

4 Stetige Funktionen

Ab jetzt wird (fast) immer in \mathbb{R} gerechnet, insbesondere $B(x, r) = (x - r, x + r)$, $\overline{B}(x, r) = [x - r, x + r]$. Stets sei $D \neq \emptyset$.

4.1 Grenzwerte stetiger Funktionen

Definition 4.1. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Dann heißt die Menge $\overline{D} := \{x \in \mathbb{R} : \exists x_n \in D \ (n \in \mathbb{N}) \text{ mit } x_n \rightarrow x, n \rightarrow \infty\}$ der *Abschluss* von D . D heißt *abgeschlossen* (abg.) falls $D = \overline{D}$.

Bemerkung. Es gilt $D \subseteq \overline{D}$ (Betrachte für $x \in D$ die Folge $(x_n)_{n \geq 1} = (x)_{n \geq 1}$)

Beispiel. Sei $D = (0, 1]$, dann ist $\overline{D} = [0, 1]$

Beweis. Es gilt $0 \in \overline{D}$, da $\frac{1}{n} \in D, \frac{1}{n} \rightarrow 0 \ n \in \mathbb{N} \implies [0, 1] \subseteq \overline{D}$. Umgekehrt: Sei $x_n \in (0, 1] = D$ mit $x_n \rightarrow x$ für ein $x \in \mathbb{R}$. Satz 2.9: $0 \leq x \leq 1 \implies \overline{D} \subseteq [0, 1] \implies \text{Beh.}$ \square

Ebenso:

a) $\overline{\mathbb{R} \setminus \{0\}} = \mathbb{R}$

b) Abgeschlossene Intervalle im Sinne von Def. ?? sind abgeschlossen im Sinne von Def. 4.1, Bsp: $\overline{[0, 1]} = [0, 1]$.

Definition 4.2. Sei $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in \overline{D}, y_0 \in \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ *konvergiert* gegen den *Grenzwert* y_0 , wenn für *jede* Folge $(x_n)_{n \geq 1} \subseteq D$ mit $x_n \rightarrow x_0 \ (n \rightarrow \infty)$ gilt: $f(x_n) \rightarrow y_0 \ (n \rightarrow \infty)$. Man schreibt dann $y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ oder $f(x) \rightarrow y_0$ für $x \rightarrow x_0$. Wenn man zusätzlich $x_n < x_0$, bzw. $x_n > x_0 \ (\forall n \in \mathbb{N})$ fordert, dann spricht man vom *links-*, bzw. *rechtsseitigen Grenzwert* und schreibt $y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, bzw. $y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

Beispiel 4.3. a) Sei $D = \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 3, x_0 \in \mathbb{R}$. Sei $x_n \in \mathbb{R}, x_n \rightarrow x_0$. Dann $f(x_n) = x_n^2 + 3 \rightarrow x_0^2 + 3 \ (n \rightarrow \infty)$ nach Satz 2.7 $\implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x_0^2 + 3$

b) Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Setze

$$\mathbf{1}_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus M \end{cases} \quad (\text{charakteristische Funktion})$$

Behauptung. Sei $D = \mathbb{R}, f = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$. Dann: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existiert nicht.

Beweis. Wähle $x_n = (-1)^n \frac{1}{n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Dann

$$f(x_n) = \begin{cases} 1, & n \text{ gerade} \\ 0, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Sei $x_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Wenn $x_n > 0$, dann $f(x_n) = 1$. Wenn $x_n < 0$, dann $f(x_n) = 0$
 $\implies \exists \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \exists \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ \square

- c) Sei $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in D$. Dann: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existiert nicht, da $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, aber $f(\frac{1}{n}) = n$ divergiert ($n \rightarrow \infty$).

