2 : =ABS(AT1*COS(t_C)-SIN(t_C)+SIN(t_A)-AT1*COS(t_A))
AT3 : =SQRT((AT1)^2+1)
h_kolmio : =AT2/AT3
d_kolmio : =SQRT((COS(t_B)-COS(t_A))^2+(SIN(t_B)-SIN(t_A))^2)
A_kolmio : =1/2*h_kolmio*d_kolmio
```

Simuloimalla 10000 kertaa vastaavan kolmion muodostumista saadaan keskimääräiseksi pinta-alaksi n. $0,48$.

Tästä voidaan ratkaista todennäköisyys, että satunnainen ympyrän sisällä oleva piste on kolmion sisällä:

$$\frac{0.48}{\pi} = 0.1527887\cdots \approx 0.15$$

## 4.10 Ratkaisu 2.10 (Eksponenttifunktioita)

Muokataan ensin lauseketta $a^b > b^a$:

$$a^b > b^a \mid ()^{\frac{1}{ab}}$$

$$a^{\frac{b}{ab}} > b^{\frac{a}{ab}}$$

$$a^{\frac{1}{a}} > b^{\frac{1}{b}}$$

Mielletään tämä yhtenä funktiona $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

Vertailemalla kahta ehtona saatua epäyhtälöä voidaan huomata, että nyt tulee etsiä arvo c, jolla $c \leq a < b$, kun $a^{\frac{1}{a}} > b^{\frac{1}{b}}$. Toisin sanoen, nyt tulee etsiä arvovälit, jota suuremmilla arvoilla funktio f on laskeva. (Määrittelyehto: x>0, koska c määritellään positiiviseksi.)

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}}$$

$$= e^{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)} = e^{\frac{1}{x}\ln(x)}$$

Derivoidaan (tämän voi tehdä suoraan myös laskimella)

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}\ln(x)} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$$

$$= e^{\frac{1}{x}\ln(x)} \cdot \frac{1-\ln(x)}{x^2} = e^{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)} \cdot \frac{1-\ln(x)}{x^2} = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

Tutkitaan sitten derivaatan nollakohtia. Eksponentiaalifunktioiden ominaisuuksista tunnetaan, että $x^{\frac{1}{x}}$ on aina positiivinen. Tällöin riittää tutkia, milloin jälkimmäinen termi on 0:

$$\frac{1-\ln(x)}{x^2} = 0$$

x>0, riittää tutkia osoittajaa.

$$1 - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$$

Tutkitaan sitten funktion kulkua. Funktio on selvästi jatkuva määrittelyjoukossaan.

Tällöin riittää tutkia arvoja derivaatan nollakohdan ympärillä.

Testiarvoiksi saadaan laskimella: $f'(1) = 1$ ja $f'(3) \approx -0.016$

Tämän perusteella tehtävässä esitetyt epäyhtälöt pätevät, kun c=e.

### 4.11 Ratkaisu 2.11 (Lambert W)

a)

Tutkitaan jatkuvaa funktiota $f(x) = x^2 - 2^x$.

Testiarvoilla voidaan muodostaa seuraavat välit, joissa funktion etumerkki vaihtuu:

$f(-1) = \frac{1}{2}, f(0) = -1, f(3) = 1, f(5) = -7$

Tällöin Bolzanon lauseeseen nojaten jatkuvalla funktiolla f(x) on kolme nollakohtaa, jotka sijaitsevat väleillä:

$-1 < x < 0, 0 < x < 3, 3 < x < 5$

Kaksi nollakohtaa on myös helppo löytää mikäli kokonaislukuja antaa testiarvoiksi sopivasti, jolloin välin $0 < x < 1$ perustelu Bolzanon lauseella riittää.

b)

$$x^2 = 2^x \mid ln()$$

$$\ln(x^2) = x\ln(2)$$

Koska yhtälön termit on määritelty kaikilla reaaliluvuilla pl. x=0, niin muokatessa vasenta puolta yhtälöstä tulee termin ln(x) sisälle jättää x:n itseisarvo.

$$2\ln|x| = x\ln(2)$$

$$x^{-1}\ln|x| = \frac{1}{2}\ln(2) \Leftrightarrow x^{-1}\ln|x| = \ln(\sqrt{2})$$

**Jos x>0, niin**:

$$x^{-1}\ln(x) = \ln(\sqrt{2}) \mid \cdot(-1)$$

$$-e^{\ln(x^{-1})}\ln(x) = -\ln(\sqrt{2})$$

$$e^{-\ln(x)}(-\ln(x)) = -\ln(\sqrt{2}) \mid W()$$

$$-\ln(x) = W\left(-\ln(\sqrt{2})\right) \Rightarrow x = e^{-W\left(-\ln(\sqrt{2})\right)}$$

Laskimella saadaan tämän lausekkeen arvoksi $x = 2$, jolloin tämä ratkaisu ei käy tehtävänannon ratkaisuksi.

**Jos x<0, niin**:

$$x^{-1}\ln(-x) = \ln(\sqrt{2}) \mid \cdot(-1)$$

$$-x^{-1}\ln(-x) = -\ln(\sqrt{2})$$

$$e^{\ln((-x)^{-1})}\ln(-x) = -\ln(\sqrt{2})$$

$$e^{-\ln(-x)}\ln(x) = -\ln(\sqrt{2}) \mid \cdot(-1)$$

$$-e^{-\ln(-x)}\ln(x) = \ln(\sqrt{2}) \mid W()$$

$$-\ln(-x) = W\left(\ln(\sqrt{2})\right) \Leftrightarrow x = -e^{-W\left(\ln(\sqrt{2})\right)}$$

Tämän luvun likiarvo on -0,76 ja laskimella voidaan kokeilla, että termi toteuttaa tehtävänannon yhtälön. Tällöin arvo $x = -e^{-W\left(\ln(\sqrt{2})\right)}$ on reaalinen ratkaisu yhtälölle $x^2 = 2^x$, joka ei kuulu kokonaislukujen joukkoon.

### 4.12 Ratkaisu 2.12 (Paraabeleita)

Koska ensimmäinen paraabeli aukeaa ylöspäin ja toinen paraabeli aukeaa normaalissa xy-koordinaatistossa oikealle, tulee funktioiden sivuta koordinaatiston jossakin ensimmäisen neljänneksen pisteessä. Tällöin voidaan muodostaa funktio y:n suhteen jälkimmäisestä paraabelista ensimmäisessä neljänneksessä.

$$y^2 = x \Leftrightarrow y = \sqrt{x}$$

Tutkitaan tällöin yhtälöä

$$\sqrt{x} = x^2 + c$$

Samalla tunnetaan, että kyseisessä pisteessä funktioiden derivaatan arvot ovat yhtä suuret

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \frac{d}{dx}(x^2 + c) = 2x$$

Tästä yhtälöstä voidaan ratkaista x:n arvo, jolloin:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x \Rightarrow 4x^{\frac{3}{2}} = 1 \Rightarrow x = 4^{-\frac{2}{3}}$$

Sijoitetaan tämä arvo takaisin ensimmäiseen yhtälöön:

$$c = \sqrt{4^{-\frac{2}{3}}} - \left(4^{-\frac{2}{3}}\right)^2$$

$$c = 4^{-\frac{1}{3}} - 4^{-\frac{4}{3}}$$

$$c = 4^{-\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$c = \frac{3 \cdot 4^{-\frac{1}{3}}}{4} = 3 \cdot 4^{-\frac{4}{3}}$$

## 4.13 Ratkaisu 2.13 (Eksponenttifunktioita ja polynomeja)

Tutkitaan raja-arvoa

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{a^x}$$

Jossa a>1 ja $P(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + ... + c_2x^2 + c_1x + c_0$ jollain reaalisilla vakiokertoimilla.

Tunnetaan, että $a^x \to \infty$, kun $x \to \infty$.

Oletetaan sitten, että P(x) kasvaa rajatta, kun x kasvaa tarpeeksi suureksi, eli $c_n > 0$. Jos suurimman asteen monomilla olisi negatiivinen etumerkki, eksponenttifunktio saa varmasti suurempia arvoja kuin polynomifunktio, koska $P(x) \to -\infty$, kun $x \to \infty$.

Tällöin

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{a^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Hyödynnetään L'Hopitalin sääntöä

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{a^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{P'(x)}{\frac{d}{dx}(a^x)}$$

Tunnetaan, että $\frac{d}{dx}(a^x) = \ln(a)a^x$. Tämä funktio on varmasti positiivinen kaikilla x>0.

