

Algebra II Übung vom 27.4.06

Moduln

1.3

(a) **R-Untermoduln**

Eine Untergruppe N eines R -Moduls M heißt R -Untermodul von M , falls $R \cdot N \subseteq N$

Beispiel

- Jedes Ideal ist ein R -Untermodul von R
 - R^a ist Untermodul von R^b mit $a \leq b \in \mathbb{N}$
- (b) Kern und Bild R -linearer Abbildungen sind R -Moduln. Sei $\varphi : M \rightarrow N$ R -lineare Abbildung
- $\text{Kern}(\varphi)$: $m \in \text{Kern}(\varphi), r \in R$:
 $\varphi(rm) = r\varphi(m) = 0 \Rightarrow R \cdot \text{Kern}(\varphi) \subseteq \text{Kern}(\varphi)$; Untergruppe klar
 - $\text{Bild}(\varphi)$: $n \in \text{Bild}(\varphi)$, d. h. $\exists m : n = \varphi(m), m \in M \Rightarrow r \in R : rn = r\varphi(m) = \varphi(rm) \in \text{Bild}(\varphi) \Rightarrow R \cdot \text{Bild}(\varphi) \subseteq \text{Bild}(\varphi)$
- (c) Zu jedem Untermodul $N \subseteq M$ gibt es einen Faktormodul M/N (M abelsch \Rightarrow jedes N Normalteiler)
- M/N ist abelsche Gruppe
 - Wir definieren R -Aktion auf M/N durch $r(m + N) = rm + N$. Das ist wohldefiniert, denn
$$r((m + n) + N) = r(m + n) + N = rm + \underbrace{rn}_{\in N} + N = rm + N$$
 - $r((m + N) + (m' + N)) = r(m + m') + N = r(m + m') + N = rm + N + rm' + N = r(m + N) + r(m' + N)$
- (d) Homomorphiesatz: Für einen surjektiven Homomorphismus $\varphi : M \rightarrow N$ gilt: $M/\text{Kern}(\varphi) \cong N$ (Bild fehlt)
- Wohldefiniertheit von $\tilde{\varphi} : M/\text{Kern}(\varphi) \rightarrow N$:
Sei $k \in \text{Kern}(\varphi) : \varphi(m + k) = \varphi(m)$
 - surjektiv: $\forall n \in N : n = \varphi(m) = \tilde{\varphi}(m + \text{Kern}(\varphi))$
 - injektiv: $m, m' \in M$ mit $\varphi(m) = \varphi(m') = n \in N \Leftrightarrow \varphi(m - m') = 0 \rightarrow m + \text{Kern}(\varphi) = m' + \text{Kern}(\varphi)$

- $\tilde{\varphi}$ ist R -linear. Klar, wegen φ R -linear.
- (e) Direktes Produkt: Sei $\{M_i\}_{i \in I}$ eine beliebige Menge von Moduln. Dann ist ihr direktes Produkt $\prod_i M_i = X_i M_i$ gegeben durch die Menge aller Tupel $(m_i)_{i \in I}$ mit $m_i \in M_i$ und die R -Aktion $r(m_i)_{i \in I} = (rm_i)_{i \in I}$. Direkte Summe: Das gleiche wie beim direkten Produkt, jedoch dürfen in den Tupeln nur endlich viele $m_i \neq 0$ sein.

Beispiel $R^n = \underbrace{R \times \dots \times R}_{n\text{-mal}}$

1.4

- (f) - Freie Moduln verhalten sich wie Vektorräume Sei R ein Ring, M freier R -Modul $\{x_i\}_{i \in I}, x_i \neq x_j (i \neq j)$ Basis von M . Sei N weiterer R -Modul und $\{y_i\}_{i \in I}$ Familie von Elementen von N . Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\varphi : M \rightarrow N$ mit $\varphi(x_i) = y_i \quad \forall i \in I$

Beweis: Sei $x \in M$. Dann ist durch $x = \sum_i a_i x_i$ $\{a_i\}_{i \in I}$ eindeutig bestimmt.

Wir setzen: $\varphi(x) := \sum_i a_i y_i = \sum_i a_i \varphi(x_i)$

Korollar 1: Falls $\{y_i\}_{i \in I}, y_i \neq y_j (i \neq j)$ Basis von N ist, ist φ Isomorphismus

Beweis: wir können den Beweis des Satzes rückwärts anwenden $\Rightarrow \exists \psi : N \rightarrow M$ mit $\psi(y_i) = x_i \forall i \in I \Rightarrow \varphi \circ \psi = id_N, \psi \circ \varphi = id_M$

Korollar 2: Zwei freie Moduln mit gleicher Basis sind isomorph.

Proposition: Sei M freier Modul. Dann ist M^* wieder frei und hat dieselbe Dimension wie M

1.5 Proposition:

- (b) Sei $0 \rightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \rightarrow 0$ exakt.
Dann: $0 \rightarrow \text{Hom}(M'', N) \xrightarrow{\beta^*} \text{Hom}(M, N) \xrightarrow{\alpha^*} \text{Hom}(M', N) \rightarrow 0$ exakt.

Beweis:

- β^* inj: Für $\varphi \in \text{Hom}(M'', N)$ ist $\beta^*(\varphi) = \varphi \circ \beta$
Sei $\beta^*(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi \circ \beta = 0 \xrightarrow{\beta \text{ surj.}} \varphi = 0$.
 - $\text{Bild}(\beta^*) \subseteq \text{Kern}(\alpha^*)$: $(\alpha^* \circ \beta^*)(\varphi) = \alpha^*(\varphi \circ \beta) = \varphi \circ \underbrace{\beta \circ \alpha}_{=0} = 0$
 - $\text{Kern}(\alpha^*) \subseteq \text{Bild}(\beta^*)$: Sei $\psi \in \text{Kern}(\alpha^*)$. D. h. $\psi \in \text{Hom}(M, N)$ mit $\psi \circ \alpha = 0$
Weil ψ auf $\text{Bild}(\alpha)$ verschwindet, kommutiert DIAGRAMM
 $\Rightarrow \beta^*(\sigma) = \psi \Rightarrow \text{Beh.}$
- (c) im Allgemeinen sind β_* und α^* nicht surjektiv
z.B.:

$$\begin{aligned} \alpha: 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0 \text{ mit } N := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \text{Es gilt: } \text{Hom}(N, \mathbb{Z}) = \{0\} \\ \text{Hom}(N, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \{0, id\} \Rightarrow N \text{ nicht projektiv!} \\ \beta: 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 4} \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow 0 \text{ mit } N := 2 \cdot \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \\ \text{Hom}(\mathbb{Z}, N) = \{0, \Psi\}, \text{ wobei } \Psi(1) = 2. \\ \text{Dann: } \alpha^*(\Psi) = \Psi \circ \alpha = 0 \end{aligned}$$

Satz: (a) Ein R -Modul N ist genau dann injektiv, wenn DIAGRAMM kommutiert (Von M' nach N kommutiert mit Einbettung α von M' in M und einer lin. Abb.)
(b) Ein R -Modul N ist genau dann injektiv, falls DIAGRAMM kommutiert (ϕ nach (Ideal I einbettung in R) kommutiert mit abb von I nach N ..)