1 Reelle und komplexe Zahlen

Wir definieren die reellen Zahlen „axiomatisch“, d.h.: Man legt in einer Definition die Eigenschaften der reellen Zahlen fest, die im folgenden verwendet werden dürfen. Ausblick: $\mathbb{R}$ ist ein „ordnungsvollständiger, geordneter Körper“.

1.1 Geordnete Körper

Definition. Sei M eine nichtleere Menge. Eine Abbildung $* : M \times M \to M (x, y) \mapsto x * y$ heißt Verknüpfung auf M.

Definition 1.1. Seien K eine Menge, $0 \in K$, $1 \in K$ mit $0 \neq 1$, und „+“ und „·“ Verknüpfungen auf K. Dann heißt $(K, 0, 1, +, \cdot)$ ein *Körper*, wenn die folgenden Eigenschaften für alle x, y, $z \in K$ gelten:

a) Assoziativgesetze:

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

b) neutrale Elemente:

$$x + 0 = x, \; x \cdot 1 = x$$

c) inverse Elemente:

- Zu jedem $x \in K$ existiert ein $a \in K$ mit $x + a = 0$.
- Zu jedem $x \in K \setminus \{0\}$ existiert ein $b \in K$ mit $x \cdot b = 1$.

d) Kommutativgesetze:

$$x + y = y + x, \; x \cdot y = y \cdot x$$

e) Distributivgesetz:

$$(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$$

Man schreibt oft K anstelle $(K, 0, 1, +, \cdot)$.

Beispiel. a) $\mathbb{Q}$ mit den üblichen 0, 1, +, · ist ein Körper.

b) $\mathbb{Z}$ ist kein Körper, da es kein $b \in \mathbb{Z}$ gibt mit $2b = 1$.

c) Weitere Beispiele in linearer Algebra und Analysis I.

Bemerkung. a) Wir schreiben $-x$ für das Inverse Element von $x \in K$ bzgl. der Addition und $x^{-1} = \frac{1}{x}$ für das Inverse Element von $x \in K \setminus \{0\}$. Man lässt „$\cdot$“ und überflüssige Klammern meist weg. Dabei gilt „$\cdot$“ vor „$+$“.

b) Die inversen Elemente sind eindeutig bestimmt (siehe LA). Man schreibt $x - y$ statt $x + (-y)$ und $\frac{x}{y}$ statt $x \cdot y^{-1}$.

c) Es gelten Rechenregeln wie in der Bruchrechnung (z.B. $0 \cdot x = 0$, $-(-x) = x$, usw.) [siehe LA]. Im folgenden wird dies ohne Kommentar in Ana I verwendet.

Definition 1.2. Sei M eine nichtleere Menge. Eine *Relation* R auf M ist eine Teilmenge von $M \times M$. Man schreibt $x \sim_R y$ statt $(x, y) \in R$.

R ist *Ordnungsrelation* (oder Ordnung), wenn gelten:

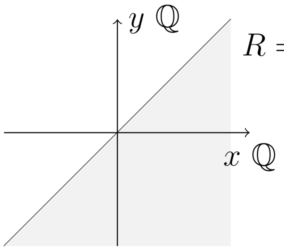
a) $\forall x \in M : x \sim_R x$ (reflexiv).

b) $\forall x, y, z \in M$: Wenn $x \sim_R y$ und $y \sim_R z$, dann auch $x \sim_R z$ (transitiv).

c) $\forall x, y \in M$: Wenn $x \sim_R y$ und $y \sim_R x$, dann gilt $x = y$ (antisymmetrisch). Statt $\sim_R$ schreibt man in diesem Fall meist $\leq_R$ oder $\geq_R$. Eine Ordnung heißt total, wenn für beliebige $x, y \in M$ stets $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt.

Man schreibt $x < y$, wenn $x \leq y$ und $x \neq y$, sowie $x \geq y$ statt $y \leq x$ und $y > x$ statt $x < y$.

Beispiel. a) Die übliche Ordnung auf $\mathbb{Q}$ erfüllt Definition 1.2 und ist total. Hier:



$R = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : x \geq y\}$

b) Die Relation „n teilt m“ für $n, m \in M$ ist eine *nicht*-totale Ordnung, z.B. 2 und 3 teilen sich nicht.

Definition 1.3. Ein *geordneter Körper* $K = (K, \leq)$ besteht aus einem Körper K und einer *totalen* Ordnung $\leq$, sodass die folgenden Eigenschaften gelten:

a) $\forall x, y, z \in K$: Wenn $x < y$, dann $x + z < y + z$.

b) $\forall x, y \in K$: Wenn $x > 0$ und $y > 0$, dann gilt $xy > 0$.