Vastaavasti $P'(x) = nc_n x^{n-1} + (n-1)c_{n-1}x^{n-2} + ... + 2c_2x + c_1$

Tämä vaihe johtaa uudestaan tilanteeseen, jossa

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P'(x)}{\frac{d}{dx}(a^x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

Kummankin funktion derivaattojen käyttäytyminen on ilmeistä derivaatan sääntöjen perusteella, ja jokainen derivaatta n:nteen astelukuun asti tuottaa raja-arvon $\infty/\infty$. Hyödynnetään L'Hopitalin sääntöä n kertaa:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{a^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{P'(x)}{\frac{d}{dx}(a^x)} = ... = \lim_{x\to\infty} \frac{P^{(n)}(x)}{\frac{d^n}{dx^n}(a^x)}$$

n kertaluvun derivaatat ovat muotoa:

$$P^{(n)}(x) = n(n-1)...2 \cdot 1 \cdot c_n = n! \cdot c_n, \ \frac{d^n}{dx^n}(a^x) = (\ln(a))^n a^x$$

Tällöin raja-arvo on muotoa:

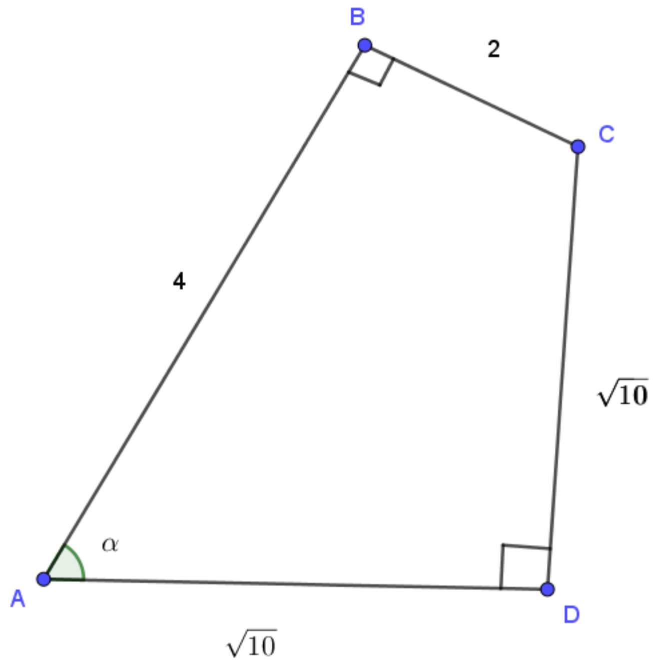
$$\lim_{x \to \infty} \frac{n! \cdot c_n}{(\ln(a))^n a^x}$$

Huomataan, että tämä raja-arvo selvästi lähestyy tilannetta $0/\infty$, koska eksponenttifunktio on ainoa x:stä riippuva termi. Tällöin voidaan L'Hopitalin säännön perustein tehdä johtopäätös, että alkuperäinen raja-arvo lähestyy arvoa 0.

Mikäli termien suhde lähestyy arvoa 0 niin silloin nimittäjän tulee saada huomattavasti suurempia arvoja kuin osoittajan, kun x kasvaa rajatta. Tämän perusteella ollaan osoitettu, että mikä tahansa eksponenttifunktio $a^x, \ a > 1$ saa jollakin $x > 0$ suurempia arvoja kuin mikä tahansa polynomi.

### 4.14 Ratkaisu 2.14 (Nelikulmion trigonometriaa)

Tarkastellaan havainnekuvaa:




Kuva 6: Havainnekuva tehtävä 2.14

Tunnetaan, että kosini suorakulmaisen kolmion kulmalle on kulman viereisen sivun ja hypotenuusan suhde.

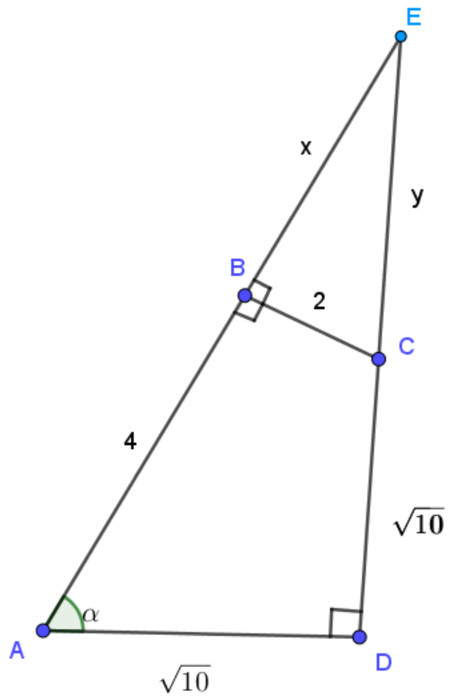
Täydennetään tämä nelikulmio suorakulmaiseksi kolmioksi (kts. kuva 7)

Todetaan, että tämä kokonainen suorakulmainen kolmio AED on yhtenevä kolmion BEC kanssa kahden yhteisen kulman perustein. (Vaihtoehtoisesti voi esim. tutkia pytagoraan lauseella muodostuvia yhtälöitä)

Tällöin tunnetaan:

$$\frac{\sqrt{10}}{4+x} = \frac{2}{y}$$

Vastaavasti suorakulmaiselle kolmiolle BEC




Kuva 7: Täydennetty suorakulmainen kolmio

$$x^2 + 2^2 = y^2$$

Siten voidaan ratkaista $y = \sqrt{x^2+4}$

Sijoittamalla tämän ensimmäiseen yhtälöön saadaan:

$$\sqrt{x^2+4}\sqrt{10} = 2x + 8$$

$$10x^2 + 40 = 4x^2 + 32x + 64 \Rightarrow 6x^2 - 32x - 24 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 16x - 12 = 0$$

2. asteen yhtälön ratkaisukaava

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{256 + 12 \cdot 12}}{6} \Rightarrow x = \frac{16 \pm \sqrt{400}}{6} \Rightarrow x\frac{16 \pm 20}{6}$$

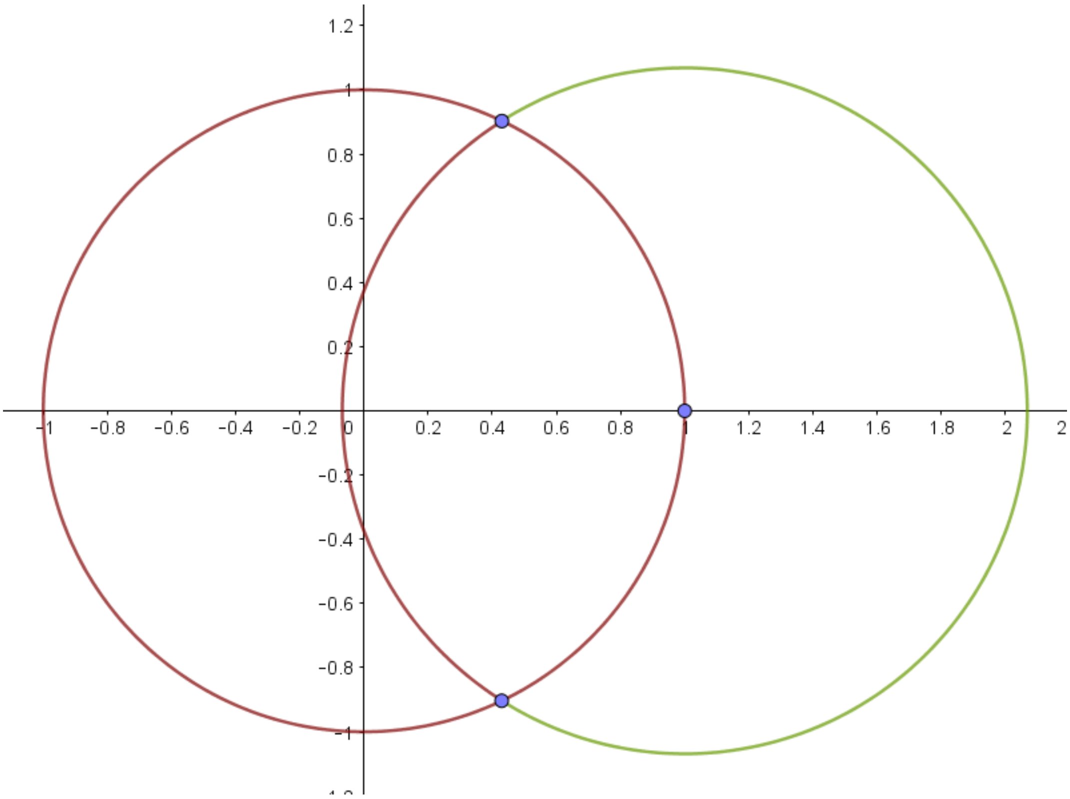
Tällöin saadaan x:n ratkaisuiksi $x = 6$ ja $x = -\frac{3}{2}$. Negatiivinen ratkaisu ei käy pituudeksi, jolloin määritellään $x = 6$.

Tällöin aikaisemmin todetun kosinin määritelmän avulla voidaan todeta, että

$$\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{10}}{4+6} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

## 4.15 Ratkaisu 2.15 (Lammas niityllä)

Mielletään tilanne seuraavan havainnollistavan kuvan avulla:




Kuva 8: Havainnollistava kuva 2.15

Tilanne on symmetrinen x-akselin suhteen, joten voidaan tutkia vain x-akselin yläpiolella olevaa tilannetta. Tällöin syntyvien ympyröiden kaaret voidaan mieltää yksimielisinä funktioina.

Alkuperäisen ympyrän kaaren funktio on $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \sqrt{1 - x^2}$ ja uuden ympyrän kaaren funktio on muotoa $(x-1)^2 + y^2 = r^2$ (r>0), joka sievenee muotoon $y = \sqrt{r^2 - x^2 + 2x - 1}$.

Tutkitaan millä x:n arvolla ympyrän kaaret leikkaavat:

$$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{r^2 - x^2 + 2x - 1} \Rightarrow 1 - x^2 = r^2 - x^2 + 2x - 1$$

Yhtälöstä ratkaistaan

$$2x = 2 - r^2 \Rightarrow x = 1 - \frac{r^2}{2}$$

Uuden alueen pinta-ala voidaan laskea sopivalla integraalilla.

Pinta-ala on muotoa:

$$2 \cdot \left( \int_{1-\frac{r^2}{2}}^{1} \sqrt{r^2 - x^2 + 2x - 1} - \sqrt{1 - x^2} dx + \frac{\pi r^2}{4} \right) = \pi$$

$$\int_{1-\frac{r^2}{2}}^{1} \sqrt{r^2 - x^2 + 2x - 1} - \sqrt{1 - x^2} dx + \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Ratkaistaan integraali laskimella kuvan 9 tavoin.

