

## § 16 $\mathfrak{L}^p$ -Räume und $L^p$ -Räume

Stets in diesem Paragraphen:  $\emptyset \neq X \in \mathfrak{B}_d$

### Definition

Sei  $p \in [1, +\infty]$ .

$$p' := \begin{cases} \infty & , p = 1 \\ 1 & , p = \infty \\ \frac{p}{p-1} & , 1 < p < \infty \end{cases}$$

Dann gilt:  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  und  $p = p' \Leftrightarrow p = 2$ .

### Hilfssatz

Seien  $x, y \geq 0$ ,  $p \in (1, \infty)$ , dann gilt:  $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'}$

### Beweis

Für  $t > 0$ :  $f(t) := \frac{t}{p} + \frac{1}{p'} - t^{\frac{1}{p}}$

Übung:  $\min\{f(t) \mid t > 0\} = f(1) = 0$

D.h.:  $t^{\frac{1}{p}} \leq \frac{t}{p} + \frac{1}{p'} \quad \forall t > 0$

Seien  $u, v > 0$ ,  $t := \frac{u}{v}$ . Dann:  $\frac{u^{\frac{1}{p}}}{v^{\frac{1}{p}}} \leq \frac{u}{vp} + \frac{1}{p'}$ . Daraus folgt  $u^{\frac{1}{p}}v^{1-\frac{1}{p}} \leq \frac{u}{p} + \frac{v}{p'} \implies u^{\frac{1}{p}}v^{\frac{1}{p'}} \leq \frac{u}{p} + \frac{v}{p'}$

Seien  $x, y > 0$ :  $u := x^p$ ,  $v := y^{p'}$ . Dann:  $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'}$ .

Im Falle  $x = 0$  oder  $y = \infty$  ist die Ungleichung trivialerweise richtig. ■

**Erinnerung:** Sei  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  messbar und  $p > 0$ , so ist  $|f|^p$  messbar (vgl. Kapitel 3).

Es gilt:  $|f|^p \in \mathfrak{L}^1(X) \Leftrightarrow \int_X |f|^p dx < \infty$

### Definition

(1) Sei  $p \in [1, \infty)$ .  $\mathfrak{L}^p(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist messbar und } \int_X |f|^p dx < \infty\}$ .

Für  $f \in \mathfrak{L}^p(X)$ :  $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$

(2)  $\mathfrak{L}^\infty(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist messbar und } f \text{ ist f.ü. beschränkt}\}$

Für  $f \in \mathfrak{L}^\infty(X)$ :  $\|f\|_\infty := \text{ess sup}_{x \in X} \|f(x)\| = \inf\{c > 0 \mid \exists \text{ Nullmenge } N_c \subseteq X : |f(x)| \leq c \forall x \in X \setminus N_c\}$

**Bemerkung:** Es sei  $f \in \mathfrak{L}^\infty(X)$  und stetig. Außerdem habe jede in  $X$  offene, nichtleere Teilmenge positives Maß. Dann ist  $f$  auf  $X$  beschränkt und  $\sup_{x \in X} |f(x)| = \text{ess sup}_{x \in X} |f(x)|$ .

### Beweis

Übung (ist  $N \subseteq X$  eine Nullmenge, so ist  $N^\circ = \emptyset$  und  $\overline{X \setminus N} = X$ ) ■

**Beispiel**

Sei  $d = 1$ ,  $X = [1, \infty)$ ,  $p > 1$  ( $p < \infty$ ),  $\alpha, \beta > 0$ ,  $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x^\beta}$

(1)

$$f \in \mathfrak{L}^p(X) \stackrel{4.14}{\iff} \int_1^\infty \frac{1}{x^{\alpha p}} dx$$

konvergiert genau dann, wenn  $\alpha p > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{p}$

(2)

$$fg \in \mathfrak{L}^1(X) \stackrel{4.14}{\iff} \int_1^\infty \frac{1}{x^{\alpha+\beta}} dx$$

konvergiert genau dann, wenn  $\alpha + \beta > 1$

**Satz 16.1**

Sei  $p \in [1, \infty]$  und  $p'$  wie zu Anfang dieses Kapitels, also  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .

- (1) Sei  $f \in \mathfrak{L}^p(X)$  und  $g \in \mathfrak{L}^{p'}(X)$ . Dann ist  $fg \in \mathfrak{L}^1(X)$  und es gilt die **Höldersche Ungleichung**:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}$$

Ist  $p = 2$  ( $\implies p' = 2$ ), so heißt obige Ungleichung auch **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**.

- (2)  $\mathfrak{L}^p(X)$  ist ein reeller Vektorraum und für  $f, g \in \mathfrak{L}^p(X)$  gilt die **Minkowskische Ungleichung**:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

**Beweis**

- (1) Unterscheide die folgenden Fälle:

Fall 1:  $p = 1$  (also  $p' = \infty$ ) oder  $p = \infty$  (also  $p' = 1$ ). Etwa  $p = 1$ ,  $p' = \infty$ .