$x \in K$ heißt *positiv* (*negativ*), wenn $x \geq 0$ ($x \leq 0$). $x \in K$ heißt *strikt positiv* (*strikt negativ*), wenn $x > 0$ ($x < 0$). Man setzt

$$K_+ = \{x \in K : x \geq 0\}, \; K_- = \{x \in K : x \leq 0\}$$

Es gelten $K_+ \cap K_- = \{0\}$ (nach Def. 1.2 3), sowie $K_+ \cup K_- = K$ (wegen der Totalität).

Beispiel. $\mathbb{Q}$ mit der üblichen Ordnung ist ein geordneter Körper.

Satz 1.4. *a)* $y > x \iff y - x > 0$.

b) *a)* $x < 0 \iff -x > 0$.

b) $x > 0 \iff -x < 0$.

c) Wenn $x > 0$ *und* $y < 0$, *dann* $xy < 0$.

d) Wenn $x \neq 0$, *dann* $x^2 = x \cdot x > 0$. *Speziell:* $1 = 1^2 > 0$.

e) Wenn $x > 0$, *dann* $\dfrac{1}{x} > 0$.

Beweis. a) Sei $y > x$. Addiere $-x$ zu beiden Seiten. 1.3 1 liefert $y - x > x - x = 0$.
Sei $y - x > 0$. Addiere x. 1.3 1 $\implies y = y - x + x > x$.

b) a) Setze $y = 0$ in 1.

b) Ergibt sich, wenn man in 2a x durch $-x$ ersetzt.
(Beachte: $-(-x) = x$).

c) Seien $x > 0$, $y < 0 \overset{2}{\implies} -y > 0 \overset{1.3\ 2}{\implies} 0 < x \cdot (-y) = -xy \overset{2}{\implies} xy < 0$.

d) Sei $x \neq 0$. Nach 2 und der Totalität der Ordnung gilt entweder $x > 0$ oder $-x > 0$. 4 folgt also aus 1.3 2 und $(-x)^2 = x^2$.

e) Sei $x > 0$. *Ann.* $\dfrac{1}{x} < 0$. Dann $-\dfrac{1}{x} > 0$ (nach 2) und somit $-1 = x \cdot \left(-\dfrac{1}{x}\right) > 0$ nach 1.3 2. Nach 4 und 2 folgt $\lightning$. Da $\dfrac{1}{x} \neq 0$ folgt die Behauptung, da die Ordnung total ist.

$\square$

Definition 1.5. Sei K ein geordneter Körper und $x \in K$.
Dann heißt $|x| := \begin{cases} x, & x > 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$ der *Betrag* von x.

Satz 1.6. *Seien K ein geordneter Körper und $x, y \in K$. Dann gelten:*

a) $|x| \geq 0$, $|x| = 0 \iff x = 0$.

b) $x \leq |x|$, $-x \leq |x|$, $|x| = |-x|$.

c) $|xy| = |x| \cdot |y|$.

d) $|x+y| \leq |x| + |y|$.

e) $|x-y| \geq |x| - |y|$.

Beweis. a) - c) folgen leicht aus Def. 1.5 und Satz 1.4.

d) Da $x \leq |x|$, $y \leq |y|$, folgt $x + y \overset{1.3\ 1}{\leq} |x| + y \leq |x| + |y|$.
Ebenso: $-(x+y) \leq |x| + |y|$. Somit: $|x+y| \leq |x| + |y|$.

e) Übungsblatt.

$\square$

Definition 1.7. Seien K ein geordneter Körper und $a, b \in K$ mit $a < b$. Dann definiert man die *beschränkten Intervalle*

$[a,b] = \{x \in K : a \leq x \leq b\}$, $[a,a] = \{a\}$ („abgeschlossen"),

$(a,b) = \{x \in K : a < x < b\}$ („offen", statt $]a,b[$),

$[a,b) = \{x \in K : a \leq x < b\}$,

$(a,b] = \{x \in K : a < x \leq b\}$,

und die *unbeschränkten Intervalle*

$$\left.\begin{array}{l} [a,\infty) = \{x \in K : x \geq a\}, \\ (-\infty,a] = \{x \in K : x \leq a\}, \end{array}\right\} \text{(„abgeschlossen")},$$

$$\left.\begin{array}{l} (a,\infty) = \{x \in K : x > a\}, \\ (-\infty,a) = \{x \in K : x < a\}, \end{array}\right\} \text{(„offen")}.$$

Beispiel. Für welche $x \in \mathbb{Q}$ gilt $|2x-3| + 2 > 3x - 5$? $(*)$
Lösung: Betrag auflösen:

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3, \ x \geq \frac{3}{2}, \\ 3-2x, \ x < \frac{3}{2}, \end{cases} \quad x \in \mathbb{Q}.$$

Fall 1: $x \geq \dfrac{3}{2}$. Dann:

$$(*) \iff 2x - 3 + 2 > 3x - 5 \iff 2x - 1 > 3x - 5 \overset{1.3\ 1}{\iff} 4 > x.$$

Also: jedes $x \in \left[\dfrac{3}{2}, 4\right)$ erfüllt $(*)$.

