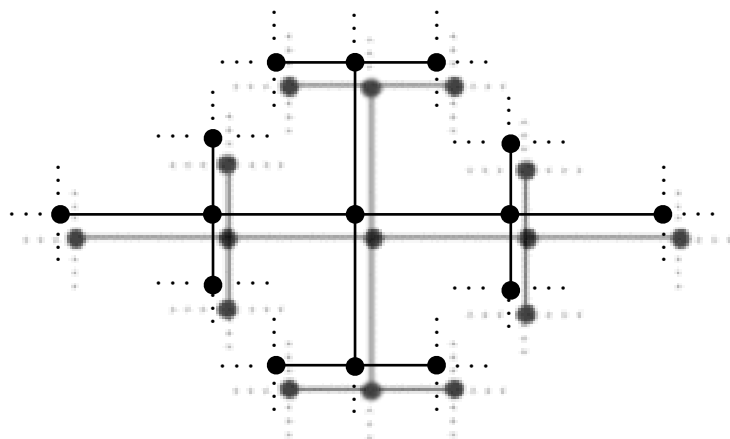


# Gruppen und Graphen



Fassung vom 10. Januar 2017.

Zum Erstellen der Grafiken wurden die Programme OmniGraffle und MuPAD verwendet.

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Graphen und Bäume</b>	<b>1</b>
1	Graphen	1
2	Bäume	4
<b>II</b>	<b>Cayley-Graphen und Automorphismengruppen</b>	<b>9</b>
3	Cayley-Graphen von Gruppen	9
4	Quotientengraphen	17
5	Freie Gruppen	20
<b>III</b>	<b>Bass-Serre-Theorie</b>	<b>23</b>
6	Die Fundamentalgruppe eines Graphen	23
7	Freie Produkte und Amalgame	27
8	Graphen von Gruppen	38
9	Segmente und Amalgame	43
10	Bäume von Gruppen	46
11	HNN-Erweiterungen	50
12	Fundamentalgruppe eines Graphen von Gruppen	52
13	Der Satz von Kurosh	60
<b>IV</b>	<b>Der Bruhat-Tits-Baum für <math>GL_2(\mathbb{Q}_p)</math></b>	<b>63</b>
14	$p$ -adische Zahlen	63
15	Der Baum für $\mathbb{Q}_p$	67

<b>16 Die Aktion von <math>\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)</math> auf <math>T_p</math></b>	<b>72</b>
<b>17 Der Satz von Ihara</b>	<b>82</b>
 <b>V Diskontinuierliche Gruppen</b>	 <b>89</b>
<b>18 Möbiustransformationen</b>	<b>89</b>
<b>19 Diskontinuierliche Untergruppen von <math>\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)</math></b>	<b>92</b>
<b>Literatur</b>	<b>98</b>
<b>Index</b>	<b>99</b>

# Teil I

## Graphen und Bäume

### 1 Graphen

**Definition 1.1** Ein **Graph**  $\Gamma$  besteht aus zwei Mengen

$$E = E(\Gamma) \quad (\text{die } \mathbf{Ecken} \text{ von } \Gamma)$$

$$K = K(\Gamma) \quad (\text{die } \mathbf{orientierten Kanten} \text{ von } \Gamma)$$

und den Abbildungen

$$I : K \rightarrow E \times E, \quad k \mapsto (i(k), t(k))$$

und

$$- : K \rightarrow K, \quad k \mapsto \bar{k},$$

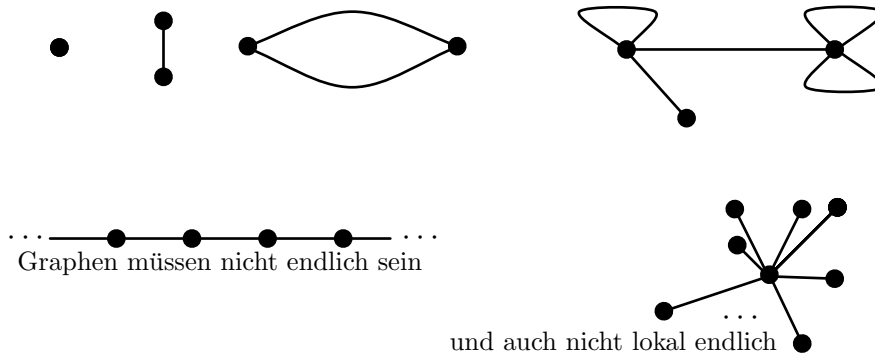
mit den Eigenschaften

1.  $k \neq \bar{k}$  für alle  $k \in K$ ,
2.  $\bar{\bar{k}} = k$  für alle  $k \in K$ ,
3.  $i(\bar{k}) = t(k)$  für alle  $k \in K$  (dann gilt auch  $t(\bar{k}) = i(k)$ ).

Ein Paar  $\{k, \bar{k}\}$  heißt **geometrische Kante**. Als **Orientierung** eines Graphen bezeichnen wir die Wahl einer Teilmenge  $K^+ \subset K$ , so dass  $k \in K^+$  genau dann, wenn  $\bar{k} \in K^- := K \setminus K^+$  ist.

Mengenoperationen auf Graphen sind immer auf den entsprechenden Mengen  $E$  und  $K$  zu verstehen.

**Beispiel 1.2** Graphen.



**Bemerkung 1.3**  $\Gamma$  kann „topologisiert“ werden: Geometrische Kanten werden mit  $[0, 1]$  identifiziert und verklebt, wenn sie gemeinsame Ecken haben. Es ist sogar möglich, jeden Graphen als Teilraum von  $\mathbb{R}^3$  zu realisieren, i.A. ist es aber nicht möglich, einen Graphen als Teilraum von  $\mathbb{R}^2$  zu realisieren (siehe etwa Kapitel 3 in Diestel [1]).

**Definition und Bemerkung 1.4** Es seien  $\Gamma = (E, K, I)$  und  $\Gamma' = (E', K', I')$  Graphen.

1. Ein **Morphismus**  $f : \Gamma \rightarrow \Gamma'$  ist ein Paar  $f = (f_E, f_K)$  von Abbildungen  $f_E : E \rightarrow E'$  und  $f_K : K \rightarrow K'$  mit

$$I'(f_K(k)) = (f_E(i(k)), f_E(t(k))) = (f_E \times f_E)(I(k))$$

und

$$f_K(\bar{k}) = \overline{f_K(k)}$$

für alle  $k \in K$ .

2. Die Komposition zweier Morphismen  $f, g$

$$f \circ g = (f_E \circ g_E, f_K \circ g_K),$$

ist wieder ein Morphismus.

3.  $f$  heißt **Isomorphismus**, wenn es einen Morphismus  $g : \Gamma' \rightarrow \Gamma$  gibt mit

$$f \circ g = \text{id}_{\Gamma'} \text{ und } g \circ f = \text{id}_{\Gamma}.$$

Ein Isomorphismus  $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$  heißt **Automorphismus**.

4.  $f$  ist genau dann ein Isomorphismus, wenn  $f_E$  und  $f_K$  bijektiv sind.

**Definition und Bemerkung 1.5** Es sei  $\Gamma$  ein Graph.

1. Ein **Weg**  $w$  (der Länge  $|w| = n \geq 0$ ) in  $\Gamma$  ist eine Folge

$$w = (k_1, \dots, k_n)$$

von Kanten  $k_i \in K(\Gamma)$  mit  $t(k_i) = i(k_{i+1})$  für  $i = 1, \dots, n-1$ .

$$i(w) := i(k_1) \text{ und } t(w) := t(k_n)$$

heißen **Anfangs-** und **Endpunkt** von  $w$ . Ist  $n = 0$ , so wird  $i(w) = t(w) \in E(\Gamma)$  definiert.

2. Setze

$$P_n = \overset{0}{\bullet} \overset{1}{\bullet} \bullet \bullet \cdots \bullet \overset{n}{\bullet}$$

(fester Graph mit  $n + 1$  Ecken und  $2n$  Kanten) und  $w$  der stachelfreie Weg mit  $i(w) = 0$  und  $t(w) = n$ . Dann ist jeder Weg der Länge  $n$  in  $\Gamma$  das Bild von  $w$  unter einem Morphismus  $P_n \rightarrow \Gamma$ .

3.  $\Gamma$  heißt **zusammenhängend**, wenn es für alle  $x, y \in E(\Gamma)$  einen Weg in  $\Gamma$  gibt mit  $i(w) = x$  und  $t(w) = y$ .
4. Ein Weg heißt **stachelfrei**, wenn  $k_{i+1} \neq \bar{k}_i$  ist für  $i = 1, \dots, n - 1$ .
5. Gibt es in  $\Gamma$  einen Weg von  $x$  nach  $y$ , so gibt es auch einen stachelfreien Weg.

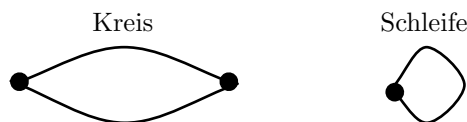
BEWEIS VON 5.: Es sei  $w = (k_1, \dots, k_n)$  und  $k_{i+1} = \bar{k}_i$ . Dann gilt:

$$i(k_{i+2}) = t(k_{i+1}) = t(\bar{k}_i) = i(k_i) = t(k_{i-1}).$$

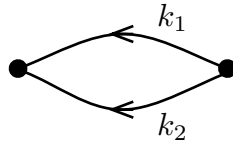
Folglich ist  $w' = (k_1, \dots, k_{i-1}, k_{i+2}, \dots, k_n)$  ein Weg von  $x$  nach  $y$ . ■

**Definition und Bemerkung 1.6** Es sei  $\Gamma$  ein Graph.

1. Ein Weg  $w$  in  $\Gamma$  heißt **geschlossen**, wenn  $i(w) = t(w)$ .
2.  $w$  heißt **einfach**, wenn  $i(k_i) \neq i(k_j)$  für  $i \neq j$ .
3. Einfache Wege sind insbesondere auch stachelfrei (für Wege der Länge 2 ist dies als Definition zu verstehen).
4. Ein einfacher geschlossener Weg der Länge  $n \geq 1$  heißt **Kreis**. Ein Kreis der Länge 1 heißt **Schleife**.



5. Ein Paar  $k_1 \neq k_2$  von Kanten in  $\Gamma$  heißt **Doppelkante**, wenn  $i(k_1) = i(k_2)$  und  $t(k_1) = t(k_2)$  ist.



6. Ein Graph heißt **kombinatorisch**, wenn er keine Schleifen und keine Doppelkanten enthält.
7. Ein Graph ist genau dann kombinatorisch, wenn er als topologischer Raum ein simplizialer Komplex ist.

**Definition und Bemerkung 1.7** Es sei  $\Gamma$  ein zusammenhängender Graph. Für  $x, y \in E(\Gamma)$  sei

$$d(x, y) := \min\{n : \text{es gibt einen Weg } w \text{ von } x \text{ nach } y \text{ mit } |w| = n\}.$$

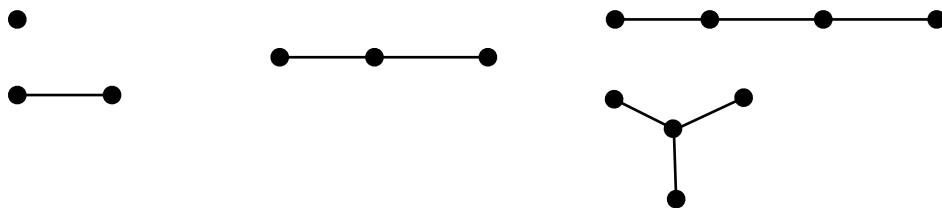
Dann ist  $d$  eine Metrik auf  $\Gamma$  (genauer: auf  $E(\Gamma)$ ). Der **Durchmesser** von  $\Gamma$  ist

$$d(\Gamma) := \sup\{d(x, y) : x, y \in E(\Gamma)\}.$$

## 2 Bäume

**Definition 2.1** Ein **Baum** ist ein zusammenhängender Graph ohne Kreise.

**Beispiel 2.2** Bäume.



**Proposition 2.3** Ein Graph  $\Gamma$  ist genau dann ein Baum, wenn es zu je zwei seiner Ecken  $x, y$  genau einen stachelfreien Weg von  $x$  nach  $y$  in  $\Gamma$  gibt.

BEWEIS: „ $\Rightarrow$ “: Seien  $x, y \in E(\Gamma)$ ,  $w = (k_1, \dots, k_n)$  und  $w' = (k'_1, \dots, k'_m)$  stachelfreie Wege von  $x$  nach  $y$ . Ist  $k_n \neq k'_m$ , so ist  $\tilde{w} = (k_1, \dots, k_n, \bar{k}'_m, \dots, \bar{k}'_1)$  ein stachelfreier geschlossener Weg, enthält also einen Kreis, im Widerspruch dazu, dass  $\Gamma$  ein Baum ist. Also muss  $k_n = k'_m$  sein. Induktion über die Weglänge  $n$  ergibt die Behauptung.



„ $\Leftarrow$ “: Da es zwischen je zwei Ecken einen Weg gibt, ist  $\Gamma$  zusammenhängend. Da es genau einen Weg gibt, kann es keine Kreise geben. ■

**Definition und Bemerkung 2.4** Sei  $\Gamma$  ein Graph und  $x \in E(\Gamma)$ .

1. Es sei

$$K_x := \{k \in K(\Gamma) : i(k) = x\}.$$

Die **Ordnung** von  $x$  ist

$$v(x) := |K_x|.$$

(Die Ordnung wird auch als **Valenz** oder **Index** von  $x$  bezeichnet.)

2.  $x$  heißt **Endpunkt**, wenn  $v(x) = 1$  ist. Es bezeichne  $EP(\Gamma)$  die Menge der Endpunkte von  $\Gamma$ .
3.  $\Gamma - x$  sei der Graph mit  $E(\Gamma - x) = E(\Gamma) \setminus \{x\}$  und  $K(\Gamma - x) = K(\Gamma) \setminus (K_x \cup \overline{K_x})$  (Entfernen des „Sterns“ um  $x$ ).  $\Gamma - x$  ist ein Teilgraph von  $\Gamma$ .
4. Ist  $x$  ein Endpunkt, so gilt:
  - (a)  $\Gamma$  ist genau dann zusammenhängend, wenn  $\Gamma - x$  zusammenhängend ist.
  - (b) Jeder Kreis in  $\Gamma$  ist in  $\Gamma - x$  enthalten.
  - (c)  $\Gamma$  ist genau dann ein Baum, wenn  $\Gamma - x$  ein Baum ist.

BEWEIS VON 4.: (a) und (b) sind klar und ergeben zusammen (c). ■

### Proposition 2.5

1. Sei  $f : \Gamma \rightarrow \Gamma'$  ein Isomorphismus von Graphen. Dann gilt

$$v(x) = v(f_E(x))$$

für alle  $x \in E(\Gamma)$ .

2. Es sei  $\Gamma' = \Gamma - EP(\Gamma)$ . Jeder Automorphismus von  $\Gamma$  induziert einen Automorphismus von  $\Gamma'$ .
3. Ist  $\Gamma$  ein Baum von endlichem Durchmesser  $n = d(\Gamma)$ , so gibt es für
  - gerades  $n$  eine Ecke  $x \in E(\Gamma)$  mit  $f_E(x) = x$
  - ungerades  $n$  eine geometrische Kante  $\kappa = \{k, \bar{k}\}$  mit  $f_K(\kappa) = \kappa$

für jeden Automorphismus  $f$  von  $\Gamma$ .

BEWEIS:

1.  $f_K$  induziert eine Bijektion  $K_x \rightarrow K'_{f_E(x)}$ .

2. Folgt aus 1.

3. Für  $n = 0$  und  $n = 1$  ist die Aussage klar.

Wir zeigen im Folgenden, dass  $\Gamma' = \Gamma - \text{EP}(\Gamma)$  ein Baum vom Durchmesser  $n - 2$  ist (falls  $n \geq 2$ ), dann folgt die Behauptung durch Induktion über  $n$ .

Es sei  $w' = (k'_1, \dots, k'_m)$  ein stachelfreier Weg in  $\Gamma'$  und  $x = i(w')$ ,  $y = t(w')$ . Dann ist  $m = d(x, y)$ . Da in  $\Gamma$  gilt  $v(x) \geq 2$ ,  $v(y) \geq 2$ , gibt es eine Kante  $k_1 \neq k'_1$  in  $\Gamma$  mit  $i(k_1) = x$  und eine Kante  $k_m \neq k'_m$  in  $\Gamma$  mit  $i(k_m) = y$ . Dann ist  $w = (\bar{k}_1, k'_1, \dots, k'_m, k_m)$  ein stachelfreier Weg in  $\Gamma$ . Es ist also  $m + 2 \leq d(\Gamma)$  und somit  $m \leq n - 2$ .

Sei umgekehrt  $w = (k_1, \dots, k_n)$  ein stachelfreier Weg in  $\Gamma$ . Für  $i = 2, \dots, n$  ist  $v(i(k_i)) \geq 2$ . Folglich ist  $(k_2, \dots, k_{n-1})$  ein stachelfreier Weg in  $\Gamma'$ . Somit gilt auch  $d(\Gamma') \geq n - 2$ . ■

**Beispiel 2.6** Der endliche Durchmesser ist in Teil 3. von Proposition 2.5 wesentlich, wie das Beispiel einer (in beiden Richtungen) unendlichen Kette zeigt:



ist ein Baum von unendlichem Durchmesser. Hier ist eine Translation ein Automorphismus ohne Fixpunkt und Fixkante.

**Folgerung 2.7** Jeder endliche Baum entsteht aus  $\bullet$  durch wiederholtes Anhängen von Endpunkten.

**Definition und Bemerkung 2.8** Es sei  $\Gamma$  ein Graph.

1. Ein Teilbaum  $T \subset \Gamma$  heißt **aufspannend** (oder auch **Gerüst**), wenn  $E(T) = E(\Gamma)$  ist.
2. Jeder zusammenhängende Graph besitzt einen aufspannenden Teilbaum.

BEWEIS: Es sei  $T_0 \subset \Gamma$  ein Teilbaum. Ist  $E(T_0) \neq E(\Gamma)$ , so gibt es eine Kante  $k \in K(\Gamma)$  mit  $i(k) \in E(T_0)$  und  $t(k) \notin E(T_0)$ . Dann ist  $T' := T_0 \cup \{k, \bar{k}, t(k)\}$  ein Teilbaum von  $\Gamma$ .

Ist  $\Gamma$  endlich, so erhalten wir mit Induktion einen Teilbaum  $T$  mit  $E(T) = E(\Gamma)$ .

Falls  $\Gamma$  nicht endlich ist, betrachte die Menge  $\mathcal{T}$  der Teilbäume von  $\Gamma$ . Es ist  $\mathcal{T} \neq \emptyset$  und  $\mathcal{T}$  ist durch die Teilbaumrelation partiell geordnet. Ist  $T_1 \subset T_2 \subset \dots$  eine ansteigende Kette von Teilbäumen, so ist  $\bigcup_i T_i \in \mathcal{T}$ . Nach dem Zornschen Lemma muss es also ein maximales Element  $T \in \mathcal{T}$  geben. Angenommen  $E(T) \neq E(\Gamma)$ . Dann könnte man wie im endlichen Fall einen Baum  $T' \supsetneq T$  konstruieren, im Widerspruch zur Maximalität von  $T$ . ■

**Definition und Bemerkung 2.9** Sei  $\Gamma$  ein endlicher zusammenhängender Graph. Wir setzen

$$e(\Gamma) := |E(\Gamma)|,$$

$$k(\Gamma) := \frac{1}{2}|K(\Gamma)|.$$

Das **Geschlecht** von  $\Gamma$  ist

$$g(\Gamma) := k(\Gamma) - e(\Gamma) + 1.$$

Das Geschlecht wird auch als **zyklomatische Zahl** oder **Betti-Zahl** bezeichnet. Es gilt:

1.  $g(\Gamma) \geq 0$ .
2.  $g(\Gamma) = 0$  genau dann, wenn  $\Gamma$  ein Baum ist.

BEWEIS: Ist  $\Gamma$  ein Baum, so ist nach Folgerung 2.7  $g(\Gamma) = 0$ . Ist  $\Gamma$  kein Baum, so sei  $T$  ein aufspannender Baum von  $\Gamma$ . Also ist  $e(\Gamma) = e(T)$  und  $k(\Gamma) > k(T)$  und damit  $g(\Gamma) > g(T) = 0$ . ■

**Definition und Bemerkung 2.10** Sei  $\Gamma$  ein Graph und  $Z$  ein zusammenhängender Teilgraph. Mit  $\Gamma/Z$  bezeichnen wir den folgenden Graphen

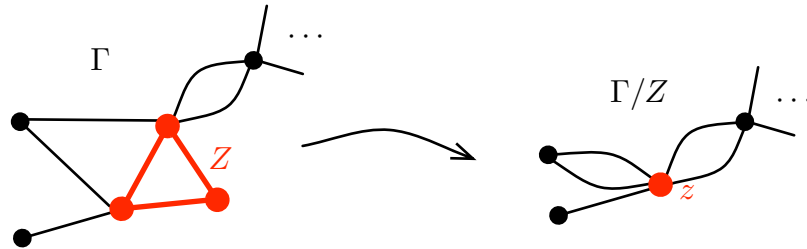
$$E(\Gamma/Z) = (E(\Gamma) - E(Z)) \cup \{z\},$$

$$K(\Gamma/Z) = K(\Gamma) - K(Z),$$

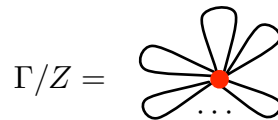
$$I_{\Gamma/Z}(k) = (i_{\Gamma/Z}(k), t_{\Gamma/Z}(k)), \quad k \in K(\Gamma/Z).$$

mit

$$i_{\Gamma/Z}(k) = \begin{cases} i(k), & i(k) \notin E(Z), \\ z, & i(k) \in E(Z) \end{cases} \quad \text{und} \quad t_{\Gamma/Z}(k) = \begin{cases} t(k), & t(k) \notin E(Z), \\ z, & t(k) \in E(Z) \end{cases}.$$



**Beispiel 2.11** Ist  $Z$  ein Gerüst von  $\Gamma$ , so erhalten wir



mit  $g(\Gamma)$  Kanten.

**Definition 2.12** Wir sagen, dass  $\Gamma/Z$  aus  $\Gamma$  durch **Kontraktion** von  $Z$  entsteht. Ist  $Z$  nicht zusammenhängend, so wird  $\Gamma/Z$  durch Kontraktion jeder Zusammenhangskomponente von  $Z$  definiert.

**Bemerkung 2.13** Ist  $\Gamma$  ein endlicher zusammenhängender Graph und  $Z$  ein Teilgraph, so gilt:

1.  $g(\Gamma/Z) \leq g(\Gamma)$ .
2.  $g(\Gamma/Z) = g(\Gamma)$ , falls  $Z$  ein Teilbaum ist.

**Definition 2.14** Ein Graph, dessen Zusammenhangskomponenten Bäume sind, heißt **Wald**.

**Proposition 2.15** Es sei  $\Gamma$  ein zusammenhängender Graph und  $Z$  ein Teilwald von  $\Gamma$ . Dann ist  $\Gamma/Z$  genau dann ein Baum, wenn  $\Gamma$  ein Baum ist.

**BEWEIS:** Ist  $\Gamma$  endlich, so folgt die Behauptung aus Bemerkung 2.13 und Bemerkung 2.9. Ist  $\Gamma$  unendlich, so sei  $\Gamma'$  ein endlicher zusammenhängender Teilgraph von  $\Gamma$ . Dann ist  $\Gamma' \cap Z$  ein endlicher Wald. Also ist  $\Gamma'$  ein Baum, genau dann wenn  $\Gamma' / (\Gamma' \cap Z)$  ein Baum ist. Schöpfe nun  $\Gamma$  durch endliche Teilgraphen aus. ■

## Teil II

## Cayley-Graphen und Automorphismengruppen

## 3 Cayley-Graphen von Gruppen

## Bemerkung 3.1

1. Für jeden Graphen  $\Gamma$  bildet die Menge  $\text{Aut}(\Gamma)$  der Automorphismen von  $\Gamma$  eine Gruppe.
2.  $\text{Aut}(\Gamma)$  ist eine Untergruppe von  $\text{Perm}(E(\Gamma)) \times \text{Perm}(K(\Gamma))$ .
3. Ist  $\Gamma$  ein kombinatorischer Graph, so ist  $\text{Aut}(\Gamma) \leq \text{Perm}(E(\Gamma))$ .

## Beispiel 3.2 Automorphismengruppen von Graphen.

1. Für

$$\Gamma = \begin{array}{ccc} & 1 & k & 2 \\ & \bullet & \text{---} & \bullet \end{array}$$

ist  $\text{Aut}(\Gamma) = \{\text{id}, \sigma\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  mit  $\sigma(1) = 2$ ,  $\sigma(2) = 1$  und  $\sigma(k) = \bar{k}$ .

2. Für

$$\Gamma = \begin{array}{ccc} & \bullet & 3 \\ & \diagup & \diagdown \\ 1 & \bullet & \text{---} & \bullet & 2 \\ & \diagdown & \diagup \end{array}$$

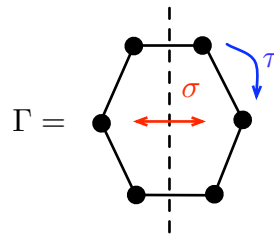
besteht  $\text{Aut}(\Gamma)$  aus allen Permutationen der drei Ecken, also ist  $\text{Aut}(\Gamma) \cong S_3$ .

3. Für

$$\Gamma = \begin{array}{ccc} & \bullet & 3 \\ & \diagup & \diagdown \\ 1 & \bullet & \text{---} & \bullet & 2 \\ & \diagdown & \diagup \\ & \bullet & 4 \end{array}$$

ist  $\text{Aut}(\Gamma) \cong S_4$ .

4. Die Automorphismengruppe von



enthält sechs Drehungen drei Spiegelungen mit Spiegelachse durch zwei Ecken und drei Spiegelungen mit Spiegelachse durch Kantemittelpunkte, hat also mindestens zwölf Elemente. In der Tat ist bereits

$$\text{Aut}(\Gamma) = \{\text{id}, \tau, \dots, \tau^5, \sigma, \sigma\tau, \dots, \sigma\tau^5\} \cong D_6.$$

$D_6$  ist die Diedergruppe des Sechsecks.