| | |
|---|---|
| 1 | f:=sqrt(1-x^2) <br> $\to f := \sqrt{-x^2 + 1}$ |
| 2 | g:=sqrt(r^2 - x² + 2x - 1) <br> $\to g := \sqrt{r^2 - x^2 + 2x - 1}$ |
| 3 | Solve(f=g) <br> $\to \left\{ x = \frac{-1}{2} r^2 + 1 \right\}$ |
| 4 | Integral(g-f,x) <br> $\to \frac{-1}{2} x \sqrt{-x^2+1} + 2 \left( \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \right) \sqrt{r^2 - x^2 + 2x - 1} - \frac{1}{2} r^2 \operatorname{sgn}(r) \sin^{-1}\left( \frac{-x+1}{r}\right.$ |
| 5 | Substitute($4,$3) <br> $\to \frac{-1}{4} \sqrt{-r^2+4} \lvert r \rvert - \frac{1}{2} r^2 \operatorname{sgn}(r) \sin^{-1}\left(\frac{1}{2} r\right) + \frac{1}{2} \sin^{-1}\left(\frac{1}{2} (r^2 - 2)\right) + c_1$ |
| 6 | Substitute($4,x = 1) <br> $\to c_1 - \frac{1}{4} \pi$ |
| 7 | $6 - $5 <br> $\to \frac{1}{4} \sqrt{-r^2+4} \lvert r \rvert + \frac{1}{2} r^2 \operatorname{sgn}(r) \sin^{-1}\left(\frac{1}{2} r\right) - \frac{1}{2} \sin^{-1}\left(\frac{1}{2} (r^2 - 2)\right) - \frac{1}{4} \pi$ |
| 8 | NSolve($7 + π r² / 4 = π / 2,r) <br> $\to \{r = -1.25121, r = 1.25121\}$ |

Kuva 9: Tehtävän 2.15 ratkaisu laskimella

Huomaa, että tarkkaa ratkaisua ei saada, joten on hyödyllistä käyttää numeerisen ratkaisun komentoja.

Saatu negatiivinen vastaus hylätään, koska säde on positiivinen vakio, jolloin saadaan ratkaisuksi $r \approx 1.25(\mathrm{m})$

GeoGebran vastaavat suomenkieliset komennot ovat riveillä 4 ja 5 Sijoita, ja rivillä 8 RatkaiseNumeerisesti

## 4.16 Ratkaisu 2.16 (Käyrä ja normaali)

Muodostetaan käyrää osittain kuvaava funktio $f(x)$.

Käyrän normaalin yleinen yhtälö on muotoa: $y - f(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$. Sijoitetaan tähän tehtävänannon piste $(x, y) = (\frac{x_0}{3}, 0)$

Tutkitaan ensin tilannetta $f'(x), f(x) \neq 0$

$$- f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}\left(\frac{x_0}{3} - x_0\right) \Rightarrow f(x_0) = -\frac{2x_0}{3} \cdot \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$f'(x_0) = -\frac{2x_0}{3} \cdot \frac{1}{f(x_0)}$$

Huomataan olennainen tehtävänannon vihjeen yhteys saadussa yhtälössä. Oletuksella, että sisäfunktion derivaatta ja ulkofunkion kerroin muodostavat edellisen yhtälön kertoimen, voidaan todeta, että funktio $f$ on muotoa:

$$f(x) = \pm\sqrt{h(x)} \Rightarrow f'(x) = h'(x) \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{h(x)}}$$

Tulkitaan tästä positiivista vaihtoehtoa ja yhdistetään tehtävän lopussa erimerkkiset ratkaisut yhdeksi ratkaisuksi.

$$h'(x) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{2x}{3} \Leftrightarrow h'(x) = -\frac{4x}{3}$$

Tällöin:

$$h(x) = \int h'(x)dx = -\frac{2}{3}x^2 + C$$

Joten funktio $f$ saadaan muotoon: $f(x) = \sqrt{-\frac{2}{3}x^2 + C}$

Lasketaan nyt millä C:n arvolla $f(1) = 2$

$$f(1) = \sqrt{-\frac{2}{3} + C} = 2 \Rightarrow C = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$$

Sieventämällä funktiota saadaan

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{3}\left(7 - x^2\right)} = \frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{7 - x^2}$$

Huomioimalla erimerkkiset ratkaisut saadaan lopullinen muoto käyrälle $k$:

$$y = \pm f(x) \Leftrightarrow k : y^2 = \frac{2}{3}\left(7 - x^2\right)$$

Syntyvä käyrä $k$ on tietynmallinen ellipsi.

Suosittelen harjoitukseksi tutkimaan, että tehtävässä tutkittu ominaisuus pätee esim. Geogebran piirtotyökalujen avulla.

## 4.17 Ratkaisu 2.17 (Juurivertailua)

Muunnetaan luvut murtopotenssimuotoihin:

$$\left(1+10^{\frac{-1001}{6}}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(1+10^{\frac{-1001}{3}}\right)^{\frac{1}{6}}$$

Tutkitaan ensimmäistä termiä:

$$\left(1+10^{\frac{-1001}{6}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(1+10^{\frac{-1001}{6}}\right)^{2\cdot\frac{1}{6}}$$

$$\left(\left(1+10^{\frac{-1001}{6}}\right)^{2}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(1+2\cdot 10^{\frac{-1001}{6}}+10^{\frac{-1001}{6}\cdot 2}\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$= \left(1+2\cdot 10^{\frac{-1001}{6}}+10^{\frac{-1001}{3}}\right)^{\frac{1}{6}}$$

Koska juurifunktiot ovat kasvavia funktioita ja $2\cdot 10^{\frac{-1001}{6}} > 0$, tulee termin:

$$\left(1+10^{\frac{-1001}{6}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

olla suurempi kahdesta esitetystä termistä.

## 4.18 Ratkaisu 2.18 (Potensseja)

Tehtävän ratkaisun suhteen riittää tutkia lukujen ykkösten määrää. Koska luku on jaollinen 10:llä, jos kummatkin luvut päättyvät samaan lukuun. Toisin sanoen, erotuksen osat ovat kongruentteja saman luvun suhteen modulo 10.

Tutkitaan erotuksen osia erikseen:

$$1001^{20222} \equiv (1000+1)^{20222} \mod 10$$

$$(1000+1)^{20222} \equiv 1^{20222} \equiv 1 \mod 10$$

Toisen luvun voisi tietenkin tarkastaa laskimella "periaatteessa". Tässä on kuitenkin laskettu haluttu tulos kunnolla.

$$9812521849^2 = 9812521849 \cdot 9812521849 = (9812521840+9)(9812521840+9)$$

$$= 9812521840^2 + 2 \cdot 9812521840 \cdot 9 + 9^2 = 9812521840^2 + 2 \cdot 9812521840 \cdot 9 + 81$$

Tästä muodosta huomataan heti, että

$$9812521840^2 \equiv 2 \cdot 9812521840 \cdot 9 \equiv 0 \mod 10$$

Ja koska $81 \equiv 1 \pmod{10}$, kummatkin erotuksen osat päättyvät samaan lukuun ja siten tehtävässä esitetty luku on jaollinen luvulla 10.

## 4.19 Ratkaisu 2.19 (Jaollisuuksia)

Alkuaskel:

$$3^{3+3} - 26 - 27 = 676 = 4 \cdot 169$$

Alkuaskel on osoitettu todeksi.

Muodostetaan siten induktio-oletus, että $3^{3n+3} - 26n - 27$ on jaollinen luvulla 169.

Tutkitaan sitten luvun $3^{3(n+1)+3} - 26(n+1) - 27$ jaollisuutta.

$$3^{3(n+1)+3} - 26(n+1) - 27 = 3^{3n+3} \cdot 3^3 - 26n + 26 - 27$$

Mikäli tästä luvusta poistetaan induktio-oletuksen termi, saadaan:

$$3^{3n+3} \cdot 3^3 - 26n - 26 - 27 - (3^{3n+3} - 26n - 27)$$

Mikäli induktioväitteen termi on jaollinen luvulla 169 niin kahden samalla luvulla jaollisen luvun erotus on silti jaollinen kyseisellä luvulla.

$$3^{3n+3} \cdot 26 - 26 = 26(3^{3n+3} - 1) = 2 \cdot 13(3^{3n+3} - 1)$$

Koska $169 = 13^2$, riittää osoittaa, että $3^{3n+3} - 1$ on jaollinen luvulla 13.

Tutkitaan:

$$3^{3n+3} - 1 \equiv \left(3^3\right)^{n+1} - 1 \mod 13$$

Tunnetaan, että: $3^3 \equiv 27 \equiv 1 \mod 13$, joten:

$$\left(3^3\right)^{n+1} - 1 \equiv (1)^{n+1} - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \mod 13$$

Vaihtoehtoisesti induktio-oletuksesta tunnetaan, että $3^{3n+3} - 26n - 27$ on jaollinen luvulla 169, jolloin luvulle $(3^{3n+3} - 1) - 13(2(n-1))$ on selvää, että termillä $3^{3n+3} - 1$ tulee olla tekijänä 13, jotta lauseke on kokonaan jaollinen luvulla 169, koska $2(n-1)$ ei ole jaollinen luvulla 13 kaikilla $n$ arvoilla.

Koska $3^{3n+3} - 1$ on jaollinen luvulla 13 niin luku $2 \cdot 13(3^{3n+3} - 1)$ on jaollinen luvulla 169, jolloin induktioväite on osoitettu todeksi.

## 4.20 Ratkaisu 2.20 (Kiintopisteen olemassaolo)

Funktiolla $g(x)$ on kiintopiste, jos ja vain jos yhtälöllä $g(x) = x$ on ratkaisu.