Fall 2: $x < \frac{3}{2}$. Dann:

$$(*) \iff 3 - 2x + 2 > 3x - 5 \overset{1.3\ 1}{\iff} 10 > 5x \overset{(\text{Üb})}{\iff} x < 2.$$

Also: jedes $x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ erfüllt $(*)$.

$\implies$ Lösungsmenge $= (-\infty, 4)$.

Satz 1.8 (Bernoulli-Ungleichung)**.** *Seien K ein geordneter Körper, $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

(Dabei wird $y^n = y \cdots y$ induktiv definiert.)

Beweis. (per Induktion)
(IA) Beh. ist wahr für $n = 1$.
(IS) Beh. gelte für ein $n \in \mathbb{N}$ (IV).
Dann:

$$\begin{aligned}(1 + x)^{n+1} = \underbrace{(1 + x)}_{>0,\ \text{n.V. } [x>-1]} (1 + x)^n &\overset{(IV),\ \text{Üb}}{\geq} (1 + x)(1 + nx) \\ &= 1 + (n + 1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \overset{1.3\ 1}{\geq} 1 + (n + 1)x.\end{aligned}$$

$\implies$ IS gilt $\overset{\text{Ind.}}{\implies}$ *Beh.* □

Lemma 1.9. *Sei K ein geordneter Körper und $a, b \in K$ mit $a < b$. Dann gilt*

$$a < \frac{a + b}{2} < b,$$

wobei $2 := 1 + 1$.

Beweis. $2a = a + a \overset{1.3\ 1}{<} a + b \overset{1.3\ 1}{<} b + b = 2b$. Division mit 2 liefert *Beh.* □

1.2 Suprema und reelle Zahlen

Definition 1.10. Sei K geordneter Körper und $M \subseteq K$ nichtleer.

a) $a \in K$ ist eine *obere* (*untere*) *Schranke* von M, wenn $a \geq m$ ($a \leq m$) für alle $m \in M$. M heißt *nach oben* (*unten*) *beschränkt*, wenn es eine obere (untere) Schranke besitzt. M heißt *beschränkt*, wenn es nach oben und nach unten beschränkt ist. Andernfall heißt M *unbeschränkt*.

b) $x \in K$ heißt *Maximum* (*Minimum*) von M, wenn es eine *obere* (*untere*) Schranke von M ist und wenn $x \in M$. Man schreibt dann $x = \max M$ ($x = \min M$).

Beispiel 1.11. a) Sei $M = (-\infty, b]$. Dann hat M die obere Schranke $b \in M$ gemäß Def. 1.7. Ferner hat M keine untere Schranke.

Beweis. *Ann.* $\exists a \in K$ mit $a \leq x \; \forall x \in M$. Dann: $a - 1 < a$ nach Satz 1.4.
$\implies a - 1 \leq b \implies a - 1 \in (-\infty, b] \implies ↯$.
$\implies M$ hat keine untere Schranke. $\square$

b) Sei $N = (-\infty, b)$. Dann hat N auch die obere Schranke b, aber $b \notin N$. *Beh.* N hat kein max.

Beweis. *Ann.* Es gebe $a = \max N$. Da $a \in N$, folgt $a < b$. Somit folgt
$a < \frac{a+b}{2} < b$ nach Lemma 1.9. $\implies \frac{a+b}{2} \in N \implies ↯$ zu $a = \max N$. $\square$

Bemerkung 1.12. In Def. 1.10 hat M höchstens ein max und höchstens ein min.

Beweis. (nur für max): Seien x, y Maxima von M. $\implies x \geq m \; \forall m \in M \implies x \geq y$.
Genauso: $y \geq x$.
$\implies x = y$. $\square$

Definition 1.13. Sei K ein geordneter Körper und $M \subseteq K$ nichtleer.

a) Sei M nach oben beschränkt. Wenn es eine kleinste obere Schranke von M gibt, dann heißt diese *Supremum* von M (man schreibt $\sup M$).

b) Sei M nach unten beschränkt. Wenn es eine größte untere Schranke von M gibt, so heißt diese *Infimum* von M ($\inf M$).

Beispiel 1.14. Sei $M = (-\infty, b)$. *Beh.* $b = \sup M$.

