Karlsruher Institut für Technologie

Skript zur Vorlesung

Algebraische Geometrie I

JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen

Wintersemester 2010/2011

Jonathan Zachhuber, Jens Babutzka und Michael Fütterer
Karlsruher Institut für Technologie

Inhaltsverzeichnis

Motivation

Ziel: *Untersuche Nullstellenmengen von Polynomen: Für eine Menge von Polynomen*

$$p_1,\ldots,p_r \in k[X_1,\ldots,X_n]$$

über einem Körper k möchte man die Menge der Nullstellen

$$\{x = (x_1,\ldots,x_n) \mid p_i(x) = 0 \text{ für alle } i\}$$

analysieren.

BEISPIEL: (a) Betrachte $ax^2 + by^2 = 1 \iff ax^2 + by^2 - 1 = 0$ über $k = \mathbb{R}$. Das liefert eine Ellipse, für $a = b = 1$ einen Kreis.

(b) Betrachte $x^2 + y^2 = z^2$.

(c) Betrachte (b) mit $x = 1$: Dann ist $1 + y^2 = z^2 \iff 1 = z^2 - y^2$, also eine Hyperbel.

(d) Bei linearen Gleichungen sehen wir mit Hilfe der linearen Algebra, das wir affine Unterräume erhalten.

(e) Die Lösungsmengen sind abhängig vom Körper, z.B. sehen wir, dass das Polynom $X^3 - X$ für $k = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ als Lösungsmenge ganz k hat.

Der Inhalt der Vorlesung wurde in großen Teilen von der Algebraischen-Geometrie-Vorlesung von Prof. Dr. Frank Herrlich inspiriert.

i Die Kategorie der affinen Varietäten

1 Affine Varietäten und Verschwindungsideale

Sei k stets ein Körper.

DEFINITION 1.1: Eine Teilmenge $V \subseteq k^n$ heißt *affine Varietät*, wenn es eine Menge von Polynomen $\mathcal{F} \subseteq k[X_1,\ldots,X_n]$ mit

$$V = \mathfrak{V}(\mathcal{F}) := \{x = (x_1,\ldots,x_n) \in k^n \mid f(x) = 0 \, \forall f \in \mathcal{F}\}$$

gibt.

BEISPIEL 1.2: (a) $k^n = \mathfrak{V}(\{0\})$

(b) $\varnothing = \mathfrak{V}(\{1\})$

Frage: *Wie eindeutig ist das $\mathcal{F}$? Zum Beispiel liefern Produkte und Summen von Polynomen keine neuen Nullstellen.*

BEISPIEL: (a) $\mathfrak{V}(x^2+y^2+z^2-1) \supsetneq \mathfrak{V}(x^2+y^2+z^2-1, z-\frac{1}{2})$

(b) $\mathfrak{V}(x^2+y^2+z^2-1, z-\frac{1}{2}) = \mathfrak{V}(x^2+y^2+z^2-1, z-\frac{1}{2}, x^2+y^2+z^2-1+z-\frac{1}{2})$.

BEMERKUNG 1.3: Seien $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subseteq k[X_1,\ldots,X_n]$. Dann gilt:

(a) $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \implies \mathfrak{V}(\mathcal{F}_1) \supseteq \mathfrak{V}(\mathcal{F}_2)$

(b) Sei $(\mathcal{F})$ das von $\mathcal{F}$ erzeugte Ideal. Dann gilt: $\mathfrak{V}(\mathcal{F}) = \mathfrak{V}((\mathcal{F}))$.

(c) Sei

$$\sqrt{(\mathcal{F})} := \{p \in k[X_1,\ldots,X_n] \mid \exists\, d \geq 1 \text{ mit } p^d \in (\mathcal{F})\}$$

das *Radikal* von $(\mathcal{F})$ ($\sqrt{(\mathcal{F})}$ ist ein Ideal!). Ein Ideal mit $I = \sqrt{I}$ nennen wir *Radikalideal*. Es gilt: $\mathfrak{V}(\sqrt{(\mathcal{F})}) = \mathfrak{V}(\mathcal{F})$.

(d) Zu jeder affinen Varietät $V \subseteq k^n$ gibt es endlich viele Polynome $f_1,\ldots,f_r$ mit

$$V = \mathfrak{V}(\{f_1,\ldots,f_r\}) =: \mathfrak{V}(f_1,\ldots,f_r).$$

Beweis: (a) und (b) folgen direkt aus der Definition.

(c) Offenbar ist $\sqrt{(\mathcal{F})} \supseteq (\mathcal{F})$, also gilt nach (a) und (b):

$$\mathfrak{V}(\sqrt{(\mathcal{F})}) \subseteq \mathfrak{V}((\mathcal{F})) = \mathfrak{V}(\mathcal{F}).$$

Für die andere Richtung: Sei $x = (x_1,..., x_n) \in \mathfrak{V}(\mathcal{F})$ und $f \in \sqrt{(\mathcal{F})}$. Nach Definition existiert $d \in \mathbb{N}$, so dass $f^d \in (\mathcal{F})$. Also gilt $f^d(x) = 0$ und damit $f(x) = 0$, demnach ist $x \in \mathfrak{V}(\sqrt{(\mathcal{F})})$.

(d) Nach (b) gilt $\mathfrak{V}(\mathcal{F}) = \mathfrak{V}((\mathcal{F}))$ und nach Hilberts Basissatz wird $(\mathcal{F})$ von endlich vielen Elementen erzeugt. □

Definition/Bemerkung 1.4: Sei $V \subseteq k^n$. Wir nennen

$$\mathfrak{I}(V) := \{f \in k[X_1,..., X_n] \mid f(x) = 0\ \forall x \in V\}$$

das *Verschwindungsideal von* V. Es ist ein Ideal.

Bemerkung 1.5: Es gilt:

(a) Seien $V_1, V_2 \subseteq k^n$ mit $V_1 \subseteq V_2$. Dann ist $\mathfrak{I}(V_1) \supseteq \mathfrak{I}(V_2)$.

(b) Sei $V \subseteq k^n$. Dann ist $\mathfrak{I}(V)$ ein Radikalideal.

(c) Sei V eine affine Varietät. Dann gilt $V = \mathfrak{V}(\mathfrak{I}(V))$.

Es gilt sogar: $\mathfrak{I}(V)$ ist das größte Ideal mit dieser Eigenschaft, d.h. für jedes Ideal $J \subseteq k[X_1,..., X_n]$ mit $\mathfrak{V}(J) = V$ folgt schon $J \subseteq \mathfrak{I}(V)$.

(d) Seien V_1, V_2 affine Varietäten. Dann gilt:

$$V_1 = V_2 \iff \mathfrak{I}(V_1) = \mathfrak{I}(V_2) \text{ und } V_1 \subseteq V_2 \iff \mathfrak{I}(V_1) \supseteq \mathfrak{I}(V_2).$$

Beweis: Die Aussagen (a) und (b) folgen sofort aus der Definition.

(c) Sei zuerst $x \in V$. Dann gilt für alle $f \in \mathfrak{I}(V)$: $f(x) = 0$, also gilt $x \in \mathfrak{V}(\mathfrak{I}(V))$.

Sei nun V eine affine Varietät. Dann gilt $V = \mathfrak{V}(\mathcal{F})$ für eine geeignete Menge $\mathcal{F}$. Es gilt $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{I}(V)$, also ist

$$V = \mathfrak{V}(\mathcal{F}) \supseteq \mathfrak{V}(\mathfrak{I}(V)).$$

Der Rest der Behauptung folgt aus der Definition des Verschwindungsideals.

(d) Die eine Richtung ist klar, bzw. folgt aus (a). Für die andere Richtung überlegt man sich, dass nach (c) $V_1 = \mathfrak{V}(\mathfrak{I}(V_1)) = \mathfrak{V}(\mathfrak{I}(V_2)) = V_2$ gilt. Die Aussage für die Inklusionen folgt analog. □

Frage: *Wir haben gesehen, dass die Zuordnung*

$$V \longmapsto \mathfrak{I}(V)$$

injektiv ist. Ist sie auch surjektiv?

2 Zariski-Topologie

Definition/Bemerkung 2.1: Sei $n \in \mathbb{N}$. Die affinen Varietäten im k^n bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf dem k^n. Diese heißt *Zariski-Topologie*.

Beweis: (1) $\varnothing$ und k^n sind affine Varietäten nach Beispiel 1.2.

(2) Seien V_1, V_2 affine Varietäten, d.h. $V_1 = \mathfrak{V}(I_1)$ und $V_2 = \mathfrak{V}(I_2)$, wobei I_1, I_2 Ideale in $k[X_1,..., X_n]$ sind. Dann gilt:

$$V_1 \cap V_2 = \mathfrak{V}(I_1 \cup I_2) = \mathfrak{V}(I_1 + I_2).$$

Das gleiche Argument funktioniert für beliebige Familien V_λ mit $\lambda \in \Lambda$ und Λ Indexmenge, d.h. $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ ist wieder eine affine Varietät.

(3) Seien V_1, V_2 affine Varietäten mit $I_1 = \mathfrak{I}(V_1)$ und $I_2 = \mathfrak{I}(V_2)$.
Zeige: $\mathfrak{V}(I_1 \cdot I_2) \subseteq V_1 \cup V_2 \subseteq \mathfrak{V}(I_1 \cap I_2) \subseteq \mathfrak{V}(I_1 \cdot I_2)$.

(i) $V_1 \cup V_2 \subseteq \mathfrak{V}(I_1 \cap I_2) \subseteq \mathfrak{V}(I_1 \cdot I_2)$ *ist nach Definition klar.*

(ii) Sei $x \in \mathfrak{V}(I_1 \cdot I_2)$. *Angenommen* $x \notin V_1$. *Dann existiert* $g \in I_1$ *mit* $g(x) \neq 0$. *Sei* $f \in I_2$. *Dann ist* $f \cdot g \in I_1 \cdot I_2$, *folglich ist*

$$\big(f \cdot g\big)(x) = f(x) \cdot g(x) = 0$$

und da $g(x) \neq 0$ *ist* $f(x) = 0$, *also* $x \in \mathfrak{V}(I_2) = V_2$.

Definition 2.2: Wir schreiben $\mathbb{A}^n(k)$ für k^n mit der Zariski-Topologie.

Bemerkung 2.3: Sei $M \subseteq \mathbb{A}^n(k)$. Der Abschluss $\overline{M}$ von M bezüglich der Zariski-Topologie ist $\overline{M} = \mathfrak{V}(\mathfrak{I}(M))$.

Beweis: $\overline{M} \subseteq \mathfrak{V}(\mathfrak{I}(M))$ folgt sofort aus der Definition.

Für die andere Inklusion überlegt man sich: Sei $\mathfrak{V}(J) \supseteq M$ eine abgeschlossene Obermenge von M. Dann ist $\mathfrak{I}(M) \supseteq \mathfrak{I}(\mathfrak{V}(J))$ und damit

$$\mathfrak{V}(\mathfrak{I}(M)) \subseteq \mathfrak{V}(\mathfrak{I}(\mathfrak{V}(J))) = \mathfrak{V}(J). \qquad \square$$

Beispiel 2.4: Sei $n = 1$. Dann gilt: $X \subseteq \mathbb{A}^1(k)$ ist genau dann abgeschlossen, wenn X eine endliche Teilmenge oder ganz $\mathbb{A}^1(k)$ ist.

„Kleine Umgebungen“ sind riesig groß!

Bemerkung 2.5: (a) Wenn k endlich ist, entspricht die Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}^n(k)$ der diskreten Topologie.

(b) Wenn k unendlich ist, ist die Zariski-Topologie nicht hausdorffsch.

Beweis: (a) Punkte sind abgeschlossen, denn sei $x = (x_1,..., x_k) \in k^n$, dann ist

$$\{x\} = \mathfrak{V}(X_1 - x_1,..., X_n - x_n).$$

Damit sind auch endliche Vereinigungen von Punkten abgeschlossen und somit schon *alle* Teilmengen von $\mathbb{A}^n(k)$.

(b) Erinnerung: Ein topologischer Raum X heißt hausdorffsch, wenn für alle Punkte $x, y \in X$ offene Umgebungen $U_x \ni x$ und $U_y \ni y$ mit $U_x \cap U_y = \varnothing$ existieren.

Für $n = 1$ folgt die Behauptung also aus Beispiel 2.4.

Den Fall $n \geq 2$ führen wir zurück auf den Fall $n = 1$:

Seien $x, y \in \mathbb{A}^n(k)$, U_x, U_y offene Umgebungen von x bzw. y. Wir setzen

$$V_1 := \mathbb{A}^n(k) \setminus U_x =: \mathfrak{V}(I_1) \text{ und } V_2 := \mathbb{A}^n(k) \setminus U_y =: \mathfrak{V}(I_2)$$

für entsprechende Ideale I_1 und I_2. Ohne Einschränkung wählen wir x und y in $W := \mathfrak{V}(X_2,..., X_n)$, also auf der „$X_1$-Achse“. Dann gilt für alle Polynome $f \in I_1$ und $g \in I_2$, dass sie auf W nicht verschwinden, da x bzw. y in den Komplementen von V_1 bzw. V_2 liegen.

Dann besteht $V_1 \cap W$ aus nur endlich vielen Punkten, da diese Nullstellen von $f(X_1, 0,..., 0) \neq 0$ sein müssen. Gleiches gilt für $V_2 \cap W$. Also schneiden sich ihre Komplemente U_x und U_y sogar schon in W, da $|W| = |k| = \infty$. □

Definition/Erinnerung 2.6: Seien X, X_1, X_2 topologische Räume.

(a) Sei $Y \subseteq X$. Definiere auf Y die *Spurtopologie* durch

$$U \subseteq Y \text{ offen } :\Longleftrightarrow \exists\, V \subseteq X \text{ offen mit } U = V \cap Y.$$

(b) Sei $X_1 \times X_2$ das kartesische Produkt (als Mengen) und seien

$$\begin{aligned} p_1\colon X_1 \times X_2 &\longrightarrow X_1, \quad (x_1, x_2) \longmapsto x_1, \\ p_2\colon X_1 \times X_2 &\longrightarrow X_2, \quad (x_1, x_2) \longmapsto x_2, \end{aligned}$$

die zugehörigen Projektionen. Die *Produkttopologie* auf $X_1 \times X_2$ ist die gröbste Topologie (d.h. möglichst wenig offene Mengen), so dass p_1 und p_2 stetig sind.

Daher ist $U \subseteq X_1 \times X_2$ genau dann offen, wenn U beliebige Vereinigung endlicher Schnitte von Urbildern offener Mengen in X_1 bzw. X_2 unter p_1 bzw. p_2 ist.

(c) X heißt *reduzibel*, wenn es abgeschlossene echte Teilmengen

$$A, B \subsetneq X \text{ mit } X = A \cup B \text{ gibt.}$$

(d) X heißt *irreduzibel*, wenn X nicht reduzibel ist.

(e) Eine maximale irreduzible Teilmenge von X heißt *irreduzible Komponente.*

Beispiel 2.7: Sei X hausdorffsch und $M \subseteq X$. Dann gilt:

$$M \text{ ist irreduzibel (bzgl. Spurtopologie)} \iff |M| \leq 1,$$

M ist also einelementig oder leer.

Denn: Liegen $x \neq y$ in M, so finden wir (offene) Umgebungen U_x und U_y mit leerem Schnitt, können also

$$M = (M \setminus U_x) \cup (M \setminus U_y)$$

schreiben und sehen so, dass M reduzibel ist. $\varnothing$ ist irreduzibel.

Beispiel 2.8: Sei k ein Körper mit unendlich vielen Elementen.

(a) $\mathbb{A}^1(k)$ ist irreduzibel, da echte abgeschlossene Teilmengen endlich sind.

(b) $\mathfrak{V}(X \cdot Y) = \mathfrak{V}(X) \cup \mathfrak{V}(Y)$ ist reduzibel mit irreduziblen Komponenten $\mathfrak{V}(X)$ und $\mathfrak{V}(Y)$.

Bemerkung 2.9: Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine affine Varietät. Dann gilt:

$$V \text{ ist irreduzibel} \iff \mathfrak{I}(V) \text{ ist ein Primideal.}$$

Beweis: Sei zuerst V irreduzibel. Seien $f, g \in k[X_1,..., X_n]$ mit $f \cdot g \in \mathfrak{I}(V)$.

Angenommen $f \notin \mathfrak{I}(V)$, dann gilt auch $\mathfrak{V}(f) \not\supseteq \mathfrak{V}(\mathfrak{I}(V)) = V$.

Außerdem gilt nach Definition/Bemerkung 2.1: $\mathfrak{V}(f) \cup \mathfrak{V}(g) = \mathfrak{V}(f \cdot g) \supseteq V$, also

$$V = (V \cap \mathfrak{V}(f)) \cup (V \cap \mathfrak{V}(g)),$$

wobei $V \cap \mathfrak{V}(f)$ und $V \cap \mathfrak{V}(g)$ in V abgeschlossen sind. Außerdem ist, nach Annahme, $V \neq V \cap \mathfrak{V}(f)$, also gilt, da V irreduzibel ist, $V = V \cap \mathfrak{V}(g)$. Daraus folgt $V \subseteq \mathfrak{V}(g)$ und damit ist $g \in \mathfrak{I}(V)$ und $\mathfrak{I}(V)$ ist somit ein Primideal.

Sei nun $\mathfrak{I}(V)$ ein Primideal. Seien V_1, V_2 Varietäten mit $V = V_1 \cup V_2$ und $I_1 := \mathfrak{I}(V_1)$, $I_2 := \mathfrak{I}(V_2)$.

Angenommen $V \neq V_1$, d.h. $V \supsetneq V_1$, dann ist auch $\mathfrak{I}(V) \subsetneq \mathfrak{I}(V_1) = I_1$.

Außerdem ist $V = V_1 \cup V_2 = \mathfrak{V}(I_1 \cdot I_2)$, also ist $I_1 \cdot I_2 \subseteq \mathfrak{I}(V)$. Das impliziert aber $I_2 \subseteq \mathfrak{I}(V)$, da $\mathfrak{I}(V)$ ein Primideal ist und $I_1 \not\subseteq \mathfrak{I}(V)$. Daher gilt

$$V_2 = \mathfrak{V}(I_2) \supseteq \mathfrak{V}(\mathfrak{I}(V)) = V,$$

also ist schon $V = V_2$ und damit ist V irreduzibel. $\square$

Proposition 2.10: Sei X ein topologischer Raum. Dann ist jede irreduzible Teilmenge in einer irreduziblen Komponente enthalten.

Beweis: Verwende das Lemma von Zorn:

ERINNERUNG: Hat in einer halbgeordneten Menge $\mathcal{M}$ jede Kette (d.h. totalgeordnete Teilmenge) eine obere Schranke, dann hat $\mathcal{M}$ mindestens ein maximales Element.

Seien also $X' \subseteq X$ eine irreduzible Teilmenge,

$$\mathcal{M} := \{Y \subseteq X \mid Y \text{ irreduzibel, } Y \supseteq X'\}$$

und $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie aus $\mathcal{M}$, die totalgeordnet ist. Sei $Y := \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$.

ZEIGE: $Y \in \mathcal{M}$, d.h. Y ist irreduzibel.

Wir nehmen an, es gäbe abgeschlossene Mengen $A, B \subsetneq X$, so dass $Y \cap A$ und $Y \cap B$ echte Teilmengen von Y sind, für die $Y = (Y \cap A) \cup (Y \cap B)$ gilt. Insbesondere gilt dann:

$$(X \setminus A) \cap Y \neq \varnothing \neq (X \setminus B) \cap Y.$$

Folglich existieren ein λ_1 mit $(X \setminus A) \cap Y_{\lambda_1} \neq \varnothing$ und ein λ_2 mit $(X \setminus B) \cap Y_{\lambda_2} \neq \varnothing$. Da die Y_{λ_i} Teil einer Kette sind, können wir ohne Einschränkung $Y_{\lambda_1} \subseteq Y_{\lambda_2}$ annehmen. Damit ist aber auch $(X \setminus A) \cap Y_{\lambda_2} \neq \varnothing$ und wir finden eine echte Zerlegung

$$Y_{\lambda_2} = (Y_{\lambda_2} \cap A) \cup (Y_{\lambda_2} \cap B),$$

was im Widerspruch zur Irreduzibilität von Y_{λ_2} steht. Folglich hat jede Kette eine obere Schranke und nach dem Lemma von Zorn hat $\mathcal{M}$ somit ein maximales Element. □

Satz 1: *Sei V eine affine Varietät. Dann gilt:*

(a) V ist eine endliche Vereinigung von irreduziblen affinen Varietäten.

(b) V hat nur endlich viele irreduzible Komponenten $V_1, \ldots, V_r$. Insbesondere ist die Zerlegung

$$V = V_1 \cup \cdots \cup V_r$$

eindeutig.

Beweis: (a) Seien

$$\mathcal{B} := \{V \subseteq k^n \mid V \text{ ist affine Varietät und erfüllt } \textit{nicht} \text{ (a)}\},$$
$$\mathcal{J} := \{\mathfrak{I}(V) \subseteq k[X_1, \ldots, X_n] \mid V \in \mathcal{B}\}.$$

Wir nehmen an, $\mathcal{B}$ wäre nicht leer. Dann ist auch $\mathcal{J}$ nicht leer. Da $k[X_1, \ldots, X_n]$ noethersch ist, finden wir in $\mathcal{J}$ ein maximales Element $I_0 = \mathfrak{I}(V_0)$. Damit ist V_0 ein minimales Element in $\mathcal{B}$. Dann ist V_0 aber *nicht* irreduzibel, also existieren affine Varietäten $V_1, V_2 \subsetneq V$ mit $V = V_1 \cup V_2$. Insbesondere sind diese aber nicht in $\mathcal{B}$, da V_0 minimal gewählt war, lassen sich also als Vereinigung endlich vieler irreduzibler Varietäten schreiben. Dann geht das aber auch für V_0 und das ist ein Widerspruch, da $V_0 \in \mathcal{B}$.

(b) Mit Hilfe von Proposition 2.10 und dem (a)-Teil sehen wir, dass wir

$$V = V_1 \cup \cdots \cup V_r$$

schreiben können, wobei die V_i irreduzible Komponenten sind. Wir zeigen noch die Eindeutigkeit dieser Zerlegung: Sei W eine irreduzible Komponente von V. Wir schreiben

$$W = (W \cap V_1) \cup \cdots \cup (W \cap V_r)$$

und sehen, da W irreduzibel ist, dass es ein i mit $W = W \cap V_i$ gibt. Also gilt $W \subseteq V_i$ und damit schon $W = V_i$, da W als irreduzible *Komponente* eine *maximale* irreduzible Teilmenge von V ist. □

3 Der Hilbertsche Nullstellensatz

Motivation: *Bisher haben wir die Mengen*

$$\mathcal{V}_n = \{V \subseteq k^n \mid V \text{ affine Varietät } \} \text{ und } \mathcal{J}_n = \{I \subseteq k[X_1,..., X_n] \mid I \text{ Radikalideal } \}$$

und zwischen ihnen die Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{V}\colon \mathcal{J}_n &\longrightarrow \mathcal{V}_n, \quad I \longmapsto \mathfrak{V}(I) \\ \mathfrak{I}\colon \mathcal{V}_n &\longrightarrow \mathcal{J}_m, \quad V \longmapsto \mathfrak{I}(V) \end{aligned}$$

betrachtet. Wir haben gesehen, dass $\mathfrak{V} \circ \mathfrak{I} = \mathrm{id}$ *gilt. Gilt auch* $\mathfrak{I} \circ \mathfrak{V} = \mathrm{id}$*?*

Beispiel: Wenn k nicht algebraisch abgeschlossen ist, muss das nicht gelten: sei $k = \mathbb{R}$ und $I = (X^2 + 1)$. Dann ist $\mathfrak{V}(I) = \varnothing$, aber $\mathfrak{I}(\mathfrak{V}(I)) = k[X_1,..., X_n]$.

Wir werden sehen, dass $\mathfrak{I} \circ \mathfrak{V} = \mathrm{id}$ gilt, falls k algebraisch abgeschlossen ist. Das einzige „Problem“ ist, dass $\mathfrak{V}(I) = \varnothing$ gilt, obwohl $I \neq k[X_1,..., X_n]$ ist.

Satz 2 (Hilbertscher Nullstellensatz)**:** *(a)* **Algebraische Form:** *Sei* $\mathfrak{m}$ *ein maximales Ideal in* $k[X_1,..., X_n]$*. Dann ist* $k[X_1,..., X_n]/\mathfrak{m}$ *eine endliche algebraische Körpererweiterung von* k*.*

(b) **Schwacher Hilbertscher Nullstellensatz:** *Ist* k *ein algebraisch abgeschlossener Körper und* $I \subsetneq k[X_1,..., X_n]$ *ein echtes Ideal, dann ist* $\mathfrak{V}(I) \neq \varnothing$*.*

(c) **Starker Hilbertscher Nullstellensatz:** *Ist* k *ein algebraisch abgeschlossener Körper und* $I \subseteq k[X_1,..., X_n]$ *ein Ideal, dann ist* $\mathfrak{I}(\mathfrak{V}(I)) = \sqrt{I}$*.*

Die Aussage wird in mehreren Schritten im Rest dieses Abschnitts bewiesen.

Wir nennen $x_1 := \overline{X}_1,..., x_n := \overline{X}_n$. Ohne Einschränkung können wir nach einer eventuellen Umsortierung der Variablen annehmen, dass $x_1,..., x_l$ algebraisch unabhängig über k sind und $x_{l+1},..., x_n$ algebraisch über $k(x_1,..., x_l)$. Also:

$$k \subseteq S = k(x_1,..., x_l) \subseteq L = k[X_1,..., X_n] \big/ \mathfrak{m} \,,$$

dabei ist $k(x_1,..., x_l) \cong \mathrm{Quot}(k[X_1,..., X_l])$ und L ist endlich erzeugt als S-Modul.

Lemma 3.1: Seien R, S, T Ringe mit $R \subseteq S \subseteq T$, sodass gilt:

- R ist noethersch
- T ist endlich erzeugt als R-Algebra; seien $x_1,\dots,x_n$ solche Erzeuger
- T ist endlich erzeugt als S-Modul; seien $w_1,\dots,w_m$ solche Erzeuger

Dann ist S als R-Algebra endlich erzeugt.

Beweis: Wir schreiben

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} w_j \text{ mit } a_{ij} \in S, \qquad w_i w_j = \sum_{l=1}^{m} b_{ijl} w_l \text{ mit } b_{ijl} \in S.$$

Sei S_0 die R-Unteralgebra von S, die von allen a_{ij} und b_{ijl} erzeugt wird. Nach dem Hilbertschen Basissatz ist S_0 ein noetherscher Ring. T wird von den w_i auch als S_0-Modul erzeugt und ist noethersch als S_0-Modul, da er ein endlich erzeugter Modul über einem noetherschen Ring ist. S ist ein S_0-Untermodul von T. Damit ist S endlich erzeugt als S_0-Modul, also auch als R-Algebra. □

Insbesondere ist in der Situation im Beweis des Hilbertschen Nullstellensatzes $k(x_1,\dots,x_l)$ als k-Algebra endlich erzeugt.

Lemma 3.2: Es sei k ein Körper und $r \geq 1$. Dann ist $k(X_1,\dots,X_r)$ nicht endlich erzeugt als k-Algebra.

Beweis: Wir nehmen an, wir hätten endlich viele Erzeuger $h_1,\dots,h_l$ und schreiben $h_i = \frac{f_i}{g_i}$ mit $f_i, g_i \in k[X_1,\dots,X_r]$. Dann wählen wir ein Primpolynom p, das keines der g_i teilt und schreiben

$$\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^{N} a_i h_{i_1} \cdots h_{i_{m_i}} \quad (a_i \in k,\ m_i \in \{1,\dots,l\}).$$

Sei $H = g_1 \cdots g_l$. Multipliziert man obige Gleichung mit H durch, bekommt man

$$\frac{H}{p} \in k[X_1,\dots,X_r],$$

also ist p ein Teiler von H. Aber p war teilerfremd zu allen g_i gewählt. Das ist ein Widerspruch. □

Proposition 3.3: Die algebraische Version des Hilbertschen Nullstellensatzes stimmt.

Beweis: Das liegt daran, dass $k[X_1,\dots,X_n]/\mathfrak{m}$ nach Lemma 3.1 als k-Algebra endlich erzeugt ist und nach Lemma 3.2 folglich keine transzendenten Elemente enthält, also eine algebraische Körpererweiterung ist. □

Um die Implikation $I \subsetneq k[X_1,\dots,X_n] \implies \mathfrak{V}(I) \neq \varnothing$ zu zeigen, betrachten wir für einen Punkt $p = (x_1,\dots,x_n) \in k^n$ den Einsetzungshomomorphismus

$$\varphi_p\colon k[X_1,\dots,X_n] \longrightarrow k, \quad f \longmapsto f(p)$$

(das ist ein k-Algebrenhomomorphismus). Dieser steigt genau dann auf $A = k[X_1,..., X_n]/I$ ab, wenn $p \in \mathfrak{V}(I)$ gilt. Außerdem ist jeder k-Algebrenhomomorphismus $\varphi\colon A \longrightarrow k$ von dieser Art: wähle

$$p = (\varphi(\overline{X_1}),..., \varphi(\overline{X_n})).$$

Ist $I = \mathfrak{m}$ ein maximales Ideal, dann ist $A = k[X_1,..., X_n]/\mathfrak{m}$ eine endliche algebraische Körpererweiterung von k. In diesem Fall existiert genau dann ein k-Algebrenhomomorphismus von A nach k, wenn $A = k$ gilt.

Lemma 3.4: Aus der algebraischen Version folgt der schwache Hilbertsche Nullstellensatz.

Beweis: Sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal mit $I \subseteq \mathfrak{m}$. Da k algebraisch abgeschlossen ist, ist also, nach Satz 2 (a), $L = k[X_1,..., X_n]/\mathfrak{m} \cong k$. Sei $\varphi\colon L \longrightarrow k$ ein Isomorphismus und

$$p = (\varphi(\overline{X_1}),..., \varphi(\overline{X_n})) \in k^n.$$

Für $f \in \mathfrak{m}$ gilt dann $f(p) = \varphi(f(\overline{X}_1,..., \overline{X}_n)) = \varphi(\overline{f(X_1,..., X_n)}) = \varphi(0) = 0$.

Also ist $p \in \mathfrak{V}(I)$ und damit $\mathfrak{V}(I) \neq \varnothing$. □

Lemma 3.5 (Schluss von Rabinowitsch): Der starke Hilbertsche Nullstellensatz folgt aus dem schwachen Hilbertschen Nullstellensatz.

Beweis: Zu zeigen ist $\mathfrak{I}(\mathfrak{V}(I)) = \sqrt{I}$. Die Inklusion „$\supseteq$" ist klar. Für die andere Inklusion nehmen wir uns ein $g \in \mathfrak{I}(\mathfrak{V}(I))$ und zeigen: es gibt ein $d \geq 1$ mit $g^d \in I$.

Wir betrachten k^{n+1} und definieren

$$J = (I, gX_{n+1} - 1).$$

Dann ist $\mathfrak{V}(J) = \varnothing$, denn wäre $p = (x_1,..., x_{n+1}) \in \mathfrak{V}(J)$, dann wäre $(x_1,..., x_n) \in \mathfrak{V}(I)$, also $g(x_1,..., x_n) = 0$, aber damit wäre

$$\big(gX_{n+1} - 1\big)(p) = -1 \neq 0,$$

was ein Widerspruch ist.

Nach Satz 2 (b) muss dann also $J = k[X_1,..., X_{n+1}]$ gelten. Also gibt es

$$b_1,..., b_{n+1} \in k[X_1,..., X_{n+1}],$$

sodass

$$1 = b_1 f_1 + \cdots + b_n f_n + b_{n+1}(gX_{n+1} - 1)$$

gilt. Wir verwenden den k-Algebrenhomomorphismus

$$\varphi\colon k[X_1,..., X_{n+1}] \longrightarrow k(X_1,..., X_n), \quad X_i \longmapsto \begin{cases} X_i, & \text{für } i \in \{1,..., n\}, \\ \frac{1}{g}, & \text{für } i = n+1. \end{cases}$$

und erhalten so

$$1 = \varphi(1) = \varphi(b_1) f_1 + \cdots + \varphi(b_n) f_n + 0.$$

Nun schreiben wir $\varphi(b_i) = \frac{\widetilde{b_i}}{g} a_i$ für $\widetilde{b_i} \in k[X_1,..., X_n]$. Durchmultiplizieren mit g^d für genügend großes d ergibt dann $g^d \in I$. □

KOROLLAR 3.6: Ist k algebraisch abgeschlossen, dann entsprechen die affinen Varietäten in $\mathbb{A}^n(k)$ bijektiv den Radikalidealen in $k[X_1,\dots,X_n]$ via $V \longmapsto \mathfrak{I}(V)$.

4 Morphismen zwischen affinen Varietäten

Ziel: *In diesem Abschnitt sollen Morphismen definiert werden. Die Idee dabei ist, Abbildungen zu betrachten, die von Polynomen herkommen.*

DEFINITION 4.1: (a) Seien $V \subseteq k^n, W \subseteq k^m$ affine Varietäten. Wir nennen eine Abbildung $f\colon V \longrightarrow W$ einen *Morphismus*, wenn es Polynome $f_1,\dots,f_m \in k[X_1,\dots,X_n]$ mit

$$f(p) = (f_1(p),\dots,f_m(p)) \in k^m \text{ gibt.}$$

(b) Ein Morphismus $f\colon V \longrightarrow W$ heißt *Isomorphismus*, wenn es einen Morphismus $g\colon W \longrightarrow V$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_V$ und $f \circ g = \mathrm{id}_W$ gibt.

(c) Gibt es einen Isomorphismus zwischen V und W, so heißen V und W *isomorph*.

BEMERKUNG 4.2: Die affinen Varietäten über k bilden zusammen mit den Morphismen eine Kategorie: $\mathcal{AffVar}_k$. Dabei sind die Objekte gerade die affinen Varietäten und die Morphismen zwischen zwei affinen Varietäten sind wie in Definition 4.1 gegeben. Man beachte, dass die Verkettung von Polynomen wieder ein Polynom ist, d.h. die Verkettung zweier Morphismen ist auch wieder ein Morphismus.

BEISPIEL 4.3: (a) Projektionen bzw. Einbettungen $\mathbb{A}^n(k) \longrightarrow \mathbb{A}^m(k)$

$$\begin{cases} (x_1,\dots,x_n) \longmapsto (x_1,\dots,x_m), & \text{falls } n \geq m, \\ (x_1,\dots,x_n) \longmapsto (x_1,\dots,x_n,0,\dots,0), & \text{falls } n < m, \end{cases}$$

sind Morphismen.

(b) Jedes $f \in k[X_1,\dots,X_n]$ definiert einen Morphismus $\mathbb{A}^n(k) \longrightarrow \mathbb{A}^1(k)$.

(c) Seien $V = \mathbb{A}^1(k)$, $W = \mathfrak{V}(Y^2 - X^3) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$. Die Abbildung

$$f\colon V \longrightarrow W, \qquad x \longmapsto (x^2, x^3)$$

definiert einen Morphismus. Ihr Bild heißt *Neilsche Parabel*.

Hierbei ist f bijektiv mit Umkehrabbildung

$$g(x,y) = \begin{cases} y/x, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Ist k unendlich, so ist g kein Morphismus. Also sind bijektive Morphismen im Allgemeinen keine Isomorphismen.

(d) Sei $\operatorname{char}(k) = p > 0$. Dann heißt $f\colon \mathbb{A}^n(k) \longrightarrow \mathbb{A}^n(k)$ gegeben durch

$$f(x_1,\dots,x_n) = (x_1^p,\dots,x_n^p)$$

Frobeniusmorphismus. Bekanntermaßen sind die Nullstellen des Polynoms $X^p - X$ genau die Elemente aus $\mathbb{F}_p$. Damit sind die Fixpunkte des Frobeniusmorphismus gerade die Punkte mit Koordinaten in $\mathbb{F}_p$.

Bemerkung 4.4: (a) Morphismen sind stetig bezüglich der Zariski-Topologie.

(b) Sind $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$, $W \subseteq \mathbb{A}^m(k)$ affine Varietäten, dann lässt sich jeder Morphismus $f\colon V \longrightarrow W$ zu einem Morphismus $f^n\colon \mathbb{A}^n(k) \longrightarrow A^m(k)$ fortsetzen.

Beweis: (a) Seien V und W affine Varietäten, $f\colon V \longrightarrow W$ ein Morphismus und $Z = \mathfrak{V}(J) \subseteq W$ abgeschlossen. Setze $I = \{g \circ f \mid g \in J\}$. Dann ist $f^{-1}(Z) = \mathfrak{V}(I)$, denn:

$$x \in f^{-1}(Z) \iff f(x) \in Z \iff g\big(f(x)\big) = 0 \text{ für alle } g \in J \iff x \in \mathfrak{V}(I).$$

Also ist $f^{-1}(Z)$ abgeschlossen und f damit stetig.

(b) Das folgt direkt aus Definition 4.1, da Polynome global definierbar sind. □

Im Allgemeinen gibt es viel mehr stetige Abbildungen als Morphismen.
Beispielsweise ist jede bijektive Abbildung von k nach k stetig, was wir mit Hilfe von Beispiel 2.4 einsehen können.

Definition 4.5: Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine affine Varietät. Dann heißt

$$k[V] = \{f\colon V \longrightarrow \mathbb{A}^1 \mid f \text{ ist Morphismus}\}$$

der *affine Koordinatenring*.

Bemerkung 4.6: (a) Der Koordinatenring $k[V]$ ist eine *reduzierte* k-Algebra, das heißt aus $f^n = 0$ folgt $f = 0$.

(b) Es gilt $k[V] \cong k[X_1,\dots,X_n]/\mathfrak{I}(V)$.

Beweis: (a) folgt aus (b), wobei Addition, Multiplikation und Skalarmultiplikation komponentenweise definiert sind. Die Reduziertsheitsaussage ist klar, da $\mathfrak{I}(V)$ ein Radikalideal ist.