**Definition und Bemerkung 3.3** Es sei  $G$  eine Gruppe und  $S \subset G$ . Der **Cayley-Graph**  $\Gamma(G, S)$  von  $G$  bzgl.  $S$  wird wie folgt definiert:

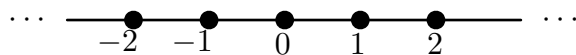
$$\begin{aligned} E(\Gamma(G, S)) &:= G, \\ K(\Gamma(G, S)) &:= G \times S \times \{-1, 1\}, \end{aligned}$$

und für  $k = (g, s, \varepsilon) \in K(\Gamma(G, S))$  sei  $\bar{k} = (g, s, -\varepsilon)$  und

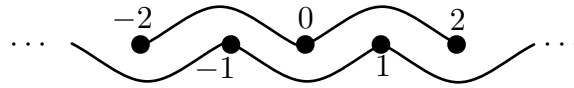
$$\begin{aligned} i(k) &= g, & t(k) &= gs & \text{falls } \varepsilon &= 1, \\ i(k) &= gs, & t(k) &= g & \text{falls } \varepsilon &= -1. \end{aligned}$$

**Beispiel 3.4** Cayley-Graphen.

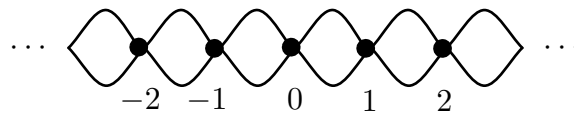
1. Es sei  $G$  beliebig,  $S = \emptyset$ . Dann ist  $K(\Gamma(G, S)) = \emptyset$ .
2.  $G = \mathbb{Z}$  und  $S = \{1\}$ :



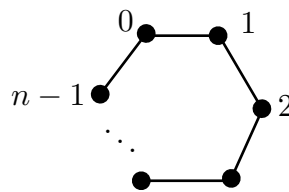
3.  $G = \mathbb{Z}$  und  $S = \{2\}$ :



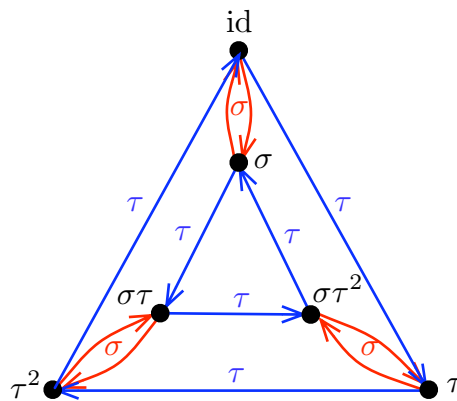
4.  $G = \mathbb{Z}$  und  $S = \{-1, 1\}$ :



5.  $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  und  $S = \{1\}$ :



6.  $G = S_3$  und  $S = \{\tau = (1\ 2\ 3), \sigma = (1\ 2)\}$ . Es ist  $S_3 = \{\text{id}, \tau, \tau^2, \sigma, \sigma\tau, \sigma\tau^2\}$ .



Man beachte, dass für die Kantenübergänge von rechts multipliziert wird.

### Bemerkung 3.5

1.  $\Gamma(G, S)$  ist genau dann zusammenhängend, wenn  $G$  von der Menge  $S$  erzeugt wird.
2. Für jede Ecke  $g \in G = E(\Gamma(G, S))$  ist  $v(g) = 2|S|$ .
3.  $\Gamma(G, S)$  enthält genau dann Schleifen, wenn 1 in  $S$  enthalten ist.
4.  $\Gamma(G, S)$  enthält genau dann Doppelkanten, wenn es in  $S$  Elemente  $s \neq 1$  gibt, so dass auch  $s^{-1} \in S$  ist.
5.  $\Gamma(G, S)$  enthält keine Dreifachkanten.

BEWEIS VON 1.: „ $\Rightarrow$ “: Sei  $g \in G$  beliebig und  $w = (k_1, \dots, k_n)$  ein Weg in  $\Gamma(G, S)$  von 1 nach  $g$ , mit  $k_i = (g_i, s_i, \varepsilon_i)$ . Dann ist  $g_1 = 1$ ,  $g_2 = s_1^{\varepsilon_1}$ ,  $\dots$ ,  $g_n = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}$ . Somit ist  $g = t(k_n) = g_n s_n^{\varepsilon_n} = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n} \in \langle S \rangle$ .

„ $\Leftarrow$ “: Führe die gleiche Überlegung rückwärts durch. ■

**Definition und Bemerkung 3.6** Es sei  $G$  eine Gruppe und  $\Gamma$  ein beliebiger Graph.

1. Eine **Aktion** (oder **Operation**) von  $G$  auf  $\Gamma$  ist ein Gruppenhomomorphismus  $\varrho : G \rightarrow \text{Aut}(\Gamma)$ .
2. Eine Aktion heißt **treu** (oder **effektiv**), wenn  $\text{Kern}(\varrho) = \{1\}$  ist. Der Kern von  $\varrho$  heißt auch **Ineffektivitätskern** der Aktion  $\varrho$ .

**Bemerkung 3.7** Es sei  $G$  eine Gruppe,  $S \subset G$ . Dann operiert  $G$  von links auf  $\Gamma(G, S)$  und diese Operation ist treu.

Genauer: Für  $g \in G$  sei  $\varphi_g : \Gamma(G, S) \rightarrow \Gamma(G, S)$  gegeben durch

$$\begin{aligned}\varphi_g(g') &= gg', \\ \varphi_g(g', s, \varepsilon) &= (gg', s, \varepsilon).\end{aligned}$$

Dann gilt:

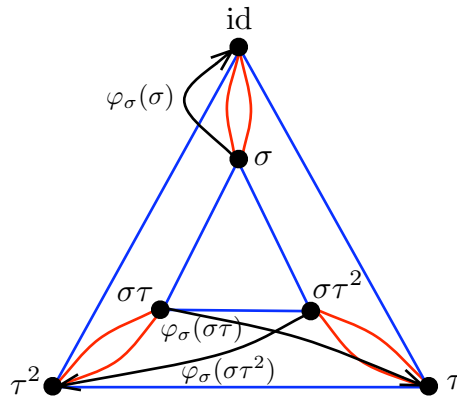
1.  $\varphi_g \in \text{Aut}(\Gamma(G, S))$ .
2.  $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(\Gamma(G, S)), g \mapsto \varphi_g$  ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus.

**Beispiel 3.8** (vgl. Beispiel 3.4)

1.  $\mathbb{Z}$  operiert auf  $\Gamma(\mathbb{Z}, \{1\})$  durch Translation.



2.  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  operiert auf  $\Gamma(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \{1\})$  durch Drehungen. Hier ist  $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(\Gamma(G, S))$ ,  $g \mapsto \varphi_g$  injektiv, aber nicht surjektiv (da Spiegelungen nicht durch  $\varphi$  dargestellt werden).
3.  $G = S_3$  und  $S = \{\tau = (1\ 2\ 3), \sigma = (1\ 2)\}$ .



$\varphi_\tau$  ist die Drehung um  $120^\circ$  im Uhrzeigersinn.  $\varphi_\sigma$  vertauscht rechts mit links und innen mit außen.

**Proposition 3.9** Es sei  $G$  eine Gruppe,  $S \subset G$ , und  $G_S = \langle S \rangle$  bezeichne die von  $S$  erzeugte Untergruppe.

1. Die Zusammenhangskomponenten von  $\Gamma(G, S)$  entsprechen bijektiv den Linksnebenklassen  $gG_S$  für  $g \in G$ .
2. Es sei  $S' \subseteq S$  und  $H := \langle S' \rangle \leq G_S$ . Sei  $\Gamma_H(G, S)$  der Graph, der aus  $\Gamma(G, S)$  durch Kontraktion von  $\Gamma(G, S')$  entsteht. Dann operiert  $G$  auf  $\Gamma_H(G, S)$ . Es ist  $E(\Gamma_H(G, S)) = G/H$  (die Menge der Nebenklassen).

BEWEIS:

1. Es bezeichne  $\Gamma_g$  diejenige Zusammenhangskomponente von  $\Gamma$ , die die Ecke  $g \in G$  enthält.  
Die Zusammenhangskomponente  $\Gamma_1$  von  $\Gamma(G, S)$  ist isomorph zu  $\Gamma(G_S, S)$  (vgl. Bemerkung 3.5(1)). Betrachte  $\Gamma_g$  für beliebiges  $g \in G$ . Es ist  $\varphi_g(1) = g$ , also hat  $\varphi_g(\Gamma_1)$  nichtleeren Schnitt mit  $\Gamma_g$  und ist zusammenhängend. Es folgt  $\varphi_g(\Gamma_1) = \Gamma_g$ . Somit ist

$$E(\Gamma_g) = (\varphi_g)_E(E(\Gamma_1)) = (\varphi_g)_E(G_S) = gG_S.$$

2. Es ist  $K(\Gamma_H(G, S)) = G \times S \setminus S' \times \{-1, 1\}$  mit  $i(g, s, 1) = gH$ ,  $t(g, s, 1) = gsH$ . Ein Element  $g \in G$  operiert wie folgt:

$$\begin{aligned} g(g'H) &= (gg')H, \\ g(g', s, \varepsilon) &= (gg', s, \varepsilon). \end{aligned}$$

Aus Teil 1 folgt  $E(\Gamma_H(G, S)) = G/H$ . ■

Wir betrachten nun den Graphen, der aus  $\Gamma$  durch Zusammenfassen aller Mehrfachkanten entsteht (wobei die Orientierung jedoch beibehalten wird).

**Bemerkung 3.10** Sei  $\Gamma$  ein Graph und  $\bar{\Gamma}$  mit

$$\begin{aligned} E(\bar{\Gamma}) &= E(\Gamma), \\ K(\bar{\Gamma}) &= \{(x, y) \in E(\Gamma) \times E(\Gamma) : \exists k \in K(\Gamma) : i(k) = x, t(k) = y\}, \end{aligned}$$

mit  $\overline{(x, y)} := (y, x)$ ,  $i(x, y) := x$  und  $t(x, y) := y$ .

1. Die Abbildung  $p : \Gamma \rightarrow \bar{\Gamma}$ ,  $p_E = \text{id}$ ,  $p_K(k) = (i(k), t(k))$  ist ein surjektiver Morphismus von Graphen.
2. Es gibt einen eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus  $\varrho : \text{Aut}(\Gamma) \rightarrow \text{Aut}(\bar{\Gamma})$ , so dass für alle  $\gamma \in \text{Aut}(\Gamma)$  das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{\gamma} & \Gamma \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ \bar{\Gamma} & \xrightarrow{\varrho(\gamma)} & \bar{\Gamma} \end{array}$$

3. Es ist

$$\text{Kern}(\varrho) = \{\gamma \in \text{Aut}(\Gamma) : \gamma_E = \text{id}\}.$$

**BEWEIS VON 2.:** Definiere  $\bar{\gamma} \in \text{Aut}(\bar{\Gamma})$  durch  $\bar{\gamma}_E := \gamma_E$  und  $\bar{\gamma}_K(x, y) := (i(\gamma(k)), t(\gamma(k)))$  für  $(x, y) \in K(\bar{\Gamma})$ ,  $k \in K(\Gamma)$  mit  $p_K(k) = (x, y)$ . Setze nun  $\varrho(\gamma) := \bar{\gamma}$ . ■

**Folgerung 3.11** Es sei  $G$  eine Gruppe und  $\Gamma$  ein beliebiger Graph.

1. Jede Aktion von  $G$  auf  $\Gamma$  induziert eine Aktion auf  $\bar{\Gamma}$ .
2. Ist  $\Gamma = \Gamma(G, S)$  ein Cayley-Graph, so operiert  $G$  treu auf  $\Gamma$  und  $\bar{\Gamma}$ .

3. Ist  $\Gamma = \Gamma_H(G, S)$ , so ist die Aktion  $\varrho$  von  $G$  auf  $\bar{\Gamma}$  genau dann treu, wenn gilt

$$\bigcap_{g \in G} gHg^{-1} = \{1\}.$$

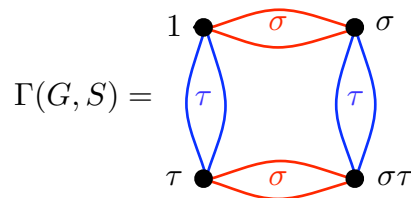
BEWEIS VON 3.: „ $\Rightarrow$ “: Die Ecken von  $\Gamma$  sind die Linksnebenklassen  $gH$ ,  $g \in G$ . Sei  $h \in G$  mit  $\varrho(h) = \text{id}$ . Dann ist  $hgH = gH$  für alle  $g \in G$ , d.h.  $g^{-1}hg = h' \in H$ . Folglich ist  $h = gh'g^{-1} \in gHg^{-1}$ , und da dies für alle  $g \in G$  gilt, ist  $h \in \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$ .

„ $\Leftarrow$ “: Ist  $h \in \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$ , so ist  $\varrho(h)_E = \text{id}_{E(\Gamma)} = \text{id}_{E(\bar{\Gamma})}$ . Somit ist  $\varrho(h) = \text{id}$ . ■

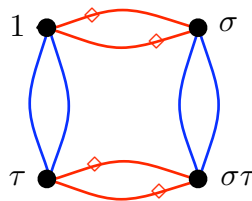
**Satz 3.12** Es sei  $G$  eine abzählbare Gruppe. Dann gibt es einen zusammenhängenden Graphen  $\Gamma$  mit  $\text{Aut}(\Gamma) \cong G$ .

Das folgende Beispiel soll die Idee des anschließenden Beweises veranschaulichen.

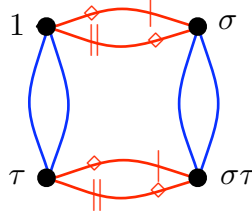
**Beispiel 3.13** Betrachte die Kleinsche Vierergruppe  $G = V_4 (= D_2) = \{1, \sigma, \tau, \sigma\tau\}$  mit  $S = \{\sigma, \tau\}$ . Es ist



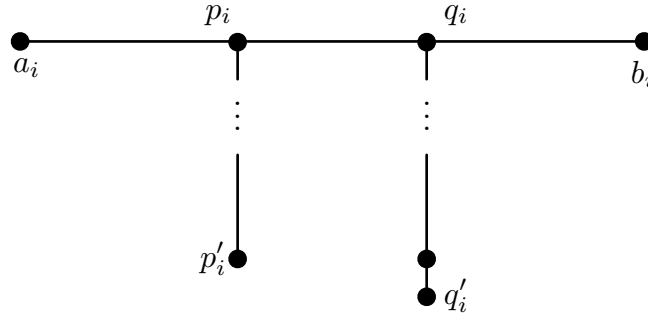
Die Automorphismengruppe dieses Graphen ist aber größer als  $V_4$ . Die Idee ist nun, die  $\tau$ - bzw.  $\sigma$ -Kanten durch „Markierungen“ unterscheidbar zu machen, so dass sie nicht mehr ausgetauscht werden können:



Durch weitere Markierungen wird verhindert, dass Kanten mit ihren Gegenkanten vertauscht werden:



BEWEIS VON SATZ 3.12: Es sei  $S = \{s_1, s_2, \dots\}$  ein abzählbares Erzeugendensystem und  $\Gamma_0 = \Gamma(G, S)$ . Für  $i \geq 1$  sei  $T_i$  der Baum



mit  $d(p_i, p'_i) = 2i$  und  $d(q_i, q'_i) = 2i + 1$ . Dann ist  $T_i \not\cong T_j$  für  $i \neq j$  und  $\text{Aut}(T_i) = \{\text{id}\}$  für alle  $i$ . Sei  $\Gamma$  der Graph, der aus  $\Gamma_0$  entsteht, indem jeder Teilbaum

$$T(g, s_i, 1) = \quad g \bullet \xrightarrow{k} \bullet g s_i$$

mit  $k = (g, s_i, 1)$  durch den Baum  $T_i$  ersetzt wird. Die Abbildung

$$\Gamma \rightarrow \Gamma_0, \quad T_i \mapsto T(g, s_i, 1)$$

ist ein surjektiver Morphismus. Nun operiert  $G$  auf  $\Gamma$  und jeder Automorphismus von  $\Gamma$  induziert einen Automorphismus von  $\Gamma_0$ , der „farbtreu“ ist.

Ist  $\gamma \in \text{Aut}(\Gamma)$  und  $x \in E(\Gamma)$  mit  $\gamma_E(x) = x$ , so ist  $\gamma = \text{id}$ , denn für  $x \notin E(\Gamma_0)$  gibt es  $i \geq 1$  mit  $x \in E(T_i) \setminus \{a_i, b_i\}$ . Dann ist  $\gamma|_{T_i} = \text{id}_{T_i}$  und somit ohne Einschränkung  $x \in E(\Gamma_0)$ . Es gibt für jedes  $s_i \in S$  genau eine Kante der Form  $(x, s_i, 1)$  in  $\Gamma_0$ , also in  $\Gamma$  genau einen Baum  $T_i$  mit  $a_i = x$ . Also ist  $\gamma = \text{id}$  auf jedem dieser Teilbäume. Mit Induktion bzw. Anwendung des Zornschen Lemmas folgt, dass  $\gamma$  die Identität ist.

Nun zeigen wir  $\text{Aut}(\Gamma) = G$ : Dazu sei  $\gamma \in \text{Aut}(\Gamma)$  und  $g \in E(\Gamma_0) = G$ . Es sei  $g' := \gamma_E(g) \in E(\Gamma_0) = G$  und  $h = g'g^{-1} \in G$ . Dann ist  $\varrho(h)_E(g) = hg = g'$ . Es folgt  $(\gamma^{-1} \circ \varrho(h))_E(g) = g$ , also ist nach dem eben Gezeigten  $\gamma^{-1} \circ \varrho(h) = \text{id}$  und somit  $\gamma = \varrho(h)$ . ■

## 4 Quotientengraphen

**Definition 4.1** Es sei  $\varrho : G \rightarrow \text{Aut}(\Gamma)$  eine Aktion der Gruppe  $G$  auf einem Graphen  $\Gamma$ . Wenn für alle  $g \in G$  und alle  $h \in K(\Gamma)$  gilt

$$\varrho(g)_K(k) \neq \bar{k},$$

so heißt  $\varrho$  **inversionsfrei**.

**Definition und Bemerkung 4.2** Es sei  $\varrho : G \rightarrow \text{Aut}(\Gamma)$  eine inversionsfreie Aktion. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten **Quotientengraphen**  $\Gamma/G$  mit

$$\begin{aligned} E(\Gamma/G) &= E(\Gamma)/G \quad (\text{Menge der Bahnen}), \\ K(\Gamma/G) &= K(\Gamma)/G. \end{aligned}$$

Weiter gelten:

1. Für  $Gk := \varrho(G)_K(k)$  ist  $\overline{Gk} = G\bar{k}$ .
2. Es ist  $i(Gk) = Gi(k)$  und  $t(Gk) = Gt(k)$ .
3. Die kanonische Projektion  $p : \Gamma \rightarrow \Gamma/G$  ist ein surjektiver Morphismus von Graphen.
4. Ist  $f : \Gamma \rightarrow \Gamma'$  ein  $G$ -invarianter Morphismus von Graphen (d.h. es ist  $f \circ \varrho(g) = f$  für alle  $g \in G$ ), so gibt es genau einen Morphismus  $\bar{f} : \Gamma/G \rightarrow \Gamma'$  mit  $f = \bar{f} \circ p$ .

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{f} & \Gamma' \\ p \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ \Gamma/G & & \end{array}$$

**Beispiel 4.3** Quotientengraphen.

1. Für  $\Gamma = \Gamma(\mathbb{Z}, \{1\})$  operiert  $G = \mathbb{Z}$  durch Translation. Es ist

$$\Gamma/G = \text{Diagram: A single vertex with a loop.}$$

2. Für eine beliebige Gruppe  $G$  operiert  $G$  auf  $\Gamma = \Gamma(G, S)$  durch Linksmultiplikation. Somit ist

$$\Gamma/G = \text{Diagram: A single vertex with multiple loops labeled } s_1, s_2, \dots$$

wobei die Anzahl der Schleifen gleich  $|S|$  ist.

3. Es sei

$$\Gamma = \text{Diagram: Two vertices connected by two directed edges in opposite directions.}$$

Dann operiert  $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  auf  $\Gamma$  durch

- Spiegelung an der horizontalen Achse:

$$\Gamma/\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \text{Diagram: Two vertices connected by a single undirected edge.}$$

- Spiegelung an der vertikalen Achse; in diesem Fall ist die Operation nicht inversionsfrei.
- Drehung um  $180^\circ$ :

$$\Gamma/\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \text{Diagram: A single vertex with a loop.}$$

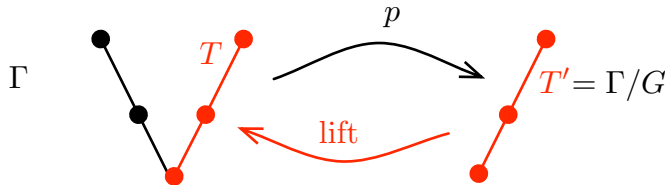
**Bemerkung 4.4** Sei  $\Gamma$  ein zusammenhängender Graph und  $\varrho : G \rightarrow \text{Aut}(\Gamma)$  eine inversionsfreie Aktion. Dann lässt sich jeder Teilbaum von  $\Gamma/G$  nach  $\Gamma$  liften, d.h. zu einem Teilbaum  $T'$  in  $\Gamma/G$  gibt es einen Teilbaum  $T$  in  $\Gamma$ , so dass  $p|_T : T \rightarrow T'$  ein Isomorphismus ist.

BEWEIS: Es sei  $\mathcal{T} = \{T \subset \Gamma : p|_T \text{ ist injektiv und } p(T) \subseteq T'\}$ . Sofern  $\Gamma \neq \emptyset$ , ist auch  $\mathcal{T} \neq \emptyset$ . Außerdem ist  $\mathcal{T}$  durch die Inklusionsrelation partiell geordnet. Nach dem Zornschen Lemma enthält  $\mathcal{T}$  also ein maximales Element  $T_0$ .

Zu zeigen ist nun, dass  $p(T_0) = T'$  ist. Wäre dies nicht der Fall, so können wir in  $T'$  eine erste Kante wählen, die nicht mehr in  $p(T_0)$  liegt, genauer gesagt gibt es eine Kante  $k' \in K(T')$  mit  $k' \notin K(p(T_0))$  und  $i(k') \in E(p(T_0))$ . Dann muss  $t(k') \notin E(p(T_0))$  gelten, denn  $p(T_0)$  ist ein Baum, also insbesondere zusammenhängend. Falls also  $t(k') \in p(T_0)$  wäre, so gäbe es einen stachelfreien Weg  $w$  in  $p(T_0)$  von  $i(k')$  nach  $t(k')$ . Dann wäre  $(w, \bar{k}')$  ein Kreis in  $T'$ , im Widerspruch dazu, dass  $T'$  ein Baum ist.

Nun sei  $\tilde{k} \in p^{-1}(k')$ , also  $p(i(\tilde{k})) = i(k') \in E(p(T_0))$ . Sei  $x_0 \in E(T_0)$  die eindeutige Ecke mit  $p_E(x_0) = i(k')$ . Dann muss es ein  $g \in G$  geben mit  $g(i(\tilde{k})) = x_0$ . Für  $k := g(\tilde{k})$  gilt dann  $i(k) = x_0$  und  $p(k) = k'$ . Somit gilt  $k \notin K(T_0)$  und  $t(k) \notin E(T_0)$ . Indem man zu  $T_0$  die Kanten  $k, \bar{k}$  und die Ecke  $t(k)$  hinzunimmt, erhält man einen Teilbaum in  $\mathcal{T}$ , der  $T_0$  als echten Teilbaum enthält, im Widerspruch zur Maximalität von  $T_0$ . Also muss  $p(T_0) = T'$  sein. ■

**Beispiel 4.5**  $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  operiert auf  $\Gamma$ .

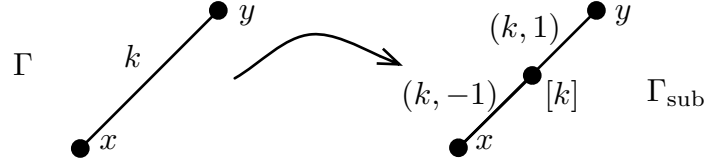


Wir betrachten nun den Graphen, der entsteht, indem man jede Kante  $k$  eines Graphen  $\Gamma$  durch Einfügen einer weiteren Ecke unterteilt. Diese neue Ecke kann formal mit der geometrischen Kante  $[k] = \{k, \bar{k}\}$  identifiziert werden.

**Definition 4.6** Es sei  $\Gamma$  ein Graph. Der Graph  $\Gamma_{\text{sub}}$  mit

$$\begin{aligned} E(\Gamma_{\text{sub}}) &= E(\Gamma) \cup \{\text{geometrische Kanten von } \Gamma\} \\ K(\Gamma_{\text{sub}}) &= K(\Gamma) \times \{-1, 1\} \end{aligned}$$

und  $i(k, 1) = i(k)$ ,  $t(k, 1) = i(k, -1) = [k]$ ,  $t(k, -1) = t(k)$  und  $\overline{(k, \pm 1)} = (\bar{k}, \mp 1)$  heißt **baryzentrische Unterteilung** von  $\Gamma$ .



**Bemerkung 4.7** Sei  $\Gamma$  ein Graph.

1.  $\Gamma_{\text{sub}}$  hat keine Schleifen.
2.  $\Gamma_{\text{sub}}$  ist genau dann zusammenhängend, wenn  $\Gamma$  zusammenhängend ist.
3.  $\Gamma_{\text{sub}}$  ist genau dann ein Baum, wenn  $\Gamma$  ein Baum ist.
4. Ist  $\Gamma$  zusammenhängend, so ist  $g(\Gamma) = g(\Gamma_{\text{sub}})$ .

**Bemerkung 4.8** Jede Aktion  $\varrho : G \rightarrow \text{Aut}(\Gamma)$  induziert eine inversionsfreie Aktion  $\varrho_{\text{sub}} : G \rightarrow \text{Aut}(\Gamma_{\text{sub}})$ .

BEWEIS: Definiere  $\varrho_{\text{sub}}$  durch

$$\varrho_{\text{sub}}(g)_E(x) := \begin{cases} \varrho(g)_E(x), & x \in E(\Gamma) \\ [\varrho(g)_K(k)], & x = [k] \end{cases}$$

und

$$\varrho_{\text{sub}}(g)_K(k, \varepsilon) := (\varrho(g)_K(k), \varepsilon), \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Die Inversionsfreiheit folgt daraus, dass das Vorzeichen von  $\varepsilon$  bei der Aktion von  $\varrho(g)$  erhalten bleibt. ■

## 5 Freie Gruppen

Definition und erste Eigenschaften einer freien Gruppe  $F(X)$  mit Erzeugermenge  $X$  findet man in Kapitel I.12 von Lang [4]. Wir werden davon insbesondere die folgenden benötigen:

- Für  $|X| \geq 2$  ist  $F(X)$  nicht abelsch.
- $F(X) \cong F(Y)$  genau dann, wenn  $|X| = |Y|$ .
- Die **universelle Abbildungseigenschaft (UAE)** der freien Gruppen besagt, dass es für eine beliebige Gruppe  $G$  und eine Abbildung  $f : X \rightarrow G$  einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus  $\varphi : F(X) \rightarrow G$  gibt mit  $\varphi(x) = f(x)$  für alle  $x \in X$ .



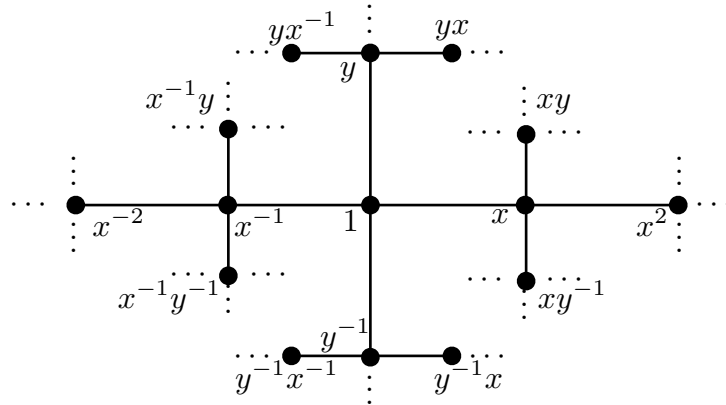
**Proposition 5.1** Es sei  $G$  eine Gruppe und  $S \subseteq G$ . Dann gilt  $G \cong F(S)$  genau dann, wenn  $\Gamma(G, S)$  ein Baum ist.

BEWEIS: „ $\Rightarrow$ “:  $\Gamma(G, S)$  ist zusammenhängend, da  $\langle S \rangle = G$ . Es bleibt zu zeigen, dass keine Kreise der Länge  $\geq 1$  existieren.

