17. Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten Systeme der Form:

$$\text{(S)}\ y' = Ay + b(x)$$

wobei $A = (a_{jk}) \in \mathbb{M}_m$ und die a_{jk} **konstant** sind. Die Lösung solcher Systeme lässt sich auf Eigenwerte von A zurückführen. Ist A reell, so kann A **komplexe** Eigenwerte haben.
Also stets in diesem Paragraphen: $m \in \mathbb{N}, A = (a_{jk}) \in \mathbb{M}_m, a_{jk} \in \mathbb{C}, I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{C}^m$ und $b : I \to \mathbb{C}^m$ stetig.
Erweiterter Lösungsbegriff: Sei $y : I \to \mathbb{C}^m$ differenzierbar. y heißt eine Lösung von (S) auf $I :\iff y'(x) = Ay + b(x)\ \forall x \in I$.
y heißt eine Lösung des AWPs (A) $\begin{cases} y' = Ay + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ auf $I :\iff y$ ist eine Lösung von (S) auf I und $y(x_0) = y_0$

Satz 17.1
(A) hat auf I genau eine Lösung.

Beweis
$U := \operatorname{Re} A,\ V := \operatorname{Im} A,\ g := \operatorname{Re} b,\ h := \operatorname{Im} b,\ \gamma_0 := \operatorname{Re} y_0,\ \delta := \operatorname{Im} y_0,$
$\tilde{b} := (g, h) : I \to \mathbb{R}^{2m},\ \tilde{y_0} := (\gamma_0,\ \delta_0) \in \mathbb{R}^{2m}$
$B := \begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2m}\ (B = \overline{B})$
Betrachte das AWP $(\tilde{\text{A}})$ $\begin{cases} z' = Bz + \tilde{b}(x) \\ z(y_0) = \tilde{y_0} \end{cases}$
Sei $y : I \to \mathbb{C}^m$ eine Funktion, $z := (\operatorname{Re} y, \operatorname{Im} y) : I \to \mathbb{R}^{2m}$ Dann: y ist eine Lösung von (A) auf $I \iff z$ ist eine Lösung von $(\tilde{\text{A}})$ auf I. 16.1 $\implies$ Beh. ■

Wir betrachten das homogene System

$$\text{(H)} \quad y' = Ay$$

Folgerung 17.2
Alle Definitionen und die Sätze 16.3, 16.4 und 16.5 des §16 bleiben im komplexen Fall gültig. Der Raum $\mathbb{L}$ ist ein komplexer VR, $\dim \mathbb{L} = m$. In 16.4 schreibe $c \in \mathbb{C}^m$ und $C \in \mathbb{M}_m$ komplex.
Ist $y \in \mathbb{L}$ und A reell $\xRightarrow{\text{Bew. ü. 17.1}}$ $\operatorname{Re} y, \operatorname{Im} y \in \mathbb{L}$

Satz 17.3
e^{xA} ist eine Fundamentalmatrix von (H).

Beweis
$Y(x) := e^{xA}$; 14.5 $\implies$ e^{xA} ist invertierbar. $\implies$ $\det Y(x) \neq 0$
$Y'(x) \overset{14.5}{=} Ae^{xA} = AY(x) \implies Y$ ist eine LM von (H) ■

Beispiel (m=2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ \text{induktiv: } A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}\ \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$\implies e^{xA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^n = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} & o \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n!} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = xe^x$$

$$\implies e^{xA} = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ xe^x & e^x \end{pmatrix}$$

Fundamentalsystem von $y' = Ay$:

$$y^{(1)}(x) = e^x \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$$
$$y^{(2)}(x) = e^x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Motivation: Sei λ ein Eigenwert von A, $c \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$ und $Ac = \lambda c$
$y(x) := e^{\lambda x} c$
$y'(x) = \lambda e^{\lambda x} c = e^{\lambda x}(\lambda c) = e^{\lambda x}(Ac) = A(e^{\lambda x} c) = Ay(x)$

Satz 17.4
Die Eigenwerte von A seien **alle einfach**, d.h. A habe die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ($\lambda_j \neq \lambda_k$ für $j \neq k$). $c^{(j)}$ sei ein Eigenvektor zu $\lambda_j (j = 1, \dots, m)$. Es sei $y^{(j)}(x) := e^{\lambda_j x} c^{(j)}$.