(b) Definiere

$$\varphi\colon k[X_1,\dots,X_n] \longrightarrow k[V], \qquad p \longmapsto p|_V.$$

Dann ist φ nach Definition der Morphismen surjektiv, vgl. Definition 4.1. Weiter gilt:

$$p \in \operatorname{Kern}(\varphi) \iff p|_V \equiv 0 \iff \forall x \in V\colon p(x) = 0 \iff p \in \mathfrak{I}(V).$$

Mit dem Homomorphiesatz folgt die Behauptung. □

Bemerkung 4.7: Seien $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$, $W \subseteq \mathbb{A}^m(k)$ affine Varietäten. Dann gilt:

(a) Jeder Morphismus $f\colon V \longrightarrow W$ induziert einen k-Algebrenhomomorphismus

$$f^\sharp\colon k[W] \longrightarrow k[V], \qquad g \longmapsto g \circ f.$$

(b) Jeder k-Algebrenhomomorphismus zwischen $k[W]$ und $k[V]$ wird von einem solchen f induziert.

(c) Die Abbildung

$$\sharp\colon \operatorname{Mor}(V,W) \longrightarrow \operatorname{Hom}_k(k[W],k[V]), \qquad f \longmapsto f^\sharp$$

ist sogar bijektiv.

Beweis: (a) Die Algebrenhomomorphismuseigenschaften zu überprüfen ist elementar.

(b) Sei $\varphi\colon k[W] \longrightarrow k[V]$ ein k-Algebrenhomomorphismus und

$$k[W] \ni p_i\colon W \longrightarrow k$$

sei die Projektion auf die i-te Koordinate. Definiere nun $f\colon V \longrightarrow W$ durch

$$x = (x_1,\dots,x_n) \longmapsto \big(\varphi(p_1)(x),\dots,\varphi(p_m)(x)\big).$$

Wir zeigen, dass f wohldefiniert ist und dass $f^\sharp = \varphi$ ist.

Zuerst sehen wir, dass die p_i's $k[W]$ als k-Algebra erzeugen und nach der Definition von f ist

$$f^\sharp(p_i) = p_i \circ f = \varphi(p_i).$$

Es bleibt also nur noch die Wohldefiniertheit zu zeigen, d.h. f bildet wirklich nach $W = \mathfrak{V}(\mathfrak{I}(W))$ ab.

Wir zeigen also: Für alle $g \in \mathfrak{I}(W)$ und $x \in V$ gilt $g\big(f(x)\big) = 0$.

Sei also $g \in \mathfrak{I}(W)$. Dann ist g als Element in $k[W]$ schon 0 und damit ist auch $\varphi(g) = 0$ in $k[V]$.

Nun definieren wir uns $\widehat{\varphi}$, indem wir $X_i \in k[X_1,\dots,X_m]$ auf ein Urbild von $\varphi(p_i)$ in $k[X_1,\dots,X_n]$ schicken. Das dürfen wir, da der Polynomring frei ist und daher kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
k[X_1,\dots,X_m] \arrow[r, "\widehat{\varphi}"] \arrow[d, "\pi_W"] & k[X_1,\dots,X_n] \arrow[d, "\pi_V"] \\
k[W] = k[X_1,\dots,X_m]/\mathfrak{I}(W) \arrow[r, "\varphi"] & k[V] = k[X_1,\dots,X_n]/\mathfrak{I}(V)
\end{tikzcd}$$

Also folgt die Behauptung, da

$$g\big(\varphi(p_1)(x),\dots,\varphi(p_m)(x)\big) = \widehat{\varphi}(g)(x) = 0$$

für $g \in \mathfrak{I}(W)$, da $\widehat{\varphi}(g) \in \mathfrak{I}(V)$ liegt, da das Diagramm kommutiert.

(c) Die Surjektivität der Abbildung wurde gerade gezeigt, also bleibt nur die Injektivität zu zeigen. Sei also $f_1^\sharp = f_2^\sharp$, d.h. $g \circ f_1 = g \circ f_2$ für alle $g \in k[W]$. Insbesondere gilt das für die Projektionen auf die einzelnen Koordinaten. Damit sind f_1 und f_2 in allen Komponenten gleich und es folgt $f_1(x) = f_2(x)$ für alle $x \in V$. □

Satz 3: *Wir bezeichnen die Kategorie der endlich erzeugten, reduzierten k-Algebren mit $\mathcal{RedAlg}_k$.*

(a) Die Zuordnung $V \longmapsto k[V]$ induziert einen kontravarianten Funktor Φ.

(b) Ist $K = k$ algebraisch abgeschlossen, so induziert Φ eine Äquivalenz der Kategorien $\mathcal{AffVar}_K$ und $\mathcal{RedAlg}_K$.

Beweis: (a) Wir definieren Φ auf den Morphismen durch

$$\mathrm{Mor}(V, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(k[W], k[V]), \qquad g \longmapsto g^\sharp.$$

Dann gilt $\Phi(g_1 \circ g_2) = (g_1 \circ g_2)^\sharp = g_2^\sharp \circ g_1^\sharp$ und $\Phi(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$.

(b) Nun zeigen wir, dass Φ eine natürliche Äquivalenz definiert. Genauer:

- Φ ist ein volltreuer Funktor (d.h. induziert Bijektion auf den Morphismen).
- Für jede endlich erzeugte, reduzierte K-Algebra A gibt es eine affine Varietät V mit $\Phi(V) \cong A$.

Alternativ könnte man auch zeigen: Es existiert ein Funktor

$$\Psi\colon \mathcal{RedAlg}_K \longrightarrow \mathcal{AffVar}_K$$

mit $\Psi \circ \Phi \cong \mathrm{id}_{\mathcal{AffVar}_K}$ und $\Phi \circ \Psi \cong \mathrm{id}_{\mathcal{RedAlg}_K}$.

Zuerst stellen wir fest: Nach Bemerkung 4.7 ist Φ volltreu.

Sei nun A eine endlich erzeuge K-Algebra mit Erzeugern $a_1,\dots,a_n$. Definiere den Homomorphismus

$$\varphi\colon K[X_1,\dots,X_n] \longrightarrow A \text{ durch } X_i \longmapsto a_i.$$

Aus der Reduziertheit von A folgt, dass $I = \mathrm{Kern}(\varphi)$ ein Radikalideal, ist. Setze nun $V = \mathfrak{V}(I)$. Da K algebraisch abgeschlossen ist, gilt $\mathfrak{I}(V) = \sqrt{(I)} = I$. Insgesamt gilt mit dem Homomorphiesatz:

$$K[V] \cong K[X_1,\dots,X_n] \big/ \mathfrak{I}(V) = K[X_1,\dots,X_n] \big/ I \cong A. \qquad \square$$

Beispiel 4.8: In diesem Beispiel sei wieder K algebraisch abgeschlossen.

(a) Ist $V = \mathbb{A}^n(K)$, so ist $\mathfrak{I}(V) = (0)$ und damit $K[V] \cong K[X_1,\dots,X_n]$.

(b) Im anderen Extremfall $V = \varnothing$ gilt $\mathfrak{I}(V) = K[X_1,\dots,X_n]$, d.h. $K[V] \cong \{0\}$.

(c) Ist V ein Punkt, d.h. $V = \{(x_1,\dots,x_n)\}$, dann ist $\mathfrak{I}(V) = (X_1 - x_1,\dots,X_n - x_n)$. Also gilt dann $K[V] \cong K$. Das passt auch zu der Sichtweise, dass die maximalen Ideale in einem algebraisch abgeschlossenen Körper gerade den Punkten entsprechen.

(d) Sei V eine Hyperebene, d.h. $\mathfrak{I}(V) = (a_1X_1 + ... + a_nX_n + c)$ mit mindestens einem $a_i \neq 0$. Dann ist $K[V] \cong K[X_1, ..., X_{n-1}]$ und $V \cong \mathbb{A}^{n-1}$.

(e) Wir betrachten die Neilsche Parabel aus Beispiel 4.3. Wir haben also

$$V = \mathfrak{V}(Y^2 - X^3) \text{ sowie } I = (Y^2 - X^3), \text{ also } \mathfrak{V}(I) = \{(t^2, t^3) \mid t \in K\}.$$

Folglich gilt

$$K[V] \cong K[X,Y] \big/ (Y^2 - X^3) \, .$$

Man beachte, dass $\mathbb{A}^1(K)$ und V birational äquivalent sind. Es gilt also $K(V) \cong K(\mathbb{A}^1(K))$.

Konkreter: Die Äquivalenzklasse von X^3 ist ein Quadrat in $K(V)$, also ist auch die Klasse von X ein Quadrat. Wie sieht eine Wurzel von der Klasse von X aus?

Betrachte dazu

$$r_1 \colon \begin{cases} \mathbb{A}^1(K) \longrightarrow V \\ \quad t \longmapsto (t^2, t^3) \end{cases} \quad \text{und} \quad r_2 \colon \begin{cases} \quad V \longrightarrow \mathbb{A}^1(K) \\ (x,y) \longmapsto y/x \end{cases}$$

Dann sind r_1 und r_2 birationale Abbildungen und induzieren

$$\alpha_1 \colon K(V) \longrightarrow K(\mathbb{A}^1(K)) = K(t),$$
$$\alpha_2 \colon K(\mathbb{A}^1(K)) \longrightarrow K(V),$$

wobei $\alpha_1(X) = t^2$ und $\alpha_2(t) = Y/X$. Also gilt in $K(V)$: $Y^2/X^2 = X$.

Im Koordinatenring $K[V]$ gibt es hingegen keine Wurzel aus der Klasse von X. Denn ansonsten gäbe es $P \in K[X,Y]$ mit $P^2 - X \in (Y^2 - X^3)$. Also gäbe es ein

$$f \in K[X,Y] \text{ mit } P^2(X,Y) = X + f(X,Y)(Y^2 - X^3).$$

Insbesondere wäre dann

$$P^2(X,0) = X - f(X,0) \cdot X^3 = X(1 - f(X,0)X^2) \text{ in } K[X].$$

Also wäre $P^2(X,0)$ durch X, aber nicht durch X^2 teilbar, was unmöglich ist.

Daher ist $K[V]$ hier nicht isomorph zu $K[X]$.

5 Die Garbe der regulären Funktionen

In diesem Abschnitt wollen wir Morphismen „lokal“, d.h. auf offenen Mengen definieren.

In diesem Abschnitt sei stets K ein algebraisch abgeschlossener Körper.

DEFINITION/BEMERKUNG 5.1: Sei $f \in K[X_1, ..., X_n]$ und

$$\mathfrak{D}(f) := \{x \in \mathbb{A}^n(K) \mid f(x) \neq 0\} = \mathbb{A}^n(K) \setminus \mathfrak{V}(f).$$

Das ist eine offene Teilmenge des $\mathbb{A}^n(K)$. Die Menge $\{\mathfrak{D}(f) \mid f \in K[X_1, ..., X_n]\}$ ist eine Basis der Zariski-Topologie.

Beweis: Sei $U \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ eine offene Menge, $V = \mathbb{A}^n(K) \setminus U$ und $I = \mathfrak{I}(V)$. Dann gilt für alle $f \in I$ und $p \in \mathfrak{D}(f)$, dass $f(p) \neq 0$, also $p \notin V = \mathfrak{V}(I)$ und damit $p \in U$. Also ist U die Vereinigung aller $\mathfrak{D}(f)$ für $f \in I$. □

Bemerkung 5.2: Sei V eine affine Varietät und $h \in K[X_1,..., X_n]$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathfrak{V}(h) \cap V = \varnothing &\iff \mathfrak{I}(V) + (h) = K[X_1,..., X_n] \\ &\iff 1 = gh + f \text{ für passende } g \in K[X_1,..., X_n],\ f \in \mathfrak{I}(V) \\ &\iff \overline{1} = \overline{g}\overline{h} \text{ in } K[V] \\ &\iff \overline{h} \text{ ist in } K[V] \text{ invertierbar.}\end{aligned}$$

Definition 5.3: Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ eine affine Varietät und $U \subseteq V$ offen (bzgl. der Spurtopologie).

(a) Sei $p \in U$. Eine Funktion $r\colon U \longrightarrow \mathbb{A}^1(K)$ heißt *regulär in p*, wenn es eine Umgebung U_p von p gibt und $f_p, g_p \in K[V]$ mit $g_p(x) \neq 0$ für alle $x \in U_p$, sodass

$$r(x) = \frac{f_p(x)}{g_p(x)} \text{ für alle } x \in U_p \text{ gilt.}$$

Die Funktion r heißt *regulär*, wenn sie für alle $p \in U$ regulär ist.

(b) Die Menge

$$\mathcal{O}_V(U) = \{r\colon U \longrightarrow \mathbb{A}^1(K) \mid r \text{ regulär}\}$$

heißt *K-Algebra der regulären Funktionen* oder *regulärer Ring.*

Beispiel: Für $V = \mathbb{A}^1(K)$ und $U = V \setminus \{0\}$ ist z.B. $\frac{1}{x} \in \mathcal{O}_V(U)$.

Bemerkung 5.4: Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ eine affine Varietät und $U \subseteq V$ offen und dicht. Dann ist $\mathcal{O}_V(U)$ eine K-Algebra, die $K[V]$ umfasst.

Bemerkung 5.5 (Restriktion der regulären Funktionen): Für offene Mengen $U, U' \subseteq V$ mit $U' \subseteq U$ ist die Restriktionsabbildung

$$\rho^U_{U'}\colon \mathcal{O}_V(U) \longrightarrow \mathcal{O}_V(U'), \quad f \longmapsto f|_{U'}$$

ein K-Algebrenhomomorphismus mit folgenden Eigenschaften:

(a) Für in V offene Mengen $U'' \subseteq U' \subseteq U$ gilt $\rho^U_{U''} = \rho^{U'}_{U''} \circ \rho^U_{U'}$.

(b) Ist U offen in V und $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von U, so gilt

(i) Für alle $f \in \mathcal{O}_V(U)$ gilt $f = 0$ genau dann wenn $\rho^U_{U_i}(f) = 0$ für alle $i \in I$.

(ii) Ist eine Familie $(f_i)_{i\in I}$ mit $f_i \in \mathcal{O}_V(U_i)$ gegeben, die

$$\rho^{U_i}_{U_i\cap U_j}(f_i) = \rho^{U_j}_{U_i\cap U_j}(f_j)$$

für alle $i, j \in I$ erfüllt, dann gibt es ein $f \in \mathcal{O}_V(U)$ mit $\rho^U_{U_i}(f) = f_i$ für alle $i \in I$ („Verklebeeigenschaft").

Beweis: (a) Folgt aus den Eigenschaften von Einschränkungen von Funktionen.

(b) (i) Klar.

(ii) Definiere $f(x) = f_i(x)$, falls $x \in U_i$. Dann ist f wohldefiniert und eine reguläre Funktion, denn auf jedem U_i stimmt f mit f_i überein und f_i ist auf U_i regulär. □

DEFINITION 5.6: (a) Sei X ein topologischer Raum. Für jede offene Menge $U \subseteq X$ sei eine K-Algebra $\mathcal{O}(U)$ gegeben. Weiter sei für jede Inklusion von offenen Mengen $U' \subseteq U$ ein K-Algebren-Homomorphismus $\rho^U_{U'} \colon \mathcal{O}(U) \longrightarrow \mathcal{O}(U')$ gegeben, sodass die Eigenschaften (a) und (b) aus Bemerkung 5.5 gelten. Dann heißt $\{\mathcal{O}(U), \rho^U_{U'}\}_{U' \subseteq U \text{ offen}}$ eine *Garbe von K-Algebren* auf X und die $\rho^U_{U'}$ heißen *Restriktionshomomorphismen.*

(b) Garben von Vektorräumen, Ringen, Mengen etc. sind analog definiert.

(c) Aus der Bedingung (i) in Bemerkung 5.5 folgt die Eindeutigkeit von f in (ii).

(d) Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{O}_X$ eine Garbe von Ringen auf X. Dann heißt $(X, \mathcal{O}_X)$ ein *geringter Raum* und $\mathcal{O}_X$ heißt *Strukturgarbe* auf X.

BEMERKUNG 5.7: Sei V eine affine Varietät über K. Die regulären Ringe $\mathcal{O}_V(U)$ aus Definition 5.3 bilden eine Garbe von K-Algebren.

BEISPIEL 5.8: Weitere Beispiele für Garben:

- topologischer Raum mit Garbe der stetigen Funktionen,
- differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit C^k-Funktionen,
- Riemannsche Flächen mit Garbe der holomorphen Funktionen.

Ziel: *Wir wollen reguläre Funktionen möglichst global definieren. Dazu zeigen wir zunächst, dass endlich viele der U_p reichen und dass $\mathcal{O}_V(V) = K[V]$.*

BEMERKUNG 5.9: Sei V eine affine Varietät.

(a) V ist ein *noetherscher topologischer Raum*, d.h. jede absteigende Kette abgeschlossener Mengen $V_1 \supseteq V_2 \supseteq V_3 \supseteq \cdots$ wird stationär.

(b) Offene Teilmengen U von V sind *quasikompakt*, d.h. jede offene Überdeckung besitzt eine endliche Teilüberdeckung.

(c) Für $g \in K[V]$ sei $\mathfrak{D}(g) = \{x \in V \mid g(x) \neq 0\}$. Die Mengen $\mathfrak{D}(g)$ bilden eine Basis der Topologie von V. Es gilt sogar, dass jede offene Menge in V Vereinigung von endlich vielen der $\mathfrak{D}(g)$ ist.

Beweis: (a) Das gilt, weil $K[V]$ noethersch als Ring ist.

(b) Wenn das nicht so wäre, dann gäbe es in einer offenen Überdeckung

$$U \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

eine Folge i_1, i_2, i_3,..., so dass man kein U_{i_j} weglassen kann. Damit wäre

$$U_{i_1} \subseteq U_{i_1} \cup U_{i_2} \subseteq U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup U_{i_3} \subseteq \cdots$$

eine aufsteigende Kette offener Mengen, die nie stationär wird. Dies ist ein Widerspruch zu (a).

(c) Dass die $\mathfrak{D}(g)$ eine Basis bilden, sieht man wie in Definition/Bemerkung 5.1. Es reichen endlich viele, weil jedes Ideal in $K[V]$ endlich erzeugt ist. □

PROPOSITION 5.10: Sei V eine affine Varietät. Dann gibt es für $g \in K[V]$ und eine reguläre Funktion $r \in \mathcal{O}_V(\mathfrak{D}(g))$ ein $f \in K[V]$ und ein $d \in \mathbb{N}_0$, sodass $r = \frac{f}{g^d}$.

Beweis: (1) Ohne Einschränkung kann in Definition 5.3 $U_p = \mathfrak{D}(g_p)$ gewählt werden, denn: Wir finden zunächst $f_p, g_p \in K[V]$, so dass $r(x) = \frac{f_p(x)}{g_p(x)}$ für alle $x \in U_p$. Wir wählen ein $\widetilde{g_p} \in K[V]$ mit $p \in \mathfrak{D}(\widetilde{g_p}) \subseteq U_p \subseteq \mathfrak{D}(g_p)$. Damit ist $\widetilde{g_p} \in \sqrt{(g_p)}$, es gibt also ein $h \in K[V]$ und ein $d \in \mathbb{N}$ mit $\widetilde{g_p}^d = h \cdot g_p$. Wir wählen $\widehat{f_p} = f_p \cdot h$ und $\widehat{g_p} = \widetilde{g_p}^d$ und haben dann

$$r(x) = \frac{f_p(x)}{g_p(x)} = \frac{f_p(x)h(x)}{g_p(x)h(x)} = \frac{\widehat{f_p}(x)}{\widehat{g_p}(x)}$$

auf $\mathfrak{D}(\widehat{g_p}) = \mathfrak{D}(\widetilde{g_p}) \subseteq \mathfrak{D}(g_p)$.

(2) Nach Bemerkung 5.9 (b) genügen endlich viele der $\mathfrak{D}(g_p)$, also können wir

$$\mathfrak{D}(g) = \mathfrak{D}(g_1) \cup \cdots \cup \mathfrak{D}(g_n)$$

schreiben und haben nach (1) $r = \frac{f_i}{g_i}$ auf $\mathfrak{D}(g_i)$ mit $f_i, g_i \in K[V]$.

Wir basteln nun $\widetilde{f_i}$, $\widetilde{g_i} \in K[V]$, so dass $r = \frac{\widetilde{f_i}}{\widetilde{g_i}}$ auf $\mathfrak{D}(\widetilde{g_i}) = \mathfrak{D}(g_i)$ und $\widetilde{f_i}\widetilde{g_j} = \widetilde{f_j}\widetilde{g_i}$ in $K[V]$ gilt.

Es gilt $f_i(x)g_j(x) - f_j(x)g_i(x) = 0$ für alle $x \in \mathfrak{D}(g_i) \cap \mathfrak{D}(g_j) = \mathfrak{D}(g_ig_j)$. Also gilt

$$g_i(x)g_j(x) \cdot \big(f_i(x)g_j(x) - f_j(x)g_i(x)\big) = 0$$

für alle $x \in V$, da $V = \mathfrak{D}(g_ig_j) \cup \mathfrak{V}(g_ig_j)$. Wir wählen $\widetilde{f_i} = f_ig_i$ und $\widetilde{g_i} = g_i^2$. Dann ist

$$r(x) = \frac{f_i(x)g_i(x)}{g_i^2(x)} = \frac{\widetilde{f_i}(x)}{\widetilde{g_i}(x)}$$

auf $\mathfrak{D}(g_i) = \mathfrak{D}(\widetilde{g_i})$ und $\widetilde{f_i}\widetilde{g_j} - \widetilde{f_j}\widetilde{g_i} = 0$ auf ganz V.

Es gilt

$$\mathfrak{D}(g) = \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{D}(g_i), \text{ also } \mathfrak{V}(g) = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{V}(g_i).$$

Nach dem starken Hilbertschen Nullstellensatz gilt also $g \in \sqrt{(g_1,..., g_n)}$, d.h. es gibt ein $d \in \mathbb{N}$ mit $g^d = h_1g_1 + \ldots + h_ng_n$ mit $h_i \in K[V]$. Damit ist für alle j:

$$f_jg^d = \sum_{i=1}^n h_ig_if_j = \sum_{i=1}^n h_ig_jf_i = g_j \sum_{i=1}^n h_if_i.$$

Wir setzen $f = \sum_{i=1}^{n} h_i f_i$ und haben dann für alle j

$$r(x) = \frac{f_j(x)}{g_j(x)} = \frac{f(x)}{g^d(x)}$$

auf $\mathfrak{D}(g_j)$. □

KOROLLAR 5.11: (a) $\mathcal{O}_V(\mathfrak{D}(g)) \cong K[V][\frac{1}{g}] = K[V]_{\{g^d \mid d \in \mathbb{N}_0\}}$

(b) Ist V irreduzibel, so gilt $\mathcal{O}_V(\mathfrak{D}(g)) = \{\frac{f}{g^d} \in \operatorname{Quot}(K[V])\}$.

(c) $\mathcal{O}_V(V) = K[V]$

Beweis: (a) Die Abbildung

$$K[V][\tfrac{1}{g}] \longrightarrow \mathcal{O}_V(\mathfrak{D}(g)), \quad \frac{f}{g^d} \longmapsto \left(x \longmapsto \frac{f(x)}{g^d(x)}\right)$$

ist ein wohldefinierter K-Algebren-Homomorphismus, denn $\frac{f_1}{g^{d_1}} = \frac{f_2}{g^{d_2}}$ gilt genau dann, wenn es ein $\widetilde{d} \in \mathbb{N}_0$ gibt, sodass

$$g^{\widetilde{d}}(f_1 g^{d_2} - f_2 g^{d_1}) = 0$$

ist. Da $g(x) \neq 0$ auf $\mathfrak{D}(g)$ gilt, ist das äquivalent zu

$$\frac{f_1(x)}{g^{d_1}(x)} = \frac{f_2(x)}{g^{d_2}(x)} \text{ für alle } x \in \mathfrak{D}(g).$$

Außerdem ist die Abbildung offenbar injektiv und wegen Proposition 5.10 auch surjektiv.

(b) Das folgt aus (a), denn hier ist $K[V]$ nullteilerfrei.

(c) Hier wählen wir $g = 1$, sodass $\mathfrak{D}(g) = V$ und nach (a) $\mathcal{O}_V \cong K[V]$ gilt. □

PROPOSITION 5.12: Seien $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$, $W \subseteq \mathbb{A}^m(K)$ affine Varietäten. Genau dann ist eine Abbildung $f\colon V \longrightarrow W$ ein Morphismus, wenn f stetig ist und reguläre Funktionen erhält, d.h. für alle offenen $U \subseteq W$ und $r \in \mathcal{O}_W(U)$ gilt $r \circ f \in \mathcal{O}_V(f^{-1}(U))$.

Beweis: Sei zuerst f ein Morphismus. Dann ist f stetig nach Bemerkung 4.4. Sei $r \in \mathcal{O}_W(U)$. Dann lässt sich r lokal schreiben als

$$r(x) = \frac{g_p(x)}{h_p(x)} \text{ mit } g_p, h_p \in K[W].$$

Weil $g_p \circ f = f^\sharp(g_p)$ und $h_p \circ f = f^\sharp(h_p)$ in $K[V]$ liegen, ist $r \circ f(x) = \frac{g_p \circ f(x)}{h_p \circ f(x)}$ eine lokale Darstellung von $r \circ f$. Also ist $r \circ f$ eine reguläre Funktion.

Sei nun umgekehrt f eine stetige Abbildung, die reguläre Funktionen erhält. Für die Koordinatenfunktionen

$$p_i\colon \mathbb{A}^m(K) \longrightarrow \mathbb{A}^1(K), \ (x_1,\ldots,x_m) \longmapsto x_i,$$

wollen wir $p_i \circ f \in K[V]$ zeigen. Dies gilt, denn $p_i \in K[W] = \mathcal{O}_W(W)$, also nach Voraussetzung $p_i \circ f \in \mathcal{O}_V(V) = K[V]$ mit Korollar 5.11 (c). □

Bemerkung 5.13: Sei V eine affine Varietät.

(a) Sei $U \subseteq V$ offen, $r \in \mathcal{O}_V(U)$ und $A = \{p \in U \mid r(p) = 0\}$. Dann ist A abgeschlossen in U.

(b) („Identitätssatz") Sind $U_1, U_2 \subseteq V$ offen und $r_1 \in \mathcal{O}_V(U_1)$, $r_2 \in \mathcal{O}_V(U_2)$ und gibt es ein $\widetilde{U} \subseteq U_1 \cap U_2$, das in $U_1 \cap U_2$ dicht liegt und so, dass $r_1|_{\widetilde{U}} = r_2|_{\widetilde{U}}$, dann gilt $r_1|_{U_1\cap U_2} = r_2|_{U_1\cap U_2}$.

Beweis: (a) Sei $q \in U \setminus A$. Wir schreiben $r = \frac{f}{g}$ auf einem $\mathfrak{D}(g) \subseteq U$. Dann ist $r(q) \neq 0$, also $f(q) \neq 0$. Insbesondere ist $r(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathfrak{D}(f) \cap \mathfrak{D}(g)$. Also ist $\mathfrak{D}(f) \cap \mathfrak{D}(g)$ eine Umgebung von q in $U \setminus A$.

(b) Setze $r = r_1|_{U_1\cap U_2} - r_2|_{U_1\cap U_2} \in \mathcal{O}_V(U_1 \cap U_2)$. Es ist $r = 0$ auf $\widetilde{U}$. Da die Nullstellenmenge nach (a) abgeschlossen ist und $\widetilde{U}$ dicht liegt, folgt $r = 0$ auf $U_1 \cap U_2$. □

Definition/Bemerkung 5.14: (a) Eine *quasi-affine Varietät* W ist eine Zariski-offene Teilmenge einer affinen Varietät.

(b) Eine Abbildung $f\colon W_1 \longrightarrow W_2$ zwischen quasi-affinen Varietäten heißt *Morphismus* oder *reguläre Abbildung*, wenn f stetig ist und reguläre Funktionen erhält. Die quasi-affinen Varietäten bilden zusammen mit den Morphismen eine Kategorie.

(c) Eine quasi-affine Varietät W heißt *affin (als abstrakte Varietät)*, wenn es einen Isomorphismus $f\colon W \longrightarrow V$ gibt, sodass $V = \mathfrak{V}(I)$ eine affine Varietät in einem $\mathbb{A}^n(K)$ ist.

(d) Seien $W_1 \subseteq \mathbb{A}^n(K)$, $W_2 \subseteq \mathbb{A}^m(K)$ quasi-affine Varietäten und $f\colon W_1 \longrightarrow W_2$. Dann ist f genau dann eine reguläre Abbildung, wenn es reguläre Funktionen

$$f_1,\dots, f_m \in \mathcal{O}_{\overline{W_1}}(W_1) \text{ mit } f = (f_1,\dots, f_m)$$

gibt, denn f ist genau dann ein Morphismus, wenn f stetig ist und reguläre Funktionen erhält. Analog zu Proposition 5.12 lässt sich f also lokal als Quotient von regulären Funktionen schreiben.

(e) Sei V eine affine Varietät und $U \subseteq V$ offen. Dann ist

$$\mathcal{O}_V(U) = \mathcal{O}_{\overline{U}}(U) =: \mathcal{O}(U).$$

Denn: Nach Definition ist jedes Element aus $\mathcal{O}_V(U)$ lokal auf einer offenen Teilmenge $\widehat{U}$ von V von der Form $\frac{g}{h}$ mit $g, h \in K[V]$. Insbesondere stimmt das dann auch auf $\widehat{U} \cap \overline{U}$. Umgekehrt können wir, wenn $r = \frac{g}{h}$ lokal auf $\widetilde{U} \subseteq \overline{U}$ für $g, h \in K[V]$ gilt, ein offenes $\widehat{U} \subseteq V$ mit $\widehat{U} \cap \overline{U} = \widetilde{U}$ wählen.

Beispiel 5.15: (a) Sei $f \in K[X_1,\dots, X_n]$. Dann ist $\mathfrak{D}(f)$ affin als abstrakte Varietät, denn: Definiere $\widetilde{f} \in K[X_1,\dots, X_{n+1}]$ durch $\widetilde{f} = f\cdot X_{n+1}-1$ und $I = (\widetilde{f})$. Dann ist $\mathfrak{V}(I) = \{(x_1,\dots,x_{n+1}) \in \mathbb{A}^{n+1}(K) \mid f(x_1,\dots,x_n) \cdot x_{n+1} = 1\}$. Definiere weiter

$$r_1\colon \mathfrak{D}(f) \longrightarrow \mathfrak{V}(I), \quad (x_1,\dots,x_n) \longmapsto \left(x_1,\dots,x_n, \frac{1}{f(x_1,\dots,x_n)}\right),$$
$$r_2\colon \mathfrak{V}(I) \longrightarrow \mathfrak{D}(f), \quad (x_1,\dots,x_{n+1}) \longmapsto (x_1,\dots,x_n).$$

Dann sind r_1 und r_2 wohldefinierte reguläre Abbildungen und zueinander invers.

(b) $\mathbb{A}^1(K) \setminus \{0\} = \mathfrak{D}(X)$ ist nach (a) affin als abstrakte Varietät.

(c) $\mathbb{A}^2(K) \setminus \{(0,0)\}$ ist nicht affin als abstrakte Varietät; siehe Übungsblatt.

(d) Für $\mathrm{GL}_n(K) = \{A \in K^{n\times n} \mid \det A \neq 0\} \subseteq K^{n^2}$ gilt $\mathrm{GL}_n(K) = \mathfrak{D}(\det(\cdot))$. Mit (a) kann $\mathrm{GL}_n(K)$ als affine Varietät in $\mathbb{A}^{n^2+1}(K)$ aufgefasst werden, nämlich als $\{(A,y) \in K^{n^2+1} \mid y \cdot \det A - 1 = 0\}$.

6 Rationale Abbildungen

In diesem Abschnitt wollen wir alle regulären Funktionen, die auf einem in V dichten U definiert sind, gleichzeitig betrachten.

In diesem Abschnitt sei stets K algebraisch abgeschlossen und V eine affine Varietät.

Definition/Bemerkung 6.1: (a) Eine *rationale Funktion* auf V ist eine Äquivalenzklasse von Paaren (U,f), wobei U eine dichte, offene Teilmenge von V mit $f \in \mathcal{O}_V(U)$ ist. Hierbei sei

$$(U,f) \sim (U',f') \iff f|_{U\cap U'} = f'|_{U\cap U'}.$$

(b) In jeder Äquivalenzklasse gibt es ein maximales Element (bzgl. Inklusion auf U) (U,f). Dieses U heißt *Definitionsbereich* und $V\setminus U$ heißt *Polstellenmenge*.

(c) Die rationalen Funktionen auf V bilden eine K-Algebra. Schreibweise: $\mathrm{Rat}(V)$.

(d) Ist V irreduzibel, so ist $\mathrm{Rat}(V)$ isomorph zu $\mathrm{Quot}(K[V]) = K(V)$.

Beweis: (a) Zu zeigen: $\sim$ definiert eine Äquivalenzrelation. Es bleibt nur die Transitivität zu zeigen. Seien $(U_1,f_1) \sim (U_2,f_2)$ und $(U_2,f_2) \sim (U_3,f_3)$. Dann stimmen f_1 und f_3 auf $U_1 \cap U_2 \cap U_3$ überein. Da $U_1 \cap U_2 \cap U_3$ dicht in V ist, folgt mit dem Identitätssatz Bemerkung 5.13:

$$f_1|_{U_1\cap U_3} = f_3|_{U_1\cap U_3}$$

(b) Ist $(U,f) \sim (U',f')$, so kann auf $U \cup U'$ die reguläre Funktion $\widehat{f}$ definiert werden, indem man

$$\widehat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in U, \\ f'(x), & \text{falls } x \in U', \end{cases}$$

setzt.

Setze also $U_{max} = U \cup U'$, wobei U' alle offenen Mengen durchläuft für die es ein $f' \in \mathcal{O}(U')$ gibt mit $(U',f') \sim (U,f)$.

(c) Summen und Produkte von rationalen Funktionen sind wieder rational und das ist mit der Äquivalenzrelation verträglich. Dabei ist zu beachten, dass man die Definitionsbereiche schneiden muss.

(d) Definiere den K-Algebrenhomomorphismus α durch

$$\alpha\colon K(V) \longrightarrow \mathrm{Rat}(V), \quad \frac{g}{h} \longmapsto \left[\left(\mathfrak{D}(h), \frac{g}{h}\right)\right].$$

Sei (U, r) mit $r \in \mathcal{O}(U)$ eine rationale Funktion. Da r regulär ist, gibt es $U' \subseteq U$ mit $r|_{U'} = \frac{g}{h}$, wobei $g, h \in K[V]$ und $h \in \mathcal{O}(U')$. Da V irreduzibel ist, ist U' bereits dicht. Also gilt $\alpha(\frac{g}{h}) = [(U, r)]$ und α ist surjektiv.

Die Injektivität ist klar, da $K(V)$ ein Körper ist. □

Definition 6.2: Sei V irreduzibel. Der Körper $K(V) \cong \mathrm{Rat}(V)$ heißt *Funktionenkörper.*

Ist V irreduzibel, so repräsentiert der gekürzte Bruch $\frac{g}{h} \in K(V)$ die rationale Funktion $r := [(\mathfrak{D}(h), \frac{g}{h})]$.
Aber $\mathfrak{D}(h)$ kann eine *echte* Teilmenge des Definitionsbereichs $\mathrm{Def}(r)$ sein.
Ist jedoch $K[V]$ faktoriell, so gilt $\mathfrak{D}(h) = \mathrm{Def}(r)$ (vgl. dazu auch Übungsblätter 4 und 5).

Proposition 6.3: Seien V, W irreduzible, affine Varietäten, $f\colon V \longrightarrow W$ ein Morphismus und $f^\sharp\colon K[W] \longrightarrow K[V]$ der induzierte K-Algebrenhomomorphismus. Dann gilt:

(a) $f^\sharp$ kann genau dann zu einem Körperhomomorphismus von $K(W) \longrightarrow K(V)$ fortgesetzt werden, wenn $f^\sharp$ injektiv ist.

(b) $f^\sharp$ ist genau dann injektiv, wenn $f(V)$ dicht in W ist.

Beweis: (a) Die Notwendigkeit der Injektivität von $f^\sharp$ ist klar. Ist umgekehrt $f^\sharp$ injektiv, so definiert man $f^\sharp(\frac{a}{b}) = \frac{f^\sharp(a)}{f^\sharp(b)}$. Die Injektivität impliziert die Wohldefiniertheit und man sieht, dass man auf diese Art einen Körperhomomorphismus erhält.

(b) Für $f^\sharp$ gilt: Für jede Untervarietät $Z \subseteq V$ ist ${f^\sharp}^{-1}(\mathfrak{I}(Z)) = \mathfrak{I}(f(Z))$. Denn:

$$\begin{aligned} g \in {f^\sharp}^{-1}(\mathfrak{I}(Z)) &\iff g \circ f \in \mathfrak{I}(Z) \iff g \circ f(x) = 0 \ \forall x \in Z \\ &\iff g(y) = 0 \ \forall y \in f(Z) \iff g \in \mathfrak{I}(f(Z)). \end{aligned}$$

Nun gilt: $f^\sharp$ ist injektiv $\iff 0 = {f^\sharp}^{-1}(0) = {f^\sharp}^{-1}(\mathfrak{I}(V)) = \mathfrak{I}(f(V)) = \mathfrak{I}(\overline{f(V)})$

$$\iff \overline{f(V)} = W.$$ □

Definition 6.4: Ein Morphismus $f\colon V \longrightarrow W$ mit $\overline{f(V)} = W$ heißt *dominant.*

Definition/Bemerkung 6.5: Seien $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$, $W \subseteq \mathbb{A}^m(K)$ affine Varietäten.

(a) Eine *rationale Abbildung* $f\colon V \dashrightarrow W$ ist eine Äquivalenzklasse (U, f_U), wobei die U offen und dicht in V liegen und die $f_U\colon U \longrightarrow W$ reguläre Abbildungen sind. Dabei ist

$$(U, f_U) \sim (U', f'_U) \iff f_U|_{U \cap U'} = f'_{U'}|_{U \cap U'}.$$

(b) Rationale Abbildungen nach $\mathbb{A}^1(K)$ sind rationale Funktionen.