Es sei  $w = (k_1, \dots, k_n)$  ein Kreis in  $\Gamma(F(S), S)$  mit  $k_i = (g_i, s_i, \varepsilon_i)$ . Es ist  $t(w) = g_1 s_1^{\varepsilon_1} \dots s_n^{\varepsilon_n} = i(w) = g_1$ , also  $s_1^{\varepsilon_1} \dots s_n^{\varepsilon_n} = 1$ . Da  $w$  stachelfrei ist, ist  $s_1^{\varepsilon_1} \dots s_n^{\varepsilon_n}$  reduziert und es folgt  $n = 0$ .

„ $\Leftarrow$ “:  $S$  erzeugt  $G$ , da  $\Gamma(G, S)$  zusammenhängend ist.  $S \cap S^{-1} = \emptyset$ , da keine Doppelkanten und Schleifen in  $\Gamma(G, S)$  vorkommen. Wir erhalten einen Gruppenhomomorphismus  $\varphi : F(S) \rightarrow G$  durch  $s \mapsto s$ . Dieses  $\varphi$  ist surjektiv, da  $S$  eine Erzeugermenge ist. Angenommen,  $\varphi$  sei nicht injektiv. Dann gibt es ein  $s_1^{l_1} \dots s_n^{l_n} \in \text{Kern}(\varphi)$  mit  $n > 0$  minimal. Dann sind  $1, s_1^{l_1}, \dots, s_1^{l_1} \dots s_{n-1}^{l_{n-1}}$  Ecken eines geschlossenen Weges in  $\Gamma(G, S)$ , im Widerspruch dazu, dass  $\Gamma(G, S)$  ein Baum ist. Somit muss  $\text{Kern}(\varphi) = \{1\}$  sein und  $\varphi$  ist injektiv. ■

**Beispiel 5.2** Der Cayley-Graph der freien Gruppe mit zwei Erzeugern  $F_2 = F(\{x, y\})$ .



**Definition 5.3**  $G$  operiert frei auf einem Graphen  $\Gamma$ , wenn die Aktion sowohl fixpunktfrei als auch inversionsfrei ist.

**Satz 5.4** Eine Gruppe  $G$ , die frei auf einem Baum operiert, ist frei.

BEWEIS: Es sei  $\varrho : G \rightarrow \text{Aut}(\Gamma)$  eine freie Aktion auf  $\Gamma$ ,  $\bar{\Gamma} := \Gamma/G$  der Quotientengraph und  $\bar{T}$  ein aufspannender Baum von  $\bar{\Gamma}$ . Nach Bemerkung 4.4 gibt es einen Teilbaum  $T \subseteq \Gamma$ , der unter der Projektion  $p : \Gamma \rightarrow \bar{\Gamma}$  isomorph auf  $\bar{T}$  abgebildet wird.

Es sei  $\Gamma'$  der Graph, der aus  $\Gamma$  durch Kontraktion aller Teilbäume  $gT$ ,  $g \in G$ , entsteht. Für  $g \neq 1$  gilt dann  $gT \cap T = \emptyset$ . Ist nämlich  $x \in E(T) \cap E(gT)$ ,

so ist  $x = gx'$  für ein  $x' \in E(T)$ . Also ist  $p(x) = p(x')$  und da  $p|_T$  injektiv ist, muss  $x = x'$  gelten. Da die Aktion aber fixpunktfrei ist, folgt daraus  $g = 1$ . Nach Proposition 2.15 ist  $\Gamma'$  ein Baum.  $G$  operiert inversionfrei auf  $\Gamma'$  und wie gerade gezeigt wurde, ist die Aktion auch fixpunktfrei.

$\bar{\Gamma}' := \Gamma'/G$  hat genau eine Ecke und es ist  $E(\Gamma') = \{gT : g \in G\} = G$ . Es sei  $\tilde{S} := K(\bar{\Gamma}')$ , setze  $S_0 := \{s \in G : s = \mathbf{t}(k) \text{ für } k \text{ mit } \mathbf{i}(k) = 1 \text{ und } p(k) \in \tilde{S}\}$ . Für  $k \in K(\Gamma')$  mit  $\mathbf{i}(k) = g$ ,  $\mathbf{t}(k) = g'$  folgt nun, dass  $g^{-1}g'$  in  $S_0$  liegt (denn es ist  $k = gk'$  mit  $\mathbf{i}(k') = 1$  und  $\mathbf{t}(k') = g^{-1}g'$ ). Wähle nun eine Orientierung  $\tilde{S}^+ \subset \tilde{S}$ . Sei  $S$  die durch die Orientierung  $\tilde{S}^+$  induzierte Teilmenge von  $S_0$ . Nun überzeugt man sich, dass die Abbildung  $\varphi : \Gamma' \rightarrow \Gamma(G, S)$ , definiert durch

$$\begin{aligned} \varphi_E(gT) &= g, \\ \varphi_K(gT, g'T) &= \begin{cases} (g, g^{-1}g', 1) & \text{falls } g^{-1}g' \in S \\ (g', g'^{-1}g, -1) & \text{sonst} \end{cases}, \end{aligned}$$

ein Isomorphismus ist.

Mit Proposition 5.1 folgt  $G \cong F(S)$ . ■

### Folgerung 5.5 (Satz von Nielsen-Schreier)

Jede Untergruppe einer freien Gruppe ist frei.

BEWEIS: Es sei  $G = F(S)$  die freie Gruppe mit Basis  $S$  und  $H \leq G$  eine Untergruppe. Dann ist  $\Gamma = \Gamma(G, S)$  ein Baum.  $G$  operiert frei auf  $\Gamma$  (das gilt immer für die Aktion einer Gruppe  $G$  auf ihrem Cayley-Graphen  $\Gamma(G, S)$  für jede Teilmenge  $S$ ). Es folgt, dass  $H$  frei auf  $\Gamma$  operiert und nach Satz 5.4 ist  $H$  eine freie Gruppe. ■

## Teil III

## Bass-Serre-Theorie

## 6 Die Fundamentalgruppe eines Graphen

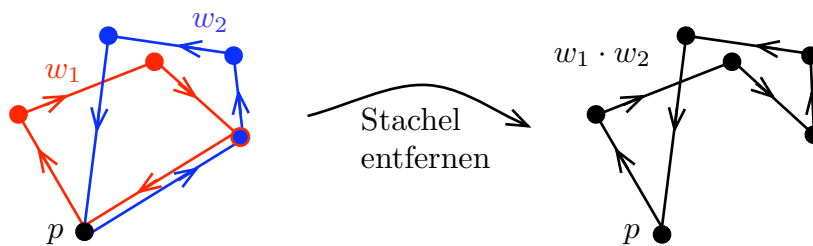
**Definition und Bemerkung 6.1** Es sei  $\Gamma$  ein zusammenhängender Graph und  $p \in E(\Gamma)$ .

1.  $\pi_1(\Gamma, p)$  sei die Menge der stachelfreien geschlossenen Wege in  $\Gamma$  mit Anfangs- und Endpunkt  $p$ .
2. Für  $w_1, w_2 \in \pi_1(\Gamma, p)$  sei  $w_1 \cdot w_2$  der Weg, den man nach dem Entfernen aller Stachel des aus  $w_1$  und  $w_2$  zusammengesetzten Weges erhält.
3. Mit dieser Verknüpfung ist  $\pi_1(\Gamma, p)$  eine Gruppe. Sie heißt **Fundamentalgruppe** von  $\Gamma$  (bzgl.  $p$ ).
4. Für jedes  $q \in E(\Gamma)$  ist  $\pi_1(\Gamma, q) \cong \pi_1(\Gamma, p)$ . Daher können wir auch  $\pi_1(\Gamma)$  schreiben.

BEWEIS:

3. Das neutrale Element ist der Weg der Länge 0. Zu  $w = (k_1, \dots, k_n)$  ist  $\bar{w} = (\bar{k}_n, \dots, \bar{k}_1)$  invers.

Die Zeichnung veranschaulicht, wie beim Zusammensetzen zweier stachelfreier Wege neue Stacheln auftreten können.



Hat ein zusammengesetzter Weg  $w = (k_1, \dots, k_n)$  einen Stachel, so muss  $\bar{k}_i = k_{i+1}$  für ein  $i$  gelten. Setze  $w^{(1)} := (k_1, \dots, k_{i-1}, k_{i+2}, \dots, k_n)$  und wiederholen dieses Vorgehen solange, bis alle Stacheln entfernt sind. Wir bemerken, dass dies zu einem eindeutigen stachelfreien Weg führt. Daraus folgt die Wohldefiniertheit der Verknüpfung und ebenso die Assoziativität.

4. Es sei  $v$  ein Weg in  $\Gamma$  von  $p$  nach  $q$ . Dann ist

$$\varphi : \pi_1(\Gamma, q) \rightarrow \pi_1(\Gamma, p), \quad w \mapsto vw\bar{v}$$

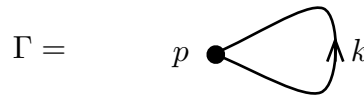
ein Gruppenhomomorphismus, denn

$$\varphi(w_1w_2) = vw_1w_2\bar{v} = vw_1\bar{v}vw_2\bar{v} = \varphi(w_1)\varphi(w_2).$$

Da es offensichtlich eine Umkehrung gibt, ist  $\varphi$  bijektiv. ■

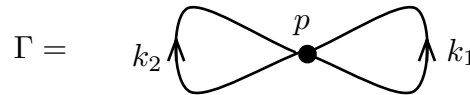
**Beispiel 6.2** Fundamentalgruppen.

1. Ist  $\Gamma$  ein Baum, so ist  $\pi_1(\Gamma, p) = \{1\}$ .
2. Es sei



Die Gruppe  $\pi_1(\Gamma, p)$  besteht aus dem Weg der Länge 0 und aus den Wegen, die durch  $n$ -faches Durchlaufen von  $k$  oder  $n$ -faches Durchlaufen von  $\bar{k}$  entstehen. Daher ist  $\pi_1(\Gamma, p) \cong \mathbb{Z}$ .

3. Es sei



In diesem Fall ist  $\pi_1(\Gamma, p) = F_2$ .

**Proposition 6.3** Für jeden zusammenhängende Graphen  $\Gamma$  ist  $\pi_1(\Gamma)$  eine freie Gruppe vom Rang  $g(\Gamma)$ .

BEWEIS: Für den Fall, dass  $\Gamma$  hat nur eine Ecke hat:

Die Kanten  $k \in K(\Gamma)$  können als Elemente von  $\pi_1(\Gamma)$  aufgefasst werden. Für  $k \in K(\Gamma)$  ist  $\bar{k}$  das inverse Element. Die stachelfreien Wege in  $\Gamma$  entsprechen bijektiv den Kantenfolgen der Form

$$k_1^{\varepsilon_1}, \dots, k_n^{\varepsilon_n}$$

mit  $n \geq 0$ ,  $\varepsilon_i = \pm 1$  und  $k_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}} \neq k_i^{-\varepsilon_i}$ . Diese Stellen aber genau die reduzierten Worte in  $F(K(\Gamma)^+)$  dar, wobei  $K(\Gamma)^+$  eine Orientierung von  $\Gamma$  ist.

Nun der Beweis für den allgemeinen Fall:

Es sei  $T$  ein aufspannender Teilbaum von  $\Gamma$  und  $\Gamma' := \Gamma/T$ . Nach Bemerkung 2.13(2) ist  $g(\Gamma') = g(\Gamma)$ . Zusammen mit dem Fall für eine Ecke genügt es nun zu zeigen, dass  $\pi_1(\Gamma') \cong \pi_1(\Gamma)$  ist. ■

**Bemerkung 6.4** Es sei  $\Gamma$  ein zusammenhängender Graph,  $Z$  ein zusammenhängender Teilgraph  $z \in Z$ . Dann gibt es einen surjektiven Homomorphismus  $\varphi_Z : \pi_1(\Gamma, z) \rightarrow \pi_1(\Gamma/Z, Z)$ , dessen Kern die normale Hülle von  $\pi_1(Z, z)$  ist, d.h.

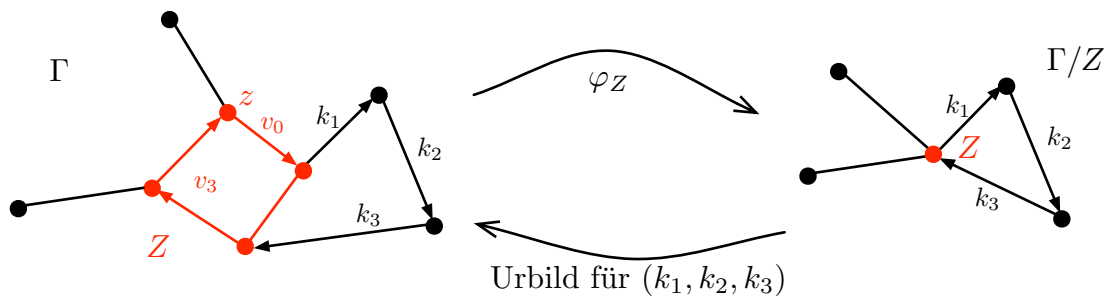
$$\text{Kern}(\varphi_Z) = \langle \pi_1(Z, z) \rangle_{\text{NT}} := \bigcap_{\pi_1(Z, z) \subset N \trianglelefteq \pi_1(\Gamma, z)} N.$$

BEWEIS: Für  $w = (k_1, \dots, k_n) \in \pi_1(\Gamma, z)$  sei  $\psi_Z(w)$  der Weg, der durch Streichen aller Kanten in  $K(Z)$  entsteht und  $\varphi_Z(w)$  der Weg, der durch Entfernen aller Stacheln aus  $\psi_Z(w)$  entsteht. Man sieht leicht, dass  $\varphi_Z$  ein Gruppenhomomorphismus ist.

$\varphi_Z$  ist surjektiv: Fasse  $w$  als Weg in  $\pi_1(\Gamma/Z, Z)$  auf. Dann sind  $k_1, \dots, k_n \in K(\Gamma) \setminus K(Z)$ . Ist  $t(k_i) \neq i(k_{i+1})$  in  $E(\Gamma)$ , so ist  $t(k_i) = i(k_{i+1}) = Z$  in  $E(\Gamma/Z)$ . Da  $Z$  zusammenhängend ist, gibt es einen Weg  $v_i$  in  $Z$  mit  $i(v_i) = t(k_i)$  und  $t(v_i) = i(k_{i+1})$ . Also ist

$$\tilde{w} = (v_0, k_1, v_1, \dots, k_n, v_n) \in \pi_1(\Gamma, z)$$

ein Weg in  $\Gamma$  mit  $\varphi_Z(\tilde{w}) = w$  (dabei dürfen die Wege  $v_i$  die Länge 0 haben und bei Bedarf sei  $v_0$  ein Weg in  $Z$  von  $z$  nach  $i(k_1)$  und  $v_n$  ein Weg in  $Z$  von  $t(k_n)$  nach  $z$ ).



Offensichtlich liegt  $\pi_1(Z, z)$  im Kern von  $\varphi_Z$ . Da der Kern ein Normalteiler ist, der  $\pi_1(Z, z)$  enthält, muss er auch den Schnitt über alle solchen Normalteiler enthalten, also  $\langle \pi_1(Z, z) \rangle_{\text{NT}} \subseteq \text{Kern}(\varphi)$ .

Zum Beweis der umgekehrten Inklusionsrichtung überlegen wir zuerst, dass ein Weg  $w \in \text{Kern}(\varphi_Z)$  in der Form

$$v_0 w_1 v_1 w_2 v_2 \cdots w_n v_n$$

geschrieben werden kann, wobei  $v_i$  ein Weg in  $Z$  und  $w_i$  ein Weg außerhalb von  $Z$  ist (jedoch mit Anfangs und Endpunkt in  $Z$ ). Es muss  $\psi_Z(w) = w_1 w_2 \cdots w_n$  ein Stachel sein. Wir wählen stachelfreie Wege  $u_i$  von  $t(w_i)$  nach  $z$  und  $u'_i$  von  $t(v_i)$  nach  $z$  mit Kanten in  $K(Z)$ . Dann können wir  $w$  schreiben als

$$\begin{aligned} w &= v_0 w_1 (u_1 u_1^{-1}) v_1 (u'_1 u_1'^{-1}) w_2 \cdots \\ &= \underbrace{v_0 w_1 u_1}_{\in \pi_1(\Gamma, z)} \underbrace{u_1^{-1} v_1 u'_1}_{\in \pi_1(Z, z)} \underbrace{u_1'^{-1} w_1 u_2}_{\in \pi_1(\Gamma, z)} \cdots \end{aligned}$$

Wir können also ohne Einschränkung annehmen, dass  $w_i \in \pi_1(\Gamma, z)$  und  $v_i \in \Gamma(Z, z)$  gilt. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} w &= \underbrace{w_1 v_1 w_1^{-1}}_{\langle \pi_1(Z, z) \rangle_{\text{NT}}} \underbrace{w_1 w_2 v_2 w_2^{-1} w_1^{-1}}_{\langle \pi_1(Z, z) \rangle_{\text{NT}}} \underbrace{w_1 w_2 w_3 v_3 w_3^{-1} w_2^{-1} w_1^{-1}}_{\langle \pi_1(Z, z) \rangle_{\text{NT}}} \\ &\quad \cdots \underbrace{w_1 \cdots w_{n-1} \cdots v_1 w_{n-1}^{-1} \cdots w_1^{-1}}_{\langle \pi_1(Z, z) \rangle_{\text{NT}}} \cdot \underbrace{w_1 \cdots w_n}_{\text{Stachel}}, \end{aligned}$$

also  $w \in \langle \pi_1(Z, z) \rangle_{\text{NT}}$ . ■

**Proposition 6.5** Zu jedem Graphen  $\Gamma$  gibt es einen Baum  $X = X_\Gamma$  und eine freie Aktion von  $\pi_1(\Gamma)$  auf  $X$ , so dass  $X/\pi_1(\Gamma) \cong \Gamma$ .

BEWEIS: Es sei  $T$  ein maximaler Teilbaum von  $\Gamma$  und  $S$  eine Orientierung von  $K(\Gamma) \setminus K(T)$ . Dann ist  $\pi_1(\Gamma) \cong F(S)$  nach Proposition 6.3.

Die Idee, die der folgenden Konstruktion von  $X$  zugrunde liegt, ist es, für jedes Element von  $F(S)$  eine Kopie von  $T$  zu erstellen, so dass  $F(S)$  frei auf diesen Kopien operieren kann. Dazu identifizieren wir ein  $s \in S$  mit dem Element von  $\pi(\Gamma)$ , dass  $s$  enthält und sonst nur Kanten in  $T$  (dies ist eindeutig, da  $T$  ein Baum ist). Nun definieren wir  $X$  durch

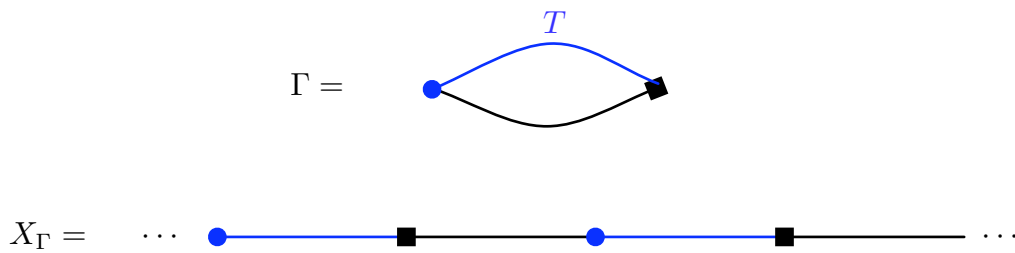
$$\begin{aligned} E(X) &:= \bigcup_{g \in \pi_1(\Gamma)} g \cdot E(T), \\ K(X) &:= \left( \bigcup_{g \in \pi_1(\Gamma)} g \cdot K(T) \right) \cup \left( \bigcup_{s \in S} \bigcup_{g \in \pi_1(\Gamma)} \{gs, g\bar{s}\} \right) \end{aligned}$$

mit  $i(gs) := gi(s)$ ,  $t(gs) := gst(s)$  und entsprechend für  $g\bar{s}$ .  $\pi_1(\Gamma)$  operiert auf  $X$  durch Linksmultiplikation.

Es ist  $X/\pi_1(\Gamma) = \Gamma$  nach Konstruktion.  $X$  ist zusammenhängend, da  $S$  die Gruppe  $\pi_1(\Gamma)$  erzeugt (vgl. Beweis von Proposition 6.3). Gäbe es Kreise in  $X$ , so gäbe es ein reduziertes Wort in den Elementen aus  $S$ , im Widerspruch dazu, dass die Aktion frei ist. Somit muss  $X$  ein Baum sein. ■

**Definition 6.6** Der Baum  $X_\Gamma$  heißt **universelle Überlagerung** von  $\Gamma$ .

**Beispiel 6.7** Es sei



$n \in \mathbb{Z} = \pi_1(\Gamma)$  operiert durch Translation um  $2n$ .

Die hier gegebenen Definitionen der Fundamentalgruppe und der universellen Überlagerung sind konsistent mit denen aus der Topologie, wenn wir die Graphen als topologische Teilräume eines  $\mathbb{R}^n$  auffassen (vgl. Abschnitte 1.1 und 1.3 in Hatcher [3]). So entspricht der Graph  $\Gamma$  aus Beispiel 6.7 dem Einheitskreis  $S^1$ , dessen universelle Überlagerung  $X_\Gamma$  die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  sind.

## 7 Freie Produkte und Amalgame

Es sei  $G$  eine Gruppe und  $S$  eine Erzeugermenge von  $G$ . Die UAE der freien Gruppen impliziert  $G \cong F(S)/\text{Kern}(\Phi)$  für den Homomorphismus  $\Phi : F(S) \rightarrow G$ ,  $s \mapsto s$  (man kann sich  $\Phi$  als „Anwendung der in  $G$  gültigen Relationen“ auf Worte in  $F(S)$  vorstellen).

**Definition 7.1** Es sei  $R \subset \text{Kern}(\Phi)$  mit  $\langle R \rangle_{\text{NT}} = \text{Kern}(\Phi)$ . Schreibe

$$\langle S|R \rangle := G \cong F(S)/\text{Kern}(\Phi).$$

Dies nennen wir **Präsentation** von  $G$  (in Erzeugern und Relationen). Die Präsentation heißt **endlich**, wenn  $S$  und  $R$  endlich sind.  $G$  heißt **endlich präsentierbar**, wenn es eine endliche Präsentation von  $G$  gibt.

Die Relationen in einer Präsentation werden wir immer multiplikativ schreiben, auch für Gruppen wie  $\mathbb{Z}$ , die üblicherweise additiv geschrieben werden.

**Beispiel 7.2** Präsentationen.

1.  $F(X) = \langle X | \emptyset \rangle$ .
2.  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \langle a | a^3 = 1 \rangle$ .
3.  $\mathbb{Z}^2 = \langle a, b | aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle$ .

**Bemerkung 7.3** Es sei  $G = \langle S | R \rangle$ ,  $H$  eine weitere Gruppe und  $f : S \rightarrow H$ . Es gelte für alle  $r = s_1 \cdots s_n \in R$

$$f(s_1) \cdots f(s_n) = 1.$$

Dann gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus  $\Phi : \langle S | R \rangle \rightarrow H$  mit  $\Phi(s) = f(s)$  auf  $S$ .

**Proposition 7.4** Es seien  $G_1$  und  $G_2$  Gruppen. Dann existieren eine Gruppe  $G = G_1 * G_2$  und injektive Homomorphismen  $\alpha_i : G_i \rightarrow G$  mit folgender UAE: Sind  $H$  eine Gruppe und  $\varphi_i : G_i \rightarrow H$  Homomorphismen, so gibt es einen eindeutigen Homomorphismus  $\Phi : G \rightarrow H$  mit  $\Phi \circ \alpha_i = \varphi_i$ , d.h. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} G_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & G_1 * G_2 & \xleftarrow{\alpha_2} & G_2 \\ & \searrow \varphi_1 & \downarrow \Phi & \swarrow \varphi_2 & \\ & & H & & \end{array}$$

Wir nennen  $G_1 * G_2$  das **freie Produkt** von  $G_1$  und  $G_2$ .

**BEWEIS: Eindeutigkeit:** Es seien  $(G, \alpha_i)$  und  $(G', \alpha'_i)$  zwei freie Produkte, d.h. sie erfüllen beide die UAE. Wegen der UAE für  $G$  gibt es einen eindeutigen Homomorphismus  $\Phi : G \rightarrow G'$  mit  $\Phi \circ \alpha_i = \alpha'_i$ , und wegen der UAE für  $G'$  gibt es einen eindeutigen Homomorphismus  $\Psi : G' \rightarrow G$  mit  $\Psi \circ \alpha'_i = \alpha_i$ .

$$\begin{array}{ccc} G & & G \\ \alpha_i \uparrow & \searrow \exists_1 \Phi & \uparrow \alpha_i \\ G_i & \xrightarrow{\alpha'_i} & G' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} G & & G \\ \alpha_i \uparrow & \nwarrow \exists_1 \Psi & \downarrow \alpha_i \\ G_i & \xrightarrow{\alpha'_i} & G' \end{array}$$

Außerdem erfüllt  $\text{id}_G : G \rightarrow G$  die UAE für  $G$ :

$$\begin{array}{ccc} G & & G \\ \alpha_i \uparrow & \searrow \text{id}_G & \\ G_i & \xrightarrow{\alpha_i} & G \end{array}$$



Aber auch  $\Psi \circ \Phi$  erfüllt die UAE, also muss wegen der Eindeutigkeit  $\Psi \circ \Phi = \text{id}_G$  sein und analog  $\Phi \circ \Psi = \text{id}_{G'}$ . Somit ist  $\Phi$  ein Isomorphismus von  $G$  nach  $G'$ .

Für die *Existenz* der Abbildung  $\Phi$  betrachten wir zwei Beweisvarianten.

Variante 1: Schreibe  $G_i = \langle S_i | R_i \rangle$  und definiere

$$G := \langle S_1 \dot{\cup} S_2 | R_1 \dot{\cup} R_2 \rangle$$

(falls notwendig, müssen Elemente umbenannt werden, um eine disjunkte Vereinigung dieser Mengen zu erhalten). Die Abbildungen  $\alpha_i : G_i \rightarrow G$ ,  $s \mapsto s$ , sind wohldefinierte Homomorphismen und injektiv. Zu zeigen ist nun, dass  $(G, \alpha_i)$  die UAE erfüllt. Dazu sei  $H$  eine Gruppe und  $\varphi_i : G_i \rightarrow H$  Homomorphismen. Erfüllt  $\Phi : G \rightarrow H$  die UAE (d.h.  $\Phi \circ \alpha_i = \varphi_i$ ), so gilt für alle  $s \in S_1 \dot{\cup} S_2$ :

$$\Phi(s) \underset{s \in S_i}{=} \Phi \circ \alpha_i(s) = \varphi_i(s).$$

Dadurch ist  $\Phi$  eindeutig bestimmt. Umgekehrt ist  $\Phi$ , gegeben durch die Vorschrift

$$\Phi(s) := \varphi_i(s) \text{ für } s \in S_i, i = 1, 2,$$

ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus mit  $\Phi \circ \alpha_i = \varphi_i$ .