Dann ist $(*)$ $y^{(1)}, \dots, y^{(m)}$ ein (komplexes) FS von (H)

Sei A reell: Wir können mit einem $l \in \mathbb{N}$ annehmen:
$\lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$; $(\lambda_{l+1} = \overline{\lambda_1}), \dots, (\lambda_{2l} = \overline{\lambda_l})$; $\lambda_{2l+1}, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$

Dann ist $(+)$ $\operatorname{Re} y^{(1)}, \dots, \operatorname{Re} y^{(l)}, \operatorname{Im} y^{(1)}, \dots, \operatorname{Im} y^{(l)}, y^{(2l+1)}, \dots, y^{(m)}$

ein reelles FS von (H).

Beweis
Obige Motivation $\implies y^{(1)}, \dots, y^{(m)} \in \mathbb{L}$.
Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ und $0 = \alpha_1 y^{(1)} + \ldots + \alpha_m y^{(m)}$
$\implies 0 = \alpha_1 y^{(1)}(0) + \ldots + \alpha_m y^{(m)}(0) \implies 0 = \alpha_1 c^{(1)} + \ldots + \alpha_m c^{(m)}$
$\implies \alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0 \implies y^{(1)}, \dots, y^{(m)}$ ist ein FS von (H). Sei A reell: 17.2 $\implies$ in (+) stehen Lösungen von (H).
Übung: diese Lösungen sind linear unabhängig. ∎

Beispiele:

(1) Bestimme ein komplexes FS von

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix} i & 0 & 2 \\ 1 & 1+i & 0 \\ 1-i & 1+i & 1+2 \end{pmatrix}}_{=A} y$$

$\det(A - \lambda E) = (\lambda - 1)(\lambda - i)(1 + i - \lambda)$; Eigenwerte: $\lambda_1 = i, \lambda_2 = 1 + i, \lambda_3 = 1$
EV zu $\lambda_1 : (1, -1, i)$, EV zu $\lambda_2 : (2, 2i, 1 + i)$, EV zu $\lambda_3 : (0, 1, 0)$
FS: $y^{(1)}(x) = e^{ix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ i \end{pmatrix}$, $y^{(2)}(x) = e^{(1+i)x} \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 1+i \end{pmatrix}$, $y^{(3)}(x) = e^{x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(2) Bestimme ein reelles FS von

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{=A} y$$

$\det(A - \lambda E) = (\lambda - i)(\lambda + i)(1 - \lambda)$
$\lambda_1 = i, \lambda_2 = \overline{\lambda_1}, \lambda_3 = 1$
EV zu $\lambda_1 : (1, 1, 1 - i)$, EV zu $\lambda_3 : (1, 3, 0)$

$$\begin{aligned} y(x) :&= e^{ix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1-i \end{pmatrix} = (\cos x + i \sin x) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1-i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos x + i \sin x \\ \cos x + i \sin x \\ \cos x + \sin x + i(\sin x - \cos x) \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} \cos x \\ \cos x \\ \cos x + \sin x \end{pmatrix}}_{=:y^{(1)}(x)} + i \underbrace{\begin{pmatrix} \sin x \\ \sin x \\ \sin x - \cos x \end{pmatrix}}_{=:y^{(2)}(x)} \end{aligned}$$

$$y^{(3)}(x) = e^{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fundamentalsystem: $y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}$

Hilfssatz (1)
Sei λ ein q-facher Eigenwert von A und $c^{(1)}, \dots, c^{(\nu)}$ seien linear unabhängig in $\text{Kern}(A - \lambda E)^q$.