Satz 4.4 (ε - δ -Charakterisierung). Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{D}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

- a) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$
b) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \forall x \in D \cap \overline{B}(x_0, \delta_\varepsilon)$ gilt: $|f(x) - y_0| \leq \varepsilon$

Beweis. a) Es gelte 2). Sei $x_n \in D$ ($n \in \mathbb{N}$) mit $x_n \rightarrow x_0$ beliebig gegeben ($n \rightarrow \infty$). Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta_\varepsilon > 0$ aus 2). Dann $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_0| \leq \delta_\varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$. 2) liefert: $|f(x_n) - y_0| \leq \varepsilon$ ($\forall n \geq N_\varepsilon$) $\implies f(x_n) \rightarrow y_0, n \rightarrow \infty \implies 1)$

- b) Es gelte 1). Annahme: 2) sei falsch. Daraus folgt mit $\delta = \frac{1}{n}$: $\exists \varepsilon_\delta > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in D$ mit $|x_0 - x_n| \leq \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - y_0| > \varepsilon_0$, d. h. $x_n \rightarrow x_0$ (Satz 2.9) und $f(x_n) \not\rightarrow y_0$ ($n \rightarrow \infty$) $\nRightarrow 2$ \square

Satz 4.5. Es seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{D}$, $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$, sodass $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$, $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = z_0$. Dann gelten:

- a) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = y_0 + z_0$
b) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = y_0z_0$
c) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |y_0|$
d) Sei zusätzlich $y_0 \neq 0$. Dann $\exists r > 0$, sodass $|f(x)| \geq \frac{|y_0|}{2} > 0$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| \leq r$. Ferner $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{y_0}$
e) Sei zusätzlich $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in D$. Dann gilt $x_0 \leq z_0$. (Entsprechendes gilt für $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm}$)

Beweis. c) Sei $x_n \in D$ ($n \in \mathbb{N}$) mit $x_n \rightarrow x_0$ ($n \rightarrow \infty$) beliebig gewählt. $\xrightarrow{\text{n. V.}}$
 $f(x_n) \rightarrow y_0 \xrightarrow{2.11} |f(x_n)| \rightarrow |y_0|$ ($n \rightarrow \infty$) \implies Behauptung

- d) Wähle $\varepsilon = \frac{|y_0|}{2} > 0$. Nach Teil 3 und Satz 4.4 $\exists r = \delta_\varepsilon > 0$, sodass für alle $x \in D \cap \overline{B}(x_0, r)$ gilt $\frac{|y_0|}{2} \geq ||f(x)| - |y_0|| \geq |y_0| - |f(x)| \iff |f(x)| \geq \frac{|y_0|}{2}$. Sei nun $x_n \rightarrow x_0$ ($n \rightarrow \infty$) mit $x_n \in D \cap \overline{B}(x_0, r) \xrightarrow{\text{n.V.}} f(x_n) \rightarrow y_0 \xrightarrow{2.7} \frac{1}{f(x_n)} \rightarrow \frac{1}{y_0}$ ($n \rightarrow \infty$) \implies Behauptung
- a), b), e) gehen genauso mit Satz 2.7 und Satz 2.9. \square

Uneigentliche Grenzwerte

Definition. Erweiterte Zahlengerade $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (man schreibt oft ∞ statt $+\infty$). Ordnung: $-\infty < x < +\infty$ ($\forall x \in \mathbb{R}$), $|\pm\infty| := +\infty$

Definition 4.6. Man schreibt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ ($-\infty$) für $x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, falls:

$$\forall K \in \mathbb{N} \exists N_K \in \mathbb{N} \forall n \geq N_K: x_n \geq K \quad (x_n \leq -K)$$

Damit $n^2 \rightarrow \infty$, $-n^3 \rightarrow -\infty$ ($n \rightarrow \infty$). *Beachte:* $((-1)^n)$ divergiert nach wie vor.

Bemerkung 4.7. a) Wenn $x_n \rightarrow \infty$ oder $x_n \rightarrow -\infty$, dann $\frac{1}{x_n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). (Beachte, nach Def. 4.6 gilt: $x_n \neq 0$, $n \geq N_1$)

b) Wenn $x_n \rightarrow 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n > 0$ für alle $n \geq n_0$, dann geht $\frac{1}{x_n} \rightarrow +\infty$

c) Wenn $x_n \rightarrow 0$, $x_n < 0$ ($\forall n \geq n_0$), dann $\frac{1}{x_n} \rightarrow -\infty$

