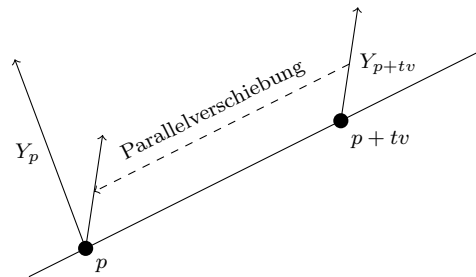


Kapitel 7.

Kovariante Ableitungen

Frage: Was ist eine „gute“ Differentialrechnung für Vektorfelder?

Das gewöhnliche Differential im \mathbb{R}^n für $Y: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist gerade die lineare Abbildung $DY|_p \cdot v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y(p + tv) - Y(p)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Y(p + tv)$. Betrachte im euklidischen Fall einen Punkt p , sowie einen Tangentialvektor Y_p .



Nun gehe zur Betrachtung von Vektorfeldern $X: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ über und setze $D_X Y|_p = DY|_p \cdot X_p$. Hierfür gilt:

- D ist \mathbb{R} -linear in Y : $D(Y + \tilde{Y}) = DY + D\tilde{Y}$.
- Es gilt die Leibnizregel: $D(fY) = Df \cdot Y + fDY$.
- D ist $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ -linear in X :

$$D_{fX} Y|_p = DY|_p \cdot (fX)_p = DY|_p \cdot f(p)X_p = f(p)DY|_p \cdot X_p = (fD_X Y)(p).$$

Erinnerung: Die Lieableitung $\mathcal{L}_{(\cdot)} Y$ ist *nicht* $C^\infty(M)$ -linear.

Definition 7.1 Es seien M eine glatte Mannigfaltigkeit und E ein Vektorbündel über M . Eine **kovariante Ableitung** (oder **Zusammenhang** ([engl.] „connection“)) auf E ist eine Abbildung

$$\nabla: \mathcal{V}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E), \quad \nabla(X, S) = \nabla_X S$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) ∇S ist $C^\infty(M)$ -linear, das heißt

$$\nabla_{X+Y} S = \nabla_X S + \nabla_Y S \text{ und } \nabla_{fX} S = f\nabla_X S$$

für alle $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ und $f \in C^\infty(M)$.

- (ii) ∇_X ist \mathbb{R} -linear, das heißt für alle $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\nabla_X(\mu S + \nu T) = \mu \nabla_X S + \nu \nabla_X T.$$

(iii) ∇_X erfüllt die folgende Leibnizregel:

$$\nabla_X(fS) = df(X) \cdot S + f \cdot \nabla_X S = X(f) \cdot S + f \cdot \nabla_X S.$$

Kurzform: $\nabla: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$, $S \mapsto \nabla_{(\cdot)} S$ ist eine $C^\infty(M)$ -Modulderivation.

Beispiel (1) Das gewöhnliche Differential D definiert in kanonischer Weise eine kovariante Ableitung auf $T\mathbb{R}^n$.

$$X \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n), X: \mathbb{R}^n \rightarrow T\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \text{ via } \mathcal{I}: X_p \mapsto (p, \underbrace{\mathcal{I}_p(X_p)}_{=: \bar{X}_p}).$$

Nun ist wie folgt eine kovariante Ableitung gegeben: $(\nabla_X Y)_p = \mathcal{I}^{-1}(p, D_{\bar{X}_p} \bar{Y})$.

(2) $E = M \times \mathbb{R}^n$, ein Schnitt S von E ist von der Form $S_p = (p, s(p))$, $s: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatt.

Hier definiert man die kovariante Ableitung:

$$\nabla_X S = (p, \mathcal{I}_{s(p)}^{-1}(s_{*p}, X_p))$$

$$s_{*p}: T_p M \rightarrow T_p \mathbb{R}^n, s_{*p}: X_p \in T_p \mathbb{R}^n \xrightarrow{\mathcal{I}_{s(p)}} \mathbb{R}^n.$$

(3) Sei $E = M \times \mathbb{R}^n$, ein Schnitt $S = (\text{id}, \sigma)$, $\sigma: M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dann ist $(\nabla_X S)_p = (p, \mathcal{I}_p(\sigma_{*p}(X_p)))$, $\sigma_{*p}: T_p M \rightarrow T_{\sigma(p)} \mathbb{R}^n$. Sei $\omega = (\omega_j^k)_{j,k \leq n}$ eine $(n \times n)$ -Matrix von 1-Formen auf M , das heißt $\omega(X)|_p \in \mathfrak{M}^{n \times n}(\mathbb{R})$. Für einen Schnitt $S = (\text{id}, \sigma)$ und sei dann

$$(\nabla_X S)_p = (\text{id}, \mathcal{I}_p(\sigma_{*p}(X_p)) + \omega(X)|_p \cdot \sigma(p).$$

Dies definiert eine kovariante Ableitung auf $E = M \times \mathbb{R}^n$.