Variante 2: Definiere  $G$  durch

$$G := \{g_1 h_1 \cdots g_n h_n : g_i \in G_1, h_i \in G_2, g_2, \dots, g_n \neq 1, h_1, \dots, h_{n-1} \neq 1\}.$$

Mit „Hintereinanderschreiben und Reduzieren“ als Verknüpfung ist  $G$  eine Gruppe. Setze  $\alpha_i : G_i \rightarrow G$ ,  $g \mapsto g$ . Dies sind ein wohldefinierte Homomorphismen, die die UAE erfüllen: Für eine Gruppe  $H$  und Homomorphismen  $\varphi_i : G_i \rightarrow H$  ist ein Homomorphismus  $\Phi : G \rightarrow H$  mit  $\Phi \circ \alpha_i = \varphi_i$  durch

$$\begin{aligned} \Phi(g_1 h_1 \cdots g_n h_n) &= \Phi(g_1) \Phi(h_1) \cdots \Phi(g_n) \Phi(h_n) \\ &= \Phi \circ \alpha_1(g_1) \Phi \circ \alpha_2(h_1) \cdots \Phi \circ \alpha_1(g_n) \Phi \circ \alpha_2(h_n) \\ &= \varphi_1(g_1) \varphi_2(h_1) \cdots \varphi_1(g_n) \varphi_2(h_n). \end{aligned}$$

eindeutig und wohldefiniert. ■

**Bemerkung 7.5** Das direkte Produkt  $G_1 * G_2$  ist das Koproduct in der Kategorie der Gruppen, vgl. Kapitel I.12 in Lang [4].

**Beispiel 7.6** Freie Produkte.

1. Es ist  $F(X) * F(Y) = \langle X | \emptyset \rangle * \langle Y | \emptyset \rangle = \langle X \dot{\cup} Y | \emptyset \rangle$ . Speziell für  $\mathbb{Z} = F(\{1\})$  ist  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \langle \{1\} \cup \{1'\} | \emptyset \rangle = F_2$ .

2. Es ist  $G * \{1\} = G$ .
3.  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{1, \sigma\} * \{1, \tau\} = \{(\sigma)\tau\sigma\tau \cdots \sigma(\tau)\}$ .
4. Es ist

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} &= \{1, \sigma\} * \{1, \tau, \tau^2\} \\ &= \langle \sigma | \sigma^2 = 1 \rangle * \langle \tau | \tau^3 = 1 \rangle \\ &= \langle \sigma, \tau | \sigma^2 = \tau^3 = 1 \rangle.\end{aligned}$$

Dieses freie Produkt ist isomorph zur speziellen projektiven Gruppe

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \{A \in \mathbb{Z}^{2 \times 2} : \det(A) = 1\} / \{-I_2, I_2\}.$$

Ein Isomorphismus  $\Phi$  ist durch das folgende Diagramm gegeben:

$$\begin{array}{ccccc}\{1, \sigma\} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & \xleftarrow{\quad} & \{1, \tau, \tau^2\} \\ & \searrow \sigma \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \downarrow \Phi & \swarrow \tau \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \\ & & \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) & & \end{array}$$

Der Nachweis, dass  $\Phi$  in der Tat ein Isomorphismus ist, ist nicht trivial.

**Bemerkung 7.7** Die Konstruktion der freien Produkte lässt sich ohne Weiteres auf beliebige Indexmengen  $I$  verallgemeinern:

1. Es seien  $(G_i)_{i \in I}$  Gruppen. Dann gibt es eine (bis auf eindeutige Isomorphie) eindeutige Gruppe  $G = \ast_{i \in I} G_i$  und Gruppenhomomorphismen  $\alpha_i : G_i \rightarrow G$ , so dass für eine Gruppe  $H$  und Homomorphismen  $\varphi_i : G_i \rightarrow H$  ein eindeutiger Homomorphismus  $\Phi : G \rightarrow H$  existiert mit  $\Phi \circ \alpha_i = \varphi_i$  für alle  $i \in I$ .
2. Ist  $G_i = \langle S_i | R_i \rangle$ , so ist  $G = \langle \dot{\bigcup}_{i \in I} S_i | \dot{\bigcup}_{i \in I} R_i \rangle$ .
3.  $G$  ist die Menge aller reduzierten Wörter über  $\dot{\bigcup}_{i \in I} G_i$ , bei denen aufeinanderfolgende Buchstaben aus verschiedenen  $G_i$  kommen.

**Bemerkung 7.8** Durch die Inklusionen

$$\begin{aligned}\iota_1 : G_1 &\rightarrow G_1 \times G_2, & g &\mapsto (g, 1) \\ \iota_2 : G_2 &\rightarrow G_1 \times G_2, & h &\mapsto (1, h)\end{aligned}$$

ist über die UAE des freien Produktes ein Gruppenhomomorphismus

$$\varrho : G_1 * G_2 \rightarrow G_1 \times G_2$$

gegeben. Es gilt:

1.

$$\begin{aligned}\varrho(g_1 h_1 \cdots g_n h_n) &= \varrho(g_1) \varrho(h_1) \cdots \varrho(g_n) \varrho(h_n) \\ &= \varrho \circ \alpha_1(g_1) \varrho \circ \alpha_2(h_1) \cdots \varrho \circ \alpha_1(g_n) \varrho \circ \alpha_2(h_n) \\ &= \iota_1(g_1) \iota_2(h_1) \cdots \iota_1(g_n) \iota_2(h_n) \\ &= (g_1, 1)(1, h_1) \cdots (g_n, 1)(1, h_n) \\ &= (g_1 \cdots g_n, h_1 \cdots h_n).\end{aligned}$$

2.  $\varrho$  ist surjektiv, also

$$G_1 \times G_2 \cong G_1 * G_2 / \text{Kern}(\varrho).$$

3.  $\text{Kern}(\varrho)$  ist eine freie Gruppe mit Basis

$$X = \{ghg^{-1}h^{-1} : g \in G_1 \setminus \{1\}, h \in G_2 \setminus \{1\}\}.$$

In Buch von Serre [5] wird ein elementarer Beweis hierfür gebracht, den wir nun kurz skizzieren: Zuerst rechnet man leicht nach, dass  $K := \langle X \rangle$  ein Normalteiler und im Kern von  $\varrho$  enthalten ist, d.h. es gibt ein  $\tilde{\varrho}$ , so dass

$$\begin{array}{ccc} G_1 * G_2 & \xrightarrow{\varrho} & G_1 \times G_2 \\ \downarrow & \nearrow \tilde{\varrho} & \\ G_1 * G_2 / K & & \end{array}$$

kommutiert. Zeigt man nun, dass  $\tilde{\varrho}$  ein Isomorphismus (mit Umkehrabbildung  $(g, h) \mapsto ghK$ ) ist, so folgt  $\text{Kern}(\varrho) = K$ . Nun muss noch gezeigt werden, dass der Kern frei ist.

Später werden wir einen anderen Beweis für diese Bemerkung geben.

Über die Inklusionen  $\iota_1, \iota_2$  fassen wir  $G_1$  und  $G_2$  als Untergruppen von  $G_1 * G_2$  mit  $G_1 \cap G_2 = \{1\}$  auf. Dies wollen wir im Folgenden verallgemeinern für Gruppen  $G_1, G_2, A$  mit  $A \leq G_1$  und  $A \leq G_2$ . Gesucht ist eine Gruppe  $G_1 *_A G_2$  mit  $G_1, G_2 \leq G_1 *_A G_2$  und  $G_1 \cap G_2 = A$ .

**Proposition 7.9** Es seien  $G_1, G_2, A$  Gruppen und  $\alpha_i : A \rightarrow G_i$  Homomorphismen. Dann gibt es eine Gruppe  $G_1 *_A G_2$  und Homomorphismen  $f_i : G_i \rightarrow G_1 *_A G_2$  mit  $f := f_1 \circ \alpha_1 = f_2 \circ \alpha_2$ , die folgende UAE erfüllt: Für alle Gruppen  $H$  und Homomorphismen  $\varphi_i : G_i \rightarrow H$  mit  $\varphi_1 \circ \alpha_1 = \varphi_2 \circ \alpha_2$  gibt es genau einen Homomorphismus  $\Phi : G_1 *_A G_2 \rightarrow H$  mit  $\Phi \circ f_i = \varphi_i$ , d.h. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H & & \\
 & \nearrow \varphi_1 & \uparrow \Phi & \nwarrow \varphi_2 & \\
 G_1 & \xrightarrow{f_1} & G_1 *_A G_2 & \xleftarrow{f_2} & G_2 \\
 & \nwarrow \alpha_1 & \uparrow f & \nearrow \alpha_2 & \\
 & & A & & 
 \end{array}$$

Wir nennen  $G_1 *_A G_2$  das **amalgamierte Produkt** von  $G_1$  und  $G_2$  über  $A$ .

BEWEIS: Die *Eindeutigkeit* folgt (wie immer bei einer UAE) wie im Beweis zu Proposition 7.4.

Zur *Existenz* des amalgamierte Produktes: Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 G_1 & \xrightarrow{\iota_1} & G_1 * G_2 & \xleftarrow{\iota_2} & G_2 \\
 & \nwarrow \alpha_1 & & \nearrow \alpha_2 & \\
 & & A & & 
 \end{array}$$

ist i.A. nicht kommutativ, da  $\iota_1 \circ \alpha_1 \neq \iota_2 \circ \alpha_2$ . Wir entfernen den Teil, der die Kommutativität stört:

$$N := \langle (\iota_1 \circ \alpha_1(a)) \cdot (\iota_2 \circ \alpha_2(a))^{-1} : a \in A \rangle_{\text{NT}}.$$

Nun kommutiert der obere Teil des Diagramms

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (G_1 * G_2)/N & & \\
 & \nearrow f_1 & \uparrow p & \nwarrow f_2 & \\
 G_1 & \xrightarrow{\iota_1} & G_1 * G_2 & \xleftarrow{\iota_2} & G_2 \\
 & \nwarrow \alpha_1 & & \nearrow \alpha_2 & \\
 & & A & & 
 \end{array}$$

dabei sei  $p$  die kanonische Projektion. Definiere nun

$$\begin{aligned}
 G_1 *_A G_2 &:= (G_1 * G_2)/N \\
 f_i &:= p \circ \iota_i, \quad i = 1, 2.
 \end{aligned}$$

Es gilt nun  $f_1 \circ \alpha_1(a) = f_2 \circ \alpha_2(a)$  für alle  $a \in A$ , also

$$f_1 \circ \alpha_1 = f_2 \circ \alpha_2.$$

Es bleibt zu zeigen, dass diese Konstruktion die UAE erfüllt:

Es seien  $H, \varphi_1, \varphi_2$  wie gefordert. Wir nutzen die UAE des freien Produkts, um einen eindeutigen Homomorphismus  $\hat{\Phi} : G_1 * G_2 \rightarrow H$  zu erhalten mit  $\hat{\Phi} \circ \iota_i = \varphi_i$ .

$$\begin{array}{ccccc} G_1 & \xrightarrow{\iota_1} & G_1 * G_2 & \xleftarrow{\iota_2} & G_2 \\ & \searrow \varphi_1 & \downarrow \hat{\Phi} & \swarrow \varphi_2 & \\ & & H & & \end{array}$$

Für alle  $a \in A$  gilt

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}((\iota_1 \circ \alpha_1(a)) \cdot (\iota_2 \circ \alpha_2(a))^{-1}) &= (\hat{\Phi} \circ \iota_1 \circ \alpha_1(a)) \cdot (\hat{\Phi} \circ \iota_2 \circ \alpha_2(a))^{-1} \\ &= (\varphi_1 \circ \alpha_1(a)) \cdot (\varphi_2 \circ \alpha_2(a))^{-1} \\ &= 1 \quad (\text{nach Voraussetzung}) \end{aligned}$$

und somit ist  $N$  im Kern von  $\hat{\Phi}$  enthalten. Also gibt es einen eindeutigen Homomorphismus  $\Phi$ , der das folgende Diagramm kommutativ macht

$$\begin{array}{ccc} G_1 * G_2 & \xrightarrow{\hat{\Phi}} & H \\ p \downarrow & \nearrow \Phi & \\ (G_1 * G_2)/N & & \end{array}$$

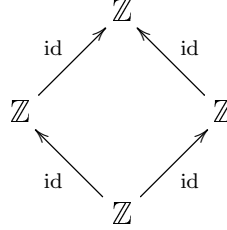
d.h. es ist  $\Phi \circ p = \hat{\Phi}$ . Es gilt nun  $\Phi \circ f_i = \Phi \circ p \circ \iota_i = \hat{\Phi} \circ \iota_i = \varphi_i$ . ■

**Bemerkung 7.10** Sei  $I$  eine beliebige Indexmenge. Wie beim freien Produkt lässt sich die Definition des amalgamierten Produktes  $*_{A, i \in I} G_i$  für Gruppen  $A, G_i$  und Homomorphismen  $\alpha_i : A \rightarrow G_i$  mit  $i \in I$  übertragen.

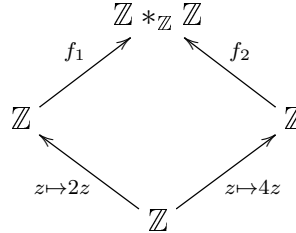
**Beispiel 7.11** Amalgamierte Produkte.

1. Ist  $A = \{1\}$ , so ist  $G_1 *_A G_2 = G_1 * G_2$ .
2. Ist  $G_1 *_A A = G_1$ , so muss wegen der UAE  $\alpha_2 = \text{id}$  gelten.
3. Aus Satz 9.2 folgt: Es ist  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ . Die Gruppe  $\text{SL}_3(\mathbb{Z})$  kann nicht als nichttriviales amalgamiertes Produkt geschrieben werden.

4. Dieses Beispiel zeigt, dass das amalgamierte Produkt von den  $\alpha_i$  abhängt. Betrachte  $\mathbb{Z} *_\mathbb{Z} \mathbb{Z}$  mit  $\alpha_i = \text{id}$ . Die UAE wird von  $\mathbb{Z} *_\mathbb{Z} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$  erfüllt:



Nun betrachte  $\mathbb{Z} *_\mathbb{Z} \mathbb{Z}$  mit  $\alpha_1(z) = 2z$  und  $\alpha_2(z) = 4z$ .



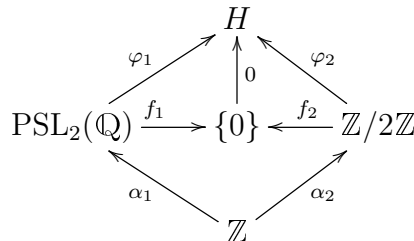
Angenommen, es wäre  $\mathbb{Z} *_\mathbb{Z} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ . Dann gibt es  $f_1, f_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , so dass obiges Diagramm kommutativ ist. Da  $f_2$  als Homomorphismus  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  die Form  $z \mapsto kz$  haben muss, ist wegen der Kommutativität  $f_1$  durch  $z \mapsto 2kz$  gegeben. Wählt man nun  $H = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  und  $\varphi_1 \neq 0$  und  $\varphi_2 = 0$ , so gibt es einen eindeutigen Homomorphismus  $\Phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  mit

$$\bar{1} = \varphi_1(1) = \Phi \circ f_1(1) = \Phi(2k) = \Phi \circ f_2(2) = \varphi_2(2) = \bar{0}.$$

Dies ist ein Widerspruch.

5. Es sei  $G_1 = \text{PSL}_2(\mathbb{Q})$ ,  $G_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  und  $A = \mathbb{Z}$  und weiter  $\alpha_1 : \mathbb{Z} \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{Q})$  ein beliebiger injektiver Homomorphismus und  $\alpha_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $z \mapsto z \bmod 2$ . Dann ist

$$\text{PSL}_2(\mathbb{Q}) *_\mathbb{Z} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0\}.$$



Um dies einzusehen, zeigen wir zunächst, dass für Homomorphismen  $\varphi_1 : \text{PSL}_2(\mathbb{Q}) \rightarrow H$  und  $\varphi_2 : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow H$  mit  $\varphi_1 \circ \alpha_1 = \varphi_2 \circ \alpha_2$  stets

$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  gilt: Da  $\alpha_2$  nicht injektiv ist, kann auch  $\varphi_2 \circ \alpha_2 = \varphi_1 \circ \alpha_1$  nicht injektiv sein. Da  $\alpha_1$  injektiv ist, kann also  $\varphi_1$  nicht injektiv sein, also ist  $\text{Kern}(\varphi_1) \neq \{I_2\}$ . Da  $\text{PSL}_2(\mathbb{Q})$  eine einfache Gruppe ist (d.h. sie hat nur  $\{I_2\}$  und  $\text{PSL}_2(\mathbb{Q})$  selbst als Normalteiler) muss  $\text{Kern}(\varphi_1) = \text{PSL}_2(\mathbb{Q})$  gelten, also  $\varphi_1 = 0$  und somit auch  $\varphi_2 \circ \alpha_2 = 0$ . Da  $\alpha_2$  surjektiv ist, folgt  $\varphi_2 = 0$ .

Die Nullabbildung  $\{0\} \rightarrow H$  erfüllt also die UAE des amalgamierten Produktes.

Im Folgenden sei  $I$  stets eine beliebige Indexmenge und  $G := \ast_{A, i \in I} G_i$ . Außerdem seien alle  $\alpha_i : A \rightarrow G_i$  injektiv.

### Definition und Bemerkung 7.12

1. Es ist

$$G = \ast_A G_i = (\ast G_i)/N = \{x_1 \cdots x_n : n \in \mathbb{N}, x_j \in \bigcup_{i \in I} G_i\}.$$

Diese Darstellung der Elemente ist i.A. nicht eindeutig. Ist etwa  $a \in A$ ,  $g \in G_i$  und  $h \in G_j$  mit  $i \neq j$ , so ist stets

$$(ga)hN = g(ah)N.$$

2. Für jedes  $i$  ist  $A \leq G_i$ . Es gibt also ein Vertretersystem  $S_i$  der Rechtsnebenklassen von  $A$  in  $G_i$ , so dass für jede Rechtsnebenklasse genau ein Repräsentant in  $S_i$  enthalten ist und  $A$  selbst durch 1 in  $S_i$  repräsentiert wird. Dann kann jedes Element  $x \in G$  eindeutig geschrieben werden als

$$x = as_1 \cdots s_n N$$

mit  $a \in A$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und  $s_\nu \in S_{i_\nu} \setminus \{1\}$ ,  $i_\nu \neq i_{\nu+1}$ . Wir bezeichnen diese Darstellung als **Normalform** von  $x$ .

BEWEIS VON 2.: Setze

$$X := \{(a, s_1, \dots, s_n) : a \in A, n \in \mathbb{N}, s_\nu \in S_{i_\nu} \setminus \{1\}, i_\nu \neq i_{\nu+1}\}$$

und

$$\beta : X \rightarrow G, \quad (a, s_1, \dots, s_n) \mapsto as_1 \cdots s_n N.$$

$\beta$  ist offensichtlich surjektiv. Zu zeigen bleibt, dass  $\beta$  auch injektiv ist: Setze

$$Y_i := \{(a, s_1, \dots, s_n) \in X : a = 1, s_1 \notin S_i\}.$$

Dann ist die Abbildung

$$X \rightarrow A \times S_i \times Y_i, \quad (a, s_1, \dots, s_n) \mapsto \begin{cases} (a, s_i, (1, s_2, \dots, s_n)), & s_1 \in S_i \\ (a, 1, (1, s_1, \dots, s_n)), & s_1 \notin S_i \end{cases}$$

bijektiv mit Umkehrung

$$A \times S_i \times Y_i \rightarrow X, \quad (a, s, (1, s_1, \dots, s_n)) \mapsto \begin{cases} (a, s, s_1, \dots, s_n), & s \neq 1 \\ (a, s_1, \dots, s_n), & s = 1 \end{cases}.$$

Da es auch eine Bijektion  $A \times S_i \rightarrow G_i$ ,  $(a, s) \mapsto as$ , gibt, erhalten wir eine Bijektion  $\vartheta_i : X \rightarrow G_i \times Y_i$ . Da  $G_i$  auf  $G_i \times Y_i$  durch  $g(g', y) := (gg', y)$  operiert, induziert  $\vartheta_i$  eine Aktion von  $G_i$  auf  $X$ . Wir erhalten für  $a \in A \leq G_i$

$$a(b, s_1, \dots, s_n) = (ab, s_1, \dots, s_n) \quad (*)$$

und für  $s \in S_i \setminus \{1\}$ ,  $x = (1, s_1, \dots, s_n) \in X$  mit  $s_1 \notin S_i$

$$s(1, s_1, \dots, s_n) = (1, s, s_1, \dots, s_n). \quad (**)$$

Nach  $(*)$  ist die Aktion von  $A$  auf  $X$  unabhängig von der Wahl der Einbettung in  $G_i$ . Daher liefert die UAE von  $G$  eine Operation von  $G$  auf  $X$  durch

$$(x_1 \cdots x_n N) \cdot x := x_1 \cdots x_n x, \quad x \in X, x_i \in G_i.$$

Es sei  $\alpha : G \rightarrow X$ ,  $g \mapsto g(1)$ . Damit gilt für alle  $(a, s_1, \dots, s_n) \in X$ :

$$\begin{aligned} \alpha \circ \beta(a, s_1, \dots, s_n) &= \alpha(as_1 \cdots s_n N) = as_1 \cdots s_n(1) \\ &\stackrel{(**)}{=} as_1 \cdots s_{n-1}(1, s_n) \\ &\stackrel{(**)}{=} \dots \\ &\stackrel{(**)}{=} a(1, s_1, \dots, s_n) \\ &\stackrel{(*)}{=} (a, s_1, \dots, s_n). \end{aligned}$$

Folglich ist  $\alpha \circ \beta = \text{id}$  und  $\beta$  injektiv. ■

### Folgerung 7.13

1. Sind  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  injektiv, so sind auch  $f_1$ ,  $f_2$  und  $f$  injektiv.
2. In  $*_A G_i$  gilt  $\bigcap_{i \in I} G_i = A$ .

BEWEIS:



1. Wähle  $g, g' \in G_1$  mit  $f_1(g) = f_1(g')$ . Dann haben wir eindeutige Darstellungen  $g = as$  und  $g' = a's'$  und somit  $gN = g'N$ . Es folgt und  $asN = a's'N$  und wegen der Eindeutigkeit  $a = a'$  und  $s = s'$ .
2. Angenommen es gibt ein  $x \in \bigcap G_i$ ,  $x \notin A$ . Dann gibt es für alle  $i$  eine eindeutige Darstellung  $x = a_i s_i$  mit  $s_i \neq 1$ . Es folgt  $xN = a_i s_i N$  für alle  $i$ . Da alle  $a_i$  gleich sein müssen, müssen auch alle  $s_i$  gleich sein und somit aus demselben  $S_i$  stammen, im Widerspruch zur Annahme. ■

Im Folgenden werden wir einfach  $x_1 \cdots x_n$  für  $x_1 \cdots x_n N$  schreiben.

### Definition und Bemerkung 7.14

1. Es sei  $x = as_1 \cdots s_n \in G = *_A G_i$  in Normalform.  $\text{Typ}(x) := (i_1, \dots, i_n)$  heißt **Typ** von  $x$  und  $\ell(x) := n$  die **Länge** von  $x$ . Typ und Länge sind unabhängig vom Vertretersystem.
2. Es ist  $\ell(x) = 0$  genau dann, wenn  $x \in A$ .
3. Es ist  $\ell(x) \leq 1$  genau dann, wenn  $x \in G_i$  für ein  $i$ .
4. Es sei  $\ell(x) \geq 2$ . Dann heißt  $x$  **zyklisch reduziert**, wenn  $i_1 \neq i_n$ .
5. Jedes  $x \in G$  ist konjugiert zu einem zyklisch reduzierten Element oder zu einem Element, dass bereits in einem  $G_i$  enthalten ist.
6. Jedes zyklisch reduzierte Element hat unendliche Ordnung.
7. Jedes  $x \in G$  von endlicher Ordnung ist konjugiert zu einem Element aus einem der  $G_i$ .
8. Sind alle  $G_i$  torsionsfrei (d.h. sie enthalten keine Elemente endlicher Ordnung), so ist auch  $G$  torsionsfrei.

BEWEIS: 7. und 8. folgen direkt aus 5. und 6. .

5. Es sei  $n \geq 2$  und  $x$  nicht zyklisch reduziert. Es ist

$$\begin{aligned} s_n x s_n^{-1} &= \underbrace{s_n a s_1}_{\in G_{i_1}} s_2 \cdots s_{n-1} \\ &= a' s' s_2 \cdots s_{n-1} \end{aligned}$$

mit geeigneten  $a' \in A$ ,  $s' \in S_{i_1}$ . Es ist  $\ell(a' s' s_2 \cdots s_{n-1}) < \ell(x)$ . Mit Induktion folgt die Behauptung.

6. Es sei  $x = as_1 \cdots s_n$  in Normalform mit  $\ell(x) \geq 2$  und  $i_1 \neq i_n$ . Wiederholtes bilden der Normalform liefert:

$$\begin{aligned}
 x^2 &= as_1 \cdots \underbrace{s_n a}_{=a' s'_n} s_1 \cdots s_n \\
 &= as_1 \cdots \underbrace{s_{n-1} a'}_{=a'' s'_{n-1}} s'_n s_1 \cdots s_n \\
 &= \dots \\
 &= \tilde{a} s'_1 \cdots s'_n s_1 \cdots s_n
 \end{aligned}$$

für geeignete  $\tilde{a}, a', a'', \dots \in A$  und  $s'_\nu \in S_{i_\nu}$ . Der letzte Ausdruck ist die Normalform von  $x^2$ , da  $s'_n$  und  $s_1$  aus verschiedenen  $S_{i_\nu}$  stammen. Es folgt nun  $\ell(x^2) = 2\ell(x)$ ,  $\text{Typ}(x^2) = (i_1, \dots, i_n, i_1, \dots, i_n)$ . Induktiv erhalten wir  $\ell(x^k) = k\ell(x)$ , also  $x^k \neq 1$  für alle  $k \geq 1$ . ■

## 8 Graphen von Gruppen

**Definition und Bemerkung 8.1** Es sei  $G$  eine Gruppe,  $\Gamma$  ein Graph und  $\varrho : G \rightarrow \text{Aut}(\Gamma)$  eine Aktion von  $G$  auf  $\Gamma$ . Wir schreiben  $gx := \varrho(g)_E(x)$  und  $gk := \varrho(g)_K(k)$ .

1. Für  $x \in E(\Gamma)$  sei

$$G_x := \{g \in G : gx = x\}$$

die **Fixgruppe** von  $x$ . Entsprechend ist  $G_k$  für  $k \in K(\Gamma)$  definiert.

2. Für alle  $g \in G$  und  $x \in E(\Gamma)$  gilt

$$G_{gx} = gG_x g^{-1},$$

und entsprechendes für  $G_k$ ,  $k \in K(\Gamma)$ .

3. Für jede Kante  $k \in K(\Gamma)$  gilt

$$G_k \leq G_{i(k)} \cap G_{t(k)}.$$

BEWEIS:

2. Es ist  $h(gx) = gx$  genau dann, wenn  $(g^{-1}hg)x = x$  gilt. Es ist also  $h \in G_{gx}$  genau dann, wenn  $g^{-1}hg \in G_x$  gilt, und dies ist wiederum äquivalent zu  $h \in gG_x g^{-1}$ .

3. Klar. ■

**Proposition 8.2** Jede inversionsfreie Aktion  $\varrho : G \rightarrow \text{Aut}(\Gamma)$  bestimmt folgende Daten:

- Einen Graphen  $\bar{\Gamma} := \Gamma/G$ .
- Für jede Ecke  $x \in E(\bar{\Gamma})$  eine Gruppe  $G_x$ , nämlich  $G_x := G_{\tilde{x}}$  für ein Urbild  $\tilde{x} \in E(\Gamma)$  von  $x$ .
- Für jede Kante  $k \in K(\bar{\Gamma})$  eine Gruppe  $G_k$ , nämlich  $G_k := G_{\tilde{k}}$  für ein Urbild  $\tilde{k} \in K(\Gamma)$  von  $k$ . Dabei ist  $G_{\bar{k}} = G_k$  für die Gegenkante  $\bar{k}$ .
- Für jede Kante  $k$  einen injektiven Gruppenhomomorphismus  $\alpha_k : G_k \rightarrow G_{i(k)}$  (durch  $G_{\tilde{k}} \hookrightarrow G_{i(\tilde{k})}$ ). Beachte:  $\alpha_{\bar{k}} : G_k \rightarrow G_{t(k)}$ .