Beweis. a) Sei $x_n \rightarrow +\infty$ oder $x_n \rightarrow -\infty$ ($n \rightarrow \infty$). Nach Def. 4.6 gilt

$$\forall K \in \mathbb{N} \exists N_K \in \mathbb{N} \forall n \geq N_K: |x_n| \geq K \iff 0 < \frac{1}{|x_n|} \leq \frac{1}{K} =: \varepsilon,$$

d. h. $\frac{1}{x_n} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

b), c) zeigt man ähnlich. \square

In Anbetracht von 4.7.1) schreibt man

$$\frac{x}{\pm\infty} = 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (4.1)$$

(damit gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$ auch in Bem. 4.7.1) Wenn (x_n) nach oben (nach unten) unbeschränkt ist (wobei $x_n \in \mathbb{R}$) dann setzt man $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n := \infty$ $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n := -\infty$. Mit identischem Beweis gelten dann Wurzel- und Quotientenkriterium ohne die jeweilige Beschränktheitsvoraussetzung. Ferner liefert (4.1) und Bem. 4.7 in Thm. 3.28

$$\varrho = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

Gilt auch wenn $\sqrt[k]{|a_k|}$ unbeschränkt ($\varrho = \frac{1}{\infty} = 0$) oder wenn $\sqrt[k]{|a_k|} \rightarrow 0^+$ ($k \rightarrow \infty$) („ $\varrho = \frac{1}{0^+} = +\infty$ “). Weiter schreibt man $\sup D = +\infty$ wenn $D \subseteq \mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt ist, sowie $\inf D = -\infty$, wenn D nach unten unbeschränkt ist.

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{D}$, $y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Dann definiert man $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0$ wie in Def. 4.2, d. h. für alle $x_n \rightarrow x_0$ muss $f(x_n) \rightarrow y_0$ in $\overline{\mathbb{R}}$ gelten. Dabei ist $+\infty \in \overline{D}$ wenn $\sup D = \infty$ und $-\infty \in \overline{D}$, wenn $\inf D = -\infty$.

Beispiel. Mit Bem. 4.7 folgt $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ und $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$.

4.2 Eigenschaften stetiger Funktionen

Definition 4.8. Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Dann heißt f *stetig in x_0* , falls $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, d. h. für jede Folge $(x_n) \subseteq D$ mit $x_n \rightarrow x_0$ ($n \rightarrow \infty$) gilt: $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ ($n \rightarrow \infty$). f heißt stetig (auf D), wenn f für alle $x_0 \in D$ stetig ist. Man schreibt: $C(D) = \{f : D \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ stetig}\}$.

Beispiel 4.9 (vgl. 4.3). a) Sei $D = \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ (fest gegeben). Dann sind die Funktionen $f(x) = c$, $g(x) = x$ ($x \in \mathbb{R}$) stetig auf \mathbb{R} .

b) Sei $D = \mathbb{R}_+$, $x_0, x_n \in D$. Übung: Wenn $x_n \rightarrow x_0$, dann $\sqrt{x_n} \rightarrow \sqrt{x_0}$ ($n \rightarrow \infty$). Also ist $f(x) = \sqrt{x}$ stetig auf \mathbb{R}_+

c) Sei $D = \mathbb{R}$ und $f = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$. $\implies f$ ist stetig für $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ aber unstetig für $x_0 = 0$, $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

d) Sei $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann ist $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in D$ stetig auf D

e) Sei $D = \mathbb{R}$, $f(x) = \dots \implies f$ unstetig in $x_0 = 0$, da $\nexists \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

Definition. Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann definiere man die Funktion $f + g : D \rightarrow \mathbb{R}$ punktweise durch $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ ($x \in D$). Analog definiere man die Funktionen αf , $f \cdot g$, $|f|$ und $\frac{1}{f}$ (soweit $f(x) \neq 0$). Ferner sei $f(D) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in D : f(x) = y\}$ und $h : f(D) \rightarrow \mathbb{R}$. Dann definiert man die *Komposition* $h \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$ durch $(h \circ f)(x) = h(f(x))$, $x \in D$.