(4) $d: \Omega^0(M) = C^\infty(M) = \Gamma(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^1(M) = \Gamma(T^*M) = \Gamma(\underbrace{T^*M \otimes (M \times \mathbb{R})}_{\text{Fasern: } T_p^*M \otimes \mathbb{R} \cong T_p^*M})$

mit $f \mapsto [df: X \mapsto df(X) = X(f)]$.

Dann ist

$$d: \mathcal{V}(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M),$$

$$\nabla_X f = d(X, f) \mapsto X(f)$$

eine kovariante Ableitung auf $C^\infty(M)$.

(5) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^k$ eine glatte Untermannigfaltigkeit und ∇ die kanonische kovariante Ableitung auf $T\mathbb{R}^k$.

Erster Ansatz für eine kovariante Ableitung:

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}|_M \text{ das funktioniert noch nicht.}$$

Für $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ seien \tilde{X}, \tilde{Y} Fortsetzungen, das heißt $\tilde{X}|_M = X$ und $\tilde{Y}|_M = Y$.

$$(\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})_p \in T_p \mathbb{R}^k \supseteq T_p M.$$

Nächster Ansatz, der tatsächlich eine kovariante Ableitung definiert.

$$\tilde{\nabla}_X Y = (\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}|_M)^{\text{proj } T_p M},$$

wobei $X^{\text{proj } T_p M}$ die orthogonale Projektion von X auf den Tangentialraum $T_p M$ bzgl. des Standardskalarproduktes ist.

Schreibt man in Beispiel 3) $\sigma = (\sigma^1, \dots, \sigma^n)$, so kann man $d\sigma = (d\sigma^1, \dots, d\sigma^n)$ als 1-Form auf M mit Werten in \mathbb{R}^n auffassen:

$$\begin{aligned} d\sigma(X)_p &= (d\sigma^1(X)_p, \dots, d\sigma^n(X)_p) \\ &= (X(\sigma^1)_p, \dots, X(\sigma^n)_p) \\ &= \mathcal{I}_p\left(\sum X(\sigma^i)\partial_i\right), \end{aligned}$$

wobei ∂_i das i -te Koordinatenfeld in der Karte $(\text{id}, \mathbb{R}^n)$ ist. Identifiziert man $E = M \times \mathbb{R}^n$ mit $C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$, so gilt $\nabla_X S = d\sigma(X)\omega(X)\sigma$ (Kurzschreibweise für die zweite Komponente von S). Lokal ist *jede* kovariante Ableitung von dieser Form.

Lemma 7.2 Die kovariante Ableitung $(\nabla_X S)_p$ hängt nur von den Werten von X und S in einer Umgebung von p ab.

Beweis Es seien $p \in M$ und $X_1, X_2 \in \mathcal{V}(M)$ sowie $S_1, S_2 \in \Gamma(E)$ und U eine Umgebung von p mit $X_1|_U = X_2|_U$ und $S_1|_U = S_2|_U$. Wähle nun ein $\sigma \in C^\infty(M)$ mit dem Träger $\text{supp } \sigma \subseteq U$ und $\sigma|_V \equiv 1$ auf einer Umgebung V von p . Dann gilt: $\sigma X_1 = \sigma X_2$ und $\sigma S_1 = \sigma S_2$. Für $q \in V$ folgt dann:

$$\begin{aligned} (\nabla_{\sigma X_i} \sigma S_i)_q &= \sigma(q)(\nabla_{X_i} \sigma S_i)|_q \\ &= \sigma(q) \underbrace{(X_i(\sigma)|_q)}_{=0} S_i + \underbrace{\sigma(q)}_{=1} \nabla_{X_i} S_i|_q \\ &= \nabla_{X_i} S_i|_q \end{aligned}$$

Damit folgt $\nabla_{X_1} S_1 = \nabla_{X_2} S_2$ □

1. Lokale Koordinaten

Es sei (φ, U) eine Karte von M um $p \in M$ und $E|_U \xrightarrow{\tau} U \times \mathbb{R}^n$. Dann ist $s_i(p) = \tau^{-1}(p, e_i)$ eine lokale Basis. Jeder Schnitt S ist also lokal von der Form $S|_U = \sum_i \sigma^i s_i$. Somit existieren glatte Funktionen Γ_{ij}^k , die sogenannten **Christoffelsymbole** mit

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} s^j = \sum_k \Gamma_{ij}^k s^k.$$