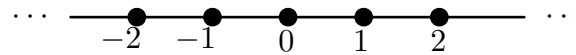
Ein solches Tupel

$$\mathcal{G}(\bar{\Gamma}) := \mathcal{G}(\Gamma, \varrho) := (\bar{\Gamma}, (G_x)_{x \in E(\bar{\Gamma})}, (G_k)_{k \in K(\bar{\Gamma})}, (\alpha_k)_{k \in K(\bar{\Gamma})})$$

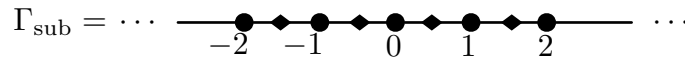
heißt **Graph von Gruppen**. Wir verwenden auch die Kurzform  $\mathcal{G} = (\bar{\Gamma}, G_x, G_k, \alpha_k)$ .

**Beispiel 8.3** Graphen von Gruppen.

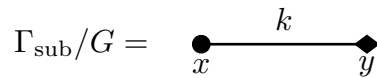
1. Ist  $\varrho$  eine freie Aktion, so ist  $G_x = G_k = \{1\}$  für alle  $x \in E, k \in K$ .
2. Es sei  $\Gamma$  die unendliche lineare Kette



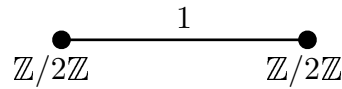
und  $G = \text{Aut}(\Gamma)$  wird erzeugt von der Translation  $t$  um 1 und der Spiegelung  $s$  an der 0. Die Aktion von  $G$  auf  $\Gamma$  ist nicht inversionsfrei.  $G$  operiert jedoch inversionsfrei auf der baryzentrischen Unterteilung



Es ist



und  $G_x = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $G_y = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $G_k = \{1\}$ . Der entsprechende Graph von Gruppen ist



Wir werden später sehen, dass  $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  gilt.

3.  $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  wird erzeugt von

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist  $\mathrm{ord}(T) = \infty$  und  $\mathrm{ord}(S) = 4$ . Die Gruppe  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  operiert auf der komplexen oberen Halbebene

$$H = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}.$$

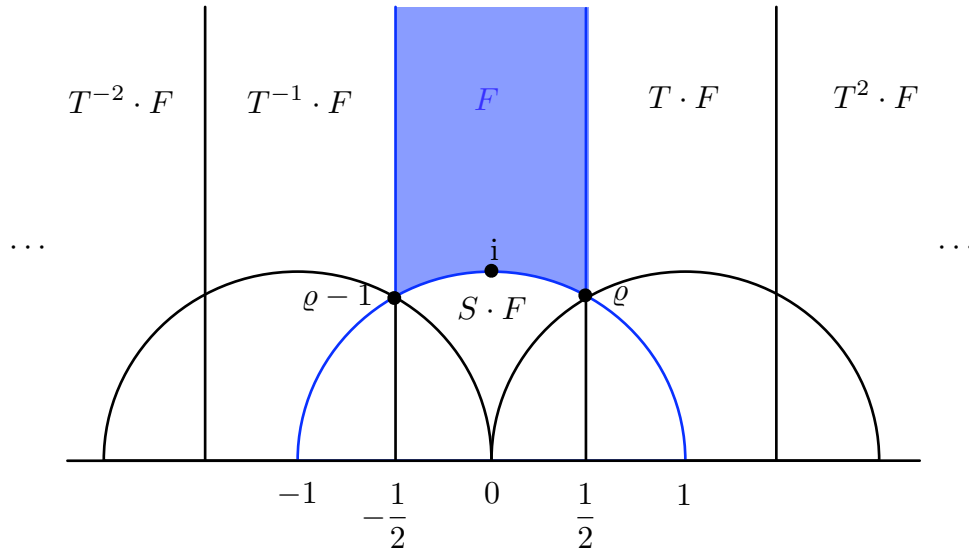
Die Aktion ist für  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  und  $z \in H$  definiert durch die **Möbiustransformation**

$$A \cdot z := \frac{az + b}{cz + d},$$

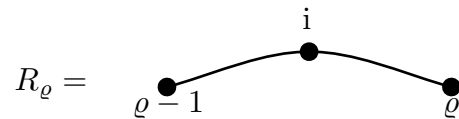
insbesondere gilt  $T \cdot z = z + 1$  und  $S \cdot z = -\frac{1}{z}$ . Wir betrachten nun zunächst den **Fundamentalebereich**

$$F = \left\{ z \in H : -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(z) \leq \frac{1}{2}, |z| \geq 1 \right\}$$

in  $H$ .



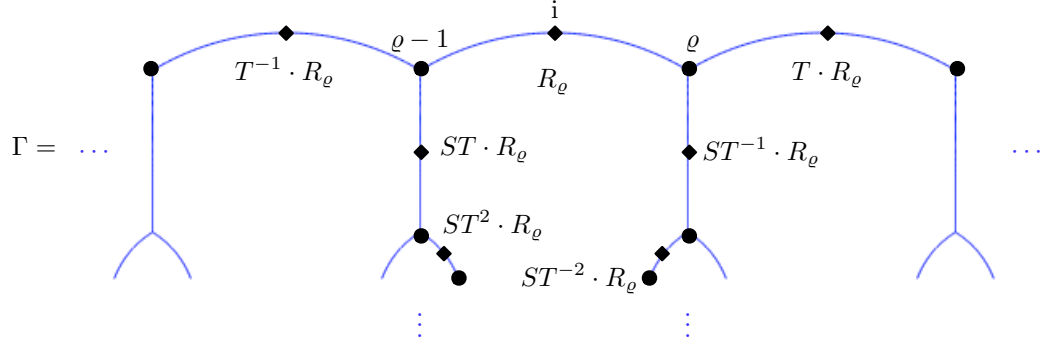
Alle  $z \in \mathbb{H}$  können durch wiederholte Aktion von  $T$  und  $S$  in den Fundamentalbereich  $F$  bewegt werden. Es bezeichne  $R_\varrho$  das Kreissegment, das von  $\varrho$  durch  $i$  nach  $\varrho - 1$  läuft:



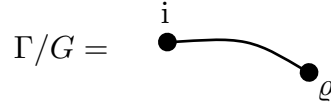
$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  operiert auf dem Baum

$$\Gamma := \bigcup_{A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} A \cdot R_\varrho.$$

Den Baum kann man durch wiederholte Operation von  $T$  und  $S$  auf  $R_\varrho$  Schritt für Schritt aufbauen.



Der Quotientengraph ist



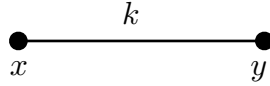
Es ist  $G_i = \langle S \rangle \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ,  $G_\varrho = \langle TS \rangle \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  und  $G_k = \langle I_2 \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Die Abbildung  $\alpha_k$  ist durch  $\alpha_k(-I_2) = S^2$  und  $\alpha_{\bar{k}}$  durch  $\alpha_{\bar{k}}(-I_2) = (TS)^3$  gegeben. Aus Teil 1 von Satz 9.2 wird folgen, dass  $\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  ist.

Mit Hilfe der hyperbolischen Geometrie lässt sich zeigen, dass  $\Gamma$  ein Baum ist:

Man fasst die Halbebene  $H$  als hyperbolischen Raum auf, in dem die Geraden (genauer: die Geodätischen) die Halbkreise und Halbgeraden sind, die senkrecht auf der reellen Achse stehen (es gibt zwar zu je zwei Punkten genau eine Gerade durch diese Punkte, aber das Parallelenaxiom ist nicht erfüllt). Versieht man  $H$  mit der hyperbolischen Metrik  $ds^2 = \frac{1}{y}(dx^2 + dy^2)$ , so ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten durch eine solche Gerade gegeben. Die Elemente von  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  (also insbesondere  $S$  und  $T$ ) sind Isometrien bzgl. dieser Metrik. Mit Hilfe der Metrik kann man nun zeigen, dass Abstände beim Entlangwandern von  $\Gamma$  immer größer werden und es somit keine Kreise geben kann.

## 9 Segmente und Amalgame

Wir schreiben im Folgenden  $(x, y; k)$  für ein Segment der Form



**Definition und Bemerkung 9.1** Es sei  $\varrho : G \rightarrow \text{Aut}(\Gamma)$  eine inversionsfreie Aktion von  $G$  auf  $\Gamma$ .

1. Ein Teilgraph  $T$  von  $\Gamma$  heißt **Fundamentalebereich** von  $\Gamma$  für  $\varrho$ , wenn die Einschränkung  $p|_T : T \rightarrow \Gamma/G$  der kanonischen Projektion ein Isomorphismus ist.
2. Ist  $\Gamma$  ein Baum, so existiert ein Fundamentalebereich genau dann, wenn  $\Gamma/G$  ein Baum ist.

BEWEIS VON 2.: „ $\Rightarrow$ “: Ist  $\Gamma$  zusammenhängend, so ist auch  $\Gamma/G$  zusammenhängend. Es folgt, dass  $T$  zusammenhängend und somit ein Teilbaum in  $\Gamma$  ist. Aus  $T \cong \Gamma/G$  folgt, dass  $\Gamma/G$  ein Baum ist.

„ $\Leftarrow$ “: Jeder Teilbaum von  $\Gamma/G$  lässt sich nach Bemerkung 4.4 liften. ■

**Satz 9.2** Es sei  $\Gamma = (x, y; k)$  ein Segment und  $\mathcal{G} = (\Gamma, G_x, G_y, G_k, \alpha_k, \alpha_k^-)$  ein Graph von Gruppen über  $\Gamma$ . Weiter sei  $G := G_x *_{G_k} G_y$ .

1. Es sei  $H$  eine Gruppe,  $\Xi$  ein Graph,  $\varrho : H \rightarrow \text{Aut}(\Xi)$  eine inversionsfreie Aktion mit  $\Xi/H \cong \mathcal{G}$  und das Segment  $T = (p, q; l)$  ein Fundamentalebereich von  $\Xi$ . Die Abbildungen  $G_x \xrightarrow{\sim} H_p \hookrightarrow H$  und  $G_y \xrightarrow{\sim} H_q \hookrightarrow H$  induzieren einen Homomorphismus  $\varphi : G \rightarrow H$ . Es ist  $\Xi$  genau dann ein Baum, wenn  $\varphi$  ein Isomorphismus ist.
2. Es gibt einen (bis auf Isomorphie eindeutigen) Baum  $\Xi$  und eine Aktion  $\varrho : G \rightarrow \text{Aut}(\Xi)$ , so dass  $\Xi/G \cong \mathcal{G}$  ist.

BEWEIS:

1. Dieser Teil des Satzes folgt sofort, wenn die folgenden Teilbehauptungen bewiesen sind.
  - (a) Zeige:  $\Xi$  ist zusammenhängend genau dann, wenn  $\varphi$  surjektiv ist, was genau dann der Fall ist, wenn  $H$  von  $H_p$  und  $H_q$  erzeugt wird. Es sei  $\Xi'$  die Zusammenhangskomponente von  $\Xi$ , die  $T$  enthält.

Weiter sei  $H' = \{h \in H : h\Xi' = \Xi'\}$ . Es gilt:  $\Xi$  ist zusammenhängend genau dann, wenn  $\Xi' = \Xi$ , was genau dann der Fall ist, wenn  $H' = H$  ist. Es genügt also zu zeigen:

$$H' = H'' := \langle H_p \cup H_q \rangle.$$

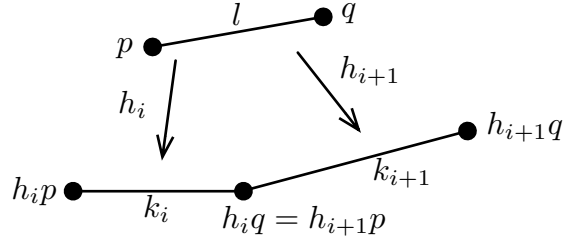
„ $\supseteq$ “: Sei  $h \in H_p \cup H_q$ . Dann ist  $hT \cap T \neq \emptyset$  und somit  $hT \cup T$  zusammenhängend. Es folgt  $h\Xi' = \Xi'$ , also  $h \in H'$ .

„ $\subseteq$ “: Es ist  $H''T \cup (H \setminus H'')T = \Xi$ . Außerdem ist  $H''T \cap (H \setminus H'')T = \emptyset$ , denn wäre  $h''p = hp$  mit  $h'' \in H''$  und  $h \in H \setminus H''$  wäre  $h^{-1}h''p = p$ , also  $h^{-1}h'' \in H_p \leq H''$  und folglich  $h \in H''$ , im Widerspruch zur Wahl von  $h$ . Somit ist  $\Xi' \subset H''T$ . Für  $h \in H'$  ist  $hT \subseteq h\Xi' = \Xi' \subseteq H''T$ , also  $h \in H''$ .

(b) Zeige:  $\Xi$  enthält keine Kreise genau dann, wenn  $\varphi$  injektiv ist.

Es sei  $w = (k_1, \dots, k_n)$  ein stachelfreier Weg in  $\Xi$ . Dann gilt:

- Für alle  $i = 1, \dots, n$  gibt es ein  $h_i \in H$  mit  $k_i = h_i \cdot l_i$ , wobei  $l_i = l$  oder  $l_i = \bar{l}$ .
- Es ist  $l_{i+1} = \bar{l}_i$ .
- Es ist  $h_{i+1} = h_i g_i$  für ein  $g_i \in H_{t(l_i)} = H_{i(l_{i+1})}$ .



Es ist nämlich (mit  $p_i := t(l_i)$ )

$$\begin{aligned} h_{i+1}p_i &= h_{i+1}i(l_{i+1}) = i(h_{i+1}l_{i+1}) = i(k_{i+1}) \\ &= t(k_i) = t(h_i l_i) = h_i t(l_i) \\ &= h_i p_i, \end{aligned}$$

also  $h_i^{-1}h_{i+1} \in H_{p_i}$ .

- Da  $w$  stachelfrei ist, gilt  $g_i \notin H_l$ .
- $w$  ist geschlossen genau dann, wenn  $t(k_n) = i(k_1)$ , was genau dann der Fall ist, wenn

$$h_1 i(l_1) = h_n i(l_1) = h_1 g_1 \cdots g_{n-1} i(l_1)$$



ist. Es ist  $g_1 \cdots g_{n-1} \in H_{i(l_1)} \subset H_p \cup H_q$ . Aber  $g_1 \cdots g_{n-1}$  liegt als Element von  $G = G_x *_{G_k} G_y \cong H_p *_{H_l} H_q$  nicht in  $H_p$  oder  $H_q$ . Es folgt, dass  $\Xi$  genau dann einen Kreis enthält, wenn  $\varphi$  nicht injektiv ist.

2. Definiere  $\Xi$  durch

$$\begin{aligned} E(\Xi) &:= G/G_x \cup G/G_y, \\ K(\Xi) &:= G/G_k \cup \overline{G/G_k}, \\ i(gG_k) &:= gG_x, \quad t(gG_k) := gG_y. \end{aligned}$$

$\Xi$  ist ein Graph.  $G$  operiert durch Linksmultiplikation auf  $\Xi$ , und das Segment  $(1 \cdot G_x, 1 \cdot G_y; 1 \cdot G_k)$  ist ein Fundamentalbereich dieser Aktion. Nach Teil 1 ist  $\Xi$  ein Baum. ■

**Folgerung 9.3** Aus Teil 1 von Satz 9.2 folgt

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}.$$

**Folgerung 9.4** Es sei  $G = G_1 *_A G_2$  und  $H \leq G$  eine Untergruppe mit

$$gHg^{-1} \cap G_1 = \{1\} = gHg^{-1} \cap G_2$$

für alle  $g \in G$ . Dann ist  $H$  eine freie Gruppe.

BEWEIS: Es sei  $\Xi$  der in Teil 2 von Satz 9.2 definierte Baum. Jede Fixgruppe einer Ecke von  $\Xi$  ist zu  $G_1$  oder  $G_2$  konjugiert. Nach Voraussetzung operiert  $H$  nun fixpunktfrei auf  $\Xi$ , also frei. Aus Satz 5.4 folgt nun, dass  $H$  frei ist. ■

Speziell für den kanonischen Homomorphismus  $\varrho : G_1 *_A G_2 \rightarrow G_1 \times G_2$  aus Bemerkung 7.8 ist  $\mathrm{Kern}(\varrho)$  eine freie Gruppe, denn er wird (als Normalteiler) von den  $aba^{-1}b^{-1}$  mit  $a \in G_1$ ,  $b \in G_2$  erzeugt. Man stellt nun fest, dass  $aba^{-1}b^{-1}$  keine Fixpunkte hat.

**Folgerung 9.5** Es sei  $G = G_1 *_A G_2$  und  $H \leq G$  eine beschränkte Untergruppe (d.h.  $\ell(h) \leq \text{const.}$  für alle  $h \in H$ ). Dann ist  $H$  konjugiert zu einer Untergruppe von  $G_1$  oder  $G_2$ . Dies gilt speziell für eine endliche Untergruppe  $H$ .

BEWEIS: Es sei  $\Xi$  der zu  $G$  konstruierte Baum aus Satz 9.2(2) und  $T = (x, y; k)$  ein Fundamentalbereich in  $\Xi$ . Äquivalent zur Behauptung ist, dass es eine Ecke  $p \in K(\Xi)$  gibt mit  $H \leq G_p$ . Dies soll im Folgenden gezeigt werden.

Zuerst stellen wir fest, dass  $Hx$  eine beschränkte Teilmenge bzgl. der Metrik auf  $\Xi$  ist. Dies zeigen wir mit Induktion über  $\ell(h)$ :

$\ell(h) = 0$ : Es ist  $h \in A$  und insbesondere  $hx = x$ .

$\ell(h) = 1$ : Aus  $h \in G_1 \cup G_2$  folgt  $d(hx, x) \leq 2$ .

$\ell(h) = n$ : Es ist  $h = as_1 \cdots s_n$ . Daraus folgt  $d(hx, s_2 \cdots s_n x) \leq 2$  und somit  $d(hx, x) \leq 2n$ .

Sei  $Z$  der von  $Hx$  aufgespannte Teilbaum von  $\Xi$ .  $H$  operiert auf  $Z$  (denn  $hZ$  ist der von  $hHx = Hx$  aufgespannte Teilbaum). Aus Proposition 2.5(3) folgt nun, dass es eine Ecke  $p \in E(Z)$  gibt mit  $H \leq G_p$  (oder eine geometrische Kante  $\{l, \bar{l}\}$  mit  $hl \in \{l, \bar{l}\}$  für alle  $h \in H$ . Da  $G$  inversionsfrei operiert, muss  $hl = l$  gelten und folglich  $H \leq G_l \leq G_{i(l)}$ . ■

## 10 Bäume von Gruppen

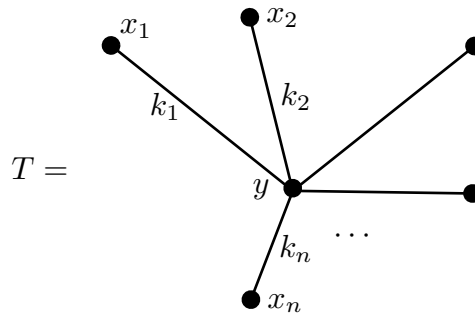
**Definition 10.1** Es sei  $T$  ein endlicher Baum und  $\mathcal{G} = (T, G_x, G_k, \alpha_k)$  ein Graph von Gruppen über  $T$  (ein „Baum von Gruppen“). Definiere induktiv eine Gruppe  $G_T$  wie folgt: Es sei  $x \in \text{EP}(\Gamma)$  ein Endpunkt,  $k \in K(T)$  die Kante mit  $i(k) = x$ . Setze  $T' := T - x$ . Dann sei

$$G_T := G_{T'} *_{G_k} G_x.$$

$G_T$  heißt **Fundamentalgruppe** von  $\mathcal{G}$ .

**Beispiel 10.2** Fundamentalgruppen.

1. Es sei  $T = \bullet$  mit  $G = G_x$ . Dann ist  $G_T = G_x$ .
2. Es sei  $T$  das Segment  $(x, y; k)$ . Dann ist  $G_T = G_x *_{G_k} G_y$ .
3. Es sei



und  $\mathcal{G}$  enthält Gruppen  $G_{x_i}$ ,  $G_y = A$ ,  $G_{k_i} = A$  und Morphismen  $\alpha_{k_i} : A \rightarrow G_i$ . Dann ist  $G_T = *_A G_i$ .

**Bemerkung 10.3**  $G_T$  ist wohldefiniert (hängt also nicht von der Wahl von  $x$  ab).

BEWEISSKIZZE: Fasse  $\mathcal{G}$  auf als „induktives System“ von Gruppen  $G_x$ ,  $G_k$  und Homomorphismenmengen  $\text{Hom}(G_x, G_y) = \emptyset$ ,  $\text{Hom}(G_x, G_k) = \emptyset$ ,  $\text{Hom}(G_k, G_{i(k)}) = \{\alpha_k\}$ .

Dann gibt es einen induktiven Limes  $G$  und Homomorphismen  $f_x : G_x \rightarrow G$ ,  $f_k : G_k \rightarrow G$  mit  $f_{i(k)} \circ \alpha_k = f_k$  für alle  $k \in K(T)$ , so dass die folgende UAE erfüllt ist: Zu jeder verträglichen Familie von Homomorphismen  $h_x : G_x \rightarrow H$ ,  $h_k : G_k \rightarrow H$  gibt es genau einen Homomorphismus  $h : G \rightarrow H$  mit  $h_x = h \circ f_x$  und  $h_k = h \circ f_k$ . Dieser Limes ist  $G_T$ . ■

**Folgerung 10.4** Auch für einen unendlichen Baum  $T$  kann man  $G_T$  definieren.

**Proposition 10.5** Es sei  $\mathcal{G} = (T, G_x, G_k, \alpha_k)$  ein Baum von Gruppen. Dann gibt es einen (bis auf Isomorphie eindeutigen) Baum  $\Xi$  und eine Aktion von  $G_T$  auf  $\Xi$ , so dass gilt:

1.  $T$  ist Fundamentalbereich für  $\Xi/G_T$ .
2. Für jedes  $x \in E(T)$  ist  $(G_T)_x = G_x$  und für jedes  $k \in K(T)$  ist  $(G_T)_k = G_k$ .

Oder in anderen Worten:  $\Xi/G_T \cong \mathcal{G}$  als Graph von Gruppen.

BEWEIS: Zur Konstruktion von  $\Xi$ :

$$E(\Xi) := \bigcup_{x \in E(T)} G_T/G_x,$$

$$K(\Xi) := \bigcup_{k \in K(T)} G_T/G_k,$$

und  $i(gk) := gi(k)$ ,  $t(gk) := gt(k)$  (man überzeuge sich, dass dies wohldefiniert ist).

Es ist noch zu zeigen, dass  $\Xi$  ein Baum ist. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass  $T$  endlich ist. Induktion über  $n := |E(T)|$ :

$n = 1$ :  $\Xi = T$ ,  $G_T = G_x$ . Es ist nichts zu zeigen.

$n = 2$ :  $T$  ist eine Segment der Form  $(x, y; k)$ . Dieser Fall wurde in Satz 9.2 betrachtet.

$n > 2$ : Es sei  $x \in \text{EP}(T)$  und  $T' := T - x$ . Dann ist  $G_T = G_{T'} *_{G_k} G_x$ . Nun sei  $\Xi' := G_{T'}T' \subset \Xi$ . Für  $T'$  erfüllt  $\Xi'$  die Voraussetzungen der Proposition. Nun folgt mit der Induktionsannahme, dass  $\Xi'$  ein Baum ist. Für  $g \in G_T$  ist

$$g\Xi' \cap \Xi' = \begin{cases} \Xi', & g \in G_{T'}, \\ \emptyset, & g \notin G_{T'}. \end{cases}$$

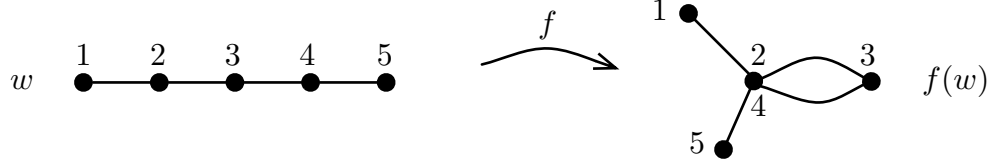
Folglich sind Teilbäume  $g\Xi'$  von  $\Xi$  disjunkt, wenn  $g$  ein Vertretersystem der Nebenklassen in  $G_T/G_{T'}$  durchläuft. Es sei  $\tilde{\Xi}$  der Graph, der aus  $\Xi$  durch Kontraktion aller  $g\Xi'$  entsteht.  $G_T$  operiert auf  $\tilde{\Xi}$  mit Fundamentalbereich  $T/T' = (T', x; k)$ . Dabei sind die Fixgruppen  $G_{T'}$ ,  $G_k$  und  $G_x$ . Nach Satz 9.2 (d.h. dem Fall  $n = 2$ ) folgt:  $\tilde{\Xi}$  ist ein Baum und damit nach Proposition 2.15 auch  $\Xi$ . ■

**Proposition 10.6** Es sei  $\varrho : G \rightarrow \text{Aut}(\Gamma)$  eine inversionsfreie Aktion, so dass  $\Gamma/G$  ein Baum ist (es gibt also einen Fundamentalbereich  $T \subset \Gamma$ ). Weiter sei  $\mathcal{G} = (T, G_x, G_k, \alpha_k)$  der Baum von Gruppen zu  $\Gamma/G$ ,  $G_T$  die Fundamentalgruppe von  $\mathcal{G}$  und  $\Xi$  der Baum zu  $\mathcal{G}$  aus Proposition 10.5. Dann gilt:

1. Der durch die Inklusionen  $G_x \hookrightarrow G$ ,  $G_k \hookrightarrow G$  induzierte Homomorphismus  $\varphi : G_T \rightarrow G$  ist genau dann surjektiv, wenn  $\Gamma$  zusammenhängend ist.
2.  $\text{id} : T \rightarrow T$  induziert einen Morphismus  $f : \Xi \rightarrow \Gamma$ , der äquivariant bzgl. der Aktionen von  $G_T$  bzw.  $G$  ist, d.h. für  $g \in G_T$  und  $x \in E(T)$  gilt  $f(gx) = \varphi(g)x$ .
3. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
  - (a)  $\Gamma$  ist ein Baum.
  - (b)  $f$  ist ein Isomorphismus.
  - (c)  $\varphi$  ist ein Isomorphismus.

BEWEIS:

1. „ $\Rightarrow$ “: Ist  $\varphi$  surjektiv, so ist nach Teil 2 auch  $f$  surjektiv. Da  $\Xi$  zusammenhängend ist, ist auch  $\Gamma$  zusammenhängend.  
 „ $\Leftarrow$ “: Dies ist ein Spezialfall ( $T = Z$ ) der folgenden Proposition 10.7.
2. Klar.
3. „(b) $\Rightarrow$ (a)“: Klar.  
 „(c) $\Rightarrow$ (b)“: Da  $G_T \cong G$ , entspricht dies der Eindeutigkeit von  $\Xi$  in Proposition 10.5.  
 „(a) $\Rightarrow$ (b)“: Für alle  $x$  und  $k$  sind  $\varphi|_{G_x}$  und  $\varphi|_{G_k}$  Isomorphismen. Daraus folgt, dass  $f$  lokal injektiv ist (d.h. die Einschränkung von  $f$  auf einen „Stern“ um  $x$  ist injektiv für jedes  $x \in E(\Xi)$ ). Wäre  $f$  nicht injektiv, so gäbe es einen „injektiven Weg“  $w$  in  $\Xi$ , so dass  $f(w)$  nicht injektiv ist. Da  $\Gamma$  ein Baum ist, muss  $f(w)$  einen Stachel haben.