Satz 4.10. Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, sowie $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in x_0 und $h : f(D) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $f(x_0)$. Dann sind die Funktionen $f + g$, fg (speziell αg), $|f|$, $h \circ f$ stetig bei x_0 . Wenn $f(x_0) \neq 0$, dann existiert nach Satz 4.5 ein $\delta > 0$ mit $f(x) \neq 0$ für $x \in \overline{B}(x_0, \delta) \cap D := \tilde{D}$. Ferner ist $\frac{1}{f} : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in x_0 . (Also: $C(D)$ ist ein Vektorraum).

Beweis (beispielhaft).. Sei $x_n \in D$ mit $x_n \rightarrow x_0$ ($n \rightarrow \infty$). Dann $f(x_n) \in f(D)$, $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ ($n \rightarrow \infty$) (da f stetig in x_0). Also: $h(f(x_n)) \rightarrow h(f(x_0))$, da h stetig in $f(x_0)$ ($n \rightarrow \infty$). Somit ist $h \circ f$ stetig in x_0 . Der Rest folgt analog mit Satz 4.5. \square

Beispiel 4.11 (Satz 4.10 liefert:). a) Polynome sind auf \mathbb{R} stetig, da sie aus $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$ zusammengesetzt sind.

b) Rationale Funktionen $f = \frac{p}{q}$ sind auf $D = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$ stetig, als Quotient der Polynome p, q .

c) $f(x) = \sqrt{1+3|x|}$ ist stetig auf $D = \mathbb{R}$, da $f = w \cdot g$ mit $w(y) = \sqrt{y}$ und $g(x) = 1 + 3|x|$, $g = 1 + 3|p_1|$.

Theorem 4.12. Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\varrho > 0$. Dann ist $f : B(0, \varrho) = (-\varrho, \varrho) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, d. h.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \quad (x_0 \in B(0, \varrho))$$

Beispiel. Stetig auf \mathbb{R} sind \sin, \cos, \exp sowie $f(x) = \exp(1+2x^2)$ ($x \in \mathbb{R}$), da $f = \exp p$, $p(x) = 1 + 2x^2$ (Hier sei vorübergehend $B(0, \infty) = \mathbb{R}$).

Beweis des Theorems.. Sei $x_0, x_n \in (-\varrho, \varrho)$ mit $x_n \rightarrow x_0$ ($n \rightarrow \infty$). Setze $d := \varrho - |x_0| > 0 \implies \exists x_0 \in \mathbb{N} : |x_n - x_0| \leq \frac{d}{2} \ (\forall n \geq n_0)$

$$\implies |x_n| \leq |x_n - x_0| + |x_0| \leq \dots + |x_0| = \varrho - \frac{d}{2} < \varrho \quad (n \geq n_0) \quad (*)$$

Setze $r = \varrho - \dots$. Dann (nach Thm. 3.28) $\exists \dots$ Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, fest gegeben. Dann $\exists J_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass

$$\sum_{j=J_\varepsilon+1}^{\infty} |a_j| r^j \leq \varepsilon \quad (**)$$

Setze $p_\varepsilon(x) = \dots$ □

Satz 4.13. Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Dann sind äquivalent:

a) f ist stetig in x_0

b) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \forall x \in D \cap \overline{B}(x_0, \delta_\varepsilon) : |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$

c) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : f(D \cap \overline{B}(x_0, \delta_\varepsilon)) : \dots$

Beweis. ... □

Definition 4.14. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. f heißt *gleichmäßig stetig* (glm stetig), wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \forall x, y \in D \text{ mit } |x - y| \leq \delta_\varepsilon \text{ gilt } |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \quad (4.2)$$

(Im Gegensatz zu 4.132 hängt δ_ε nicht von x_0 ab).

Beispiel 4.15. a) Sei $D = (0, 1]$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Sei $\varepsilon_0 = 1$, sei $\delta > 0$ beliebig. Wähle $x \in (0, 1]$ mit $x \leq 2\delta$, $y = \frac{x}{2} \implies |x - y| = \frac{x}{2} \leq \delta$

b) Sei $D = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Sei $\varepsilon_0 = 1$, sei $\delta > 0$ beliebig. Wähle $x = \delta + \frac{1}{\delta}$, $y = \frac{1}{\delta} \implies |x - y| = \delta$, aber $|f(x) - f(y)| \dots > 1 = \varepsilon_0 \implies f$ nicht glm stetig, obwohl f stetig.