Muodostetaan funktio $h(x) = g(x) - x$. Jos $g(x)$ on jatkuva välillä $0 \leq x \leq 1$, niin funktio $g(x) - x$ on varmasti myös jatkuva välillä $0 \leq x \leq 1$.

Tutkitaan mitä arvoja funktio $h(x)$ saa.

Tunnetaan, että $h(0) = g(0) - 0 = g(0) > 0$. Viimeinen epäyhtälö saadaan suoraan tehtävänannon tiedoista.

Vastaavasti $h(1) = g(1) - 1$.

Lauseke voidaan tulkita siten, että $g(1) < 0$, jolloin $g(1) - 1 < -1$.

Lisäämällä tähän epäyhtälöön puolittain ykkösen, saadaan $g(1) < 0$

Nyt Bolzanon lauseen perusteella jatkuvalla funktiolla $h(x)$ on nollakohta välillä $0 \leq x \leq 1$.

Funktion $h(x)$ nollakohta viittaa tilanteeseen, jossa $g(x) - x = 0$. Tämä kuitenkin suoraan tarkoittaa, että yhtälöllä $g(x) = x$ on ratkaisu kyseisellä välillä.

Näin ollaan osoitettu, että funktiolla $g(x)$ on kiintopiste.

### 4.21 Ratkaisu 2.21 (Todennäköisyyksiä ja simulointia 2)

a)

Todennäköisyys saadaan yksinkertaisella geometrisellä todennäköisyydellä:

$$P = \frac{\text{Ympyrän pinta-ala}}{\text{Neliön pinta-ala}} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785$$

b)

Muodostetaan ensin Yrjön simulaatio taulukkolaskentaohjelmistolla. Tehtävän kannalta yksi iteraatio tulee sijoittaa yhteen soluun, jotta tätä sadan iteraation prosessia voidaan simuloida järkevästi.

Yhden satunnaisen pisteen testi voidaan kirjoittaa taulukkolaskentaohjelmistolla seuraavasti:

```
=IF((RAND())^2+(RAND())^2<1,1,0)
```

Rivisumman keskiarvo (AVERAGE()) on yksittäisen simulaatiolla saatu todennäköisyys klassisen todennäköisyyden perustein.

(Merkitään tätä keskiarvoa kirjamella A)

Simuloimalla tätä prosessia riittävästi (esim. n=5000) voidaan muodostaa seuraavien totuusarvojen mukainen keskiarvo, joka klassisen todennäköisyyden perustein on todennäköisyys, että virhe on alle $10^{-3}$ rajan.

```
=IF(AND(PI()/4-10^(-3)<A, A<PI()/4+10^(-3))=TRUE,1,0)
```

Todennäköisyydeksi saadaan yhden merkitsevän luvun tarkkuudella $0,06 - 0,07$.

c)

Tutkitaan virherajojen muodostumista:

$$]\frac{\pi}{4} - 10^{-3}, \frac{\pi}{4} + 10^{-3}[ = ]0.784398163..., 0.786398163...[$$

Kaikki Yrjön menetelmällä saadut arvot ovat tuhannesosan tarkkuudella olevia desimaalilukuja. Tutkitaan siten kaikkia vaihtoehtoja, joilla menetelmän tulos on edellisellä välillä.

Huomataan heti, että vain $\frac{785}{1000}$ ja $\frac{786}{1000}$ kuuluvat kyseiselle välille.

Binomitodennäköisyydellä saadaan muodostettua:

$$P(\text{Virhe}{<}1/1000) = \binom{1000}{785}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{785}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)^{1000-785} + \binom{1000}{786}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{786}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)^{1000-786}$$

Laskimella saadaan
(CAS tai todennäköisyyslaskurilla binomitn esim arvoilla n=1000, p=3.1415/4)

$$P(\text{Virhe}{<}1/1000) \approx 0.061$$

## 4.22 Ratkaisu 2.22 (Yhtälöryhmän ratkaisu)

$$\begin{cases} 6x - 8y - 15z = 524 \\ 52x + 18y + z = 1310 \end{cases}$$

Summaamalla rivit keskenään huomataan, että triviaalia ratkaisua ei saada:

$$58x + 10y - 14z = 1834$$

Tällöin on olennaista tutkia yhtälöryhmän yhtälöiden moninkertoja

$$\begin{cases} a \cdot (6x - 8y - 15z) = 524a \quad a \in \mathbb{R} \\ b \cdot (52x + 18y + z) = 1310b \quad b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Summaamalla nämä rivit keskenään saadaan:

$$(6a + 52b)x + (-8a + 18b)y + (-15a + b)z = 524a + 1310b$$

Tilanne $x + y + z$ vastaa tilannetta, jossa:

$$6a + 52b = -8a + 18b = -15a + b$$

Tarkastetaan, että yhtälöllä on ratkaisu:

$$6a + 52b = -8a + 18b \Rightarrow 7a = -17b, \quad -8a + 18b = -15a + b \Rightarrow 7a = -17b$$

Sijoittamalla tämän yhtälön takaisin edelliseen yhtälöön saadaan:

$$\frac{262}{7}bx + \frac{262}{7}by + \frac{262}{7}bz = \frac{262}{7}b \quad | \ : \frac{262}{7}b$$

$$x + y + z = 1$$

Vaihtoehtoisesti tilanteessa, jossa $x + y + z$ on "ratkaistavissa", kummankin parametrin voi ratkaista kolmannen parametrin suhteen (jolloin yhtälöt ovat muotoa $x = a + b \cdot z$, $y = c + d \cdot z$ jollakin reaalilukukertoimilla). Tällöin summaamalla kyseiset termit saadaan sieventämistä vaille valmis muoto.

Geogebralla: $Ratkaise(\{6x - 8y - 15z = 524,\ 52x + 18y + z = 1310\})$ tuottaa edellisen kuvauksen mukaiset tulokset parametreille x ja y.

## 4.23 Ratkaisu 2.23 (Factorion)

a)

Tehtävässä voitaisiin vaikka taulukkolaskentaohjelmistolla selvittää kaikkien kolminumeroisten lukujen numeroiden kertomien summat ja verrata niitä lukuihin. Tässä on esitetty konkreettisempi tapa analysoida lukuja.

Määritellään kolminumeroinen luku $a = d_1d_2d_3$.

Kertomille tunnetaan, että vain 5:n ja 6:n kertomat tuottavat summasta kolminumeroisen luvun. Samalla kuitenkin $6! = 720$ ja suurin mahdollinen luku, joka sisältää numeroita, jotka ovat pienempiä tai yhtä suuria kuin 6 on 666. Tällöin voidaan tehdä johtopäätös, että luvun $a$ tulee sisältää vähintään yksi numero 5 eikä yhtään lukua 5 suurempaa numeroa.

Tällöin numero 5 esiintyy 1-3 kertaa.

Numero 5 ei voi esiintyä kolmea kertaa koska $555 \neq 360 = 5! + 5! + 5!$

Jos numero 5 esiintyisi kahdesti, olisi luku $a$ välillä $[5! + 5! + 0!, 5! + 5! + 4!]$, joka sievenee muotoon $[241, 264]$. Ainoa vaihtoehto, jossa on kaksi vitosta on luku 255 ja on helppoa tarkistaa, että $255 \neq 242 = 2! + 5! + 5!$.

Luku 5 esiintyy kerran. Tällöin luku a on välillä $[5! + 0! + 0!, 5! + 4! + 4!]$ joka taas sievenee muotoon $[122, 168]$.

Välin perusteella $d_1 = 1$. Tämä viittaa siihen, että luvussa a tulee esiintyä numerot 1 ja 5.

Tarkastetaan kaikki kertomasummat, jotka toteuttavat tämän ehdon:

$$\begin{cases} 1! + 5! + 0! = 122 \\ 1! + 5! + 1! = 122 \\ 1! + 5! + 2! = 123 \\ 1! + 5! + 3! = 127 \\ 1! + 5! + 4! = 145 \end{cases}$$

Todetaan, että viimeinen vaihtoehto käy, jolloin haluttu ja ainoa mahdollinen kolminumeroinen factorion-luku on 145.

b)

Factorion-luku sijaitsee arvovälillä $[(n-1) \cdot 0! + 1!, n \cdot 9!] = [n, n \cdot 9!]$ n-numeroiselle luvulle.

8-numeroisen luvun $[10000000, 99999999]$ numeroiden kertomien summa sijoittuu siis välille $[8, 2903040]$. Koska 2903040 on 7-numeroinen luku, kertomien summa ei voi koskaan olla yhtä suuri kuin 8-numeroinen luku.

Huomataan, että n-numeroista factorion-lukua ei voi olla olemassa, jos $10^{n-1} > n \cdot 9!$.

Ratkaisemalla edellinen epäyhtälö laskimella saadaan olennaiseksi ratkaisuksi $n > 7.43$. Tämän perusteella mikään luku, jossa on 8 numeroa tai enemmän, ei voi olla factorion-luku.

## 4.24 Ratkaisu 2.24 (Kolmiulotteisia pinta-aloja)

Tässä tilanteessa huomataan, että tämä pinta saa suoran janan jokaisen kahden pisteen välillä y-akselin suunnassa. Tällöin pinnalla olevan y-akselin suuntaisten käyrän pituus on pisteiden $(x_0, y_1, f(x_1, y_1))$ ja $(x_0, y_2, f(x_1, y_2))$ välinen pituus. Tämän suoran kulmakerroin voidaan myös helposti ratkaista osittaisderivaatalla.