Dies ist aber ein Widerspruch zur lokalen Injektivität von  $f$ . Somit muss  $f$  injektiv sein.

$f$  ist auch surjektiv, da  $\Gamma$  zusammenhängend ist und damit nach Teil 1  $\varphi$  surjektiv ist.

„(b) $\Rightarrow$ (c)“: Ist  $g \in \text{Kern}(\varphi)$ , so ist  $f(gx) = x$  für alle  $x \in E(T)$ . Da  $f$  injektiv ist, muss  $gx = x$  sein, also  $g \in G_x$  für alle  $x \in E(T)$ . Aus  $\varphi|_{G_x} = \text{id}$  folgt  $g = 1$ . Also ist  $\varphi$  injektiv und nach Teil 1 auch surjektiv.

■

**Proposition 10.7** Es sei  $\Gamma$  ein zusammenhängender Graph,  $\varrho : G \rightarrow \text{Aut}(\Gamma)$  eine inversionsfreie Aktion,  $T$  der Lift eines maximalen Teilbaums von  $\Gamma/G$ , und  $Z$  sei ein Teilgraph von  $\Gamma$  mit  $T \subset Z$ ,  $GZ = \Gamma$  derart, dass jede Kante in  $Z$  mindestens einen Eckpunkt in  $T$  hat. Für jede Kante  $k \in K_0 := K(Z) - K(T)$  mit  $i(k) \in E(T)$  sei  $g_k \in G$  mit  $g_k t(k) \in E(T)$ . Dann wird  $G$  von den  $G_x$ ,  $x \in E(T)$ , und den  $g_k$ ,  $k \in K_0$ , erzeugt.

BEWEIS: Es sei  $H$  die von den  $G_x$  und  $g_k$  erzeugte Untergruppe. Nun genügt es zu zeigen, dass  $HE(T) = E(\Gamma)$  ist (denn für  $g \in G$ ,  $x \in E(T)$  gibt es  $h \in H$  mit  $hx = gx$ , also  $g^{-1}h \in G_x \leq H$ , also  $g \in H$ ).

Es gilt  $E(Z) \subseteq HE(T)$ , denn für  $z \in E(Z) - E(T)$  gibt es  $k \in K_0$  mit  $z = t(k)$ , also  $g_k z \in E(T)$ . Also ist nur noch zu zeigen, dass  $HE(Z) = E(\Gamma)$  ist. Dazu sei  $x \in E(\Gamma)$ . Ohne Einschränkung können wir  $x = t(k)$  für eine Kante  $k \in K(\Gamma)$  mit  $i(k) \in HE(Z)$  annehmen, da  $\Gamma$  zusammenhängend ist. Außerdem können wir ohne Einschränkung  $i(k) \in E(T)$  annehmen (andernfalls ersetze  $k$  durch ein geeignetes  $h^{-1}k$ ). Nach Voraussetzung gibt es ein  $g \in G$  mit  $gk \in K(Z)$ . Zu zeigen ist nun, dass  $g$  in  $H$  liegt. Dazu unterscheiden wir zwei Fälle:

- $i(gk) \in E(T)$ : Es ist  $i(gk) = gi(k)$ ,  $T$  ist Lift eines maximalen Teilbaums und somit  $gi(k) = i(k)$ . Also ist  $g \in G_{i(k)} \leq H$ .
- $t(gk) \in E(T)$ : Dann ist  $g_k i(gk) \in E(T)$  und somit  $g_k g \in G_{i(k)} \leq H$ . Daraus folgt  $g \in H$ . ■

## 11 HNN-Erweiterungen

Wir betrachten die „Schleife von Gruppen“ zu

$$L = \begin{array}{c} \circlearrowright \\ x \quad k \end{array}$$

mit Gruppen  $G_x, G_k = A$  und Homomorphismen  $\alpha_k : A \rightarrow G_x$  und  $\alpha_{\bar{k}} : A \rightarrow G_x$ .

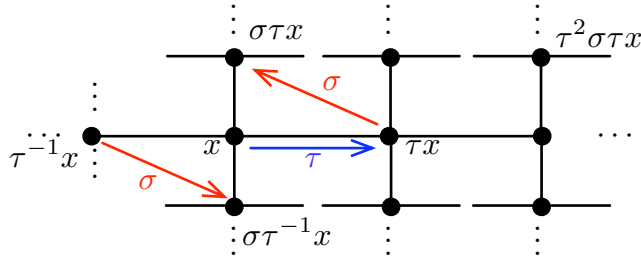
Gesucht sind im Folgenden ein Baum  $\Xi$  und eine Gruppe  $G$ , die auf  $\Xi$  operiert, so dass  $\mathcal{G}(\Xi/G) = (L, G_x, A, \alpha_k, \alpha_{\bar{k}})$  gilt.

### Beispiel 11.1

1. Es sei  $G_x = \{1\}$ . Dann ist  $\Xi$  die unendliche Kette und  $G = \mathbb{Z}$  operiert auf  $\Xi$  durch Translation.
2. Es sei  $G_x = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{1, \sigma\}$  und  $A = G_x$ ,  $\alpha_k = \alpha_{\bar{k}} = \text{id}$ . Wieder ist  $\Xi$  die unendliche Kette. Die Gruppe  $G$  wird erzeugt von der Translation  $\tau$  und einem Element  $\sigma$  der Ordnung 2, dass trivial operiert. Da  $\tau\sigma\tau^{-1}$  alle Ecken fest lässt, gilt die Relation  $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma$ , also

$$G = \langle \tau, \sigma \mid \tau\sigma = \sigma\tau, \sigma^2 = 1 \rangle.$$

3. Es sei  $G_x = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{1, \sigma\}$  und  $A = \{1\}$ . Der Baum  $\Xi$  hat die Form



Der Baum  $\Xi$  ist der Cayley-Graph der freien Gruppe  $F_2$ . Wieder wird  $G$  von Elementen  $\tau$  und  $\sigma$  erzeugt, wobei  $\tau$  durch Translation operiert und  $\sigma$  die Ecke  $x$  festlässt, aber  $\tau x$  bewegen muss (wegen der Inversionsfreiheit aber nicht auf  $\tau^{-1}x$ ). Es ist  $\sigma^2 = 1$ . Es gilt

$$G = \langle \tau \rangle * \langle \sigma \rangle = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Auf der vertikalen Achse operiert  $\sigma\tau\sigma$  durch Translation. Die von  $\tau$  und  $\sigma\tau\sigma$  erzeugte Untergruppe ist  $F_2$ , denn sie operiert frei auf  $\Xi$ .

**Proposition 11.2** Es seien  $A$  und  $G$  Gruppen und  $\alpha_1, \alpha_2 : A \rightarrow G$  injektive Homomorphismen. Dann gibt es eine Gruppe  $H$  mit  $G \leq H$  und ein Element  $t \in H$ , so dass für alle  $a \in A$  gilt:

$$\alpha_2(a) = t\alpha_1(a)t^{-1}.$$

BEWEIS: Es sei  $G'$  der induktive Limes des System  $(G_n, A_n, \alpha_{1,n}, \alpha_{2,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ , wobei  $G_n := G$ ,  $A_n := A$ ,  $\alpha_{1,n} := \alpha_1 : A_n \rightarrow G_{n-1}$  und  $\alpha_{2,n} := \alpha_2 : A_n \rightarrow G_n$  sei. Weiter seien  $\iota_n : G_n \hookrightarrow G'$  die kanonischen Einbettungen.

$$G' = \cdots \xleftarrow{\alpha_1} A \xrightarrow{\alpha_2} G_{-1} \xleftarrow{\alpha_1} A \xrightarrow{\alpha_2} G_0 \xleftarrow{\alpha_1} A \xrightarrow{\alpha_2} G_1 \xleftarrow{\alpha_1} A \xrightarrow{\alpha_2} \cdots$$

Weiter sei  $u_n$  die Abbildung  $G_{n-1} \xrightarrow{\text{id}} G_n \xrightarrow{\iota_n} G'$ . Dann ist  $u_n(\alpha_{1,n}(a)) = \iota_n(\alpha_{2,n}(a))$  für  $a \in A_n$ . Wegen der UAE von  $G'$  gibt es einen Automorphismus  $u : G' \rightarrow G'$  mit  $u|_{G_{n-1}} = u_n$ . Sei  $t$  das Element, dass auf  $G'$  durch  $u$  operiert, dann ist  $\mathbb{Z} = \langle t \rangle$ . Setze

$$H := G' \rtimes_u \mathbb{Z},$$

d.h. als Menge ist  $H = G' \times \mathbb{Z}$  und die Verknüpfung auf  $H$  ist durch

$$(g_1, n_1) \cdot (g_2, n_2) := (g_1 u^{n_1}(g_2), n_1 + n_2)$$

gegeben. Für  $g \in G'$  ist dann

$$tgt^{-1} = (1, 1)(g, 0)(1, -1) = (u(g), 1)(1, -1) = (u(g), 0).$$

Insbesondere gilt für  $a \in A$ :  $t\alpha_1(a)t^{-1} = u(\alpha_1(a)) = \alpha_2(a)$ . ■

**Definition und Bemerkung 11.3** Die Gruppe  $H$ , die im Beweis zur Proposition 11.2 konstruiert wurde, ist universell bzgl. der Eigenschaften in Proposition 11.2. Sie heißt **HNN-Erweiterung**

$$H = \text{HNN}(G, A, \alpha_1, \alpha_2)$$

von  $G$  bzgl.  $A, \alpha_1, \alpha_2$  (benannt nach Graham Higman, Bernhard H. Neumann und Hanna Neumann).

**Proposition 11.4** Es sei  $\mathcal{G} = (L, G, A, \alpha_k, \alpha_{\bar{k}})$  eine Schleife von Gruppen. Dann gibt es einen (bis auf Isomorphie eindeutigen) Baum  $\Xi$  und eine Aktion von  $H = \text{HNN}(G, A, \alpha_k, \alpha_{\bar{k}})$  auf  $\Xi$ , so dass  $\mathcal{G}(\Xi/H) \cong \mathcal{G}$ . Die Gruppe  $H$  heißt **Fundamentalgruppe** von  $\mathcal{G}$ .

BEWEIS: Es sei  $\Xi$  der Graph mit

$$\begin{aligned} E(\Xi) &= H/G, \\ K(\Xi) &= H/A \cup \overline{H/A}, \end{aligned}$$

wobei  $G$  als Untergruppe von  $G' \leq H$  mit  $G_0$  identifiziert wird, entsprechend  $A$  mit  $A_1$ . Es ist  $i(hA) = hG$  und  $t(hA) = htG$ . Die Gruppe  $H$  operiert durch Linksmultiplikation auf  $\Xi$ . Es ist  $\mathcal{G}(\Xi/H) = L$  mit  $x = 1 \cdot G$  und  $k = 1 \cdot A$ . Dann ist  $G_x = G$ ,  $G_k = A$ ,  $\alpha_k = \alpha_1$  und  $\alpha_{\bar{k}} = \alpha_2$ .

Zu zeigen bleibt, dass  $\Xi$  ein Baum ist:  $G' \trianglelefteq H$  operiert auf  $\Xi$  mit Quotientengraph  $\Xi/G'$  mit

$$\begin{aligned} E(\Xi/G') &= (H/G)/G' \underset{G \leq G'}{=} H/G' \cong \mathbb{Z}, \\ K(\Xi/G') &= H/G' \cup \overline{H/G'}. \end{aligned}$$

Also ist  $\Xi/G'$  eine unendliche Kette mit Fixgruppen  $G_n \cong G$  bzw.  $A_n \cong A$ . Auf  $\Xi/G'$  operiert  $H/G'$  durch Translation. Nach dem Beweis von Proposition 11.2 ist  $G'$  Fundamentalgruppe von  $\Xi/G'$ . Nun ist  $\Xi$  nach Proposition 10.6 ein Baum. ■

## 12 Fundamentalgruppe eines Graphen von Gruppen

**Definition und Bemerkung 12.1** Es sei  $\mathcal{G} = (\Gamma, G_x, G_k, \alpha_k, \alpha_{\bar{k}})$  ein Graph von Gruppen und  $T$  ein maximaler Teilbaum von  $\Gamma$ . Weiter sei  $\pi_1(\mathcal{G}, T)$  die Gruppe, die erzeugt wird von den  $G_x$ ,  $x \in E(\Gamma)$ , und Elementen  $g_k$ ,  $k \in K(\Gamma) \setminus K(T)$ , mit den Relationen

1.  $g_{\bar{k}} = g_k^{-1}$  für alle  $k \in K(\Gamma) \setminus K(T)$ .
2.  $\alpha_k(a) = \alpha_{\bar{k}}(a)$  für alle  $k \in K(T)$  und  $a \in G_k$ .
3.  $g_k \alpha_{\bar{k}}(a) g_k^{-1} = \alpha_k(a)$  für alle  $k \in K(\Gamma) \setminus K(T)$  und  $a \in G_k$ .

$\pi_1(\mathcal{G}, T)$  heißt **Fundamentalgruppe** von  $\mathcal{G}$  (bzgl.  $T$ ).

**Beispiel 12.2** Fundamentalgruppen.

1. Ist  $\Gamma = T$ , so ist

$$\pi_1(\mathcal{G}, T) = G_T$$

(vgl. Abschnitt 10).



2. Ist  $\Gamma = L$  (aus Abschnitt 11), so ist  $T = \{x\}$  und

$$\pi_1(\mathcal{G}, \{x\}) = \text{HNN}(G, A, \alpha_k, \alpha_{\bar{k}}).$$

### Satz 12.3

1. Es sei  $\mathcal{G} = (\Gamma, G_x, G_k, \alpha_k, \alpha_{\bar{k}})$  ein Graph von Gruppen. Dann gibt es einen (bis auf Isomorphie eindeutigen) Baum  $\Xi$  und eine Aktion  $\varrho$  von  $G = \pi_1(\mathcal{G}, T)$  auf  $\Xi$ , so dass  $\mathcal{G}(\Xi/G) = \mathcal{G}$  (dabei sei  $T$  ein beliebiger maximaler Teilbaum von  $\Gamma$ ). Das Paar  $(\Xi, \varrho)$  heißt **universelle Überlagerung** von  $\mathcal{G}$ .
2. Es sei  $\Xi$  ein Baum und  $G$  eine Gruppe, die inversionsfrei auf  $\Xi$  operiert. Dann ist  $G \cong \pi_1(\mathcal{G}(\Xi/G), T)$  (bzgl. eines beliebigen maximalen Teilbaums  $T$  von  $\Xi/G$ ).

Bevor wir diesen Satz beweisen, soll zunächst die (Un-)Abhängigkeit der Fundamentalgruppe vom Baum  $T$  geklärt werden. Dies wird sich auch im Beweis des Satzes als hilfreich erweisen. Dabei verwenden wir durchgehend die Bezeichnungen aus Definition 12.1.

**Definition 12.4** Für  $\mathcal{G}$  sei  $F(\mathcal{G})$  die Gruppe, die erzeugt wird von  $G_x$ ,  $x \in E(\Gamma)$ , und Elementen  $g_k$ ,  $k \in K(\Gamma)$ , mit den Relationen

1.  $g_{\bar{k}} = g_k^{-1}$
2.  $g_k \alpha_{\bar{k}}(a) g_k^{-1} = \alpha_k(a)$

für alle  $k \in K(\Gamma)$  und  $a \in G_k$ .

**Bemerkung 12.5** Ist  $T$  ein maximaler Teilbaum von  $\Gamma$ , so induziert  $\text{id}_x : G_x \rightarrow G_x$ ,  $g_k \mapsto \begin{cases} 1, & k \in K(T) \\ g_k, & k \notin K(T) \end{cases}$ , einen surjektiven Homomorphismus  $p : F(\mathcal{G}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{G}, T)$ . Der Kern von  $p$  ist der Normalteiler, der von den  $g_k$ ,  $k \in K(T)$ , erzeugt wird.

### Definition 12.6

1. Es sei  $w = (k_1, \dots, k_n)$  ein Weg in  $\Gamma$ ,  $x_0 := i(k_1)$ ,  $x_i := t(k_i) (= i(k_{i+1}))$  für  $i = 1, \dots, n$ . Ein Element  $g \in F(\mathcal{G})$  heißt **vom Typ  $w$** , wenn es  $h_i \in G_{x_i}$  (für  $i = 0, \dots, n$ ) gibt mit

$$g = h_0 g_{k_1} h_1 g_{k_2} \cdots g_{k_n} h_n.$$

2. Setze

$$\pi_1(\mathcal{G}, x_0) := \{g \in F(\mathcal{G}) : g \text{ ist vom Typ } w \text{ für einen Weg } w \text{ mit } i(w) = x_0 = t(w)\}.$$

**Beispiel 12.7** Sind alle  $G_x = \{1\}$ , so ist  $\pi_1(\Gamma, x_0)$  die Fundamentalgruppe wie in Abschnitt 6 (Stacheln ergeben  $g_k g_{\bar{k}} = 1$ ).

**Bemerkung 12.8** Die Abbildung

$$\beta : \pi_1(\mathcal{G}, x_0) \rightarrow \pi_1(\Gamma, x_0), \quad h_0 g_{k_1} h_1 g_{k_2} \cdots g_{k_n} h_n \mapsto g_{k_1} g_{k_2} \cdots g_{k_n}$$

ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Kern( $\beta$ ) ist der von den  $G_x$  erzeugte Normalteiler.

**Bemerkung 12.9** Es sei  $\mathcal{G}$  ein Graph von Gruppen,  $x_0 \in E(\Gamma)$  und  $T \subset \Gamma$  ein maximaler Teilbaum. Dann ist

$$p|_{\pi_1(\mathcal{G}, x_0)} : \pi_1(\mathcal{G}, x_0) \rightarrow \pi_1(\mathcal{G}, T)$$

ein Isomorphismus.

BEWEIS: Für jedes  $x \in E(T) = E(\Gamma)$  sei  $w_x = (k_1, \dots, k_n)$  der eindeutig bestimmte stachelfreie Weg in  $T$  von  $x_0$  nach  $x$  und  $\gamma_x := g_{k_1} \cdots g_{k_n} \in F(\mathcal{G})$ . Definiere die Abbildung  $f : \pi_1(\mathcal{G}, T) \rightarrow F(\mathcal{G})$  durch

$$\begin{aligned} f(h) &:= \gamma_x h \gamma_x^{-1} \quad \text{für } h \in G_x, \\ f(g_k) &:= \gamma_{i(k)} g_k \gamma_{t(k)}^{-1} \quad \text{für } g_k \text{ mit } k \in K(\Gamma) \setminus K(T). \end{aligned}$$

Der durch  $f$  gegebene Homomorphismus respektiert die Relationen in  $F(\mathcal{G})$ :

1.  $f(g_{\bar{k}}) = \gamma_{i(\bar{k})} g_{\bar{k}} \gamma_{t(\bar{k})}^{-1} = \gamma_{t(k)} g_k^{-1} \gamma_{i(k)}^{-1} = (\gamma_{i(k)} g_k \gamma_{t(k)}^{-1})^{-1} = f(g_k)^{-1}$ .
2. Für  $k \in K(T)$  ist  $\gamma_{t(k)} = \gamma_{i(k)} g_k$ . Für  $a \in G_k$  ist dann

$$\begin{aligned} f(\alpha_k(a)) &= \gamma_{i(k)} \alpha_k(a) \gamma_{i(k)}^{-1}, \\ f(\alpha_{\bar{k}}(a)) &= \gamma_{i(\bar{k})} \alpha_{\bar{k}}(a) \gamma_{i(\bar{k})}^{-1} \\ &= \gamma_{i(k)} \underbrace{g_k \alpha_{\bar{k}}(a) g_k^{-1}}_{=\alpha_k(a)} \gamma_{i(k)}^{-1} \\ &= f(\alpha_k(a)). \end{aligned}$$

3. Für  $k \in K(\Gamma) \setminus K(T)$  ist

$$\begin{aligned} f(\alpha_k(a)) &= \gamma_{i(k)} \alpha_k(a) \gamma_{i(k)}^{-1}, \\ f(g_k \alpha_{\bar{k}}(a) g_k^{-1}) &= (\gamma_{i(k)} g_k \gamma_{t(k)}^{-1}) (\gamma_{i(\bar{k})} \alpha_{\bar{k}}(a) \gamma_{i(\bar{k})}^{-1}) (\gamma_{t(k)} g_k^{-1} \gamma_{i(k)}^{-1}) \\ &= \gamma_{i(k)} g_k \alpha_{\bar{k}}(a) g_k^{-1} \gamma_{i(k)}^{-1} \\ &= \gamma_{i(k)} \alpha_k(a) \gamma_{i(k)}^{-1}. \end{aligned}$$

Also definiert  $f$  einen Homomorphismus, dessen Bild in  $\pi_1(\mathcal{G}, x_0)$  liegt. Dieser Homomorphismus ist surjektiv:

Es ist  $p(\gamma_x) = 1$  für alle  $x \in E(\Gamma)$  und  $p \circ f = \text{id}$ . Sei  $g = h_0 g_{k_1} h_1 g_{k_2} \cdots g_{k_n} h_n \in \pi_1(\mathcal{G}, x_0)$ . Dann ist  $f(p(g)) = g$ . ■

**Folgerung 12.10** Für maximale Teilbäume  $T$  und  $T'$  von  $\Gamma$  ist

$$\pi_1(\mathcal{G}, T) \cong \pi_1(\mathcal{G}, T').$$

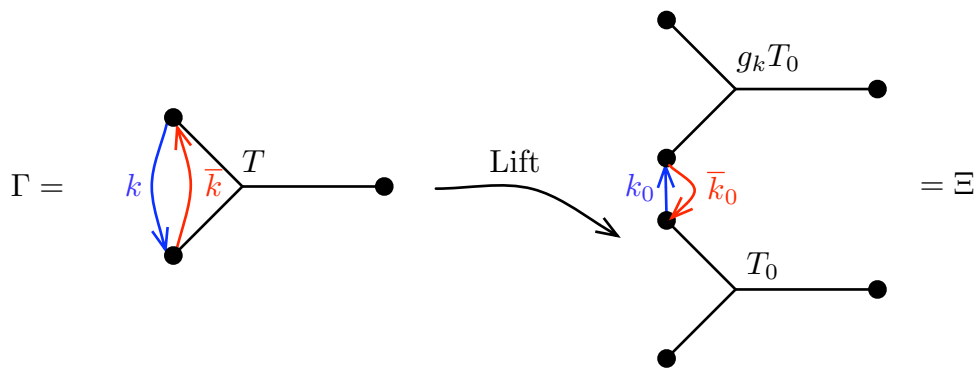
Entsprechend ist  $\pi_1(\mathcal{G}, x_0) \cong \pi_1(\mathcal{G}, x_1)$ .

Nun wenden wir uns dem Beweis des Satzes 12.3 zu. Es sei  $G := \pi_1(\mathcal{G}, T)$ . Zuerst betrachten wir die Konstruktion des Graphen  $\Xi$ :

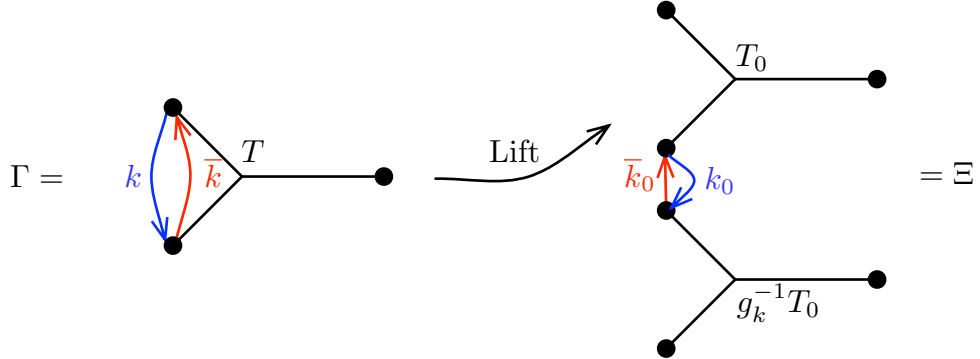
$$E(\Xi) := \bigcup_{x \in E(\Gamma)} G/G_x,$$

$$K(\Xi) := \bigcup_{k \in K(\Gamma)} G/G_k.$$

Für  $gk \in K(\Xi)$  sei  $\overline{gk} := g\bar{k}$ . Für  $k \in K(T)$  setze  $i(gk) := gi(k)$  und  $t(gk) := gt(k)$ . Für die Kanten  $k \in K(\Gamma) \setminus K(T)$  ist die Sache komplizierter, wie die folgenden Skizzen veranschaulichen:



Der Baum  $T$  wird zu einem Baum  $T_0$  in  $\Xi$  geliftet, der über den Lift der Kante  $k$  mit einer Kopie von  $T_0$  verbunden ist. Ebenso gut hätte man aber über einen Lift der Kante  $\bar{k}$  mit einer Kopie von  $T$  verbinden können:



Man muss sich also bei jeder geometrischen Kante  $\{k, \bar{k}\}$  für  $k$  oder  $\bar{k}$  entscheiden, d.h. wir müssen eine Orientierung  $K^+ := (K(\Gamma) \setminus K(T))^+$  wählen. Nun setzen wir für  $k \in K^+$ :

$$\begin{aligned} i(gk) &:= gi(k), \\ t(gk) &:= gg_k t(k) \end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned} i(g\bar{k}) &:= gg_k i(\bar{k}), \\ t(g\bar{k}) &:= gt(\bar{k}). \end{aligned}$$

Nach Konstruktion gilt nun

$$i(g\bar{k}) = gg_k i(\bar{k}) = gg_k t(k) = t(gk).$$

Diese Definitionen sind unabhängig von der Wahl eines Repräsentanten einer Nebenklasse: Ist  $h \in G_k$ , so ist  $ghk = gk$ . Also muss gelten:

$$ghi(k) = gi(k),$$

da  $h \in G_k \leq G_{i(k)}$ . Entsprechend sieht man dies für  $t(k) \in E(T)$ . Für  $t(k) \notin E(T)$  gilt:

$$ghg_k t(k) = gg_k t(k),$$

da  $g_k^{-1}hg_k = \alpha_{\bar{k}}(h) \in G_{t(k)}$ , also  $hg_k = g_k h'$  für ein geeignetes  $h' \in G_{t(k)}$ .

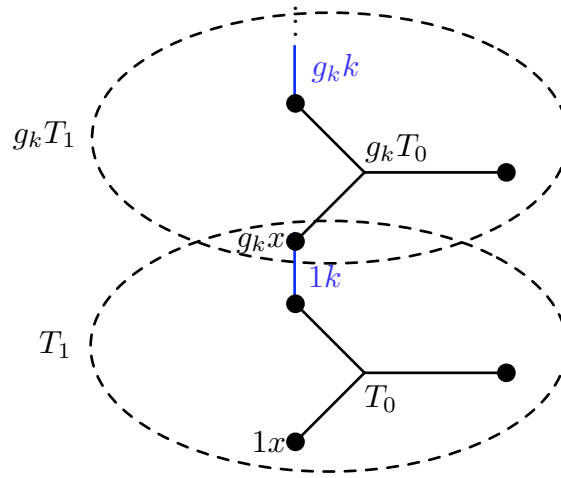
Somit haben wir den Graphen  $\Xi$  aus Teil 1 von Satz 12.3 und eine Aktion von  $G$  auf  $\Xi$ , so dass  $\mathcal{G}(\Xi/G) \cong \mathcal{G}$ . Im Folgenden wird gezeigt werden, dass  $\Xi$  wie behauptet ein Baum ist.