(c) Jede rationale Abbildung $r\colon V \dashrightarrow W$ hat einen maximalen Definitionsbereich $\mathrm{Def}(r)$, der offen ist.

(d) Sind V und W irreduzibel, so ist die Komposition von dominanten rationalen Abbildungen wieder eine dominante rationale Abbildung, d.h. für U dicht in V ist

$$\overline{r(U)} = W.$$

(e) Sind V und W irreduzibel, so induziert jede dominante rationale Abbildung

$$f\colon V \dashrightarrow W$$

einen Körperhomomorphismus $f^\sharp\colon K(W) \longrightarrow K(V)$ mit

$$f^\sharp(g) = g \circ f.$$

(f) Eine rationale Abbildung $f\colon V \dashrightarrow W$ heißt birational, wenn es eine rationale Abbildung $g\colon W \dashrightarrow V$ gibt, so dass $f \circ g$ und $g \circ f$ definiert sind und jeweils die Identität ergeben.

Beispiel 6.6: (a) Seien $V_1 = \mathfrak{V}(X \cdot Y)$, $V_2 = \mathbb{A}^1(K)$ und $V_3 = \mathbb{A}^1(K)$. Weiter seien folgende rationale Abbildungen gegeben:

$$\begin{aligned} f\colon V_1 \dashrightarrow V_2, &\quad (x,y) \longmapsto x,\\ g\colon V_2 \dashrightarrow V_3, &\quad x \longmapsto \tfrac{1}{x}, \end{aligned}$$

Hier ist $\mathrm{Def}(g \circ f) \subseteq \mathfrak{V}(Y)$, also insbesondere nicht dicht in V_1.

(b) Die Abbildung $\sigma\colon \mathbb{A}^2(K) \longrightarrow \mathbb{A}^2(K)$, $(x,y) \longmapsto (\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$ ist auf $\mathbb{A}^2(K) \setminus \mathfrak{V}(X \cdot Y)$ definiert, also eine rationale Abbildung.

Beachte: $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}|_{\mathbb{A}^2(K) \setminus \mathfrak{V}(X \cdot Y)}$, folglich ist σ sogar birational.

(c) Seien $V_1 = \mathbb{A}^1(K)$, $V_2 = \mathfrak{V}(Y^2 - X^3)$ (vgl. Beispiel 4.8 (e)). Betrachte die rationalen Abbildungen

$$\begin{aligned} r_1\colon V_1 \longrightarrow V_2, &\qquad t \longmapsto (t^2, t^3),\\ r_2\colon V_2 \supseteq \mathfrak{D}(X) \longrightarrow V_1, &\qquad (x,y) \longmapsto \frac{y}{x}, \end{aligned}$$

Dann erhalten wir:

- $r_2 \circ r_1 = \mathrm{id}_{U_1}$ mit $U_1 = \mathrm{Def}(r_2 \circ r_1) = \mathbb{A}^1(K) \setminus \{0\}$.
- $r_1 \circ r_2 = \mathrm{id}_{U_2}$ mit $U_2 = \mathrm{Def}(r_1 \circ r_2) = V_2 \setminus \{(0,0)\}$.

Also ist $\mathfrak{V}(Y^2 - X^3)$ birational äquivalent zu $\mathbb{A}^1(K)$, aber sie sind nicht isomorph.

Bemerkung: Irreduzible affine Varietäten bilden zusammen mit den dominanten rationalen Abbildungen eine Kategorie.

Satz 4: *Sei K algebraisch abgeschlossen. Dann ist die Kategorie der endlich erzeugten Körpererweiterungen L/K mit K-Algebrenhomomorphismen äquivalent zur Kategorie der irreduziblen affinen Varietäten mit dominanten rationalen Abbildungen.*

Beweis: Wir definieren

$$\Phi\colon \begin{cases} V \longmapsto K(V) \\ f \longmapsto f^\sharp \end{cases}$$

und zeigen, dass das eine Äquivalenz von Kategorien liefert. Dazu zeigen wir:

- Für jede endlich erzeugte Körpererweiterung L/K gibt es eine irreduzible affine Varietät V mit $K(V) \cong L$.
- Φ ist volltreu, d.h. induziert eine Bijektion auf den Morphismenmengen.

Zum ersten Punkt: Wir wählen endlich viele Erzeuger $x_1,\dots,x_n$ der Körpererweiterung L/K, d.h. $L = K(x_1,\dots,x_n)$. Wir definieren $A = K[x_1,\dots,x_n]$ als die von $x_1,\dots,x_n$ erzeugte K-Algebra in L. Dann ist A eine endlich erzeugte, reduzierte, nullteilerfreie K-Algebra. Deshalb gibt es nach Satz 3 eine affine Varietät V mit $K[V] \cong A$. Da A nullteilerfrei ist, ist V irreduzibel und es gilt $K(V) \cong \mathrm{Quot}(A) \cong L$.

Zum zweiten Punkt zeigen wir: Sind V, W affine Varietäten und $\alpha\colon K(W) \longrightarrow K(V)$ ein K-Algebrenhomomorphismus, so gibt es eine rationale Abbildung

$$f = f_\alpha\colon V \dashrightarrow W \text{ mit } \alpha = f^\sharp.$$

Für den Beweis dieser Aussage seien $g_1,\dots,g_m$ Erzeuger von $K[W]$.

Dann ist $\alpha(g_i) \in K(V)$ und $\bigcup_{i=1}^m \mathrm{Def}(\alpha(g_i))$ ist offen und dicht in V. Wähle

$$U := \mathfrak{D}(g) \subseteq \bigcap_{i=1}^m \mathrm{Def}(\alpha(g_i)) \text{ mit } g \in K[V].$$

Nach Beispiel 5.15 ist $\mathfrak{D}(g)$ affin, also existiert eine affine Varietät Z und ein Isomorphismus $\Psi\colon Z \longrightarrow \mathfrak{D}(g)$. So erhalten wir

$$\Psi^\sharp \circ \alpha\colon K[W] \longrightarrow \mathcal{O}(Z) = K[Z]$$

und das induziert $\widetilde{f}\colon Z \longrightarrow W$.

Damit ist $\widehat{f} := \widetilde{f} \circ \Psi^{-1}$ eine reguläre Abbildung von U nach W. Diese induziert eine rationale Abbildung $f\colon V \dashrightarrow W$, da U dicht in V liegt. Da $\Psi^\sharp \circ \alpha$ injektiv ist, ist f dominant nach Proposition 6.3.

Nun bleibt nur noch zu zeigen, dass Φ treu ist. Seien dazu $r_1, r_2 \colon V \dashrightarrow W$ rationale Abbildungen und $r_1^\sharp = r_2^\sharp = \alpha$. Wir wählen U offen, affin und so klein, dass r_1 und r_2 auf U definiert sind. Dann induzieren r_1 und r_2 aber als Abbildungen von $U \cong Z$ nach W aufgefasst das selbe

$$\alpha \colon K[W] \longrightarrow \mathcal{O}(U) \cong K[Z].$$

Nun können wir Satz 3 anwenden und sehen $r_1|_U = r_2|_U$ und da U dicht in V liegt, folgt $r_1 = r_2$. □

7 Spektrum eines Rings

Erinnerung 7.0 (aus Algebra II): Seien R, S Ringe und $f \colon R \longrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus.

(a) Ist $J \subseteq S$ ein Ideal, ist $I = f^{-1}(J) \subseteq R$ ein Ideal. Ist dabei J ein Primideal, so ist auch I ein Primideal.

(b) Ist f surjektiv und $I \subseteq R$ ein Ideal, dann ist $J = f(I) \subseteq S$ ein Ideal. Ist dabei I ein Primideal und $\operatorname{Kern} f \subseteq I$, dann ist J ein Primideal.

Insgesamt gilt also: Primideale in S entsprechen Primidealen in R, die den Kern von f enthalten (falls f surjektiv ist).

Erinnerung/Bemerkung 7.1: Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ eine affine Varietät (K algebraisch abgeschlossen). Dann haben wir Bijektionen

(a) $$\{\text{Untervarietäten von } V\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{Radikalideale in } K[X_1,\dots,X_n],\\ \text{die } \mathfrak{I}(V) \text{ enthalten}\end{array}\right\} \longleftrightarrow \{\text{Radikalideale in } K[V]\}$$

(b) $\{\text{irreduzible Untervarietäten von } V\} \longleftrightarrow \{\text{Primideale in } K[V]\}$

(c) $\{\text{Punkte in } V\} \longleftrightarrow \{\text{maximale Ideale in } K[V]\}$

Beweis: (a) Das folgt aus Bemerkung 1.3, Bemerkung 1.5, Satz 2 und Erinnerung 7.0.

(b) Das folgt aus Bemerkung 2.9 und Erinnerung 7.0.

(c) Die eine Zuordnung ist

$$p = (x_1,\dots,x_n) \longmapsto \mathfrak{m}_p = \mathfrak{I}(\{p\}) = (X_1 - x_1,\dots,X_n - x_n).$$

Für die andere sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in $K[V]$, dann gibt es einen Isomorphismus

$$\alpha \colon K[X_1,\dots,X_n]\big/\mathfrak{m} \longrightarrow K$$

und wir wählen $p = (\alpha(\overline{X_1}),\dots,\alpha(\overline{X_n}))$. □

Definition/Bemerkung 7.2: Sei R ein kommutativer Ring mit Eins.

(a) Die Menge $\operatorname{Spec} R := \{\wp \subseteq R \mid \wp \text{ ist Primideal}\}$ heißt *Spektrum von R.*

(b) Für eine Teilmenge $S \subseteq R$ heißt $\mathfrak{V}(S) := \{\wp \in \operatorname{Spec} R \mid \wp \supseteq S\}$ *Verschwindungsmenge von S* und es gilt $\mathfrak{V}(S) = \mathfrak{V}((S))$.

(c) Die Mengen $\mathfrak{V}(I)$ für Ideale $I \subseteq R$ bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf $\operatorname{Spec} R$, diese heißt *Zariski-Topologie*.

(d) Für $Z \subseteq \operatorname{Spec} R$ heißt $\mathfrak{I}(Z) := \bigcap_{\wp \in Z} \wp$ das *Verschwindungsideal von Z*.

Beweis: (b) Die Inklusion „$\supseteq$" ist klar. Für die umgekehrte Inklusion sei $\wp \in \mathfrak{V}(S)$, also $\wp \supseteq S$. Da $\wp$ ein Ideal ist, folgt $\wp \supseteq (S)$, also $\wp \in \mathfrak{V}((S))$.

(c) Das zeigt man wie in Definition/Bemerkung 2.1, insbesondere gilt

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{V}(I_\lambda) = \mathfrak{V}\Big(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda\Big) = \mathfrak{V}\Big(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda\Big)$$

und $\mathfrak{V}(I_1) \cup \mathfrak{V}(I_2) = \mathfrak{V}(I_1 \cap I_2) = \mathfrak{V}(I_1 \cdot I_2)$. □

Definition/Bemerkung 7.3: (a) Elemente aus R können als Funktionen aufgefasst werden:

$$r\colon \operatorname{Spec} R \longrightarrow \bigcup_{\wp \in \operatorname{Spec} R} \operatorname{Quot}\big({}^{R}\!/_{\wp}\big), \quad \wp \longmapsto \overline{r} \in \operatorname{Quot}\big({}^{R}\!/_{\wp}\big)$$

(b) Ein Primideal $\wp$ ist genau dann Nullstelle von $r \in R$, wenn $\overline{r} = 0$ in $R/\wp$, also wenn $r \in \wp$ gilt.

Beispiel 7.4: (a) Sei $R = K[V]$ für eine affine Varietät V und einen algebraisch abgeschlossenen Körper K. Dann enthält $\operatorname{Spec} R$ je einen Punkt für jede irreduzible Untervarietät von V. Ist $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in $\operatorname{Spec} R$, dann ist $\operatorname{Quot}\big(R/\mathfrak{m}\big) \cong K$.

(b) Für $R = \mathbb{Z}$ ist $\operatorname{Spec} R = \{(p) \mid p \in \mathbb{P}\} \cup \{(0)\}$, kann also als $\mathbb{P} \cup \{0\}$ aufgefasst werden.

Bemerkung 7.5: (a) Für $Z \subseteq \operatorname{Spec} R$ ist $\mathfrak{V}(\mathfrak{I}(Z)) = \overline{Z}$ der Abschluss von Z.

(b) Für $f \in R$ sei $\mathfrak{D}(f) = \operatorname{Spec} R \setminus \mathfrak{V}(f) = \{\wp \in \operatorname{Spec} R \mid f \notin \wp\}$. Die Mengen $\mathfrak{D}(f)$ bilden eine Basis der Topologie auf $\operatorname{Spec} R$.

(c) Sei $V \subseteq \operatorname{Spec} R$ nichtleer. Dann ist V genau dann irreduzibel, wenn $\mathfrak{I}(V)$ ein Primideal ist.

Beweis: (a) Es gilt:

$$\mathfrak{V}(\mathfrak{I}(Z)) = \{\wp \in \operatorname{Spec} R \mid \wp \supseteq \mathfrak{I}(Z)\} = \{\wp \in \operatorname{Spec} R \mid \wp \supseteq \bigcap_{q \in Z} q\} \supseteq Z.$$

Daraus folgt, dass der Abschluss von Z in $\mathfrak{V}(\mathfrak{I}(Z))$ liegt. Für die andere Inklusion sei $\overline{Z} = \mathfrak{V}(J) = \{q \in \operatorname{Spec} R \mid q \supseteq J\}$. Da $Z \subseteq \overline{Z}$, gilt für alle $\wp \in Z$, dass $\wp \supseteq J$. Sei nun $q \in \mathfrak{V}(\mathfrak{I}(Z))$. Dann gilt

$$q \supseteq \bigcap_{\wp \in Z} \wp \supseteq J,$$

also $q \in \mathfrak{V}(J)$.

(b) Das geht wie in Bemerkung 5.9 (c).

(c) Das geht wie in Bemerkung 2.9. □

Bemerkung 7.6: (a) Für $\wp \in \operatorname{Spec} R$ gilt $\overline{\{\wp\}} = \{q \in \operatorname{Spec} R \mid q \supseteq \wp\} = \mathfrak{V}(\wp)$.

(b) Für $\wp \in \operatorname{Spec} R$ ist $\{\wp\}$ genau dann abgeschlossen, wenn $\wp$ ein maximales Ideal ist.

(c) Sei R nullteilerfrei. Dann gilt $\overline{\{(0)\}} = \operatorname{Spec} R$.

Bemerkung 7.7: Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$ mit $\overline{\{x\}} = X$. Dann heißt x *generischer Punkt*.

Beispiel 7.8: Sei V eine affine Varietät.

(a) Die abgeschlossenen Punkte in $\operatorname{Spec} K[V]$ entsprechen bijektiv den Punkten der affinen Varietät V.

(b) Ist V irreduzibel, dann ist $\{(0)\}$ ein generischer Punkt. Dazu gehört gerade V als Untervarietät von V.

Bemerkung 7.9: Sei $\alpha\colon R \longrightarrow R'$ ein Ringhomomorphismus.

(a) α induziert eine stetige Abbildung

$$f_\alpha\colon \operatorname{Spec} R' \longrightarrow \operatorname{Spec} R, \quad \wp \longmapsto \alpha^{-1}(\wp).$$

(b) Ist $I \subseteq R$ ein Ideal, so ist $f_\alpha^{-1}(\mathfrak{V}(I)) = \mathfrak{V}(\alpha(I))$.

Beweis: (a) Nach Erinnerung 7.0 ist f_α wohldefiniert. Die Stetigkeit folgt aus (b).

(b) $\wp \in f_\alpha^{-1}(\mathfrak{V}(I)) \iff f_\alpha(\wp) \in \mathfrak{V}(I) \iff f_\alpha(\wp) \supseteq I$

$$\iff \alpha^{-1}(\wp) \supseteq I \iff \wp \supseteq \alpha(I) \iff \wp \in \mathfrak{V}(\alpha(I))$$ □

Proposition 7.10: Sei K algebraisch abgeschlossen und $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ eine affine Varietät. Dann ist die Abbildung

$$\mathfrak{m}\colon V \longrightarrow \operatorname{Spec} K[V], \quad x \longmapsto \mathfrak{m}_x = \{f \in K[V] \mid f(x) = 0\}$$

injektiv und stetig.

Beweis: Die Injektivität folgt aus Erinnerung/Bemerkung 7.1. Für den Beweis der Stetigkeit sei $I \subseteq K[V]$ ein Ideal und $Z := \mathfrak{V}(I) \subseteq \operatorname{Spec} K[V]$. Für die affine Varietät Z gilt

$$x \in \mathfrak{V}(I) \iff f(x) = 0 \text{ für alle } f \in I \iff f \in \mathfrak{m}_x \text{ für alle } f \in I \iff I \subseteq \mathfrak{m}_x.$$

Damit gilt $\mathfrak{m}^{-1}(Z) = \{x \in V \mid \mathfrak{m}_x \in Z\} = \{x \in V \mid \mathfrak{m}_x \supseteq I\} = \mathfrak{V}(I) \subseteq V$. Also sind Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen. □

Proposition 7.11: Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, $I \subseteq R$ ein Ideal und $V \subseteq \operatorname{Spec} R$ eine abgeschlossene Menge. Dann gelten:

(a) $\mathfrak{V}(\mathfrak{I}(V)) = V$

(b) $\mathfrak{I}(\mathfrak{V}(I)) = \sqrt{I}$

Beweis: (a) Aus Bemerkung 7.5 (a) folgt $\mathfrak{V}(\mathfrak{I}(V)) = \overline{V} = V$.

(b) Nach Lemma 7.12 gilt $\mathfrak{I}(\mathfrak{V}(I)) = \bigcap\limits_{\wp \in \mathfrak{V}(I)} \wp = \bigcap\limits_{\wp \supseteq I} \wp = \sqrt{I}$. □

Lemma 7.12 (Lemma von Krull): Sei R ein kommutativer Ring mit Eins.

(a) Sei $S \subseteq R$ ein multiplikatives System und $I \subseteq R$ ein Ideal, das disjunkt zu S ist. Dann gibt es ein Primideal $\wp \subseteq R$, das I enthält und ebenfalls zu S disjunkt ist.

(b) Es gilt: $\bigcap\limits_{\substack{\wp \in \operatorname{Spec} R \\ \wp \supseteq I}} \wp = \sqrt{I}$.

Beweis: (b) Die Inklusion „$\supseteq$" gilt, weil der Schnitt von Radikalidealen wieder ein Radikalideal ist. Die andere Inklusion folgt aus (a): Sei $a \in R \setminus \sqrt{I}$ und $S := \{a^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$. Dann ist S ein multiplikatives System und $I \cap S = \varnothing$. Nach (a) gibt es dann ein Primideal $\wp$ mit $\wp \supseteq I$ und $\wp \cap S = \varnothing$. Damit fliegt a im Schnitt raus.

(a) Betrachte den kanonischen Ringhomomorphismus $\varphi\colon R \longrightarrow R_S$. Sei $I' = \langle \varphi(I) \rangle$ das von $\varphi(I)$ erzeugte Ideal in R_S, also $I' = \{\frac{f}{a} \in R_S \mid f \in I,\ a \in S\}$. Zunächst überlegen wir uns, dass $I' \neq R_S$, also $1 \notin I'$. Denn wäre $1 \in I'$, dann gäbe es $f \in I$ und $a \in S$ mit $1 = \frac{f}{a}$ in R_S, d.h. es gäbe ein

$$t \in S \text{ mit } t(f - a) = 0.$$

Dann wäre $tf = ta$ sowohl in I als auch in S—ein Widerspruch zur Disjunktheit!

Somit ist I' ein echtes Ideal und damit in einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}'$ enthalten. Dann ist $\wp := \varphi^{-1}(\mathfrak{m}')$ ein Primideal, enthält I und hat leeren Schnitt mit S, denn sonst wäre für $s \in S \cap I$ das Bild $\varphi(s)$ eine Einheit in R_S. □

Ziel: *Wir suchen eine Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ auf $X = \operatorname{Spec} R$ mit $\mathcal{O}_X(\mathfrak{D}(f)) \cong R_f$.*

Ab jetzt verwenden wir folgende Schreibweisen:

- Für $f \in R$ und $S := \{f^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ schreiben wir $R_f := R_S$.
- Für ein Primideal $\wp \subseteq R$ und $S := R \setminus \wp$ schreiben wir $R_\wp := R_S$.

Wir erinnern uns außerdem daran, dass in R_S genau dann $a = 0$ gilt, wenn es ein $t \in S$ gibt mit $ta = 0$.

Vorüberlegung: In $\operatorname{Spec} R$ ist $\mathfrak{D}(g) \subseteq \mathfrak{D}(f)$ äquivalent zu $\mathfrak{V}(g) \supseteq \mathfrak{V}(f)$. In diesem Fall gilt $g \in \sqrt{(f)}$, d.h. es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ und $h \in R$ mit $g^m = fh$. Wir erhalten so eine Abbildung

$$\rho^{\mathfrak{D}(f)}_{\mathfrak{D}(g)}\colon R_f \longrightarrow (R_f)_h = R_{fh} = R_{g^m} = R_g.$$

Wir setzen $\mathcal{B} = \{\mathfrak{D}(g) \mid g \in R\}$, was eine Basis der Topologie auf $\operatorname{Spec} R$ ist.

Proposition 7.13: Sei R ein noetherscher kommutativer Ring mit Eins. Auf $\operatorname{Spec} R$ gibt es eine eindeutige Garbe $\mathcal{F}$ von Ringen mit $\mathcal{F}(\mathfrak{D}(f)) \cong R_f$ und für $\mathfrak{D}(g) \subseteq \mathfrak{D}(f)$ ist die Restriktionsabbildung $\rho^{\mathfrak{D}(f)}_{\mathfrak{D}(g)}$ wie in der Vorüberlegung definiert.

Beweis: Wir definieren $\mathcal{F}(\mathfrak{D}(f)) = R_f$ und zeigen

(a) $\mathcal{F}$ erfüllt auf $\mathcal{B}$ die Garbeneigenschaften, d.h.

(G1) $\rho^U_{U''} = \rho^{U'}_{U''} \circ \rho^U_{U'}$ und $\rho^U_U = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$ für $U, U', U'' \in \mathcal{B}$ mit $U'' \subseteq U' \subseteq U$.

(G2) Ist $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ (mit $U, U_i \in \mathcal{B}$), $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ und gilt für alle $U' \in \mathcal{B}$ mit $U' \subseteq U_i \cap U_j$, dass $\rho^{U_i}_{U'} = \rho^{U_j}_{U'}$, dann gibt es genau ein $f \in \mathcal{F}(U)$ mit $\rho^U_{U_i}(f) = f_i$.

(b) $\mathcal{F}$ lässt sich eindeutig zu einer Garbe fortsetzen.

zu (a): Die erste Garbeneigenschaft ist klar.

Für die zweite sei ohne Einschränkung $I = \{1,..., m\}$ endlich (denn wie in Bemerkung 5.9 sind offene Mengen quasikompakt). Sei $U = \mathfrak{D}(f)$ und $U_i = \mathfrak{D}(f_i)$. Wegen

$$\mathfrak{D}(f) = \mathfrak{D}(f_1) \cup \cdots \cup \mathfrak{D}(f_m)$$

ist $\mathfrak{V}(f) = \mathfrak{V}(f_1,..., f_m)$, also:

$$\text{Es gibt ein } k \in \mathbb{N} \text{ mit } f^k \in (f_1,..., f_m). \tag{$*$}$$

Eindeutigkeit: Seien $g_1, g_2 \in \mathcal{F}(U) = R_f$ mit $\rho^U_{U_i}(g_j) = f_i$ für alle $i \in \{1,..., m\}$ und $j \in \{1, 2\}$ und $g := g_1 - g_2 \in R_f$, also $g = 0$ in allen R_{f_i}. Dann gibt es ein $M \in \mathbb{N}$ mit $g f_i^M = 0$ für alle $i \in I$. Für genügend großes N gilt

$$(f_1,..., f_m)^N \subseteq (f_1^M,..., f_m^M).$$

Mit $(*)$ folgt $f^{kN} \in (f_1,..., f_m)^N \subseteq (f_1^M,..., f_m^M)$, also gibt es a_i mit

$$f^{kN} = a_1 f_1^M + \cdots + a_m f_m^M.$$

Dann gilt $f^{kN} g = a_1 f_1^M g + \cdots + a_m f_m^M g = 0$, also gilt $g = 0$ in R_f und damit $g_1 = g_2$.

Existenz: Gegeben $g_i \in R_{f_i}$, sodass $g_i = g_j$ in $R_{f_i f_j}$, suchen wir ein $g \in R_f$, sodass $g = g_i$ in allen R_{f_i} gilt. Da $g_i = g_j$ in $R_{f_i f_j}$, gibt es ein genügend großes N, für das

$$g_i f_i^N f_j^N = g_j f_i^N f_j^N$$

gilt, und das ohne Einschränkung nicht von i und j abhängt. Insbesondere gibt es wie gerade eben ein $w \in \mathbb{N}$ mit

$$f^w \in (f_1^N,..., f_m^N) \text{ und } f^w = \sum_{i=1}^m a_i f_i^N.$$

Wir definieren

$$g = \frac{1}{f^w} \sum_{i=1}^m a_i f_i^N g_i \in R_f.$$

Dann gilt in R_{f_i}

$$gf_j^N = \frac{1}{f^w}\sum_{i=1}^{m} a_i f_i^N f_j^N g_j = \frac{1}{f^w} f^w g_j f_j^N = g_j f_j^N,$$

also $g = g_j$ in R_{f_j}.

zu (b): Das folgt aus dem folgenden Lemma 7.14. □

LEMMA 7.14: Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{B}$ eine Basis. Eine $\mathcal{B}$-*Garbe* besteht aus einem Ring $\mathcal{F}(U)$ für jedes $U \in \mathcal{B}$ und Restriktionsabbildungen $\rho_{U'}^U$ für alle $U, U' \in \mathcal{B}$ mit $U' \subseteq U$, sodass die Garbeneigenschaften (G1) und (G2) aus Proposition 7.13 erfüllt sind.

Jede $\mathcal{B}$-Garbe lässt sich eindeutig zu einer Garbe auf X fortsetzen.

Beweis: Sei $U \subseteq X$ eine beliebige offene Menge. Wir definieren

$$\mathcal{F}_U = \varprojlim_{\substack{\widetilde{U} \subseteq U \\ \widetilde{U} \in \mathcal{B}}} \mathcal{F}(\widetilde{U}) = \left\{ f_{\widetilde{U}} \in \prod_{\substack{\widetilde{U} \subseteq U \\ \widetilde{U} \in \mathcal{B}}} \mathcal{F}(\widetilde{U}) \;\middle|\; \rho_{\widehat{U}}^{\widetilde{U}}(f_{\widetilde{U}}) = f_{\widehat{U}} \text{ für } \widehat{U}, \widetilde{U} \in \mathcal{B} \text{ mit } \widehat{U} \subseteq \widetilde{U} \subseteq U \right\}.$$

Mit den Restriktionsabbildungen

$$\rho_{U'}^U \colon (f_{\widetilde{U}})_{\substack{\widetilde{U} \subseteq U \\ \widetilde{U} \in \mathcal{B}}} \longmapsto (f_{\widetilde{U}})_{\substack{\widetilde{U} \subseteq U' \\ \widetilde{U} \in \mathcal{B}}} \text{ (wobei } U' \subseteq U)$$

ist $\mathcal{F}$ eine Garbe. Außerdem stimmt für $U \in \mathcal{B}$ das neue $\mathcal{F}(U)$ mit dem ursprünglichen $\mathcal{F}(U)$ überein via dem Isomorphismus

$$(f_{\widetilde{U}})_{\substack{\widetilde{U} \subseteq U \\ \widetilde{U} \in \mathcal{B}}} \longmapsto f_U.$$

Schließlich ist $\mathcal{F}$ eindeutig bestimmt, denn für einen weiteren Kanditaten $\mathcal{G}$ stimmen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ auf jeder Basismenge überein und damit nach (G2) auch auf allen offenen Mengen. □

BEMERKUNG 7.15: In Proposition 7.13 muss R nicht noethersch sein! Es gilt für beliebige Ringe R und $f \in R$, dass $\mathfrak{D}(f)$ quasikompakt ist (siehe Bemerkung 7.16).

BEMERKUNG 7.16: Sei R ein beliebiger kommutativer Ring mit Eins und f, f_i $(i \in I)$ aus R.

(a) Es gilt $\mathfrak{D}(f) = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{D}(f_i)$ genau dann, wenn $\sqrt{(f)} = \sqrt{(f_i \mid i \in I)}$.

Insbesondere gilt $\operatorname{Spec} R = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{D}(f_i)$ genau dann, wenn $1 \in (f_i \mid i \in I)$.

(b) $\mathfrak{D}(f)$ ist quasikompakt.

(c) Wenn R noethersch ist, ist $\operatorname{Spec} R$ ein noetherscher topologischer Raum.

Die Gegenrichtung stimmt nicht! Außerdem ist $\operatorname{Spec} R$ nicht immer ein noetherscher topologischer Raum.

Beweis: (a) Es gilt

$$\mathfrak{D}(f) = \bigcup_{i\in I} \mathfrak{D}(f_i) \iff \mathfrak{V}(f) = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{V}(f_i) \iff \sqrt{(f)} = \sqrt{(f_i \mid i \in I)}.$$

Für den zweiten Teil verwende $\mathfrak{D}(1) = \operatorname{Spec} R$.

(b) Sei $\mathfrak{D}(f) = \bigcup_{i\in I} U_i$ und ohne Einschränkung $U_i = \mathfrak{D}(f_i)$ für $f_i \in R$, da die $\mathfrak{D}(g)$ eine Basis der Topologie bilden. Nach (a) gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ und $i_1,..., i_n \in I$ mit $f^m \in (f_{i_1},..., f_{i_n})$. Damit folgt

$$\mathfrak{D}(f) = \mathfrak{D}(f^m) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \mathfrak{D}(f_{i_j}) \subseteq \bigcup_{i\in I} \mathfrak{D}(f_i) = \mathfrak{D}(f),$$

also $\mathfrak{D}(f) = \mathfrak{D}(f_{i_1}) \cup \ldots \cup \mathfrak{D}(f_{i_n})$. Es genügen also endlich viele, um $\mathfrak{D}(f)$ zu überdecken.

(c) Wenn wir eine absteigende Kette $V_1 \supsetneq V_2 \supsetneq V_3 \supsetneq \ldots$ von abgeschlossenen Mengen hätten, die nicht stationär wird, wäre $\mathfrak{I}(V_1) \subsetneq \mathfrak{I}(V_2) \subsetneq \mathfrak{I}(V_3) \subsetneq \ldots$ eine aufsteigende Kette von Idealen, die ebenfalls nicht stationär wird, im Widerspruch dazu, dass R noethersch ist. □

Definition 7.17: (a) Sei R ein beliebiger kommutativer Ring mit Eins, $X = \operatorname{Spec} R$ und O_X die Garbe aus Proposition 7.13. Der geringte Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt *affines Schema zu R.*

(b) Ist R noethersch, so heißt $(X, \mathcal{O}_X)$ ein *noethersches affines Schema.*

Proposition 7.18: Sei V eine affine Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K und $R = K[V]$. Das affine Schema zu R ist noethersch und für die stetige Injektion

$$\mathfrak{m}\colon V \hookrightarrow \operatorname{Spec} R, \quad x \longmapsto \mathfrak{m}_x = \{f \in K[V] \mid f(x) = 0\}$$

gilt $\mathfrak{m}_*\mathcal{O}_V \cong \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}$.

Hierbei ist $\mathcal{O}_V$ die Garbe der regulären Funktionen auf V, $\mathfrak{m}_*\mathcal{O}_V$ die Bildgarbe auf $\operatorname{Spec} R$, definiert durch $\mathfrak{m}_*\mathcal{O}_V(U) = \mathcal{O}_V(\mathfrak{m}^{-1}(U))$ (siehe auch Aufgabe 5 auf Übungsblatt 4); und $\mathfrak{m}_*\mathcal{O}_V \cong \mathcal{O}_X$ heißt: für jedes offene U existiert ein Isomorphismus

$$\theta_U\colon \mathfrak{m}_*\mathcal{O}_V(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)$$

und diese Isomorphismen sind mit den Restriktionsabbildungen verträglich, d.h. für $U' \subseteq U$ ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{m}_*\mathcal{O}_V(U) \arrow[r, "\theta_U"] \arrow[d, "\rho^U_{U'}"] & \mathcal{O}_X(U) \arrow[d, "\rho^U_{U'}"] \\ \mathfrak{m}_*\mathcal{O}_V(U') \arrow[r, "\theta_{U'}"] & \mathcal{O}_X(U') \end{tikzcd}$$

kommutativ.

Beweis: Wir zeigen, dass die Garben auf der Basis übereinstimmen. Dann folgt die Behauptung aus Lemma 7.14. Sei $U = \mathfrak{D}(f) = \{\wp \in \operatorname{Spec} R \mid \wp \not\ni f\}$. Aus Proposition 7.13 folgt einerseits $\mathcal{O}_X(\mathfrak{D}(f)) = R_f$. Andererseits gilt

$$\mathfrak{m}^{-1}(U) = \{x \in V \mid \mathfrak{m}_x \not\ni f\} = \{x \in V \mid f(x) \neq 0\} = \mathfrak{D}(f) \subseteq V,$$

also $\mathfrak{m}_*\mathcal{O}_V(U) = \mathcal{O}_V(\mathfrak{m}^{-1}(U)) \cong R_f$ wegen Korollar 5.11. Außerdem passen die Restriktionsabbildungen zusammen. $\square$

ii Projektive Varietäten

Wir hatten bereits gesehen: Ein Manko an $\mathbb{A}^n(K)$ ist, dass sich Geraden nicht immer schneiden. Daher wollen wir $\mathbb{A}^n(K)$ zum projektiven Raum $\mathbb{P}^n(K)$ vergrößern. Die Punkte darin sollen die Geraden in $\mathbb{A}^{n+1}(K)$ sein.

1 Der Projektive Raum $\mathbb{P}^n(k)$

Sei k immer ein Körper und $n \in \mathbb{N}_0$.

DEFINITION 1.1: Der *n-dimensionale projektive Raum* über k besteht aus allen Ursprungsgeraden in k^{n+1}:

$$\mathbb{P}^n(k) := k^{n+1}\setminus\{0\}\Big/\sim \ ,$$

wobei $(x_1,\dots,x_{n+1}) \sim (y_1,\dots,y_{n+1}) :\Longleftrightarrow \exists\ \lambda \in k^\times : y_i = \lambda x_i\ \forall i$. Für die Äquivalenzklasse von $(x_0,\dots,x_n)$ schreiben wir

$$(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$$

und nennen sie die *homogenen Koordinaten des Punktes*.

BEISPIEL 1.2: (a) Für $n = 0$ ist $\mathbb{P}^0(k) = \{(1)\} =: \{\infty\}$.

(b) Für $n = 1$ ist

$$\mathbb{P}^1(k) = \{(x_0,x_1) \mid (x_0,x_1) \neq (0,0)\}\Big/\sim \ = \{(1:t) \mid t \in k\} \cup \{(0:1)\}.$$

Wir sehen:

$$\mu\colon \mathbb{P}^1(k) \longrightarrow k \cup \{\infty\}, \quad (x_0 : x_1) \longmapsto \begin{cases} \frac{x_1}{x_0}, & x_0 \neq 0,\\ \infty, & x_0 = 0,\end{cases}$$

ist eine Bijektion und ordnet jeder Geraden ihre Steigung zu.

SPEZIALFALL:

- Für $k = \mathbb{R}$ ist $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathcal{S}^1/\{\pm 1\}$, entspricht also einer Kreislinie.
- Für $k = \mathbb{C}$ ist $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Das lässt sich (z.B. mit Hilfe der riemannschen Zahlenkugel) mit der $\mathcal{S}^2$ identifizieren.

(c) Es gilt $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}^n(\mathbb{R})/\{\pm 1\}$ und $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathcal{S}^n(\mathbb{C})/\{c \in \mathbb{C} \mid |c| = 1\}$. Bezüglich der Quotiententopologie, die von k^{n+1} mit der euklidischen Topologie herkommt, sind das kompakte Hausdorffräume.

Das ist nicht die Zariski-Topologie!

(d) Für $k = \mathbb{F}_p$ ist
$$|\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_p)| = \frac{p^{n+1}-1}{p-1} = 1 + \cdots + p^n.$$

Definition/Bemerkung 1.3: Für $i \in \{0,\ldots,n\}$ sei
$$\mathfrak{U}_i := \{x = (x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) \mid x_i \neq 0\}.$$

Das ist wohldefiniert(!) und es gilt:

(a) $\mathbb{P}^n(k) = \bigcup_{i=0}^{n} \mathfrak{U}_i$

(b) Sei
$$\varphi_i \colon \mathbb{A}^n(k) \longrightarrow \mathbb{P}^n(k), \quad (y_1,\ldots,y_n) \longmapsto (y_1 : \cdots : y_i : 1 : y_{i+1} : \cdots : y_n).$$

Das ist eine Einbettung mit Bild $\mathfrak{U}_i$. Die Abbildung
$$\mathfrak{U}_i \longrightarrow \mathbb{A}^n(k), \quad (x_0 : \cdots : x_n) \longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i},\ldots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\ldots,\frac{x_n}{x_i}\right)$$

ist wohldefiniert und bijektiv und ihre Umkehrabbildung ist φ_i.

(c) Die Abbildung $\mathbb{P}^n(k) \setminus \mathfrak{U}_i \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}(k)$,
$$\begin{aligned}(x_0 : \cdots : x_n) &\longmapsto (x_0 : x_1 : \cdots : x_{i-1} : x_{i+1} : \cdots : x_n)\\ &=: (x_0 : \cdots : \widehat{x_i} : \cdots : x_n)\end{aligned}$$

ist wohldefiniert und bijektiv.