Muodostetaan tällöin funktio $l(x)$, jolla saadaan tämän janan pituus, kun $y \in [0, 2]$:

$$l(x) = \sqrt{(x-x)^2 + (0-2)^2 + (f(x,0) - f(x,2))^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^4 \cdot 2^2 + 4} = \sqrt{x^4 \cdot 4 + 4} = 2 \cdot \sqrt{x^4 + 1}$$

Pinta-ala voidaan selvittää integroinnin avulla. Jokainen infinitesimaalinen muutos x:n suhteen $(dx)$ kerrottuna y-askelin suuntaisella pituudella antaa pinnan pinta-alan infinitesimaalisen pienellä pätkällä x-akselin suhteen. Tällöin $l(x)dx$ pinta-alan suuruus saadaan integroimalla sopivan x:n alueen ylitse.

Integroidaan tämä numeerisesti välillä $x \in [0, 4]$ laskimella.

$$A = \int_0^4 l(x)dx \approx 44.862200... \approx 45$$

Suorakulmiosumma 20 suorakulmiota, laskentapiste välien keskipisteessä. keskipisteessä<br>
Geogebralla: $Suorakaidesumma(l(x), 0, 4, 20, 0.5)$

Kolmiulotteisen pinnan pinta-ala halutulla välillä on siis noin 45.

### 4.25 Ratkaisu 2.25 (Funktionaaliyhtälö)

a)

Tutkitaan yhtälöä $f(x+y) = f(x) + f(y)$:

Haluamme osoittaa, että yhtälöllä on ratkaisu $c \cdot x$.

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \Rightarrow c(x+y) = cy + cy \Rightarrow cx + cy = cx + cy \text{ (ok)}$$

Tämä tulos pätee selvästi kaikilla $c \in \mathbb{R}$

b)

Funktiolle $g$ tunnetaan $g(x+y) = g(x) + g(y) + 2xy$.

Muokataan yhtälöä sopivasti, jolloin voidaan hyödyntää a-kohdan tulosta.

$$g(x+y) = g(x) + g(y) + 2xy \Rightarrow g(x+y) - 2xy = g(x) + g(y) \mid -x^2 - y^2$$

$$g(x+y) - x^2 - 2xy - y^2 = g(x) - x^2 + g(y) - y^2$$

$$g(x+y) - (x+y)^2 = g(x) - x^2 + g(y) - y^2$$

Muodostetaan apufunktio $h(x)$ siten, että $h(x) = g(x) - x^2$.

Saadaan:

$$h(x+y) = h(x) + h(y)$$

a-kohdassa käsitellystä tuloksesta saadaan $h(x) = cx$ jollekin $c \in \mathbb{R}$.

Tällöin funktiolle $g(x)$ pätee:

$$h(x) = g(x) - x^2 \;\Leftrightarrow\; g(x) = x^2 + cx, \; c \in \mathbb{R}$$

### 4.26 Ratkaisu 2.26 (Osittaisdifferentiaaliyhtälö)

a)

Sijoitetaan funktio $g(x,t)$ lämpöyhtälöön:

$$\frac{\partial g(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 g(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial(c^2 \cdot f(x,t))}{\partial t} - \frac{\partial^2(c^2 \cdot f(x,t))}{\partial x^2}$$

Osittaisderivaatat toimivat samalla tavalla kuin normaali derivaatta vakiokertoimien suhteen. Tällöin:

$$= c^2 \cdot \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} - c^2 \cdot \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = c^2 \cdot \left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}\right)$$

Oletuksena oli, että

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

Tällöin myös $c^2$:llä kerrottu versio on aina 0. Tällöin funktio $g$ toteuttaa lämpöyhtälön.

b)

Sisäfunktion derivaatat määräytyvät myös pitkälti samalla tavalla usean muuttujan funktion tapauksessa.

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial f(c \cdot x, c^2 \cdot t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial(c^2 \cdot t)}{\partial t} = c^2 \cdot \frac{\partial f(c \cdot x, c^2 \cdot t)}{\partial t}$$

ja

$$\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(c \cdot x, c^2 \cdot t)}{\partial x} \cdot \frac{\partial(c \cdot x)}{\partial x}\right) = c \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(c \cdot x, c^2 \cdot t)}{\partial x}\right)$$

$$= c \cdot \left(\frac{\partial^2 f(c \cdot x, c^2 \cdot t)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial(c \cdot x)}{\partial x}\right) = c^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 f(c \cdot x, c^2 \cdot t)}{\partial x^2}\right)$$

Yhdistämällä edelliset tulokset saadaan täsmälleen sama tilanne kuin a-kohdassa, jolloin $h(x,t)$ toteuttaa lämpöyhtälön.

## 4.27 Ratkaisu 2.27 (Toistuvia desimaalilukuja)

a)

Konkreettisesti tehtävän päättymätön desimaaliluku esimerkkinä luvulle $n = 123$ voidaan esittää muodossa:

$$0.123123123... = 0.123 + 0.000123 + 0.000000123 + ...$$

Yhtälön oikea puoli voidaan tämän perustein esittää geometrisena summana seuraavasti:

$$0.\overline{n} = \frac{n}{10^d} + \frac{n}{10^{2d}} + ... = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n}{10^{i \cdot d}} = n \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10^d}\right)^i$$

Geometrisen summan kaavalla, kun suhdeluku on pienempi kuin 1, saadaan:

$$= n \cdot \frac{\frac{1}{10}}{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^d} = n \cdot \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^d}{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^d} \quad | \cdot \frac{10^d}{10^d}$$

$$= n \cdot \frac{1}{10^d - 1} = \frac{n}{10^d - 1}$$

Tällöin tehtävän väite on osoitettu.

b)

Jos $n$ on muotoa $n = 10^r - 1$ niin yhtälön vasemman puolen jakaja on myös $10^r - 1$. Tällöin yhtälön vasen puoli on muotoa:

$$\frac{10^r - 1}{10^r - 1} = 1$$

Koska jokainen esitetty luku $n$ on riippumatta muuttujan $r$ arvosta muotoa 0.999999... yhtälön oikealla puolella, kyseinen puoli voidaan kirjoittaa yksinkertaisemmin suppenevana geometrisena sarjana seuraavasti:

$$\sum_{i=1}^{\infty} 9 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^i = 9 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1$$

Koska yhtälön oikea puoli on sama kuin yhtälön vasen puoli, yhtälö pätee varmasti arvoilla $n = 10^r - 1, r \in \mathbb{N}$.

Yhtäpitävyyden $0,999... = 1$ voi myös selittää siten, että pistenotaatio viittaa äärettömään määrään yhdeksikköjä, jolloin kyseessä on tilanteen raja-arvo ja vastaavan luvun raja-arvo on selvästi 1.

c)

Jos luku $\frac{1}{n}$ on a-kohdan muodossa oleva päättymätön desimaaliluku, voidaan tämä kirjoittaa muodossa $\frac{n}{10^d-1}$. Ratkaistaan näiden termien yhtälö:

$$\frac{1}{n} = 10^d - 1 \Leftrightarrow n^2 = 10^d - 1$$

Tutkitaan jaollisuutta luvun 4 kanssa:

Luku $n$ voi olla kongruentti lukujen 0, 1, 2, ja 3 kanssa modulo 4. Tällöin luku $n^2$ on:

$$n \equiv 0 \Rightarrow n^2 \equiv 0 \mod 4$$

$$n \equiv 1 \Rightarrow n^2 \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1 \mod 4$$

$$n \equiv 2 \Rightarrow n^2 \equiv 2 \cdot 2 \equiv 0 \mod 4$$

$$n \equiv 3 \Rightarrow n^2 \equiv 3 \cdot 3 \equiv 1 \mod 4$$

Oikean puolen jaollisuus, jos **d=1**:

$$10^d - 1 = 9 \equiv 1 \mod 4$$

Jos **d>1**

$$10^d - 1 = 10^2 \cdot 10^{d-2} - 1 = 4 \cdot 25 \cdot 10^{d-2} - 1 \equiv -1 \equiv 3 \mod 4$$

Tällöin yhtälöllä ei voi olla ratkaisua, kun $d > 1$. Tällöin luvun $n$ tulee olla välillä $[1, 9]$, mikäli ratkaisuja on olemassa. Tässä voidaan kokeilla kaikki vaihtoehdot yksitellen läpi haluttaessa, mutta on selvää, että ainoa ratkaisu on $n = 3$.

### 4.28 Ratkaisu 2.28 (Pallon tilavuus)

Tulkitaan pallo origokeskeisen ympyrän pyörähdyspintana.