**Bemerkung 12.11**  $\Xi$  ist zusammenhängend.

BEWEIS: Es sei  $T_0 \subset \Xi$  ein Lift von  $T$  (vgl. die Skizzen oben), d.h.

$$\begin{aligned} E(T_0) &= \{1x : x \in E(\Gamma) = E(T)\}, \\ K(T_0) &= \{1k : k \in K(T)\}. \end{aligned}$$

Weiter sei  $T_1$  der kleinste Teilgraph von  $\Xi$ , der  $T_0$  enthält und alle Kanten  $1k$  sowie  $1\bar{k}$  für  $k \in K^+$ .



$T_1$  ist zusammenhängend:  $i(1k) = i(k) \in E(T_0)$ . Weiter gilt  $GT_1 = \Xi$ . Die Menge

$$S = \{g_k : k \in K^+\} \cup \bigcup_{x \in E(\Gamma)} G_x$$

erzeugt  $G$ . Sei nun  $g \in S$ . Ist  $g \in G_x$ , so ist  $1x \in T_1 \cap gT_1$ , da  $G_{1x} = G_x$ . Ist  $g = g_k$ , so ist  $t(1k) = g_k t(k) \in E(T_1 \cap g_k T_1)$ , also  $gT_1 \cap T_1 \neq \emptyset$ .

Mit Induktion über die Wortlänge in  $G$  (bzgl.  $S$ ) folgt, dass  $T_1$  zusammenhängend ist (und damit auch  $\Xi$ ). ■

### Definition 12.12

1. Eine Folge  $(h_0, g_{k_1}, \dots, g_{k_n}, h_n)$  heißt **Wort vom Typ  $w$** , wenn  $g = h_0 g_{k_1} \cdots g_{k_n} h_n$  vom Typ  $w$  ist.
2. Ein Wort heißt **reduziert**, wenn für alle Stachel, also alle  $i$  mit  $k_{i+1} = \bar{k}_i$ , gilt:  $h_i \notin \alpha_{\bar{k}_i}(G_{\bar{k}_i})$ , falls  $n \geq 1$ . (Falls  $n = 0$ , so heiße  $h_0$  reduziert, wenn  $h_0 \neq 1$ .)

**Proposition 12.13** Ist  $c = (h_0, g_{k_1}, \dots, g_{k_n}, h_n)$  ein reduziertes Wort von Typ  $w$  für  $w = (k_1, \dots, k_n)$  in  $\Gamma$ , so ist

$$g(c) = h_0 g_{k_1} \cdots g_{k_n} h_n \in F(\mathcal{G}) \setminus \{1\}.$$

Der umfangreiche Beweis dieser Proposition folgt am Ende des Abschnitts.

**Folgerung 12.14** Ist  $w$  ein geschlossener Weg in  $\Gamma$ , so ist  $p(g) \neq 1$  in  $\pi_1(\mathcal{G}, T)$  für jedes zu einem reduzierten Wort vom Typ  $w$  gehörende  $g \in F(\mathcal{G})$  (mit  $p$  aus Bemerkung 12.5).

BEWEIS: Für  $x_0 := i(w)$  gilt  $g \in \pi_1(\mathcal{G}, x_0)$ . Da  $p|_{\pi_1(\mathcal{G}, x_0)}$  injektiv ist (nach Bemerkung 12.9), folgt  $p(g) \neq 1$ , da  $g \neq 1$ . ■

Wir schließen nun den Beweis von Teil 1 von Satz 12.3 ab.

**Bemerkung 12.15**  $\Xi$  enthält keine stachelfreien geschlossenen Wege und ist somit ein Baum.

BEWEIS: Wir nehmen an, es gäbe einen stachelfreien geschlossenen Weg  $w' = (k'_1, \dots, k'_n)$  in  $\Xi$ .

Es sei  $k'_i = s_i k_i$  mit  $k_i \in K(\Gamma)$  und  $s_i \in G$ . Setze

$$\varepsilon_i := \begin{cases} 0, & k_i \in K^+ \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

Schreibe  $g_i := g_{k_i}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} t(k'_n) &= t(s_n k_n) = s_n g_n^{1-\varepsilon_n} t(k_n) \\ &= i(k'_1) = s_1 g_1^{-\varepsilon_1} i(k_1) = s_1 g_1^{-\varepsilon_1} t(k_n), \end{aligned}$$

also  $s_n g_n^{-\varepsilon_n} g_n r_n = s_1 g_1^{-\varepsilon_1}$  für ein  $r_n \in G_{i(k_1)} = G_{t(k_n)}$ . Analog:  $s_i g_i^{-\varepsilon_i} g_i r_i = s_{i+1} g_{i+1}^{-\varepsilon_{i+1}}$  für ein  $r_i \in G_{t(k_i)} = G_{i(k_{i+1})}$ . Mit  $q_i := s_i g_i^{-\varepsilon_i}$  gilt:

$$g_i r_i = q_i^{-1} q_{i+1}$$

für  $i = 1, \dots, n-1$ . Es folgt

$$g_1 r_1 g_2 r_2 \cdots g_n r_n = 1.$$

Aber  $(1, g_1, r_1, \dots, g_n, r_n)$  ist ein reduziertes Wort vom Typ  $w$  (= Bild von  $w'$  in  $\Gamma$ ). Dies ist ein Widerspruch zur Proposition 12.13. Es kann also keine stachelfreien geschlossenen Wege in  $\Xi$  geben. ■

BEWEIS VON PROPOSITION 12.13: Wir betrachten drei Fälle:

1.  $\Gamma$  ist das Segment  $(x_1, x_2; k)$  mit Gruppen  $G_1, G_2$  und  $A = G_k$ . Dann hat jeder Weg die Form

$$w = (l, \bar{l}, \dots, l(\bar{l}))$$

mit  $l \in \{k, \bar{k}\}$ . Ein reduziertes Wort von Typ  $w$  ist

$$c = (h_0, g, h_1, g^{-1}, \dots, h_n)$$

mit  $h_i \in G_1$  für gerades  $i$ ,  $h_i \in G_2$  für ungerades  $i$  und  $h_i \notin A$  für  $i \geq 1$ .

Das Bild  $g(c)$  von  $c$  in  $\pi_1(\mathcal{G})$  ist  $h_0 h_1 \cdots h_n \in G_1 *_A G_2 = \pi_1(\mathcal{G})$ . Nach Bemerkung 7.12 ist  $g(c) \neq 1$ .

2.  $\Gamma$  ist die Schleife  $L$ . Hier ist

$$w = (k^{\varepsilon_1}, k^{\varepsilon_2}, \dots, k^{\varepsilon_n})$$

mit  $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$  und  $k^{-1} := \bar{k}$ .

Ein Wort  $c = (h_0, g^{\varepsilon_1}, \dots, g^{\varepsilon_n}, h_n)$  ist reduziert, wenn  $h_i \notin \alpha_{\bar{k}_i}(A)$ , falls  $\varepsilon_{i+1} = -\varepsilon_i$ . Nach dem Beweis von Proposition 11.2 ist  $h_0 g^{\varepsilon_1} \cdots g^{\varepsilon_n} h_n \neq 1$  in  $\pi_1(\mathcal{G})$ .

3. Der allgemeine Fall für  $\Gamma$ . Hier ist die Idee, Induktion zu verwenden und den Fall für  $\Gamma$  auf ein geeignetes  $\Gamma/Y$  zurückzuführen, indem man ein Segment oder eine Schleife in  $\Gamma$  kontrahiert. Um dabei keine Information zu verlieren, wird im Graph von Gruppen ein Segment  $(G_1, G_2; A)$  ersetzt durch die Eckengruppe  $G_1 *_A G_2$ , und eine Schleife wird durch eine Eckengruppe  $\text{HNN}(G, A, \alpha_k, \alpha_{\bar{k}})$  ersetzt.

Es sei also  $Y$  ein Teilgraph von  $\Gamma$  mit genau einer geometrischen Kante  $\{k, \bar{k}\}$  (d.h.  $Y$  ist Segment oder Schleife). Weiter sei  $\mathcal{G}(Y)$  der Teilgraph von Gruppen  $(Y, G_1, G_2, A, \alpha_k, \alpha_{\bar{k}})$  bzw.  $(Y, G, A, \alpha_k, \alpha_{\bar{k}})$ , und  $G_Y = \pi_1(\mathcal{G}(Y))$ . Es sei  $\mathcal{H}$  der Graph von Gruppen  $(\Gamma/Y, G_x, G_k, \alpha_k, \alpha_{\bar{k}})$  mit

$$G_x = \begin{cases} G_x, & x \notin E(Y) \\ G_Y, & x \in E(Y) \end{cases}$$

und  $G_k, \alpha_k, \alpha_{\bar{k}}$  wie bisher.

Man überzeuge sich, dass

$$\pi_1(\mathcal{H}) \cong \pi_1(\mathcal{G})$$

gilt.

Es sei nun  $w = (k_1, \dots, k_n)$  ein Weg in  $\Gamma$  und  $w' = (k'_1, \dots, k'_m)$  das Bild von  $w$  in  $\Gamma/Y$ . Ist  $c = (h_0, g_1, \dots, g_n, h_n)$  ein Wort vom Typ  $w$  in  $\mathcal{G}$ , so wähle  $c' = (h'_0, g'_1, \dots, g'_m, h'_m)$  als zugehöriges Wort vom Typ  $w'$  in  $\mathcal{H}$ , wobei  $g'_i = g_j$  für  $k'_i = k_j$  und  $h'_i$  durch Iterieren der Vorschrift

$$h'_i = \begin{cases} h_j, & \text{falls } k'_i = k_j \text{ und } k_{i+1} \notin \{k, \bar{k}\} \ni k_i \\ h_i g_{i+1} h_{i+1}, & \text{falls } k_{i+1} = k \text{ und } k_i \notin \{k, \bar{k}\} \end{cases}$$

gegeben ist.

Wir zeigen nun, dass  $c'$  reduziert ist, wenn  $c$  reduziert ist (dann folgt die Aussage mit Induktion über  $|K(\Gamma)|$  bzw.  $|w|$ ).

Verwende Induktion über  $|w'|$ :

$|w'| = 0$ : Ist  $|w| > 0$ , so ist  $w$  ein Weg in  $Y$ , also  $g(c') = g(c) \neq 1$  nach Fall 1 oder Fall 2.

Der Fall  $|w'| > 0$  sei dem Leser als Übung überlassen. ■

## 13 Der Satz von Kurosh

### Satz 13.1 (Satz von Kurosh)

Es sei  $G = \ast_{i \in I} G_i$  ein freies Produkt von Gruppen und  $H \leq G$  eine Untergruppe. Dann ist  $H$  ein freies Produkt der Form

$$H = F \ast \ast_{i \in I, x \in X_i} H_{i,x},$$

wobei  $X_i$  ein Vertretersystem der Doppelnebenklassen  $HgG_i$  ist,  $H_{i,x} = H \cap xG_i x^{-1}$  und  $F$  eine freie Gruppe.

BEWEIS: Es sei  $\Gamma$  ein Baum mit Ecken  $x_i, i \in I$ , und  $\mathcal{G} = (\Gamma, G_i, \{1\}, \text{id}, \text{id})$  ein Graph von Gruppen auf  $\Gamma$ . Dann ist  $\pi_1(\mathcal{G}) = G$ . Nach Proposition 10.5 gibt es einen Baum  $\Xi$  und eine Aktion von  $G$  auf  $\Xi$ , so dass  $\mathcal{G}(\Xi/G) \cong \mathcal{G}$ . Die Gruppe  $H$  operiert auch auf  $\Xi$ . Nach Teil 2 von Satz 12.3 gilt  $H \cong \pi_1(\mathcal{G}(\Xi/H))$ . Alle Kantengruppen sind  $\{1\}$ . Es ist  $F = \pi_1(\Xi/H)$  die freie Gruppe über  $K(\Xi/H) \setminus K(T)$ , wobei  $T$  ein maximaler Teilbaum von  $\Xi/H$  ist. Es ist

$$E(\Xi) = \bigcup_{i \in I} G/G_i.$$

Für  $x = gG_i$  gilt:

$$H_x = H \cap G_x = H \cap gG_i g^{-1}.$$

Die Ecken von  $\Xi/H$  sind die Bahnen von  $E(\Xi)$  unter  $H$ :

$$E(\Xi/H) = \{HgG_i : g \in G/G_i, i \in I\}.$$



---

Also ist  $X_i = E(\Xi/H)$ . ■

Die Aussage bleibt richtig für  $G = *_A G_i$  und  $H \cap A = \{1\}$ .



## Teil IV

# Der Bruhat-Tits-Baum für $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$

## 14 $p$ -adische Zahlen

Es sei  $p$  eine Primzahl. Eine Zahl  $n \in \mathbb{N}$  lässt sich eindeutig schreiben als

$$n = \sum_{i=0}^k a_i p^i$$

mit  $a_i \in \{0, \dots, p-1\}$  und  $k \geq 0$ .

**Bemerkung 14.1** Wir rechnen mit Übertrag: Für  $n = \sum a_i p^i$  und  $m = \sum b_i p^i$  ist

$$\begin{aligned} m + n &= \sum c_i p^i, \\ mn &= \sum d_i p^i \end{aligned}$$

mit  $c_i = \tilde{c}_i - \varrho_i p$ ,  $d_i = \tilde{d}_i - \sigma_i p$ , wobei

$$\tilde{c}_i = a_i + b_i + \varrho_{i-1}, \quad \tilde{d}_i = \left( \sum_{l=0}^i a_l b_{i-l} \right) + \sigma_{i-1}$$

und  $\varrho_i = \begin{cases} 1, & \tilde{c}_i \geq p \\ 0, & \tilde{c}_i < p \end{cases}$ ,  $\sigma_i = \max\{s \in \mathbb{N} : sp \leq \tilde{d}_i\}$  ist.

**Definition und Bemerkung 14.2** Die Menge

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i : a_i \in \{0, \dots, p-1\} \right\}$$

wird mit  $+$  und  $\cdot$  wie in Definition 14.1 zu einem kommutativen Ring mit 1.

Er heißt **Ring der ganzen  $p$ -adischen Zahlen**.

BEWEIS: Wir zeigen, dass  $(\mathbb{Z}_p, +)$  eine Gruppe ist:

$$\begin{aligned} -\left(\sum a_i p^i\right) &= (p - a_0) + (p - a_1 - 1)p + (p - a_2 - 1)p^2 + \dots \\ &= (p - a_0) + \sum_{i=1}^{\infty} (p - a_i - 1)p^i. \end{aligned}$$

Es gibt also zu jedem Element ein additiv Inverses.

Die übrigen Ringeigenschaften sind klar. ■

### Proposition 14.3

1. Die Inklusion  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_p$  induziert eine Einbettung  $\iota : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p$ .
2.  $\mathbb{Z}_p$  ist nullteilerfrei.

BEWEIS:

1. Für  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n < 0$ , setze  $\iota(n) := -\iota(-n)$ .
2. Es seien  $a = \sum a_i p^i, b = \sum b_i p^i \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$  und

$$i_a := \min\{i : a_i \neq 0\}, \quad i_b := \min\{i : b_i \neq 0\}.$$

Für  $ab = \sum d_i p^i$  ist dann  $\tilde{d}_{i_a+i_b} = a_{i_a} b_{i_b}$  nicht durch  $p$  teilbar, da  $p$  prim ist. Folglich ist auch  $d_{i_a+i_b} = \tilde{d}_{i_a+i_b} - \sigma_i p$  nicht durch  $p$  teilbar und insbesondere  $\neq 0$ . Also ist  $ab \neq 0$ . ■

**Bemerkung 14.4** Es sei

$$\mathfrak{m}_p = \left\{ a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i \in \mathbb{Z}_p : a_0 = 0 \right\}.$$

Dann gilt:

1.  $\mathfrak{m}_p$  ist ein maximales Ideal.
2.  $\mathbb{Z}_p / \mathfrak{m}_p \cong \mathbb{Z} / p\mathbb{Z} \cong \mathbb{F}_p$ .
3.  $a \in \mathbb{Z}_p^\times$  genau dann, wenn  $a \notin \mathfrak{m}_p$ .

Insbesondere ist  $\mathfrak{m}_p$  das einzige maximale Ideal in  $\mathbb{Z}_p$ , d.h.  $\mathbb{Z}_p$  ist ein lokaler Ring (vgl. Kapitel II.4 in Lang [4]).

BEWEIS:

1. Offensichtlich ist  $\mathfrak{m}_p$  ein Ideal. Die Maximalität folgt aus Teil 2 oder 3.
2. Die Abbildung  $a = \sum a_i p^i \mapsto \bar{a}_0 \in \mathbb{Z} / p\mathbb{Z}$  ist ein surjektiver Ringhomomorphismus mit Kern  $\mathfrak{m}_p$ . Der Homomorphiesatz liefert die Behauptung.

3. Es sei  $a = \sum a_i p^i \in \mathbb{Z}_p \setminus \mathfrak{m}_p$ , also  $a_0 \neq 0$ . Gesucht ist  $b = \sum b_i p^i$  mit  $ab = 1$ . Definiere die  $b_i$  induktiv: Da  $p$  prim ist, kann man  $b_0$  so wählen, dass  $a_0 b_0 \equiv 1 \pmod p$  gilt. Hat man für  $i \geq 1$  schon  $b_0, \dots, b_{i-1}$  gefunden, wähle  $b_i$  so, dass

$$a_0 b_i + \sum_{l=1}^i a_l b_{i-l} \equiv 0 \pmod p$$

gilt. ■

### Definition und Bemerkung 14.5

1. Der Quotientenkörper

$$\mathbb{Q}_p = \text{Quot}(\mathbb{Z}_p)$$

heißt **Körper der  $p$ -adischen Zahlen**.

2. Die Inklusion  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p$  induziert eine Inklusion  $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$  (d.h.  $\text{char}(\mathbb{Q}_p) = 0$ ).
3. Jedes  $a \in \mathbb{Q}_p^\times = \mathbb{Q}_p \setminus \{0\}$  hat eine eindeutige Darstellung

$$a = \sum_{i=i_a}^{\infty} a_i p^i$$

mit  $a_i \in \{0, \dots, p-1\}$  und  $i_a \in \mathbb{Z}$  minimal, so dass  $a_{i_a} \neq 0$ .

BEWEIS VON 3.: Ist  $a = \sum a_i p^i \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ , so sei  $i_a = \min\{i : a_i \neq 0\}$ . Dann ist  $a = \sum_{i=i_a}^{\infty} a_i p^i$  die gewünschte Darstellung.

Es ist  $a = p^{i_a} u$  mit  $u = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+i_a} p^i \in \mathbb{Z}_p^\times$ . Nun sei  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_p$  mit  $a, b \in \mathbb{Z}_p$ ,  $b \neq 0$ . Schreibe  $a = p^{i_a} u$  und  $b = p^{i_b} v$  mit  $i_a, i_b \in \mathbb{N}$  und  $u, v \in \mathbb{Z}_p^\times$ . Es folgt  $\frac{a}{b} = p^{i_a - i_b} \underbrace{uv^{-1}}_{\in \mathbb{Z}_p^\times}$ , wie gewünscht. ■

### Definition und Bemerkung 14.6

1. Für  $a = \sum_{i=i_a}^{\infty} a_i p^i \in \mathbb{Q}_p^\times$  sei

$$\begin{aligned} v(a) &:= i_a, \\ |a| &:= p^{-i_a}. \end{aligned}$$

2. Ist  $a \in \mathbb{Z}$ , so ist  $v(a) = \max\{n : p^n | a\}$ .

3.  $a \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\} \Leftrightarrow v(a) \geq 0 \Leftrightarrow |a| \leq 1$ .
4. Setze  $v(0) := \infty$ ,  $|0| := 0$ .
5. Für alle  $a, b \in \mathbb{Q}_p^\times$  gilt:
  - (a)  $v(ab) = v(a) + v(b)$  bzw.  $|ab| = |a| \cdot |b|$ .
  - (b)  $v(a+b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$  bzw.  $|a+b| \leq \max\{|a|, |b|\}$ .
  - (c) Ist  $v(a) \neq v(b)$ , so ist  $v(a+b) = \min\{v(a), v(b)\}$  bzw.  $|a+b| = \max\{|a|, |b|\}$ .
  - (d)  $v(a) = v(-a)$ .
6.  $v : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow \mathbb{Z}$  heißt  **$p$ -adische Bewertung**,  $|\cdot| : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow \mathbb{R}$  heißt  **$p$ -adischer Betrag**.

### Proposition 14.7

1.  $d(x, y) := |x - y|$  ist eine Metrik auf  $\mathbb{Q}_p$ .
2. Jedes Dreieck in  $\mathbb{Q}_p$  ist gleichschenkelig, und die dritte Seite ist höchstens so lang wie einer der gleichen Schenkel.

BEWEIS:

1. Es gilt

$$\begin{aligned}
 d(x, y) = 0 &\Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y, \\
 d(y, x) &= |y - x| = |-(x - y)| = |-1| \cdot |x - y| = d(x, y) \\
 &\text{und} \\
 d(x, z) &= |x - z| = |(x - y) + (y - z)| \leq \max\{|x - y|, |y - z|\} \leq d(x, y) + d(y, z).
 \end{aligned}$$

2. Folgt aus  $|x - z| \leq \max\{|x - y|, |y - z|\}$ . ■

### Proposition 14.8

1.  $\mathbb{Q}_p$  ist vollständig.
2.  $\mathbb{Q}$  liegt dicht in  $\mathbb{Q}_p$ .

BEWEIS:

1. Es sei  $(a^{(n)})$  eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{Q}_p$ ,

$$a^{(n)} = \sum_{i=i_a(n)}^{\infty} a_i^{(n)} p^i,$$

mit  $a_i^{(n)} \in \{0, \dots, p-1\}$  und  $i_a(n) := \min\{i : a_i^{(n)} \neq 0\}$ . Es ist

$$v(a^{(n)}) = i_a(n) \text{ und } |a^{(n)}| = p^{-i_a(n)}.$$

Nun gilt

$$|a^{(n)} - a^{(m)}| = p^{-v(n,m)}$$

mit  $v(n, m) := \min\{i : a_i^{(n)} \neq a_i^{(m)}\}$ . Folglich gibt es für jedes  $i$  ein  $n_0(i)$  mit  $a_i^{(n)} = a_i^{(m)}$  für alle  $n \geq n_0(i)$ . Da  $a^{(n)}$  eine Cauchy-Folge ist, gibt es außerdem ein  $i_0$  mit  $a_i^{(n)} = 0$  für  $i < i_0$  und alle  $n$ . Dann ist

$$a = \sum_{i=i_0}^{\infty} a_i^{(n_0(i))} \in \mathbb{Q}_p$$

der Grenzwert.

2.  $\mathbb{N}$  (und damit auch  $\mathbb{Z}$ ) ist dicht in  $\mathbb{Z}_p$ , folglich ist auch  $\mathbb{Q} = \text{Quot}(\mathbb{Z})$  dicht in  $\mathbb{Q}_p = \text{Quot}(\mathbb{Z}_p)$ . ■

## 15 Der Baum für $\mathbb{Q}_p$

**Definition 15.1** Für  $a \in \mathbb{Q}_p$  und reelles  $r > 0$  sei

$$\mathbf{K}_r(a) := \{b \in \mathbb{Q}_p : |a - b| \leq r\}$$

der **Kreis** um  $a$  mit Radius  $r$ .

**Beispiel 15.2** Kreise in  $\mathbb{Q}_p$ .

1.  $\mathbf{K}_1(0) = \mathbb{Z}_p$ .
2.  $\mathbf{K}_{1/p}(0) = \mathfrak{m}_p$ .
3.  $\mathbf{K}_r(0) = \mathfrak{m}_p$  für alle  $r$  mit  $\frac{1}{p} \leq r < 1$ .
4.  $\mathbf{K}_{1/p}(a) = \{b \in \mathbb{Q}_p : |b - a| < 1\}$ , d.h. topologisch sind offene und abgeschlossene Kreise in  $\mathbb{Q}_p$  nicht zu unterscheiden.

**Bemerkung 15.3** Für Kreise  $\mathbf{K}_i = \mathbf{K}_{r_i}(a_i)$ ,  $i = 1, 2$ , gilt:

$$\mathbf{K}_1 \cap \mathbf{K}_2 = \emptyset \text{ oder } \mathbf{K}_1 \subset \mathbf{K}_2 \text{ oder } \mathbf{K}_2 \subset \mathbf{K}_1.$$

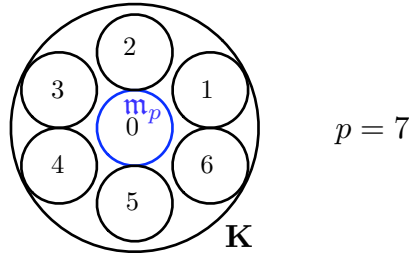
Insbesondere ist  $\mathbf{K}_r(a) = \mathbf{K}_r(b)$  für jedes  $b \in \mathbf{K}_r(a)$ , d.h. jeder Punkt in  $\mathbf{K}_r(a)$  ist Mittelpunkt.

BEWEIS: Es sei  $a \in \mathbf{K}_1 \cap \mathbf{K}_2$  und ohne Einschränkung  $r_1 \leq r_2$ . Dann gilt für  $b \in \mathbf{K}_1$ :

$$\begin{aligned} d(b, a_2) &= |b - a_1 + a_1 - a + a - a_2| \\ &\leq \max\{\underbrace{|b - a_1|}_{\leq r_1 \leq r_2}, \underbrace{|a_1 - a|}_{\leq r_1 \leq r_2}, \underbrace{|a - a_2|}_{\leq r_2}\} \\ &\leq r_2. \end{aligned}$$

Also ist  $b \in \mathbf{K}_2$  und  $\mathbf{K}_1 \subset \mathbf{K}_2$ . ■

Wir betrachten nun den Kreis  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1(0) = \mathbb{Z}_p$ . Dieser Kreis enthält offensichtlich  $\mathfrak{m}_p = \mathbf{K}_{1/p}(0)$ , also die Elemente  $a$  aus  $\mathbb{Z}_p$  mit  $a_0 = 0$ .



Für die übrigen Elemente von  $\mathbf{K}$  liegt  $a_0 \in \{1, \dots, p-1\}$ , und  $\mathbf{K}$  enthält für jedes  $a_0$  einen Kreis  $\mathbf{K}_{1/p}(i)$ , dies sind die Nebenklassen von  $\mathfrak{m}_p$ . Die folgende Bemerkung verallgemeinert dies.

