

# 1. Algebra Übung

Ferdinand Szekeresch

10. Januar 2017

## Aufgabe 1

$(M, \cdot)$  Magma,  $\mathcal{P}(M)$  Potenzmenge.

Für  $A, B \subseteq M : A * B := \{a \cdot b : a \in A, b \in B\}$ , d.h.  $x \in A * B \Leftrightarrow \exists a \in A, b \in B : x = ab$ .

dabei auch:  $x \in A * \emptyset \Leftrightarrow \exists a \in A, \underbrace{b \in \emptyset}_{\text{!}} : x = ab$

$\Rightarrow x \in A * \emptyset$  existiert nicht.  $\Rightarrow A * \emptyset = \emptyset$

a) Sei  $M$  kommutativ. Für alle  $A, B \subseteq M : A * B = \{a \cdot b : a \in A, b \in B\} = \{b \cdot a : b \in B, a \in A\} = B * A$   
 $\Rightarrow \mathcal{P}(M)$  ist kommutativ.

b) Sei  $M$  eine Halbgruppe, d.h. assoziativ. Für alle  $A, B, C \subseteq M :$   
 $(A * B) * C = \{x \cdot c : x \in A * B, c \in C\} = \{(a \cdot b) \cdot c : a \in A, b \in B, c \in C\} = \{a \cdot (b \cdot c) : a \in A, b \in B, c \in C\} = \{a \cdot y : a \in A, y \in B * C\} = A * (B * C)$   
 $\Rightarrow \mathcal{P}(M)$  ist assoziativ (Halbgruppe).

c) Sei  $M$  ein Monoid mit neutralem Element 1.

Zeige:  $\{1\}$  ist neutrales Element von  $\mathcal{P}(M)$ .

Für alle  $A \subseteq M : A * \{1\} = \{a \cdot 1 : a \in A\} = A = \{1 \cdot a : a \in A\} = \{1\} * A$

$\Rightarrow \mathcal{P}(M)$  ist Monoid mit neutralem Element  $\{1\}$  (Assoziativität nach b)).

Welche  $A \subseteq M$  sind invertierbar?

1. Fall  $A = \emptyset$

$\Rightarrow \forall B \subseteq M : \emptyset * B = B * \emptyset = \emptyset \neq \{1\}$

$\Rightarrow \emptyset$  ist nicht invertierbar.

2. Fall  $A = \{a_0\}$  einelementig

Behauptung:  $\{a_0\} \in \mathcal{P}(M)^\times \Leftrightarrow a_0 \in M^\times$

„  $\Rightarrow$  “  $\{a_0\}$  invertierbar  $\Rightarrow \exists B \subseteq M, B \neq \emptyset : \{a_0\} * B = B * \{a_0\} = \{1\}$   
 $b \in B \Rightarrow a_0 b = 1 = b a_0 \Rightarrow a_0$  invertierbar in  $M$  und  $a_0^{-1} = b \Rightarrow$   
 $B = \{a_0\}^{-1} = \{a_0^{-1}\}$

$$\begin{aligned} \text{„} \Leftarrow \text{“} \quad a_0 \in M^\times \\ \Rightarrow \{a_0\} * \{a_0^{-1}\} = \{a_0 a_0^{-1}\} = \{1\} = \{a_0^{-1}\} * \{a_0\} \\ \Rightarrow \{a_0\} \in \mathcal{P}(M)^\times \text{ und } \{a_0\}^{-1} = \{a_0^{-1}\}. \end{aligned}$$

3. Fall  $|A| \geq 2; a_1, a_2 \in A; a_1 \neq a_2$ .

Annahme:  $\exists B \subseteq M, B \neq \emptyset : A * B = B * A = \{1\}$

Sei  $b \in B \Rightarrow a_1 b = 1 = b a_1 \Rightarrow a_1 = b^{-1}$

$a_2 b = 1 = b a_2 \Rightarrow a_2 = b^{-1} \Rightarrow a_1 = a_2 \quad \nmid$

Fazit:  $A \subseteq M$  ist invertierbar  $\Leftrightarrow A = \{a_1\}$  für ein  $a_1 \in M^\times$ . In diesem Fall ist  $A^{-1} = \{a_1^{-1}\}$ .

d) Sei  $M$  eine Gruppe.

nach c):  $\mathcal{P}(M)$  ist ein Monoid mit neutralem Element  $\{1\}$ .

$\mathcal{P}(M)^\times = \{\{a\} : a \in M\}$

$\Rightarrow \emptyset$  ist nicht invertierbar  $\Rightarrow \mathcal{P}(M)$  ist keine Gruppe.

