# 11. Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis

In diesem Paragraphen sei $X$ stets ein Vektorraum (VR) über $\mathbb{K}$, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

**Definition**

Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ heißt eine **Norm auf** $X$ $:\iff$

(i) $\|x\| \geq 0 \ \forall x \in X$; $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in X$

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecks-Ungleichung)

In diesem Fall heißt $(X, \|\cdot\|)$ ein **normierter Raum** (NR). Meist schreibt man nur $X$ statt $(X, \|\cdot\|)$.

**Beispiele:**

(1) $X = \mathbb{K}^n$, für $x = (x_1, \ldots, x_n)$: $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Analysis II $\implies$ $(X, \|\cdot\|)$ ist ein normierter Raum.

(2) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sei beschränkt und abgeschlossen. $X = C(A, \mathbb{R}^n)$;
$\|f\|_\infty = \max\{\|f(x)\|, x \in A\}$ $(f \in X)$. Dann ist $(X, \|\cdot\|_\infty)$ ein normierter Raum.

(3) $X = L(\mathbb{R}^n)$. Für $f \in L(\mathbb{R})$: $\|f\|_1 := \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx$; $\|f\|_2 := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$; Analysis II 16.1 $\implies$ $\|\cdot\|_1$ hat die Eigenschaft (ii) und (iii) einer Norm, $\|f\|_1 \geq 0$ aber $\|f\|_1 = 0 \iff f = 0$ fast überall auf $\mathbb{R}^n$.
Es ist üblich, zwei Funktionen $f, g \in L(\mathbb{R}^n)$ als gleich zu betrachten, wenn $f = g$ fast überall. In diesem Sinne: $(L(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ ist ein normierter Raum.

Für den Rest des Paragraphen sei $(X, \|\cdot\|)$ stets ein normierter Raum. Wie in Analysis II zeigt man:

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \ \forall x, y \in X$$

$\|x - y\|$ heißt Abstand von $x$ und $y$.

**Definition**

Sei $(x_n)$ eine Folge in X

(1) $(x_n)$ heißt konvergent $:\iff \exists x \in X : \|x_n - x\| = 0 \ (n \to \infty)$
In diesem Fall ist $x$ eindeutig bestimmt (Beweis wie in $\mathbb{R}^n$) und heißt der Grenzwert (GW) oder Limes von $(x_n)$. Man schreibt:

$$x_n \to x \ (x \to \infty) \text{ oder } x_n \to \infty \text{ oder } \lim_{n \to \infty} x_n = x$$

(2) $\sum_{n=1}^\infty x_n$ bedeutet die Folge $(s_n)$ wobei $s_n := x_1 + \cdots + x_n$ $(n \in \mathbb{N})$
$\sum_{n=1}^\infty x_n$ heißt konvergent $:\iff$ $(s_n)$ ist konvergent.
$\sum_{n=1}^\infty x_n$ heißt divergent $:\iff$ $(s_n)$ ist divergent.
Im Konvergenzfall: $\sum_{n=1}^\infty x_n := \lim_{n \to \infty} s_n$

Wie üblich zeigt man: Aus $x_n \to x$ und $y_n \to y$ folgt:

$$x_n + y_n = x + y$$

$$\alpha x_n \to \alpha x \ (\alpha \in \mathbb{K})$$

$$\|x_n\| \to \|x\|$$

**Definition**
Sei $(x_n)$ eine Folge in $X$ und $A \subseteq X$

(1) $A$ heißt **konvex** $:\iff$ aus $x, y \in A$ und $t \in [0,1]$ folgt stets: $x + t(y - x) \in A$

(2) $A$ heißt **beschränkt** $:\iff$ $\exists c \geq 0 : \|x\| \leq c \ \forall x \in A$

(3) $A$ heißt **abgeschlossen** $:\iff$ der Grenzwert jeder konvergenten Folge aus $A$ gehört zu $A$

(4) $A$ heißt **kompakt** $:\iff$ jede Folge in $A$ enthält eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert zu $A$ gehört.