Für $S = \sum \sigma^j s_j$ und $X = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ folgt dann:

$$\begin{aligned} (\nabla_X S)_p &= \sum_{i,j} \xi_p^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} (\sigma^j s_j) \\ &= \sum_{i,j} \xi_p^i \left(\frac{\partial \sigma^j}{\partial x^i} \cdot s_j(p) \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} s_j|_p \right) \\ &= \sum_{i,j} \xi_p^i \left(\frac{\partial \sigma^j}{\partial x^i} \Big|_p s_j(p) + \sigma^j(p) \sum_k \Gamma_{ij}^k(p) s_k(p) \right) \\ &= \sum_k \left(\underbrace{\sum_i \xi_p^i \frac{\partial \sigma^k}{\partial x^i} \Big|_p}_{=X(\sigma^k)|_p} + \sum_{i,j} \xi_p^i \sigma^j(p) \Gamma_{ij}^k(p) \right) s_k(p) \\ &= X(\sigma^k)|_p = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\sigma^k \circ \gamma) \text{ mit } \dot{\gamma}(0) = X_p \end{aligned}$$

- Bemerkung** (1) $X \mapsto (\nabla_X S)_p$ hängt nur von dem Wert X_p von X in p ab, Schreibweise $(\nabla_X S)_p = \nabla_{X_p} S$.
- (2) $S \mapsto \nabla_{X_p} S$ hängt nur von den Werten von S entlang einer Kurve γ mit $\dot{\gamma}(0) = X_p$ ab. Es gilt

$$\nabla_X S = \sum_k X(\sigma^k) S_k + \sum_k \sum_j \left(\left(\sum_i \Gamma_{ij}^k \xi^i \right) \sigma^j \right) s_k.$$

Schreibt man $\sigma = (\sigma^1, \dots, \sigma^n)$ und fasst $d\sigma = (d\sigma^1, \dots, d\sigma^n)$ als lokale 1-Form mit Werten in \mathbb{R}^n auf, so ist für $s = (s_1, \dots, s_n)$ $d\sigma \cdot s = \sum d\sigma^j s^j$ eine lokale 1-Form mit Werten in E . Es gilt: $d\sigma \cdot s(X) = D_X \sigma \cdot s$. Analog definiert $\omega(X) = (\omega_j^k(X))_{k,j}$ eine lokale 1-Form mit Werten in den reellen $(n \times n)$ -Matrizen. Dann ist

$$\omega\sigma : X \mapsto \omega(X)\sigma = \left(\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \xi^i \sigma^j \right)^k$$

eine lokale 1-Form mit Werten in \mathbb{R}^n und $\omega\sigma \cdot s$ eine lokale 1-Form mit Werten in E . Damit gilt

$$\nabla_X S = (d\sigma(X) + \omega(X)\sigma) \cdot s$$

oder kurz

$$\nabla = d + \omega.$$

2. Transformationsverhalten

Es seien $E|_{U_\alpha} \xrightarrow{\tau_\alpha} U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ und $E|_{U_\beta} \xrightarrow{\tau_\beta} U_\beta \times \mathbb{R}^n$ lokale Trivialisierungen. Die Übergangsfunktion

$$\psi = \psi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$$

war durch

$$\tau_\beta \circ \tau_\alpha^{-1}(p, x) = (p, \psi x)$$

definiert. Für die lokalen Darstellungen $S = \sum \sigma^j s_j = \sum \tilde{\sigma}^j s_j$ in τ_α beziehungsweise τ_β gilt damit $\tilde{\sigma}^i = \sum_k \psi_k^i \sigma^k$, kurz $\tilde{\sigma} = \psi\sigma$. Es folgt daraus:

$$(d\sigma(X) + \omega(X)\sigma)S = \nabla_X S = (d\tilde{\sigma}(X) + \tilde{\omega}(X)\tilde{\sigma})\tilde{S}$$

also

$$\begin{aligned} d\sigma(X) + \omega(X)\sigma &= \psi^{-1}(d\tilde{\sigma}(X) + \tilde{\omega}(X)\tilde{\sigma}) \\ &= \psi^{-1}(d(\psi\sigma)(X) + \tilde{\omega}(X)\psi\sigma) \\ &= \psi^{-1}((D_X \psi)\sigma + \psi d\sigma(X) + \tilde{\omega}(X)\psi\sigma) \\ &= d\sigma(X) + \underbrace{(\psi^{-1}(D_X \psi) + \psi^{-1}\tilde{\omega}(X)\psi)}_{=\omega(X)}\sigma. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\tilde{\omega}(X) = \psi\omega(X)\psi^{-1} - D_X \psi \cdot \psi^{-1}. \quad (7.1)$$

Daher definiert $\omega(X)$ *keinen* Schnitt in $\text{Hom}(E, E)$, denn in Kapitel 5 wurde gezeigt, dass die Übergangsfunktion von $\text{Hom}(E, E)$ gegeben ist durch

$$(p, \eta) \rightarrow (p, \psi \circ \eta \circ \psi^{-1}).$$

Bemerkung Der zweite Summand in (7.1) hängt *nur* von der Übergangsfunktion ψ und X ab, und somit *nicht* von ∇ . Das heißt sind ∇ und $\tilde{\nabla}$ kovariante Ableitungen auf E , so ist ihre Differenz $\nabla - \tilde{\nabla}$ eine globale 1-Form mit Werten in $\text{Hom}(E, E)$.

