19. Isometrien

Aufgabe: Studiere alle linearen Abbildungen, die **Abstände** von Punkten nicht ändern. Z.B. Drehungen um einen Punkt im $\mathbb{R}^2$.

19.1. Charakterisierung und orthogonale Gruppe

Definition: Seien V_1, V_2 $\mathbb{K}$-VRme mit Sesquilinearformen s_1, s_2.

(a) Ein **Morphismus von $\mathbb{K}$-VRmen mit Sesquilinearform** ist $\Phi \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ mit:

$$\forall x, y \in V_1 : s_2(\Phi(x), \Phi(y)) = s_1(x, y)$$

Schreibe: $\Phi : (V_1, s_1) \to (V_2, s_2)$.

(b) Ist Φ zusätzlich bijektiv, so heißt Φ eine **(lineare) Isometrie**.

(c) Eine Isometrie $\Phi : (V, s) \to (V, s)$ heißt **Automorphismus** von s.
Die Gruppe $\mathrm{Aut}(s) \leq \mathrm{Aut}(V)$ heißt die **Automorphismengruppe** von s.

Beispiel: In der Relativitätstheorie wichtig ist die **Lorenzgruppe** $\mathrm{Aut}(s)$ zu

$$s : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -c \end{pmatrix} y$$

für $c :=$Lichtgeschwindigkeit.

Definition: Im Folgenden sei s stets SKP.
Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:
$O(V, s) := \mathrm{Aut}(s)$ heißt **orthogonale Gruppe**. Die Elemente der Gruppe heißen **orthogonale Abb. bzgl. s**.
Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:
$U(V, s) := \mathrm{Aut}(s)$ heißt **unitäre Gruppe**. Die Elemente der Gruppe heißen **unitäre Abb. bzgl. s**.

Bemerkung: Eine wichtige Isometrie ist: abstrakter VRm $\cong$ Standardraum

Satz 21:
Sei V VRm mit SKP s, $\dim(V) = n$ und ONB B. Dann ist die Koordinatendarstellung:

$$D_B : (V, s) \to (\mathbb{K}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$$

eine Isometrie.

Beweis: Sei $B = \{b_1, \ldots, b_n\}, x, y \in V$ mit $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i, y = \sum_{i=1}^n \beta_i b_i$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
s(x, y) &= \sum_{i,j} \alpha_i \overline{b_j} \cdot s(b_i, b_j) \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{b_i} \\
&= \langle \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \rangle \\
&= \langle D_B(x), D_B(y) \rangle
\end{aligned}$$

∎

Bemerkung:

(1) Sei $\Phi : V_1 \to V_2$ Morphismus von SKP-Räumen, dann ist Φ **längentreu**.

$$\iff \|x\|_1 = \|\Phi(x)\|_2$$

Winkeltreue für $K = \mathbb{R}$ bedeutet:

$$\frac{\langle x, y \rangle_1}{\|x\|_1 \|y\|_1} = \frac{\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle_2}{\|\Phi(x)\|_2 \|\Phi(y)\|_2}$$

(2) $\Phi : (V, s) \to (V, s)$ Endomorphismus von SKP-Räumen und $\dim(V) < \infty \implies \Phi$ ist Isomorphismus und Automorphismus, also orthogonal und unitär.

Satz 22 (Isometriekriterium):
Sei V VRm mit SKP $s = \langle \cdot, \cdot \rangle$ und sei $\Phi \in \mathrm{Aut}(V)$.
Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) Φ ist Isometrie (d.h. $\Phi \in \mathrm{Aut}(s)$).

(2) $\Phi \in \mathrm{End}^a(V)$ und $\Phi^* = \Phi^{-1}$.

(3) $\forall x \in V : \|x\| = \|\Phi(x)\|$

(4) $\forall y \in V : (\|y\| = 1) \implies (\|\Phi(y)\| = 1)$ (Einheitssphärenabbildung).

Beweis: Die Äquivalenz ergibt sich aus folgendem Ringschluss:

(1) $\Longrightarrow$ (2) Es gilt $\forall x, y \in V$, $z := \Phi(y)$:

$$\begin{aligned}
&\Phi \text{ Isometrie} \\
&\iff \forall x, y \in V : \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle = \langle x, y \rangle \\
&\overset{\Phi^{-1} \text{ ex.}}{\iff} \forall x, z \in V : \langle \Phi(x), z \rangle = \langle x, \Phi^{-1}(z) \rangle
\end{aligned}$$