(5) $(x_n)$ heißt eine Cauchyfolge (CF) in $X$ $:\iff$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{R} : \|x_n - x_m\| < \varepsilon \ \forall n, m \geq n_0$

**Bemerkung:** (1) Wie in Analysis II: $(x_n)$ konvergiert $\implies$ $(x_n)$ ist eine Cauchyfolge in $X$

(2) Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$: $A$ ist kompakt $:\iff$ $A$ ist beschränkt und abgeschlossen (Analysis II, 2.2)

(3) $A$ kompakt $\implies$ $A$ abgeschlossen

(4) $X = C[a,b]$ mit $\|\cdot\|_\infty$. Sei $(f_n)$ eine Folge in $X$ und $f \in X$. Dann $(f_n) \to f$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ $\iff$ $(f_n)$ konvergiert auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen $f$ (Analysis I, Übungsblatt 10, Aufgabe 37)

**Beispiel**
$X = C[-1,1]$ mit $\|\cdot\|_2 = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

$$f_n = \begin{cases} -1, & 1 \leq x \leq -\frac{1}{n} \\ nx, & -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

In der Übung: $(f_n)$ ist eine Cauchyfolge in $X$, aber es existiert kein $f \in X : f_n \to f$ (bezüglich $\|\cdot\|_2$)

**Definition**
Ein normierter Raum $X$ heißt **vollständig** oder ein **Banachraum** (BR) $:\iff$ jede Cauchyfolge in $X$ ist konvergent.

**Beispiele:**

(1) Sei $X$ und $\|\cdot\|_2$ wie im obigen Beispiel. Dann ist $X$ kein Banachraum.

(2) $\mathbb{R}^n$ ist mit der üblichen Norm ein Banachraum (Siehe Analysis II)

(3) $C[a,b]$ ist mit $\|\cdot\|_\infty$ ein Banachraum (Analysis I, Übungsblatt 10, Aufgabe 37)

(4) $L(\mathbb{R}^n)$ ist mit $\|\cdot\|_1$ ein Banachraum (Analysis II, 18.1)

**Definition**
$X$ sei ein normierter Raum, $x_0 \in X$ und $\epsilon > 0$.

(1) $U_\epsilon(x_0) := \{x \in X : \|x - x_0\| < \epsilon\}$ heißt $\epsilon$ - Umgebung von $U$

(2) $D \subseteq X$ heißt offen $:\Leftrightarrow\ \forall x \in D\ \exists \epsilon = \epsilon(x) > 0 : U_\epsilon(x) \subseteq D$

Wie in Analysis 2 zeigt man:

**Satz 11.1 (Verweis auf Analysis 2.3(3))**
(1) $D$ ist offen $:\Leftrightarrow X \setminus D$ ist abgeschlossen.

(2) Ist $A \subseteq X$ kompakt, so gilt die Aussage des Satzes 2.3(3) aus Analysis 2 wörtlich

**Definition (Operator)**
$X$ sei ein normierter Raum, $A \subseteq X$ und $T : A \to X$ eine Abbildung. $T$ heißt auch ein **Operator** auf $A$, man schreibt meist $T_x$ statt $T(x)$ $(x \in A)$.

(1) $x^*$ heißt ein **Fixpunkt** von $T :\Leftrightarrow T_{x^*} = x^*$.

(2) $T$ heißt in $x_0 \in A$ stetig $:\Leftrightarrow$ für jede Folge $(x_n)$ in $A$. mit $x_n \to x_0 : T_{x_n} \to T_{x_0}$.
(Übung: $\Leftrightarrow\ \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \|T_x - T_0\| < \epsilon\ \forall x \in U_\delta(x_0) \cap A$)

(3) $T$ heißt stetig auf $A :\Leftrightarrow T$ ist stetig in jedem $x \in A$.