Beweis. Nach Def. 1.7. ist b eine obere Schranke von M. *Ann.* x sei eine echt kleinere obere Schranke von M. Nach Lemma 1.9 gilt:

$$x < \frac{x+b}{2} < b \implies \frac{x+b}{2} \in M \implies ↯.$$

$\square$

Bemerkung 1.15. a) Wenn es existiert, dann ist das Supremum gleich dem Minimum der oberen Schranke von M, sowie $\inf M$ das Maximum der unteren Schranken von M.

b) Nach 1 Bem. 1.12. besitzt also M höchstens ein sup und höchstens ein inf.

Beispiel 1.16. Seien $K = \mathbb{Q}$, $M = \{x \in \mathbb{Q}_+ : x^2 \leq 2\}$.
Beh. $\sup M$ ex. *nicht* in $\mathbb{Q}$, wobei M beschränkt ist (mit oberer Schranke 2).

Beweis. *Ann.* es existiere $s = \sup M \in \mathbb{Q}$.

$\implies$ $\exists$ teilerfremde $p, q \in \mathbb{N}$ mit $s = \dfrac{p}{q}$. Nach Lemma 1.24 muss dann $s^2 = 2$ gelten.

$\implies$ $p^2 = 2q^2 \implies p^2$ gerade $\implies p$ gerade $\implies \exists r \in \mathbb{N} : p = 2r$

$\implies$ $2q^2 = 4r^2 \implies q^2 = 2r^2 \implies q$ gerade $\implies \lightning$ p, q teilerfremd.

$\implies$ s kann nicht in $\mathbb{Q}$ existieren.

(Beweis ohne Vorgriff: Amann/Escher Ana I. Bsp. I. 10.3.) $\square$

Bem. Haben gezeigt „$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$“.

Definition 1.17. Ein geordneter Körper K, in dem jede nach oben beschränkte nichtleere Menge ein Supremum besitzt, heißt *ordnungsvollständig.* Die *reellen Zahlen* $\mathbb{R}$ sind ein ordnungsvollständiger geordneter Körper.

Bemerkung. a) $\mathbb{Q}$ ist nach Bsp. 1.16 nicht ordnungsvollständig.

b) Man kann $\mathbb{R}$ mit den Eigenschaften aus Def. 1.17 mit Mitteln der Mengentheorie konstruieren (Cantor, Dedekind $\sim$1880). Durch Def. 1.17 ist $\mathbb{R}$ eindeutig bestimmt („bis auf einen ordnungserhaltenden Körperisomorphismus“).

   Siehe:

   - Ebbinghaus et al. „Zahlen“, 1992.
   - E. Landau. Grundlagen der Analysis, 1934.
   - Aman/Escher Thm. I.10.4.

c) Wenn man die 1 in $\mathbb{R}$ mit der 1 in $\mathbb{Q}$ identifiziert, dann ist $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ enthalten ($\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$), wobei für $x, y \in \mathbb{Q}$ die Verknüpfungen $+$, $\cdot$ und die Relation $\leq$ von $\mathbb{R}$ mit denen von $\mathbb{Q}$ übereinstimmen.

   Denn: Man definiert in $\mathbb{R}$: $2 := 1 + 1$, $3 := 2 + 1, \ldots$. Dabei liefern $+$, $\cdot$, $\leq$ von $\mathbb{R}$ auf $1, 2, 3, \ldots$ die bekannten Verknüpfungen von $\mathbb{N}$, z.B. gilt auch Satz 1.4: $1 < 2 < 3 < \cdots$

   Damit liegt auch $-n$ in $\mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$, sowie $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, für $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

   Der Rest der Behauptung ist leicht (aber langwierig) zu zeigen.

Eigenschaften von $\mathbb{R}$ und sup, inf

Satz 1.18. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben (unten) beschränkt und $s \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:*

a) $s = \sup M$ $(s = \inf M)$

b) s ist eine obere (untere) Schranke und

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in M : s - \varepsilon < x_\varepsilon \leq s \ \ (s \leq x_\varepsilon < s + \varepsilon)$$

Beweis. (Nur für sup): Sei B die Menge der oberen Schranken von M. 1 $\iff s = \min B \iff s$ ist obere Schranke von M und $\forall \varepsilon > 0 : s - \varepsilon \notin B$ (da s kleinste obere Schranke) $\iff s$ ist obere Schranke von M und $\forall \varepsilon > 0\, \exists x_\varepsilon \in M : s - \varepsilon < x_\varepsilon \iff 2$ □

Satz 1.19. *Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ nichtleer. Dann exisitiert* $\min M$.