Nach Definition der Adjungierten folgt daraus $\Phi^{-1} = \Phi^*$.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Es gilt für alle $x \in V$:

$$\|\Phi(x)\|^2 = \langle \Phi(x), \Phi(x) \rangle \overset{(2)}{=} \langle x, \Phi^*\Phi(x) \rangle = \langle x, x \rangle$$

(3) $\iff$ (4) ✓

(3) $\Longrightarrow$ (1) Es gilt für alle $x, y, \in V, \alpha \in K$:

$$\begin{aligned}
&\langle \alpha x + y, \alpha x + y \rangle = \langle \Phi(\alpha x + y), \Phi(\alpha x + y) \rangle \\
\iff &\langle \alpha x, y \rangle + \langle y, \alpha x \rangle = \langle \Phi(\alpha x), \Phi(y) \rangle + \langle \Phi(y), \Phi(\alpha x) \rangle \\
\iff &\alpha \langle x, y \rangle + \overline{\alpha} \overline{\langle x, y \rangle} = \alpha \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle + \overline{\alpha} \overline{\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle}
\end{aligned}$$

Fall $K = \mathbb{R}$:
Mit $\alpha := \frac{1}{2} : \langle x, y \rangle = \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle$
Fall $K = \mathbb{C}$:
Mit $\alpha := \frac{1}{2} : \mathrm{Re}\langle x, y \rangle = \mathrm{Re}\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle$
Mit $\alpha := \frac{i}{2} : \mathrm{Im}\langle x, y \rangle = \mathrm{Im}\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle$ ∎

Korollar:
Sei $\dim(V) = n < \infty$, B ONB von V und $\Phi \in \mathrm{End}(V)$.
Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) Φ ist Isometrie.

(2) Es gilt für alle $x \in V : \|\Phi(x)\| = \|x\|$

(3) $\Phi(B)$ ist ONB.

(4) Es gilt $D_{BB}(\Phi)^{-1} = D_{BB}(\Phi^*)$, d.h. $D_{BB}(\Phi)$ ist unitär bzw. orthogonal.

(5) Die Spalten (bzw. Zeilen) von $D_{BB}(\Phi)$ bilden eine ONB von $\mathbb{K}^n$ bzgl. dem Standard-SKP.

(6) Es existiert eine ONB C von V mit $D_{BC}(\Phi) = I_n$.

Beweis: Jede der Aussagen impliziert $\Phi \in \mathrm{Aut}(V)$.
Sei $B := \{b_1, \dots, b_n\}$.

(1) $\iff$ (2) $\iff$ (4) Klar nach Isometriekriterium.

(4) $\iff$ (5) Es gilt:

$$\begin{aligned}
&D_{BB}(\Phi)^{-1} = D_{BB}(\Phi^*) \\
&\implies D_{BB}(\Phi) \cdot D_{BB}(\Phi^*) = I_n \\
&\iff \{\text{Zeilen von } \Phi\} \text{ sind ONB bezgl. Standardform} \\
&\implies D_{BB}(\Phi^*) \cdot D_{BB}(\Phi) = I_n \\
&\iff \{\text{Spalten von } \Phi\} \text{ sind ONB bezgl. Standardform}
\end{aligned}$$

(3) $\implies$ (2) Da für alle $b_i, b_j \in B$ gilt:

$$\langle \Phi(b_i), \Phi(b_j) \rangle = \delta_{ij} = \langle b_i, b_j \rangle$$

Folgt für alle $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i \in V$:

$$\begin{aligned}
\langle \Phi(x), \Phi(x) \rangle &= \sum_{i,j} \alpha_i \overline{\alpha_j} \langle \Phi(b_i), \Phi(b_j) \rangle \\
&= \sum_{i,j} \alpha_i \overline{\alpha_j} \langle b_i, b_j \rangle \\
&= \langle x, x \rangle
\end{aligned}$$

Also ist $\|\Phi(x)\| = \|x\|$ und Φ längenerhaltend.

(1) $\implies$ (3) Da Φ Isometrie ist, gilt:

$$\implies \langle \Phi(b_i), \Phi(b_j) \rangle = \langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij}$$

D.h. $\Phi(B)$ ist ONB.