(4) $T$ heißt auf $A$ **kontrahierend** $:\Leftrightarrow\ \exists\ L \in [0, 1) : \|T_x - T_y\| \le L\|x - y\|\ \forall x, y \in A$

**Beispiel (Wichtig!)**
$x = C[a, b]$ ist mit $\| \cdot \|_\infty$ ein Banachraum. Definiere $T : X \to X$ durch $(T_y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$ $(x \in [a, b])$ wobei $x_0 \in [a, b]$, $y_0 \in \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. $(T_y \in C^1[a, b])$

Behauptung: $T$ ist stetig auf $X$.

**Beweis**
Sei $z_0 \in X$. Sei $z \in X$ mit $\|z - z_0\| \le 1$. $\forall t \in [a, b] : |z(t)| \le \|z\|_\infty = \|z - z_0 + z_0\|_\infty \le \|z - z_0\|_\infty + \|z_0\|_\infty \le 1 + \|z_0\|_\infty =: \gamma$

$R := [a, b] \times [-\gamma, \gamma]$. D.h. $(t, z(t)) \in R\ \forall t \in [a, b]\ \forall z \in X$ mit $\|z - z_0\|_\infty \le 1$.

$f$ ist glm. stetig auf $R$ (da $R$ kompakt). Sei $\epsilon > 0$. $\exists\ \delta > 0 : |f(\alpha) - f(\beta)| < \epsilon\ \forall \alpha, \beta \in R$ mit $\|\alpha - \beta\| < \delta$ und $\delta \le 1$.

Sei $z \in X$ mit $\|z - z_0\|_\infty < \delta \le 1$. Dann: $\|(t, z(t)) - (t, z_0(t))\| = \|(0, z(t) - z_0(t))\| = |z(t) - z_0(t)| \le \|z - z_0\|_\infty < \delta\ \forall\ t \in [a, b]$

$\implies |f(t, z(t)) - f(t, z_0(t))| < \epsilon\ \forall\ t \in [a, b]$

$\implies |(T_z)(x) - (T_{z_0})(x)| = |\int_{x_0}^{x}(f(t, z(t))) - (f(t, z_0(t)))dt| \le \epsilon|x - x_0| \le (b - a)\ \forall\ x \in [a, b]$

$\implies \|T_z - T_{z_0}\|_\infty \le \epsilon(b - a) \implies T$ ist stetig in $z_0$. ∎

**Satz 11.2 (Fixpunktsatz von Banach)**
$X$ sei ein Banachraum. $A \subseteq X$ sei abgeschlossen, $T : A \to X$ sei kontrahierend, also $\exists\ L \in [0,1) : \|T_x - T_y\| \leq L\|x-y\|\ \forall x,y \in A$ und es sei $T(A) \subseteq A$. Dann hat $T$ genau einen Fixpunkt $x^* \in A$.

Sei $x_0 \in A$ beliebig und $x_{n+1} := T_{x_n} (n \geq 0)$. Dann:

(i) $x_n \in A\ \forall n \in \mathbb{N}_0$

(ii) $x_n \to x^*$

(iii) $\|x_n - x^*\| \leq \frac{L^n}{1-L}\|x_0 - x_1\|\ \forall n \in \mathbb{N}_0$.

$(x_n)$ heißt **Folge der sukzessiven Approximation**.

**Beweis**
Sei $x_0 \in A$. Definiere $x_{n+1} := T_{x_n} (n \geq 0) \implies (i)$.

$\|x_{k+1} - x_k\| = \|T_{x_k} - T_{x_{k-1}}\| \leq L\|x_k - x_{k-1}\| (\forall k \geq 1)$

Induktiv: $\|x_{k+1} - x_k\| \leq L^k\|x_k - x_0\|\ \forall k \geq 0$

Seien $m, n \in \mathbb{N}, m > n$. $\|x_m - x_n\| = \|x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + \cdots + x_{n+1} - x_n\| \leq \|x_m - x_{m-1}\| + \|x_{m-1} - x_{m-2}\| + \cdots + \|x_{n+1} - x_n\| \leq (L^{m^1} + L^{m-2} + \cdots + L^n)\|x_1 - x_0\| = L^n \underbrace{(1 + L + \cdots + L^{m-1-n})}_{\leq \sum_{i=0}^{\infty} L^j = \frac{1}{1-L}} \|x_1 - x_0\| \leq \frac{L^n}{1-L}\|x_1 - x_0\| (*)$

