

## § 9 Das Prinzip von Cavalieri

Die Bezeichnungen seien wie im Paragraphen 8.

### Satz 9.1 (Prinzip von Cavalieri)

Sei  $C \in \mathfrak{B}_d$ . Dann:

$$\lambda_d(C) = \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_l(C^x) dx = \int_{\mathbb{R}^l} \lambda_k(C_y) dy$$

Das heißt:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_C(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^k} \left( \int_{\mathbb{R}^l} \mathbb{1}_C(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^l} \left( \int_{\mathbb{R}^k} \mathbb{1}_C(x, y) dx \right) dy$$

### Beispiel

(1) Sei  $k = l = 1$ , also  $d = 2$ . Sei  $r > 0$  und

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

Da  $C$  abgeschlossen ist, gilt  $C \in \mathfrak{B}_2$ .

Ist  $|y| > r$ , so ist  $C_y = \emptyset$ , also  $\lambda_1(C_y) = 0$ .

Sei also  $|y| \leq r$ . Sei  $x \in \mathbb{R}$  so, dass  $(x, y) \in \partial C$ . Dann ist  $x^2 + y^2 = r^2$ , also  $x = \pm \sqrt{r^2 - y^2}$ .

Das heißt, es ist

$$C_y = \left[ -\sqrt{r^2 - y^2}, +\sqrt{r^2 - y^2} \right] \text{ und } \lambda_1(C_y) = 2\sqrt{r^2 - y^2}$$

Aus 9.1 folgt:

$$\begin{aligned} \lambda_2(C) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_1(C_y) dy \\ &= \int_{[-r, r]} \lambda_1(C_y) dy + \int_{\mathbb{R} \setminus [-r, r]} \lambda_1(C_y) dy \\ &= \int_{[-r, r]} 2\sqrt{r^2 - y^2} dy \\ &\stackrel{4.13}{=} \text{R-} \int_{-r}^r 2\sqrt{r^2 - y^2} dy \\ &\stackrel{AnaI}{=} \pi r^2 \end{aligned}$$

(2) Sei  $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}^d$ .  $X$  sei kompakt, also  $X \in \mathfrak{B}_d$ . Weiter sei  $f: X \rightarrow [0, \infty)$  stetig, woraus mit 4.11  $f \in \mathfrak{L}^1(X)$  folgt. Setze

$$C := \{(x, y) : x \in X, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

## 9. Das Prinzip von Cavalieri

$C$  ist kompakt und somit gilt:  $C \in \mathfrak{B}_{d+1}$ .

Ist  $x \notin X$ , so ist  $C^x = \emptyset$ , also  $\lambda_1(C^x) = 0$ .

Ist  $x \in X$ , so ist  $C^x = [0, f(x)]$ , also  $\lambda_1(C^x) = f(x)$ . Damit gilt

$$\lambda_{d+1}(C) \stackrel{9.1}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \lambda_1(C^x) dx = \int_X \lambda_1(C^x) dx + \int_{\mathbb{R}^d \setminus X} \lambda_1(C^x) dx = \int_X f(x) dx$$

(3) Sei  $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und  $f: I \rightarrow [0, \infty]$  stetig. Setze

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Aus Beispiel (2) und 4.13 folgt

$$\lambda_2(C) = \int_a^b f(x) dx$$

(4)  $X$  und  $f$  seien wie in Beispiel (2). Setze

$$G := \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

$G$  ist kompakt, also ist  $G \in \mathfrak{B}_2$ . Ist  $x \notin X$ , so ist  $G^x = \emptyset$ , also  $\lambda_1(G^x) = 0$ . Ist  $x \in X$ , so ist  $G^x = \{f(x)\}$ , also  $\lambda_1(G^x) = 0$ . Aus 9.1 folgt

$$\lambda_2(G) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_1(G^x) dx = 0$$

### Beweis (Prinzip von Cavalieri)

Wir definieren  $\mu, \nu : \mathfrak{B}_d \rightarrow [0, \infty]$  durch:

$$\mu(A) := \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_l(A^x) dx \quad \nu(A) := \int_{\mathbb{R}^l} \lambda_k(A_y) dy$$

Dann ist klar, dass  $\mu(\emptyset) = \nu(\emptyset) = \lambda_d(\emptyset) = 0$  ist.

Sei  $(A_j)$  eine disjunkte Folge in  $\mathfrak{B}_d$ . Dann ist  $(A_j^x)$  ebenfalls disjunkt und  $(\bigcup A_j)^x = \bigcup A_j^x$ . Somit gilt:

$$\begin{aligned} \mu(\bigcup A_j) &= \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_l(\bigcup A_j^x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} \sum \lambda_l(A_j^x) dx \\ &= \sum \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_l(A_j^x) dx \\ &= \sum \mu(A_j) \end{aligned}$$

D.h.  $\mu$  ist ein Maß auf  $\mathfrak{B}_d$ . Analog lässt sich zeigen, dass  $\nu$  ein Maß auf  $\mathfrak{B}_d$  ist.