Durch eine kovariante Ableitung auf einem Vektorbündel E erhalten wir kovariante Ableitungen auf dem dualen Vektorbündel E^* und Tensorprodukte von Vektorbündeln wie folgt:

Proposition 7.3 Die für $X \in \mathcal{V}(M)$, $S^* \in \Gamma(E^*)$ und $v \in E_p$ sowie eine Fortsetzung $\tilde{v} \in \Gamma(E)$ von v_p durch

$$(\nabla_X^* S^*)_p(v) = X_p(S^*(\tilde{v})) - S^*|_p(\nabla_X \tilde{v})$$

definierte Abbildung ist eine kovariante Ableitung auf E^* . Dass $S^*(\tilde{v}) = (S^*, \tilde{v})$ ist führt zu $X_p(S^*, \tilde{v}) = (\nabla_X^* S^*, \tilde{v}) + (S^*, \nabla_X \tilde{v})$.

Der Beweis sei zur Übung überlassen.

Proposition 7.4 Es seien E_1 und E_2 Vektorbündel mit kovarianten Ableitungen ∇^1 und ∇^2 über M . Dann definiert für $X \in \mathcal{V}(M)$, $S_i \in \Gamma(E_i)$

$$\nabla_X(S_1 \otimes S_2) = \nabla_X^1 S_1 \otimes S_2 + \nabla_X^2 S_1 \otimes S_2$$

durch lineare Fortsetzungen eine kovariante Ableitung auf $E_1 \otimes E_2$.

Definition 7.5 Die Abbildung

$$\begin{aligned} R^\nabla &= R : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E) \\ R(X, Y)S &= \nabla_X \nabla_Y S - \nabla_Y \nabla_X S - \nabla_{[X, Y]} S \end{aligned}$$

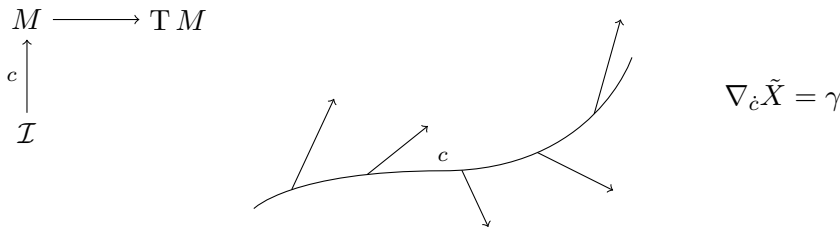
heißt der **Krümmungstensor** der Abbildung ∇ .

Bemerkung Für alle $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ gilt $R(Y, X) = -R(X, Y)$.

Proposition 7.6 R ist $C^\infty(M)$ -linear in allen Argumenten.

Der Beweis sei zur Übung überlassen.

3. Schnitte entlang von Ableitungen



Definition 7.7 Es seien E ein Vektorbündel über M mit kovarianter Ableitung ∇ und $\Phi : N \rightarrow M$. Ein **Schnitt** entlang Φ ist eine glatte Abbildung $S : N \rightarrow E$, so dass $S(p) \in E_{\Phi(p)}$ gilt, dies entspricht genau dem Schnitt in das längs Φ zurückgezogene Bündel Φ^* .

$$\begin{array}{ccc}
 \Phi^* E & \hookrightarrow & E \\
 \tilde{S} \downarrow & \nearrow S & \downarrow \pi \\
 N & \xrightarrow{\Phi} & M
 \end{array}$$

Für einen Schnitt S in E längs Φ und $X_p \in T_p N$ ist die kovariante Abbildung $\nabla_{X_p} S$ von S in Richtung X_p wie folgt definiert:

Es sei s_1, \dots, s_n eine lokale Basis über einer Trivialisierungsumgebung $U \subseteq M$. Dann ist S lokal gegeben durch

$$S_p = \sum_j \sigma^j(p) s_j(\Phi(p))$$

für $p \in V = \Phi^{-1}(U) \subseteq N$, und damit

$$\nabla_{X_p} S = (d\sigma(X_p) + \omega(\Phi_{*p} X_p) \sigma(p)) S(\Phi(p)).$$

