14. Laurententwicklung

Für $z_0 \in \mathbb{C}$: $U_\infty(z_0) := \mathbb{C}$, $\dot{U}_\infty(z_0) = \mathbb{C}\backslash\{z_0\}$, $\frac{1}{0} := \infty$. Erinnerung: Satz 9.5: Sei γ ein stückweise glatter Weg in $\mathbb{C}$, $\varphi \in C(\mathrm{Tr}(\gamma))$ und $g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w-z}dw$ $(z \in \mathbb{C}\backslash\mathrm{Tr}(\gamma))$. Dann:
$g \in H(\mathbb{C}\backslash\mathrm{Tr}(\gamma))$.

Satz 14.1
Seien $0 \leq r < R \leq \infty$; $A := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ und $f \in H(A)$. Für $s \in (r, R)$ sei $\gamma_s(t) := se^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ und $J(s) := \int_{\gamma_s} f(z)dz$.
Dann ist J konstant auf (r, R).

Beweis
$g(z) := zf(z)$ $(z \in A)$. Dann: $f(z) = \frac{g(z)}{z}$ und $g \in H(A)$.
$J(s) = \int_{\gamma_s} \frac{g(z)}{z}(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{g(se^{it})}{se^{it}} sie^{it}dt = \int_0^{2\pi} ig(se^{it})dt$
J ist auf (r, R) db und $J'(s) = \int_0^{2\pi} i\frac{d}{ds}g(se^{it})dt = \int_0^{2\pi} ig'(se^{it})e^{it}dt = \frac{1}{s}\int_0^{2\pi} g'(se^{it})sie^{it}dt = \frac{1}{s}\int_0^{2\pi} g'(\gamma_s(t))\gamma_s'(t)dt = \frac{1}{s}\int_{\gamma_s} g'(z)dz \overset{8.5}{=} 0 \Rightarrow J(s)$ konstant. ■

Satz 14.2 (Laurententwicklung)
Sei A wie in 14.1 und $f \in H(A)$. Dann existieren eindeutig bestimmte Funktionen $g \in H(U_R(0))$ und $h \in H(U_{\frac{1}{r}}(0))$ mit:
(*) $f(z) = g(z) + h(\frac{1}{z})$ $\forall z \in A$ und $h(0) = 0$
(*) heißt die Laurentzerlegung von f, g heißt Nebenteil von f und die Funktion $z \to h(\frac{1}{z})$ ist der Hauptteil von f.

Beispiel
$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ $A = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ $(r = 0, R = \infty)$. Es gilt:
$f(z) = 1 + (e^{\frac{1}{z}} - 1)$, also $g(z) = 1$, $h(z) = e^z - 1$

Beweis

1. Eindeutigkeit: es sei $g, g_1 \in H(U_R(0))$, $h, h_1 \in H(U_{\frac{1}{r}}(0))$; $h_1(0) = 0 = h(0)$ und $g(z) + h(\frac{1}{z}) = f(z) = g_1(z) + h_1(\frac{1}{z})$ $\forall z \in A$.
   $G := g - g_1 \in H(U_R(0))$, $H := h_1 - h \in H(U_{\frac{1}{r}}(0))$
   $\Rightarrow G(z) = H(\frac{1}{z})$ $\forall z \in A$ Dann ist $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definiert durch
   $F(z) = \begin{cases} G(z) & (|z| < R) \\ H(\frac{1}{z}) & (|z| > r) \end{cases}$ auf $\mathbb{C}$ wohldefiniert. $F \in H(\mathbb{C})$.
   Sei (z_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ und $|z_n| \to \infty$. Dann $(\frac{1}{z}) \to 0$ und $z_n > r$ $\forall n \geq n_0$. $F(z_n) =$

$H(\frac{1}{z_n}) = h_1(\frac{1}{z_n}) - h(\frac{1}{z_n}) \to h_1(0) - h(0) = 0$
Also $F(z) \to 0$ ($|z| \to \infty$) Somit:
$\exists \varrho > 0 : |F(z)| \leq 1 \; \forall z \in \mathbb{C} \backslash U_\varrho(0)$. F stetig auf $\overline{U_\varrho(0)} \Rightarrow F$ ist auf $\mathbb{C}$ beschränkt. 10.2 $\Rightarrow$ F ist auf $\mathbb{C}$ konstant; wegen $F(z) \to 0$ ($z \to \infty$) folgt: $F \equiv 0$

2. Existenz: fehlt hier nicht was ? Doch! ∎

Definition
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Folge in $\mathbb{C}, z_0 \in \mathbb{C}$ und $A \subseteq \mathbb{C}$. Eine Reihe der Form $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ heißt eine **Laurentreihe**.
Diese Reihe heißt in $z \in \mathbb{C}$ (absolut) konvergent $:\Longleftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ konvergieren (absolut).
In diesem Fall: $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$. Die Laurentreihe heißt auf A (lokal) gleichmäßig konvergent $:\Longleftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ konvergieren auf A (lokal) gleichmäßig.