Ympyrän yhtälö on muotoa:

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

Kaaren funktio positiivisella puolella on siten $k(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

Tämä funktio saa arvoja välillä $x \in [-r, r]$, jolloin muodostetaan tällä välillä muodostuvan pyörähdyskappaleen tilavuus integraalin avulla:

Pyörähdyskappaleen integraali on muotoa

$$V = \pi \cdot \int_{-r}^{r} f(x)^2 dx$$

Sijoitetaan tähän edellä selvitetty ympyrän kaaren funktio

$$V = \pi \cdot \int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \pi \cdot \int_{-r}^{r} r^2 - x^2 dx$$

$$\pi \cdot \Big/_{-r}^{r} xr^2 - \frac{x^3}{3} = \pi \cdot \left( r^3 - \frac{r^3}{3} - \left( -r^3 + \frac{r^3}{3} \right) \right) = \frac{4\pi r^3}{3}$$

## 4.29 Ratkaisu 2.29 (Aritmeettinen lukujono)

Määritellään eräs vakiona pysyvä suhde seuraavasti:

$$C = \frac{a_{2n} + a_{2n-1} + ... + a_{n+1}}{a_n + a_{n-1} + ... + a_1}$$

Tutkitaan arvoa $C + 1$, jonka tulee myös olla vakio:

$$C + 1 = \frac{a_{2n} + a_{2n-1} + ... + a_{n+1}}{a_n + a_{n-1} + ... + a_1} + \frac{a_n + a_{n-1} + ... + a_1}{a_n + a_{n-1} + ... + a_1}$$

$$C + 1 = \frac{a_{2n} + a_{2n-1} + ... + a_1}{a_n + a_{n-1} + ... + a_1}$$

Tällöin sekä osoittajassa, että nimittäjässä on jokin aritmeettinen summa. Aritmeettisen summan kaavalla saadaan:

$$C + 1 = \frac{2n \cdot \frac{a_1 + a_{2n}}{2}}{n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}} = \frac{2 \cdot (1 + a_{2n})}{1 + a_n}$$

Sijoitetaan tähän aritmeettisen jonon yleinen termi ja määritellään tämä uutena suhteena:

$$\frac{2 \cdot (2 + (2n-1) \cdot d)}{2 + (n-1) \cdot d} \Rightarrow R = \frac{C+1}{2} = \frac{2 + (2n-1) \cdot d}{2 + (n-1) \cdot d}$$

$$R \cdot (2 + (n-1) \cdot d) = 2 + (2n-1) \cdot d$$

$$2R + Rnd - Rd = 2 + 2nd - d \Leftrightarrow Rnd - 2nd = -2R + Rd + 2 - d$$

$$nd(R-2) = R(d-2) - (d-2) \Leftrightarrow nd(R-2) = (R-1)(d-2)$$

Olennaisesti yhtälön vasen puoli riippuu arvosta n, mutta yhtälön oikea puoli ei riipu arvosta n. Jotta yhtälö pätee kaikilla n:n arvoilla, kummankin yhtälön puolen tulee olla 0.

Kun $d \neq 0$, saadaan $R - 2 = 0$ ja $d - 2 = 0 \Rightarrow d = 2$.

Tästä saadaan $a_{23} = 1 + (23-1) \cdot 2 = 45$

## 4.30 Ratkaisu 2.30 (Lattia- ja kattofunktioita)

$$\left\lfloor x - \left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil \right\rfloor = 3$$

Koska lattiafunktio saa arvokseen suurimman kokonaisluvun joka on pienempi tai yhtäsuuri kuin funktion sisällä oleva lauseke, saadaan suoraan:

$$3 \leq x - \left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil < 4$$

Lausekkeen kattofunktio voidaan määritellä kokonaislukuna $a \in \mathbb{Z}$ siten, että:

$$a - 1 \leq \frac{x}{2} < a \Leftrightarrow 2a - 2 < x \leq 2a$$

Sijoittamalla arvo $a$ aikasempaan epäyhtälöön, saadaan seuraava epäyhtälöiden ryhmä:

$$\begin{cases} 3 + a \leq x < 4 + a \\ 2a - 2 < x \leq 2a \end{cases}$$

Yhdistämällä epäyhtälön osia sopivasti, saadaan muodostettua termille $a$ tarvittavat ehdot.

Ensimmäisestä epäyhtälön alaraja on varmasti aina pienempi tai yhtä suuri kuin toisen epäyhtälön yläraja ja päinvastoin. Tällöin saadaan:

$$\begin{cases} 3 + a \leq 2a \Rightarrow a \geq 3 \\ 2a - 2 < 4 + a \Rightarrow a < 6 \end{cases}$$

Jolloin voidaan yhdistää nämä epäyhtälöt, jolloin saadaan ratkaisujoukko termille $a$: $3 \leq a < 6$. Välin kokonaislukuarvot voidaan sijoittaa takaisin ensimmäiseen epäyhtälöiden ryhmään:

a=3: $6 \leq x < 7 \;\wedge\; 4 < x \leq 6 \quad \Rightarrow x = 6$
a=4: $7 \leq x < 8 \;\wedge\; 6 < x \leq 8 \quad \Rightarrow 7 \leq x < 8$
a=5: $8 \leq x < 9 \;\wedge\; 8 < x \leq 10 \quad \Rightarrow 8 < x < 9$

Jolloin saadaan halutut yhtälön toteuttavat arvojoukot:

$$x = 6, \quad 7 \leq x < 8, \quad 8 < x < 9$$

## 4.31 Ratkaisu 2.31 (Autoilua lukusuoralla)

Tilanteen konkretisoimiseksi tässä voidaan tutkia auton tankin tilannetta lukusuoran alussa vaikka ratkaisun kannalta se ei ole suoraan olennaista.

Olennaisesti polttoaine riittää seuraavaan alkulukuun asti, jos polttoainetta on kuljettua matkaa suurempi tai yhtäsuuri määrä jokaisen alkuluvun kohdalla.

Määritellään varmasti kohdattavat alkuluvut: $p_1, p_2, ..., p_n$

Jokaisen alkuluvun $p_n$ kohdalla polttoainetta on saatu yhteensä $p_1 + p_2 + ... + p_n$ litraa.

Vastaavasti jokaisen alkuluvun $p_n$ kohdalla polttoainetta on käytetty $p_n - 2$ litran verran.

Tällöin polttoainetta on jäljellä $p_1+p_2+...+p_n-(p_n-2) = p_1+...+p_{n-1}+2$ alkuluvun $p_n$ kohdalla.

Seuraavan alkuluvun saavuttamiseksi tarvitaan $p_{n+1} - p_n$ litraa polttoainetta.

Tutkitaan tällöin olennaista epäyhtälöä, jos polttoaineella pääsee seuraavaan alkulukuun asti.

$$p_1 + ... + p_{n-1} + 2 \geq p_{n+1} - p_n$$

$$p_1 + ... + p_{n-1} + p_n + 2 \geq p_{n+1}$$

Muodostetaan yläraja alkuluvun $p_{n+1}$ suuruudelle:

Tehtävänannon yhteydellä saadaan $\forall n \in \mathbb{N} \ \ \exists p_{n+1} \in (p_n, 2p_n)$.

Tällöin tunnetaan, että $2p_n > p_{n+1}$. Vastaavasti hyödyntämällä yhteyttä uudelleen saadaan $p_{n+1} < 2p_n = p_n + p_n < p_n + 2p_{n-1}$.

Jatkamalla tätä päättelyketjua saadaan:

$$p_{n+1} < p_n + p_{n-1} + ... + p_2 + 2p_1 = p_n + ... + p_2 + p_1 + p_1$$

Koska tunnetaan $p_1 = 2$, tämä epäyhtälö on muotoa $p_1 + ... + p_n + 2 > p_{n+1}$. Tällöin ollaan osoitettu, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ polttoaine riittää alkuluvusta $p_n$ seuraavaan alkulukuun asti. Tällöin polttoaine ei lopu koskaan tehtävän ehdoilla.

## 4.32 Ratkaisu 2.32 (Integrointia ja lukujonoja)

a)

Tutkitaan ensimmäisiä jonon jäseniä:

$$a_1 = \sqrt{x},\ a_2 = \sqrt{x + a_1} = \sqrt{x + \sqrt{x}},\ a_3 = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

Ensimmäisen kolmen termin perusteella on selvää, että jonon raja-arvo on muotoa:

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots}}}$$

Tällöin:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots}}}$$

b)

Tutkitaan integraalia

$$\int \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots}}} dx$$

Muokataan ensin integroitava lauseke järkevämpään muotoon:

$$y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots}}} \geq 0 \Rightarrow y = \sqrt{x + y}$$

Jälkimmäinen muoto voidaan ratkaista y:n suhteen geogebralla halutessa. Alla on algebrallinen ratkaisu:

$$y^2 = x + y \Leftrightarrow y^2 - y = x \Leftrightarrow y^2 - y + \frac{1}{4} = x + \frac{1}{4}$$

$$\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = x + \frac{1}{4} \Leftrightarrow y - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{x + \frac{1}{4}}$$

$$y = \pm\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \quad | \cdot \frac{2}{2}$$

$$y=\frac{2\cdot\sqrt{x+\frac{1}{4}+1}}{2}\Leftrightarrow y=\frac{\pm\sqrt{4x+1}+1}{2}$$

Jotta tämä arvo on määritelty kaikilla $x>0$, valitaan postiivinen versio.

Tällöin

$$A(x)=\frac{\sqrt{4x+1}+1}{2}$$

Ratkaistaan integraali $\int A(x)dx$:

$$\int A(x)dx=\int\frac{\sqrt{4x+1}+1}{2}dx$$

Normaaleilla integroimismenetelmillä (tai laskimella) saadaan:

$$\frac{1}{2}\int(4x+1)^{\frac{1}{2}}+1dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot(4x+1)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x+C=\frac{1}{12}\sqrt{(4x+1)^{3}}+\frac{1}{2}x+C$$

## 4.33 Ratkaisu 2.33 (Moniulotteisia vektoreita)

Esitetään tunnetut pituudet vektorien koordinaattien avulla:

$$|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + ... + u_7^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow |u|^2 = u_1^2 + u_2^2 + ... + u_7^2 = 8$$

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + ... + v_7^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow |v|^2 = v_1^2 + v_2^2 + ... + v_7^2 = 8$$

$$|u - v| = \sqrt{(u - v) \cdot (u - v)} = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + ... + (u_7 - v_7)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{u_1^2 + ... + u_7^2 + v_1^2 + ... + v_7^2 - 2u_1v_1 - ... - 2u_7v_7} = 2\sqrt{2}$$

Huomataan, että vektorien erotuksen pituuden lauseke sisältää yksittäisten vektorien pituuksien neliöt.