Dies hängt nicht von der Wahl der Trivialisierung ab, denn ist U' ein weiteres Trivialisierungsgebiet mit lokaler Basis $\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_n$ und Übergangsfunktion $\psi : C \cap U' \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$, so gilt

$$\begin{aligned}
 \tilde{\sigma} &= (\psi \circ \Phi) \sigma \quad \text{und} \\
 \tilde{\omega} &= (\psi \circ \Phi) \omega (\psi \circ \Phi)^{-1} - d(\psi \circ \Phi) (\psi \circ \Phi)^{-1}
 \end{aligned}$$

damit folgt

$$\begin{aligned}
 & d\tilde{\sigma}(X_p) + \tilde{\omega}(\Phi_{*p} X_p) \tilde{\sigma}(p) - d((\psi \circ \Phi) \sigma)(X_p) \\
 & \quad + (\psi \circ \Phi) \omega(\Phi_{*p} X_p) (\psi \circ \Phi)^{-1} (\psi \circ \Phi) \sigma \\
 & \quad - d(\psi \circ \Phi)(X_p) (\psi \circ \Phi)^{-1} (\psi \circ \Phi) \sigma \\
 &= d(\psi \circ \Phi)(X_p) \sigma + (\psi \circ \Phi) \omega(\Phi_{*p} X_p) \sigma - d(\psi \circ \Phi)(X_p) \sigma \\
 &= (\psi \circ \Phi) (d\sigma(X_p) + \omega(\Phi_{*p} X_p) \sigma)
 \end{aligned}$$

Damit ist $p \mapsto \nabla_{X_p} S$ als Schnitt entlang Φ wohldefiniert.

Bemerkung Dies definiert eine kovariante Ableitung auf $\Phi^* E \subseteq N \times E$. Sind umgekehrt $S \in \Gamma(E)$ und $X_p \in T_p N$, so ist $S \circ \Phi$ ein Schnitt entlang Φ und es gilt

$$\nabla_{X_p} (S \circ \Phi) = \nabla_{\Phi_{*p} X_p} S$$

Spezialfall: Sei $\Phi = c : \mathcal{I} = [a, b] \rightarrow M$. Ein Schnitt in E entlang c ist eine glatte Abbildung $S : \mathcal{I} \rightarrow E$ mit $S(t) \in E_{c(t)}$. Die kovariante Abbildung $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}|_t} S$ wird kurz als $\nabla_t S$ oder $S'(t)$ geschrieben. In lokalen Koordinaten gilt

$$\begin{aligned}
 S' &= \left(d\sigma \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) + \omega \left(c_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) \sigma \right) S \circ c \\
 &= (\sigma' + \omega(\dot{c}) \sigma) S \circ c
 \end{aligned}$$

Definition 7.8 Ein Schnitt $S \in \Gamma(E)$ heißt **parallel** (oder **konstant**), wenn $\nabla S \equiv 0$. Ein Schnitt S entlang c heißt **parallel**, wenn $S' \equiv 0$ gilt.

Proposition 7.9 Es sei $c : \mathcal{I} \rightarrow M$ eine (stückweise) glatte Kurve und $\xi \in E_{c(s)}$. Dann existiert genau ein entlang c paralleler Schnitt S_ξ in E mit $S_\xi(s) = \xi$.

Beweis in lokalen Koordinaten definiert

$$0 = S'_\xi(t) = (\sigma'(t) + \omega(\dot{c}(t)\sigma(t))S(dt))$$

ein lineares Differentialgleichungssystem:

$$\sigma'(t) = A(t) \cdot \sigma(t)$$

wobei $A(t) = -\omega(\dot{c}(t))$. Ist $[t, T]$ ein kompaktes Teilintervall in \mathcal{I} mit $s \in [t, T]$, so existiert eine Partition $t = t_0 < \dots < t_k = T$, so dass $c([t_i, t_{i+1}])$ in einer Trivialisierungsumgebung liegt. Man findet so sukzessive eindeutige Lösungen auf den Teilintervallen (*lineares System*), welche durch Fortsetzungen eine eindeutige Lösung auf $[t, T]$ definieren. Erneut folgt aus der Eindeutigkeit, dass ein für alle Zeiten definierter paralleler Schnitt S_ξ existiert. \square