(3) $\implies$ (6) Sei $C := \Phi(B)$. Dann gilt:

$$D_{BC}(\Phi) = I_n$$

(6) $\implies$ (4) Es existiert eine ONB $C = \{c_1, \dots, c_n\}$, sodass gilt:

$$D_{BC}(\Phi) = I_n$$

Daraus folgt: $D_{BB}(\Phi) = D_{BC}(\Phi) \cdot M_{CB} = M_{CB} =: (\gamma_{ij})$
Also gilt für alle $b_j \in B$:

$$b_j = \sum_k \gamma_{kj} \cdot c_k$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\delta_{ij} &= \langle b_j, b_i \rangle \\
&= \langle \sum_k \gamma_{kj} \cdot c_k, \sum_l \gamma_{li} \cdot c_l \rangle \\
&= \sum_{k,l} \gamma_{kj} \cdot \overline{\gamma_{li}} \cdot \langle c_k, c_l \rangle \\
&= \sum_k \gamma_{kj} \cdot \overline{\gamma_{ki}} \\
&= \sum_k \overline{\gamma_{ki}} \cdot \gamma_{kj} = (\overline{M}_{CB}^T \cdot M_{CB})_{ij}
\end{aligned}$$

Es gilt also $M_{CB}^* = M_{CB}^{-1}$. ■

19.2. Normalformen für Isometrien und normale Endomorphismen

Sei V VRm mit SKP $\langle \cdot, \cdot \rangle, \dim(V) = n < \infty$.

19.2.1. Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Lemma:
Ein Endomorphismus Φ ist genau dann unitär, wenn er normal ist und alle Eigenwerte Betrag 1 haben.

Beweis: Da Φ unitär ist, also $\Phi^* = \Phi^{-1}$ gilt, ist Φ normal. Nach Spektralsatz existiert dann eine ONB $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ aus Eigenvektoren von Φ. Also gilt:

$$\Phi(b_i) = \lambda_i b_i \text{ mit } \lambda_i \in \mathbb{C}$$

Mit dem Korollar folgt:

$$\begin{aligned}
&\Phi \text{ unitär} \\
&\iff \Phi(B) \text{ ONB} \\
&\iff \delta_{ij} = \langle \Phi(b_i), \Phi(b_j) \rangle = \langle \lambda_i b_i, \lambda_j b_j \rangle = |\lambda_i|^2 \cdot \delta_{ij} \\
&\iff |\lambda_i|^2 = 1 \\
&\iff |\lambda_i| = 1
\end{aligned}$$

■

Folgerung: $D_{BB}(\Phi) = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ mit $|\lambda_i| = 1$ heißt **Normalform** der unitären Abb. Φ und ist bis auf die Reihenfolge der Eigenwerte eindeutig bestimmt.

Korollar:
Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normal, so existieren $M \in U_n$ und $\lambda_i \in \mathbb{C}$, sodass gilt:

$$M^{-1} \cdot A \cdot M = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

D.h. jedes normale A erlangt durch **unitären Basiswechsel** Normalform.
Falls A unitär ist, so existiert $\Phi_j \in \mathbb{R}$, sodass gilt:

$$\lambda_j = e^{i\Phi_j} = \cos\Phi_j + i\sin\Phi_j$$

Beweis: Sei $V = \mathbb{C}^n$ mit dem Standardskalarprodukt, $\varphi = \Lambda_A : x \mapsto Ax$

Aus dem Basiswechsel zwischen einer Orthonormalbasis S (der Standardbasis) und einer Orthonormalbasis B aus Eigenvektoren von ϕ folgt: $M := M_{SB}$ ist unitär.

Das heißt:

$$M^{-1}D_{SS}(\Lambda_A)M = M^{-1}AM = D_{BB}(\Lambda_A) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \qquad \blacksquare$$

19.2.2. Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Sei $\Psi \in \operatorname{End}(V)$ normal; das char. Polynom $f = f_\Psi \in \mathbb{R}[X]$.

Beachte: Falls $\lambda \in \mathbb{C}$ Nullstelle ist, so ist auch $\bar{\lambda}$ eine Nullstelle.

$$0 = f(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} a_i\lambda_i$$
$$0 = \sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i\bar{\lambda}^i = \sum_{i=0}^{n} a_i\bar{\lambda}^i \quad \text{da } a_i \in \mathbb{R}$$

Das heißt: Nullstellen $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ treten stets als Paare $(\lambda, \bar{\lambda})$ auf.

Via Isometrie:

$$\begin{array}{rcl} D_{BB}: & V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n & \\ & \Psi\downarrow \qquad \downarrow\Lambda_A & \text{mit } A \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ normal} \\ & V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n & \end{array}$$

Betrachte zunächst: $\phi := \Lambda_A \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^n)$

Lemma:
Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig und $\phi = \Lambda_A \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$, so gilt:

(1) für $\lambda \in \mathrm{Spec}(\phi) \cap \mathbb{R}$ hat $E_\lambda(\phi)(\subseteq \mathbb{C}^n)$ eine Basis in $\mathbb{R}^n(\subseteq \mathbb{C}^n)$

(2) für $\lambda \in \mathrm{Spec}(\phi) \setminus \mathbb{R}$ ist $\mathbb{R}^n \cap E_\lambda(\phi) = 0$ und $\overline{E_\lambda(\phi)} = E_{\bar\lambda}(\phi)$

Für normale A gilt: $\overline{E_\lambda(\phi)} \perp E_\lambda(\phi)$

Beweis: (1) Vorbemerkung: Die lineare Unabhängigkeit von $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^n$ bleibt in $\mathbb{C}^n$ erhalten.

