

§ 15.

Vorgriff auf Analysis III

In Analysis III werden wir für gewisse Mengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und gewisse Funktionen $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ folgendes Integral definieren:

$$\int_A f(x) dx = \int_A f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n)$$

In diesem Paragraphen geben wir „Kochrezepte“ an, wie man solche Integrale für spezielle Mengen $A \subset \mathbb{R}^2$ (bzw. $A \subset \mathbb{R}^3$) und stetige Funktionen $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ berechnen kann.

I Der Fall $n = 2$:

Definition

Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $h_1, h_2 \in C[a, b]$ und $h_1 \leq h_2$ auf $[a, b]$.

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\}$$

$$(A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [a, b], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\})$$

heißt **Normalbereich** bezüglich der x -Achse (y -Achse).

Übung: A ist kompakt.

Satz 15.1 (Integral über Normalbereiche im \mathbb{R}^2)

Sei A wie oben und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_A f(x, y) d(x, y) &= \int_a^b \left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y) dy \right) dx \\ \left(\int_A f(x, y) d(x, y) &= \int_a^b \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy \right) \end{aligned}$$

Achtung: $\int_A f(x) dx$ nicht mit dem Wegintegral $\int_\gamma f(x) \cdot dx$ verwechseln!

Definition

Sei A ein Normalbereich bzgl. der x - oder y -Achse, so heißt:

$$|A| := \int_A 1 d(x, y)$$

der **Flächeninhalt** von A .

Beispiele:

- (1) Sei A ein Normalbereich bzgl. der x -Achse und seien h_1, h_2 wie oben. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |A| &= \int_A 1 \, d(x, y) \\ &\stackrel{15.1}{=} \int_a^b \left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} 1 \, dy \right) dx \\ &= \int_a^b (h_2(x) - h_1(x)) \, dx \end{aligned}$$

Ist z.B. $h_1 = 0$, so folgt:

$$|A| = \int_a^b h_2(x) \, dx$$

- (2) Sei $A = [a, b] \times [c, d]$, dann ist A Normalbereich bezüglich der x - **und** der y -Achse. Sei $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Es folgt aus 15.1.:

$$\begin{aligned} \int_A f(x, y) d(x, y) &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy \end{aligned}$$

- (3) Sei $r > 0$ und $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$. Dann ist A ein Normalbereich der x -Achse mit $h_1(x) := \sqrt{r^2 - x^2}$ und $h_2(x) := -\sqrt{r^2 - x^2}$ (mit $x \in [-r, r]$), und es gilt:

$$\begin{aligned} |A| &= \int_{-r}^r h_2(x) - h_1(x) \, dx \\ &= \int_{-r}^r 2\sqrt{r^2 - x^2} \, dx \\ &= \pi r^2 \end{aligned}$$

- (4) Sei $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1], x \leq y \leq \sqrt{x}\}$ und $f(x, y) = xy$. Dann gilt für $h_1(x) = x$ und $h_2(x) = \sqrt{x}$:

$$\begin{aligned} \int_A xy \, d(x, y) &= \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} xy \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\left[\frac{1}{2} xy^2 \right]_x^{\sqrt{x}} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x^3 \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

Da $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [0, 1], y^2 \leq x \leq y\}$ außerdem Normalbereich bzgl. der

y -Achse ist, gilt:

$$\begin{aligned}\int_A f(x, y) \, dy &= \int_0^1 \left(\int_{y^2}^y xy \, dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^2 y \right]_{y^2}^y dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} y^3 - \frac{1}{2} y^5 \, dy \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} y^4 - \frac{1}{6} y^6 \right]_0^1 = \frac{1}{24}\end{aligned}$$

II Der Fall $n = 3$:

Definition

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich bzgl. der x - oder der y -Achse, es seien $g_1, g_2 : A \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $g_1 \leq g_2$ auf A .

$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in A, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$$

heißt ein **Normalbereich** bezüglich der x - y -Ebene. Normalbereiche bzgl. der x - z - und y - z -Ebene werden analog definiert.

Satz 15.2 (Integral über Normalbereiche im \mathbb{R}^3)

Sei B wie oben und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann gilt:

$$\int_B f(x, y, z) \, d(x, y, z) = \int_A \left(\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) d(x, y)$$

Definition

B sei wie in 15.2.

$$\begin{aligned}|B| &:= \int_B 1 \, d(x, y, z) \\ &= \int_A (g_2(x, y) - g_1(x, y)) \, d(x, y)\end{aligned}$$

heißt **Volumen** von B .

Beispiele:

(1) Sei $B := [a, b] \times [c, d] \times [\alpha, \beta]$, dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_B f(x, y, z) \, d(x, y, z) &= \int_A \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x, y, z) \, dz \right) d(x, y) \\ &= \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx\end{aligned}$$

Dabei darf die Integrationsreihenfolge beliebig vertauscht werden.

- (2) Sei $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq h\}$ für ein $h > 0$. Dann setze $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, $g_1 = 0, g_2 = h$. Es gilt:

$$\begin{aligned} |B| &= \int_A h \, d(x, y) \\ &= h \int_A 1 \, d(x, y) \\ &= h \cdot |A| = h\pi \end{aligned}$$

Satz 15.3 (Eigenschaften von Integralen über Normalbereiche)

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ oder $B \subseteq \mathbb{R}^3$ und $f, g : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Je nach Definition von B sei $X = (x, y)$ oder $X = (x, y, z)$.

- (1) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_B \alpha f(X) + \beta g(X) \, dX = \alpha \int_B f(X) \, dX + \beta \int_B g(X) \, dX$$

- (2) Es gilt die bekannte Dreiecksungleichung:

$$\left| \int_B f(X) \, dX \right| \leq \int_B |f(X)| \, dX \leq |B| \cdot \max\{|f(X)| : X \in B\}$$

- (3) Ist $f \leq g$ auf B , so gilt:

$$\int_B f(X) \, dX \leq \int_B g(X) \, dX$$