Definition 7.10 Es sei c eine glatte Kurve in M . Die lineare Abbildung

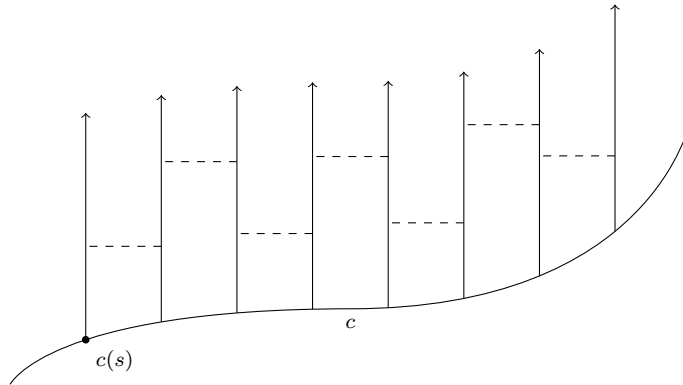
$$\begin{aligned} P_{s,t}^c : E_{c(s)} &\rightarrow E_{c(t)} \\ \xi &\mapsto S_\xi(t), \end{aligned}$$

wobei S_ξ den nach Proposition 7.9 eindeutigen parallelen Schnitt entlang c mit $S_\xi(s) = \xi$ bezeichnet, heißt **Paralleltransport** entlang c .

Bemerkung (1) $P_{s,t}^c$ ist invertierbar mit Inversen $(P_{s,t}^c)^{-1} = P_{t,s}^c = P_{s,t}^{\bar{c}}$, wobei $\bar{c} = (s + t - \tau)$.

(2) Die Abbildung $P_{s,t}^c$ ist im Allgemeinen *nicht* unabhängig von der Wahl von c .

Beispiel In \mathbb{R}^n ist ein Vektorfeld X genau dann parallel, wenn X (beziehungsweise $\bar{X}_p \in \mathcal{I}_p(X_p)$) konstant im „üblichen“ Sinne ist: Paralleltransport entlang einer Kurve entspricht der gewählten Parallelverschiebung.



Es seien $S \in \Gamma(E)$ und $X_p \in T_p M$. Ist c eine Integralkurve von X_p , das heißt $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = X_p$, so ist $\tilde{S} = S \circ c$ ein Schnitt entlang c und es gilt $\tilde{S}'(0) = \nabla_{X_p} S$.

Nun sei ferner ξ_1, \dots, ξ_n eine Basis von E_p und es bezeichnen s_1, \dots, s_n die parallelen Schnitte entlang c mit $s_i(0) = \xi_i$. Dann gilt $\tilde{S}(t) = \sum \sigma^j(t) s_j(t)$ und es folgt

$$\begin{aligned}
 \nabla_{X_p} S &= \tilde{S}'(0) = \nabla_t \left(\sum_j \sigma^j s_j \right) (0) \\
 &= \sum_j \left((\sigma^j)' s_j + \underbrace{\sigma^j \nabla_t s_j}_{\equiv 0} \right) (0) \\
 &= \sum_j \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sigma^j(t) - \sigma^j(0)}{t} \right) s_j(0) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\sum_j \sigma^j(t) s_j(0) - \sigma^j(0) s_j(0) \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\sum_j \sigma^j (P_{t,0}^c(s_j(t)) - \sigma^j(0) s_j(0)) \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(P_{t,0}^c \left(\sum_j \sigma^j s_j(t) \right) - \sum_j \sigma^j s_j(0) \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(P_{t,0}^c (\tilde{S}(t) - \tilde{S}(0)) \right)
 \end{aligned}$$

4. Der Levi-Civita Zusammenhang

Für das „gewöhnliche“ Differential auf \mathbb{R}^k gilt:

$$D Y(X) - D X(Y) = \sum_i^k \frac{\partial y^j}{\partial x^i} X^i - \frac{\partial x^j}{\partial x^i} Y^i = [X, Y].$$

Definition 7.11 Es sei ∇ eine kovariante Ableitung auf TM . Das $(1, 2)$ -Tensorfeld

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

heißt **Torsion** oder der **Torsionstensor** von ∇ . Die kovariante Ableitung heißt **torsionslos**, wenn $T \equiv 0$ gilt.

Betrachtet man die Standardmetrik $g^{\text{std}} = \langle \cdot, \cdot \rangle$ des \mathbb{R}^k in den Koordinaten $(\text{id}, \mathbb{R}^k)$, so gilt:

$$\begin{aligned}
 g^{\text{std}} &= \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j = \sum_{i,j} \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j \\
 &= \sum_i dx^i \otimes dx^i.
 \end{aligned}$$

Das heißt die Metrik g^{std} (das heißt die g_{ij}) ist konstant.

Satz 7.12 (Levi-Civita, 1961) Auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit existiert genau ein torsionsloser Zusammenhang bezüglich dessen kovarianter Ableitung die Metrik parallel ist ($\nabla g \equiv 0$).

Zur Parallelität: Die Metrik g einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist ein $(0, 2)$ -Tensorfeld, das heißt lokal ist g endliche Summe von Elementen der Form $\omega \otimes \eta$, wobei $\omega, \eta \in \Omega^1(M)$.