Beweis. Da $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ und 1 eine untere Schranke von $\mathbb{N}$ ist, exisitert $x = \inf M$. Nach Satz 1.18 mit $\varepsilon = \frac{1}{3}$ existiert ein $m_0 \in M$ mit $x \leq m_0 < x + \frac{1}{3} \leq m + \frac{1}{3}$ für alle $m \in M$. Für $m \in \mathbb{N}$ mit $m \neq m_0$ gilt $|m - m_0| \geq 1$. Also gilt $m_0 \leq m$ für alle $m \in M \implies m_0 = \min M$. □

Satz 1.20. *a) $\mathbb{R}$ ist „archimedisch geordnet", d.h. $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists n_x \in \mathbb{N} : n_x > x$*

b) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\epsilon > 0\, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass $\dfrac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$.

c) Sei $x \in \mathbb{R}$. Wenn $0 \leq x \leq \dfrac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann $x = 0$.

Beweis. a) Annahme: Die Behauptung sei falsch, d.h. $\exists x_0 \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N} : n \leq x_0$. Somit exisitert $s = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Nach Satz 1.18 mit $\varepsilon = \frac{1}{2}$ exisitert dann $m \in \mathbb{N}$ mit

$$s - \frac{1}{2} < m \overset{+1}{\implies} s < s + \frac{1}{2} < m + 1.$$

Da $m + 1 \in \mathbb{N}$, kann s kein Supremum sein. $\lightning \implies 1$ gilt.

b) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Setze $x = \frac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{R}$. Nach 1 existiert $n_x \in \mathbb{N}$ mit $n_x > x = \frac{1}{\varepsilon} \implies \varepsilon > \frac{1}{n_x} \implies$ Beh. 2 mit $n_\varepsilon = n_x$.

c) folgt direkt aus 2.

□

Definition. Seien M, N nichtleere Mengen. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt *injektiv*, wenn $\forall x, y \in M$ mit $x \neq y : f(x) \neq f(y)$. Sie heißt *surjektiv*, wenn $\forall z \in n\, \exists x \in$ mit $f(x) = z$. f heißt *bijektiv*, wenn f injektiv und surjektiv ist, d.h. $\forall z \in N\, \exists! x \in M$ mit $f(x) = z$. Für bijektive $f : M \to N$ definiert man die Umkehrabbildung $f^{-1} : N \to M$ durch $f^{-1}(z) = x$, wenn $f(x) = z$, $z \in N$.

Definition 1.21. Zwei Mengen M, N heißen gleichmächtig, wenn es ein bijektive Abbildung $f : M \to N$ gibt. M hat die Mächtigkeit (Kardinalität) $n \in \mathbb{N}$, wenn M und $\{1, 2, \ldots, n\}$ gleichmächtig sind. Wenn dies für kein $n \in \mathbb{N}$ der Fall ist, so ist M unendlich. Man schreibt dann $\#M = n$ bzw. $\#M = \infty$.

Beispiel. Sei $M = \{A, B, C\}$. Dann ist $f : M \to \{1, 2, 3\}$ mit $f(A) = 1$, $f(B) = 3$, $f(C) = 2$ eine bijektive Abbildung $\implies \#M = 3$.

Beachte: Wenn $\#M = n$, dann gilt $M = x_1, \dots, x_j$, wobei $x_j := f^{-1}(j)$ mit f aus Def. 1.21 und $j \in \{1, \dots, n\}$. Wenn M und N gleichmächtig sind, dann $\#M = \#N$, da die Verkettung bijektiver Abbildungen bijektiv ist.

Bemerkung. Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation.

Satz 1.22. *a) Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann ist $\#\{j \in \mathbb{N} : j \geq m\} = \infty$. Speziell $\#\mathbb{N} = \infty$*

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b > a$. Dann $\#\{x \in \mathbb{Q} : a < x < b\} = \infty$

Beweis. a) Annahme: $\#\{j \in \mathbb{N} : j \geq m\} = n$. Dann $\exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$ mit $M := \{j \in \mathbb{N} : j \geq m\} = x_1, \dots, x_n$. Dann $y = x_1 + \dots + x_n + 1 \in \mathbb{N}$ und

$$y > \begin{cases} m & \implies y \in M \\ x_j, j \in \{1, \dots, n\} & \implies y \notin M \end{cases} \implies \lightning.$$

b) Zuerst konstruiert man ein $q \in \mathbb{Q} \cap (a, b)$. Nach Satz 1.20 $\exists n \in \mathbb{N} : b - a > \frac{1}{n} > 0$, also