(d) Damit erhalten wir eine Bijektion:
$$\mathbb{P}^n(k) \longleftrightarrow \mathbb{A}^n(k) \cup \mathbb{A}^{n-1}(k) \cup \cdots \mathbb{A}^1(k) \cup \{\infty\}.$$

Beweis: (a) ist klar nach Definition der $\mathfrak{U}_i$.

(b) Man rechnet einfach nach, dass die Abbildungen zueinander invers sind.

(c) Da $x_i = 0$ ist, gibt es ein $j \neq i$ mit $x_j \neq 0$, also ist die Abbildung wohldefiniert. Wir geben wieder eine Umkehrabbildung an:
$$\begin{aligned}\mathbb{P}^{n-1}(k) &\longrightarrow \mathbb{P}^n(k) \setminus \mathfrak{U}_i,\\ (y_0 : \cdots : y_{n-1}) &\longmapsto (y_0 : \cdots : y_{i-1} : 0 : y_i : \cdots : y_{n-1}).\end{aligned}$$

(d) Das folgt induktiv aus (b) und (c). □

2 Projektive Varietäten

Auch in diesem Abschnitt sei k immer ein Körper, $n \in \mathbb{N}_0$.

Ein unmittelbares Problem im Projektiven ist das Folgende: Sei $f \in k[X_0,...,X_n]$. Dann ist die dazugehörige Polynomfunktion

$$\mathbb{P}^n(k) \longrightarrow k, \quad x = (x_0 : \cdots : x_n) \longmapsto f(x_0,...,x_n)$$

nur wohldefiniert, falls $f(\lambda x_0,...,\lambda x_n) = f(x_0,...,x_n)$ für alle $\lambda \in k^\times$ ist. Das ist aber fast nie der Fall.

Um Varietäten zu definieren, genügt es aber, dass „$f(x) = 0$" wohldefiniert ist, das heißt

$$\forall\, \lambda \in k^\times \colon f(x_0,...,x_n) = 0 \iff f(\lambda x_0,...,\lambda x_n) = 0.$$

Das erfüllen gerade die homogenen Polynome.

Erinnerung 2.1: (a) $f \in k[X_0,...,X_n]$ heißt *homogen vom Grad d*, wenn

$$f = \sum_{i=0}^{l} a_i X_0^{r_{i,0}} \cdots X_n^{r_{i,n}} \text{ mit } r_{i,0} + \cdots + r_{i,n} = d \;\; \forall i.$$

(b) Falls k unendlich ist, so gilt:

$$f \text{ ist homogen vom Grad } d \iff f(\lambda x_0,...,\lambda x_n) = \lambda^d \cdot f(x_0,...,x_n) \; \forall \lambda \in k^\times.$$

(c) Die Voraussetzung „unendlich" kann in (b) nicht weggelassen werden: Seien $k = \mathbb{F}_3$ und $f(X) = X^3 + X$. Dann ist f nicht homogen, aber es gilt

$$\forall \lambda \in k^\times \colon f(\lambda x) = \lambda^3 x^3 + \lambda x = \lambda(x^3 + x) = \lambda f(x),$$

da $\lambda^3 = \lambda$ im $\mathbb{F}_3$.

Beweis: (b) Für homogene Polynome gilt die Eigenschaft nach Definition. Sei also f ein Polynom, das die rechte Seite der Äquivalenz erfülle. Wir zerlegen f in seine homogenen Komponenten, schreiben also

$$f = \sum_{i=0}^{l} f_i \text{ mit } \deg f_i = i \text{ und } f_i \text{ homogen.}$$

Nun setzen wir $g_{(x_0,...,x_n)}(\lambda) := f(\lambda x_0,...,\lambda x_n)$, fassen also den Ausdruck als Polynom in λ auf. Da die f_i homogen sind und wegen der Vorraussetzung an f, gilt:

$$\sum_{i=0}^{l} \lambda^i f_i(x) = \sum_{i=0}^{l} f_i(\lambda x) = f(\lambda x) = \lambda^d f(x) = \lambda^d \left(\sum_{i=0}^{l} f_i(x) \right).$$

Da k unendlich ist, stimmen die Ausdrücke für alle x als Polynome in λ überein, es gilt also $f_i = 0$ für $i \neq d$. Daher ist $f = f_d$ und damit homogen vom Grad d. $\square$

DEFINITION 2.2: $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ heißt *projektive Varietät*, wenn es in $k[X_0,\ldots,X_n]$ eine Menge $\mathcal{F}$ von homogenen Polynomen gibt, so dass

$$V = \mathfrak{V}(\mathcal{F}) := \{x \in \mathbb{P}^n(k) \mid f(x) = 0 \,\forall f \in \mathcal{F}\}.$$

BEISPIEL 2.3: (a) Die Menge $H_i := \mathfrak{V}(X_i) = \mathbb{P}^n(k) \setminus \mathfrak{U}_i$ ist eine projektive Varietät und nach Definition/Bemerkung 1.3 (c) bijektiv zu $\mathbb{P}^{n-1}$.

Allgemein nennen wir $H = \mathfrak{V}(f)$ mit $f \in k[X_0,\ldots,X_n]$ eine *Hyperfläche* und wenn f sogar linear ist, nennen wir H eine *Hyperebene*.

(b) Es gilt $\mathfrak{V}(X_0,\ldots,X_n) = \varnothing$.

(c) Betrachte $V = \mathfrak{V}(X_0X_2 - X_1^2) \subseteq \mathbb{P}^2(k)$.

- Zuerst bilden wir $V \cap \mathfrak{U}_0$ in den $\mathbb{A}^2$ durch

$$(x_0 : x_1 : x_2) \longmapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)$$

ab. Ein Punkt $(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(k)$ liegt genau dann in V, wenn er

$$x_0x_2 - x_1^2 = 0$$

erfüllt und für einen Punkt aus $V \cap \mathfrak{U}_0$ ist diese Bedingung äquivalent zu $\frac{x_2}{x_0} - \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 = 0$. Das heißt ein Punkt $(x, y) \in \mathbb{A}^2$ liegt genau dann im Bild von $V \cap \mathfrak{U}_0$, wenn $y - x^2 = 0$. Diese Punkte liegen also alle auf einer Parabel.

- Nun bilden wir $V \cap \mathfrak{U}_1$ nach $\mathbb{A}^2$ ab. Analog betrachten wir die Abbildung

$$(x_0 : x_1 : x_2) \longmapsto \left(\frac{x_0}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}\right)$$

und sehen mit dem gleichem Argument, dass für die betroffenen Punkte

$$\frac{x_0x_2}{x_1^2} - 1 = 0$$

gilt, also im $\mathbb{A}^2$ entsprechend: $xy - 1 = 0$. Diese Punkte liegen also alle auf einer Hyperbel.

ERINNERUNG 2.4: (a) Der Polynomring $S := k[X_0,\ldots,X_n]$ ist ein *graduierter Ring* mit Graduierung

$$S_d := \{f \in k[X_0,\ldots,X_n] \mid f \text{ homogen von Grad } d\},$$

d.h.:
- $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$; die Elemente in S_d bezeichnen wir als *homogene Elemente*.
- Es gilt: $S_d \cdot S_l \subseteq S_{d+l}$.

S ist sogar eine *graduierte k-Algebra*, d.h. $k = S_0$ und die S_d sind k-Vektorräume.

(b) Ein Ideal I heißt *homogen*, wenn es von homogenen Elementen (nicht notwendigerweise von gleichem Grad) erzeugt wird.

(c) Die Summe, das Produkt, der Durchschnitt und die Radikale von homogenen Idealen sind wieder homogen.

(d) Es gilt: I ist genau dann homogen, wenn

$$\forall f \in I \colon f = \sum_{i=0}^{d} f_i \text{ mit } f_i \in S_i \implies f_i \in I.$$

Beweis: Als Beispiel beweisen wir, dass das Radikal eines homogenen Ideals wieder homogen ist. Für die restlichen Beweise verweisen wir auf Algebra II.

Sei also I ein homogenes Ideal und $f \in \sqrt{I}$. Seien $f_d \in S_d$ mit $f = \sum_{d=0}^{n} f_d$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $f^m \in I$ und wir sehen:

$$f^m = f_n^m + \text{Terme von kleinerem Grad.}$$

f_n^m ist auch ein homogenes Element, also gilt nach (d): $f_n^m \in I$. Daher ist $f_n \in \sqrt{I}$ und rekursiv auch alle f_d. Damit ist, wieder nach (d), $\sqrt{I}$ ein homogenes Ideal.□

Definition/Bemerkung 2.5: (a) Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$. Dann nennen wir

$$\mathfrak{I}(V) = \langle \{ f \in k[X_0,..., X_n] \mid f \text{ homogen}, f(x) = 0 \ \forall x \in V \} \rangle$$

das *Verschwindungsideal von* V.

(b) Für ein homogenes Ideal I heißt

$$\mathfrak{V}(I) := \{ x \in \mathbb{P}^n(k) \mid f(x) = 0 \text{ für alle homogenen } f \in I \}$$

Nullstellenmenge von I. Das ist eine projektive Varietät.

(c) $\mathfrak{I}(V)$ ist ein Radikalideal.

(d) Seien I_1, I_2 homogene Ideale, V_1, V_2 projektive Varietäten. Dann gilt:
- $I_1 \subseteq I_2 \implies \mathfrak{V}(I_1) \supseteq \mathfrak{V}(I_2)$,
- $V_1 \subseteq V_2 \implies \mathfrak{I}(V_1) \supseteq \mathfrak{I}(V_2)$, sowie
- $V_1 = V_2 \iff \mathfrak{I}(V_1) = \mathfrak{I}(V_2)$.

Beweis: (c) Sei $I := \mathfrak{I}(V)$ homogen. Dann ist nach Erinnerung 2.4 (c) auch $\sqrt{I}$ homogen. Sei $f \in \sqrt{I}$ ein homogenes Element. Dann ist $f \in I$ nach dem gleichen Argument, wie im Affinen (Bemerkung 1.3 (c)).

(d) Hier wirken die Argumente aus Kapitel I, Bemerkung 1.3 und Bemerkung 1.5. □

Proposition 2.6 (Projektiver Nullstellensatz): Seien K ein algebraisch abgeschlossener Körper und I ein homogenes Ideal in $K[X_0,..., X_n]$. Dann gilt:

(a) $\mathfrak{I}(\mathfrak{V}(I)) = \sqrt{I}$, falls $\sqrt{I} \neq (X_0,..., X_n)$,

(b) $\mathfrak{V}(I) = \varnothing \iff I = K[X_0,..., X_n]$ oder $\sqrt{I} = (X_0,..., X_n)$.

Der Beweis kommt später.

Definition/Bemerkung 2.7: (a) Die projektiven Varietäten im $\mathbb{P}^n(k)$ bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf $\mathbb{P}^n(k)$. Diese heißt *Zariski-Topologie.*

(b) Für $M \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ ist $\mathfrak{V}(\mathfrak{I}(M)) = \overline{M}$.

(c) Sei V eine projektive Varietät. Dann gilt:

$$V \text{ ist irreduzibel} \iff \mathfrak{I}(V) \text{ ist ein Primideal.}$$

(d) Jede projektive Varietät besitzt eine eindeutige Zerlegung in endlich viele irreduzible Komponenten.

Beweis: Genau wie im Affinen. Siehe dazu Definition/Bemerkung 2.1, Bemerkung 2.3, Bemerkung 2.9 und Satz 1 aus Kapitel I. □

Frage: *Wie sieht das Bild einer affinen Varietät $V = \mathfrak{V}(I)$ in $\mathbb{P}^n$ aus?*

Definition/Lemma 2.8: Seien

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\colon k[X_1,\dots,X_n] &\longrightarrow k[X_0,\dots,X_n],\\ f = \sum_{i=0}^{d} f_i &\longmapsto \sum_{i=0}^{d} f_i X_0^{d-i} =: F(X_0,\dots,X_n),\end{aligned}$$

wobei die f_i homogen mit $\deg f_i = i$ sind, die *Homogenisierung* und

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\colon k[X_0,\dots,X_n] &\longrightarrow k[X_1,\dots,X_n],\\ F(X_0,\dots,X_n) &\longmapsto F(1,X_1,\dots,X_n) =: f(X_1,\dots,X_n)\end{aligned}$$

die *Dehomogenisierung.* Dann gilt:

(a) $\mathcal{D} \circ \mathcal{H} = \mathrm{id}$ und für homogenes F gilt $X_0^e \cdot \mathcal{H} \circ \mathcal{D}(F) = F$ für ein $e \in \mathbb{N}$.

(b) Sei $F = \mathcal{H}(f)$. Dann ist, nach Definition, F homogen und es gilt $\deg F = d = \deg f$. Außerdem gilt:

$$\forall x_0,\dots,x_n \in k, x_0 \neq 0\colon F(x_0,\dots,x_n) = x_0^d \cdot f(\tfrac{x_1}{x_0},\dots,\tfrac{x_n}{x_0}).$$

Insbesondere ist $F(1,x_1,\dots,x_n) = f(x_1,\dots,x_n)$.

(c) $\mathcal{D}$ ist ein k-Algebrenhomomorphismus und es gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(f \cdot g) &= \mathcal{H}(f) \cdot \mathcal{H}(g)\\ X_0^j \cdot \mathcal{H}(f+g) &= \mathcal{H}(f) + X_0^{\deg f - \deg g} \cdot \mathcal{H}(g).\end{aligned}$$

Insbesondere liegt $\mathcal{H}(f+g)$ nicht notwendigerweise im Ideal $(\mathcal{H}(f), \mathcal{H}(g))$.

Beweis: Sei $f = \sum_{i=0}^{d} f_i$ wie in der Definition.

(a) Es ist $\mathcal{D}(\mathcal{H}(f)) = \mathcal{D}\left(\sum_{i=0}^{d} f_i X_0^{d-i}\right) = \sum_{i=0}^{d} f_i = f$.

Sei nun F homogen vom Grad d. Schreibe F als

$$F = \sum_{i=0}^{d} f_i X_0^{d-i}.$$

Dann hat jedes f_i Grad i und sei $e = \deg \sum_{i=0}^{d} f_i$. Insbesondere ist $e \leq d$. Damit:

$$\mathcal{H}(\mathcal{D}(F)) = \mathcal{H}\left(\sum_{i=0}^{d} f_i\right) = \mathcal{H}\left(\sum_{i=0}^{e} f_i\right) = \sum_{i=0}^{e} f_i X_0^{e-i} = \sum_{i=0}^{d} f_i X_0^{e-i}.$$

Also ist $F = X_0^{d-e} \cdot \mathcal{H}(\mathcal{D}(F))$.

(b) Sei F homogen vom Grad d und $f := \mathcal{D}(F)$. Seien $x_0, \ldots, x_n \in k$ mit $x_0 \neq 0$. Dann gilt:

$$F(x_0, \ldots, x_n) = x_0^d \cdot F\left(1, \tfrac{x_1}{x_0}, \ldots, \tfrac{x_n}{x_1}\right) = x_0^d \cdot f\left(\tfrac{x_1}{x_0}, \ldots, \tfrac{x_n}{x_1}\right).$$

(c) $\mathcal{D}$ ist die Auswertungsabbildung für $X_0 = 1$ und mit Skalarmultiplikation verträglich, damit also ein k-Algebrenhomomorphismus.

Seien $f = \sum_{i=0}^{d} f_i$ und $g = \sum_{i=0}^{e} g_i$, mit f_i bzw. g_i homogen vom Grad i. Dann ist:

$$\mathcal{H}(f) \cdot \mathcal{H}(g) = \left(\sum_{i=0}^{d} f_i X_0^{d-i}\right)\left(\sum_{i=0}^{e} g_i X_0^{e-i}\right) = \sum_{k=0}^{d+e} \sum_{i=0}^{k} f_i g_{k-i} X_0^{d+e-k}$$

$$\mathcal{H}(f \cdot g) = \mathcal{H}\left(\sum_{i=0}^{d} \sum_{j=0}^{e} f_i g_j\right) = \mathcal{H}\left(\sum_{k=0}^{d+e} \sum_{j=0}^{k} f_i g_{k-i}\right) = \sum_{k=0}^{d+e} \sum_{i=0}^{k} f_i g_{k-i} X_0^{d+e-k}$$

da $f_i g_{k-i}$ Grad k hat. Also ist $\mathcal{H}(f \cdot g) = \mathcal{H}(f) \cdot \mathcal{H}(g)$.

Sei, ohne Einschränkung, $e \leq d$. Dann gilt für die Summe von f und g:

$$f + g = \sum_{i=0}^{d} (f_i + g_i) = \sum_{i=0}^{d-j} (f_i + g_i),$$

für ein $j \in \mathbb{N}_0$, denn eventuell heben sich Summanden weg. Es gilt also

$$\mathcal{H}(f + g) = \sum_{i=0}^{d-j} (f_i + g_i) X_0^{d-i-j}$$

und damit

$$X_0^j \mathcal{H}(f+g) = \mathcal{H}(f) + \sum_{i=0}^{d} g_i X_0^{d-i} = \mathcal{H}(f) + \sum_{i=0}^{e} g_i X_0^{d-i} = \mathcal{H}(f) + X_0^{d-e} \cdot \mathcal{H}(g),$$

da $g_i = 0$ für $i > e = \deg g$. Das zeigt die Behauptung. □

Definition: Für ein Ideal $I \subseteq k[X_1,..., X_n]$ bezeichnen wir im Folgenden mit

$$I^* = (\mathcal{H}(I)) = (\mathcal{H}(f) \mid f \in I)$$

das von den Homogenierungen aller Polynome aus I erzeugte Ideal.

Lemma 2.9: Seien $I \subseteq k[X_1,..., X_n]$ ein Ideal und I^* wie eben, sowie $\varphi_0 \colon \mathbb{A}^n(k) \hookrightarrow \mathbb{P}^n(k)$ wie in Definition/Bemerkung 1.3 (b). Seien $\mathfrak{V}(I) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ und $\mathfrak{V}(I^*) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ die zugehörigen Varietäten. Dann gilt $\varphi_o(\mathfrak{V}(I)) = \mathfrak{U}_0 \cap \mathfrak{V}(I^*)$.

Beweis: Sei $x = (x_1,..., x_n) \in \mathbb{A}^n(k)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x \in \mathfrak{V}(I) &\iff \forall f \in I\colon f(x) = 0 \\ &\iff \forall f \in I\colon F(1 : x_1 : \cdots : x_n) = 0 \text{ für } F = \mathcal{H}(f) \\ &\iff \forall f \in I\colon F(\varphi_0(x)) = 0 \\ &\iff \varphi_0(x) \in \mathfrak{V}(I^*) \cap \mathfrak{U}_0. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\varphi_0(\mathfrak{V}(I)) = \mathfrak{U}_0 \cap \mathfrak{V}(I^*)$. □

Proposition 2.10: Sei $\varphi_0 \colon \mathbb{A}^n(k) \hookrightarrow \mathbb{P}^n(k)$ wie vorher. Dann ist φ_0 ein Homöomorphismus auf $\mathfrak{U}_0$.

Beweis: Wir zeigen, dass Bilder und Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind. Eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathfrak{U}_0$ hat die Form $\mathfrak{V}(J) \cap \mathfrak{U}_0$ mit einem homogenen Ideal J. Für eine solche sei $I = (\mathcal{D}(F) \mid F \in J, F \text{ homogen})$ und $I^* = (\mathcal{H}(I))$ wie vorher.

Dann gilt $J \subseteq I^*$, denn: Sei $F \in J$ homogen und $f = \mathcal{D}(F) \in I$ seine Dehomogenisierung. Dann gilt $F = X_0^e \mathcal{H}(\mathcal{D}(f)) \in I^*$, also $\mathfrak{V}(J) \supseteq \mathfrak{V}(I^*)$.

Wir zeigen $\varphi_0^{-1}(\mathfrak{V}(J)) = \mathfrak{V}(I)$, also $\varphi_0(\mathfrak{V}(I)) = \mathfrak{V}(J) \cap \mathfrak{U}_0$. Lemma 2.9 sagt

$$\varphi_0(\mathfrak{V}(I)) = \mathfrak{V}(I^*) \cap \mathfrak{U}_0,$$

also wissen wir $\varphi_0(\mathfrak{V}(I)) \subseteq \mathfrak{V}(J) \cap \mathfrak{U}_0$. Seien umgekehrt

$$z = (1 : x_1 : \cdots : x_n) \in \mathfrak{V}(J) \cap \mathfrak{U}_0, \quad x = (x_1,..., x_n)$$

und $f \in I$; sei dabei ohne Einschränkung f ein Erzeuger, also $f = \mathcal{D}(F)$ für ein $F \in J$. Es gilt dann $f(x_1,..., x_n) = F(1 : x_1 : \cdots : x_n) = 0$, also $x \in \mathfrak{V}(I)$. Damit ist φ_0 stetig. Wegen Lemma 2.9 ist

$$\varphi_0(\mathfrak{V}(I)) = \mathfrak{V}(I^*) \cap \mathfrak{U}_0$$

eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathfrak{U}_0$, also ist φ_0^{-1} auch stetig. □

Lemma 2.11: Sei wieder K algebraisch abgeschlossen, $I \subseteq K[X_1,..., X_n]$ ein Radikalideal, φ_0 und I^* wie oben. Dann ist $\mathfrak{V}(I^*)$ die kleinste Varietät in $\mathbb{P}^n(K)$, die $\varphi_0(\mathfrak{V}(I))$ enthält.

Beweis: Wir zeigen: $\overline{\varphi_0(\mathfrak{V}(I))} = \mathfrak{V}(I^*)$. Aus Lemma 2.9 folgt $\varphi_0(\mathfrak{V}(I)) \subseteq \mathfrak{V}(I^*)$. Sei nun J ein homogenes Ideal mit $\mathfrak{V}(J) \supseteq \varphi_0(\mathfrak{V}(I))$. Wir zeigen $J \subseteq I^*$. Sei dazu $F \in J$ homogen und $f = \mathcal{D}(F)$ seine Dehomogenisierung. Dann gilt für alle $x \in \mathfrak{V}(I)$:

$$F(\varphi_0(x)) = f(x) = 0, \text{ also } f \in \mathfrak{I}(\mathfrak{V}(I)) = \sqrt{I} = I.$$

Damit folgt $\mathcal{H}(f) \in I^*$, also $F = X_0^e \cdot \mathcal{H}(\mathcal{D}(F)) \in I^*$. □

KOROLLAR 2.12: Sei K algebraisch abgeschlossen, $f \in K[X_1,\ldots,X_n]$ und $F = \mathcal{H}(f)$. Dann gilt $\overline{\varphi_0(\mathfrak{V}(f))} = \mathfrak{V}(F)$.

Beweis: Das folgt aus Lemma 2.11: sei $I = (f)$, dann ist $I^* = (F)$. □

DEFINITION 2.13: Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine projektive Varietät. Die Menge

$$\widetilde{V} = \{(x_0,\ldots,x_n) \in \mathbb{A}^{n+1}(k) \mid (x_0 : \cdots : x_n) \in V\} \cup \{(0,\ldots,0)\} \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(k)$$

heißt *affiner Kegel zu V*.

BEISPIEL: Für $\mathfrak{V}(X^2 + Y^2 - Z^2) \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ist das wirklich ein Kegel.

PROPOSITION 2.14: Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine projektive Varietät.

(a) Der affine Kegel $\widetilde{V}$ über V ist eine affine Varietät in $\mathbb{A}^{n+1}(k)$.
Genauer: ist $V = \mathfrak{V}^{\text{proj}}(\mathcal{F})$ für eine Menge $\mathcal{F} \subseteq k[X_0,\ldots,X_n]$, die aus homogenen nichtkonstanten Polynomen besteht, dann gilt $\widetilde{V} = \mathfrak{V}^{\text{aff}}(\mathcal{F})$ in $\mathbb{A}^{n+1}(k)$.

(b) Sei k unendlich und V nichtleer. Dann gilt $\mathfrak{I}^{\text{aff}}(V) = \mathfrak{I}^{\text{proj}}(V)$.

Beweis: (a) Sei $V = \mathfrak{V}(\mathcal{F})$. Falls $\mathcal{F}$ ein vom Nullpolynom verschiedenes konstantes Polynom enthält, ist $V = \varnothing$ und damit $\widetilde{V} = \{(0,\ldots,0)\}$, was eine affine Varietät ist. Sonst sei $x = (x_0,\ldots,x_n) \in \mathbb{A}^{n+1}(K)$. Ist x der Nullpunkt, so liegt x sowohl in $\widetilde{V}$ als auch in $\mathfrak{V}^{\text{aff}}(\mathcal{F})$, da ein nichtkonstantes homogenes Polynom immer $(0,\ldots,0)$ als Nullstelle hat. Ist $x \neq 0$, so gilt

$$x \in \mathfrak{V}^{\text{aff}}(\mathcal{F}) \iff \forall f \in \mathcal{F} \colon f(x_0,\ldots,x_n) = 0 \iff (x_0,\ldots,x_n) \in \mathfrak{V}^{\text{proj}}(\mathcal{F}).$$

Also gilt $\mathfrak{V}^{\text{aff}}(\mathcal{F}) = \widetilde{V}$.

(b) Wir zeigen $\mathfrak{I}(V) = \mathfrak{I}(\widetilde{V})$, falls $V \neq \varnothing$.
Sei zunächst $f \in k[X_0,\ldots,X_n]$ ein homogenes Polynom. Es gilt

$$\begin{aligned} f \in \mathfrak{I}(V) &\iff \forall (x_0 : \cdots : x_n) \in V \colon f(x_0 : \cdots : x_n) = 0 \\ &\iff \forall x \in \widetilde{V} \setminus \{0\} \colon f(x) = 0 \\ &\iff f \in \mathfrak{I}(\widetilde{V}). \end{aligned}$$

Wir benutzen hierbei, dass für ein $f \in \mathfrak{I}(V)$, das homogen und nicht konstant ist, $f(0) = 0$ gilt (falls $V \neq \varnothing$).

Es bleibt noch zu zeigen, dass $\mathfrak{I}(\widetilde{V})$ ein homogenes Ideal ist. Dazu zeigen wir: Ist $f \in \mathfrak{I}(\widetilde{V})$ mit

$$f = \sum_{i=0}^{d} f_i, \qquad (f_i \text{ homogen von Grad } i)$$

dann gilt $f_i \in \mathfrak{I}(\widetilde{V})$ für alle $i \in \{0,\dots,d\}$. Da mit einem $x \in \widetilde{V}$ auch $\lambda x \in \widetilde{V}$ für alle $\lambda \in k$ gilt, haben wir für alle $x \in \widetilde{V}$:

$$0 = f(x) = f(\lambda x) = \sum_{i=0}^{d} f_i(\lambda x) = \sum_{i=0}^{d} \lambda^i f_i(x).$$

Wenn wir das als Polynom in λ auffassen, folgt $f_i(x) = 0$ für alle i, da k unendlich ist. Also ist $f_i \in \mathfrak{I}(\widetilde{V})$ für alle i. □

Wir können nun den projektiven Nullstellensatz beweisen.

Beweis von Proposition 2.6: Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und I ein homogenes Ideal in $K[X_0,\dots,X_n]$.

(b) Sei $I \neq K[X_0,\dots,X_n]$ und $V = \mathfrak{V}^{\text{proj}}(I) = \mathfrak{V}(I^{\text{homogen}}) \subseteq \mathbb{P}^n(K)$. Ist dann $V = \varnothing$, gilt, nach Proposition 2.14 (b), $\{(0,\dots,0)\} = \widetilde{V} = \mathfrak{V}^{\text{aff}}(I^{\text{homogen}}) = \mathfrak{V}^{\text{aff}}(I)$ und damit nach dem affinen Hilbertschen Nullstellensatz $\sqrt{I} = \mathfrak{I}(\mathfrak{V}^{\text{aff}}(I)) = (X_0,\dots,X_n)$. Die umgekehrte Implikation ist klar.

(a) Wenn $I = K[X_0,\dots,X_n]$, stimmt die Aussage. Sei also $I \neq K[X_0,\dots,X_n]$ und $\sqrt{I} \neq (X_0,\dots,X_n)$. Nach (b) gilt dann $\mathfrak{V}^{\text{proj}}(I) \neq \varnothing$, also, nach Korollar 2.12 und dem affinen Hilbertschen Nullstellensatz,

$$\mathfrak{I}(\mathfrak{V}(I)) = \mathfrak{I}(\widetilde{V}) = \mathfrak{I}(\mathfrak{V}^{\text{aff}}(I)) = \sqrt{I}. \qquad \square$$

Definition 2.15: Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine projektive Varietät. Dann heißt

$$k[V] := k[X_0,\dots,X_n] \big/ \mathfrak{I}(V)$$

homogener Koordinatenring. $k[V]$ ist eine graduierte k-Algebra mit Graduierung

$$k[V]_d = k[X_0,\dots,X_n]_d \big/ \mathfrak{I}(V) \cap k[X_0,\dots,X_n]_d \,.$$

3 Quasi-projektive Varietäten

Definition 3.1: $W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ heißt *quasi-projektive Varietät*, wenn W offene Teilmenge einer projektiven Varietät ist.

Bemerkung 3.2: Sei $W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine quasi-projektive Varietät. Dann gilt:

(a) Jede offene Teilmenge $\widehat{W} \subseteq W$ ist Vereinigung affiner Varietäten, also

$$\widehat{W} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \text{ mit } U_\lambda \subseteq \mathfrak{U}_i = \{(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) \mid x_i \neq 0\},$$

wobei die U_λ offen und die $\varphi_i^{-1}(U_\lambda)$ affin als abstrakte Varietät sind.

(b) W ist quasikompakt.

Beweis: (a) Wir identifizieren, via φ_i, die $\mathfrak{U}_i$ mit $\mathbb{A}^n(k)$ und schreiben

$$\widehat{W} = \bigcup_{i=0}^{n} \widehat{W} \cap \mathfrak{U}_i.$$

Nun gilt die Aussage für die $\widehat{W} \cap \mathfrak{U}_i \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ nach Bemerkung 5.9 (c) und Beispiel 5.15 (a) aus Kapitel I, da die $\mathfrak{D}(f)$ eine Basis der Topologie bilden und affin als abstrakte Varietäten sind.

(b) Sei $W = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ eine offene Überdeckung. Dann gilt auch

$$W = \bigcup_{i=0}^{n} \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \cap \mathfrak{U}_i.$$

Nach Bemerkung 5.9 (b) aus Kapitel I genügen aber für jedes i endlich viele offene Mengen, also genügen auch insgesamt endlich viele. □

4 Reguläre Funktionen

Seien, wie bisher, k ein Körper, $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathfrak{U}_i = \{(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) \mid x_i \neq 0\}$ und $\varphi_i \colon \mathbb{A}^n(k) \hookrightarrow \mathbb{P}^n(k)$, $(x_0,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_n) \longmapsto (x_0 : \cdots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \cdots : x_n)$.

Bemerkung: Seien F, G homogene Polynome mit $\deg F = \deg G$. Dann ist $\frac{F}{G}$ wohldefiniert auf $\mathfrak{D}(G) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$.

Definition 4.1: Seien $W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine quasi-projektive Varietät und $r \colon W \longrightarrow k$ eine Abbildung.

(a) Wir nennen r *regulär in* $p \in W$, wenn es eine offene Umgebung $U_p \subseteq W$ von p und homogene Polynome G und H mit $\deg G = \deg H$ und $G(z) \neq 0$ für alle $z \in U_p$ gibt, so dass

$$r = \frac{H}{G} \text{ auf } U_p.$$

(b) Wir nennen r *regulär*, wenn r regulär in jedem $p \in W$ ist.

Bemerkung 4.2: Sei $r \colon W \longrightarrow k$ eine Abbildung. Dann ist r genau dann regulär, wenn $r|_{W \cap \mathfrak{U}_i}$ regulär für jedes i ist, d.h. $r \circ \varphi_i|_{\varphi_i^{-1}(W)}$ ist reguläre Funktion der quasi-affinen Varietät $\varphi_i^{-1}(W)$, definiert wie in Kapitel I, Definition 5.3 (a).

Beweis: Sei zunächst r regulär. Dann gibt es für jedes $p \in \varphi_i^{-1}(W)$ eine offenes $U_{\varphi_i(p)}$ mit homogenen Polynomen G und H, so dass dort $r = \frac{G}{H}$ gilt. Dann gilt

$$r \circ \varphi_i = \frac{G \circ \varphi_i}{H \circ \varphi_i} = \frac{g}{h},$$

wobei g und h die Dehomogenisierungen bzgl. X_i von G bzw. H sind, also ist $r \circ \varphi_i$ regulär im Affinen.

Sei nun $q \in W$, ohne Einschränkung sei q schon in $\mathfrak{U}_0$, also gibt es $p \in \varphi_0^{-1}(W)$ mit $\varphi_0(p) = q$. Nach Voraussetzung gibt es g und h, so dass $r \circ \varphi_0 = \frac{g}{h}$ auf einer Umgebung U_p von p. Dann ist dort aber schon

$$r = \frac{G}{H} \cdot \frac{X_0^{D-\deg G}}{X_0^{D-\deg H}},$$

wobei $D := \max\{\deg G, \deg H\}$ und G und H die Homogenisierungen von g bzw. h sind. Damit ist r regulär. □

Definition/Bemerkung 4.3: Sei $W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine quasi-projektive Varietät. Für eine offene Teilmenge $U \subseteq W$ definieren wir

$$\mathcal{O}_W(U) := \{r\colon U \longrightarrow k \mid r \text{ ist regulär}\}.$$

(a) $\mathcal{O}_W(U)$ ist eine k-Algebra.

(b) $U \longmapsto \mathcal{O}_W(U)$ ist eine Garbe von k-Algebren (dabei: $\varnothing \longmapsto \mathcal{O}_W(\varnothing) = \{0\}$).

Ab jetzt: Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Satz 5: *Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(K)$ eine projektive Varietät. Dann gilt:*

(a) V zusammenhängend $\Longrightarrow$ $\mathcal{O}_V(V) = K$.

(b) Es sei $K[V] = K[X_0,\ldots,X_n]/\mathfrak{I}(V)$ der homogene Koordinatenring und $F \in K[V]$ homogen mit $\deg F \geq 1$. Dann gilt:

$$\mathcal{O}(\mathfrak{D}(F)) \cong (K[V]_F)_0 := \{\frac{G}{F^k} \mid G \in K[V] \text{ homogen}, \deg G = k \cdot \deg F\}.$$

Wir nennen das homogene Lokalisierung.

Beweis: (b) Wir definieren eine Abbildung

$$\Psi\colon (K[V]_F)_0 \longrightarrow \mathcal{O}(\mathfrak{D}(f)), \quad \frac{G}{F^k} \longmapsto \left(z \longmapsto \frac{G(z)}{F^k(z)}\right).$$

Ψ ist wohldefiniert und injektiv, denn

$$\frac{G_1(z)}{F^n(z)} = \frac{G_2(z)}{F^m(z)} \; \forall z \in \mathfrak{D}(F) \implies G_1 \cdot F^m = G_2 \cdot F^n \text{ auf } \mathfrak{D}(F).$$

Dann ist aber schon $(G_1 \cdot F^m - G_2 \cdot F^n) \cdot F = 0$ auf ganz V, also $\frac{G_1}{F^n} = \frac{G_2}{F^m}$ in $(K[V]_F)_0$.

Wir zeigen nun: Ψ ist auch surjektiv.

Sei dazu $r \in \mathcal{O}(\mathfrak{D}(F))$. Falls $\mathfrak{U}_i \cap V \neq \varnothing$ ist, nach Bemerkung 4.2, $r \circ \varphi_i$ auf $\mathfrak{D}(F) \cap \mathfrak{U}_i = \mathfrak{D}(f_i)$ regulär, wobei f_i die Dehomogenisierung von F bzgl. X_i ist. Jetzt sind wir im Affinen und nach Kapitel I, Korollar 5.11 (a), gibt es dort ein $g_i \in K[X_0,..., \widehat{X_i},..., X_n]$ und $k_i \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$r \circ \varphi_i = \frac{g_i}{f_i^{k_i}}.$$

Diesen Ausdruck können wir wieder homogenisieren und eventuell mit einer X_i-Potenz multiplizieren und erhalten so

$$r|_{\mathfrak{U}_i} = \frac{G_i}{F_i^{k_i} \cdot X_i^{e_i}}, \text{ mit } G_i \in K[X_0,..., X_n] \text{ und } e_i \in \mathbb{N}_0.$$

Da $\mathfrak{D}(F) = \mathfrak{D}(F^k)$ können wir eventuell zu einer Potenz von F übergehen. Sei also ohne Einschränkung $k_i = 1$. Also ist

$$r = \frac{G_i}{X_i^{e_i} \cdot F} \text{ auf } \mathfrak{D}(F) \cap \mathfrak{U}_i.$$

Insbesondere gilt $\frac{G_i}{X_i^{e_i} F} = \frac{G_j}{X_j^{e_j} F}$ auf $\mathfrak{D}(F) \cap \mathfrak{D}(X_i) \cap \mathfrak{D}(X_j)$ und damit bereits

$$G_i \cdot X_j^{e_j} \cdot F \cdot X_j \cdot X_i = G_j \cdot X_i^{e_i} \cdot F \cdot X_j \cdot X_i \text{ auf ganz } V, \tag{$*$}$$

denn außerhalb von $\mathfrak{D}(X_i) \cap \mathfrak{D}(X_j) \cap \mathfrak{D}(F)$ ist der Ausdruck konstant 0.

Da F homogen mit $\deg F \geq 1$ ist, ist $F \in (X_0,..., X_n)$. Wir finden sogar ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $F^m \in (X_0^{e_0+1},..., X_n^{e_n+1})$, denn es gilt $\deg F^m = m \cdot \deg F$, wir können also

$$F^m = \sum_i a_{\alpha^{(i)}} X_0^{\alpha_0^{(i)}} \cdots X_n^{\alpha_n^{(i)}} \text{ mit } \alpha_0^{(i)} + \cdots + \alpha_n^{(i)} = m \cdot \deg F$$

schreiben und dabei m so groß wählen, dass

$$m \cdot \deg F \geq \sum_{i=0}^{n} (e_i + 1).$$

Es gibt also ein j mit $\alpha_j^{(i)} \geq e_{j+1}$ und damit wird F^m von $X_j^{e_j+1}$ geteilt und liegt, wie behauptet, in dem Ideal.