Sei nun  $I \in \mathcal{I}_d$ , dann existieren  $I' \in \mathcal{I}_k, I'' \in \mathcal{I}_l$  mit  $I = I' \times I''$ . Aus §8 folgt:

$$I^x = \begin{cases} I'' & , x \in I' \\ \emptyset & , x \notin I' \end{cases}$$

Also ist  $\lambda_l(I^x) = \lambda_l(I'') \cdot \mathbb{1}_{I'}(x)$  und damit:

$$\begin{aligned} \mu(I) &= \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_l(I'') \cdot \mathbb{1}_{I'}(x) dx \\ &= \lambda_l(I'') \cdot \lambda_k(I') = \lambda_d(I) \end{aligned}$$

D.h. auf  $\mathcal{I}_d$  stimmen  $\mu$  und  $\lambda_d$  überein. Analog gilt  $\nu = \lambda_d$  auf  $\mathcal{I}_d$ . Da  $\mathcal{I}_d$  die Voraussetzungen des Satzes 2.6 erfüllt, gilt  $\mu = \lambda_d = \nu$  auf  $\mathfrak{B}_d$ . ■

**Folgerung 9.2**

(1) Sei  $N \in \mathfrak{B}_d$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}\lambda_d(N) = 0 &\iff \lambda_l(N^x) = 0 \quad \text{f.ü. auf } \mathbb{R}^k \\ &\iff \lambda_k(N_y) = 0 \quad \text{f.ü. auf } \mathbb{R}^l\end{aligned}$$

(2) Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^k$  ( $M \subseteq \mathbb{R}^l$ ) eine Nullmenge, dann ist  $M \times \mathbb{R}^l$  ( $\mathbb{R}^k \times M$ ) eine Nullmenge.

**Beweis**

(1) Nach 9.1 gilt:

$$\lambda_d(N) = \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_l(N^x) \, dx$$

Nach 5.2(2) folgt die Behauptung. Analog lässt sich die zweite Äquivalenz zeigen.

(2) Es gilt:

$$\forall y \in \mathbb{R}^l : (M \times \mathbb{R}^l)_y = M$$

Damit folgt die Behauptung aus (1). ■

**Lemma 9.3**

Sei  $\emptyset \neq D \in \mathfrak{B}_d$  und  $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar. Definiere

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & , z \in D \\ 0 & , z \notin D \end{cases}$$

Dann ist  $\tilde{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar.

**Beweis**

Sei  $a \in \mathbb{R}$ ,  $B_a := \{n \in \mathbb{R}^d \mid \tilde{f}(z) \leq a\}$ .

**Fall  $a < 0$ :**

$$B_a = \{z \in D \mid f(z) \leq a\} \stackrel{3.4}{\in} \mathfrak{B}_d$$

**Fall  $a \geq 0$ :**

$$B_a = \{z \in D \mid f(z) \leq a\} \cup \{z \in \mathbb{R}^d \setminus D\} \in \mathfrak{B}_d$$

Also folgt aus 3.4 die Messbarkeit von  $\tilde{f}$ . ■

**Beispiel**

(1) Sei  $r > 0$  und

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r^2\}$$

Dann ist  $K$  offen, also  $K \in \mathfrak{B}_2$  und es gilt:

$$\partial K = \overline{K} \setminus K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\} \in \mathfrak{B}_2$$

Damit enthält die Menge  $(\partial K)_y$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  höchstens zwei Elemente, d.h.

$$\lambda_2(\partial K) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_1((\partial K)_y) \, dy = 0$$

## 9. Das Prinzip von Cavalieri

Mit  $\overline{K} = (\partial K) \dot{\cup} K$  folgt dann

$$\lambda_2(K) = \lambda_2(\partial K) + \lambda_2(\overline{K}) = \lambda_2(\overline{K}) = \pi r^2$$

Sei nun  $A \in \mathfrak{B}_2$  mit  $K \subseteq A \subseteq \overline{K}$ , dann ist  $\lambda_2(A) = \pi r^2$ .

(2) Sei  $r > 0$  und

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$$

Dann ist  $K$  abgeschlossen, also  $K \in \mathfrak{B}_3$ .

**Fall**  $|z| > r$ : Es ist  $K_z = \emptyset$ , also  $\lambda_2(K_z) = 0$ .

**Fall**  $|z| \leq r$ : Es ist

$$K_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2 - z^2\}$$

und damit  $\lambda_2(K_z) = \pi(r^2 - z^2)$ .

Aus 9.1 folgt dann:

$$\begin{aligned} \lambda_3(K) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_2(K_z) \, dz \\ &= \int_{[-r, r]} \lambda_2(K_z) \, dz + \int_{\mathbb{R} \setminus [-r, r]} \lambda_2(K_z) \, dz \\ &= \int_{[-r, r]} \pi(r^2 - z^2) \, dz \\ &\stackrel{4.13}{=} \int_{-r}^r \pi r^2 - \pi z^2 \, dz \\ &= \frac{4}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$

(3)  $\lambda_2(\odot) = 0$

(4) Wir wollen nun **Rotationskörper** betrachten. Sei dazu  $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und  $f : I \rightarrow [0, \infty)$  messbar. Definiere nun

$$V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq f(z)^2, z \in I\}$$

Setze  $D := \mathbb{R}^2 \times I$  und  $g(x, y, z) := x^2 + y^2 - f(z)^2$ . Dann ist  $g$  nach §3 messbar und  $V = \{g \leq 0\} \in \mathfrak{B}_3$ .

**Fall**  $z \notin I$ : Es so ist  $V_z = \emptyset$ , also  $\lambda_2(V_z) = 0$ .

**Fall**  $z \in I$ : Es ist

$$V_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq f(z)^2\}$$

und damit  $\lambda_2(V_z) = \pi f(z)^2$ .

Aus 9.1 folgt dann:

$$\begin{aligned} \lambda_3(V) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_2(V_z) \, dz \\ &= \pi \int_a^b f(z)^2 \, dz \end{aligned}$$

(5) Sei  $h > 0$ ,  $I = [0, h]$  und  $f(z) = \frac{r}{h}z$ . Definiere den Kegel

$$V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq \frac{r^2}{h^2} z^2\}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\lambda_3(V) &= \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} z^2 \, dz \\ &= \frac{\pi r^2 h}{3}\end{aligned}$$

