1.5 Standardkonstruktionen

A) Produkte
Seien X, Y nVRe. Dann:

$$X \times Y = \{(x,y) : x \in X, y \in Y\} \text{ist ein nVR bzgl.}$$

$$||(x,y)||_p = \begin{cases} (||x||_X^p + ||y||_Y)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \max\{||x||_X, ||y||_Y\}, & p = \infty \end{cases}$$

Diese Normen sind alle äquivalent.
Sind X, Y vollständig, dann ist $(X \times Y, ||\cdot||_p)$ ein BR.

Definition *Sei Z ein nVR und $P \in B(Z)$ mit $P = P^2$. Dann heißt P **Projektion**.*

Hier ist die kanonische Projektion auf X gegeben durch $P(x,y) = (x,0)$.

B) Diskrete Summe

Definition 1.72 *Seien X_1, X_2 abg. UVRe eines BRes X mit $X_1 + X_2 = X$ und $X_1 \cap X_2 = \{0\}$. Dann ist X die **direkte Summe** von X_1 und X_2. Mann schreibt $X = X_1 \oplus X_2$.*
*X_2 heißt dann **Komplement** von X_1 in X.*

Lemma 1.73 *Sei X ein BR und $P \in B(X)$ eine Projektion. Dann ist $Q = I - P \in B(X)$ auch eine Projektion und es gelten $R(P) = N(Q) =: X_1,\ N(P) = R(Q) =: X_2,\ X = X_1 \oplus X_2$. Man hat $||P|| \geq 1$, wenn $P \neq 0$.*

Beweis $Q^2 = I - 2P + P^2 = I - P = Q$.
Falls $y = Px$ für ein $x \in X \Longrightarrow Qy = Px - P^2x = 0$.
Falls $Qx = 0$ für ein $x \in X \Longrightarrow x - Px = 0 \Longleftrightarrow x = Px \Longrightarrow x \in R(P) \Longrightarrow R(P) = N(Q)$. Also ist $X_1 = N(Q) = R(P)$ abgeschlossen (1.16). Genauso: X_2.
Ist $x \in X \Longrightarrow x = Px + (I-P)x \in X_1 \oplus X_2$. Wenn $x \in X_1 \cap X_2 \Longrightarrow Px = 0$ und $x = Py$ für ein $y \in X \Longrightarrow x = P^2y = Px = 0 \Longrightarrow X_1 \cap X_2 = \{0\}$. Schließlich: $||P|| = ||P^2|| \leq ||P||^2 \Longrightarrow ||P|| \geq 1$, falls $P \neq 0$. ∎

Umkehrung:
Sei $X = X_1 \oplus X_2$. Dann existiert für jedes $x \in X$ eindeutig bestimmte $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ mit $x = x_1 + x_2$. Setze $Px = x_1$. Dann ist P linear und $P = P^2$. Ferner ist P stetig nach dem Homomorphiesatz (Kap. 3). Somit ist die Existenz direkter Zerlegungen und Projektionen äquivalent.

Beispiel 1.74 a) $X = L^1(\mathbb{R})$. $Pf := \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} \cdot f,\ f \in X \Rightarrow P \in B(X), ||P|| = 1, P = P^2$. Ferner: $(I-P)f = \mathbb{1}_{(-\infty,0)} \cdot f$. Die Abbildung $J : R(P) \to L^1(\mathbb{R}^+),\ Jf = f_{|\mathbb{R}^+}$ ist stetig und linear mit stetiger Inverser

$$J^{-1}g = \begin{cases} g, & \text{auf } \mathbb{R}^+ \\ 0, & \text{auf } (-\infty, 0) \end{cases}$$

$\Rightarrow R(P) \equiv L^1(\mathbb{R}^+)$. Entsprechend: $N(P) \equiv L^1(\mathbb{R}_-) \Rightarrow L^1(\mathbb{R}) \equiv L^1(\mathbb{R}^+) \oplus L^1(\mathbb{R}_-)$

b) c_0 hat kein Komplement in ℓ^∞ (Werner, IV 6.5)

c) $X = \mathbb{R}^2, P = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}. P^2 = P$ und $||P|| = 1 + |t|$ bzgl. $|| \cdot ||_1$. P ist Projektion auf $x-$Achse.

Quotienten
Seien X nVR, Y ein UVR.

$$X_{/Y} = \{\hat{x} = x + Y,\ x \in X\} \quad \textbf{Quotientenraum}$$

Die Quotientenabbildung $\Pi : X \to X_{/Y}, \Pi X = \hat{X}$ ist wohldefiniert, linear und surjektiv. Man schreibt codim $Y = \dim X_{/Y}$. Es gilt $N(\Pi) = Y$. Definiere $||\hat{x}|| = \inf_{y \in Y} ||x-y|| := d(x, Y)$ **Quotientennorm**. Gilt $\overline{x}+Y = x+Y$ für gewisse $x, \overline{x} \in X$, dann gilt: $\overline{x} - x \in Y \Rightarrow d(x, Y) = d(\overline{x}, Y) \Rightarrow$ Quotientennorm wohldefiniert.
Sei $\alpha \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$. Dann:

$$||\hat{\alpha x}|| = \inf_{y \in Y} ||\alpha x - \frac{\alpha}{\alpha} y|| = |\alpha| \inf_{z \in Y} ||x - z|| = |\alpha| \cdot ||\hat{x}||$$