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt daher:

$$\mathrm{rg}_\mathbb{R}(A - \lambda I) = \mathrm{rg}_\mathbb{C}(A - \lambda I) \implies \dim_\mathbb{R} \mathrm{Kern}(A - \lambda I) = \dim_\mathbb{C} \mathrm{Kern}(A - \lambda I)$$

Also ist jede $\mathbb{R}$-Basis von $\mathrm{Kern}_\mathbb{R}(A-\lambda I)$ eine $\mathbb{C}$-Basis von $\mathrm{Kern}_\mathbb{C}(A-\lambda I) = E_\lambda(\phi)$

(2) Sei $\lambda \in \mathrm{Spec}(\phi) \setminus \mathbb{R}$.

Aus $A \cdot b = \lambda \cdot b$ folgt $b \notin \mathbb{R}^n$ oder $b = 0$, denn:
falls $b \in \mathbb{R}^n$ folgt $Ab \in \mathbb{R}^n \implies \lambda b \in \mathbb{R}^n \overset{\lambda\notin\mathbb{R}}{\implies} b = 0$

Ferner folgt:

$$\bar\lambda \cdot \bar b = \bar A \cdot \bar b = A \cdot \bar b$$

d.h. $b \in E_{\bar\lambda}(\phi) \implies$ " $\subseteq$ " $\implies$ " $=$ "

Ist A normal, dann folgt mit dem Spektralsatz: $\lambda \neq \bar\lambda$, d.h. $E_\lambda \perp E_{\bar\lambda}$ ∎

Korollar:
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ normal, $\phi := \Lambda_A \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$.
Ferner sei $Spec(\phi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \bar\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_{r+s}, \bar\lambda_{r+s}\}$ mit $\lambda_j \in \mathbb{R}\,(j = 1, \dots, r)$, $\lambda_{r+k} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\,(k = 1, \dots, s), n = r + 2s$ (evtl. sind gleiche dabei)

- Dann existiert eine Orthonormalbasis

$$B = \{b_1, \dots, b_r, b_{r+1}, \bar b_{r+1}, \dots, b_{r+s}, \bar b_{r+s}\}$$

aus Eigenvektoren von ϕ, wobei $b_j \in \mathbb{R}^n$ für $j = 1, \dots, r$.
Es ist $b_{r+k} \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n\,(k = 1, \dots, s)$ und $Ab_j = \lambda_j b_j$, $A\bar b_j = \bar\lambda_j \bar b_j$

- Mit

$$U_j := \begin{cases} \mathbb{C} \cdot b_j & j = 1, \dots, r \\ \mathbb{C} \cdot b_j \oplus \mathbb{C} \cdot \bar b_j & j = r+1, \dots, r+s \end{cases}$$

geht die direkte Zerlegung:
$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j=1}^{r+s} U_j$$
in ϕ-invariante Teilräume, die paarweise orthogonal sind (d.h. $U_j \perp U_k$ für $j \neq k$).

Beweis: Lemma (1): Für $\lambda \in \mathrm{Spec}(\phi) \cap \mathbb{R} : E_\lambda(\phi)$ hat die Basis $B_\lambda \subseteq \mathbb{R}^n$.

Orthonormalisierungsalgorithmus: $B_\lambda \rightsquigarrow \mathrm{ONB} \subseteq \mathbb{R}^n$.

Für Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ existiert nach Spektralsatz gleichfalls eine Orthonormalbasis B_λ von $E_\lambda(\phi)$.

Lemma (2): $\bar{B}_\lambda := B_{\bar{\lambda}}$ ist ONB von $E_{\bar{\lambda}}(\phi)$. Beachte: Für das Standardskalarprodukt gilt: $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$.

Also: Zu $b_j \in B_\lambda$ gehört $\bar{b}_j \in B_{\bar{\lambda}}$.