Damit liegt F^{m+1} in $(F \cdot X_0^{e_0+1},..., F \cdot X_n^{e_n+1})$, also finden wir $h_i \in K[X_0,..., X_n]$, so dass

$$F^{m+1} = \sum_{i=0}^{n} h_i \cdot F \cdot X_i^{e_i+1}$$

gilt. Wir setzen $G := \sum_{i=0}^{n} h_i G_i X_i$ und mit Hilfe von $(*)$ lässt sich

$$X_j \cdot F^{m+1} \cdot G_j = \sum_{i=0}^{n} X_j h_i F X_i^{e_i+1} G_j = \sum_{i=0}^{n} X_i h_i F X_j^{e_j+1} G_i = F \cdot G \cdot X_j^{e_j+1}$$

einsehen. Somit gilt, auf $\mathfrak{D}(F) \cap \mathfrak{U}_j$, gerade

$$\frac{G}{F^{m+1}} = \frac{G_j}{X_j^{e_j} \cdot F} = r|_{\mathfrak{U}_j}.$$

Also ist, nach Bemerkung 4.2, $\Psi\left(\frac{G}{F^{m+1}}\right) = r$, damit ist Ψ surjektiv und die Isomorphie ist gezeigt.

(a) Ohne Einschränkung genügt es die Aussage nur für irreduzible V zu zeigen, denn: Sei

$$V = \bigcup_{i=1}^{r} V_i$$

die Zerlegung in irreduzible Komponenten. Wenn $f \in \mathcal{O}_V$ auf jedem V_i konstant ist, so ist es, da V als zusammenhängend vorausgesetzt war, schon auf ganz V konstant.

Sei also V irreduzibel. Dann ist $\mathfrak{I}(V)$ ein Primideal und $K[V]$ nullteilerfrei und demnach $L := \mathrm{Quot}(K[V])$ ein Körper.

Sei $r \in \mathcal{O}_V(V)$. Definiere

$$f_i := r|_{\mathfrak{U}_i} \in \mathcal{O}_V(\mathfrak{U}_i) = (K[V]_{X_i})_0.$$

Also ist $f_i = \frac{G_i}{X_i^{d_i}}$ mit G_i homogen vom Grad d_i. Wir können nun f_i als Element von L auffassen.

Zeige: f_i ist ganz über $K[V]$, d.h. $f_i^m + a_{m-1} f_i^{m-1} + \cdots + a_0 = 0$ mit $a_j \in K[V]$.

Dann können wir das nämlich mit $X_i^{d_i m}$ multiplizieren und erhalten

$$G_i^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j G_i^j X_i^{d_i(m-j)} = 0.$$

Dabei hat G_i^m Grad $d_i \cdot m$ und auch $G_i^j X_i^{d_i(m-j)}$ Grad $d_i \cdot j + d_i(m-j) = d_i \cdot m$.

Ohne Einschränkung haben also alle a_j Grad 0 und sind damit in K. Damit ist f_i ganz über K und da K algebraisch abgeschlossen ist, liegt es somit schon in K, ist also konstant.

Damit ist auch $r|_{\mathfrak{U}_i}$ konstant für jedes i und somit auch r.

Es bleibt zu zeigen: f_i ist ganz über $K[V]$.

Zunächst sieht man, dass die $\frac{G_i}{X_i^{d_i}}$ alle in L das selbe Element definieren, denn

$$\frac{G_i}{X_i^{d_i}} = \frac{G_j}{X_j^{d_j}} \iff X_j^{d_j} G_i - G_j X_i^{d_i} = 0$$

auf $\mathfrak{D}(X_i) \cap \mathfrak{D}(X_j)$ und das liegt dicht in V, denn V ist irreduzibel. Damit sind die Ausdrücke nach Kapitel I, Bemerkung 5.13 (b), schon auf ganz V gleich.

Wir setzen also $f := f_i$ in L und zeigen, dass f ganz über $K[V]$ ist.

Sei dazu $d := d_0 + \cdots + d_n$, wobei $d_i := \deg G_i$. Wir zeigen noch:

(i) $K[V]_d \cdot f^t \subseteq K[V]_d\ \forall t \in \mathbb{N}$, denn sind $\alpha_i \in \mathbb{N}$ mit $\alpha_0 + \cdots + \alpha_n = d$, so ist

$$X_0^{\alpha_0} \cdots X_n^{\alpha_n} \cdot f \in K[V]_d \cdot f$$

und sogar in $K[V]$, denn $f = \frac{G_i}{X_i^{d_i}}$ und es gibt sicherlich ein i mit $\alpha_i \geq d_i$. Damit sehen wir

$$X_i^{\alpha_i} \cdot f = X_i^{\alpha_i} \cdot \frac{g_i}{X_i^{d_i}} = X_i^{\alpha_i - d_i} \cdot g_i$$

und $X_i^{\alpha_i - d_i} g_i$ hat gerade Grad α_i, insgesamt hat der Ausdruck also wieder Grad d, wir erhalten also

$$K[V]_d \cdot f \subseteq K[V]_d$$

und iterativ $K[V]_d f^t \subseteq K[V]_d$.

(ii) $K[V][f] \subseteq \frac{1}{X_0^d} \cdot K[V]$, denn aus (i) folgt, dass insbesondere $X_0^d f^t \in K[V]$, also für alle $t \in \mathbb{N}$

$$f^t \in \frac{1}{X_0^d} \cdot K[V].$$

(iii) Daraus folgt: f ist ganz über $K[V]$, denn $\frac{1}{X_0^d} K[V]$ ist ein endlich erzeugter $K[V]$-Modul und aus Algebra II wissen wir, dass dann auch $K[V][f]$ als Untermodul endlich erzeugt ist und damit f ganz über $K[V]$ ist. □

5 Morphismen

Definition/Bemerkung 5.1: Seien $W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$, $W' \subseteq \mathbb{P}^m(k)$ quasi-projektive Varietäten.

(a) Eine Abbildung $f\colon W \longrightarrow W'$ heißt *Morphismus*, wenn es zu jedem $z \in W$, eine offene Umgebung $U_z \subseteq W$ von z und Polynome $F_0, \ldots, F_m \in k[X_0, \ldots, X_n]$ vom gleichen Grad gibt, so dass für alle $y \in U_z$ gilt:

$$f(y) = (F_0(y) : \cdots : F_m(y))$$

(b) Betrachte $f\colon \mathbb{P}^n(k) \supseteq W \longrightarrow W' \subseteq \mathbb{P}^m(k)$. Das liefert eine Abbildung

$$\mathbb{A}^n(k) \supseteq f^{-1}(W' \cap \mathfrak{U}_j) \cap \mathfrak{U}_i \longrightarrow W' \cap \mathfrak{U}_j \subseteq \mathbb{A}^m(k).$$

Jetzt gilt: f ist genau dann ein Morphismus, wenn für alle i, j mit

$$U_{ij} := f^{-1}(W' \cap \mathfrak{U}_j) \cap \mathfrak{U}_i \neq \varnothing$$

die Abbildung $f|_{U_{ij}}\colon U_{ij} \longrightarrow W' \cap \mathfrak{U}_j$ ein Morphismus von quasi-affinen Varietäten ist (siehe Definition/Bemerkung 5.14 in Kapitel I).

(c) Morphismen $W \longrightarrow \mathbb{A}^1(k)$ entsprechen bijektiv den regulären Funktionen.

(d) Morphismen sind stetig.

(e) Die quasi-projektiven Varietäten bilden mit den Morphismen eine Kategorie. Diese heißt $\mathcal{V}ar_k$.

Beweis: (b) Sei zunächst f ein Morphismus. Dann kann man f lokal schreiben als (ohne Einschränkung: $i = 0$)

$$\begin{aligned} f(x) &= (F_0(1 : x_1 : \cdots : x_n) : \cdots : F_m(1 : x_1 : \cdots : x_n)) \\ &= (f_0(x) : \cdots : f_m(x)) = \left(\frac{f_0(x)}{f_j(x)},\ldots, \frac{f_{j-1}(x)}{f_j(x)}, \frac{f_{j+1}(x)}{f_j(x)},\ldots, \frac{f_m(x)}{f_j(x)}\right) \end{aligned}$$

wobei f_j die Dehomogenisierung von F_j nach X_0 bezeichnet.

Für die Rückrichtung weiß man, dass, nach Definition/Bemerkung 5.14 (d), f auf U_{ij} gegeben ist durch

$$f(y) = (r_1(y),\ldots, r_m(y))$$

wobei $r_i = \frac{f_i}{g_i}$. Wir setzen $z = (y_1 : \cdots : y_{i-1} : 1 : y_i : \cdots : y_n)$. Damit:

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(1 : \frac{f_1(y)}{g_1(y)} : \cdots : \frac{f_m(y)}{g_m(y)}\right) \\ &= (G_1(z) \cdot \cdots \cdot G_m(z) X_0^{e_0} : F_1(z) X_0^{e_1} : \cdots : F_m(z) X_0^{e_m}) \end{aligned}$$

wobei F_i und G_i die Homogenisierungen von f_i bzw. g_i bzgl. X_0 sind und die e_i so gewählt seien, dass am Ende alle Polynome denselben Grad haben.

(c) Zu zeigen:

$$\{f\colon W \longrightarrow \mathfrak{U}_0 \subseteq \mathbb{P}^1(k) \mid f \text{ ist Morphismus}\} \longleftrightarrow \mathcal{O}(W).$$

Wir identifizieren $\mathfrak{U}_0$ mit k durch die Bijektion $\Psi\colon (x_0 : x_1) \longmapsto \frac{x_1}{x_0} \in k$. Als Zuordnung findet sich dann

$$f \longmapsto r := \Psi \circ f, \quad r \longmapsto f = \Psi^{-1} \circ r$$

Außerdem sehen wir: Ist f ein Morphismus, so gilt lokal: $f(z) = (F(z) : G(z))$. Also gilt lokal:

$$r(z) = \frac{G(z)}{F(z)},$$

also ist r regulär.
Ist umgekehrt r regulär, so gilt lokal: $r(z) = \frac{G(z)}{F(z)}$. Damit haben wir

$$f(z) = \Psi^{-1}(r(z)) = (1, \frac{G(z)}{F(z)}) = (F(z) : G(z))$$

und f ist ein Morphismus.

(d) Zeige: Jeder Morphismus $f \colon W \longrightarrow W'$ ist stetig.
Idee: Führe Stetigkeit zurück auf die affine Situation. Wir wissen, es gilt:

$$\bigcup_{i=0}^{n} \mathfrak{U}_i = \mathbb{P}^n, \ \bigcup_{i=0}^{m} \mathfrak{U}_j = \mathbb{P}^m \text{ und } f \colon \mathbb{P}^n \supseteq W \longrightarrow W' \subseteq \mathbb{P}^m.$$

Betrachte also

$$f_{ij} = f|_{U_{ij}} \colon U_{ij} = f^{-1}(W' \cap \mathfrak{U}_j) \cap \mathfrak{U}_i \longrightarrow W' \cap \mathfrak{U}_j =: W'_j \subseteq \mathfrak{U}_j \cong \mathbb{A}^m$$

Nach (b) sind die f_{ij} Morphismen im affinen Sinn und damit insbesondere stetig (siehe Proposition 2.10 und Kapitel I, Bemerkung 4.4).
Wir zeigen nun, dass U_{ij} offen in W ist: f ist lokal (auf einer offenen Umgebung U_z von z) gegeben durch

$$f(w) = (F_0(w) : \cdots : F_m(w)).$$

Also ist

$$U_{ij} \cap U_z = \{w \in U_z \cap \mathfrak{U}_i \mid f(w) \in \mathfrak{U}_j\} = \{w \in U_z \cap \mathfrak{U}_i \mid F_j(w) \neq 0\}$$

offen. Damit ist aber auch U_{ij} offen.
Insgesamt sehen wir: f ist auf jedem U_{ij} stetig, und deshalb auch insgesamt stetig.

(e) ist klar. □

Korollar 5.2: (a) Für eine Abbildung $f \colon W \longrightarrow W'$ zwischen quasi-projektiven Varietäten gilt:

$$f \text{ ist ein Morphismus} \iff \begin{array}{c} f \text{ ist stetig und für offenes } U \subseteq W', g \in \mathcal{O}(U) \text{ gilt:} \\ g \circ f \in \mathcal{O}(f^{-1}(U)). \end{array}$$

(b) Seien W_1 und W_2 affine Varietäten. Durch die Einbettungen

$$W_1 \subseteq \mathbb{A}^n(k) \hookrightarrow \mathfrak{U}_0 \subseteq \mathbb{P}^n(k)$$
$$W_2 \subseteq \mathbb{A}^m(k) \hookrightarrow \mathfrak{U}_0 \subseteq \mathbb{P}^m(k)$$

können wir sie als quasi-projektive Varietäten auffassen. Dann ist $f\colon W_1 \longrightarrow W_2$ genau dann ein Morphismus im Sinn von Definition/Bemerkung 5.1, wenn f auch ein Morphismus im Sinn von Definition 4.1 aus Kapitel I ist.

Beweis: (a) Die Richtung von links nach rechts folgt aus Definition/Bemerkung 5.1 (d) (Stetigkeit), Definition/Bemerkung 5.1 (c) (reguläre Abbildungen entsprechen Morphismen nach $\mathbb{A}^1$) sowie Definition/Bemerkung 5.1 (e) (Verkettung von Morphismen funktioniert).

Zur Rückrichtung: Nach den Voraussetzungen ist f_{ij} stetig und zieht reguläre Funktionen zu regulären Funktionen zurück. Nach Proposition 5.12 aus Kapitel I ist f_{ij} ein Morphismus und nach Definition/Bemerkung 5.1 (b) ist damit auch f ein Morphismus.

(b) Aus (a) folgt: Ist f ein Morphismus in der projektiven Welt, so ist f stetig und respektiert die Strukturgarbe. Wieder nach Proposition 5.12 aus Kapitel I ist f ein Morphismus im affinen Sinn. □

Beispiel 5.3: (a) Sei k ein unendlicher Körper und der Morphismus f wie folgt gegeben:

$$f\colon \mathbb{P}^2 \setminus \{(0:0:1)\} \longrightarrow \mathbb{P}^1, \quad (x_0 : x_1 : x_2) \longmapsto (x_0 : x_1)$$

Dann lässt sich f in $(0:0:1)$ nicht stetig fortsetzen.

Denn: Wir nehmen an, es gäbe $(r:s) \neq (0:0)$ mit $f(0:0:1) = (r:s)$. Dann müsste für $(\widetilde{r}:\widetilde{s}) \neq (r:s)$ die Menge $f^{-1}(\{(\widetilde{r}:\widetilde{s})\})$ abgeschlossen in $\mathbb{P}^2$ sein.

Aber: $f^{-1}(\{(\widetilde{r}:\widetilde{s})\}) = \{(\lambda\widetilde{r}:\lambda\widetilde{s}:1) \mid \lambda \in k\setminus\{0\}\} \cup \{(\widetilde{r}:\widetilde{s}:0)\}$. Also:

$$f^{-1}(\{(\widetilde{r}:\widetilde{s})\}) \cap \mathfrak{U}_2 \longleftrightarrow \{(\lambda\widetilde{r}, \lambda\widetilde{s}) \mid \lambda \in k\setminus\{0\}\} \subsetneqq \{(\lambda\widetilde{r}, \lambda\widetilde{s}) \mid \lambda \in k\} \cong \mathbb{A}^1$$

Folglich enthält $\{(\lambda\widetilde{r}, \lambda\widetilde{s}) \mid \lambda \in k\setminus\{0\}\}$ unendlich viele Elemente und ist nicht isomorph zum Bild von $\mathbb{A}^1$ und damit nicht abgeschlossen in $\mathbb{A}^2$. Also kann f nicht stetig auf ganz $\mathbb{P}^2$ sein.

(b) Sei $E := \mathfrak{V}(X_0X_2^2 - X_1^3 + X_1X_0^2) \subseteq \mathbb{P}^2(k)$. Also gilt:

$$E \cap \mathfrak{U}_0 = \{(1:x_1:x_2) \in \mathfrak{U}_0 \mid x_2^2 - x_1^3 + x_1 = 0\} \longleftrightarrow \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \mid y^2 = x^3 - x\}$$

Weiter ist $E \setminus (E \cap \mathfrak{U}_0) = \{(0:0:1)\}$. Nun lässt sich

$$f\colon E \cap \mathfrak{U}_0 \longrightarrow \mathbb{P}^1, \quad (x_0 : x_1 : x_2) \longmapsto (x_0 : x_1)$$

auf E in $(0:0:1)$ fortsetzen durch

$$f(x_0 : x_1 : x_2) = \begin{cases} (x_0 : x_1), & \text{falls } (x_0 : x_1 : x_2) \neq (0 : 0 : 1), \\ (x_1^2 : x_2^2 + x_1 x_0), & \text{falls } (x_0 : x_1 : x_2) \neq (1 : 0 : 0). \end{cases}$$

Das ist wohldefiniert, denn für $(x_0 : x_1 : x_2) \notin \{(0 : 0 : 1), (1 : 0 : 0)\}$ gilt:

$$(x_0 : x_1) = (x_0(x_2^2 + x_1 x_0) : x_1(x_2^2 + x_1 x_0)) = (x_1^3 : x_1 x_2^2 + x_0 x_1^2) = (x_1^2 : x_2^2 + x_0 x_1)$$

Dabei wurde benutzt, dass der Punkt auf E liegt und $x_2^2 + x_1 x_0 \neq 0$ sowie $x_1 \neq 0$.

Jetzt erhält man einen Morphismus $E \longrightarrow \mathbb{P}^1$ „vom Grad 2“.

(c) Betrachte

$$f \colon \mathbb{P}^1 \longrightarrow W := \mathfrak{V}(X_0 X_2 - X_1^2) \subseteq \mathbb{P}^2, \quad (x_0 : x_1) \longmapsto (x_0^2 : x_0 x_1 : x_1^2)$$

f ist ein Isomorphismus mit Umkehrabbildung

$$g \colon \mathfrak{V}(X_0 X_2 - X_1^2) \longrightarrow \mathbb{P}^1, \quad (x_0 : x_1 : x_2) \longmapsto \begin{cases} (x_0 : x_1), & x_0 \neq 0, \\ (x_1 : x_2), & x_1 \neq 0, \end{cases}$$

Die Koordinatenringe dazu sind: $K[\mathbb{P}^1] = K[X_0, X_1]$ sowie

$$K[W] = K[\mathfrak{V}(X_0 X_2 - X_1^2)] = K[X_0, X_1, X_2] \big/ (X_0 X_2 - X_1^2) \,.$$

Wir sehen: $K[W]$ ist nicht faktoriell, denn $\overline{X_1}^2 = \overline{X_0 X_2}$.

Insbesondere sind $K[\mathbb{P}^1]$ und $K[W]$ nicht isomorph.

Folglich sind auch die affinen Kegel nicht isomorph, d.h $\mathbb{A}^2$ und

$$\mathfrak{V}(X_0 X_2 - X_1^2) \subseteq \mathbb{A}^3$$

sind nicht isomorph.

(d) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $\det(A) \neq 0$. Dann ist die Abbildung

$$\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1, \quad (x_0 : x_1) \longmapsto (c x_1 + d x_0 : a x_1 + b x_0)$$

ein Automorphismus des $\mathbb{P}^1$.

Definition 5.4: Eine quasi-projektive Varietät $W \subseteq \mathbb{P}^n$ heißt *affin*, wenn W isomorph zu einer affinen Varietät in einem $\mathbb{A}^m \xrightarrow{\sim} \mathfrak{U}_0 \subseteq \mathbb{P}^m$ ist.

Definition/Bemerkung 5.5: Sei K algebraisch abgeschlossen und $W \subseteq \mathbb{P}^n(K)$ eine quasi-projektive Varietät.

(a) Eine *rationale Funktion* auf W ist eine Äquivalenzklasse von Paaren (U, f), wobei U offen und dicht in W ist, $f \in \mathcal{O}(U)$ und

$$(U, f) \sim (U', f') \iff f|_{U \cap U'} = f'|_{U \cap U'}$$

(b) Ist W irreduzibel, so ist

$$K(W) := \mathrm{Rat}(W) := \{f \colon W \dashrightarrow K \mid f \text{ ist rationale Funktion}\}$$

ein Körper. Dieser heißt *Funktionenkörper*.

(c) Ist W irreduzibel, so gilt für jede dichte, offene, affine Teilmenge U von W:

$$K(W) \cong \mathrm{Quot}(\mathcal{O}(U))$$

(d) Ist $W = V$ eine irreduzible projektive Varietät, so gilt:

$$K(V) \cong \mathrm{Quot}^{\text{homogen}}(K[V]) := (K[V]_s)_0$$

mit $S := \{f \in K[V] \mid f \text{ ist homogen}, f \neq 0\}$. $K(V)$ ist der homogene Quotientenkörper, also:

$$(K[V]_s)_0 = \left\{ \frac{f}{g} \in \mathrm{Quot}(K[V]) \mid f, g \text{ homogen}, \deg f = \deg g \right\}$$

Beweis: (c) Sei $U \subseteq W$ wie in der Behauptung gegeben. Betrachte

$$\mathrm{Rat}(W) \longrightarrow \mathrm{Rat}(U), \quad [(\widetilde{U}, f)] \longmapsto [(U \cap \widetilde{U}, f|_{U \cap \widetilde{U}})].$$

Diese Abbildung ist surjektiv, da U dicht in W ist. Außerdem ist sie nach Definiton der Äquivalenzrelation auch injektiv. Jetzt folgt aus Definition/Bemerkung 6.1 in Kapitel I:

$$\mathrm{Rat}(W) \cong \mathrm{Rat}(U) = \mathrm{Quot}(\mathcal{O}(U)).$$

(b) Dass $K(W)$ ein Körper ist, folgt aus (c).

(d) Die Abbildung

$$\mathrm{Quot}^{\text{homogen}}(K[V]) \longrightarrow \mathrm{Rat}(V), \quad \frac{f}{g} \longmapsto \left[\mathfrak{D}(g), x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)}\right]$$

ist ein Isomorphismus. □

Definition/Bemerkung 5.6: Seien W_1, W_2 quasi-projektive Varietäten.

(a) Eine *rationale Abbildung* $f \colon W_1 \dashrightarrow W_2$ ist eine Äquivalenzklasse von Paaren (U, f_U), wobei $U \subseteq W_1$ offen und dicht, $f_U \colon U \longrightarrow W_2$ ein Morphismus ist und

$$(U, f_U) \sim (\widetilde{U}, f_{\widetilde{U}}) \iff f_U|_{U \cap \widetilde{U}} = f_{\widetilde{U}}|_{U \cap \widetilde{U}}$$

(b) f heißt *dominant*, wenn das Bild in W_2 für einen Repräsentanten (U, f_U) (und damit für alle) dicht ist.

(c) Die Zuordnung $W \longmapsto K(W) = \mathrm{Rat}(W)$ definiert eine kontravariante Äquivalenz von Kategorien.

$$\left\{\begin{matrix}\text{irreduzible quasi-projektive}\\ \text{Varietäten mit dominanten}\\ \text{rationalen Abbildungen}\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{endlich erzeugte}\\ \text{Körpererweiterungen } L/K\\ \text{mit } K\text{-Algebrenhomomorphismen}\end{matrix}\right\}$$

Beweis: (c) folgt aus dem Affinen (vgl. Satz 4) beziehungsweise Definition/Bemerkung 5.5.

Denn: Für ein $r\colon W_1 \dashrightarrow W_2$ erhalten wir durch die Wahl eines Repräsentanten, affines $U_2 \subseteq W_2$ und affines $U_1 \subseteq r^{-1}(U_2) \subseteq W_1$ und durch Einschränken von r eine Abbildung $U_1 \longrightarrow U_2$.

Jeder Körper wird bis auf Isomorphie getroffen, denn: Aus der affinen Situation (vgl. Satz 4) wissen wir, dass es für jede endliche Körpererweiterung L/K eine affine Varietät U mit $K(U) \cong L$ gibt.

Fasse nun U als quasi-projektive Varietät auf. Der Funktor aus Satz 4 induziert ein Isomorphismus auf den Morphismenmengen.

$$\Phi(r\colon W_1 \dashrightarrow W_2) = \begin{cases} K(W_2) \longrightarrow K(W_1) \\ g \longmapsto g \circ r \end{cases}$$

Nach der Überlegung zu Beginn des Beweises entsprechen die rationalen Abbildungen zwischen W_1 und W_2 bijektiv den rationalen Abbildungen zwischen den entsprechenden affinen Varietäten und diese entsprechen nach Satz 4 den Morphismen zwischen $K(U_2)$ und $K(U_1)$. Nach Definition/Bemerkung 5.5 ist $K(U_2)$ isomorph zu $K(W_2)$ und genauso ist $K(U_1) \cong K(W_1)$. □

6 Graßmann-Varietäten

Sei $G(d, n) := \{U \subseteq K^n \mid U \text{ ist Untervektorraum vom } K^n \text{ von Dimension } d\}$.

Beispiel:
- $d = 1$: $G(1, n)$ entspricht dem $\mathbb{P}^{n-1}(k)$.
- $d = n$: $G(n, n)$ ist einelementig.

Ziel: *Wir wollen versuchen, $G(d, n)$ mit der Struktur einer projektiven Varietät zu versehen. Dafür brauchen wir eine „natürliche“ Einbettung in einen $\mathbb{P}^D(k)$.*

Definition/Bemerkung 6.1: Sei $1 \leq d \leq n$, $V = K^n$, $\bigwedge^d V$ die *d-te äußere Potenz* und

$$\mathbb{P}(V) := V \setminus \{0\} \big/ \sim, \text{ wobei } w_1 \sim w_2 \ :\Longleftrightarrow\ \exists \lambda \in K^\times \text{ mit } w_2 = \lambda w_1.$$

Dann ist die Abbildung

$$\Psi\colon G(d, n) \longrightarrow \mathbb{P}(\textstyle\bigwedge^d V), \quad U = \langle u_1, \dots, u_d \rangle \longmapsto [u_1 \wedge \dots \wedge u_d]$$

wohldefiniert und injektiv.

ERINNERUNG: • $\bigwedge^d V$ hat die Basis $\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_d} \mid 1 \le i_1 < \cdots < i_d \le n\}$. Insbesondere ist $\dim \bigwedge^d V = \binom{n}{d}$.

• $\wedge$ ist multilinear und alternierend, insbesondere gilt $v_1 \wedge \cdots \wedge v_d = 0$, wenn $v_i = v_j$ für $i \neq j$. Genauer:

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_d = 0 \iff v_1,\ldots,v_d \text{ sind linear abhängig.}$$

Beweis von Definition/Bemerkung 6.1: Sei $v_1, \cdots, v_d$ eine Basis von U. Sei $\widetilde{v}_1, \cdots, \widetilde{v}_d$ eine andere Basis von U. Dann gibt es

$$\widetilde{v}_i = \sum_{j=1}^{d} a_{ij} v_j$$

mit $A := (a_{ij}) \in \mathrm{GL}_d(K)$. Damit gilt aber

$$\begin{aligned}\widetilde{v}_1 \wedge \cdots \wedge \widetilde{v}_d &= \sum_{j=1}^{d} a_{1j} v_j \wedge \cdots \wedge \sum_{j=1}^{d} a_{dj} v_j = \sum_{\sigma \in S_d} a_{1\sigma(1)} v_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge a_{d\sigma(d)} v_{\sigma(d)} \\ &= \left(\sum_{\sigma \in S_d} (-1)^\sigma \cdot \prod_{j=1}^{d} a_{j\sigma(j)} \right) \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge v_d = \det A \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge v_d\end{aligned}$$

(wobei $(-1)^\sigma$ das Signum von σ bedeutet), und da $\det A \neq 0$ ist, sind die beiden Punkte äquivalent, die Abbildung ist also wohldefiniert.

Für die Injektivität überlegen wir uns, dass $U = \{v \in V \mid v \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_d = 0\}$ ist, wobei $v_1,\ldots,v_d$ eine Basis von U ist. Das ist so, denn es gilt:

$$\begin{aligned} v \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_d = 0 &\iff v, v_1,\ldots,v_d \text{ sind linear abhängig} \\ &\iff v \in \langle v_1,\ldots,v_d \rangle = U, \end{aligned}$$

da $v_1,\ldots,v_d$ als Basis linear unabhängig sind. □

DEFINITION/BEMERKUNG 6.2: Sei $[w] \in \mathbb{P}(\bigwedge^d(V))$. Dann gilt

$$[w] \in \operatorname{Bild} \Psi \iff \exists\, v_1,\ldots,v_d \in V \text{ linear unabhängig mit } w = v_1 \wedge \cdots \wedge v_d.$$

In diesem Fall heißt w *total zerlegbar*. Insbesondere gilt, wenn $w \wedge v_i = 0$ für alle $i \in \{1,\ldots,d\}$, für die lineare Abbildung

$$V \longrightarrow \bigwedge^{d+1} V, \quad \varphi_w \colon v \longmapsto w \wedge v,$$

dass $\dim(\operatorname{Kern} \varphi_w) \ge d$.

LEMMA 6.3: Sei $d \ge 2$ und $w \in \bigwedge^d V$. Dann gilt:

(a) $v \in \operatorname{Kern} \varphi_w \iff \exists\, w' \in \bigwedge^{d-1} V$ mit $w = v \wedge w'$,

(b) Seien $v_1,\dots,v_k \in V$ linear unabhängig. Dann gilt:

$$v_1,\dots,v_k \in \operatorname{Kern}\varphi_w \iff \exists\, w' \in \bigwedge^{d-k} V \text{ mit } w = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \wedge w'.$$

(c) $\dim(\operatorname{Kern}\varphi_w) \leq d$,

(d) $\dim(\operatorname{Kern}\varphi_w) = d \iff w$ ist total zerlegbar.

Beweis: Die Aussagen (a), (c) und (d) folgen sofort aus (b). Es genügt also das zu zeigen. Die eine Implikation ist nach Definition von φ_w sofort klar.

Seien also $v_1,\dots,v_k \in \operatorname{Kern}\varphi_w$. Diese ergänzen wir zu einer Basis $\{e_1,\dots,e_n\}$ von V mit

$$e_1 = v_1,\dots,e_k = v_k.$$

Für w finden wir also

$$w = \sum_{\substack{1\leq i_1<\cdots<i_d\leq n\\ \bar\imath=(i_1,\dots,i_d)}} \lambda_{\bar\imath} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_d}.$$

Für $j \in \{1,\dots,k\}$ gilt dann $e_j \in \operatorname{Kern}\varphi_w$, also:

$$0 = w \wedge e_j = \sum_{\bar\imath} \lambda_{\bar\imath} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_d} \wedge e_j = \sum_{\substack{\bar\imath\\ j\notin\{i_1,\dots,i_d\}}} \lambda_{\bar\imath} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_d} \wedge e_j$$

und das ist eine Linearkombination von linear unabhängigen Vektoren. Also ist $\lambda_{\bar\imath} = 0$ für die $\bar\imath = (i_1,\dots,i_d)$, für die es ein solches j gibt, also wenn $\{1,\dots,k\} \setminus \{i_1,\dots,i_d\} \neq \varnothing$ gilt. Damit $\lambda_{\bar\imath} \neq 0$ gelten kann, muss also $\{1,\dots,k\} \subseteq \{i_1,\dots,i_d\}$ gelten, also sind nur solche Summanden in unserer Darstellung von w relevant. Damit haben wir

$$w = \sum_{\bar\imath} \lambda_{\bar\imath} e_1 \wedge \cdots \wedge e_k \wedge e_{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge e_{i_d} = (e_1 \wedge \cdots \wedge e_k) \wedge \left(\sum_{\bar\imath} \lambda_{\bar\imath} e_{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge e_{i_d}\right)$$

und $\left(\sum_{\bar\imath} \lambda_{\bar\imath} e_{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge e_{i_d}\right)$ liegt in $\bigwedge^{d-k} V$, ist also eine geeignete Wahl für w'.□

Proposition 6.4: Das Bild von Ψ ist in $\mathbb{P}(\bigwedge^d V)$ abgeschlossen, d.h. $\operatorname{Bild}\Psi$ ist eine projektive Varietät.

Beweis: Wir wählen eine Basis $\mathcal{B} := \{e_1,\dots,e_n\}$ von V. Dann finden wir

$$\mathcal{S}_d := \{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_d} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq n\}$$

als zugehörige Basis von $\bigwedge^d V$. Sei wieder, für $w \in \bigwedge^d V$,

$$\varphi_w \colon V \longrightarrow \bigwedge^{d+1} V, \quad v \longmapsto w \wedge v,$$

und $\mathcal{L}_w := (l_{ij}(w))_{i,j}$ die Abbildungsmatrix von φ_w bzgl. $\mathcal{B}$ und $\mathcal{S}_{d+1}$. Außerdem sind die l_{ij} linear in w.

Aus Definition/Bemerkung 6.2 und Lemma 6.3 folgt, dass

$$w \in \operatorname{Bild} \Psi \iff \dim(\operatorname{Kern} \varphi_w) \geq d \iff \operatorname{Rang} \varphi_w \leq n-d \iff \det(l_{ij}(w))_{I,J} = 0,$$

für alle $|I| = |J| = n - d + 1$, also alle $n - d + 1$-Minoren der Matrix 0 sind (d.h. wenn beliebige $n - d + 1$ Zeilen bzw. Spalten linear abhängig sind).
Diese sind homogene Polynome in den Koordinaten von w (bzgl. $\mathcal{S}_d$) von Grad $n - d + 1$. Bild Ψ ist Nullstelle von diesen und damit projektive Varietät. $\square$

iii Geometrische Eigenschaften

In diesem Kapitel sei stets K ein algebraisch abgeschlossener Körper.

1 Lokale Ringe zu Punkten

Gegeben die Strukturgarbe zu einer Varietät wollen wir „Funktionskeime“ in einem Punkt betrachten.

DEFINITION 1.1: Sei W eine quasi-projektive Varietät und $p \in W$.

(a) Es sei
$$\mathcal{O}_{W,p} = \{(U, f) \mid p \in U \subseteq W \text{ offen}, f \in \mathcal{O}_W(U)\} \big/ \sim ,$$
wobei $(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2)$ bedeuten soll, dass es eine offene Menge $U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$ mit $p \in U_3$ gibt, sodass $f_1|_{U_3} = f_2|_{U_3}$ gilt. Das ist eine K-Algebra und heißt *lokaler Ring von W in p*.

(b) Die Elemente in $\mathcal{O}_{W,p}$ heißen *Funktionskeime*.
Für die Äquivalenzklasse eines (U, f) schreiben wir auch f_p.

BEISPIEL 1.2: Sei $W = \mathbb{A}^1(K)$ und $x = 0$. Wir wissen, dass die nichtleeren offenen Teilmengen von $\mathbb{A}^1(K)$ alle von der Form $\mathbb{A}^1(K) \setminus \{x_1,..., x_n\}$ sind und reguläre Funktionen auf einer solchen Menge sind Quotienten von Polynomen $\frac{f}{g}$ mit $g(x) \neq 0$ für $x \neq x_i$, $i = 1,..., n$. Also ist $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1(K),0} \cong K[X]_{(X)}$.

BEMERKUNG 1.3: (a) Die Abbildung
$$\varphi_p \colon \mathcal{O}_{W,p} \longrightarrow K, \quad f_p = [(U, f)] \longmapsto f_p(p) := f(p),$$
ist ein wohldefinierter K-Algebrenhomomorphismus und heißt *Auswertung*.

(b) $\mathcal{O}_{W,p}$ ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal
$$\mathfrak{m}_p = \{[(U, f)] \in \mathcal{O}_{W,p} \mid f(p) = 0\}.$$

Beweis: (a) Die Wohldefiniertheit folgt direkt aus der Definition der Äquivalenzrelation.

(b) Die Abbildung φ_p ist surjektiv, denn die konstanten Abbildungen definieren Elemente in $\mathcal{O}_{W,p}$, und Kern $\varphi_p = \mathfrak{m}_p$. Damit gilt $\mathcal{O}_{W,p}/\mathfrak{m}_p \cong K$, also ist $\mathfrak{m}_p$ ein maximales Ideal. Es bleibt noch zu zeigen, dass es kein weiteres maximales Ideal gibt. Sei dazu $I \subseteq \mathcal{O}_{W,p}$ ein Ideal mit $I \not\subseteq \mathfrak{m}_p$. Dann gibt es ein $[(U, f)] \in I$ mit $[(U, f)] \notin \mathfrak{m}_p$, also $f(p) \neq 0$. Wir definieren $\widetilde{U} = \mathfrak{D}(f) \ni p$ und $g = \frac{1}{f} \in \mathcal{O}_W(\widetilde{U})$. Dann gilt $[(U, f)] \cdot [(\widetilde{U}, g)] = [(\widetilde{U}, 1)] = 1$, also ist $[(U, f)] \in I$ invertierbar und damit $I = \mathcal{O}_{W,p}$. □

Bemerkung 1.4: Die Abbildung

$$\psi_p\colon \mathcal{O}_W(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{W,p}, \quad f \longmapsto [(U,f)] = f_p,$$

heißt *kanonische Keim-Abbildung.*

Sei $W = W_1 \cup \cdots \cup W_k$ die Zerlegung von W in irreduzible Komponenten. Wir wissen: ist $U \subseteq W$ offen und $p \in U$, so ist $U \cap W_i$ dicht in W_i, falls $p \in W_i$.

Falls $U \cap W_j = \varnothing$ für alle W_j mit $p \notin W_j$, dann ist $\psi_p\colon \mathcal{O}_W(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{W,p}$ injektiv. Denn wenn $\psi_p(f) = 0$ ist, gibt es ein offenes $\widetilde{U} \subseteq U$ mit $f|_{\widetilde{U}} = 0$. Da $\widetilde{U}$ dicht in U ist, gilt $f|_U = 0$, denn „$= 0$“ ist eine abgeschlossene Bedingung.

Proposition 1.5: Ist V eine affine Varietät, so gilt

$$\mathcal{O}_{V,p} \cong K[V]_{\mathfrak{m}_p^V}.$$

Hierbei ist $\mathfrak{m}_p^V = \{f \in K[V] \mid f(p) = 0\}$.