$$nb > 1 + na \tag{$*$}$$

Sei $a \geq 0$. Dann existiert nach Satz 1.20 und Satz 1.19 ein minimales $k \in \mathbb{N}$ mit $k > na$. Sei $a < 0$. Dann erhallt man genauso ein minimales $l \in \mathbb{N}$ mit $l \geq -na$, also $-l \leq an$. Somit liegt

$$m := \begin{cases} k & , a \geq 0 \\ 1 - l & , a < 0 \end{cases}$$

in $\mathbb{Z}$ und $na < m \leq an + 1 \overset{(*)}{<} nb \implies a < \frac{m}{n} < b$, $q := \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Nach Satz 1.20 $\exists j_0 \in \mathbb{N}$ mit $b - q > \frac{1}{j_0} > 0$. Sei $j \in J := \{k \in \mathbb{N} : k \geq j_0\} \implies q + \frac{1}{j} \in \mathbb{Q}$ und $a < q + \frac{1}{j} \leq q + \frac{1}{j_0} < b$, $\forall j \in J$. Die Menge $M = \{q + \frac{1}{j}, j \in J\}$ ist nach 1 unendlich da $f : J \to M, f(j) = b + \frac{1}{j}$ bijektiv ist.

□

Definition. Seien $A, B \subseteq R$. Dann setzt man

$$\begin{aligned} A + B &:= \{x : \exists a \in A, b \in B \text{ mit } x = a + b\} \\ A \cdot B &:= \{x : \exists a \in A, b \in B \text{ mit } x = a \cdot b\} \\ \text{speziell: } y + B &= \{y\} + B = \{x = y + b, b \in B\} \\ y \cdot B &= \{y\} \cdot B = \{x = y \cdot b, b \in B\} \end{aligned}$$

Beispiel. $[0; 1] + [2; 3] = [2; 4]$

Beweis. „$\subseteq$“ ist klar. „$\supseteq$“ Sei $x \in [2; 3]$.
Wenn $x \in [2; 3]$, dann wähle $a = x - 2 \in [0; 1]$ und $b = 2$
Wenn $x \in [3; 4]$, dann wähle $a = x - 3 \in [0; 1]$ und $b = 3$
In beiden Fällen: $a + b = x$

□

Satz 1.23. *Seien A, $B \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer.*

a) *Seien A und B nach oben beschränkt. Dann:*

   a) *Wenn $A \subseteq B$, dann $\sup A \leq \sup B$*

   b) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$

   c) *Wenn A, $B \subseteq (0, \infty)$, dann $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$*

b) *Seien A und B nach unten beschränkt. Dann gelten 1b und 1a von 1) auch für das Infimum. Weiter gelten:*

   a′) $A \subseteq B \implies \inf A \geq \inf B$

   d) *$-A$ ist nach oben beschränkt und $\inf A = -\sup(-A)$, wobei $-A := (-1) \cdot A$.*

Beweis. a) Sei $A \subseteq B$. Wenn z eine obere Schranke von B ist, dann auch von A. $\implies$ Beh. 1a.

b) Seien $x = \sup A$ und $y = \sup B$. Dann $x + y \geq a + b \forall a \in A$, $b \in B \implies x + y$ ist obere Schranke von $A + B$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben (fest aber beliebig). Setze $\eta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$. Satz 1.18 liefert $a_\eta \in A$ und $b_\eta \in B$ mit $x - \eta < a_\eta \leq x$ bzw. $y - \eta < b_\eta \leq y \implies x + y - \underbrace{2\eta}_{\varepsilon} < \underbrace{a_\eta + b_\eta}_{\in A+B} \leq x + y \overset{1.18}{\implies}$ Beh. 1b (Rest in Übungen).

□

Potenzen mit rationalen Exponenten

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$, $r = \frac{m}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ gegeben.
Ziel: Definiere $a^{\frac{m}{n}}$ und zeige Potenzgesetze. Vorrausgesetzt wird dabei der Fall

$$a^m = \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m \text{ mal}} & \text{für } m > 0 \\ 1 & \text{für } m = 0 \\ \dfrac{1}{a^{|m|}} & \text{für } m < 0 \end{cases}$$

Wir verwenden (wobei a, $b > 0$)

$$a < b \iff a^n < b^n \tag{1.1}$$

Beweis. „$\implies$“ $a < b \implies a^2 < ab$ und $ab < b^2$ induktiv für alle $n \in \mathbb{N}$.
„$\impliedby$“ Sei $a^n < b^n$. Annahme: $a \geq b \xRightarrow{\text{wie oben}} a^n \geq b^n \implies ↯$
Hauptschritt: Fall $m = 1$. Sei $M = \{x \in \mathbb{R}_+ : x^n \leq a\}$. Dann

a) $M \neq \emptyset$, da $0 \in M$

b) M hat obere Schranke $1 + a$, denn Annahme: $1 + a$ hat keine obere Schranke: $x > 1 + a$ für $x \in M \overset{(1.1)}{\Longrightarrow} x^n \geq (1+a)^n \geq (1+a) \cdot 1^{n-1} > a$ ↯