Für $j = 1, \dots, \nu$:

$$y^{(j)}(x) := e^{\lambda x}\left(c^{(j)} + x(A-\lambda E)c^{(j)} + \frac{x^2}{2!}(A-\lambda E)^2 c^{(j)} + \cdots + \frac{x^{(q-1)}}{(q-1)!}(A-\lambda E)^{q-1}c^{(j)}\right)$$

Dann sind $y^{(1)}, \dots, y^{(\nu)}$ linear unabhängige Lösungen von (H).

Beweis
1. Schreibe c statt $c^{(j)}$ und y statt $y^{(j)}$. Also:

$$\begin{aligned}
y(x) &= e^{\lambda x}\sum_{k=0}^{q-1}\frac{x^k}{k!}(A-\lambda E)^k c \\
y'(x) &= \lambda y(x) + e^{\lambda x}\sum_{k=1}^{q-1}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}(A-\lambda E)^k c \\
&= \lambda y(x) + e^{\lambda x}\sum_{k=1}^{q}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}(A-\lambda E)^k c \\
&= \lambda y(x) + e^{\lambda x}\sum_{k=0}^{q-1}\frac{x^{k}}{k!}(A-\lambda E)^{k+1} c \\
&= \lambda y(x) + (A-\lambda E)\underbrace{\left(e^{\lambda x}\sum_{k=0}^{q-1}\frac{x^{k}}{k!}(A-\lambda E)^{k} c\right)}_{=y(x)} \\
&= \lambda y(x) + (A-\lambda E)y(x) = Ay(x)
\end{aligned}$$

2. $y^{(j)}(0) = c^{(j)} \overset{16.3}{\Longrightarrow} y^{(1)}, \dots, y^{(\nu)}$ sind linear unabhängig in $\mathbb{L}$ ■

Hilfssatz (2)
Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die paarweisen verschienden Eigenwerte von A und $q_1, \dots, q_k$ deren Vielfachheiten (also: $k \le m, q_1 + \cdots + q_k = m$).

$$V_j := \operatorname{Kern}(A - \lambda_j E)^{q_j} \quad (j = 1, \dots, k)\,.$$

Dann:

$$\mathbb{C}^m = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$$

Beweis
Siehe lineare Algebra ■

Konstruktion für die Praxis: Bezeichnungen wie im Hilfssatz 2. Sei $j \in \{i, \dots, k\}$. Dann:

$$\operatorname{Kern}(A-\lambda_j E) \subseteq \operatorname{Kern}(A-\lambda_j E)^2 \subseteq \operatorname{Kern}(A-\lambda_j E)^3 \subseteq \cdots \subseteq V_j$$

Bestimme eine Basis von V_j wie folgt:

Bestimme eine Basis von $\operatorname{Kern}(A-\lambda_j E)$. Erweitere diese zu einer Basis von $\operatorname{Kern}(A-\lambda_j E)^2$, ...

Aus den Hilfssätzen (1) und (2) und obiger Konstrutktion folgt:

Satz 17.5
$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ und $q_1, \dots, q_k$ seien wie im Hilfssatz (2). Zu λ_j gibt es q_j linear unabhängige Lösungen von (H) der Form:

$$(**) \quad e^{\lambda_j x} p_0^{(j)}(x), e^{\lambda_j x} p_1^{(j)}(x), \dots, e^{\lambda_j x} p_{q_j-1}^{(j)}(x)$$

wobei im Vektor $p_\nu^{(j)}(x)$ Polynome vom Grad kleiner oder gleich ν stehen.

Führt man diese Konstruktion für jedes λ_j durch, so erhält man ein (komplexes) Fundamentalsystem von (H).

Ist also A reell, so kann man mit einem $l \in \mathbb{N}$ annehmen:

$$\lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},\ \lambda_{l+1} = \overline{\lambda_1}, \dots, \lambda_{2l} = \overline{\lambda_l},\ \lambda_{2l+1}, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$$

und

$$p_0^{(j)}(x), \dots, p_{q-1}^{(j)}(x) \in \mathbb{R}^m \quad (j = 2l+1, \dots, k)$$

Ein reelles Fundamentalsystem von (H) erhält man wie folgt:

1. Für $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ zerlege die Lösungen in $(**)$ in Real- und Imaginärteil (und lasse die Lösungen für $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_{2l}$ unberücksichtigt).

