

11. Extremwerte unter Nebenbedingungen

Definition

Seien M, N Mengen $\neq \emptyset$, $f : M \rightarrow N$ eine Funktion und $\emptyset \neq T \subseteq M$. Die Funktion $f|_T : T \rightarrow N$, $f|_T(x) := f(x) \forall x \in T$ heißt die **Einschränkung** von f auf T .

In diesem Paragraphen gelte stets: $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$, D offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R})$, $p \in \mathbb{N}$, $p < n$ und $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_p) \in C^1(D, \mathbb{R}^p)$. Es sei $T := \{x \in D : \varphi(x) = 0\} \neq \emptyset$.

Definition

f hat in $x_0 \in D$ ein **lokales Extremum unter der Nebenbedingung** $\varphi = 0 : \iff x_0 \in T$ und $f|_T$ hat in x_0 ein lokales Extremum.

Wir führen folgende Hilfsfunktion ein: Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$ und $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ gilt:

$$H(x, \lambda) := f(x) + \lambda \cdot \varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \varphi_1(x) + \dots + \lambda_p \varphi_p(x)$$

Es ist

$$H_{x_j} = f_{x_j} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \dots + \lambda_p \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_j} \quad (j = 1, \dots, n), \quad H_{\lambda_j} = \varphi_j$$

Für $x_0 \in D$ und $\lambda_0 \in \mathbb{R}^p$ gilt:

$$\begin{aligned} H'(x_0, \lambda_0) = 0 &\iff f'(x_0) + \lambda_0 \varphi'(x_0) = 0 \text{ und } \varphi(x_0) = 0 \\ &\iff f'(x_0) + \lambda_0 \varphi'(x_0) = 0 \text{ und } x_0 \in T \quad (\text{I}) \end{aligned}$$

Satz 11.1 (Multiplikationsregel von Lagrange)

f habe in $x_0 \in D$ ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $\varphi = 0$ und es sei $\text{Rang } \varphi'(x_0) = p$. Dann existiert ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}^p$ mit: $H'(x_0, \lambda_0) = 0$ (λ_0 heißt **Multiplikator**).

Folgerung 11.2

T sei beschränkt und abgeschlossen. Wegen 3.3 gilt: $\exists a, b \in T : f(a) = \max f(T), f(b) = \min f(T)$. Ist $\text{Rang } \varphi'(a) = p \implies \exists \lambda_0 \in \mathbb{R}^p : H'(a, \lambda_0) = 0$.

Beweis

Es ist $x_0 \in T$ und

$$\varphi'(x_0) = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_p}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_p}(x_0) \end{pmatrix}}_{=:A} \quad \dots \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \right)$$

11. Extremwerte unter Nebenbedingungen

Rang $\varphi'(x_0) = p \implies$ o.B.d.A.: $\det A \neq 0$.

Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$ schreiben wir $x = (y, z)$, wobei $y = (x_1, \dots, x_p)$, $z = (x_{p+1}, \dots, x_n)$. Insbesondere ist $x_0 = (y_0, z_0)$. Damit gilt: $\varphi(y_0, z_0) = 0$ und $\det \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y_0, z_0) \neq 0$.

Aus 10.1 folgt: \exists offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^{n-p}$ von z_0 , \exists offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^p$ von y_0 und es existiert $g \in C^1(U, \mathbb{R}^p)$ mit:

$$(II) \quad g(z_0) = y_0$$

$$(III) \quad \varphi(g(z), z) = 0 \quad \forall z \in U$$

$$(IV) \quad g'(z_0) = - \underbrace{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}(g(z_0), z_0) \right)^{-1}}_{=x_0} \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial z}(g(z_0), z_0)}_{=x_0} \quad \blacksquare$$