□

$$\text{Def. 1.17} \Longrightarrow \exists w = \sup M \tag{1.2}$$

Lemma 1.24. *w ist die einzige positive reelle Lösung der Gleichung $y^n = a$.*

Beweis. a) Annahme: $w^n < a$. Sei $\varepsilon \in (0;1]$. Dann $(w+\varepsilon)^n \overset{\text{Bsp. 0.3}}{=} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} w^j \varepsilon^{n-j}$

$$= w^n + \varepsilon \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \underbrace{w^j}_{\geq 0} \underbrace{\varepsilon^{n-j-1}}_{\leq 1} \leq w^n + \varepsilon \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} w^i \overset{\text{Bsp. 0.3}}{=} w^n + \varepsilon(1+w)^n.$$

Wähle speziell $\varepsilon = \min\left\{1, \frac{a - w^n}{(1+w)^n}\right\} \in (0;1]$

$$\Longrightarrow (w+\varepsilon)^n \leq w^n + \frac{a-w^n}{(1+w)^n}(1+w)^n = a$$

$$\Longrightarrow w + \varepsilon \in M \Longrightarrow \text{↯ zu } w = \sup M \Longrightarrow w^n \geq a.$$

b) Ähnlich sieht man $w^n \leq a \Longrightarrow w^n = a$

c) Es gelte $v^n = a$ für ein $v \in \mathbb{R}_+$. Wenn $v < (>)\ w$, dann $v^n < (>)\ w^n$ nach (1.1) $\Longrightarrow$ ↯ zu $v^n = a = w^n \Longrightarrow v = w$

□

Folgerung. Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $y = \sqrt{x^2}$ die einzige positive Lösung von $y^2 = x^2$. Weitere Lösung ist $|x|$

$$\overset{\text{Eind.}}{\Longrightarrow} \sqrt{x^2} = |x| \tag{1.3}$$

Definition 1.25. Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$, $q = \frac{m}{n}$, w wie in (1.2). Dann setzen wir $\sqrt[n]{a} := a^{\frac{1}{n}} := w$ und $a^q := (a^{\frac{1}{n}})^m$

Satz 1.26. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, a, $b > 0$, p, $q \in Q$. Dann gelten:*

a) $a^p b^p = (ab)^p$

b) $a^p a^q = a^{p+q}$

c) $(a^p)^q = a^{pq}$

d) $a > b > 0 \Longrightarrow \begin{cases} a^p > b^p, & p > 0 \\ a^p < b^p, & p < 0 \end{cases}$

Beweis. a) Seien a, $b > 0$, $p = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Zu zeigen: $a^p b^p = (ab)^p$ Dann: $(a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}})^n = \underbrace{a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} \cdots}_{n\text{-mal}} = (a^{\frac{1}{n}})^n (b^{\frac{1}{n}})^n \overset{1.24}{=} ab \xRightarrow{1.24} a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$. n-te Potenz liefert Beh. 1. b), c) gehen so ähnlich.

b) Sei $p = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$m $a > b > 0$. Zu zeigen: $\begin{cases} p > 0 & \implies a^p > b^p \\ p < 0 & \implies a^p < b^p \end{cases}$

Annahme: $a^{\frac{1}{n}} \leq b^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$ $a \overset{\text{Def.}}{=} (a^{\frac{1}{n}})^n \overset{1.1}{\leq} (b^{\frac{1}{n}})^n \overset{\text{Def.}}{=} b\lightning \implies a^{\frac{1}{n}} > b^{\frac{1}{n}}$ n-te Potenz, 1.1, Übung 2.5, 1 für $m < 0$ liefern 4

$\square$

1.3 Komplexe Zahlen

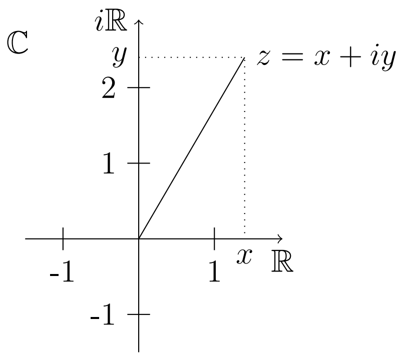
Ausgangspunkt: Löse $x^2 = -1$ Nach Satz 1.4 hat diese Gleichung keine Lösung in einem geordneten Körper, insbesondere keine Lösung in $\mathbb{R}$. Idee: Konstruiere einen nicht geordneten Körper, der $\mathbb{R}$ enthält und in dem $x^2 = -1$ lösbar ist.