Sei  $c > 0$  und  $N_c \subseteq X$  Nullmenge mit:  $|g(x)| \leq c \forall x \in X \setminus N_c$ .  $\tilde{g} := \mathbf{1}_{X \setminus N_c} \cdot g$

Dann:  $g = \tilde{g}$  fast überall und  $|\tilde{g}| \leq c$  auf  $X$ . Weiter:  $fg = f\tilde{g}$  fast überall, bzw.  $|fg| = |f\tilde{g}|$  fast überall.

Dann:

$$\int_X |fg| dx = \int_X |f\tilde{g}| dx = \int_X |f| \underbrace{|\tilde{g}|}_{\leq c} dx \leq \int_X |f| dx = c \cdot \|f\|_1 < \infty$$

Also:  $fg \in \mathfrak{L}^1(X)$  und  $\|fg\|_1 \leq c\|f\|_1$ . Übergang zum Infimum über alle  $c > 0$  liefert:  $\|fg\|_1 \leq \|g\|_\infty \cdot \|f\|_1$

Fall 2: Sei  $1 < p < \infty$ . Ist  $\|f\|_p = 0$  oder  $\|g\|_{p'} = 0$ , so ist  $f = 0$  fast überall oder  $g = 0$  fast überall. Daraus folgt:  $|fg| = 0$  fast überall. Mit 5.2 folgt:  $\int_X |fg| dx = 0$ . Daraus folgen die Behauptungen.

Sei  $\|f\|_p > 0$  und  $\|g\|_{p'} > 0$ .

Aus obigem Hilfssatz:

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_{p'}} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{p'} \frac{|g(x)|^{p'}}{\|g\|_{p'}^{p'}} \quad \forall x \in X$$

Integration liefert:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}} \int_X |f(x)g(x)| dx &\leq \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{\|f\|_p^p} \int_X |f|^p dx + \frac{1}{p'} \cdot \frac{1}{\|g\|_{p'}^{p'}} \int_X |g|^{p'} dx \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \\ &= 1 < \infty \end{aligned}$$

Daraus folgt:  $fg \in \mathfrak{L}^1(X)$  und

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}} \leq 1 \Leftrightarrow \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}$$

(2) Klar: Ist  $f \in \mathfrak{L}^p(X)$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ , so ist  $\alpha f \in \mathfrak{L}^p(X)$

Fall 1:  $p = 1$ : Mit 4.11 folgt:  $\mathfrak{L}^1(X)$  ist ein reeller Vektorraum.

Seien  $f, g \in \mathfrak{L}^1(X)$ . Dann:  $|f + g| \leq |f| + |g|$  auf  $X$ . Damit:

$$\int_X |f + g| dx \leq \int_X |f| dx + \int_X |g| dx$$

Fall 2:  $p = \infty$ : Seien  $f, g \in \mathfrak{L}^\infty(X)$ . Seien  $c_1, c_2 > 0$  und  $N_1, N_2 \subseteq X$  Nullmengen und  $|f(x)| \leq c_1 \forall x \in X \setminus N_1$ ,  $|g(x)| \leq c_2 \forall x \in X \setminus N_2$ .

$N = N_1 \cup N_2$  ist eine Nullmenge. Dann:  $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq c_1 + c_2 \forall x \in X \setminus N$ . Es folgt:  $f + g \in \mathfrak{L}^\infty(X)$  und  $\|f + g\|_\infty \leq c_1 + c_2$ .

Übergang zum Infimum über alle solche  $c_1$ , bzw.  $c_2$ , liefert:  $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ .

Fall 3: Sei  $1 < p < \infty$  und  $f, g \in \mathfrak{L}^p(X)$ . Es ist  $|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq (2 \max\{|f|, |g|\})^p \leq 2^p (|f|^p + |g|^p)$  auf  $X$ . Mit 4.9 folgt:  $|f + g|^p \in \mathfrak{L}^1(X) \implies f + g \in \mathfrak{L}^p(X)$

$p' = \frac{p}{p-1}$ ;  $h := |f + g|^{p-1}$ , dann:  $h^{p'} = (|f + g|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} = |f + g|^p \in \mathfrak{L}^1(X)$ . Dann ist  $h \in \mathfrak{L}^{p'}(X)$ . Also:  $h \in \mathfrak{L}^{p'}(X)$ ,  $f \in \mathfrak{L}^p(X)$  (und  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ).