(III) $\implies (g(z), z) \in T \quad \forall z \in U$. Wir definieren $h(z)$ durch

$$h(z) := f(g(z), z) \quad (z \in U)$$

Dann hat h in z_0 ein lokales Extremum (*ohne* Nebenbedingung). Damit gilt nach 8.1:

$$0 = h'(z_0) \stackrel{5.4}{=} f'(g(z_0), z_0) \cdot \begin{pmatrix} g'(z_0) \\ I \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0) \mid \frac{\partial f}{\partial z}(x_0) \right) \cdot \begin{pmatrix} g'(z_0) \\ I \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0) g'(z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0)$$

$$\stackrel{(IV)}{=} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0) \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0) \right)^{-1}}_{=: \lambda_0 \in \mathbb{R}^p} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0) \implies \frac{\partial f}{\partial z}(x_0) + \lambda_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x_0) = 0 \quad (V)$$

$$\lambda_0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0) \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0) \right)^{-1} \implies \frac{\partial f}{\partial y}(x_0) + \lambda_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0) = 0 \quad (VI)$$

Aus (V), (VI) folgt: $f'(x_0) + \lambda_0 \varphi'(x_0) = 0 \stackrel{(I)}{\implies} H'(x_0, \lambda_0) = 0$.

Beispiel

($n=3, p=2$) $f(x, y, z) = x + y + z$, $T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2, x + z = 1\}$, $\varphi(x, y, z) = (x^2 + y^2 - 2, x + z - 1)$.

Bestimme $\max f(T)$, $\min f(T)$. Übung: T ist beschränkt und abgeschlossen $\stackrel{3.3}{\implies} \exists a, b \in T : f(a) = \max f(T)$, $f(b) = \min f(T)$.

$$\varphi'(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rang $\varphi'(x, y, z) = 1 < p = 2 \iff x = y = 0$. $a, b \in T \implies \text{Rang } \varphi'(a) = \text{Rang } \varphi'(b) = 2$

$$H(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x + y + z + \lambda_1(x^2 + y^2 - 2) + \lambda_2(x + z - 1)$$

$$H_x = 1 + 2\lambda_1 x + \lambda_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad (1)$$

$$H_y = 1 + 2\lambda_1 y \stackrel{!}{=} 0 \quad (2)$$

$$H_z = 1 + \lambda_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad (3)$$

$$H_{\lambda_1} = x^2 + y^2 - 2 \stackrel{!}{=} 0 \quad (4)$$

$$H_{\lambda_2} = x + z - 1 \stackrel{!}{=} 0 \quad (5)$$

$$(3) \implies \lambda_2 = -1 \stackrel{(1)}{\implies} 2\lambda_1 x = 0; (2) \implies \lambda_1 \neq 0 \implies x = 0 \stackrel{(5)}{\implies} z = 1; (4) \implies y = \pm\sqrt{2}$$

$$11.2 \implies a, b \in \{(0, \sqrt{2}, 1), (0, -\sqrt{2}, 1)\}$$

$$f(0, \sqrt{2}, 1) = 1 + \sqrt{2} = \max f(T); f(0, -\sqrt{2}, 1) = 1 - \sqrt{2} = \min f(T)$$

Anwendung Sei A eine reelle, *symmetrische* $(n \times n)$ -Matrix. Beh: A besitzt einen reellen EW.

Beweis

$f(x) := x \cdot (Ax) = Q_A(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n$), $T := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\} = \partial U_1(0)$ ist beschränkt und abgeschlossen.

$$\varphi(x) := \|x\|^2 - 1 = x \cdot x - 1; \varphi'(x) = 2x, f'(x) = 2Ax.$$

$$3.3 \implies \exists x_0 \in T : f(x_0) = \max f(T); \varphi'(x) = 2(x_1, \dots, x_n); x_0 \in T \implies \text{Rang } \varphi'(x_0) = 1 (= p)$$

$$11.2 \implies \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} : H'(x_0, \lambda_0) = 0; h(x, \lambda) = f(x) + \lambda \varphi(x); H'(x, \lambda) = 2Ax + 2\lambda x$$

$$\implies 0 = 2(Ax_0 + \lambda_0 x_0) \implies Ax_0 = (-\lambda_0)x_0, x_0 \neq 0 \implies -\lambda_0 \text{ ist ein EW von } A. \quad \blacksquare$$