Es ist klar, daß $U_j = \langle b_j, \bar{b}_j \rangle$ ϕ-invariant und $U_j \perp U_k$ ist, da alle b paarweise orthogonal sind.
Problem: Wie lässt sich die Zerlegung im Korollar auf die reelle Situation übertragen? ■

Satz 23:
Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt, $\dim V = n < \infty$, $\Psi \in \mathrm{End}(V)$ normal. Dann gilt:

(1)
$$f_\Psi(X) = \prod_{j=1}^{r} (X - \lambda_j) \prod_{k=1}^{s} (X - \lambda_{r+k})(X - \bar{\lambda}_{r+k})$$
mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ (OBdA sei $\lambda_1 \leq \ldots \lambda_n$), $\lambda_{r+k} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Beachte: Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gilt: $(X - \lambda)(X - \bar{\lambda}) = X^2 - 2\gamma \cos(\phi) X + \gamma^2$ mit $\gamma := |\lambda| > 0$ und $\phi \in (0, \pi)$.

(2) Es existiert eine ONB $C = \{c_1, \ldots, c_r, c_{r+1}, c'_{r+1}, \ldots, c_{r+s}, c'_{r+s}\}$ von V so, daß $D_{CC}(\Psi)$ **Drehkästchennormalform** hat, d.h.
$$D_{CC}(\Psi) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \gamma_1 D_{\phi_1}, \ldots, \gamma_s D_{\phi_s})$$
(eindeutig bestimmt durch Ψ), wobei
$$\gamma D_\phi = \gamma \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

(3) Ψ ist orthogonal genau dann, wenn alle reellen $\lambda_j = \pm 1$ und alle $\gamma_k = 1$ sind.

Beweis: (1) ✓

(2) Nehme aus Korollar $c_j = b_j \in \mathbb{R}^n \, (j = 1, \ldots, r)$ und für $U = \mathbb{C}b \oplus \mathbb{C}\bar{b}$ finden wir eine ONB $\subseteq \mathbb{R}^n$ wie folgt: Behauptung: $C := \{\sqrt{(2)}\Re(b), -\sqrt{(2)}\,\mathrm{Im}(b)\}$ ist ONB von U
denn: $M_{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \imath \\ 1 & -\imath \end{pmatrix}$ ist unitär, also $M_{CB} = M_{BC}^{-1} = M_{BC}^{*}$.

Damit folgt:

$$\begin{aligned} D_{CC}(\Psi|_U) &= M_{CB} \cdot D_{BB}(\Psi|_U) \cdot M_{BC} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\imath & \imath \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \bar{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \imath \\ 1 & -\imath \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda + \bar{\lambda} & \imath(\lambda - \bar{\lambda}) \\ -\imath(\lambda - \bar{\lambda}) & \lambda + \bar{\lambda} \end{pmatrix} \\ &= \gamma \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(3) $D_{CC}(\Psi) = A$ orthogonal $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} A^*A = I \Leftrightarrow$ alle Eigenwerte $|\lambda| = 1$. ■

Definition: (a) $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ orthogonal heißt **Drehung um den Winkel** ϕ, falls eine ONB $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ existiert, so daß $D_{BB}(\Phi) = \mathrm{diag}(D_{phi}, 1, \ldots, 1)$.

$U = \mathbb{R} \cdot b_1 + \mathbb{R} \cdot b_2$ heißt **Drehebene von** ϕ und $U^\perp = \langle b_3, \ldots, b_n \rangle$ **verallgemeinerte Drehachse**.

(b) $\Psi \in \mathrm{End}(V)$ orthogonal heißt **Spiegelung** an einer **Hyperebene** H, falls eine ONB $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ existiert, so daß $D_{BB}(\Psi) = \mathrm{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$ und $H := \langle b_4, \ldots, b_n \rangle$.

Bemerkung: Falls $\Phi \neq \mathrm{id}$ Drehung ist, folgt $D_\phi \neq \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ und $U^\perp = \mathrm{Kern}(\phi - \mathrm{id}_V)$.

Insbesondere sind U und $U^\perp$ durch Φ eindeutig bestimmt (unabhängig von der Basis).

Satz 24:
Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt s und $\dim V = n < \infty$. Dann ist die Gruppe $O(V, s)$ erzeugt durch Drehungen und Spiegelungen. Genauer:$\forall \Psi \in O(V, s) \exists$Zerlegung $n = r + 2r'$, so daß Ψ Produkt von höchstens r Spiegelungen und r' Drehungen ist.

Beweis:

$$\begin{aligned} D_{BB}(\Psi) &= \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, D_{\phi_1}, \ldots, D_{\phi_r}) \\ &= \prod_{j=1}^{r} \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \lambda_j, 1, \ldots, 1) \prod_{k=1}^{r'} \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, D_{\phi_k}, 1, \ldots, 1) \end{aligned}$$ ■