Mit der Hölderschen Ungleichung folgt:  $\|f \cdot f_1\| \leq \|f\|_p \|h\|_{p'} \implies \int_X h|f| dx \leq \|f\|_p \left( \int_X h^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}}$ . Dann:

$$\begin{aligned} \int_X |f| |f + g|^{p-1} dx &\leq \|f\|_p \left( \int_X (|f + g|^{p-1})^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \|f\|_p (\|f + g\|_p^p)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \|f\|_p \|f + g\|_p^{p-1} \end{aligned}$$

Genauso:  $\int_X |g| |f + g|^{p-1} dx \leq \|g\|_p \|f + g\|_p^{p-1}$

Dann:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int_X |f + g|^p dx \\ &= \int_X |f + g| |f + g|^{p-1} dx \\ &= \int_X |f| |f + g|^{p-1} dx + \int_X |g| |f + g|^{p-1} dx \\ &\leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p-1} \end{aligned}$$

■

Teilen durch  $\|f + g\|_p^{p-1}$  liefert die Minkowski-Ungleichung.

### Satz 16.2

Sei  $\lambda_d(X) < \infty$ ,  $p, q \geq 1$  und  $p \leq q \leq \infty$ . Dann ist  $\mathfrak{L}^q(X) \subseteq \mathfrak{L}^p(X)$  und es gilt:

$$\forall f \in \mathfrak{L}^q(X) : \|f\|_p \leq \lambda_d(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q$$

### Beweis

Sei  $f \in \mathfrak{L}^q(X)$ .

**Fall**  $p = q$ : Klar.

**Fall**  $q = \infty$ : Leichte Übung!

**Fall**  $p < q < \infty$ :

Sei  $r := \frac{q}{p} > 1$ , dann ist  $\frac{1}{r'} = 1 - \frac{p}{q}$ . Aus  $|f|^{pr} = |f|^q \in \mathfrak{L}^1(X)$  folgt  $|f|^p \in \mathfrak{L}^r(X)$ . Definiere  $g := \mathbb{1}_X$ , dann ist  $g \in \mathfrak{L}^{r'}(X)$ , da  $\lambda_d(X) < \infty$ . Wegen 16.1 gilt dann:

$$g \cdot |f|^p \in \mathfrak{L}^1(X) \implies |f|^p \in \mathfrak{L}^1(X) \implies f \in \mathfrak{L}^p(X)$$

Aus der Hölderschen Ungleichung folgt:

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p &= \|g \cdot |f|^p\|_1 \\ &\leq \|g\|_{r'} \cdot \| |f|^p \|_r \\ &= \left( \int_X g^{r'} dx \right)^{\frac{1}{r'}} \cdot \left( \int_X |f|^{pr} dx \right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \lambda_d(X)^{\frac{1}{r'}} \cdot \left( \int_X |f|^q dx \right)^{\frac{p}{q}} \\ &= \lambda_d(X)^{1 - \frac{p}{q}} \cdot \|f\|_q^p \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\|f\|_p \leq \lambda_d(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q$$

■

### Beispiel

- (1) Sei  $X := (0, 1]$ ,  $1 \leq p < q < \infty$  (also  $\frac{1}{q} < \frac{1}{p}$ ) und  $f(x) := \frac{1}{x^\alpha}$  ( $\alpha > 0$ ). Dann gilt nach 4.14 und Analysis I:

$$\begin{aligned} f \in \mathfrak{L}^p(X) &\iff \int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha p}} dx \text{ konvergiert} \\ &\iff \alpha p < 1 \\ &\iff \alpha < \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Sei  $\frac{1}{q} < \alpha < \frac{1}{p}$ , dann ist  $f \in \mathfrak{L}^p(X)$  und  $f \notin \mathfrak{L}^q(X)$ . D.h.  $\mathfrak{L}^p(X) \not\subseteq \mathfrak{L}^q(X)$  und aus 16.2 folgt  $\mathfrak{L}^q(X) \subseteq \mathfrak{L}^p(X)$ .

- (2) Sei  $X := [1, \infty)$ ,  $p = 1$ ,  $q \in (1, \infty)$  und  $f(x) := \frac{1}{x}$ . Dann gilt nach 4.14 und Analysis I:  $f \notin \mathfrak{L}^p(X)$  und  $f \in \mathfrak{L}^q(X)$ . D.h. also  $\mathfrak{L}^q(X) \not\subseteq \mathfrak{L}^p(X)$ .

Definiere  $g(x) := \mathbb{1}_{[1,2)} \cdot (2-x)^{-\frac{1}{q}}$ . Übung:  $g \in \mathfrak{L}^p(X)$  und  $g \notin \mathfrak{L}^q(X)$ . D.h. also  $\mathfrak{L}^p(X) \not\subseteq \mathfrak{L}^q(X)$ .

### Satz 16.3 (Satz von Lebesgue ( $\mathfrak{L}^p$ -Version))

Sei  $1 \leq p < \infty$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  sei messbar,  $g : X \rightarrow [0, \infty]$  integrierbar und  $(f_n)$  eine Folge in  $\mathfrak{L}^p(X)$  mit den Eigenschaften:

- (1)  $f_n \rightarrow f$  f.ü. auf  $X$
- (2)  $\forall n \in \mathbb{N} : |f_n|^p \leq g$  f.ü. auf  $X$ .