Seien $x_1, x_2 \in X$ und $\varepsilon > 0$. Dann ex. $y_1, y_2 \in Y$ so, dass $||x_k - y_k|| \leq ||\hat{x_k}|| + \varepsilon,\ k = 1, 2.$ $\Rightarrow ||\hat{x_1} + \hat{x_2}|| = \inf_{y \in Y} ||x_1 + x_2 - y|| \leq ||x_1 - y_1 + x_2 - y_2|| \leq ||\hat{x_1}|| + ||\hat{x_2}|| + 2\varepsilon \overset{\varepsilon \to 0}{\Longrightarrow} ||\hat{x_1} + \hat{x_2}|| \leq ||\hat{x_1}|| + ||\hat{x_2}|| \Rightarrow ||\hat{x}||$ ist ein Halbnorm auf $X_{/Y}$.
Sei nun Y abgeschlossen. Ist $||\hat{x}|| = 0$, dann ex $y_n \in Y$ mit $||x - y_n|| \to 0$ $(n \to \infty)$. Da Y abg $\Rightarrow x \in Y \Rightarrow \hat{x} = 0$ und $X_{/Y}$ ist nVR.
Weiter: $||\Pi(x)|| = ||\hat{x}|| \leq ||x||_X \Longrightarrow \Pi \in B(X, X_{/Y})$ mit $||\Pi|| \leq 1$.

Satz 1.75 *Sei X ein BR und Y ein abg UVR von X. Dann ist $(X_{/Y}, || \cdot ||)$ ein BR ($|| \cdot ||$ Quotientennorm) und* $\Pi \in B(X, X_{/Y})$, $||\Pi|| = 1$.

Beweis Sei $\overline{x}$ wie in Lemma 1.51. Dann gilt: $||\Pi|| \geq ||\Pi \overline{x}|| = \inf_{y \in Y} ||\overline{x} - y|| \geq 1 - \delta$ für ein bel $\delta \in (0, 1) \overset{\delta \to 0}{\Rightarrow} ||\Pi|| = 1$.
Sei $(\hat{x_n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine CF in $X_{/Y}$. Dann ex eine Teilfolge $(\hat{x}_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $||\hat{x}_m - \hat{x}_{n_k}|| \leq 2^{-k}$ $(*)$ für alle $x \geq n_k$. Dann ex $y_{n_k} \in Y$ mit $||x_{n_{k+1}} - x_{n_k} - y_{n_k}|| \leq 2 \cdot 2^{-k}$. Setze $v_N = x_{n_1} + \sum_{k=1}^N z_k$, wobei $z_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k} - y_{n_k}$. X BR $\Rightarrow \exists\, x := \lim_{N \to \infty} v_n \in X$.
Weiter gilt:

$$v_N = x_{n_{N+1}} - \underbrace{\sum_{k=1}^N y_{n_k}}_{\in Y} \overset{\Pi \text{ stetig}}{=} \underbrace{\hat{v}_N}_{\hat{x}_{n_{N+1}}} \to \hat{x} \text{ in } X_{/Y}$$

Beachte: $\hat{v}_N = \hat{x}_{n_{N+1}}$. Wie in Th 1.42 folgt aus $(*)$, dass $\hat{x}_n \to \hat{x}$. ■

Beispiel 1.76 a) Sei $X = Y \oplus Z$, X BR. Setze $J : Z \to X_{/Y}$, $Jz = \hat{z} = z + Y \Rightarrow J$ ist linear und stetig. Sei $Jz = 0 \Rightarrow \hat{z} = 0 \Rightarrow z \in Y \overset{z \in X}{\Rightarrow} z \in X \cap Y \Rightarrow z = 0$. Für alle $\hat{x} \in X_{/Y}$ ex. $y \in Y, z \in Z$ mit $x = z+y$, also: $\hat{x} = Jz \Rightarrow J$ ist surjektiv. Mit dem Homomorphiesatz (Kap. 3) folgt: J^{-1} ist steitg $\Rightarrow Z \cong X_{/Y}$, z.B. $L^1(\mathbb{R}_+) \cong L^1(\mathbb{R})_{/L^1(\mathbb{R}_+)}$.
Beachte: $\ell^\infty_{/c_0}$ kann nicht mit einem Teilraum von ℓ^∞ identifiziert werden, d.h. C) ist allgemeiner als B).

b) $c = c_0 \cdot \mathbb{C}$ mit Projektion $Px = x - \ell(x)\mathbb{1}$ ($\ell(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$), also ist $c_{/c_0} \cong \mathbb{C}$, d.h. codim $c_0 = 1$.
Beachte: Mit anderem Isomorphismus gilt: $c \cong c_0$ (nach Bsp 1.71)

Satz 1.77 *Sei X nVR und $Y \subseteq X$ ein abg. UVR. Sei $T \in B(X)$ mit $TY = \{Ty : y \in Y\} \subseteq Y$.*
Dann def. $\hat{T}\hat{x} := Tx$ einen Operator $\hat{T} \in B(X_{/Y}, X)$ mit $||\hat{T}|| \leq ||T||$.

Beweis Sei $\hat{x} = \hat{u} \Rightarrow x - u \in Y$. Dann: $T(x-u) \in Y$
...Vorlesungsende, Beweis in der nächste Stunde fertig... ∎