4.3 Hauptsätze über stetige Funktionen

Theorem 4.16. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen und beschränkt, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Dann: f ist glm. stetig. (Beispiel: $D = [a, b]$)

Beweis. Annahme: f sei nicht glm. stetig. (4.2) (mit $\delta = \frac{1}{n}$) liefert:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n, y_n \in D : |x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}, |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0 \quad (*)$$

D beschränkt, Thm. 2.21 (=BW) $\implies \exists$ TF $x_{n_k} \rightarrow x$ ($k \rightarrow \infty$), $y_{n_{k_l}} \rightarrow y$ ($l \rightarrow \infty$)
 $\implies x, y \in \overline{D} \stackrel{\text{n.V.}}{=} D$. Ferner:

$$|x - y| \leq |x - y_{n_{k_l}}| + \underbrace{|x_{n_{k_l}} - y_{n_{k_l}}|}_{\stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{n_{k_l}}} + |y_{n_{k_l}} - y| \rightarrow 0 \quad (l \rightarrow \infty)$$

$\xrightarrow{1.20.3} x = y$. f stetig: $f(x_{n_{k_l}}) - f(y_{n_{k_l}}) \rightarrow f(x) - f(y) = f(x) - f(x) = 0$ ($l \rightarrow \infty$) \nmid
 (*) \square

Definition 4.17. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ nicht abgeschlossen. $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{D} \setminus D$. Die Funktion $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D \\ y_0, & x = x_0 \end{cases}$ (definiert auf $\tilde{D} = D \cup \{x_0\}$) heißt *stetige Fortsetzung* von f in x_0 , wenn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$.

Beispiel 4.18. a) Sei $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, $x \in D$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$

$$\implies \tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} = x+1, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}, \text{ also } \tilde{f}(x) = x+1, x \in \tilde{D} = \mathbb{R}.$$

Da \tilde{f} stetig auf \mathbb{R} , ist f in 1 stetig fortsetzbar. (Wenn man $y_0 = 3$ setzen würde, wäre \tilde{f} keine stetige Fortsetzung).

b) Sei $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nicht stetig fortsetzbar sind $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$, da jeweils $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ nicht existiert. (siehe Bsp. 4.3)

Satz 4.19. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in \overline{D} \setminus D$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann:

- a) Wenn f auf D gleichmäßig stetig ist, dann hat f in x_0 eine stetige Fortsetzung.
- b) Wenn $\tilde{D} = D \cup \{x_0\}$ abgeschlossen und beschränkt ist und f in x_0 stetig fortsetzbar ist, dann ist f mit D gleichmäßig stetig.

Beweis. b) Thm. 4.16: \tilde{f} ist gleichmäßig stetig auf \tilde{D} . $\implies f$ gleichmäßig stetig auf D .

a) Sei f gleichmäßig stetig.

- a) Sei $x_n \in D$ mit $x_n \rightarrow x_0$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Sei δ_ε aus (4.2). Dann:
 $\exists N_\varepsilon : |x_n - x_0| \leq \frac{\delta_\varepsilon}{2} \quad (\forall n \geq N_\varepsilon) \implies |x_n - x_m| \leq |x_n - x_0| + |x_0 - x_m| \leq \delta_\varepsilon \quad (\forall n, m \geq N_\varepsilon) \xrightarrow{(4.2)} |f(x_n) - f(x_m)| \leq \varepsilon \quad (\forall n, m \geq N_\varepsilon)$. Thm. 2.26
 $\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) =: y_0$
- b) Sei \tilde{x}_n in D eine weitere Folge mit $\tilde{x}_n \rightarrow x_0$. Dann $\exists \tilde{N}_\varepsilon \geq N_\varepsilon$ mit $|\tilde{x}_n - x_0| \leq \frac{\delta_\varepsilon}{2} \quad (\forall n \geq \tilde{N}_\varepsilon) \implies |x_n - \tilde{x}_n| \leq |x_n - x_0| + |x_0 - \tilde{x}_n| \leq \delta_\varepsilon \quad (\forall n \geq \tilde{N}_\varepsilon)$
 $\xrightarrow{(4.2)} |f(x_n) - f(\tilde{x}_n)| \leq \varepsilon \quad (\forall n \geq \tilde{N}_\varepsilon) \implies |f(\tilde{x}_n) - y_0| \leq |f(\tilde{x}_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - y_0| \stackrel{1)}{\leq} \varepsilon + \lim_{m \rightarrow \infty} |f(x_n) - f(x_m)| \stackrel{1)}{\leq} 2\varepsilon \quad (\forall n \geq \tilde{N}_\varepsilon) \implies f(\tilde{x}_n) \rightarrow y_0 \implies \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$.