2. Für $\lambda_{2l+1}, \dots, \lambda_k$ übernehme die Lösungen aus $(**)$.

Bezeichnung: Für $a^{(1)}, \dots, a^{(\nu)} \in \mathbb{C}^m$ sei $[a^{(1)}, \dots, a^{(\nu)}]$ die lineare Hülle von $a^{(1)}, \dots, a^{(\nu)}$

Beispiele:
(1)

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} y$$

$\lambda_1 = i$ ist ein 2-facher Eigenwert von A, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -i$ ist ein 2-facher Eigenwert von A.

$$\operatorname{Kern}(A - iE) = [\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}] \subseteq [\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2i \\ -3 \end{pmatrix}] = \operatorname{Kern}(A - iE)^2$$

$$y^{(1)}(x) = e^{ix}\begin{pmatrix}1\\i\\-1\\-i\end{pmatrix}$$

$$y^{(2)}(x) = e^{ix}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\2i\\-3\end{pmatrix} + x(A-iE)\begin{pmatrix}0\\1\\2i\\-3\end{pmatrix}\right) = e^{ix}\begin{pmatrix}x\\1+ix\\-x+2i\\3-ix\end{pmatrix}$$

Dann ist $\operatorname{Re} y^{(1)}, \operatorname{Im} y^{(1)}, \operatorname{Re} y^{(2)}, \operatorname{Im} y^{(3)}$ ein reelles FS.

$$y^{(1)}(x) = \begin{pmatrix}\cos x + i\sin x\\ -\sin x + i\cos x\\ -\cos x - i\sin x\\ \sin x - i\cos x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos x\\ -\sin x\\ -\cos x\\ \sin x\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\\ -\sin x\\ -\cos x\end{pmatrix}$$

(2)

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -2 & 3 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}}_{=A} y$$

$\det(A-\lambda E) = -(\lambda-1)(\lambda-1)^2$; $\lambda_1 = 1, q_1 = 2, \lambda_2 = 2, q_2 = 1$;

$$\operatorname{Kern}(A-E) = [\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}] \subseteq [\begin{pmatrix}1\\1\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}] = \operatorname{Kern}(A-E)^2$$

$$y^{(1)}(x) = e^{x}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} y^{(2)}(x) &= e^{x}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} + x(A-E)\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right)\\ &= e^{x}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} + x\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)\\ &= e^{x}\begin{pmatrix}x\\x\\-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\operatorname{Kern}(A-2E) = [\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}]$$

$$y^{(3)}(x) = e^{2x}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Das Fundamentalsystem ist $y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}$.

(3)

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}}_{=A} y$$

$\det(A - \lambda E) = -(\lambda - 1)^3$; $\lambda_1 = 1$, $q_1 = 3$

$$\begin{aligned} \mathrm{Kern}(A - E) &= [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}] \\ &\subseteq [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}] = \mathrm{Kern}(A - E)^2 \\ &\subseteq [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}] = \mathrm{Kern}(A - E)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^{(1)}(x) &= e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ y^{(2)}(x) &= e^x \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + x(A - E) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2) \end{pmatrix} \right) \\ &= e^x \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= e^x \begin{pmatrix} -4x \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ y^{(3)}(x) &= e^x \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x(A - E) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2}(A - E)^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= e^x \begin{pmatrix} x - 2x^2 \\ -x \\ 1 + 2x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das Fundamentalsystem ist $y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}$.

Zum inhomogenen System (IH) $Ay + b(x)$. Sei $y^{(1)}, \ldots, y^{(m)}$ ein Fundamentalsystem von (H). Für eine spezielle Lösung y_s von (IH) macht man den Ansatz

$$y_s(x) = c_1(x)y^{(1)} + \cdots + c_m(x)y^{(m)}$$

und gehe damit in (IH) ein.