Beweis: Wir definieren

$$\varphi\colon K[V]_{\mathfrak{m}_p^V} \longrightarrow \mathcal{O}_{V,p}, \quad \frac{f}{g} \longmapsto \left[\left(\mathfrak{D}(g), x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)}\right)\right].$$

φ ist wohldefiniert: φ wird induziert von

$$\psi_p\colon \mathcal{O}_V(V) = K[V] \longrightarrow \mathcal{O}_{V,p}, \quad f \longmapsto [(V, x \longmapsto f(x))],$$

denn für $g \notin \mathfrak{m}_p^V$ gilt $g(p) \neq 0$, also ist $\psi_p(g)$ eine Einheit in $\mathcal{O}_{V,p}$.

φ ist injektiv: Sei $\varphi(\frac{f}{g}) = 0$, dann gibt es ein $U \subseteq \mathfrak{D}(g)$ mit $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ für alle $x \in U$. Für $h \in K[V]$ mit $p \in \mathfrak{D}(h) \subseteq U$ gilt dann $h(p) \neq 0$, also $h \in \mathfrak{m}_p^V$. Also gilt $h(x)f(x) = 0$ für alle $x \in V$, also $f = 0$ in $K[V]_{\mathfrak{m}_p^V}$.

φ ist surjektiv: Sei $[(U,f)] \in \mathcal{O}_{V,p}$. Ohne Einschränkung ist

$$U = \mathfrak{D}(h) \text{ für ein } h \in K[V].$$

Es gilt dann $f \in \mathcal{O}_V(U) = \mathcal{O}_V(\mathfrak{D}(h)) = K[V]_h$, also ist $f = \frac{g}{h^k}$ für ein $g \in K[V]$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Damit ist $[(U,f)] = \varphi(\frac{g}{h^k})$. □

Korollar 1.6: Sei W eine quasi-projektive Varietät und $x \in W$. Sei weiter $V_0 \subseteq W$ offen und affin mit $p \in V_0$. Dann gilt

$$\mathcal{O}_{W,p} \cong \mathcal{O}_{V_0,p} \cong K[V_0]_{\mathfrak{m}_p^V}.$$

Proposition 1.7: Seien W_1, W_2 quasi-projektive Varietäten. Seien weiter $p \in W_1$, $q \in W_2$ und $\mathcal{O}_{W_1,p} \cong \mathcal{O}_{W_2,q}$. Dann gibt es offene Umgebungen U_1 und U_2 von p bzw. q mit $U_1 \cong U_2$, d.h. „der lokale Ring kennt die Umgebung eines Punktes“.

Beweis: Sei $\varphi\colon \mathcal{O}_{W_1,p} \longrightarrow \mathcal{O}_{W_2,p}$ ein Isomorphismus.

(1) Wir wählen U_1 offen und affin in W_1 mit $p \in U_1$ und so, dass U_1 nur die irreduziblen Komponenten von W_1 schneidet, die p enthalten. Entsprechend wählen wir ein $\widetilde{U_2}$ für q. Wir haben dann

$$\mathcal{O}(U_1) \xhookrightarrow{\psi_p} \mathcal{O}_{W_1,p} \xrightarrow[\sim]{\varphi} \mathcal{O}_{W_2,q} \xhookleftarrow{\psi_q} \mathcal{O}(\widetilde{U_2}).$$

Wir hätten gerne, dass $\varphi \circ \psi_p(\mathcal{O}(U_1)) \subseteq \psi_q(\mathcal{O}(\widetilde{U_2}))$ gilt (sogar „=“).

(2) Da U_1 affin ist, gilt $\mathcal{O}(U_1) = K[U_1]$. Seien $f_1,\dots,f_k$ Erzeuger von $K[U_1]$. Wir betrachten $\varphi((f_1)_p),\dots,\varphi((f_k)_p)$ in $\mathcal{O}_{W_2,q} \cong K[\widetilde{U_2}]_{\mathfrak{m}_q^{\widetilde{U_2}}}$: es ist

$$\varphi((f_i)_p) = \frac{g_i}{h_i} \text{ mit } g_i, h_i \in K[U_2] \text{ und } h_i \notin \mathfrak{m}_q^{\widetilde{U_2}}.$$

Wir wählen nun eine offene und affine Teilmenge $U_2 \subseteq \widetilde{U_2} \cap \mathfrak{D}(h_1) \cap \ldots \cap \mathfrak{D}(h_n)$ mit $q \in U_2$. Es gilt dann $\frac{g_i}{h_i} \in \mathcal{O}(U_2)$ und $\psi_q\Big(\frac{g_i}{h_i}\Big) = \varphi(\psi_p(f_i))$. Wir haben dann

$$\mathcal{O}(U_1) \xhookrightarrow{\psi_p} \mathcal{O}_{W_1,p} \xrightarrow[\sim]{\varphi} \mathcal{O}(U_2) \subseteq \mathcal{O}_{W_2,p}.$$

Insbesondere definiert ein injektiver Homomorphismus

$$K[U_1] \cong \mathcal{O}(U_1) \longhookrightarrow \mathcal{O}(U_2) \cong K[U_2]$$

einen surjektiven Morphismus $U_2 \twoheadrightarrow U_1$ von affinen Varietäten.

(3) Wir haben jetzt $p \in U_1 \subseteq W_1$, $q \in U_2 \subseteq W_2$ und ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} K[U_1] \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[d, hook, "\psi_p"] & K[U_2] \arrow[d, hook, "\psi_q"] \\ \mathcal{O}_{W_1,p} \arrow[r, "\sim", "\varphi"'] & \mathcal{O}_{W_2,q}, \end{tikzcd}$$

sodass $\varphi \circ \psi_p(K[U_1]) \subseteq K[U_2]$. Dadurch erhalten wir einen Morphismus

$$f\colon U_2 \longrightarrow U_1 \text{ mit } f(q) = p,$$

$f^\sharp = \varphi\colon K[U_1] \longrightarrow K[U_2]$ und $f_p^\sharp = \varphi\colon \mathcal{O}_{W_1,p} \longrightarrow \mathcal{O}_{W_2,p}$. Analog erhalten wir einen Morphismus $g\colon \widetilde{U_1} \longrightarrow \widetilde{U_2}$ (es ist ohne Einschränkung $\widetilde{U_1} \subseteq U_1$, $\widetilde{U_2} \subseteq U_2$) mit $g(p) = q$, $g^\sharp = \varphi^{-1}\colon K[\widetilde{U_2}] \longrightarrow K[\widetilde{U_1}]$ und $g_p^\sharp = \varphi^{-1}\colon \mathcal{O}_{W_2,q} \longrightarrow \mathcal{O}_{W_1,p}$.

Wir setzen jetzt $\widehat{U_1} = \widetilde{U_1}$ und $\widehat{U_2} = f^{-1}(\widetilde{U_1}) \subseteq U_2$. Wir haben dann Abbildungen

$$f \circ g\colon \widehat{U_1} \longrightarrow U_1, \qquad g \circ f\colon \widehat{U_2} \longrightarrow \widetilde{U_2}.$$

Auf den lokalen Ringen induziert $g \circ f$ die Identität, also ist $g \circ f$ die Einbettung $\widehat{U_2} \hookrightarrow U_2$. Analog ist $f \circ g$ die Einbettung $\widehat{U_1} \hookrightarrow \widehat{U_1}$. Daraus folgt

$$f \circ g(\widehat{U_1}) \subseteq \widehat{U_1}, \text{ also } g(\widehat{U_1}) \subseteq f^{-1}(\widehat{U_1}) = \widehat{U_2},$$

und analog $f(\widehat{U_2}) \subseteq \widehat{U_1}$. Hier gilt dann $f \circ g = \mathrm{id}_{\widehat{U_1}}$ und $g \circ f = \mathrm{id}_{\widehat{U_2}}$. Also sind f und g Isomorphismen. □

Bemerkung 1.8: (a) Morphismen von Varietäten induzieren Homomorphismen zwischen den lokalen Ringen: Sei $\varphi\colon W_1 \longrightarrow W_2$ ein Morphismus von quasiprojektiven Varietäten und $x \in W_1$. Dann ist

$$\varphi_x^\sharp\colon \mathcal{O}_{W_2,\varphi(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{W_1,x}, \quad [(U,f)] \longmapsto [(\varphi^{-1}(U), f \circ \varphi)],$$

ein wohldefinierter K-Algebrenhomomorphismus mit $\varphi_x^\sharp(\mathfrak{m}_{\varphi(x)}) \subseteq \mathfrak{m}_x$.

(b) Es gilt $\mathrm{id}_x^\sharp = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_{V,x}}$ und $(\varphi_2 \circ \varphi_1)_x^\sharp = {\varphi_1}_x^\sharp \circ {\varphi_2}_x^\sharp$. Wir erhalten also einen Funktor von der Kategorie der punktierten quasi-projektiven Varietäten in die Kategorie der lokalen Ringe.

2 Dimension von Varietäten

Wünsche:

- $\dim \mathbb{A}^n = n$
- $\dim \mathfrak{V}(XZ, YZ) = 2$ im $\mathbb{A}^3$ („Ebene“)
- $\dim \mathfrak{V}(X^2 + Y^2 - Z^2) = 2$ im $\mathbb{A}^3$
- $\dim \mathfrak{V}(X^2 + Y^2 - 1) = 1$ im $\mathbb{A}^2$ („Kreis“)

Definition 2.1: Sei X ein topologischer Raum. Dann heißt

$$\dim(X) := \sup\{d \in \mathbb{N}_0 \mid \exists \text{ Kette } \varnothing \neq X_0 \subsetneq \cdots \subsetneq X_d \text{ mit } X_i \text{ abg. und irred. in } X\}$$

die *Krulldimension* von X.

Für Mannigfaltigkeiten stimmen Krulldimension und Dimension nicht überein, da in Hausdorffräumen Punkte die einzigen irreduziblen, nichtleeren Teilmengen sind (vgl. Beispiel 2.7 in Kapitel I).
Insbesondere ist die Krulldimension von $\mathbb{C}^n$ mit euklidischer Topologie 0.

Ab jetzt: Mit Dimension ist stets die Krulldimension gemeint!

Bemerkung 2.2: (a) Ist X ein topologischer Raum, $Y \subseteq X$ mit Spurtopologie versehen, so ist $\dim(Y) \leq \dim(X)$.

(b) Ist $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ mit X_i abgeschlossene Teilmengen von X, so gilt:

$$\dim(X) = \sup_i \dim(X_i).$$

Beweis: (a) Sei $\varnothing \neq y_0 \subsetneq \cdots \subsetneq y_k$ eine Kette von abgeschlossenen, irreduziblen Teilmengen in Y.

Dann ist auch $\varnothing \neq \overline{y_0} \subsetneq \cdots \subsetneq \overline{y_n}$ Kette von abgeschlossenen, irreduziblen Teilmengen in X. Denn:

- $\overline{y_i}$ ist irreduzibel nach Übungsblatt 2,
- $y_i = \overline{y_i} \cap Y$, da y_i in Y abgeschlossen ist. Also $\overline{y_i} \neq \overline{y_{i+1}}$.

Damit ist $\dim Y \leq \dim X$.

(b) Nach (a) gilt „$\geq$“.

Wähle Kette $\varnothing \neq A_0 \subsetneq \cdots \subsetneq A_k$ in X von irreduziblen, abgeschlossenen Teilmengen.

$A_k = \bigcup_{i=1}^{n} (A_k \cap X_i)$ und die Irreduzibilität von A_k impliziert nun $A_k = A_k \cap X_i$ für ein i, d.h. $A_k \subseteq X_i$.

Nach (a) folgt nun $k \leq \dim A_k \leq \dim X_i$ und damit die Behauptung. □

Erinnerung 2.3: Sei R ein kommutativer Ring mit 1.

(a) Für ein Primideal $\wp \subseteq R$ definiert man die *Höhe von* $\wp$ durch

$$\operatorname{ht} \wp = \sup\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \exists \wp_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \wp_n := \wp \text{ Kette von Primidealen}\}.$$

(b) Man definiert die *Krulldimension von* R durch

$$\dim R = \sup\{\operatorname{ht} \wp \mid \wp \subseteq R \text{ ist Primideal}\}.$$

Proposition 2.4: Sei V eine affine Varietät. Dann ist $\dim V = \dim K[V]$.

Beweis: Erinnerung an Erinnerung/Bemerkung 7.1 aus Kapitel I:

$$\{\text{nichtleere irreduzible Untervarietäten von } V\} \longleftrightarrow \{\text{Primideale in } K[V]\}$$

durch $W \longmapsto \mathfrak{I}(W)$ bzw. $\wp \longmapsto \mathfrak{V}(\wp)$. Diese Zuordnungen sind inklusionsumkehrend, also entsprechen aufsteigende Primidealketten absteigenden Ketten von irreduziblen Varietäten. □

Erinnerung 2.5 (aus Algebra II): Sei K ein Körper, A eine endlich erzeugte nullteilerfreie K-Algebra. Dann gilt:

- $\dim K[X_1,\dots,X_n] = n$
- Ist $\varphi\colon K[X_1,\dots,X_n] \twoheadrightarrow A$ surjektiver K-Algebrenhomomorphismus, so gilt:

$$\dim A + \operatorname{ht}(\operatorname{Kern}(\varphi)) = n.$$

- Alle maximalen Primidealketten in A haben dieselbe Länge. Diese ist $\dim A$. Insbesondere: Alle maximalen Primideale haben die Höhe $\dim(A)$.
- Allgemein gilt: Ist R lokaler Ring mit maximalen Ideal $\mathfrak{m}$, so ist $\operatorname{ht}\mathfrak{m} = \dim R$. Für einen beliebigen Ring R gilt: $\operatorname{ht}\mathfrak{m} = \dim R_{\mathfrak{m}}$.

Korollar 2.6: (a) $\dim \mathbb{A}^n = n$

(b) Ist V irreduzible affine Varietät im $\mathbb{A}^n$, so gilt

$$\dim V + \operatorname{ht}\mathfrak{I}(V) = n.$$

(c) Für $x \in V$ ist

$$\dim \mathcal{O}_{V,x} = \dim K[V]_{\mathfrak{m}_x^V} = \operatorname{ht}\mathfrak{m}_x^V = \dim K[V] = \dim V.$$

Proposition 2.7: Sei W eine quasi-projektive Varietät, $x \in W$, V_0 eine affine, offene Umgebung von x. Dann nennen wir

$$\dim \mathcal{O}_{W,x} =: \dim_x W$$

lokale Dimension von x in W. Es gilt:

(a) $\dim \mathcal{O}_{W,x} = \dim \mathcal{O}_{V_0,x} = \operatorname{ht}\mathfrak{m}_x^{V_0}$

(b) Ist W irreduzibel, so gilt für alle $x, y \in W$: $\dim_x W = \dim_y W = \dim W$.
Außerdem: Ist $\varnothing \neq U$ offen und affin in W, so ist $\dim U = \dim W$.

(c) $\dim_x W = \dim \mathcal{O}_{W,x} = \max\{\dim Z \mid Z$ irreduzible Komponente von W, $x \in Z\}$.

Beweis: (a) folgt mit Erinnerung 2.5 direkt aus $\mathcal{O}_{W,x} \cong \mathcal{O}_{V_0,x} \cong K[V_0]_{\mathfrak{m}_x^{V_0}}$.

(b) Wir zeigen zunächst: $\dim_x W = \dim_y W \; \forall x, y \in W$.
Seien U_1, U_2 offene, affine Umgebungen von x bzw. y. Da W irreduzibel ist, ist $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$.
Sei $z \in U_1 \cap U_2$. Dann folgt mit Korollar 2.6:

$$\begin{aligned}\dim_x W &= \dim \mathcal{O}_{W,x} = \dim \mathcal{O}_{U_1,x} = \dim \mathcal{O}_{U_1,z} \\ &= \dim \mathcal{O}_{U_2,z} = \dim \mathcal{O}_{U_2,y} = \dim \mathcal{O}_{W,y} = \dim_y W\end{aligned}$$

Nun zeigen wir: $\dim W = d := \dim \mathcal{O}_{W,x} = \dim U$ für ein beliebiges, offenes, affines $U \neq \varnothing$ in W.
Wir sehen: $\dim W \geq d = \dim U$, da $U \subseteq W$.
Angenommen, es gäbe eine Kette $\{x\} = W_0 \subsetneq W_1 \subsetneq ... \subsetneq W_k$ von irreduziblen, abgeschlossenen Teilmengen mit $k > d$. Dann wählen wir U offen und affin mit $x \in U$ und sehen, dass

$$U \cap W_0 = \{x\} \subsetneq U \cap W_1 \subsetneq \cdots \subsetneq U \cap W_k \subseteq U$$

eine Kette von abgeschlossen, irreduziblen Teilmengen von U ist, denn $\overline{W_i \cap U} = W_i$, da W_i irreduzibel ist. Damit wäre $d = \dim U \geq k > d$, was einen Widerspruch ergibt.

(c) Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass W affin ist. Dann folgt mit Erinnerung 2.5:

$$\dim \mathcal{O}_{W,x} = \dim K[W]_{\mathfrak{m}_x^W} = \operatorname{ht} \mathfrak{m}_x^W = \sup\{k \mid 0 \neq \wp_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \wp_k = \mathfrak{m}_x^W\}$$

Ohne Einschränkung sei $\wp_0$ minimales Primideal und die Kette maximal. Also entspricht $\wp_0$ einer irreduziblen Kompenente Z mit $x \in Z$. Wieder mit Erinnerung 2.5 ist $\dim Z = k$. □

DEFINITION 2.8: (a) Eine quasi-projektive Varietät von Dimension 1 heißt *Kurve*.

(b) Eine quasi-projektive Varietät von Dimension 2 heißt *Fläche*.

BEISPIEL 2.9: (a) Nach Proposition 2.7 ist $\dim \mathbb{P}^n = n$.

(b) Betrachte eine Hyperfläche $\mathfrak{V}(f) \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ mit $f \in K[X_1,\dots,X_n]$, $\deg f \geq 1$.

$$\text{Dann gilt: } \dim \mathfrak{V}(f) = n - 1.$$

Denn: Nach Bemerkung 2.2 kann man f ohne Einschränkung als irreduzibel voraussetzen. Damit ist $\dim \mathfrak{V}(f) = \dim K[V] = n - \operatorname{ht}(f)$.

Angenommen, es gäbe ein Primideal $\wp$ mit $0 \subsetneq \wp \subsetneq (f)$. Wähle nun $h \in \wp$ mit minimalem Grad. Da f irreduzibel ist, folgt $h \in (f)$.

Folglich: $h = h'f$ und $h \neq f$, also $h' \in \wp$. Aber der Grad von h' ist kleiner als der von h—ein Widerspruch!

Insgesamt: $\operatorname{ht}(f) = 1$ und die Behauptung gilt.

(c) Betrachte die Varietät $V = \mathfrak{V}(XZ, YZ) = \mathfrak{V}(Z) \cup \mathfrak{V}(X,Y)$ (Ebene mit senktrechter Gerade durch den 0-Punkt).

Es ist $\mathfrak{V}(Z) \cong \mathbb{A}^2$, d.h $\dim \mathfrak{V}(Z) = 2$, und $\mathfrak{V}(X,Y) \cong \mathbb{A}^1$, d.h $\dim \mathfrak{V}(X,Y) = 1$.

Nach Bemerkung 2.2 ist also $\dim V = 2$.

(d) Es ist $\dim \mathfrak{V}(X^2 + Y^2 - Z^2) = 2$, da Hyperfläche.

(e) Genauso ist $\dim \mathfrak{V}(X^2 + Y^2 - 1) = 1$, da Hyperfläche.

Die Wünsche, die zu Beginn des Abschnitts geäußert wurden, sind also erfüllt.

3 Der Tangentialraum

BEISPIEL: (a) Wir betrachten die elliptische Kurve $V = \mathfrak{V}(Y^2 - X^3 + X)$ und $P = (0,0)$. Die Tangente an V in P ist die Y-Achse, also $\mathfrak{V}(X)$.

(b) Nun betrachten wir den Newton-Knoten $V = \mathfrak{V}(Y^2 - X^3 + X^2)$. Dann gibt es in $P = (0,0)$ zwei „Tangenten“. Aber wie könnte der Tangentialraum aussehen?

(c) Jetzt die Neilsche Parabel: $V = \mathfrak{V}(Y^2 - X^3)$. Dann ist die X-Achse „doppelte Tangente“ in $P = (0,0)$, aber auch hier ist der Tangentialraum nicht intuitiv klar.

ERINNERUNG 3.1: Sei $f \in K[X_1,\dots,X_n]$ und $p = (p_1,\dots,p_n) \in K^n$. Dann haben wir die *Taylor-Entwicklung*

$$f = \sum_{\substack{\alpha=(k_1,\dots,k_n)\\ k_i \geq 0}} \frac{1}{(k_1 + \cdots + k_n)!} \frac{\partial^{k_1}}{\partial X_1} \cdots \frac{\partial^{k_n}}{\partial X_n} f(p)(X_1 - p_1)^{k_1} \cdots (X_n - p_n)^{k_n}.$$

Insbesondere gilt dann:

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i}(p) \cdot (X_i - p_i) + \text{Restterme},$$

wobei die Restterme vom Grad mindestens 2 sind, also in $\mathfrak{m}_p^2$, wobei

$$\mathfrak{m}_p := (X_1 - p_1,\dots,X_n - p_n).$$

DEFINITION 3.2: Sei $p \in K$ mit $p = (p_1,\dots,p_n)$.

(a) Für $f \in K[X_1,\dots,X_n]$ sei

$$f_p^{(1)} := f^{(1)} := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i}(p) \cdot X_i =: \mathcal{D}_p(f).$$

(b) Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ eine affine Varietät, $p \in V$ und $I := \mathfrak{I}(V)$. Seien zusätzlich

$$\mathcal{I}_p := \langle f_p^{(1)} \mid f \in I \rangle \text{ und } \mathcal{T}_p := \mathcal{T}_{V,p} := \mathfrak{V}(\mathcal{I}_p) \subseteq \mathbb{A}^n(K).$$

Dann heißt $\mathcal{T}_p$ *Tangentialraum an V in p.*

BEISPIEL 3.3: Seien $f = X^2 + Y^2 - 1$, $V = \mathfrak{V}(f)$, $I = (f)$ und $p = (a,b) \in V$. Dann ist

$$f_p^{(1)} = \frac{\partial f}{\partial X}(p) \cdot X + \frac{\partial f}{\partial Y}(p) \cdot Y = 2aX + 2bY,$$

also $\mathcal{I}_p = \langle 2aX + 2bY \rangle$ und $\mathcal{T}_{V,p} = \mathfrak{V}(\mathcal{I}_p) = \{(x,y) \in K^2 \mid bY = -aX\}$, denn es gilt

$$(h \cdot f)_p^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(h \cdot f)}{\partial X_i}(p) \cdot X_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial X_i}(p) \cdot f(p) \cdot X_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i}(p) \cdot h(p) \cdot X_i = h(p) \cdot f_p^1,$$

denn $f(p) = 0$, da $p \in V$, und damit ist $\mathcal{I}_p$ auch nicht größer.

BEMERKUNG 3.4: (a) Die Taylor-Entwicklung liefert

$$f = f(p) + f_p^{(1)} - f_p^{(1)}(p) + \text{Restterme},$$

wobei die Restterme in $\mathfrak{m}_p^2$ liegen.

(b) $\mathcal{D}_p(f+g) = (f+g)_p^{(1)} = f_p^{(1)} + g_p^{(1)} = \mathcal{D}_p(f) + \mathcal{D}_p(g)$
$\mathcal{D}_p(f \cdot g) = (f \cdot g)_p^{(1)} = f(p) \cdot g_p^{(1)} + g(p) \cdot f_p^{(1)} = f(p) \cdot \mathcal{D}_p(g) + g(p) \cdot \mathcal{D}_p(f)$, vgl. auch Beispiel 3.3.

(c) Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ eine affine Varietät, $I = \mathfrak{I}(V) = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$ und $p \in V$. Dann ist
- $\mathcal{I}_p = \langle f_1^{(1)}, \ldots, f_r^{(1)} \rangle$ analog zu Beispiel 3.3,
- $\mathcal{T}_{V,p} = \mathfrak{V}(\mathcal{I}_p)$ ein linearer Unterraum von $\mathbb{A}^n(K) = K^n$:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{V,p} &= \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^n(K) \mid \forall f \in I : \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_j}(p) \cdot x_j = 0\} \\ &= \operatorname{Kern} \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(p) \right)_{\substack{i=1,\ldots,r \\ j=1,\ldots,n}},\end{aligned}$$

also der Kern der Jacobi-Matrix.

Beispiel 3.5: Damit können wir jetzt ganz viele Tangentialräume bestimmen. Sei $p = (0,0)$.

(a) Sei $V = \mathfrak{V}(Y^2 - X^3 + X)$, dann ist $\mathcal{T}_{V,p} = \mathfrak{V}(2 \cdot 0 \cdot Y - 3 \cdot 0^2 \cdot X + 1 \cdot X) = \mathfrak{V}(X)$.

(b) Sei $V = \mathfrak{V}(Y^2 - X^3 + X^2)$, dann ist $\mathcal{T}_{V,p} = \mathfrak{V}(0) = \mathbb{A}^2(K)$.

(c) Sei $V = \mathfrak{V}(Y^2 - X^3)$. Dann ist $\mathcal{T}_{V,p} = \mathfrak{V}(0) = \mathbb{A}^2(K)$.

(d) Sei $V = \mathfrak{V}(X^2 + Y^2 - Z^2)$, dann ist

$$\mathcal{T}_{V,p} = \mathfrak{V}(0) = \mathbb{A}^3(K) \text{ und } \mathcal{T}_{V,(0,1,1)} = \mathfrak{V}(2Y - 2Z).$$

Bisher hängt unsere Definition von $\mathcal{T}_{V,p}$ von der Einbettung von V in den $\mathbb{A}^n(K)$ ab.

Bemerkung 3.6: Sei $\varphi \colon \mathbb{A}^n \supseteq V \longrightarrow W \subseteq \mathbb{A}^m$ ein Morphismus zwischen affinen Varietäten. Dann induziert φ in natürlicher Weise eine K-lineare Abbildung

$$\mathrm{d}_p\, \varphi \colon \mathfrak{V}(\mathcal{I}_p) = \mathcal{T}_{V,p} \longrightarrow \mathcal{T}_{W,\varphi(p)} = \mathfrak{V}(\mathcal{I}_{\varphi(p)}).$$

Beweis: Gegeben seien also $\varphi \colon V \longrightarrow W$, $I := \mathfrak{I}(V)$ und $J := \mathfrak{I}(W)$.
Dann wählen wir eine Fortsetzung $\widehat{\varphi} \colon \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^m$ und

$$\widehat{\varphi} = (\widehat{\varphi}_1, \ldots, \widehat{\varphi}_m) \text{ mit } \widehat{\varphi}_i \in K[X_1, \ldots, X_n].$$

So erhalten wir

$$\widehat{\varphi}^\sharp \colon K[Y_1, \ldots, Y_m] \longrightarrow K[X_1, \ldots, X_n]$$

mit $\widehat{\varphi}^\sharp(Y_i) = \widehat{\varphi}_i$ und $\widehat{\varphi}^\sharp(J) \subseteq I$. Wir definieren den K-Algebrenhomomorphismus

$$\alpha\colon K[Y_1,\ldots,Y_m] \longrightarrow K[X_1,\ldots,X_n] \text{ durch } \alpha(Y_i) = \mathcal{D}_p(\widehat{\varphi}^\sharp(Y_i)) = \mathcal{D}_p(\widehat{\varphi}_i) = \widehat{\varphi}_{i\,p}^{(1)}.$$

Nun genügt es $\alpha(\mathcal{I}_{\varphi(p)}) \subseteq \mathcal{I}_p$ zu zeigen, denn dann induziert α das gewünschte $\mathrm{d}_p\,\varphi$.

Seien also $g \in J$ und $\overline{g} := \mathcal{D}_p(g) \in \mathcal{I}_{\varphi(p)}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\alpha(\overline{g}) &= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial \varphi_j}(\varphi(p)) \cdot \mathcal{D}_p(\widehat{\varphi}_j) = \sum_{i=1}^{n} X_i \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial \varphi_j}(\varphi(p)) \cdot \frac{\partial \widehat{\varphi}_j}{\partial X_i}(p) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial (g \circ \widehat{\varphi})}{\partial X_i}(p) = \mathcal{D}_p(g \circ \widehat{\varphi}) \in \mathcal{I}_p,\end{aligned}$$

denn $g \circ \widehat{\varphi}$ liegt in I. □

Definition/Bemerkung 3.7: (a) Wir nennen $\mathcal{D} : \mathcal{O}_{V,p} \longrightarrow K$ eine *Derivation an* p, wenn $\mathcal{D}$ K-linear ist und

$$\mathcal{D}(f \cdot g) = g(p) \cdot \mathcal{D}(f) + f(p) \cdot \mathcal{D}(g).$$

(b) $\mathcal{D}$ ist bereits durch $\mathcal{D}|_{\mathfrak{m}_p}$ für das maximale Ideal $\mathfrak{m}_p = \{f \mid f(p) = 0\}$ festgelegt, denn für c konstant ist $\mathcal{D}(c) = 0$, also gilt, für beliebiges $f \in \mathcal{O}_{V,p}$, $\widetilde{f} := f - f(p)$ ist in $\mathfrak{m}_p$ und $\mathcal{D}(\widetilde{f}) = \mathcal{D}(f)$.

(c) Sei $f \in \mathfrak{m}_p^2$. Dann ist $\mathcal{D}(f) = 0$, denn wir können, ohne Einschränkung, $f = g \cdot h$ mit $g, h \in \mathfrak{m}_p$ wählen und sehen

$$\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(gh) = g(p)\mathcal{D}(h) + h(p)\mathcal{D}(g) = 0,$$

da $g(p) = h(p) = 0$. $\mathcal{D}$ definiert also eine lineare Abbildung

$$\mathfrak{l}\colon\ \mathfrak{m}_p \big/ \mathfrak{m}_p^2 \longrightarrow K.$$

(d) Jedes solche $\mathfrak{l}$ kommt von einer Derivation her. Dazu definieren wir

$$\mathcal{D}(f_p) := \mathfrak{l}(f_p - f_p(p)).$$

Wir müssen also zeigen, dass $\mathcal{D}$ eine Derivation an p ist, also dass:

$$\mathcal{D}(f_p \cdot g_p) = f_p(p)\mathcal{D}(g_p) + g_p(p)\mathcal{D}(f_p)$$

gilt. Dazu verwenden wir, dass $(f_p - f_p(p)) \cdot (g_p - g_p(p)) \in \mathfrak{m}_p^2$, also

$$\begin{aligned}0 &= \mathfrak{l}\big((f_p - f_p(p))(g_p - g_p(p))\big) \\ &= \mathfrak{l}\big(f_p g_p - f_p(p)g_p(p) - f_p(p)g_p - g_p(p)f_p + 2f_p(p)g_p(p)\big)\end{aligned}$$

und sehen damit:

$$\begin{aligned}\mathfrak{l}\big(f_p g_p - f_p(p)g_p(p)\big) &= \mathfrak{l}\big(f_p(p)g_p - f_p(p)g_p(p)\big) + \mathfrak{l}\big(g_p(p)f_p - f_p(p)g_p(p)\big) \\ &= f_p(p)\mathcal{D}(g_p) + g_p(p)\mathcal{D}(f_p).\end{aligned}$$

Die Derivationen an p auf $\mathcal{O}_{V,p}$ können demnach mit dem Dualraum $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^\vee$ identifiziert werden. Wir erhalten so einen Isomorphismus von K-Vektorräumen. Genauer:

PROPOSITION 3.8: (a) Jedes $a = (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{A}^n(K)$ definiert eine Derivation

$$\mathcal{D}_a\colon \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,p} \cong K[X_1,\dots,X_n]_{\mathfrak{m}_p} \longrightarrow K,$$
$$f \longmapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(p)\cdot a_i = f_p^1(a) = \mathcal{D}_p(f)(a),$$

dabei war $\mathfrak{m}_p = (X_1 - p_1,\dots,X_n - p_n)$ für $p = (p_1,\dots,p_n)$.

(b) Falls $a \in \mathcal{T}_{V,p} = \mathfrak{V}(\mathcal{I}_p)$, steigt $\mathcal{D}_a$ zu einer Derivation $\tau_a\colon \mathcal{O}_{V,p} \longrightarrow K$ ab, via des von der Einbettung $i\colon V \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ induzierten Morphismus $i^\sharp\colon \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,p} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{V,p}$.

Beweis: (a) Die Derivationseigenschaft kommt von der entsprechenden Eigenschaft der $\frac{\partial}{\partial X_i}$.

(b) Ohne Einschränkung nehmen wir V als affin an. Zunächst gilt für alle $f \in \mathfrak{I}(V)$, dass $\mathcal{D}_a(f) = \mathcal{D}_p(f)(a) = 0$, da $f_p^{(1)} \in \mathcal{I}_p$ und $a \in \mathcal{T}_{V,p}$.
Sei nun $\left(\frac{f}{g}\right)_p \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,p}$ mit $i^\sharp\left(\left(\frac{f}{g}\right)_p\right) = 0$, das heißt $g(p) \neq 0$ und $\frac{f}{g}$ ist 0 in $\mathcal{O}_{V,p}$, also gibt es ein h mit $h(p) \neq 0$, so dass $h \cdot f \in \mathfrak{I}(V)$. Insbesondere ist $\mathcal{D}_a(hf) = 0$ und $f(p) = 0$, da $0 = \big(hf\big)(p) = h(p)f(p)$. Damit gilt:

$$0 = \mathcal{D}_a(hf) = \mathcal{D}_a(h)f(p) + \mathcal{D}_a(f)h(p)$$

und da $h(p) \neq 0$, muss schon $\mathcal{D}_a(f) = 0$ gelten. Damit ist auch

$$\mathcal{D}_a\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g(p)\cdot\mathcal{D}_a(f) - f(p)\cdot\mathcal{D}_a(g)}{g(p)^2} = 0$$

und damit ist τ_a wohldefiniert. □

DEFINITION/PROPOSITION 3.9: Sei V eine affine Varietät und $p = (p_1,\dots,p_n) \in V$.

(a) $\mathcal{D}_a\colon \mathcal{O}_{V,p} \longrightarrow K$ induziert einen Vektorraumhomomorphismus

$$\tau_a\colon\ \mathfrak{m}_p\big/\mathfrak{m}_p^2 \longrightarrow K,$$

also ein Element $\tau_a \in \big(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2\big)^\vee$.

(b) Die Abbildung

$$\alpha_p\colon \mathcal{T}_{V,p} \longrightarrow \big(\mathfrak{m}_p\big/\mathfrak{m}_p^2\big)^\vee, \quad a \longmapsto \tau_a$$

ist ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Beweis: (a) folgt sofort aus Definition/Bemerkung 3.7 (c) mit Proposition 3.8 (b).

(b) Wir definieren die Umkehrabbildung durch

$$\beta_p\colon \left(\mathfrak{m}_p\big/\mathfrak{m}_p^2\right)^\vee \longrightarrow \mathcal{T}_{V,p}, \quad \mathfrak{l} \longmapsto \left(\mathfrak{l}(\overline{X_1-p_1}),\ldots,\mathfrak{l}(\overline{X_n-p_n})\right).$$

Wir zeigen zuerst, dass β wohldefiniert ist, also $\beta_p(\mathfrak{l}) =: a \in \mathcal{T}_{V,p} = \mathfrak{V}(\mathcal{I}_p)$. Sei dazu $f \in \mathfrak{I}(V)$, also $f_p^{(1)} \in \mathcal{I}_p$. Dann gilt nach Definition

$$\begin{aligned} f_p^{(1)}(a) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(p)\cdot \mathfrak{l}(\overline{X_i-p_i}) \\ &= \mathfrak{l}\left(\overline{\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(p)\cdot (X_i-p_i)}\right) = \mathfrak{l}\left(\overline{f_p^{(1)} - f_p^{(1)}(p)}\right). \end{aligned}$$

In Bemerkung 3.4 (a) hatten wir gesehen, dass

$$f - f(p) - (f_p^{(1)} - f_p^{(1)}(p)) \in \mathfrak{m}_p^2$$

liegt, wobei hier natürlich $f(p) = 0$ ist. In $K[V]$ ist damit sogar $f_p^{(1)} - f_p^{(1)}(p) \in \mathfrak{m}_p^2$, also gilt

$$\text{in } \mathfrak{m}_p\big/\mathfrak{m}_p^2 \text{ ist } \overline{f_p^{(1)} - f_p^{(1)}(p)} = 0,$$

also ist $f_p^{(1)}(a) = 0$ und damit ist $a \in \mathfrak{V}(\mathcal{I}_p) = \mathcal{T}_{V,p}$.

Um einzusehen, dass es sich wirklich um die Umkehrabbildung handelt, erinnern wir uns daran, dass, für $a = (a_1,\ldots,a_n)$,

$$\tau_a\colon \mathfrak{m}_p\big/\mathfrak{m}_p^2 \ni f \longmapsto \mathcal{D}_p(f)(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(p)\cdot a_i \in K$$

gilt. Damit erhalten wir für $\beta_p(\alpha_p(a))$:

$$\beta_p(\tau_a) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial(\overline{X_1-p_1})}{\partial X_i}(p)\cdot a_1,\ldots,\sum_{i=1}^n \frac{\partial(\overline{X_n-p_n})}{\partial X_i}(p)\cdot a_n\right)$$

und da $\frac{\partial(X_j-p_j)}{\partial X_i}$ genau dann 1, wenn $i = j$ und ansonsten 0 ist, ergibt das gerade wieder a.