Für $X, Y, Z \in \mathcal{V}(M)$ gilt:

$$\begin{aligned}
 \nabla_Z(\omega \otimes \eta)(X, Y) &= ((\nabla_Z^* \omega) \otimes \eta + \omega \otimes (\nabla_Z^* \eta))(X, Y) \\
 &= (\nabla_Z^* \omega)(X) \eta(Y) + \omega(X) (\nabla_Z^* \eta)(Y) \\
 &= (Z(\omega(X)) - \omega(\nabla_Z X)) \eta(Y) + \omega(X) (Z(\eta(Y)) - \eta(\nabla_Z Y)) \\
 &= Z(\omega(X)) \eta(Y) + \omega(X) Z(\eta(Y)) - (\omega(\nabla_Z X) \eta(Y) + \omega(X) \eta(\nabla_Z Y)) \\
 &= Z((\omega \otimes \eta)(X, Y)) - (\omega \otimes \eta)(\nabla_Z X, Y) - (\omega \otimes \eta)(X, \nabla_Z Y)
 \end{aligned}$$

Somit ist g genau dann parallel, wenn für $X, Y, Z \in \mathcal{V}(M)$ gilt:

$$0 = (\nabla_Z g)(X, Y) = Z(g(X, Y)) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y)$$

beziehungsweise

$$Z \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle.$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn der Paralleltransport entlang von Kurven eine lineare Isometrie ist (vgl. Aufgabe 3 auf dem Übungsblatt 8). Ist c eine glatte Kurve, $P_t: T_{c(0)} M \rightarrow T_{c(t)} M$ eine Isometrie, so gilt für alle $X, Y \in T_{c(0)} M$:

$$g_{c(0)}(X, Y) = g_{c(t)}(P_t X, P_t Y) = (P_t^* g_{c(t)})(X, Y).$$

Also gilt $P_t^* g_{c(t)} = g_{c(0)}$ und es folgt:

$$\nabla_t g = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((P_t^* g_{c(t)}) - g_{c(0)}) = 0.$$

Beweis (von Satz 7.12) Ist ∇ eine kovariante Ableitung mit den geforderten Eigenschaften, so gilt für $X, Y, Z \in \mathcal{V}(M)$:

$$\begin{aligned}
 X \langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \\
 Y \langle Z, X \rangle &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle \\
 &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \overline{\langle Z, \nabla_X Y \rangle} - \langle Z, [X, Y] \rangle \\
 Z \langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle
 \end{aligned}$$

Indem man die ersten beiden Gleichungen addiert und die Dritte abzieht erhält man:

Koszul-Formel

$$\begin{aligned}
 2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle &= X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle \\
 &\quad - \langle X, \nabla_Y Z - \nabla_Z Y \rangle \\
 &\quad - \langle Y, \nabla_X Z - \nabla_Z X \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle \\
 &= X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle.
 \end{aligned}$$

Die rechte Seite der Gleichung ist $C^\infty(M)$ -linear in Z , definiert also für alle $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ eine 1-Form $\omega_{(X,Y)}$. Da die Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit ist, existiert ein Vektorfeld $A_{(X,Y)} \in \mathcal{V}(M)$ mit $\omega_{(X,Y)} = \langle A_{(X,Y)}, \cdot \rangle$, das, wie man leicht nachrechnet, $A_{(X,Y)}$ -linear und derivativ in Y und $C^\infty(M)$ -linear in X ist und durch

$$\begin{aligned}
 \nabla: \quad \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) &\rightarrow \mathcal{V}(M) \\
 (X, Y) &\mapsto A_{(X,Y)}
 \end{aligned}$$

wird eine eindeutige kovariante Ableitung definiert, die die geforderten Eigenschaften erfüllt. \square

Bemerkung Die zur Definition des Levi-Civita Zusammenhangs verwendete Formel bezeichnet man als **Koszul-Formel**.

Definition 7.13 Die nach obigem Satz eindeutig bestimmte, torsionsfreie Zusammenhang bezüglich dessen die Metrik parallel ist, heißt **Levi-Civita Zusammenhang**.

Beispiel (1) Der Levi-Civita Zusammenhang des \mathbb{R}^k mit der Standardmetrik ist die gewöhnliche Ableitung D .