$(*) \implies (x_n)$ ist eine Cauchy-Folge in $X$. $X$ Banachraum $\implies \exists x^* \in X : x_n \to x^*$. $(iii)$ folgt aus $(*)$ mit $m \to \infty$

$A$ abgeschlossen $\implies x^* \in A$

$\|T_{x^*} - x^*\| = \|T_{xj} - x_{n+1} + x_{n+1} - x^*\| \leq \|T_{x^*} - \underbrace{x_{n+1}}_{=T_{x_n}}\| + \|x_{n+1} - x^*\| \leq \underbrace{L\|x^* - x_n\| + \|x_{n+1} - x^*\|}_{\to 0 (n \to \infty)} \implies$
$\|T_{x^*} - x^*\| = 0 \implies T_{x^*} = x^*$

Sei $z \in A$ und $T_z = z$. $\|x^* - z\| = \|T_{x^*} - T_z\| \leq L\|x^* - z\|$; wäre $\|x^* - z\| \neq 0 \implies L \geq 1$, Wid., also $x^* = z$. ∎

Ohne Beweis:

**Satz 11.3 (Fixpunktsatz von Schauder)**
$X$ sei ein normierter Raum, $A \subseteq X$ sei konvex und kompakt und $T : A \to X$ sei stetig und $T(A) \subseteq A$. Dann hat $T$ einen Fixpunkt (in $A$).

**Satz 11.4 (Konvergente Teilfolgen von Funktionen)**
Sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$, $M \geq 0$ und $(y_n)$ eine Folge in $C(I)$ mit: $y_n(x_0) = y_0\ \forall n \in \mathbb{N}$ und $|y_n(x) - y_n(\overline{x})| \leq M|x - \overline{x}|\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x, \overline{x} \in I$ Dann enthält $(y_n)$ eine auf $I$ gleichmäßig konvergente Teilfolge.

**Beweis**
$\mathcal{F} := \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. $\mathcal{F}$ ist auf $I$ gleichstetig. $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in I : |y_n(x)| = |y_n(x) - y_0 + y_0| \leq |y_n(x) - y_0| + |y_0| = |y_n(x) - y_n(x_0)| + |y_0| \leq M|x - x_0| + |y_0| \leq M(b - a) \cdot |y_0| \implies \mathcal{F}$ ist gleichmäßig beschränkt. 1 $\implies$ Behauptung. ∎

**Satz 11.5 (Konvexe und Kompakte Teilmenge)**
$I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$, $M \geq 0$,
$A := \{y \in C(I) : y(x_0) = y_0 \text{ und } |y(x) - y(\overline{x})| \leq M|x - \overline{x}|\ \forall x, \overline{x} \in I\}$
Dann ist $A$ eine nicht leere, konvexe und kompakte Teilmenge des Banachraumes $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$.

**Beweis**

$A \neq \emptyset \quad (y(x) \equiv y_0 \implies y \in A)$

Übung: $A$ ist konvex.

Sei $(y_n)$ ein Folge in $A$. 11.4 $\implies$ $(y_n)$ enthält eine auf $I$ gleichmäßig konvergente Teilfolge $(y_{n_k})$, $y(x) := \lim_{n\to\infty} y_{n_k}(x)$ $(x \in I)$ $\overset{\text{A I}}{\implies}$ $y \in C(I)$
z.zg: $y \in A$. $y(x_0) = lim_{n\to\infty} y_{n_k}(x_0) = y_0$
$\forall k \in \mathbb{N}\ \forall x, \overline{x} \in I : |y_{n_k}(x) - y_{n_k}(\overline{x})| \leq M|x - \overline{x}| \xrightarrow{k\to\infty} |y(x) - y(\overline{x})| \leq M|x - \overline{x}|$. Also: $y \in A$∎