### Aufgabe 2

$(M, \cdot)$  Monoid mit neutralem Element 1. Voraussetzung:  $\forall x \in M : x^2 = 1$ .

- Zeige  $M$  ist Gruppe, also jedes  $x \in M$  ist invertierbar. Wähle  $y = x$ .
- $M$  ist abelsch. Seien  $x, y \in M \Rightarrow (xy)^2 = 1 \Rightarrow xyxy = 1 \Rightarrow xyxyyx = yx \Rightarrow xyx^2 = yx \Rightarrow xy = yx$ .

### Aufgabe 3

$$\begin{aligned} \text{a) } f &= X^3 + aX^2 + bX + c, \\ Y &:= X + \frac{a}{3} \text{ bzw. } X = Y - \frac{a}{3} \\ \Rightarrow f &= (Y - \frac{a}{3})^3 + a(Y - \frac{a}{3})^2 + b(Y - \frac{a}{3}) + c \\ &= (Y^3 - aY^2 + \frac{a^2}{3}Y - \frac{a^3}{27}) + a(Y^2 - \frac{2a}{3}Y + \frac{a^2}{9}) + b(Y - \frac{a}{3}) + c = Y^3 + \\ &\quad \underbrace{(b - \frac{a^3}{3})}_=:p Y + \underbrace{(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c)}=:q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } g &= Y^3 + pY + q, D := -4p^3 - 27q^2, D < 0 \\ \zeta &:= e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i \sin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ dritte Einheitswurzel} \\ \zeta^2 &= e^{\frac{4\pi i}{3}} = \cos(\frac{4\pi}{3}) + i \sin(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \zeta^3 &= 1 \\ 1 + \zeta + \zeta^2 &= 1 + (-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}) + (-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}) = 0. \\ \text{damit:} \\ (Y - (u + v))(Y - (\zeta u + \zeta^2 v))(Y - (\zeta^2 u + \zeta v)) &= \\ (Y - u - v)(Y - \zeta u - \zeta^2 v)(Y - \zeta^2 u - \zeta v) &= \dots = Y^3 + \underbrace{(-u(1 + \zeta + \zeta^2))}_{=0} - \underbrace{v(1 + \zeta + \zeta^2)}_{=0} Y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( -u^2 \underbrace{(1 + \zeta + \zeta^2)}_{=0} + v^2 \underbrace{(1 + \zeta + \zeta^2)}_{=0} + 3uv \underbrace{(\zeta + \zeta^2)}_{=-1} \right) Y + \left( -u^3 - v^3 - uv^2 \underbrace{(1 + \zeta + \zeta^2)}_{=0} - u^2v \underbrace{(1 + \zeta + \zeta^2)}_{=0} \right) \\
& = Y^3 - 3uvY - (u^3 + v^3)
\end{aligned}$$

$$\bullet -3uv = -3 \left( \frac{1}{2} \left( -q + \frac{1}{9} \sqrt{-3D} \right) \cdot \left( -q - \frac{1}{9} \sqrt{-3D} \right) \right)^{\frac{1}{3}} = -3 \left( \frac{1}{4} \left( q^2 - \frac{1}{81} (-3D) \right) \right)^{\frac{1}{3}} =$$

$$-3 \left( \frac{1}{4} \left( q^2 + \frac{1}{27} (-4p^3 - 27q^2) \right) \right)^{\frac{1}{3}} = -3 \left( -\frac{1}{27} p^3 \right)^{\frac{1}{3}} = p$$

$$\bullet -u^3 - v^3 = -\frac{1}{2} \left( -q + \frac{1}{9} \sqrt{-3D} \right) - \frac{1}{2} \left( -q - \frac{1}{9} \sqrt{-3D} \right) = q$$

$$\Rightarrow (Y - (u + v)) (Y - (\zeta u + \zeta^2 v)) (Y - (\zeta^2 u + \zeta v)) = Y^3 - 3uvY - (u^3 + v^3) = Y^3 + pY + q$$

■

Beispiel:  $f = X^3 + X^2 - X - 1, \quad Y = X + \frac{1}{3}$

$$\text{damit: } f = Y^3 - \underbrace{\frac{4}{3}}_{=:p} Y - \underbrace{\frac{16}{27}}_{=:q}, D = 0 \Rightarrow u = v = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow f = \left( Y - \frac{4}{3} \right) \left( Y - \frac{2}{3} (\zeta + \zeta^2) \right)^2 = \left( Y - \frac{4}{3} \right) \left( Y + \frac{2}{3} \right)^2 \\
& \stackrel{Y=X+\frac{1}{3}}{=} (X - 1)(X + 1)^2.
\end{aligned}$$