Dann ist  $f \in \mathfrak{L}^p(X)$  und es gilt

$$\|f_n - f\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

### Beweis

Aus (i) und (ii) folgt:  $|f|^p \leq g$  f.ü. Im Paragraphen 5 haben wir gesehen, dass dann gilt:

$$\int_X |f|^p dx \leq \int_X g dx < \infty$$

(denn  $g$  ist nach Voraussetzung integrierbar). Daraus folgt:  $f \in \mathfrak{L}^p(X)$ .

Setze  $g_n := |f_n - f|^p$ . Aus (i):  $g_n \rightarrow 0$  f.ü. Es sind  $f_n, f \in \mathfrak{L}^p(X)$  (erstes nach Voraussetzung, zweites haben wir gerade gezeigt), und weil  $\mathfrak{L}^p(X)$  ein reeller Vektorraum ist (16.1(2)), folgt:

$$f_n - f \in \mathfrak{L}^p(X)$$

Also  $g_n \in \mathfrak{L}^1(X)$ . Es ist

$$0 \leq g_n \leq (|f_n| + |f|)^p \leq \left(g^{\frac{1}{p}} + g^{\frac{1}{p}}\right)^p = \left(2g^{\frac{1}{p}}\right)^p = 2^p g \quad \text{f.ü.}$$

Mit 6.2 folgt schließlich:

$$\underbrace{\int_X g_n dx}_{=\|f_n - f\|_p^p} \rightarrow 0.$$

■

Aus 16.1 folgt:  $\mathfrak{L}^p(X)$  ist ein reeller Vektorraum (VR), wobei für  $f, g \in \mathfrak{L}^p(X)$  gilt:

$$\|\alpha f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Aber  $\|\cdot\|_p$  ist **keine** Norm auf  $\mathfrak{L}^p(X)$ ! Denn aus  $\|f\|_p = 0$  folgt nur  $f = 0$  f.ü.

**Definition**

Es sei  $\mathcal{N} := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist messbar und } f = 0 \text{ f.ü.}\}$ , dann ist  $\mathcal{N}$  ein Untervektorraum von  $\mathfrak{L}^p(X)$ . Definiere

$$L^p(X) := \mathfrak{L}^p(X) / \mathcal{N} = \{\hat{f} = f + \mathcal{N} \mid f \in \mathfrak{L}^p(X)\}$$

Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass  $L^p(X)$  durch die Skalarmultiplikation

$$\alpha \cdot \hat{f} := \widehat{\alpha f}$$

und die Addition

$$\hat{f} + \hat{g} := \widehat{f + g}$$

zu einem Vektorraum über  $\mathbb{R}$  wird.

Setze für  $\hat{f} \in L^1(X)$ :

$$\int_X \hat{f}(x) \, dx := \int_X f(x) \, dx$$

dabei ist diese Definition unabhängig von der Wahl des Repräsentanten  $f \in \mathfrak{L}^1(X)$  von  $\hat{f}$ , denn: ist auch noch  $g \in \mathfrak{L}^1(X)$  und  $\hat{g} = \hat{f}$ , so ist  $f - g \in \mathcal{N}$ , also  $f - g = 0$  f.ü. und damit:  $\int_X f \, dx = \int_X g \, dx$ .

Für  $\hat{f} \in L^p(X)$  definiere

$$\|\hat{f}\|_p := \|f\|_p$$

wobei diese Definition unabhängig ist von der Wahl des Repräsentanten  $f \in \mathfrak{L}^p(X)$  von  $\hat{f}$ .

Für  $\hat{f}, \hat{g} \in L^2(X)$  setze

$$(\hat{f}|\hat{g}) := \int_X f(x)g(x) \, dx$$

(auch diese Definition ist Repräsentanten-unabhängig) (Beachte:  $f \cdot g \in \mathfrak{L}^1(X)$ )

**Dann gilt:**

(1)  $L^p(X)$  ist unter  $\|\cdot\|_p$  ein normierter Raum (NR).