$$\sqrt{8 + 8 - 2u_1v_1 - ... - 2u_7v_7} = 2\sqrt{2} \quad | \, ()^2$$

$$8 + 8 - 2u_1v_1 - ... - 2u_7v_7 = 8 \Leftrightarrow -2u_1v_1 - ... - 2u_7v_7 = -8$$

Tutkitaan nyt vektorien summan pituutta:

$$|u + v| = \sqrt{(u + v) \cdot (u + v)} = \sqrt{(u_1 + v_1)^2 + ... + (u_7 + v_7)^2}$$

$$= \sqrt{u_1^2 + ... + u_7^2 + v_1^2 + ... + v_7^2 + 2u_1v_1 + ... + 2u_7v_7}$$

Huomataan aikaisemman tutkimisen aikana löydetyt termit. Sijoitetaan nämä lausekkeeseen:

$$|u + v| = \sqrt{8 + 8 + 8} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

Ratkaistaan sitten vektorien $u$ ja $v$ välinen kulma.

Tunnetaan

$$\cos(u, v) = \frac{u \cdot v}{|u||v|} = \frac{\sqrt{u_1v_1 + ... + u_7v_7}}{8}$$

Neliöjuuren alla oleva summa on eräs termeistä joka selvitettiin aikaisemmin.

Siten $2u_1v_1 + ... + 2u_7v_7 = 8 \Rightarrow u_1v_1 + ... + u_7v_7 = 4$

Tällöin saadaan:

$$\frac{\sqrt{u_1v_1 + ... + u_7v_7}}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Tällöin vektorien välinen kulma on

$$\arccos\left(\frac{1}{4}\right) \approx 75.5^o$$

## 4.34 Ratkaisu 2.34 (Simpsonin virhe)

Oletetaan että $n$ viittaa Simpsonin säännöllä käytettävään välien määrään. Muodosta funktio $v(a)$, joka tuottaa mielivaltaisella $a$:n arvolla tarvittavien välien määrän, jotta Simpsonin säännön virhe on alle 0.01 allaolevalle integraalille:

$$\int_0^a e^{x^2} dx$$

Simpsonin säännön absoluuttinen virhe integraalille on seuraavaa muotoa:

$$\int_a^b f(x)dx, \quad |E_n| = \left| -\frac{(b-a)^5 f^{(4)}(t)}{180n^4} \right|, \text{ jossa } a < t < b$$

Tehtävän tilanteessa saadaan:

$$\int_0^a e^{x^2} dx, \quad |E_n| = \left| -\frac{a^5 f^{(4)}(t)}{180n^4} \right|, \text{ jossa } 0 < t < a$$

Ja derivoimalla funktio neljästi laskimella saadaan selvästi kaikilla $x \in \mathbb{R}$ positiivinen funktio, joka on symmetrinen arvon $x = 0$ suhteen:

$$f^{(4)}(x) = 4e^{x^2} \left(4x^4 + 12x^2 + 3\right)$$

Virheen kannalta halutaan olla varmoja, että simpsonin säännön virhe on alle 0.01. Olennaisesti tämä viittaa siihen, että $f^{(4)}(t)$ saa mahdollisimman suuren arvon. Edellisten laskujen perusteella ja funktion $f^{(4)}(x)$ perustein voidaan sanoa, että riippumatta $a$:n arvosta funktio saa suurimman arvonsa välillä $x \in [0, a]$, kun $x = a$. Tämän voi halutessa perustella kulkukaavion avulla.

Samalla on selvää, että funktio ja arvo a ovat positiivisia.

Tällöin tunnetaan, että

$$|E_n| = \frac{a^5 f^{(4)}(t)}{180n^4} < \frac{a^5 f^{(4)}(a)}{180n^4}$$

Määritellään epäyhtälön oikea puoli yhtä suureksi kuin 0.01:

$$\frac{a^5 f^{(4)}(a)}{180n^4} = \frac{a^5 \cdot 4e^{a^2} \left(4a^4 + 12a^2 + 3\right)}{180n^4} = \frac{1}{100}$$

$$n^4 = \frac{5 \cdot a^5 \cdot 4e^{a^2}\left(4a^4 + 12a^2 + 3\right)}{9}$$

Ratkaistaan tästä (positiivinen) n:

$$n = \sqrt[4]{\frac{20 \cdot a^5 \cdot e^{a^2}\left(4a^4 + 12a^2 + 3\right)}{9}}$$

Tämä on suoraan haluttu tulos, sillä tämä voidaan määritellä funktioksi $v(a)$, joka tuottaa tietyllä $a$:n arvolla vähimmäismäärän käytettäville väleille.

Simpsonin säännöllä on olennaista myös käyttää parillista määrää välejä, mutta absoluuttisen minimin selvittämisessä välien määrälle tämä ominaisuus ei ole erityisen olennainen.

Tehtävänannon ylitse voisi tehdä huomion, että $a$ voisi olla negatiivinen, mutta absoluuttinen virhe on riippumatta $a$:n merkistä sama. Alla perustelu:

Jos $a < 0$:

$$\int_0^a e^{x^2}dx = -\int_a^0 e^{x^2}dx, \quad E_n = -\frac{-a^5 f^{(4)}(t)}{180n^4}, \text{ jossa } 0 < t < a$$

Selvästi merkin muutos ei vaikuta tässä absoluuttisen virheen, eli virheen itseisarvon, suuruuteen.

## 4.35 Ratkaisu 2.35 (Samansuuruisia kolmioita)

Funktion tangentin yhtälö mielivaltaisessa pisteessä on muotoa

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Oletetaan, että funktio on laskeva kaikilla positiivisilla $x$:n arvoilla, jolloin funktion tangentti muodostaa kolmion koordinaattiakselien kanssa.

Jotta kolmio muodostuu, jokaisella $x > 0$ tulee päteä $f'(x) \neq 0$. $f(x) \neq 0$ saadaan oletuksena tehtävänannosta.

Kolmion korkeus on yhtä suuri kuin tangentin ja y-akselin leikkauspisteen y-koordinaatin arvo. Vastaavasti kolmion kannan pituus on tangentin ja x-akselin leikkauspisteen x-koordinaatin arvo.

Lasketaan kyseiset arvot:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0) \Rightarrow y = f(x_0) - x_0 f'(x_0)$$

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow -xf'(x_0) = f(x_0) - x_0 f'(x_0) \Rightarrow x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Kolmion pinta-ala on yhtä suuri kuin $\frac{1}{2}xy$

Tällöin saadaan:

$$\frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right)\left(f(x_0) - x_0 f'(x_0)\right)$$

$$= \frac{1}{2}x_0 f(x_0) - \frac{1}{2}\frac{f(x_0)^2}{f'(x_0)} - \frac{1}{2}x_0^2 f'(x_0) + \frac{1}{2}x_0 f(x_0)$$

$$= x_0 f(x_0) - \frac{1}{2}\frac{f(x_0)^2}{f'(x_0)} - \frac{1}{2}x_0^2 f'(x_0)$$

Funktiota ei voida lukion oppimäärän puitteissa suoraan ratkaista tuloksesta, mutta funktio voidaan selvittää olettamalla jokaisen summan termin olevan paikasta $x_0$ riippumaton vakio.

Tällöin saadaan seuraavat yhtälöt:

$$x_0 f(x_0) = C_1 > 0,\ -\frac{f(x_0)^2}{2f'(x_0)} = C_2 > 0,\ -\frac{1}{2}x_0^2 f'(x_0) = C_3 > 0$$

(Vakioiden positiivisuus on ilmiselvää, koska $f(x) > 0, f'(x) < 0$)

Tällöin ensimmäisestä yhtälöstä voidaan ratkaista yleiselle kertoimelle $C$:

$$x_0 f(x_0) = C > 0 \Rightarrow f(x_0) = \frac{C}{x_0}$$

Jolloin

$$f'(x_0) = -\frac{C}{x^2}$$

Sijoitetaan tämä aikaisempaan pinta-alan yhtälöön, jolloin saadaan:

$$= C - \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{C^2}{x_0^2}}{-\frac{C}{x^2}} - \frac{1}{2} \cdot x_0^2 \cdot \left(-\frac{C}{x_0^2}\right) = C + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C = 2C$$

Edellä selvitetty funktio täyttää halutut ehdot. Tällöin haluttu funktio on muotoa:

$$f(x) = \frac{C}{x_0}$$

Halutaan yksittäisen funktion kolmioiden pinta-alojen arvoksi 2, jolloin:

$$2C = 2 \Leftrightarrow C = 1 \Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{x}$$

## 4.36 Ratkaisu 2.36 (Funktioita ja käänteisfunktioita)

Funktioiden välille tunnetaan yhteys $f(g(x)) = g(f(x)) = x$

Samalla käänteisfunktion derivaatalle tunnetaan tässä kontekstissa:

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \Leftrightarrow f'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)}$$

Jälkimmäisestä muodosta saadaan suoraan

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Derivoidaan vastaava funktio, jolloin saadaan:

$$g''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f'(g(x))}\right) = \frac{-f''(g(x)) \cdot \frac{d}{dx}(g(x))}{(f'(g(x)))^2} = \frac{-f''(g(x)) \cdot g'(x)}{(f'(g(x)))^2}$$

Termille $g'(x)$ tunnetaan aikaisemmin selvitetty yhteys, jolloin:

$$= \frac{-f''(g(x))}{(f'(g(x)))^2} \cdot g'(x) = \frac{-f''(g(x))}{(f'(g(x)))^2} \cdot \frac{1}{f'(g(x))} = -\frac{f''(g(x))}{(f'(g(x)))^3}$$

Jolloin haluttu yhteys on osoitettu.