Ansatz. Auf $\mathbb{R}^2$ gibt es (Vektor-)addition: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+u \\ y+v \end{pmatrix}$

Def.: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ c \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} xu - yv \\ xv + xy \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$,

Bsp.: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Neue Bezeichnungen: 1 statt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, i statt $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x + iy = z$ statt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ (also $i^2 = -1$)



Definition. $\mathbb{C} := \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$ Fasse $\mathbb{R} = \{z = x + i \cdot 0 = x, x \in \mathbb{R}\}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf.

Seien $z = x + iy$, $w = u + iv$ für $x, y, u, v \in \mathbb{R}$. Dann setzt man

$$z + w = (x + iy) + (u + iv) := (x + u) + i(y + v) \in \mathbb{C}$$

$$z \cdot w := (xu - yr) + i(yu + xv) \in \mathbb{C}$$

Beachte. Auf der rechten Seite der obigen Definition stehen in den Klammern nur reelle Ausdrücke, die somit wohldefiniert sind. Falls $z = x \in \mathbb{R}$ und $w = u \in \mathbb{R}$, so erhält man wieder die reelen $+, -$ Lineare Algebra: $(\mathbb{C}, 0, 1, +, \cdot)$ ist ein Körper.

Definition 1.27. Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann heißt x der Realteil von z, y der Imaginärteil von z, $|z|_{\mathbb{C}} := \sqrt{x^2 + y^2}$ der Betrag von z und $\bar{z} := x - iy$ das konjungiert Komplexe von z. Man schreibt $x = \operatorname{Re} z$ und $y = \operatorname{Im} z$.

Bemerkung. Für $z = x \in \mathbb{R}$ gilt $|x|_{\mathbb{C}} = \sqrt{x^2} \overset{??}{=} |x|_{\mathbb{R}}$. Somit schreiben wir $|z|$ statt $|z|_{\mathbb{C}}$ für $z \in \mathbb{C}$.

Sei $z \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}, r > 0$. Dann ist $B(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < r\}$ die offene Kreisscheibe in $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und Radius r, $\overline{B}(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : |z - w| \leq r\}$ die abgeschlossene Kreisscheibe, $s(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : |z - w| = r\}$ die Kreislinie.
Ferner: Sei $z = x \in \mathbb{R}$. Dann $B(x, r) \cap \mathbb{R} = \{x - r, x + r\}$.

Satz 1.28. *Für w, $z \in \mathbb{C}$ gelten:*

a) $\bar{\bar{z}} = z$, $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ *(*$\implies \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, z \neq 0$*)*

b) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

c) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \operatorname{Im} z = \frac{1}{2}(z - \bar{z})$

d) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z|, |\bar{z}| = |z|$

e) $|z| \geq 0$, $z = 0 \iff |z| = 0$

f) $|zw| = |z| \cdot |w|$

g) $|z + w| \leq |z| + |w|$ *(Dreiecksungleichung)*

h) $|z - w| \geq ||z| - |w||$

Beweis. Seien $z = x + iy$, $w = u + iv$ für $x, y, u, v\ in \mathbb{R}$.

a1) $\bar{\bar{z}} = \overline{x + i(-y)} = x - i(-y) = z$

a2) $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + ixy - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$

b1) ist klar

b2) $\overline{zw} = \overline{xu - yv + i(xv + yu)} = xu - yv - i(xv - yu) = xu - yv - ixv - iyu = (x - iy)(u - iv) = \bar{z}\bar{w}$

c1) $z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x \iff \frac{1}{2}(z + \bar{z} = x)$

c2) genauso

d1) $|\mathrm{Re}\, z| = |x| \overset{\textbf{??}}{=} \sqrt{x^2} \overset{1.26}{\leq} \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$

d2) genauso

d3) $|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + -y^2} = |z|$

e1) klar

e2) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \iff x^2 + y^2 = 0 \iff x = 0,\, y = 0$

f) $|zw|^2 = zw \cdot \overline{zw} = z\bar{z}w\bar{w} \cdot |z|^2 \, |w|^2$

g) $|z+w|^2 = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} = |z|^2 + \underbrace{z\bar{w} + \overline{w\bar{w}}}_{=2\,\mathrm{Re}\,(z\bar{w})} + |w|^2 \leq$

$|z|^2 + 2\underbrace{|z\bar{w}|}_{|z|\cdot|w|} + |w|^2 = (|z| + |w|)^2 \overset{\checkmark}{\Longrightarrow}$ Beh.

$\square$