II. Vorbereitung

Definition
Seien $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$

$$a \times b := (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \in \mathbb{R}^3$$

heißt das **Kreuzprodukt** von a und b

Formal gilt mit $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$:

$$a \times b = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

Beispiel
$a = (1, 1, 2), b = (1, 1, 0)$.

$$a \times b = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = e_3 + 2e_2 - e_3 - 2e_1 = (-2, 2, 0)$$

Bemerkung (Regeln):

$$\begin{aligned} b \times a &= -(a \times b) \\ (\alpha a) \times (\beta b) &= \alpha\beta(a \times b) \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ a \times a &= 0 \\ a \cdot (a \times b) &= 0 = b \cdot (a \times b) \end{aligned}$$

Definition
Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^3$, D offen und $F = (P, Q, R) \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$.

$$\operatorname{rot} F := (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$$

heißt **Rotation** von F.

Formal: $\operatorname{rot} F = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \times (P, Q, R)$

Definition
Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$,$D$ offen, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$

$$\operatorname{div} f := \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

heißt **Divergenz** von f.

Definition
Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg. Ist γ in $t_0 \in [a, b]$ differenzierbar und ist $\gamma'(t_0) \neq 0$, so heißt $\gamma'(t_0)$ **Tangentialvektor** von γ in t_0.