(2) Ist $M \subseteq \mathbb{R}^k$ eine Untermannigfaltigkeit mit der induzierten Metrik, so ist durch

$$(\nabla_X Y)_p = (D_X Y|_p)^T = D_X Y|_p - (D_X Y|_p)^\perp$$

ein Zusammenhang definiert, der gerade der Levi-Civita Zusammenhang ist, denn ∇ ist torsionslos, da D torsionslos ist und für Vektorfelder $X, Y, Z \in \mathcal{V}(M)$ gilt:

$$\begin{aligned} Z \langle X, Y \rangle &= \langle D_Z Y, Y \rangle + \langle X, D_Z Y \rangle \\ &= \langle (D_Z X)^T + (D_Z X)^\perp, Y \rangle + \langle X, (D_Z Y)^T + (D_Z Y)^\perp \rangle \\ &= \langle (D_Z X)^T, Y \rangle + \langle X, (D_Z Y)^T \rangle \\ &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle. \end{aligned}$$

Lokale Koordinaten Es sei (M, g) eine Riemmannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita Zusammenhang ∇ . In einer Karte gilt:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Es sei

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle \text{ und } g = \langle \cdot, \cdot \rangle = \sum g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Es gilt $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, denn

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= \sum_{l,m} g^{kl} g_{lm} \Gamma_{ij}^m \\ &= \sum_{l,m} g^{kl} \left\langle \Gamma_{ij}^m \frac{\partial}{\partial x^m}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle \\ &= \sum_l g^{kl} \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_l g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right). \end{aligned}$$

5. Krümmungen

Man definiert die zweite kovariante Ableitung als

$$\nabla_{X,Y}^2 Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z.$$

(Formale Produktregel: $\nabla_X(\nabla_Y Z) = \nabla_X(\nabla Z(Y)) = (\nabla_X(\nabla Z))(Y) + (\nabla Z)(\nabla_X Y) = \nabla_{X,Y}^2 Z + \nabla_{\nabla_X Y} Z$.)

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z - (\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{\nabla_Y X} Z) \\ &= \nabla_{X,Y}^2 Z - \nabla_{Y,Z}^2 Z. \end{aligned}$$

Proposition 7.14 Für $X, Y, Z, W \in \mathcal{V}(M)$ gilt:

- (i) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$,
- (ii) $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(Y, X)Z, W \rangle = -\langle R(X, Y)W, Z \rangle$,
- (iii) $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle$.

Der Beweis sei als Übung überlassen.

Es seien $X, Y \in T_p M$ linear unabhängig. Dann hängt

$$\frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{\|X\|^2 \|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2}$$

nur von der von X und Y aufgespannten Ebene ab. Um das zu zeigen seien $Z = aX + bY$, $W = cX + dY$ und ohne Einschränkung seien X, Y orthonormal. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|Z\|^2 \|W\|^2 - \langle Z, W \rangle^2 &= \|aX + bY\|^2 \|cX + dY\|^2 - \langle aX + bY, cX + dY \rangle^2 \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 = a^2 d^2 + b^2 c^2 - 2abcd \\ &= (ad - bc)^2 \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} \frac{\langle R(aX + bY, cX + dY)(cX + dY), (aX + bY) \rangle}{\|aX + bY\|^2 \|cX + dY\|^2 - \langle aX + bY, cX + dY \rangle^2} &= \frac{(ad - bc)^2 \langle R(X, Y)Y, X \rangle}{(ad - bc)^2} \\ &= \langle R(X, Y)Y, X \rangle. \end{aligned}$$

Definition 7.15 Es sei σ eine von $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ aufgespannte Ebene in $T_p M$. Dann heißt

$$\sec_p(\sigma) = \sec_p(X, Y) = \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{\|X\|^2 \|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2}$$

die **Schnittkrümmung** der Ebene σ .

Es sei $e_1, \dots, e_m \in T_p M$ eine Orthonormalbasis bezüglich $g(p)$. Die für $X, Y \in T_p M$ durch Spurbildung definierte Abbildung

$$\text{ric}_p(X, Y) = \text{spur } R(\cdot, X)Y = \sum_i \langle R(e_i, X)Y, e_i \rangle$$

heißt **Ricci-Tensor** in p . Aus den Symmetrien von R folgt, dass ric_p symmetrisch ist. Es existiert ein $(1,1)$ -Tensorfeld Ric , so dass

$$\text{ric}_p(X, Y) = \langle \text{Ric}(X), Y \rangle$$

für alle $p \in M$, $X, Y \in T_p M$ gilt.

Definition 7.16 Für $X \in T_p M$, $X \neq 0$ heißt

$$\frac{\text{ric}_p(X, X)}{\|X\|^2} = \left\langle \text{Ric} \left(\frac{X}{\|X\|} \right), \frac{X}{\|X\|} \right\rangle$$

die **Ricci-Krümmung** in p in Richtung X . Die Spur von Ric

$$\text{scal}(p) = \text{spur } \text{Ric}_p(\cdot) = \sum_i \text{ric}_p(e_i, e_i) = \sum_{i,j} \langle R(e_i, e_j)e_j, e_i \rangle$$

heißt die **Skalarkrümmung** von M in p .