Nun überlegen wir uns noch, dass $\mathfrak{l}$ durch

$$\alpha_p(\beta_p(\mathfrak{l})) = \alpha_p(\mathfrak{l}(\overline{X_1-p_1}),\ldots,\mathfrak{l}(\overline{X_n-p_n})),$$

nach gleicher Argumentation wie oben, gerade auf die Abbildung

$$\begin{aligned} f \longmapsto \mathcal{D}_p(f)(\mathfrak{l}(\overline{X_1-p_1}),\ldots,\mathfrak{l}(\overline{X_n-p_n})) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(p)\cdot \mathfrak{l}(\overline{X_i-p_i}) \\ &= \mathfrak{l}(\overline{f_p^{(1)} - f_p^{(1)}(p)}), \end{aligned}$$

geschickt wird. In $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ ist aber, wie oben gesehen,

$$\overline{f} = \overline{f_p^{(1)} - f_p^{(1)}(p)}$$

und damit gilt tatsächlich

$$\alpha_p(\beta_p(\mathfrak{l})) = \big(f \longmapsto \mathfrak{l}(f)\big) = \mathfrak{l},$$

β_p ist also, wie behauptet, die Umkehrabbildung.
Somit sind die Vektorräume isomorph. □

Definition/Bemerkung 3.10: Sei V eine quasi-projektive Varietät, $p \in V$.

(a) $\left(\mathfrak{m}_p \big/ \mathfrak{m}_p^2\right)^\vee$ heißt *(Zariski-)Tangentialraum.*

(b) Der Punkt p heißt *regulär* (bzw. *nicht-singulär*), wenn $\dim \mathcal{T}_{V,p} = \dim_p V$ ist. Andernfalls heißt p *singulär.*

(c) Sei $U \subseteq \mathbb{A}^n$ eine offene und affine Umgebung von p in V und $\mathfrak{I}(U) = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle$. Dann gilt

$$p \text{ ist regulär} \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{Rang} \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(X)\right)_{\substack{i=1,\ldots,r\\ j=1,\ldots,n}} = n - \dim_p V,$$

denn nach Bemerkung 3.4 (c) ist $\mathcal{T}_{V,p}$ gerade der Kern dieser Matrix.
Diese Äquivalenz nennt man das *Jacobi-Kriterium.*

Beispiel 3.11: (a) Sei $V = \mathfrak{V}(X^2 + Y^2 - Z^2) \subseteq \mathbb{A}^3$. Dann ist $\dim V = \dim_p V$ für alle Punkte $v \in V$. Für die Jacobi-Matrix gilt:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix}$$

und nach Definition/Bemerkung 3.10 (c) ist p genau dann regulär, wenn

$$\operatorname{Rang} \mathcal{J} = 3 - 2 = 1$$

gilt. Also ist $p = (0,0,0)$ der einzige singuläre Punkt.

(b) Sei $V = \mathfrak{V}(X^2 - Y^2) = \mathfrak{V}((X-Y)(X+Y)) \subseteq \mathbb{A}^3$. Anschaulich sind das zwei Ebenen, die senkrecht aufeinander stehen. Ihr Schnitt ist die Z-Achse. Analog zu (a) finden wir

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \\ 0 \end{pmatrix}$$

und demnach ist hier p genau dann singulär, wenn $p = (0,0,z)$ mit $z \in K$, also ist die Menge der singulären Punkte gerade die Z-Achse.

(c) Sei $V = \mathfrak{V}(f) \subseteq \mathbb{A}^n$ eine Hyperfläche, also $\deg f \geq 1$. Dann ist

$$\mathcal{J}_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial X_1}(p) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial X_n}(p) \end{pmatrix}$$

und p ist genau dann regulär, wenn $\operatorname{Rang} \mathcal{J} = n - (n-1) = 1$, d.h.

$$p \text{ ist singulär} \iff \frac{\partial f}{\partial X_1}(p) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial X_n}(p) = 0.$$

4 Der singuläre Ort einer Varietät

Definition 4.1: Sei W quasi-projektive Varietät. Dann heißt

$$\operatorname{Sing} W = \{p \in W \mid p \text{ singulär}\}$$

der *singuläre Ort*.

$$\operatorname{Reg} W = \{p \in W \mid p \text{ regulär}\} = W \setminus \operatorname{Sing} W$$

heißt *regulärer Ort*.

Wenn $\operatorname{Sing} W$ leer ist, nennen wir W *regulär* oder *nicht-singulär*.

Definition/Bemerkung 4.2: (a) Ein noetherscher, lokaler Ring R mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ heißt *regulär*, wenn $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim R$. Dabei ist $k = R/\mathfrak{m}$.

(b) Sei W quasi-projektive Varietät, $p \in W$. Dann gilt:

$$p \text{ ist regulär} \iff \mathcal{O}_{W,p} \text{ ist regulär.}$$

Lemma 4.3: Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler, noetherscher Ring.

(a) Ist R regulär, so ist R auch nullteilerfrei.

(b) Es gilt: $\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \geq \dim R$

Beweis: siehe Lemma 5.4 und Proposition 5.5. □

Satz 6: *Sei W eine quasi-projektive Varietät.*

(a) Ist $p \in W$, so ist $\dim \mathcal{T}_{W,p} \geq \dim_p W$ und $\operatorname{Rang} \mathcal{J}_p \leq n - \dim_p W$, wobei $\mathcal{J}_p$ die Jacobi-Matrix zu V in p ist und $V \subseteq \mathbb{A}^n$ eine offene, affine Umgebung von p ist.

(b) Sind $W_1 \neq W_2$ irreduzible Komponenten von W, $p \in W_1 \cap W_2$, dann ist p singulär.

(c) $\operatorname{Sing} W$ ist abgeschlossen.

(d) Es ist $\operatorname{Sing} W \neq W$.

Beweis: (a) folgt aus Lemma 4.3 (b) sowie $\mathcal{T}_{W,p} \cong \operatorname{Kern} \mathcal{J}_p$.

(b) Da wir eine lokale Eigenschaft untersuchen, können wir ohne Einschränkung W als affin annehmen. Sei nun $p \in W_1 \cap W_2$.

Dann ist $\mathfrak{m}_p^W \supseteq \mathfrak{I}(W_1), \mathfrak{I}(W_2)$ in $K[W]$.

Sind W_1, W_2 irreduzible Komponenten, so sind $\mathfrak{I}(W_1), \mathfrak{I}(W_2)$ minimale Primideale. Folglich sind die Bilder von $\mathfrak{I}(W_1)$ und $\mathfrak{I}(W_2)$ minimale Primideale in $\mathcal{O}_{W,p}$ bzw. $K[W]_{\mathfrak{m}_p^W}$ und verschieden (vgl. Aufgabe 2, Übungsblatt 6).

Damit ist (0) kein Primideal in $\mathcal{O}_{W,p}$. Also ist $\mathcal{O}_{W,p}$ nicht nullteilerfrei und nach Lemma 4.3 (a) ist $\mathcal{O}_{W,p}$ nicht regulär.

(c) Sei $W = W_1 \cup \cdots \cup W_k$ die Zerlegung in irreduzible Komponenten.

Ist $p \in W_i$ und $p \notin W_j$ für $j \neq i$, so ist p genau dann singulär in W, wenn p singulär in $W \cap W_i$ ist.

Denn: Ist $p \in W_i \cap W_j$ $(i \neq j)$, so ist $p \in \operatorname{Sing} W$ und damit

$$\operatorname{Sing} W = \bigcup_{i=1}^{k} \operatorname{Sing} W_i \cup \bigcup_{j \neq i} (W_i \cap W_j).$$

Da $\bigcup\limits_{j \neq i} (W_i \cap W_j)$ abgeschlossen ist, genügt es die Aussage für irreduzible Varietäten zu zeigen.

Sei also W irreduzibel und affin. Dann gilt:

$$\operatorname{Sing} W = \{p \in W \mid \operatorname{Rang} \mathcal{J}_p < n - \dim W\} = \{p \in W \mid \det M_p = 0 \ \forall M_p\},$$

wobei die M_p die $(n - \dim W) \times (n - \dim W)$-Minoren von $\mathcal{J}_p$ sind. Diese Menge ist abgeschlossen.

(d) Ist $W = W_1 \cup \cdots \cup W_k$ die Zerlegung in irreduzible Komponenten und $\operatorname{Reg} W_i$ nicht leer, so ist $\operatorname{Reg} W_i$ dicht in W_i.

Also gibt es $p \in W_i$, so dass $p \notin W_j$, für alle $i \neq j$. Damit ist $p \in \operatorname{Reg} W$ und man kann ohne Einschränkung annehmen, dass W irreduzibel ist.

Sei jetzt also $V = W$ affin und irreduzibel. Betrachte zuerst den Spezialfall, dass $W = V = \mathfrak{V}(f)$ eine Hyperfläche ist, wobei $f \in K[X_1,\dots,X_n]$ quadratfrei sein soll.

Nach Beispiel 3.11 gilt:

$$\operatorname{Sing} V = \left\{ p \in V \;\middle|\; \frac{\partial f}{\partial X_i}(p) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial X_n}(p) = 0 \right\}$$

Wäre $\operatorname{Sing} V = V$, dann wäre $\frac{\partial f}{\partial X_i} \in \mathfrak{I}(V) = \langle f \rangle$ für $i = 1,\dots,n$.

Hat K Charakteristik 0, so muss f bereits konstant sein.

Hat K Charakteristik p, so muss jeder Exponent, der auftritt, bereits durch p teilbar sein. Also ist $f = g^p$ für ein $g \in K[X_1,\dots,X_n]$, was im Widerspruch zur Quadratfreiheit von f steht.

Nun der allgemeine Fall:

Nach Lemma 4.4 gibt es eine offene, dichte Teilmenge $U \subseteq V$, die via φ isomorph zu einer offenen, dichten Teilmenge U' in einer Hyperfläche $\mathfrak{V}(f)$ ist.

Nach dem Spezialfall ist $\operatorname{Reg} \mathfrak{V}(f) \neq \varnothing$. Damit ist $U' \cap \operatorname{Reg} \mathfrak{V}(f) \neq \varnothing$, da U' dicht ist und $\operatorname{Reg} \mathfrak{V}(f)$ offen ist. Sei $p' \in U' \cap \operatorname{Reg} \mathfrak{V}(f)$.

Dann ist p' regulär, d.h. $\mathcal{O}_{U',p'}$ ist regulär. Also ist auch $\varphi(p') \in U$ regulär, da $\mathcal{O}_{U,p}$ regulär ist. □

LEMMA 4.4: Jede irreduzible quasi-projektive Varietät W von Dimension d ist birational äquivalent zu einer Hyperfläche im $\mathbb{A}^{d+1}(K)$.

ERINNERUNG: (a) Sei A eine nullteilerfreie, endlich erzeugte K-Algebra.

- Die Noethernormalisierung impliziert, dass A ganz über dem Polynomring $K[X_1,..., X_d]$ ist.
- Die Dimension bleibt unter ganzen Ringerweiterungen erhalten. Also gilt $d = \dim A$ und der Transzendenzgrad von $\operatorname{Quot} A/K = d = \dim A$.

  Damit gilt für eine irreduzible Varietät V die Formel $\operatorname{trdeg} K(V) = \dim V$.

(b) Sei $L/K(X_1,..., X_d)$ endliche Körpererweiterung, $E := K(X_1,..., X_d)$.

Hat K Charakteristik 0, so ist L/K separabel, d.h. $L = E(\alpha)$ für ein $\alpha \in L$ nach dem Satz vom primitiven Element.

Hat K Charakteristik p, so impliziert die algebraische Abgeschlossenheit von K, dass L/K separabel erzeugt ist, d.h. es gibt eine Transzendenzbasis $\{\widetilde{X_1},..., \widetilde{X_d}\}$, so dass $L/K(\widetilde{X_1},..., \widetilde{X_d})$ separabel ist (siehe Bosch, Abschnitt 7.3, Satz 7).

Im Folgenden sei eine Transzendenzbasis mit dieser Eigenschaft gewählt.

Beweis von Lemma 4.4: Seien $L = K(W)$ und $\{X_1,..., X_d\}$ eine Transzendenzbasis wie in (b). Also gibt es ein primitives Element $y \in L = K(W)$ von $L/K(X_1,..., X_d)$, d.h.

$$L = K(X_1,..., X_d, y) = K(X_1,..., X_d)[y].$$

Sei $p(Y) = Y^n + a_{n-1}Y^{n-1} + \cdots + a_0$ das Minimalpolynom von y über $K(X_1,..., X_d)$ und $a_0 =: \frac{f_i}{g_i}$ mit $f_i, g_i \in K[X_1,..., X_d]$.

Dann setzen wir $g := \operatorname{kgV}(g_0,..., g_{n-1})$ und damit

$$h := gY^n + ga_{n-1}Y^{n-1} + \cdots + ga_0 \in K[X_1,..., X_d, Y],$$

denn die ga_i sind bereits in $K[X_1,..., X_d]$.

Nun definieren wir $H := \mathfrak{V}(h) \subseteq \mathbb{A}^{d+1}$ und sehen, dass

$$K(H) = \operatorname{Quot}\left(K[X_1,..., X_d, Y] \big/ (h) \right) = L = K(W).$$

Also gibt es, nach Satz 4 und Definition/Bemerkung 5.6 (c), eine birationale Abbildung $H \dashrightarrow W$. □

5 Reguläre Ringe und Krullscher Höhensatz

Ziel: *Sei* $I = (f_1,..., f_k)$*,* $\operatorname{ht} I := \{\inf \operatorname{ht} \wp \mid \wp \supseteq I, \wp$ *ist Primideal*$\}$*.*
Was kann man über $\operatorname{ht} I$ *sagen?*

BEMERKUNG: Ein Primideal $\wp$ heißt *minimales Primoberideal* von einem Ideal I, wenn $\wp \supseteq I$ und $\wp$ minimal mit dieser Eigenschaft ist.

Zorns Lemma zeigt, dass es zu jedem $x \in R \setminus R^\times$ ein minimales Primoberideal von (x) gibt.

(a) (Krullsches Hauptideallemma, vgl. Brodmann III.10.15)
Ist R ein noetherscher Ring, $x \in R \setminus R^\times$ und $\wp$ ein minimales Primoberideal von (x), dann gilt $\operatorname{ht} \wp \leq 1$.

(b) Jeder noetherscher Ring hat nur endlich viele minimale Primideale (vgl. auch Satz 1, Brodmann II, 9.17 (iii)).

(c) (Primidealvermeidungslemma, vgl. Brodmann III.11.10)
Sind $\wp_1,..., \wp_n$ Primideale in R und I, J Ideale, mit $I \nsubseteq \wp_i$ und $I \nsubseteq J$, dann gilt auch $I \nsubseteq J \cup \wp_1 \cdots \cup \wp_n$.

LEMMA 5.1: Sei R noethersch, $q \in \operatorname{Spec} R$, $x \in q$, $\operatorname{ht} q \geq l \geq 1$. Dann existiert eine Primidealkette

$$x \in \wp'_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \wp'_{l-1} = q.$$

Beweis: Wir machen vollständige Induktion über l:

Für $l = 1$ wählen wir $\wp'_0 = q$.

Sei nun $l \geq 2$. Da $\operatorname{ht} q \geq l$ gilt, gibt es eine Primidealkette $\wp_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \wp_l := q$. Ist $x \in \wp_{l-1}$, so kann man die Induktionsvoraussetzung anwenden und erhält die Behauptung.

Ab jetzt sei also $x \notin \wp_{l-1}$. Dann ist $I := (x) + \wp_{l-2} \subseteq q$. Sei s ein minimales Primoberideal von I mit $I \subseteq s \subseteq q$.

Es gilt $\wp_{l-2} \subsetneq \wp_{l-1} \subsetneq q$, also $\overline{0} \subsetneq \overline{\wp_{l-1}} \subsetneq \overline{q}$ in $R/\wp_{l-2}$ und damit ist $\operatorname{ht} \overline{q} \geq 2$, und somit ist, nach dem Krullschen Hauptideallemma, $\overline{q}$ *kein* minimales Oberprimideal von $(\overline{x})$. Damit ist aber auch q kein minimales Primoberideal von $(x)+\wp_{l-2} = I$, also ist $s \neq q$.

Nun können wir also die Induktionsvoraussetzung auf s anwenden, es gibt somit eine Primidealkette $x \in \wp'_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \wp'_{l-2}$ in s. Wenn wir diese durch q um 1 verlängern, sind wir fertig. □

KOROLLAR 5.2: Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler, noetherscher Ring und $x \in \mathfrak{m}$. Dann ist

$$\dim R/(x) \geq \dim R - 1.$$

Vermeidet x die Primideale $\wp_i$ von R, d.h gilt $x \notin \wp_i$ für alle minimalen Primoberideale $\wp_i$, dann gilt $\dim R/(x) = R - 1$.

PROPOSITION 5.3: (Krullscher Höhensatz) Sei R ein noetherscher Ring, $I = \langle x_1,\ldots, x_k\rangle$ ein echtes Ideal in R. Dann gilt: $\operatorname{ht}\wp \leq k$ für jedes minimale Primoberideal von I. Insbesondere ist $\operatorname{ht} I \leq k$.

Beweis: Wir machen Induktion über k:

Der Fall $k = 1$ folgt aus dem Krullschen Hauptideallemma.

Sei also $k \geq 2$: Sei $\wp$ ein minimales Primoberideal von I und $\wp_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \wp_l := \wp$ eine Primidealkette.

Nach Lemma 5.1 finden wir eine Primidealkette mit $x_k \in \wp'_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \wp'_{l-1} := \wp$. In $R/(x_k)$ gilt nun $\overline{\wp'_0} \subsetneq \cdots \subsetneq \overline{\wp'_{l-1}} = \overline{\wp}$ und $\overline{\wp}$ ist ein minimales Primoberideal von $I = \langle\overline{x_1},\ldots,\overline{x_{k-1}}\rangle$. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt nun:

$$l - 1 \leq \operatorname{ht}\overline{\wp} \leq k - 1.$$

Also ist $l \leq k$ und das zeigt die Behauptung. □

LEMMA 5.4: Sei $(R,\mathfrak{m})$ ein noetherscher, lokaler Ring und $k = R/\mathfrak{m}$.

(a) Für $m_1,\ldots, m_n \in \mathfrak{m}$ gilt:

$$\begin{array}{l}\{m_1,\ldots,m_n\} \text{ ist minimales}\\ \text{Erzeugendensystem von } \mathfrak{m}\end{array} \iff \{\overline{m_1},\ldots,\overline{m_n}\} \text{ ist Basis von } {}^{\mathfrak{m}}/_{\mathfrak{m}^2}\,.$$

(b) Alle minimalen Erzeugendensysteme von $\mathfrak{m}$ haben dieselbe Anzahl: $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

(c) Es ist $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \geq \dim R$.

Beweis: (a) Sei zuerst $\langle m_1,\ldots, m_n\rangle = \mathfrak{m}$. Betrachte die Projektionen

$$\pi_1 : R \longrightarrow k = {}^{R}/_{\mathfrak{m}}\,, \quad \pi_2 : \mathfrak{m} \longrightarrow {}^{\mathfrak{m}}/_{\mathfrak{m}^2}\,.$$

Dann ist $\overline{rm_1} := \pi_1(r)\pi_2(\mathfrak{m})$ wohldefiniert und $\{\overline{m_1},\ldots,\overline{m_n}\}$ ist ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Da $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ ein k-Vektorraum ist, ist $\{\overline{m_1},\ldots,\overline{m_n}\}$ also – wie gewünscht – eine Basis.

Sei jetzt $\langle\overline{m_1},\ldots,\overline{m_n}\rangle = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Definiere $N = \langle m_1,\ldots, m_n\rangle$. Dann ist $\mathfrak{m} = N + \mathfrak{m}^2$ und damit $N = \mathfrak{m}$ nach dem Nakayama-Lemma aus Algebra 2.

(b) folgt aus (a).

(c) Da R lokal ist, folgt $\dim R = \operatorname{ht}\mathfrak{m}$. Außerdem folgt, mit Proposition 5.3 und (b),

$$\operatorname{ht}\mathfrak{m} \leq |\{\text{minimales Erzeugendensystem von } \mathfrak{m}\}| = \dim_k {}^{\mathfrak{m}}/_{\mathfrak{m}^2}\,. \qquad \square$$

PROPOSITION 5.5: Ist $(R,\mathfrak{m})$ regulär, so ist R auch nullteilerfrei.

Beweis: Erinnerung aus Definition/Bemerkung 4.2:

$$\begin{aligned}(R,\mathfrak{m}) \text{ ist regulär} &\iff \dim_k {}^{\mathfrak{m}}/_{\mathfrak{m}^2} = \dim R\\ &\iff \mathfrak{m} \text{ kann durch } \dim R \text{ viele Elemente erzeugt werden.}\end{aligned}$$

Wir beweisen die Aussage nun via Induktion über $d := \dim R = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

Ist $d = 0$, so kann $\mathfrak{m}$ von 0 Elementen erzeugt werden, d.h. $\mathfrak{m} = \{0\}$ und damit ist R ein Körper.

Sei nun $d \geq 1$ und $\wp_1, ..., \wp_r$ die minimalen Primideale von R (das sind nur endlich viele, vgl. die Bemerkung zu Beginn des Abschnitts.)

Da $\dim R = d > 0$ ist, kann $\mathfrak{m}$ nicht minimal sein. Also ist $\mathfrak{m} \not\subseteq \wp_i$ für alle $i = 1, ..., r$. Außerdem gilt: $\mathfrak{m} \not\subseteq \mathfrak{m}^2$, da $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 > 0$.

Mit dem Primidealvermeidungslemma ist folglich $\mathfrak{m} \not\subseteq \mathfrak{m}^2 \cup \wp_1 \cup \cdots \cup \wp_r$.

Wähle nun $x \in \mathfrak{m} \setminus (\mathfrak{m}^2 \cup \wp_1 \cdots \cup \wp_r)$ und ergänze $\overline{x}$ zu einer Basis $\{\overline{x}, \overline{x_2}, \cdots, \overline{x_d}\}$ von $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

$\pi\colon R \longrightarrow R/(x)$ bezeichne die kanonische Projektion. Nach Korollar 5.2 gilt

$$\dim R\big/(x) = d - 1.$$

Ferner gilt für das maximale Ideal $\pi(\mathfrak{m})$ in $R/(x)$, nach Lemma 5.4,

$$\dim_k \pi(\mathfrak{m})\big/\pi(\mathfrak{m})^2 \leq |\{\text{ Erzeuger von } \pi(\mathfrak{m})\}| \leq d - 1.$$

Auch ist $\dim_k \pi(\mathfrak{m})/\pi(\mathfrak{m})^2 \geq \dim R/(x)$, wieder nach Lemma 5.4.

Also gilt oben Gleichheit, d.h. $R/(x)$ ist regulär. Nach Induktionsvorrausetzung ist damit $R/(x)$ nullteilerfrei, d.h. (x) ist Primideal in R.

Damit gibt es ein $\wp_i$ mit $(x) \supsetneq \wp_i$. Sei nun $b \in \wp_i$. Also ist $b = a \cdot x$ mit $a \in R$. Da $\wp_i$ Primideal und $x \notin \wp_i$ ist, muss $a \in \wp_i$ gelten. Also ist

$$\wp_i = \wp_i x \text{ und damit } \wp_i = \wp_i \mathfrak{m}.$$

Nun liefert das Nakayama-Lemma $\wp_i = 0$, d.h R ist nullteilerfrei. $\square$

iv Nicht-singuläre Kurven

1 Divisoren

Sei $\mathcal{C}$ immer eine reguläre, projektive, zusammenhängende Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K.
Ziel: *Wir möchten die Divisorengruppe basteln und damit das Geschlecht definieren.*
DEFINITION 1.1: (a) Ein *Divisor* auf $\mathcal{C}$ ist eine formale Summe

$$D = \sum_{i=1}^{k} n_i P_i$$

mit $k \in \mathbb{N}$, $n_i \in \mathbb{Z}$ und $P_i \in \mathcal{C}$. Die Menge

$$\operatorname{Div} \mathcal{C} := \{D \mid D \text{ ist Divisor auf } \mathcal{C}\}$$

ist mit „+“ die freie abelsche Gruppe über $\mathcal{C}$. Sie heißt *Divisorengruppe*.

(b) Für $D = \sum_{i=1}^{k} n_i P_i \in \operatorname{Div} \mathcal{C}$ heißt $\deg D := \sum_{i=1}^{k} n_i$ der *Grad von* D.
$\deg\colon \operatorname{Div} \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{Z}$ ist also ein Gruppenhomomorphismus.

(c) $D = \sum n_i P_i$ heißt *effektiv*, wenn alle $n_i \geq 0$ sind. Wir schreiben dann $D \geq 0$.

BEMERKUNG 1.2: (a) Divisoren können allgemein auch für irreduzible Varietäten höherer Dimension definiert werden, also als endliche Summen von „Primdivisoren“, d.h. irreduzible Untervarietäten von Kodimension 1.

(b) Im Spezialfall Kurven gilt für die zugehörigen lokalen Ringe: $\mathcal{O}_{\mathcal{C},P}$ ist ein noetherscher lokaler Ring von Dimension 1 und $\dim_K \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 = 1$. Nach Algebra II gilt also:

- $(\mathcal{O}_{\mathcal{C},P}, \mathfrak{m}_P)$ ist ein diskreter Bewertungsring.
- $(\mathcal{O}_{\mathcal{C},P}, \mathfrak{m}_P)$ ist ein Hauptidealring.
- Für alle $x \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},P} \setminus \{0\}$ gibt es $u \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},P}^{\times}$ und $n \in \mathbb{N}_0$, so dass $x = ut^n$, wobei t ein Erzeuger von $\mathfrak{m}_P$ ist. So ein t nennen wir auch *Uniformisierende*.
- $\nu_P\colon K(\mathcal{C})^{\times} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $\frac{f}{g} \longmapsto n_1 - n_2$, wobei $f = u_1 t^{n_1}$ und $g = u_2 t^{n_2}$, ist eine diskrete Bewertung.

DEFINITION/BEMERKUNG 1.3: Sei $f \in K(\mathcal{C})^{\times}$. Dann gilt:

(a) $\operatorname{ord}_P f := \nu_P(f)$, mit ν_P wie in Bemerkung 1.2 (b), heißt *Ordnung von f in P*.

(b) $\operatorname{div} f := \sum_{P\in\mathcal{C}} \operatorname{ord}_P(f) \cdot P$ heißt *Divisor zu f*.

(c) Wir nennen $D \in \operatorname{Div}\mathcal{C}$ *Hauptdivisor*, wenn es $f \in K(\mathcal{C})^\times$ gibt, so dass $D = \operatorname{div} f$.

(d) Die Hauptdivisoren bilden eine Untergruppe $\operatorname{Div}_{\mathrm{H}}\mathcal{C}$ von $\operatorname{Div}\mathcal{C}$.

(e) $\mathcal{C}\ell(\mathcal{C}) := {}^{\operatorname{Div}\mathcal{C}}\big/_{\operatorname{Div}_{\mathrm{H}}\mathcal{C}}$ heißt *Divisorenklassengruppe.*

(f) $D, D' \in \operatorname{Div}\mathcal{C}$ heißen *linear äquivalent*, wenn $D - D' \in \operatorname{Div}_{\mathrm{H}}\mathcal{C}$ liegt.
In dem Fall schreiben wir $D \sim D'$ oder $D \cong D'$.

Beweis: (b) Wir müssen noch zeigen, dass die Summe wirklich endlich ist. Da $f \neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}_P f \neq 0 &\iff \operatorname{ord}_P f > 0 \text{ oder } -\operatorname{ord}_P f = \operatorname{ord}_P \tfrac{1}{f} > 0\\ &\iff P \in \mathfrak{V}(f) \text{ oder } P \in \mathfrak{V}\big(\tfrac{1}{f}\big).\end{aligned}$$

Aber $\mathfrak{V}(f)$ und $\mathfrak{V}\big(\frac{1}{f}\big)$ sind abgeschlossene echte Teilmenge einer Varietät von Dimension 1 und damit endlich. Damit gibt es auch nur endlich viele Summanden, die nicht 0 sind.

(d) Es gilt $\operatorname{div}(f \cdot g) = \operatorname{div} f + \operatorname{div} g$, $\operatorname{div}(1) = 0$ und $\operatorname{div} \frac{1}{f} = -\operatorname{div} f$, da ν_P ein Gruppenhomomorphismus ist. □

Beispiel 1.4: Sei $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1$. Dann können wir $f \in K(\mathcal{C})^\times$ als

$$f = \frac{\prod_{i=0}^{n}(X - a_i)}{\prod_{j=0}^{m}(X - b_j)}$$

schreiben und sehen, dass dann für $a \in \mathcal{C} \setminus \{\infty\}$

$$\operatorname{ord}_a f = |\{i \in \{1,\ldots,n\} \mid a_i = a\}| - |\{j \in \{1,\ldots,m\} \mid b_j = a\}|$$

gilt. Den Punkt $a = \infty$ fassen wir als $(0 : 1)$ auf und setzen ihn in das homogenisierte Polynom

$$\mathcal{H}(f) = \frac{\prod_{i=0}^{n}(X - a_iX_0)X_0^{M-n}}{\prod_{j=0}^{m}(X - b_jX_0)X_0^{M-m}},$$

wobei $M := \max\{m, n\}$ ist, ein und sehen damit, dass

$$\operatorname{ord}_\infty f = (M - n) - (M - m) = m - n.$$

Insgesamt sehen wir also:

$$\deg(\operatorname{div} f) = \sum_{a\in\mathbb{P}^1} \operatorname{ord}_a f = |\{a \mid \exists\, i : a = a_i\}| - |\{a \mid \exists\, j : a = b_j\}| + m - n$$
$$= n - m + m - n = 0.$$

Umgekehrt kann zu jedem Divisor D von Grad 0 so ein f gefunden werden, mit dem $D = \operatorname{div} f$ ist. Wir erhalten also:

$$\operatorname{Div}_{\mathrm{H}} \mathbb{P}^1 = \{D \in \operatorname{Div} \mathbb{P}^1 \mid \deg D = 0\} = \operatorname{Kern}(\deg).$$

Also ist $\mathcal{C}\ell(\mathbb{P}^1) \cong \operatorname{Bild}(\deg) = \mathbb{Z}$.

Definition/Bemerkung 1.5: Sei $f \in K(\mathcal{C})^\times$ und $P \in \mathcal{C}$.

(a) $\operatorname{ord}_P f = 0 \iff f \in \mathcal{O}_P^\times \iff f$ ist in P definiert und $f(P) \neq 0$.

(b) $\operatorname{ord}_P f > 0 \iff f \in \mathfrak{m}_P \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{C},P}$, d.h. f ist in P definiert und $f(P) = 0$.

(c) $\operatorname{ord}_P f < 0 \iff f$ kann nicht in P fortgesetzt werden, also ist $\frac{1}{f}$ in P definiert und es gilt $\frac{1}{f}(P) = 0$.
In diesem Fall heißt P *Polstelle.*

(d) Sei t die Uniformisierende, also $\mathfrak{m}_P = \langle t\rangle$. Dann gibt es ein $u \in \mathcal{O}_P^\times$, so dass

$$f = u t^{\operatorname{ord}_P f}.$$

Proposition 1.6: Sei $\mathcal{C}$ eine reguläre Kurve (nicht notwendigerweise projektiv), $P \in \mathcal{C}$, sowie X eine projektive Varietät und $f\colon \mathcal{C} \setminus \{P\} \longrightarrow X$ ein Morphismus. Dann existiert ein Morphismus

$$\overline{f}\colon \mathcal{C} \longrightarrow X, \quad \overline{f}|_{\mathcal{C}\setminus\{P\}} = f,$$

der f fortsetzt.

Beweis: Sei $X \subseteq \mathbb{P}^n$. Dann ist, ohne Einschränkung, $X \not\subseteq \mathfrak{V}(X_i)$ für alle $i \in \{0,\dots,n\}$, denn ansonsten wählen wir n einfach kleiner.

Sei $\mathfrak{U}_i = \mathbb{P}^n \setminus \mathfrak{V}(X_i)$. Dann gilt für $U := \bigcap_{i=0}^{n} \mathfrak{U}_i$, dass

$$W := f^{-1}(U) = \bigcap_{i=0}^{n} f^{-1}(\mathfrak{U}_i) \neq \varnothing$$

ist und, da offen, damit dicht in $\mathcal{C}$ liegt, da f als Morphismus stetig ist.

Sei außerdem $h_{ij} = \frac{x_i}{x_j} \circ f$. Dann ist h_{ij} eine reguläre Funktion auf $W \setminus \{P\}$. Insbesondere definiert jedes h_{ij} ein Element im Funktionenkörper, wir können also $h_{ij} \in K(\mathcal{C})^\times$ auffassen.

Sei $r_i := \operatorname{ord}_P h_{i0}$. Wähle k mit r_k minimal. Dann ist

$$\operatorname{ord}_p(h_{ik}) = \operatorname{ord}_p\left(\frac{h_{i0}}{h_{k0}}\right) = r_i - r_k \geq 0$$

und nach Definition/Bemerkung 1.5 liegt P somit im Definitionsbereich von h_{ik}, d.h. es gibt eine Umgebung $\widetilde{W}$ von P mit $h_{ik} \in \mathcal{O}_{\widetilde{W}}$.
Insbesondere ist auf $\widetilde{W}$, nach gleicher Argumentation, $\operatorname{ord}_P h_{kk} = 0$, also $h_{kk}(P) \neq 0$.
Nun definieren wir $\overline{f}$ durch

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq p, \\ (h_{0k}(p) : \cdots : h_{nk}(p)), & x = p. \end{cases}$$

Dann ist $\overline{f}$ ein Morphismus, denn für $x \in \widetilde{W}$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \big(f_0(x) : \cdots f_n(x)\big) = \big((x_0 \circ f)(x) : \cdots : (x_n \circ f)(x)\big) \\ &= \big(\big(\tfrac{x_0}{x_k} \circ f\big)(x) : \cdots : \big(\tfrac{x_n}{x_k} \circ f\big)(x)\big) = \big(h_{0k}(x) : \cdots : h_{nk}(x)\big). \end{aligned}$$

Damit ist aber auch $\overline{f}(p) \in X$, denn ist X ist abgeschlossen. □

Damit gilt auch:

KOROLLAR 1.7: Jede rationale Abbildung $\mathcal{C} \longrightarrow X$ für eine projektive Varietät X lässt sich zu einem Morphismus von $\mathcal{C}$ nach X fortsetzen.

KOROLLAR 1.8: Sind zwei zusammenhängende reguläre projektive Kurven $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ birational äquivalent, so sind sie bereits isomorph.

Beweis: Seien $\Psi_1 \colon \mathcal{C}_1 \dashrightarrow \mathcal{C}_2$ und $\Psi_2 \colon \mathcal{C}_2 \dashrightarrow \mathcal{C}_1$ mit $\Psi_1 \circ \Psi_2 = \mathrm{id}$ und $\Psi_2 \circ \Psi_1 = \mathrm{id}$. Dann lassen diese sich nach Korollar 1.7 zu $\overline{\Psi_1}$, bzw. $\overline{\Psi_2}$ fortsetzen. Damit gilt, jeweils auf einer dichten Teilmenge, $\overline{\Psi_1} \circ \overline{\Psi_2} = \mathrm{id}$ und $\overline{\Psi_2} \circ \overline{\Psi_1} = \mathrm{id}$ und damit, da die Kurven zusammenhängend sind, schon jeweils auf der ganzen Kurve. □

2 Verzweigungsindizes

In diesem Abschnitt seien $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ reguläre projektive zusammenhängende Kurven und $f \colon \mathcal{C}_1 \twoheadrightarrow \mathcal{C}_2$ ein surjektiver Morphismus.

DEFINITION/BEMERKUNG 2.1: (a) Sei $Q \in \mathcal{C}_2$, $P \in f^{-1}(Q)$ und t Uniformisierende in Q, also $\mathfrak{m}_Q = \langle t \rangle$. Dann heißt

$$e_P := e_P(f) := \operatorname{ord}_P(t \circ f) = \nu_P(t \circ f)$$

Verzweigungsgrad von f in P.

(b) Wir definieren einen Gruppenhomomorphismus $f^* \colon \operatorname{Div} \mathcal{C}_2 \longrightarrow \operatorname{Div} \mathcal{C}_1$ durch

$$Q \longmapsto \sum_{P \in f^{-1}(Q)} e_P \cdot P.$$

(c) Es gilt $f^*(\operatorname{div} g) = \operatorname{div}(g \circ f)$.

(d) f^* steigt zu einem Homomorphismus von $\mathcal{C}\ell(\mathcal{C}_2)$ nach $\mathcal{C}\ell(\mathcal{C}_1)$ ab.

Beweis: (a) Wir zeigen, dass e_P nicht von der Wahl von t abhängt: Sei dazu $t' = ut$ mit $u \in \mathcal{O}_Q^\times$ auch Uniformisierende. Dann gilt

$$\operatorname{ord}_P(t' \circ f) = \operatorname{ord}_P\big((u \circ f) \cdot (t \circ f)\big) = 0 + \operatorname{ord}_P(t \circ f),$$

da mit u auch $u \circ f$ eine Einheit ist.

(b) Die Summe ist endlich, denn $f^{-1}(Q)$ ist eine abgeschlossene echte Teilmenge von $\mathcal{C}_1$ und damit endlich.