(2) Für  $\hat{f}, \hat{g} \in L^2(X)$  gilt:

$$|(\hat{f}|\hat{g})| = \left| \int_X f(x)g(x) \, dx \right| \leq \int_X |fg| \, dx = \|fg\|_1 \stackrel{16.1}{\leq} \|f\|_2 \|g\|_2 = \|\hat{f}\|_2 \|\hat{g}\|_2$$

**(Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)**

**Nachrechnen:**  $(\hat{f}|\hat{g})$  definiert ein Skalarprodukt auf  $L^2(X)$ . Es gilt:

$$(\hat{f}|\hat{f}) = \int_X f(x)^2 \, dx = \|\hat{f}\|_2^2$$

**Also:**  $\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{(\hat{f}|\hat{f})}$

**Definition**

Sei  $(B, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum. Gilt mit einem Skalarprodukt  $(\cdot|\cdot)$  auf  $B$ :

$$\|v\| = \sqrt{(v|v)} \quad \forall v \in B \quad (*)$$

so heißt  $B$  ein **Prähilbertraum**. Ist  $B$  ein Banachraum mit  $(*)$ , so heißt  $B$  ein **Hilbertraum**.

**Vereinbarung:** ab jetzt sei stets in diesem Paragraphen  $1 \leq p < \infty$ .

**Bemerkung:** Seien  $f, f_n \in \mathfrak{L}^p(X)$

- (1)  $\|f_n - f\|_p = \|\hat{f}_n - \hat{f}\|_p \rightarrow 0$  genau dann, wenn  $(\hat{f}_n)$  eine konvergente Folge im normierten Raum  $L^p(X)$  mit dem Grenzwert  $\hat{f}$  ist.
- (2)  $(\hat{f}_n)$  ist eine **Cauchyfolge** (CF) in  $L^p(X)$  genau dann, wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  existiert mit:

$$\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_p = \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0 \quad (*)$$

- (3) Wie in Analysis II zeigt man: gilt  $\|f_n - f\|_p = \|\hat{f}_n - \hat{f}\|_p \rightarrow 0$ , so ist  $(\hat{f}_n)$  eine Cauchyfolge in  $L^p(X)$ .

**Satz 16.4 (Satz von Riesz-Fischer)**

$(\hat{f}_n)$  sei eine Cauchyfolge in  $L^p(X)$ , das heißt es gilt  $(*)$  aus obiger Bemerkung (2). Dann existiert ein  $f \in \mathfrak{L}^p(X)$  und eine Teilfolge  $(f_{n_j})$  von  $(f_n)$  mit:

- (1)  $f_{n_j} \rightarrow f$  fast überall auf  $X$ .
- (2)  $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

Das heißt  $L^p(X)$  ist ein Banachraum ( $L^2(X)$  ist ein Hilbertraum).

**Bemerkung:** Voraussetzungen und Bezeichnungen seien wie in 16.4. Im Allgemeinen wird **nicht** gelten, dass fast überall  $f_n \rightarrow f$  ist.

**Beispiel**

Sei  $X = [0, 1]$  und  $(I_n)$  sei die folgende Folge von Intervallen:

$$I_1 = [0, 1], I_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right], I_3 = \left[\frac{1}{2}, 1\right], I_4 = \left[0, \frac{1}{4}\right], I_5 = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], I_6 = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], I_7 = \left[\frac{3}{4}, 1\right], \dots$$

Es sei  $f_n := \mathbb{1}_{I_n}$ , sodass  $\int_X f_n dx = \int_{I_n} 1 dx = \lambda_1(I_n) \rightarrow 0$ . Also  $\hat{f}_n \in L^1(X)$  und  $\|\hat{f}_n - \hat{0}\|_1 \rightarrow 0$ . Ist  $x \in X$ , so gilt:  $x \in I_n$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$ . Daraus folgt, dass eine Teilfolge  $I_{n_j}$  mit  $x \in I_{n_j}$  für jedes  $j \in \mathbb{N}$  existiert. Somit ist  $f_{n_j}(x) = 1$  für jedes  $j \in \mathbb{N}$  und deshalb gilt fast überall  $f_n \nrightarrow 0$ .

**Beweis (von 16.4)**

Setze  $\varepsilon_j := \frac{1}{2^j}$  ( $j \in \mathbb{N}$ ). Zu  $\varepsilon_1$  existiert ein  $n_1 \in \mathbb{N}$  mit  $\|f_l - f_{n_1}\|_p < \varepsilon_1$  für alle  $l \geq n_1$ . Zu  $\varepsilon_2$  existiert ein  $n_2 \in \mathbb{N}$  mit  $n_2 > n_1$  und  $\|f_l - f_{n_2}\|_p < \varepsilon_2$  für alle  $l \geq n_2$ . Etc.