Samaan tulokseen päästään myös hyödyntämällä ketjusääntöä funktiolle $(f'(g(x)))^{-1}$

Tutkitaan yhtäsuuruutta funktiolle $f(x) = x^3$, jolloin $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

Tällöin:

$$g'' = -\frac{2\sqrt[3]{x}}{9x^2},\ f'(x) = 3x^2,\ f''(x) = 6x$$

$$-\frac{2\sqrt[3]{x}}{9x^2} = -\frac{6 \cdot \sqrt[3]{x}}{(3 \cdot \sqrt[3]{x}^2)^3} = -\frac{6 \cdot \sqrt[3]{x}}{27 \cdot x^2} = -\frac{2 \cdot \sqrt[3]{x}}{9 \cdot x^2}$$

(Helpointa tutkia funktiolle $f(x) = e^x$, mutta hieman haastavempi esimerkki ei ole huono asia)

## 4.37 Ratkaisu 2.37 (Funktioiden parillisuuksia)

a)

Tehtävässä olennaisinta on tutkia yhteyttä $f(x) + f^{-1}(x) = x$ eri tilanteissa.

Jos $f(a) = b, \quad \{a, b \in \mathbb{R}\}$ niin edellinen yhtälö saadaan muotoon:

$$f(a) + f^{-1}(a) = a \Leftrightarrow f^{-1}(a) = a - b \Leftrightarrow f(a - b) = a$$

Vastaavasti tutkimalla tilannetta $x = a - b$ saadaan:

$$f(a - b) + f^{-1}(a - b) = a - b \Leftrightarrow a + f^{-1}(a - b) = a - b$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(a - b) = -b \Leftrightarrow f(-b) = a - b$$

Tutkitaan viimeisenä tilannetta $x = -b$:

$$f(-b) + f^{-1}(-b) = -b$$

Sijoitetaan edellisistä yhtälöistä $f(-b) = a - b$. Tällöin:

$$a - b + f^{-1}(-b) = -b \Leftrightarrow f^{-1}(-b) = -a \Leftrightarrow f(-a) = -b \Leftrightarrow -f(-a) = b$$

Ensimmäisenä tehdystä oletuksesta ja viimeisestä tuloksesta saadaan, että, tehtävänannon määritelmän mukaisesti:

$$f(a) = -f(-a) = b$$

Jolloin $f$ on pariton.

b)

Vihjeen innoittamana osoitetaan, että parittoman funktion derivaatta on parillinen.

Jos $g(x)$ on pariton funktio, eli $g(x) = -g(-x)$, tällöin:

$$g'(x) = \frac{d}{dx}(-g(-x)) = -\frac{d}{dx}g(-x) = -g'(-x)\frac{d}{dx}(-x) = g'(-x)$$

Tällöin ollaan saatu tulos $g'(x) = g'(-x)$, joka vastaa parillisen funktion määritelmää. Siten, parittoman funktion derivaatta on parillinen, ja $f'(x)$ on parillinen.

### 4.38 Ratkaisu 2.38 (Vektorituloja ja geometriaa)

a)

Suunnikkaan pinta-alan kaava on $A = ab\sin(\beta)$, jossa a ja b ovat suunnikkaan eripituiset sivut ja $\beta$ on eripituisten sivujen välinen kulma.

Vastaavasti ristitulon itseisarvo on muotoa:

$$|\overline{a} \times \overline{b}| = |\overline{a}||\overline{b}|\sin(\overline{a}, \overline{b})|\overline{\mathrm{e}}| = |\overline{a}||\overline{b}|\sin(\overline{a}, \overline{b})$$

Sillä yksikkövektorin $\overline{e}$ pituus on 1. Tämä vastaa täsmälleen suunnikkaan pinta-alan kaavaa.

b)

Tetraedri on kartio, jonka pohjana on kolmio ja sen korkeus on h.

Tetraedrin tilavuus on siten:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_k \cdot h$$

Suunnikkaan lävistäjä puolittaa suunnikkaan kolmioksi, joka on tehtävän tetraedrin eräs tahko. Tällöin kyseisen kolmion pinta-ala on puolet suunnikkaan pinta-alasta. Määritellään tämä pohjaksi.

Samalla määritellään myös:

$$A_k = \frac{1}{2} \cdot |\overline{a}||\overline{b}|\sin(\overline{a}, \overline{b})$$

Nämä kaksi vektoria muodostavat tason, jolla tämä pohja sijaitsee.

Kartion korkeus tulee olemaan kolmannen vektorin etäisyys tasosta tai vektorin pituus kerrottuna vektorin ja tason välisen kulman sinillä. Vastaavasti ekvivalentti arvo on vektorin pituus kerrottuna tason normaalivektorin ja vektorin välisen kulman kosinin kanssa.

Ristitulo (ilman itseisarvoa) virittää määritelmänsä mukaisesti kahden vektorien muodostaman tason normaalivektorin $\overline{\mathrm{e}}$.

Tällöin voidaan todeta, että:

$$h = |\overline{c}|\cos(\overline{e}, \overline{c}) = |\overline{c}||\overline{\mathrm{e}}|\cos(\overline{\mathrm{e}}, \overline{c})$$

Yhdistämällä termit, saadaan:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_k \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot |\overline{a}||\overline{b}| \sin(\overline{a}, \overline{b}) \cdot |\overline{c}||\overline{\mathrm{e}}| \cos(\overline{\mathrm{e}}, \overline{c})$$

Koska vektorien $a$ ja $b$ välinen kulma on välillä $[0^o, 180^o]$ ja vektorien $e$ ja $c$ välinen kulma on välillä $[0^o, 90^o]$, kertoimen jälkeinen osa on varmasti sama kuin osan itseisarvo.

Tällöin:

$$= \frac{1}{6} \cdot \left| |\overline{a}||\overline{b}| \sin(\overline{a}, \overline{b}) \cdot |\overline{c}||\overline{\mathrm{e}}| \cos(\overline{\mathrm{e}}, \overline{c}) \right|$$

Vastaavasti tunnetaan, että:

$$\overline{abc} = (\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c} = |\overline{a}||\overline{b}| \sin(\overline{a}, \overline{b})\overline{\mathrm{e}} \cdot \overline{c} = |\overline{a}||\overline{b}| \sin(\overline{a}, \overline{b}) \cdot |\overline{\mathrm{e}}||\overline{c}| \cos(\overline{\mathrm{e}}, \overline{c})$$

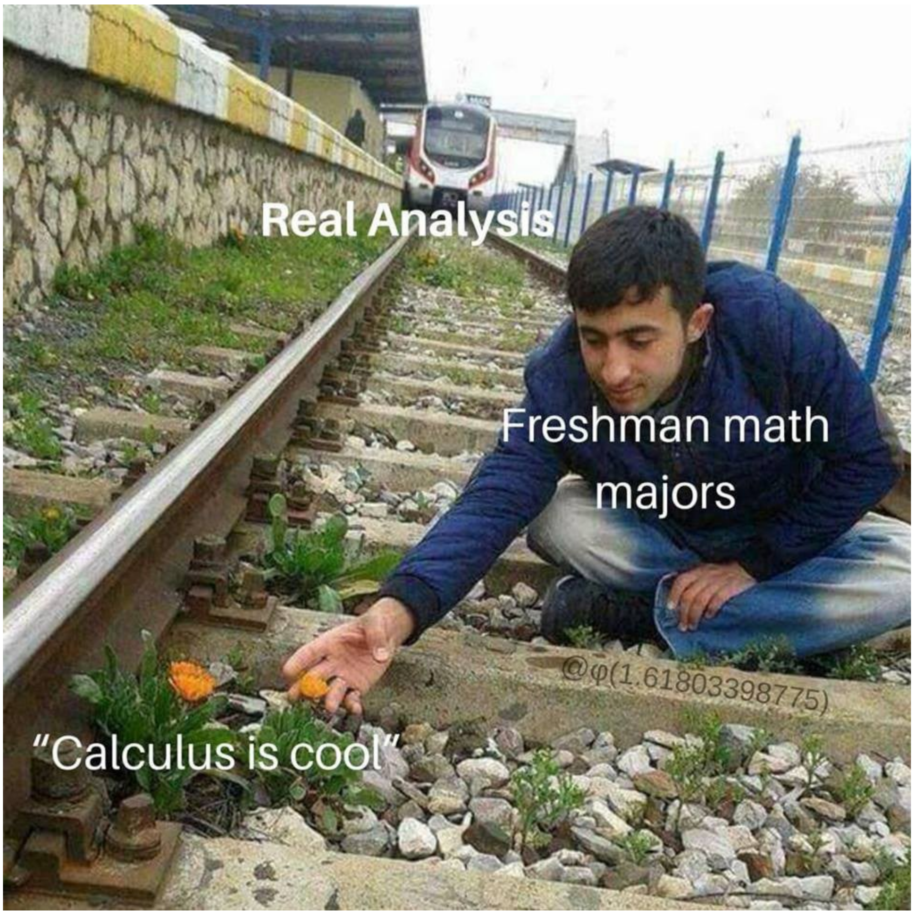
Koska tämän muodon itseisarvo on täsmälleen sama kuin aikaisemmin saatu muoto tilavuuden kaavalla, saadaan tetraedrin tilavuudelle suoraan yhteys:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_k \cdot h = \frac{1}{6} \cdot |\overline{abc}| \Leftrightarrow |\overline{abc}| = 6V$$

Mikä oli osoitettavana.

# 5 Loppusanat

Sinä pystyt siihen.




Kuva 10: Tämän taipaleen päätteeksi, matematiikan parissa jatkaville