Satz 14.3
Sei $0 \leq r < R \leq \infty$, $A := \{z \in \mathbb{C} : r < |z-z_0| < R\}$ und $f \in H(A)$.
Dann hat f auf A die **Laurententwicklung** $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Die Laurentreihe konvergiert auf A absolut und lokal gleichmäßig. Die Koeffizienten a_n ($n \in \mathbb{Z}$) sind eindeutig bestimmt. Ist $r < \rho < R$ und $\gamma(t) := z_0 + \rho e^{it}$ $t \in [0, 2\pi]$, so gilt:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \; \forall n \in \mathbb{Z} .$$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ heißt **Nebenteil** von f,
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \ldots$ heißt der **Hauptteil** von f.

Beweis
O.B.d.A: $z_0 = 0$. 14.2 $\Rightarrow \exists g \in H(U_R(0)), \exists h \in H(U_{\frac{1}{r}}(0)) : f(z) = g(z) + h(\frac{1}{z}) \; \forall z \in A$ und $h(0) = 0$. 10.4 $\Rightarrow g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \; \forall z \in U_R(0)$ und $h(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n \; \forall z \in U_{\frac{1}{r}}$. Setze $a_{-n} := b_n$ für $n \geq 1$. Dann: $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$. 5.4 $\Rightarrow$ die Laurentreihe konvergiert auf A absolut und lokal gleichmäßig.
14.2 $\Rightarrow g$ und h sind eindeutig bestimmt
5.4 $\Rightarrow a_n$ eindeutig bestimmt für $n \in \mathbb{Z}$. Sei $n \in \mathbb{Z}$; $\gamma(t) := \rho e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$) $r < \rho < R$. Sei $w \in Tr(\gamma)$:

$$\frac{f(w)}{w^{n+1}} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu w^{\nu-n-1} .$$

Die letzte Reihe konvergiert auf Tr(γ) gleichmäßig.

$$8.4 \Rightarrow \int_\gamma \frac{f(w)}{w^{n+1}} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu \underbrace{\int_\gamma w^{\nu-n-1}}_{=\begin{cases}0 & ,\nu \neq n\\ 2\pi i & ,\nu = n\end{cases}}$$ ■

Satz 14.4
$D \subseteq \mathbb{C}$ sei offen, $z_0 \in D$, $\dot{D} := D \backslash \{z_0\}$ und $f \in H(\dot{D})$ (z_0 ist also eine isolierte Singularität). Sei $R > 0$ so, daß $U_R(z_0) \subseteq D$. f hat also, nach 14.3, auf $\dot{U}_R(z_0)$ die Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \ (z \in \dot{U}_R(z_0))$$

(1) f hat in z_0 eine hebbare Singularität $\iff$ $a_{-n} = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

(2) f hat in z_0 einen Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$ $\iff$ $a_{-m} \neq 0$, $a_{-n} = 0 \ \forall n > m$

(3) f hat in z_0 eine wesentliche Singularität $\iff$ $a_{-n} \neq 0$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$

Definition
Vorraussetzung wie in 14.4. $\text{Res}(f, z_0) := a_{-1}$ heißt das **Residuum** von f in z_0.
Ist $0 < \rho < R$ und $\gamma(t) = z_0 + \rho e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$), so folgt aus 14.3:

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)dz$$

Beweis

(1) Klar.

(2) O.B.d.A: $z_0 = 0$.
" $\Rightarrow$ ": 13.2 $\Rightarrow \exists g \in H(D) : f(z) = \frac{g(z)}{z^m} \ \forall z \in \dot{D}$ und $g(z_0) \neq 0$
10.4 $\Rightarrow g(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots \ \forall z \in U_R(0) \Rightarrow f(z) = \frac{c_0}{z^m} + \frac{c_1}{z^{m-1}} + \ldots + \frac{c_{m-1}}{z} + \sum_{n=m}^{\infty} c_n z^{n-m}$ $\forall z \in \dot{U}_R(0)$. Eindeutigkeit der Laurententwicklung $\Rightarrow c_0 = a_{-m}$, also $a_{-m} = g(0) \neq 0$; weiter: $a_{-n} = 0 \ \forall n > m$
"$\Leftarrow$": $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \frac{a_{-1}}{z} + \ldots + \frac{a_{-m}}{z^m} \ \forall z \in \dot{U}_R(0)$

$$\Rightarrow z^m f(z) = \underbrace{a_{-m} + \ldots + a_{-1} z^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+m}}_{=:g(z)} \ \forall z \in \dot{U}_R(0)$$

Es ist $g \in H(U_R(0))$, $g(0) = a_{-m} \neq 0$ und $f(z) = \frac{g(z)}{z^m} \ \forall z \in \dot{U}_R(0)$. 13.2 $\Rightarrow f$ hat einen Pol der Ordnung m.

(3) folgt aus (1) und (2). ■

Beispiele:

(i) $f(z) = \frac{1}{z-1}$ Laurententwicklung in $\mathbb{C} \backslash \{1\} : f(z) = \frac{1}{z-1}$, $\text{Res}(f, 1) = 1$

(ii) $f(z) = \frac{1}{z-1}$ Laurententwicklung in $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < \infty\}$.
Für $|z| > 1 : \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}$

(iii) $f(z) = \frac{cos(z)}{z^3}$. Laurententwicklung in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. $f(z) = \frac{1}{z^3}(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \ldots) = \underbrace{\dfrac{1}{z^3} - \dfrac{1}{2z}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\dfrac{z}{4!} - \dfrac{z^3}{6!} + - \ldots}_{\text{Nebenteil}}$, $\operatorname{Res}(f, 0) = -\frac{1}{2}$