Wir erhalten eine Teilfolge  $(f_{n_j})$  mit

$$(+)\quad \|f_l - f_{n_j}\|_p < \varepsilon_j \text{ für alle } l \geq n_j \text{ mit } j \in \mathbb{N}$$

## 16. $\mathfrak{L}^p$ -Räume und $L^p$ -Räume

Setze  $g_j := f_{n_{j+1}} - f_{n_j}$  ( $j \in \mathbb{N}$ ). Klar:  $g_l \in \mathfrak{L}^p(X)$ . Für  $N \in \mathbb{N}$ :

$$S_N := \int_X \left( \sum_{j=1}^N |g_j(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Dann:

$$S_N = \left\| \sum_{j=1}^N |g_j| \right\|_p \leq \sum_{j=1}^N \|g_j\|_p \stackrel{(+)}{\leq} \sum_{j=1}^N \varepsilon_j = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2^j} \leq 1$$

Setze

$$g(x) := \sum_{j=1}^{\infty} |g_j(x)| \text{ für } x \in X$$

Es ist  $g \geq 0$  und messbar. Weiter gilt:

$$0 \leq \int_X g^p dx = \int_X \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=1}^N |g_j| \right)^p dx \stackrel{6.2}{\leq} \liminf_{N \rightarrow \infty} S_N^p \leq 1$$

Somit ist  $g^p$  integrierbar. Aus 5.2 folgt, dass eine Nullmenge  $N_1 \subseteq X$  existiert mit  $0 \leq g^p(x) < \infty$  für alle  $x \in X \setminus N_1$ . Es ist dann auch  $0 \leq g(x) < \infty$  für alle  $x \in X \setminus N_1$  und somit folgt nach Konstruktion von  $g$ , dass  $\sum_{j=1}^{\infty} g_j dx$  konvergiert absolut in jedem  $x \in X \setminus N_1$ . Aus Analysis I folgt, dass damit  $\sum_{j=1}^{\infty} g_j dx$  in jedem  $x \in X \setminus N_1$  konvergiert.

Für  $m \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{j=1}^{m-1} g_j = f_{n_m} - f_{n_1} \implies f_{n_m} = \sum_{j=1}^{m-1} g_j + f_{n_1}$$

Deshalb ist  $(f_{n_m})$  konvergent (in  $\mathbb{R}$ ) für alle  $x \in X \setminus N_1$ .

$$f(x) := \begin{cases} \lim_{m \rightarrow \infty} f_{n_m}(x) & , x \in X \setminus N_1 \\ 0 & , x \in N_1 \end{cases}$$

Aus §3 ist bekannt, dass  $f$  messbar ist. Klar:  $f_{n_m} \rightarrow f$  fast überall und  $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ . Es ist  $f_{n_m} = \sum_{j=1}^{m-1} g_j + f_{n_1}$  und somit

$$|f_{n_m}| = |f_{n_1}| + \sum_{j=1}^{m-1} g_j \leq |f_{n_1}| + |g|$$

Wie im Beweis von Satz 16.1 folgern wir

$$|f_{n_m}|^p \leq 2^p (|f_{n_1}|^p + g^p) =: \tilde{g}$$

$f_{n_1} \in \mathfrak{L}^p(X)$ ,  $g^p$  ist integrierbar. Aus 16.3 folgt, dass  $f \in \mathfrak{L}^p(X)$  und

$$\|f_{n_m} - f\|_p \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

Sei nun  $\varepsilon > 0$ . Wähle  $m \in \mathbb{N}$  so, dass  $\frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon}{2}$  und  $\|f - f_{n_m}\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$ . Für  $l \geq n_m$  gilt:

$$\|f_l - f\|_p = \|f_l - f_{n_m} + f_{n_m} - f\|_p \leq \|f_l - f_{n_m}\|_p + \|f_{n_m} - f\|_p \stackrel{(+)}{<} \frac{1}{2^m} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Das heißt

$$\|f_l - f\|_p \rightarrow 0 \quad (l \rightarrow \infty)$$

■



**Satz 16.5**

Sei auch noch  $1 \leq q < \infty$ .  $(f_n)$  sei eine Folge in  $\mathfrak{L}^p(X) \cap \mathfrak{L}^q(X)$ . Es sei

$$f \in \mathfrak{L}^p(X) \text{ und } g \in \mathfrak{L}^q(X)$$

Weiter gelte:

$$\|f_n - f\|_p \rightarrow 0 \text{ und } \|f_n - g\|_q \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Dann ist fast überall  $f = g$ .

**Beweis**

1. Aus Bemerkung (3) vor 16.4 folgt, dass  $(\hat{f}_n)$  ist eine Cauchyfolge in  $L^p(X)$ . Wegen 16.4 existiert dann ein  $\varphi \in \mathfrak{L}^p(X)$  und eine Teilfolge  $(f_{n_j})$  mit:  $f_{n_j} \rightarrow \varphi$  fast überall und  $\|f_{n_j} - \varphi\|_p \rightarrow 0$

$$\|f - \varphi\|_p = \|f - f_{n_j} + f_{n_j} - \varphi\|_p \leq \|f - f_{n_j}\|_p + \|f_{n_j} - \varphi\|_p \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Somit ist  $\|f - \varphi\|_p = 0$  und deshalb fast überall  $f = \varphi$ . Also gilt fast überall  $f_{n_j} \rightarrow f$ . Das heißt, dass es eine Nullmenge  $N_1 \subseteq X$  gibt, für die gilt:

$$f_{n_j}(x) \rightarrow f(x) \text{ für alle } x \in X \setminus N_1$$

2. Setze  $g_j := f_{n_j}$ , dann gilt  $\|g_j - g\|_q \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty)$ . Wie im ersten Schritt zeigt man, dass eine Nullmenge  $N_2 \subseteq X$  und eine Teilmenge  $(g_{j_k})$  existiert mit, für die gilt:

$$g_{j_k}(x) \rightarrow g(x) \text{ für alle } x \in X \setminus N_2$$

Wir wissen, dass  $N := N_1 \cup N_2$  eine Nullmenge ist. Sei nun  $x \in X \setminus N$ . Dann folgt aus dem ersten Schritt  $f_{n_j}(x) \rightarrow f(x)$  und daraus

$$\underbrace{f_{n_{j_k}}(x)}_{=g_{n_{j_k}}(x)} \rightarrow f(x)$$

Aus dem Zweiten Schritt folgt dann, dass  $f_{n_{j_k}}(x) \rightarrow g(x)$  und somit  $f(x) = g(x)$ . ■

**Bemerkung:** Seien  $f_n, f \in \mathfrak{L}^p(X)$  und es gelte  $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$ . Der Beweis von 16.5 zeigt, dass eine Teilfolge  $(f_{n_j})$  von  $(f_n)$  existiert mit  $f_{n_j} \rightarrow f$  fast überall.

**Bemerkung:** Konvergenz im Sinne der Norm  $\|\cdot\|_p$  und punktweise Konvergenz fast überall haben im Allgemeinen **nichts** miteinander zu tun!

**Beispiel**

Sei  $(f_n)$  wie im Beispiel vor 16.4. Also  $\|f_n - 0\|_p \rightarrow 0$ , aber  $f_n \not\rightarrow 0$  fast überall.

**Beispiel**

Sei  $X = [0, 1]$  und  $f_n$  sei wie im Bild.  $f_n$  ist stetig, also messbar.

$$\int_X f_n dx = 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Somit ist  $f_n \in \mathfrak{L}^1(X)$ .

$$f_n(x) \rightarrow \begin{cases} 0, & x \in (0, 1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Damit gilt fast überall  $f_n \rightarrow 0$ , aber  $\|f_n - 0\|_1 = 1 \not\rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ )

### Definition

Seien  $(E, \|\cdot\|_1), (F, \|\cdot\|_2)$  normierte Räume.

- (1) Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $E$  und  $s_n := x_1 + x_2 + \cdots + x_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Dann heißt  $(s_n)$  eine **unendliche Reihe** und wird mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

bezeichnet.  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  heißt **konvergent** genau dann, wenn  $(s_n)$  konvergiert. In diesem Fall ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

- (2)  $\Phi: E \rightarrow F$  sei eine Abbildung.  $\Phi$  heißt **stetig** in  $x_0 \in E$  genau dann, wenn für jede konvergente Folge  $(x_n)$  in  $E$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  gilt:

$$\Phi(x_n) \rightarrow \Phi(x_0)$$

$\Phi$  heißt auf  $E$  stetig genau dann, wenn  $\Phi$  in jedem  $x \in E$  stetig.

- (3) Für  $(x, y) \in E \times E$  setze

$$\|(x, y)\| := \sqrt{\|x\|_1^2 + \|y\|_1^2}$$

Dann ist  $\|\cdot\|$  eine Norm auf  $E \times E$  (nachrechnen!). Weiter gilt, dass  $E \times E$  genau dann ein Banachraum ist, wenn  $E$  einer ist. Für eine Folge  $((x_n, y_n))$  in  $E \times E$  und  $(x, y) \in E \times E$  gilt

$$(x_n, y_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} (x, y) \iff x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x \wedge y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y$$

**Bemerkung:** Ist  $(x_n)$  eine konvergente Folge in  $E$ , so ist  $(x_n)$  beschränkt (d.h.  $\exists c > 0 : \|x_n\|_1 \leq c \forall n \in \mathbb{N}$ ).

(Beweis wie in Ana I)

**Vereinbarung:** Für den Rest dieser Vorlesung schreiben wir (meist)  $f$  statt  $\hat{f}$  und identifizieren  $\mathfrak{L}^p(X)$  mit  $L^p(X)$ . Ebenso schreiben wir  $\int_X f \, dx$  statt  $\int_X \hat{f} \, dx$  und  $(f|g)$  statt  $(\hat{f}|\hat{g})$ .