□

Theorem 4.20 (Satz vom Maximum). Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen und beschränkt und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann $\exists x_\pm \in D$ mit $f(x_+) = \max_{x \in D} f(x)$, $f(x_-) = \min_{x \in D} f(x)$. Insbesondere ist f beschränkt, d. h. $|f(x)| \leq M \quad (:= \max\{f(x_+), f(x_-)\})$, $\forall x \in D$.

Beweis. a) ...

b) ...

□

Korollar 4.21. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen und beschränkt, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $f(x) > 0 \quad \forall x \in D$. Dann: $f(x) \geq f(x_-) > 0 \quad (\forall x \in D)$, (wobei $x_- \in D$ aus Thm. 4.20).

Beispiel. Wenn D nicht abgeschlossen oder unbeschränkt, dann sind Thm. und Kor. im Allgemeinen falsch.

a) $D = (0, 1]$, $f(x) = \frac{1}{x}$. $D = \mathbb{R}_+$, $g(x) = x$. $\implies f, g$ stetig und unbeschränkt.

b) $D = [1, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x \geq 1$. Aber $\inf_{x \in D} f(x) = 0$.

Frage. Wie sieht Bild von f aus? $f(D)$ kann Lücken haben, wenn:

Theorem 4.22 (Zwischenwertsatz/ZWS). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann: $f([a, b]) = [\min_{[a, b]} f, \max_{[a, b]} f]$. Also: $\forall y_0 \in [\min f, \max f] \exists x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = y_0$.

Beweis. ...

□

Korollar 4.23 (Nullstellensatz). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f(a) \cdot f(b) \leq 0$. Dann $\exists x_* \in [a, b] : f(x_*) = 0$.

Beweis. Nach Voraussetzung $f(x) \leq 0 \leq f(b)$, $f(b) \leq 0 \leq f(a) \implies 0 \in f([a, b])$. ZWS \implies Beh. □

Korollar 4.24. Sei I ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(I)$ ein Intervall (Intervallsatz).

Beweis. Annahme: $f(I)$ sei kein Intervall $\implies \exists a, b \in I$ mit $y := f(a) < f(b) =: z$ und $u \in (y, z)$ mit $u \notin f(I)$. Sei etwa $a < b$. ZWS $\implies f([a, b])$ Intervall, $y, z \in f([a, b]) \implies u \in f([a, b]) \implies \text{falsch}$ \square

Beispiel 4.25. a) $D = \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^k$ ($k \in \mathbb{N}$ fest). Dann f stetig, $f(0) = 0$, $f(x) \geq 0$ ($\forall x \geq 0$), $f(n) \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$). Kor. 4.24: $f(\mathbb{R}_+) = \text{Intervall} \implies f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$

b) Suche $x_0 \geq 0$: $\exp(-x_0) = x_0 \iff f(x_0) = \exp(-x_0) - x_0 = 0$. Hier f stetig: $f(0) = 1$, $f(1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$. 4.23 $\implies \exists x_0 : f(x_0) = 0$.

Definition 4.26.

Beispiel. a) ...

b) ...

Bemerkung 4.27.

Beweis. \square

Theorem 4.28.

Beweis. \square

Beispiel 4.29.

4.4 Exponentialfunktion und ihre Verwandtschaft

...

Definition 4.30.

Definition 4.31.

Bemerkung 4.32. ...

a) ...

b) ...

c) ...

d) ...

e) ...

f) ...

Trigonometrische Funktionen

...

Satz 4.33.

Definition.

...

Definition 4.34.

Definition 4.35.

Beispiel 4.36.