5 Differentialrechnung

Stets sei I ein Intervall das stets mehr als einen Punkt enthält.

5.1 Rechenregeln

Ziel: Finde beste lineare Approximation für f nahe bei x_0. *Idee*: Betrachte Tangente bei $(x_0, f(x_0))$
$t(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$, wobei $m =$ Tangentensteigung in $x_0 =$ Grenzwert der Steigung der Sekante in x_0, x_1 also $s(x) = f(x_0) + \underbrace{\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x - x_0}}_{m(x_1)}(x - x_0)$

Definition 5.1. $f : I \to \mathbb{R}$ ist in $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar(diff'bar), falls $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =: f'(x_0) = \frac{\delta f}{\delta x}(x_0)$ $f'(x_0)$ heißt Ableitung von f an x. f heißt diff'bar (auf I), wenn f in jedem $x_0 \in I$ diff'bar ist. Damm definiert man iterativ $f'' = (f')', f^(n) = (f^(n-1))'$ $(n \in \mathbb{N})$ die n-te Ableitung. Entsprechend def. man die rechts/linksseite Ableitung:

$$\frac{\mathrm{d} \pm f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{x \to x_0 \pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{5.1}$$

Beweis. a) Die Fkt. $g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ist für I
$\{x_0\}$ definiert

b) Wenn $I = [a, b]$ und $x_0 = a, b$, dann stimmen überein soweit existent.

c) Sei f ind x diff'bar. Sei $g(x) = f(x_0) + a(x - x_0)$ mit $a \neq f'(x_0)$ eine weitere Gerade durch $(x_0, f(x_0))$. *Beh.* $\exists \delta > 0 : |f(x) - g(x)| > |f(x)| - t(x)|$ für alle $x \in I$
$\{x_0\}$, $|x - x_0| < \delta$

Beweis. $\left|\frac{f(x)-g(x)}{x-x_0}\right| = \left|\frac{f(x)-f(x_0}{x-x_0} - q\right| \to |f'(x_0) - a| \neq 0, x \to x_0$ genauso: $\left|\frac{f(x)-t(x)}{x-x_0}\right| \to 0, x \to x_0 \implies \exists \delta > 0 : \forall x \in I$
$\{x_0\}$ mit $|x - x_0| < \delta : \left|\frac{f(x)-g(x)}{x-x_0}\right| \geq \frac{1}{2}|f'(x_0) - a| > \frac{1}{4}|f'(x_0) - a| \geq \left|\frac{f(x)-t(x)}{x-x_0}\right| \implies$ Beh. □

d) Andere Interpretation:
Sei $u(t) \in \mathbb{R}$ eine Größe zur Zeit $t \in \mathbb{R}$ (z.B. Stoffmenge, Ort) und $h > 0$. Dann ist $\frac{1}{h}u(t + h) - u(t))$ der mittlere Zuwachs der Größe im Zeitintervall $[t, t + h]$. Somit

ist $n'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(u(t+h) - u(t))$ die momentane Änderungsgeschwindigkeit der Größe. $u''(t)$ ist die Beschleunigung.

□

Beispiel 5.2. a) Seien $a, m \in \mathbb{R}$ fest gegeben. Setzte $f(x) = mx + a$, $x \in \mathbb{R}$. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann $\frac{f(x)-f(x_0}{x-x_0} = m(\forall x \neq x_0)$. $\implies \exists f'(x_0) = m$

b) $f(x) = |x|$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann $\exists f'(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$ Ferner $\exists \frac{\mathrm{d}^+ f}{\mathrm{d}x}(0) =$

c) ...

Satz 5.3.

Beweis. □

Satz 5.4. ...

a) ...

b) ...

c) ...

Beweis. a) ...

b) ...

c) ...

□

Korollar 5.5.

Satz 5.6.

Beweis. □

Satz 5.7.

Bemerkung.

Beweis. □

Beispiel 5.8. a) ...

b) ...

Theorem 5.9.

Beweis. a) ...

b) ...

□

Beispiel 5.10. a) ...

b) ...

c) ...

d) ...

e) ...

Beispiel 5.11.

Definition 5.12.

Bemerkung.

5.2 Qualitative Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

Definition 5.13.

Satz 5.14. *a) ...*

b) ...

c) ...

Beweis. □

Bemerkung.

Beispiel.

Beweis. □

Theorem 5.15.

Beweis. □

Satz 5.16.

Beweis. □

Definition 5.17.

Bemerkung 5.18. a) ...

b) ...

c) ...

Korollar 5.19.

Beweis. □

Satz 5.20. *a) ...*

b) ...

Bemerkung.

Beweis. □

Beispiel 5.21.

Beweis. □

Korollar 5.22. *a) ...*

b) ...

Bemerkung.

Beweis. a) ...

b) ...

□

Definition 5.23.

Bemerkung.

Satz 5.24.

Beispiel 5.25. a) ...

Beweis. □

Beispiel 5.26. a) ...

Beweis. □

Theorem 5.27. *a) ...*

b) ...

Beweis. □

Beispiel 5.28. a) ...

b) ...

c) ...

d) ...

5.3 Der Satz von Taylor

Theorem 5.29.

Beweis. □

Definition 5.30.

Bemerkung 5.31. a) ...

b) ...

Theorem 5.32. *a) ...*

b) ...

c) ...

Beispiel.

Beweis. □

Definition 5.33.

Beispiel 5.34. a) ...

b) ...

c) ...

Newton-Verfahren

Theorem 5.35.

Beweis. □

Beispiel 5.36.