### Beispiel 16.6

- (1) Die Abbildung  $\Phi: L^p(X) \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$\Phi(f) := \|f\|_p$$

ist stetig auf  $L^p(X)$ . D.h. für  $f_n, f \in L^p(X)$  mit  $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$  gilt  $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$ , also

$$\int_X |f_n|^p \, dx \rightarrow \int_X |f|^p \, dx$$

**Beweis**

Aus Analysis II §17 folgt:

$$|\|f_n\|_p - \|f\|_p| \leq \|f_n - f\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

■

(2) Die Abbildung  $\Phi : L^1(X) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$\Phi(f) := \int_X f \, dx$$

ist stetig auf  $L^1(X)$ . D.h. aus  $f_n, f \in L^1(X)$  und  $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$  folgt

$$\int_X f_n \, dx \rightarrow \int_X f \, dx$$

**Beweis**

Es gilt:

$$\begin{aligned} \left| \int_X f_n \, dx - \int_X f \, dx \right| &= \left| \int_X f_n - f \, dx \right| \\ &\leq \int_X |f_n - f| \, dx \\ &= \|f_n - f\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

■

(3) Die Abbildung  $\Phi : L^2(X) \times L^2(X) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$\Phi(f, g) := (f|g)$$

ist stetig auf  $L^2(X) \times L^2(X)$ . D.h. für  $f_n, g_n, f, g \in L^2(X)$  mit  $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$  und  $g_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} g$  gilt

$$(f_n|g_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (f|g)$$

**Beweis**

Es gilt:

$$\begin{aligned} |(f_n|g_n) - (f|g)| &= |(f_n|g_n) - (f_n|g) + (f_n|g) - (f|g)| \\ &= |(f_n|g_n - g) + (f_n - f|g)| \\ &\leq |(f_n|g_n - g)| + |(f_n - f|g)| \\ &\leq \|f_n\|_2 \cdot \|g_n - g\|_2 + \|f_n - f\|_2 \cdot \|g\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

■

**Satz 16.7**

Sei  $f = f_+ - f_- \in L^p(X)$  und  $(g_n)$  und  $(h_n)$  seien zulässige Folgen für  $f_+$  bzw.  $f_-$  (d.h.  $g_n, h_n$  einfach,  $0 \leq g_n \leq g_{n+1}, g_n \rightarrow f_+, 0 \leq h_n \leq h_{n+1}, h_n \rightarrow f_-$ ). Setze  $f_n := g_n - h_n$ . Dann sind  $f_n, g_n, h_n \in L^p(X)$  und es gilt:

$$\|g_n - f_+\|_p \rightarrow 0$$

$$\|h_n - f_-\|_p \rightarrow 0$$

$$\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$$

**Beweis**

Es genügt den Fall  $f \geq 0$  zu betrachten (also  $f = f_+$ ,  $f_- \equiv 0$ ). Sei also  $(f_n)$  zulässig für  $f$ . Definiere  $\varphi := |f_n - f|^p$ . Es ist klar, dass punktweise gilt  $\varphi_n \rightarrow 0$ . Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi_n &\leq (|f_n| + |f|)^p \\ &= |f_n + f|^p \leq (2f)^p \\ &= 2^p f^p =: g \end{aligned}$$

Dann ist  $g \in L^1(X)$  integrierbar.

Aus 4.9 folgt:

$$\begin{aligned} \varphi \in L^1(X) &\implies f_n - f \in L^p(X) \\ &\implies f_n = (f_n - f) + f \in L^p(X) \end{aligned}$$

Aus 6.2 folgt:

$$\int_X \varphi_n \, dx \rightarrow 0 \implies \|f_n - f\|_p^p \rightarrow 0$$

■

**Definition**

(1) Sei  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann heißt

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$$

der **Träger** von  $f$

(2)  $C_c(X, \mathbb{R}) := \{f \in C(X, \mathbb{R}) \mid \text{supp}(f) \subseteq X \text{ und } \text{supp}(f) \text{ kompakt}\}$

**Satz 16.8**

(1)  $C_c(X, \mathbb{R}) \subseteq L^p(X)$

(2) Ist  $X$  offen, so liegt  $C_c(X, \mathbb{R})$  **dicht** in  $L^p(X)$ , d.h. ist  $f \in L^p(X)$  und  $\varepsilon > 0$ , so existiert  $g \in C_c(X, \mathbb{R})$  mit  $\|f - g\|_p < \varepsilon$ .

**Beweis**

(1) Sei  $f \in C_c(X, \mathbb{R})$  und  $K := \text{supp}(f)$ , dann ist  $K \subseteq X$  kompakt, also  $K \in \mathfrak{B}_d$ . Es gilt für alle  $x \in X \setminus K$   $f(x) = 0$  und damit folgt aus 4.12  $\int_K |f|^p \, dx < \infty$ . Dann gilt:

$$\int_X |f|^p \, dx = \int_{X \setminus K} |f|^p \, dx + \int_K |f|^p \, dx = \int_K |f|^p \, dx < \infty$$

Also ist  $f \in L^p(X)$ .

(2) Siehe Übungsblatt 13.

■