(c) Es gilt, nach Definition,

$$f^*(\operatorname{div} g) = \sum_{P \in \mathcal{C}_2} \operatorname{ord}_P(g) \cdot f^*(P) = \sum_{P \in \mathcal{C}_2} \operatorname{ord}_P(g) \sum_{Q \in f^{-1}(P)} e_Q(f) \cdot Q$$

und

$$\operatorname{div}(g \circ f) = \sum_{Q \in \mathcal{C}_1} \operatorname{ord}_Q(g \circ f) \cdot Q = \sum_{P \in \mathcal{C}_2} \sum_{Q \in f^{-1}(P)} \operatorname{ord}_Q(g \circ f) \cdot Q,$$

da $\mathcal{C}_1$ gerade die Vereinigung der Urbilder von f ist. Es genügt also zu zeigen, dass für $P \in \mathcal{C}_2$ und $Q \in f^{-1}(P)$

$$\operatorname{ord}_Q(g \circ f) = \operatorname{ord}_P(g) \cdot e_Q(f)$$

ist. Es sei also $q := \operatorname{ord}_Q(g \circ f)$. Dann finden wir eine Uniformisierende $t_Q \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}_1,Q}$ und $u_1 \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}_1,Q}^\times$, so dass $g \circ f = u_1 \cdot t_Q^q$. Genauso finden wir für $r := \operatorname{ord}_P(g)$ eine Uniformisierende t_P und $u_2 \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}_2,P}$ mit $g = u_2 \cdot t_P^r$. Außerdem haben wir $s := e_Q(f) = \operatorname{ord}_Q(t_P \circ f)$, also $u_3 \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}_1,Q}^\times$ mit $t_P \circ f = u_3 \cdot t_Q^s$. Nun gilt, mit Hilfe des Einsetzungshomomorphismus,

$$\begin{aligned} u_1 \cdot t_Q^q = g \circ f &= \big(u_2 \cdot t_P^r\big) \circ f = \big(u_2 \circ f\big) \cdot \big(t_P \circ f\big)^r \\ &= \big(u_2 \circ f\big) \cdot \big(u_3 \cdot t_Q^s\big)^r = \big(u_2 \circ f\big) \cdot u_3^r \cdot t_Q^{rs}. \end{aligned}$$

Da aber auch $u_2 \circ f$ und u_3^r Einheiten in $\mathcal{O}_{\mathcal{C}_1,Q}$ sind, haben die Ausdrücke die selbe Bewertung und damit ist $q = rs$, wie behauptet.

(d) folgt aus (c), da Hauptdivisoren auf Hauptdivisoren abgebildet werden. □

Beispiel 2.2: Sei $K = \mathbb{C}$, $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ und $f \colon X \longmapsto X^3$.

- Für $P = 0$ ist $t = X$, also $t \circ f = X^3$ und damit $e_0 = \operatorname{ord}_0(t \circ f) = 3$.
- Für $P = a \in \mathbb{C}^\times$ ist $t = X - a^3$ und damit, mit einer dritten Einheitswurzel ζ,
$$e_a = \operatorname{ord}_a(X^3 - a^3) = \operatorname{ord}_a\big((X-a)(X-\zeta a)(X-\zeta^2 a)\big) = 1,$$
da nur $(X - a)$ keine Einheit ist.

- Für $P = \infty$ ist $t = \frac{1}{X}$ und damit ist
$$e_\infty = \operatorname{ord}_\infty\left(\tfrac{1}{X^3}\right) = 3 = -\operatorname{ord}_\infty f.$$

DEFINITION 2.3: So ein Morphismus f induziert $f^\sharp \colon K(\mathcal{C}_2) \hookrightarrow K(\mathcal{C}_1)$, wir können also $K(\mathcal{C}_1)$ als Körpererweiterung von $K(\mathcal{C}_2)$ auffassen. Wir definieren
$$\deg f := [K(\mathcal{C}_1) : K(\mathcal{C}_2)].$$

BEMERKUNG: Da $\operatorname{trdeg}_K(\mathcal{C}_1) = \operatorname{trdeg}_K(\mathcal{C}_2) = 1$ ist diese Körpererweiterung algebraisch.

Satz 7: *Seien $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ zusammenhängende reguläre projektive Kurven und $f \colon \mathcal{C}_1 \twoheadrightarrow \mathcal{C}_2$ ein surjektiver Morphismus, dann gilt:*

(a) Für $Q \in \mathcal{C}_2$ ist $\displaystyle\sum_{P \in f^{-1}(Q)} e_P(f) = n := \deg(f)$.

(b) Für jeden Divisor D auf $\mathcal{C}_2$ gilt $\deg(f^*D) = \deg(D) \cdot \deg(f)$.

BEMERKUNG: Die Aussage (b) folgt direkt aus (a), denn sei $D := \sum n_i P_i$, dann ist
$$\deg(f^*D) = \deg\left(\sum_{i=1}^k n_i \sum_{P \in f^{-1}(P_i)} e_P P\right) = \sum_{i=1}^k n_i \sum_{P \in f^{-1}(P_i)} e_P = \deg(D)\deg(f).$$

Der BEWEIS von (a) kommt später.

KOROLLAR 2.4: Sei $\mathcal{C}$ eine projektive, zusammenhängende, reguläre Kurve. Dann gilt:

(a) Alle Hauptdivisoren auf $\mathcal{C}$ haben Grad 0.

(b) Die Abbildung $\deg \colon \mathcal{C}\ell(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbb{Z}$, $[D] \longmapsto \deg D$ ist wohldefiniert.

Beweis: (a) Sei $f \in K(C)^\times$. Dann lässt f sich nach Korollar 1.7 zu einem Morphismus von $\mathcal{C}$ nach $\mathbb{P}^1$ fortsetzen. Dann gilt
$$\deg(\operatorname{div} f) = \sum_{P \in \mathcal{C}} \operatorname{ord}_P(f) = \sum_{P \in f^{-1}(0)} \operatorname{ord}_P(f) + \sum_{P \in f^{-1}(\infty)} \operatorname{ord}_P(f),$$
da nur Null- und Polstellen von 0 verschiedene Ordnung haben.

Wie in Beispiel 2.2 wählen wir $t = X$ als Uniformisierende in 0 und $t = \frac{1}{X}$ als Uniformisierende in ∞. Damit ist, für $P \in f^{-1}(0)$,
$$e_P = \operatorname{ord}_P(X \circ f) = \operatorname{ord}_P(f)$$
und, für $P \in f^{-1}(\infty)$,
$$e_P = \operatorname{ord}_P\left(\tfrac{1}{x} \circ f\right) = \operatorname{ord}_P\left(\tfrac{1}{f}\right) = -\operatorname{ord}_P(f).$$

Insgesamt erhalten wir so, nach Definition von f^* und mit Hilfe von Satz 7 (b),
$$\deg(f) = \sum_{P \in f^{-1}(0)} e_P - \sum_{P \in f^{-1}(\infty)} e_P = \deg\big(f^*(0 - \infty)\big) = \deg(f) \cdot \deg\big(0 - \infty\big) = 0,$$
wobei 0 bzw. ∞ die Divisoren sind, bei denen $n_0 = 1$ bzw. $n_\infty = 1$ und alle anderen $n_P = 0$ sind.

(b) folgt sofort aus (a) mit Definition/Bemerkung 1.3 (e). □

Erinnerung: Aus Algebra II wissen wir, dass für einen nullteilerfreien Ring R, der kein Körper ist, gilt:

$$\begin{array}{rcl} R \text{ ist ein Dedekindring} & \Longleftrightarrow & R \text{ ist eindimensional und normal} \\ & \Longleftrightarrow & \begin{array}{c}\text{Für jedes Primideal } \wp \neq 0 \text{ ist } R_\wp \\ \text{ein diskreter Bewertungsring.}\end{array} \end{array}$$

Bemerkung 2.5 (ohne Beweis): Sei $\mathcal{C}$ eine affine Varietät. Dann ist $\mathcal{C}$ genau dann eine zusammenhängende reguläre Kurve, wenn $K[\mathcal{C}]$ ein Dedekindring ist.

Bemerkung 2.6: Sei V irreduzible projektive Varietät in $\mathbb{P}^n$.

(a) Sind $P_1,\dots,P_{N+1}$ endlich viele Punkte, so liegen sie in einer offenen, affinen Teilmenge U von V.

(b) Es gibt ein $v \in K(V)$ mit $v \notin \mathcal{O}_{N+1}, v \in \mathcal{O}_i$ für $i \in \{1,\dots,N\}$.

Beweis: (a) Nach LA gibt es ein lineares $F \in K[X_0,\dots,X_n]$ mit $F(P_i) \neq 0$ $(\forall i)$. Nach Koordinatenwechsel ist $F = X_0$ und $\mathfrak{U}_0 = \mathbb{P}^n \setminus \mathfrak{V}(F)$. Also sind

$$P_1,\dots,P_{N+1} \in U := \mathfrak{U}_0 \cap V$$

und dies ist eine affine Varietät.

(b) Sei U wie in (a) mit $P_1,\dots,P_{N+1} \in U$. Wähle $h \in \mathcal{O}(U) = K[U]$ mit

$$h(P_1),\dots,h(P_N) \neq 0 \text{ und } h(P_{N+1}) = 0.$$

Das geht nach dem Primidealvermeidungslemma. Nun erfüllt $v := \frac{1}{h}$ das Gewünschte. □

Lemma 2.7: Sei $f\colon \mathcal{C}_1 \twoheadrightarrow \mathcal{C}_2$ ein surjektiver Morphismus zwischen projektiven regulären zusammenhängenden Kurven. Dann gilt:

Wenn $V \subseteq \mathcal{C}_2$ offen und affin ist, dann ist $f^{-1}(V)$ offen und affin in $\mathcal{C}_1$.

Beweis: (1) Zuerst konstruieren wir ein potentielles $f^{-1}(V) =: \widetilde{V}$. Dazu betrachten wir

$$B := K[V] \hookrightarrow K(\mathcal{C}_2) \xhookrightarrow{f^*} K(\mathcal{C}_1)$$

und bezeichnen den ganzen Abschluss von B in $K[\mathcal{C}_1]$ mit A. Aus Algebra II wissen wir, dass A dann ein endlich-erzeugter B-Modul ist (Algebra II, Satz 15, bzw. Shafarevich II.5, Thm. 4). A ist also eine endlich-erzeugte K-Algebra und nullteilerfrei, da $A \subseteq K(\mathcal{C}_1)$. Es gibt also ein affines $\widetilde{V}$ mit $A = K[\widetilde{V}]$ und

$$K(\widetilde{V}) = \mathrm{Quot}(A) = K(\mathcal{C}_1).$$

Nach Satz 4 ist $\widetilde{V}$ somit birational äquivalent zu $\mathcal{C}_1$. Außerdem ist $\widetilde{V}$ eine reguläre irreduzible Kurve, da $A = K[\widetilde{V}]$ ein Dedekindring ist. Nach Korollar 1.8 ist der Abschluss $\overline{\widetilde{V}}$ isomorph zu $\mathcal{C}_1$, wir können $\widetilde{V}$ also als Teilmenge von $\mathcal{C}_1$ auffassen.

(2) Zeige nun: $\widetilde{V} = f^{-1}(V)$

Angenommen, es gäbe $P_0 \in \mathcal{C}_1 \setminus \widetilde{V}$ mit $f(P_0) = Q \in V$. Seien $P_1,\ldots,P_k$ alle Urbilder von $Q = f(P_0)$, die auch in $\widetilde{V}$ liegen. Nach Bemerkung 2.6 (b) kann man nun ein $v \in K(\mathcal{C}_1)$ mit $v \notin \mathcal{O}_{P_0}$ und $v \in \mathcal{O}_{P_i}$ $\forall i \in \{1,\ldots,k\}$ wählen.

(a) Wir zeigen: Man kann ohne Einschränkung annehmen, dass v keine Polstelle in $\widetilde{V}$ hat.

Ist nämlich $x \in \widetilde{V}$ eine Polstelle, so setzt man $y = f(x) + Q$. Wir wählen nun $h \in B = K[V]$ mit $h(Q) \neq 0$, $h(y) = 0$, d.h. $h \in \mathfrak{m}_y^v \setminus \mathfrak{m}_Q^v$.

Für $v' := v..(h \circ f)$gilt damit:

$$\operatorname{ord}_x v' = \operatorname{ord}_x(v) + \operatorname{ord}_x(h \circ f) \geq \operatorname{ord}_x(v) + 1,$$

da $f(x) = y$ Nullstelle in h ist.

Außerdem gilt $\operatorname{ord}_{P_i} v' = \operatorname{ord}_{P_i} v + 0$ und es sind keine neuen Pole in $\widetilde{V}$ entstanden, da h auf ganz V regulär ist. Durch mehrmaliges Anwenden dieses Verfahrens kann man alle Polstellen entfernen.

(b) Somit ist v nun aus $A = K[V]$ und damit ganz über B.

Also gibt es $b_0,\ldots,b_{n-1} \in B$ mit

$$v^n + b_{n-1}v^{n-1} + \cdots + b_0 = 0,$$

d.h. $v = -b_{n-1} - \frac{b_{n-2}}{v} - \cdots - \frac{b_0}{v^{n-1}}$.

Da $v \notin \mathcal{O}_{P_0}$ ist, ist die linke Seite nicht in P_0 definiert, aber es ist $\frac{1}{v} \in \mathcal{O}_{P_0}$. Demnach ist die rechte Seite in P_0 definiert, da $b_i \circ f$ auf ganz $f^{-1}(V)$ regulär ist, was ein Widerspruch ergibt. $\square$

Ab jetzt sei stets V eine affine Umgebung von Q, also ist nach Lemma 2.7 $\widetilde{V} = f^{-1}(V)$ affin.
Außerdem sei $B = K[V]$, $A = K[\widetilde{V}]$ ist dann der ganze Abschluss von B in $K(\mathcal{C}_1)$.

LEMMA 2.8: Seien $P_i \in \mathcal{C}_1$ und $\widetilde{\mathcal{O}} := \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{O}_{P_i} \subseteq K(\mathcal{C}_1)$. Dann gilt:

(a) $\widetilde{\mathcal{O}}$ ist Hauptidealring.

(b) Es gibt $t_1,\ldots,t_k \in \widetilde{\mathcal{O}}$ mit $\operatorname{ord}_{P_i}(t_j) = \delta_{ij}$.

(c) Jedes $v \in \widetilde{\mathcal{O}}$ lässt sich eindeutig schreiben als

$$v = u \cdot t_1^{e_1} \cdots t_k^{e_k}$$

mit $u \in \widetilde{\mathcal{O}}^{\times}$, $e_i = \nu_{P_i}(v)$.

Beweis: (b) Sei $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m}_{P_i}^{\widetilde{V}} \subseteq A$ und $\widetilde{t_i}$ Uniformisierende, d.h. $\mathfrak{m}_{P_i} = (\widetilde{t_i}) \subseteq \mathcal{O}_{P_i}$. Wie im Beweis von Lemma 2.7 kann $\widetilde{t_i}$ ohne Einschränkung als regulär vorrausgesetzt werden.

Um die t_i zu konstruieren, wählen wir zuerst $g_i \in A = K[\widetilde{V}]$ mit:

$$g_i(P_i) \neq 0 \text{ und } g_i(P_j) = 0 \quad \text{wobei } i, j \in \{1,..., k\} \text{ und } i \neq j.$$

Sei $t_1 = \widetilde{t_1} + \sum_{j=2}^{k} \alpha_j \cdot g_j^2$ mit $\alpha_j \in K$, $\alpha_j \neq \dfrac{-\widetilde{t_1}(P_j)}{(g_j(P_j))^2}$.

Dann ist $t_1(P_j) = \widetilde{t_1}(P_j) + \alpha_j(g_j(P_j))^2 \neq 0$, $t_1(P_1) = 0$ und

$$\widetilde{t_1} + \sum_{j=2}^{k} \alpha_j \cdot g_j^2 \in \mathfrak{m}_{P_1} \setminus \mathfrak{m}_{P_1}^2,$$

da die $g_j \in \mathfrak{m}_{P_1}^2$ und $\widetilde{t_1} \in \mathfrak{m}_{P_1} \setminus \mathfrak{m}_{P_1}^2$ sind.

Also ist $v_{P_1}(t_1) = 1$, d.h. t_1 tut Gewünschtes. Analog konstruiert man $t_2,..., t_k$.

(c) folgt aus (b), denn wir setzen

$$u = \frac{v}{t_1^{\operatorname{ord}_{P_1}(v)} \cdots t_k^{\operatorname{ord}_{P_k}(v)}}$$

und sehen, dass $\operatorname{ord}_{P_i}(u) = 0$ (für jedes i) ist, also ist $u \in \widetilde{\mathcal{O}}$.

(a) folgt aus (c): Sei I ein Ideal in $\widetilde{\mathcal{O}}$, dann ist

$$I = (t_1^{e_1} \cdots t_k^{e_k}),$$

wobei $e_i = \inf\{\operatorname{ord}_{P_i}(v) \mid v \in I\}$. □

Lemma 2.9: Es gilt:

(a) $\widetilde{\mathcal{O}} = A \cdot \mathcal{O}_Q = \{a \cdot (h \circ f) \mid a \in A_i, h \in \mathcal{O}_Q\}$

(b) $\widetilde{\mathcal{O}}$ ist ein freier $\mathcal{O}_Q$-Modul vom Rang $n = \deg f$. Dabei fasst man wiederum $\mathcal{O}_Q$ via f^* als Teilring von $\widetilde{\mathcal{O}}$ auf.

Beweis: (a) Seien $w \in \widetilde{\mathcal{O}}$, $x_1,..., x_r$ die Polstellen von w und $y_1,..., y_r$ ihre Bilder. Seien weiterhin $l_i = \operatorname{ord}_{x_i}(w)$ und $-n = \min\{l_1,..., l_r\}$.

Wir wählen $h' \in B$ mit $h'(y_i) = 0$ und $h'(Q) \neq 0$ und setzen $h = (h')^N$.

Dann ist $a := w \cdot (h \circ f) \in A$ und $h \in \mathcal{O}_Q^{\times}$. Folglich ist $w = a \cdot (h \circ f)^{-1}$.

(b) A ist der ganze Abschluss von B in $K(\mathcal{C}_1)$ und damit endlich erzeugt als B-Modul (vgl. Lemma 2.7). Nach (a) ist $\widetilde{\mathcal{O}}$ endlich erzeugt als $\mathcal{O}_Q$-Modul.

Weiter ist $\widetilde{\mathcal{O}}$ torsionsfrei, d.h. $\widetilde{\mathcal{O}}$ ist ein freier $\mathcal{O}_Q$-Modul (Hauptsatz über Moduln von Hauptidealringen, siehe z.B. Bosch).

Ferner ist $\operatorname{Rang}_{\mathcal{O}_Q}(\widetilde{\mathcal{O}}) \leq \dim_{K(\mathcal{C}_2)} K(\mathcal{C}_1)$, da $K(\mathcal{C}_2) = \operatorname{Quot}(\mathcal{O}_Q)$ gilt.

Sei $\{\alpha_1,..., \alpha_n\}$ eine Basis von $K(\mathcal{C}_1)/K(\mathcal{C}_2)$, und l die maximale Polstellenordnung in den P_i's. Dann sind $\alpha_1 \cdot t^l,..., \alpha_n \cdot t^l$ linear unabhängig und in $\widetilde{\mathcal{O}}$. Damit ist $\operatorname{Rang}(\widetilde{\mathcal{O}}) \geq n$, d.h. $\widetilde{\mathcal{O}}$ ist frei vom Rang n. □

Beweis von Satz 7 (a): Zu zeigen ist:

$$n = \deg(f) = \sum_{i=1}^{k} e_{P_i} = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{ord}_{P_i}(t \circ f),$$

wobei $(t) = \mathfrak{m}_Q$.

Da $t \circ f \in \widetilde{\mathcal{O}}$ liefert Lemma 2.8: $t \circ f = u \cdot t_1^{e_{P_1}} \cdots t_k^{e_{P_k}}$, wobei $u \in \widetilde{\mathcal{O}}$. Mit dem Chinesischen Restsatz folgt

$$\widetilde{\mathcal{O}} \Big/ (t \circ f) \cong \bigoplus_{i=1}^{k} \widetilde{\mathcal{O}} \Big/ (t_i^{e_{P_i}}) \cong \bigoplus_{i=1}^{k} K^{e_{P_i}}.$$

Also ist $\dim_K \widetilde{\mathcal{O}}/(t \circ f) = \sum_{i=1}^{k} e_{P_i}$.

Andererseits ist $\widetilde{\mathcal{O}} \cong \mathcal{O}_Q^n \longrightarrow (\mathcal{O}_a/(t))^n \cong K^n$.

Damit gilt $\widetilde{\mathcal{O}}/(t \cdot \widetilde{\mathcal{O}}) = \widetilde{\mathcal{O}}/(t \circ f) \cong K^n$ und damit ist $\dim_K \widetilde{\mathcal{O}}/(t \circ f) = n$. □

3 Das Geschlecht einer Kurve

Sei $\mathcal{C}$ immer eine nicht-singuläre, zusammenhängende, projektive Kurve.

DEFINITION/BEMERKUNG 3.1: (a) Sei D ein Divisor. Dann nennen wir

$$\mathcal{L}(D) := \{f \in K(\mathcal{C})^\times \mid D + \operatorname{div}(f) \text{ ist effektiv}\} \cup \{0\}$$

den *Riemann-Roch-Raum von D*. $\mathcal{L}(D)$ ist ein K-Vektorraum, da für $P \in \mathcal{C}$ immer

$$\operatorname{ord}_P(f+g) \geq \min\{\operatorname{ord}_P(f), \operatorname{ord}_P(g)\} \text{ gilt.}$$

(b) Wir setzen $\ell(D) := \dim_K \mathcal{L}(D)$.

(c) Für einen Divisor $D = \sum n_P P$ nennen wir $\{P \in \mathcal{C} \mid n_P \neq 0\}$ den *Träger von D*.

BEMERKUNG 3.2: (a) Es gilt $\mathcal{L}(0) = K$ und $\ell(0) = 1$.

(b) Ist $\deg D < 0$, so gilt schon $\mathcal{L}(D) = \{0\}$ und $\ell(D) = 0$.

(c) Ist $D \sim D'$, so gilt $\ell(D) = \ell(D')$.

Insbesondere ist ℓ somit auf $\mathcal{C}\ell(\mathcal{C})$ wohldefiniert.

Beweis: (a) Nach Satz 5 (a) sind die regulären Funktionen alle konstant.

(b) Nach Korollar 2.4 ist $\deg(\operatorname{div}(f)) = 0$ und damit ist der Grad von $D + \operatorname{div}(f)$ kleiner als 0 und somit ist der Divisor für kein f effektiv.

(c) Sei $g \in K(\mathcal{C})^\times$ mit $D' = D + \operatorname{div} g$. Dann gilt

$$\operatorname{div} f + D' \geq 0 \iff 0 \leq \operatorname{div} f + \operatorname{div} g + D = \operatorname{div}(fg) + D,$$

also erhalten wir einen Vektorraumisomorphismus durch

$$\mathcal{L}(D') \longrightarrow \mathcal{L}(D), \quad f \longmapsto fg,$$

und damit sind die Dimensionen der beiden Räume gleich. □

Satz 8 (Riemann)**:** *(a) Ist $D \in \operatorname{Div}\mathcal{C}$ mit $\deg D \geq -1$, so gilt:*

$$\ell(D) \leq \deg D + 1.$$

(b) Es gibt ein $\gamma \in \mathbb{N}_0$, so dass für alle $D \in \operatorname{Div}\mathcal{C}$

$$\deg D + 1 - \gamma \leq \ell(D).$$

Definition 3.3: Das kleinste γ, für das Satz 8 (b) erfüllt ist, nennen wir das *Geschlecht von $\mathcal{C}$*. Wir schreiben auch $\mathfrak{g}(\mathcal{C})$ oder $\mathfrak{g}$.

Bemerkung 3.4: Ist $\mathcal{C} \cong \mathcal{C}'$, so ist $\mathfrak{g}(\mathcal{C}) = \mathfrak{g}(\mathcal{C}')$, da schon die Divisorengruppen gleich sind.

Lemma 3.5: Seien $D \in \operatorname{Div}(\mathcal{C})$ und $P_0 \in \mathcal{C}$. Dann ist

$$\mathcal{L}(D) \subseteq \mathcal{L}(D + P_0) \text{ und } \ell(D + P_0) \leq \ell(D) + 1.$$

Beweis: Sei $D := \sum_{P \in \mathcal{C}} n_P P$.

Dass $\mathcal{L}(D) \subseteq \mathcal{L}(D+P_0)$ ist klar, denn für $f \in \mathcal{L}(D)$ gilt $\operatorname{ord}_{P_0}(f) \geq -n_0 := -n_{P_0}$ und damit liegt f insbesondere in $\mathcal{L}(D + P_0)$. Wir sehen sogar, dass für

$$f \in \mathcal{L}(D + P_0) \setminus \mathcal{L}(D) \text{ dann } \operatorname{ord}_{P_0}(f) = -(n_0 + 1)$$

gelten muss.

Um die zweite Aussage einzusehen, nehmen wir zunächst an, dass $\ell(D+P_0) < \infty$. Sei also $f_1,\ldots, f_r$ eine Basis von $\mathcal{L}(D+P_0)$, wobei $f_1,\ldots, f_s \notin \mathcal{L}(D)$ und $f_{s+1},\ldots, f_r \in \mathcal{L}(D)$. Sei t ein Erzeuger von $\mathfrak{m}_{P_0}$. Dann finden wir für $i \in \{1,\ldots, s\}$ jeweils $u_i \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},P_0}^{\times}$ mit

$$f_i = u_i t^{-(n_0+1)}.$$

Damit definieren wir $g_i := u_i(P_0) \cdot f_1 - u_1(P_0) \cdot f_i$ und sehen, dass damit

$$g_i = t^{-(n_0+1)} \cdot \big(u_i(P_0) \cdot u_1 - u_1(P_0) \cdot u_i\big), \text{ wobei } u_i(P_0) \cdot u_1 - u_1(P_0) \cdot u_i \in \mathfrak{m}_{P_0},$$

da der Ausdruck in P_0 verschwindet. Damit ist aber $\operatorname{ord}_{P_0}(g_i) \geq -n_0$, also sind die g_i schon aus $\mathcal{L}(D)$.

Nun sind aber $g_2,\ldots, g_s, f_{s+1},\ldots, f_r$ linear unabhängig und in $\mathcal{L}(D)$, es gilt also, wie behauptet,

$$\ell(D) \geq r - 1 = \ell(D + P_0) - 1.$$

Mit gleichem Argument sieht man aber nun, dass aus $\ell(D + P_0) = \infty$ schon $\ell(D) = \infty$ folgt, die Aussage also auch in diesem Fall stimmt. □

Beweis von Satz 8: (a) Wir zeigen $\ell(D) \leq \deg(D) + 1$ durch vollständige Induktion über $\deg D =: d$.

Für $\deg D = -1$ gilt nach Bemerkung 3.2 (b) $\ell(D) = 0$, wir beschränken uns demnach auf $\deg D \in \mathbb{N}_0$.

Sei also zuerst $d = 0$ und seien $f, g \in \mathcal{L}(D)$. Dann ist $\operatorname{div}(f) + D \geq 0$ und es gilt sogar $\operatorname{div}(f) + D = 0$, da beide von Grad 0 sind. Gleiches gilt für g und damit erhalten wir

$$\operatorname{div} f = -D = \operatorname{div} g.$$

Damit ist auch $\operatorname{div}\left(\frac{f}{g}\right) = 0$ und $\frac{f}{g}$ somit, nach Satz 5 (a), konstant, da $\frac{f}{g}$ hier schon regulär ist.

Sei nun $d \geq 1$. Wir schreiben $D = \sum n_i P_i$ und wählen ein P_i mit $n_i > 0$. Für $D' := D - P_i$ ist dann $\deg D' = \deg D - 1$ und nach Lemma 3.5 gilt, zusammen mit der Induktionsvoraussetzung,

$$\ell(D) = \ell(D' + P_i) \leq \ell(D') + 1 \leq d + 1.$$

(b) Wir setzen $s(D) := \deg D + 1 - \ell(D)$ und zeigen, dass es ein $\gamma \in \mathbb{N}$ mit $s(D) \leq \gamma$, für alle $D \in \operatorname{Div} \mathcal{C}$, gibt.

Wir erinnern uns, dass nach Bemerkung 3.2 (c) und Korollar 2.4 (b)

$$D \sim D' \implies s(D) = s(D')$$

gilt. Außerdem überlegen wir uns, dass es für $D = \sum n_P P$ und $D' = \sum n'_P P$ mit $D' \leq D$ Punkte $P_1, \ldots, P_k$ mit $n'_{P_i} \leq n_{P_i}$ gibt, an allen anderen Stellen sind sie gleich. Lemma 3.5 liefert dann iterativ, dass

$$\ell(D) \leq \ell(D') + \sum_{i=1}^{k} (n_{P_i} - n'_{P_i}) = \ell(D') + \deg D - \deg D'.$$

Das bedeutet aber gerade, dass hier $s(D') \leq s(D)$ ist. Wir zeigen nun:

(1) Für alle $D \in \operatorname{Div} \mathcal{C}$ gibt es $D' \in \operatorname{Div} \mathcal{C}$ mit $D \sim D'$, so dass $D' \leq k \cdot N$, wobei $k \in \mathbb{N}$ und N für $f \in K(\mathcal{C}) \setminus K$ der *Nullstellendivisor* f^*0 ist.

(2) Es gibt ein $\gamma \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$ damit $s(k \cdot N) \leq \gamma$ gilt.

Dann folgt die Behauptung, denn für alle $D \in \operatorname{Div} \mathcal{C}$ gibt es nach (1) und obiger Überlegung ein D' mit $s(D) = s(D')$ und nach der anderen Überlegung gilt mit (2) schon

$$s(D') \leq s(k \cdot N) \leq \gamma.$$

Wir zeigen zuerst Behauptung (1): Dazu sei wieder $D := \sum n_P P$. Wir suchen also ein $g \in K(\mathcal{C}) \setminus K$ mit $D + \operatorname{div} g \leq k \cdot N$.

Insbesondere heißt das für g, dass alle Nullstellen von g im Träger von N liegen sollten und dass für $n_P > 0$ für ein P, das nicht im Träger von N liegt,

$$\operatorname{ord}_P(g) \leq -n_P$$

gelten muss. Dabei ist P genau dann im Träger von N, wenn $\operatorname{ord}_P(f) > 0$ ist, also f da eine Nullstelle hat.

Seien $P_1,...,P_r$ die Punkte in $\mathcal{C}$ mit $n_{P_i} > 0$ und $\operatorname{ord}_{P_i}(f) \leq 0$. Sei

$$h_i := \frac{1}{f} - \frac{1}{f}(P_i) \quad \text{für } i \in (1,...,r).$$

Dann ist $\operatorname{ord}_{P_i}(h_i) \geq 1$ und für alle P_j mit $\operatorname{ord}_{P_j}(f) \leq 0$ ist $\operatorname{ord}_{P_j}(h_i) \geq 0$. Da die Ordnung von einer Bewertung herkommt, gilt auch

$$\operatorname{ord}_{P_i}(h_i^{-n_{P_i}}) \leq -n_{P_i} \text{ und } \operatorname{ord}_{P_j}(h_i^{-n_{P_i}}) \leq 0$$

für die entsprechenden Punkte. Die $h_i^{-n_{P_i}}$ haben also sicherlich keine Nullstellen außerhalb des Trägers von N,

$$g := \prod_{i=1}^{r} h_i^{-n_{P_i}}$$

erfüllt also alle unsere Wünsche. Nun können wir unser k so wählen, dass für P in dem Träger von N immer

$$n_P + \operatorname{ord}_P(g) \leq k \cdot e_P(f)$$

gilt, da es sich dabei nur um endlich viele Punkte handelt. Und damit gilt, wie behauptet

$$D + \operatorname{div} g \leq k \cdot N.$$

Nun zeigen wir noch Behauptung (2), also dass es ein $\gamma \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$s(k \cdot N) = \deg(k \cdot N) + 1 - \ell(k \cdot N) \leq \gamma.$$

Sei also $f \in K(\mathcal{C})^\times$ und $g_1,...,g_r$ eine Basis von $K(\mathcal{C})$ über $K(f) = K(\frac{1}{f})$, also $r = \deg f$. Ohne Einschränkung können wir die g_i ganz über $K[\frac{1}{f}]$ wählen. Dann gilt nach ähnlicher Argumentation wie im Beweis zu Lemma 2.7: Wenn P eine Polstelle von g_i ist, so ist P schon eine Polstelle von $\frac{1}{f}$. Damit ist P aber eine Nullstelle von f und liegt somit im Träger von N. Wir finden also ein γ_0, so dass, für $i \in \{1,...,r\}$,

$$\operatorname{div} g_i + \gamma_0 \cdot N \geq 0$$

gilt. Damit zeigen wir nun, dass $\ell(k \cdot N) \geq \deg(k \cdot N) - r \cdot (\gamma_0 - 1)$, wir also

$$\gamma := r(\gamma_0 - 1) + 1$$

finden. Sei dazu $h_{ij} := \frac{g_i}{f^j}$, für $j \in \{0,...,k\}$. Damit gilt

$$\operatorname{div} h_{ij} + (k + \gamma_0) \cdot N = \operatorname{div} g_i - j \cdot \operatorname{div} f + k \cdot N + \gamma_0 \cdot N \geq (k - j) \cdot N \geq 0,$$

da $\operatorname{div} f \leq N$ und $\operatorname{div} g_i + \gamma_0 \cdot N \geq 0$ ist. Damit liegen die h_{ij} alle in $\mathcal{L}((k+\gamma_0)\cdot N)$ und, da die h_{ij} über K linear unabhängig sind, ist

$$\ell((k+\gamma_0)\cdot N) \geq r \cdot (k+1).$$

Wenn wir Lemma 3.5 iterativ anwenden, sehen wir, ähnlich wie oben, dass

$$\ell(k \cdot N) \geq \ell((k+\gamma_0)\cdot N) - \deg(\gamma_0 \cdot N) \geq r\cdot(k+1) - \gamma_0 r = kr - r\cdot(\gamma_0 - 1),$$

da, nach Satz 7 (a), $\deg N = \deg f = r$ ist und damit folgt auch schon die Behauptung, denn dann ist auch $kr = \deg(k \cdot N)$. □

4 Der Satz von Riemann-Roch

$\mathcal{C}$ sei stets eine zusammenhängende, reguläre, projektive Kurve, K algebraisch abgeschlossen.

DEFINITION/BEMERKUNG 4.1: Sei $\Omega_{\mathcal{C}} = \Omega_{K(\mathcal{C})/K}$ der $K(\mathcal{C})$-Vektorraum der K-Differentiale von $K(\mathcal{C})$ (siehe auch Algebra II).

(a) $\Omega_{\mathcal{C}}$ heißt auch Vektorraum der *rationalen Differentiale*.

(b) Es ist $\dim_{K(\mathcal{C})} \Omega_{\mathcal{C}} = 1$.

Beweis: (b) $\mathcal{C}$ ist birational zu einer Hyperfläche $\mathfrak{V}(F) \subseteq \mathbb{A}^2(K)$ nach Lemma 4.4 aus Kapitel III. Damit ist $K(\mathcal{C}) = K(\overline{X}, \overline{Y})$ und $F(\overline{X}, \overline{Y}) = 0$.

Außerdem wird $\Omega_{\mathcal{C}}$ von $\mathrm{d}\overline{X}, \mathrm{d}\overline{Y}$ erzeugt und die notwendige Bedingung

$$\mathrm{d}F(\overline{X}, \overline{Y}) = 0 \text{ erzwingt } \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}X}\mathrm{d}\overline{X} + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}Y}\mathrm{d}\overline{Y} = 0.$$

Der Lösungsraum dieses linearen Gleichungssystems ist eindimensional. □

DEFINITION/BEMERKUNG 4.2: Sei $\omega \in \Omega_{\mathcal{C}}$, $\omega \neq 0$.

(a) Sei $P \in \mathcal{C}$, t_P uniformisierend. Dann ist $\omega = f \cdot \mathrm{d}t_P$ und

$$\operatorname{ord}_P(\omega) := \operatorname{ord}_P(f)$$

ist wohldefiniert.

(b) Man definiert $\operatorname{div} \omega := \sum_{P \in \mathcal{C}} \operatorname{ord}_P(\omega) \cdot P$.

(c) $\mathcal{K}$ heißt *kanonischer Divisor*, wenn $\mathcal{K} = \operatorname{div} \omega$ für ein $\omega \in \Omega_{\mathcal{C}}$ gilt.

(d) Je zwei kanonische Divisoren sind linear äquivalent.

> Für den Beweis von (a) muss man die Unabhängigkeit der Ordnung von t_P zeigen. Das ist schwierig!
> Die restlichen Aussagen folgen dann aus (a).

Satz 9 (Riemann-Roch)**:** *Sei $\mathcal{K}$ ein kanonischer Divisor auf $\mathcal{C}$ und $D \in \mathrm{Div}(\mathcal{C})$. Dann gilt:*

$$\ell(D) - \ell(\mathcal{K} - D) = \deg D + 1 - \mathfrak{g}.$$

KOROLLAR 4.3: (a) Ist $\mathcal{K}$ ein kanonischer Divisor sowie $D = 0$, so ist $\deg D = 0$ und $\ell(D) = 1$ nach Bemerkung 3.2 (a). Also ist in diesem Fall $\ell(\mathcal{K}) = \mathfrak{g}$.

(b) Ist $D = \mathcal{K}$ ein kanonischer Divisor, so ist $\ell(\mathcal{K}) = \mathfrak{g}$ nach (a). Also gilt hier

$$\deg(\mathcal{K}) = \mathfrak{g} - 1 + \ell(D) - \ell(0) = 2\mathfrak{g} - 2.$$

BEISPIEL 4.4: Sei $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1(K)$. Dann ist $K(\mathcal{C}) = K(X)$ und $\Omega_{\mathcal{C}} = K(X)\mathrm{d}X$, $\omega = \mathrm{d}X$ ist uniformisierend.

Wir suchen den kanonischen Divisor $\mathcal{K} = \mathrm{div}\,\omega$, d.h. wir müssen für jeden Punkt P die Ordnung $\mathrm{ord}_P(\omega)$ bestimmen (vgl. Definition/Bemerkung 4.2).

Sei dazu zunächst $a \in K$. Dann ist $X - a$ uniformisierend. Es gilt also $\mathrm{d}X = \mathrm{d}(X - a)$. Also ist $\mathrm{ord}_a(\omega) = 0$.

Nun sei $a = \infty$. Dann ist $\frac{1}{X}$ uniformisierend und mit der Leibnizregel sieht man:

$$\mathrm{d}\frac{1}{X} = -\frac{1}{X^2}\mathrm{d}X.$$

Also ist $\mathrm{ord}_\infty(\omega) = -2$ und damit ist $\mathcal{K} = -2 \cdot \infty$ der kanonische Divisor zu ω.

Insbesondere ist $\deg \mathcal{K} = -2$. Setze $D = \mathcal{K}$. Nun liefert Korollar 4.3 (b):

$$\mathfrak{g}(\mathbb{P}^1(K)) = 0.$$

v Liste der Sätze

Stichwortverzeichnis