**Bemerkung 15.4**

1. Zu jedem Kreis  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_r(a)$  in  $\mathbb{Q}_p$  gibt es genau  $p$  verschiedene maximale Kreise  $\mathbf{K}_0, \dots, \mathbf{K}_{p-1}$  mit  $\mathbf{K}_i \subsetneq \mathbf{K}$  für  $i = 0, \dots, p-1$ . Es ist

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{K}_{r/p}(a + ip^{\lfloor \log_p(r) \rfloor}).$$

2. Zu jedem Kreis  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_r(a)$  in  $\mathbb{Q}_p$  gibt es genau einen minimalen Kreis  $\mathbf{K}' \supsetneq \mathbf{K}$ . Es ist

$$\mathbf{K}' = \mathbf{K}_{rp}(a).$$



**Definition 15.5** Es sei  $T_p$  der Graph, der wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} E(T_p) &= \{\mathbf{K} \subset \mathbb{Q}_p : \mathbf{K} \text{ ist Kreis}\}, \\ K(T_p) &= \{(\mathbf{K}, \mathbf{K}') : \mathbf{K} \subsetneq \mathbf{K}' \text{ minimal oder } \mathbf{K}' \subsetneq \mathbf{K} \text{ minimal}\}, \end{aligned}$$

$$\overline{(\mathbf{K}, \mathbf{K}')} = (\mathbf{K}', \mathbf{K}), \quad i(\mathbf{K}, \mathbf{K}') = \mathbf{K} \text{ und } t(\mathbf{K}, \mathbf{K}') = \mathbf{K}'.$$

Auf  $T_p$  können wir eine kanonische Orientierung  $K^+$  wählen, indem wir aus jeder Kante  $(\mathbf{K}, \mathbf{K}')$  den größeren der beiden Kreise auswählen.

**Bemerkung 15.6**  $T_p$  ist ein Baum. Er heißt **Bruhat-Tits-Baum** für  $\mathbb{Q}_p$ .

BEWEIS:  $T_p$  ist zusammenhängend: Seien  $\mathbf{K}_i = \mathbf{K}_{r_i}(a_i)$ ,  $i = 1, 2$ , Kreise in  $\mathbb{Q}_p$ . Ist  $\mathbf{K}_1 \subset \mathbf{K}_2$ , so ist ohne Einschränkung  $a_1 = a_2$  (denn jeder Punkt ist Mittelpunkt). Dann beschreibt

$$\mathbf{K}_1 \subset \mathbf{K}_{r_{1p}}(a_1) \subset \dots \subset \mathbf{K}_{r_{1p^k}}(a_1) = \mathbf{K}_2$$

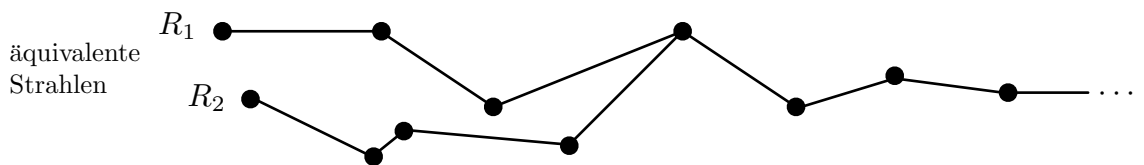
einen Weg in  $T_p$ .

$T_p$  enthält keine stachelfreien geschlossenen Wege: Wähle die kanonische Orientierung  $K^+$  auf  $T_p$ . Es sei  $w = (k_1, \dots, k_n)$  ein stachelfreier Weg. Beobachte, dass für  $k_i \in K^-$  (d.h.  $k_i = (\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_{i+1})$  mit  $\mathbf{K}_{i+1} \subset \mathbf{K}_i$ ) auch  $k_{i+1}, \dots, k_n$  in  $K^-$  liegen müssen (wegen Bemerkung 15.4(2)).

Ist  $w$  geschlossen, so gibt es ein  $i$  mit  $k_{i-1} \in K^+$  und  $k_i \in K^-$ . Folglich ist  $\mathbf{K}_{i-1} \subset \mathbf{K}_i \supset \mathbf{K}_{i+1}$ , aber  $\mathbf{K}_{i-1} \neq \mathbf{K}_{i+1}$  (sonst gäbe es einen Stachel). Also ist  $\mathbf{K}_{i-1} \cap \mathbf{K}_{i+1} = \emptyset$ . Wegen der obigen Beobachtung ist  $i$  eindeutig, also gilt  $\mathbf{K}_0 \subset \mathbf{K}_{i-1}$  und  $\mathbf{K}_n \subset \mathbf{K}_{i+1}$ . Und somit  $\mathbf{K}_0 \neq \mathbf{K}_n$ , im Widerspruch dazu, dass  $w$  geschlossen sein soll. Somit kann  $w$  nicht geschlossen sein. ■

**Definition 15.7** Es sei  $\Gamma$  ein Graph.

1. Ein **Strahl** in  $\Gamma$  ist ein Teilgraph, der isomorph ist zu einer in *einer* Richtung unendlichen Kette.
2. Zwei Strahlen  $R_1$  und  $R_2$  heißen **äquivalent**, wenn  $R_1 \cap R_2$  einen Strahl enthält.
3. Die Äquivalenzklassen von Strahlen heißen **Enden**.



-

Dann ist die Strecke  $\overline{xy}$  in  $A'$ . Andererseits liegt  $x'$  auf der Strecke  $\overline{xy}$ , aber  $\overline{xx'}$  hat die Orientierung von  $R'_1$ , wohingegen  $\overline{xy}$  die Orientierung von  $R'_2$  hat; ein Widerspruch.

$\psi$  ist surjektiv: Zu je zwei Enden in  $T_p$  gibt es eine Achse. ■

Im Folgenden werden wir Punkte aus  $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$  mit Enden von  $T_p$  identifizieren, ohne die Bijektion  $\psi$  explizit anzugeben.

### Definition und Bemerkung 15.11

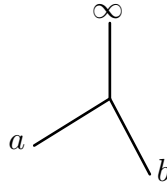
1. Es sei  $T$  ein Baum,  $e_1, e_2, e_3$  seien drei verschiedene Enden von  $T$  und  $A_{ij}$  die durch  $e_i, e_j$  bestimmte Achse. Dann gibt es  $x = \mathbf{M}(e_1, e_2, e_3)$  mit  $\{x\} = E(A_{12}) \cap E(A_{13}) \cap E(A_{23})$ . Wir nennen  $\mathbf{M}(e_1, e_2, e_3)$  den **Median** der Enden  $e_1, e_2$  und  $e_3$ .
2. Es seien  $a, b, c \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$  und ohne Einschränkung  $|a - b| \leq \min\{|a - c|, |b - c|\}$  und  $|a| \leq |b|$ . Dann ist  $\mathbf{M}(a, b, c) = \mathbf{K}_{|a-b|}(a)$ .

BEWEIS:

1. Es seien zunächst  $e_1, e_2, e_3 \in E(T)$  und  $A_{ij} = \overline{e_i e_j}$  der stachelfreie Weg von  $e_i$  nach  $e_j$ . Weiter sei  $w_i = K(A_{ij}) \cap K(A_{ik})$  ein Weg mit Anfangspunkt  $x_i$  und es sei  $y_i = \mathbf{t}(w_i)$ . Dann liegt  $\overline{y_i y_j}$  in  $A_{ij}$ , und für jede Kante  $k$  von  $\overline{y_i y_j}$  gilt:  $k \notin K(A_{ik}) \cup K(A_{jk})$ . Also ist  $\overline{y_1 y_2} \cdot \overline{y_2 y_3} \cdot \overline{y_3 y_1}$  ein stachelfreier geschlossener Weg. Da  $T$  aber ein Baum ist, folgt  $y_1 = y_2 = y_3$ .  
Sind nun  $e_1, e_2, e_3$  Enden von  $T$ , so sei  $y_i \in (E(A_{ij}) \cap E(A_{ik})) \setminus E(A_{jk})$ . Dann liegt  $x = \mathbf{M}(y_1, y_2, y_3)$  im Schnitt der Wege  $\overline{y_1 y_2}$ ,  $\overline{y_2 y_3}$  und  $\overline{y_1 y_3}$ , d.h.

$$x \in E(A_{12}) \cap E(A_{13}) \cap E(A_{23}).$$

2. Zuerst der Fall  $c = \infty$  (nach Voraussetzung kann von  $a, b$  und  $c$  nur  $c$  diesen Wert annehmen):



Es ist

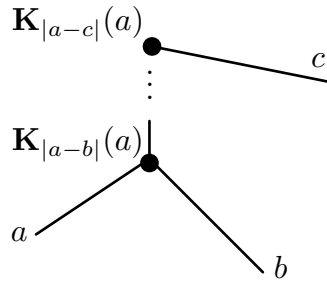
$$\begin{aligned} E(A_{a,\infty}) &= \{\mathbf{K}_r(a) : r = p^k, k \in \mathbb{Z}\}, \\ E(A_{b,\infty}) &= \{\mathbf{K}_r(b) : r = p^k, k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

und folglich

$$\mathbf{M}(a, b, c) = \mathbf{K}_{|a-b|}(a) = \mathbf{K}_{|a-b|}(b).$$

Es ist  $E(A_{a,b}) = \{\mathbf{K}_r(a) : r \leq |a-b|\} \cup \{\mathbf{K}_r(b) : r \leq |a-b|\}$ .

Nun zum Fall  $c \neq \infty$ :



Nach Voraussetzung ist  $|a-c| \geq |a-b|$  und  $|b-c| \geq |a-b|$ . ■

## 16 Die Aktion von $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$ auf $T_p$

**Bemerkung 16.1** Es sei  $\mathbb{K}$  ein beliebiger Körper.

1. Die Gruppe  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$  operiert auf

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) := \mathbb{K} \cup \{\infty\}$$

durch die Möbiustransformation

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z := \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}, & z \in \mathbb{K}, cz+d \neq 0 \\ \infty, & z \in \mathbb{K}, cz+d = 0 \\ \frac{a}{c}, & z = \infty \end{cases}.$$

Der Fall „ $\frac{0}{0}$ “ kann wegen  $ad - cb \neq 0$  nicht vorkommen.

2. Der Ineffektivitätskern der Aktion ist

$$\{\lambda I_2 : \lambda \in \mathbb{K}^\times\}.$$

**BEWEIS:**

1. Für  $A, B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$  erhält man  $A(B \cdot z) = (AB) \cdot z$  durch direktes Nachrechnen.

2. „ $\subseteq$ “: Es sei  $\frac{az+b}{cz+d} = z$  für alle  $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ . Dann:

$$\begin{aligned} z = 0 &\Rightarrow \frac{b}{d} = 0 \Rightarrow b = 0, \\ z = \infty &\Rightarrow \frac{a}{c} = \infty \Rightarrow c = 0, \\ z = 1 &\Rightarrow \frac{a}{d} = 1 \Rightarrow a = d. \end{aligned}$$

„ $\supseteq$ “: Klar. ■

### Folgerung 16.2 Die projektive lineare Gruppe

$$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K}) := \mathrm{GL}_2(\mathbb{K}) / \{\lambda I_2 : \lambda \in \mathbb{K}^\times\}$$

operiert effektiv auf  $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ .

**Proposition 16.3** Für  $a, b, c \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$  paarweise verschieden und  $g \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$  sei

$$g(\mathbf{M}(a, b, c)) := \mathbf{M}(g(a), g(b), g(c)).$$

Dadurch wird eine Aktion von  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$  auf  $T_p$  definiert.

BEWEIS: Es seien  $a, b, c$  wie in Bemerkung 15.11.

- Zuerst zeigen wir die Wohldefiniertheit: Ist  $\mathbf{M}(a', b', c') = \mathbf{M}(a, b, c)$ , so ist

$$\mathbf{M}(g(a'), g(b'), g(c')) = \mathbf{M}(g(a), g(b), g(c)) \quad (*)$$

für alle  $g \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$  zu zeigen. Es reicht, dies für Erzeuger von  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$  zu zeigen. Dazu schreiben wir

$$g = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_2}{a_4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_3 a_4}{\det(g)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\det(g)}{a_4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & a_4 \neq 0 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & a_4 = 0 \end{cases}.$$

Wir müssen  $(*)$  also nur für

$$\begin{aligned} z &\mapsto \lambda z, \quad \lambda \in \mathbb{Q}_p^\times, \\ z &\mapsto z + z_0, \quad z_0 \in \mathbb{Q}_p, \\ z &\mapsto \frac{1}{z} \end{aligned}$$

zeigen. Dazu seien  $a', b', c'$  gegeben mit  $\mathbf{M}(a, b, c) = \mathbf{M}(a', b', c')$  und  $|a' - b'| \leq \min\{|a' - c'|, |b' - c'|\}$ . Dann ist  $\mathbf{M}(a, b, c) = \mathbf{K}_{|a-b|}(a) = \mathbf{K}_{|a'-b'|}(a') = \mathbf{M}(a', b', c')$  und folglich  $|a - b| = |a' - b'|$  und  $|a' - a| \leq |a - b|$ . Wir betrachten nun die drei Fälle einzeln:

Der Fall  $z \mapsto \lambda z$ : Es ist

$$\mathbf{M}(\lambda a, \lambda b, \lambda c) = \mathbf{K}_{|\lambda| \cdot |a-b|}(\lambda a) = \mathbf{K}_{|\lambda| \cdot |a'-b'|}(\lambda a') = \mathbf{M}(\lambda a', \lambda b', \lambda c'),$$

wobei die Gleichheit in der Mitte sich aus  $|\lambda a' - \lambda a| = |\lambda| \cdot |a' - a| \leq |\lambda| \cdot |a - b|$  ergibt.

Der Fall  $z \mapsto z + z_0$ : Es ist

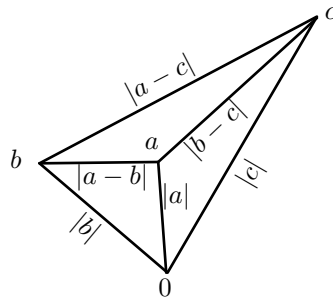
$$\begin{aligned} \mathbf{M}(a + z_0, b + z_0, c + z_0) &= \mathbf{K}_{|a-b|}(a + z_0), \\ \mathbf{M}(a' + z_0, b' + z_0, c' + z_0) &= \mathbf{K}_{|a'-b'|}(a' + z_0). \end{aligned}$$

Der Fall  $z \mapsto \frac{1}{z}$ : Wir schreiben  $r := |a - b|$ .

Zunächst sei  $|a| \leq r$ . Dann ist auch  $|b| \leq r$  und  $\mathbf{K}_r(a) = \mathbf{K}_r(0)$ . Gesucht ist

$$\min \left\{ \underbrace{\left| \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right|}_r, \underbrace{\left| \frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right|}_{\frac{|a-c|}{|a| \cdot |c|}}, \underbrace{\left| \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right|}_{\frac{|b-c|}{|b| \cdot |c|}} \right\}.$$

Mit Hilfe von Proposition 14.7(2) und der folgenden (nicht maßstabsgetreuen) Skizze kann man dies herleiten.



Sei  $|c| < r$ . Aus  $|c| < r = |a - b| \leq |a - c| = |a|$  folgt  $|a| = r$ ,  $|b| = r$  und  $|b - c| = r$ . Es gilt

$$\frac{r}{|a| \cdot |b|} = \frac{1}{r} < \frac{|a - c|}{|a| \cdot |c|} = \frac{|b - c|}{|b| \cdot |c|} = \frac{1}{|c|}.$$

Für den Fall  $|c| \geq r$  muss  $|a - c| = |c| = |b - c|$  gelten und außerdem  $|b| = r \geq |a|$ . Dann ist

$$\frac{r}{|a| \cdot |b|} = \frac{1}{|a|} = \frac{|a - c|}{|a| \cdot |c|} = \frac{|b - c|}{|a| \cdot |c|} \geq \frac{|b - c|}{|b| \cdot |c|} = \frac{|1|}{|b|}.$$

In beiden Fällen ist das gesuchte Minimum  $\frac{1}{|b|}$ . Es folgt  $\mathbf{M}(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}) = \mathbf{K}_{1/r}(\frac{1}{b}) = \mathbf{K}_{1/r}(0)$ . Genauso kann man für  $a'$ ,  $b'$  und  $c'$  argumentieren und man erhält  $\mathbf{M}(\frac{1}{a'}, \frac{1}{b'}, \frac{1}{c'}) = \mathbf{K}_{1/r}(\frac{1}{b'}) = \mathbf{K}_{1/r}(0)$ . Nun sei  $|a| > r$ . Dann ist  $|a| = |b|$  und  $|\frac{1}{a} - \frac{1}{b}| = \frac{r}{|a|^2}$ . Ist  $|c| < |a - c| = |a|$ , so gilt

$$\left| \frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right| = \frac{|a - c|}{|a| \cdot |c|} = \frac{1}{|c|}$$

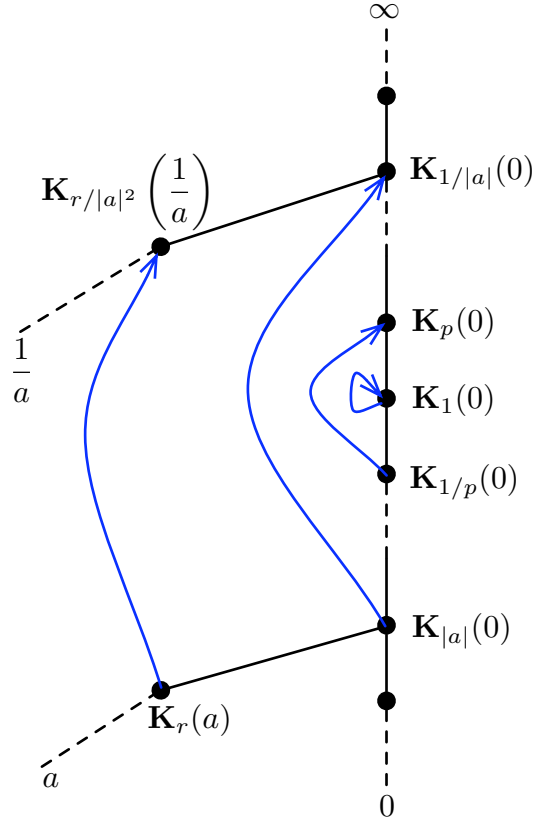
und somit  $\frac{1}{|c|} > \frac{r}{|a|^2}$ . Andernfalls ist  $\frac{|a - c|}{|a| \cdot |c|} \geq \frac{r}{|a|^2}$ , da entweder  $|c| = |a|$  oder  $|c| = |a - c|$ . Es folgt  $\mathbf{M}(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}) = \mathbf{K}_{r/|a|^2}(\frac{1}{a})$ . Es ist

$$\mathbf{K}_{|a' - b'|}(a') = \mathbf{M}(a', b', c') = \mathbf{M}(a, b, c) = \mathbf{K}_r(a),$$

also  $a' \in \mathbf{K}_r(a)$  und  $|a - a'| \leq r < |a|$ . Es folgt  $|a| = |a'|$ . Es ist  $\mathbf{M}(\frac{1}{a'}, \frac{1}{b'}, \frac{1}{c'}) = \mathbf{K}_{r/|a'|^2}(\frac{1}{a'})$ , und da

$$\left| \frac{1}{a} - \frac{1}{a'} \right| = \frac{|a - a'|}{|a| \cdot |a'|} \leq \frac{r}{|a|^2},$$

folgt wie vorhin  $\mathbf{K}_{r/|a'|^2}(\frac{1}{a'}) = \mathbf{K}_{r/|a|^2}(\frac{1}{a})$ . Eine Skizze für die Operation von  $z \mapsto \frac{1}{z}$ :

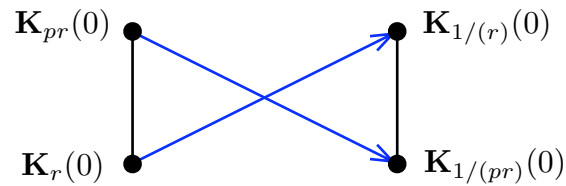


- Nun zeigen wir, dass  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$  auf den Kanten von  $T_p$  operiert, d.h. dass benachbarte Ecken auf benachbarte Ecken abgebildet werden. Auch hier reicht es, die drei Erzeugertypen zu betrachten.

Für  $z \mapsto \lambda z$ : Es wird  $\mathbf{K}_r(a)$  auf  $\mathbf{K}_{|\lambda|r}(\lambda a)$  abgebildet und  $\mathbf{K}_{pr}(a)$  auf  $\mathbf{K}_{|\lambda|pr}(\lambda a)$ .

Für  $z \mapsto z + z_0$ : Es wird  $\mathbf{K}_r(a)$  auf  $\mathbf{K}_r(a + z_0)$  abgebildet und  $\mathbf{K}_{pr}(a)$  auf  $\mathbf{K}_{pr}(a + z_0)$ .

Für  $z \mapsto \frac{1}{z}$ : Es wird  $\mathbf{K}_r(0)$  auf  $\mathbf{K}_{1/r}(0)$  abgebildet und  $\mathbf{K}_{pr}(0)$  auf  $\mathbf{K}_{1/(pr)}(0)$ . Hierbei wird die Orientierung vertauscht:





Ist  $0 \notin \mathbf{K}_{pr}(a)$ , so geht  $\mathbf{K}_r(a)$  auf  $\mathbf{K}_{r/|a|^2}(\frac{1}{a})$  und  $\mathbf{K}_{pr}(a)$  auf  $\mathbf{K}_{pr/|a|^2}(\frac{1}{a})$ .

■

**Bemerkung 16.4**  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$  operiert transitiv auf den Ecken  $E(T_p)$  und auf den Kanten  $K(T_p)$ , aber nicht inversionsfrei.

BEWEIS:  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$  operiert transitiv auf den Tripeln verschiedener Punkte  $(a, b, c)$  in  $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ , also insbesondere auf  $E(T_p)$ .

$z \mapsto \frac{1}{p}z$  bildet  $(\mathbf{K}_{1/p}(0), \mathbf{K}_1(0))$  auf  $(\mathbf{K}_1(0), \mathbf{K}_p(0))$  ab.

$z \mapsto (1-n)z + n$  (mit  $n = 2, \dots, p-1$ ) bildet  $\mathbf{K}_1(0) = \mathbf{M}(0, 1, \infty)$  auf  $\mathbf{M}(n, 1, \infty) = \mathbf{K}_1(0)$  ab, und  $\mathbf{K}_{1/p}(0) = \mathbf{M}(0, p, \infty)$  auf  $\mathbf{M}(n, n + (1-n)p, \infty) = \mathbf{K}_{1/p}(n)$ .

$z \mapsto \frac{p}{z}$  vertauscht  $\mathbf{K}_1(0)$  mit  $\mathbf{K}_{1/p}(0)$ , daher ist die Aktion nicht inversionsfrei.

■

**Folgerung 16.5** Es sei  $T_p^*$  die baryzentrische Unterteilung von  $T_p$ . Dann operiert  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$  inversionsfrei auf  $T_p^*$  mit dem Quotientengraphen

$$T_p^*/\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p) = \bullet \text{---} \blacklozenge$$

Also ist  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p) = G_1 *_{G_0} G_2$ , wobei  $G_1$  die Fixgruppe von  $\mathbf{K}_1(0)$  ist und  $G_0$  der Schnitt von  $G_1$  mit der Fixgruppe von  $\mathbf{K}_{1/p}(0)$ . Die Gruppe  $G_2$  ist die Fixgruppe der Ecke  $\blacklozenge$ .

$T_p^*$  ist enthalten im Bruhat-Tits-Baum für  $\mathbb{Q}_p(\sqrt{p})$ .

Einen weiteren Zugang zur inversionsfreien Aktion erhält man durch die Aktion einer Untergruppe von  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$ .

**Bemerkung 16.6** Die spezielle projektive Gruppe

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Q}_p) := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)/\{\pm I_2\}$$

hat Index 4 in  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$ .

BEWEIS: Für  $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$  und  $\lambda \in \mathbb{Q}_p^\times$  ist  $\det(\lambda A) = \lambda^2 \det(A)$ , d.h. ein Element aus  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$  ist äquivalent zu einem Element aus  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Q}_p)$ , wenn es als Repräsentanten eine Matrix hat, deren Determinante ein Quadrat in  $\mathbb{Q}_p^\times$  ist.

Was ist nun  $|\mathbb{Q}_p^\times/(\mathbb{Q}_p^\times)^2|$ ? Schreibe  $a \in \mathbb{Q}_p^\times$  als  $a = up^n$  mit  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $u \in \mathbb{Z}_p^\times$ . Da  $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}_p$ , ist  $p$  kein Quadrat in  $\mathbb{Q}_p$ . Es ist  $a \in (\mathbb{Q}_p^\times)^2$  genau dann, wenn  $n \in 2\mathbb{Z}$  und  $u \in (\mathbb{Z}_p^\times)^2$ . Es sei  $\bar{u} \in \mathbb{F}_p^\times$  das Bild von  $u$  in  $\mathbb{F}_p$ . Es ist  $|\mathbb{F}_p^\times/(\mathbb{F}_p^\times)^2| = 2$ . Mit dem Lemma von Hensel (van der Waerden [6], § 144) folgt, dass genau dann  $u \in (\mathbb{Z}_p^\times)^2$  gilt, wenn  $\bar{u} \in (\mathbb{F}_p^\times)^2$ . ■

**Folgerung 16.7** Es sei  $u \in \mathbb{Z}_p^\times \setminus (\mathbb{Z}_p^\times)^2$ . Dann sind

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} pu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vertreter der Nebenklassen von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Q}_p)$  in  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$ .

**Proposition 16.8** Es gilt

$$G_1 = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)_{\mathbf{K}_1(0)} = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}_p).$$

BEWEIS: „ $\supseteq$ “: Es sei  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ , d.h.  $|a| \leq 1$ ,  $|b| \leq 1$ ,  $|c| \leq 1$ ,  $|d| \leq 1$  und  $|ad - bc| = 1$ . Zu zeigen ist  $A \cdot \mathbf{K}_1(0) = \mathbf{M}(\frac{b}{d}, \frac{a}{c}, \frac{a+b}{c+d}) = \mathbf{K}_1(0)$ .

Zunächst nehmen wir an, dass es einen Matrixeintrag  $< 1$  gibt. Ohne Einschränkung sei  $|c| < 1$  (dies lässt sich durch Anwenden einer Permutation  $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  erreichen, und da  $S \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}_p)$  liegt und  $\mathbf{K}_1(0)$  stabilisiert, genügt es  $A$  oder  $SA$  oder  $AS$  oder  $SAS$  zu betrachten). Es gilt dann  $|a| = |d| = 1$ ,  $|\frac{a}{c}| > 1$ ,  $|\frac{b}{d}| = |b| \leq 1$ ,  $|\frac{a+b}{c+d}| = |a+b| \leq 1$  und  $|\frac{b}{d} - \frac{a+b}{c+d}| = |bc + bd - ad - bd| = 1$ . Also ist  $\mathbf{M}(\frac{b}{d}, \frac{a}{c}, \frac{a+b}{c+d}) = \mathbf{K}_1(0)$ .

Nun sei  $|a| = |b| = |c| = |d| = 1$ . Dann gilt  $|\frac{b}{d}| = 1 = |\frac{a}{c}|$ ,  $|\frac{b}{d} - \frac{a}{c}| = \frac{|bc - ad|}{|d| \cdot |c|} = 1$ ,  $|\frac{a+b}{c+d} - \frac{a}{c}| \geq 1$  und  $|\frac{a+b}{c+d} - \frac{b}{d}| \geq 1$ . Also ist  $\mathbf{M}(\frac{b}{d}, \frac{a}{c}, \frac{a+b}{c+d}) = \mathbf{K}_1(0)$ .

„ $\subseteq$ “: Es sei  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  ein Repräsentant von  $g \in G_1$ . Ohne Einschränkung sei  $|\det(A)| = 1$  oder  $|\det(A)| = \frac{1}{p}$ . Nach Voraussetzung ist  $\mathbf{M}(\frac{b}{d}, \frac{a+b}{c+d}, \frac{a}{c}) = \mathbf{K}_1(0)$ . Ohne Einschränkung dürfen wir  $\mathbf{M}(\frac{b}{d}, \frac{a+b}{c+d}, \frac{a}{c}) = \mathbf{K}_{|\frac{b}{d} - \frac{a+b}{c+d}|}(\frac{b}{d}) = \mathbf{K}_{|g(0) - g(1)|}(g(0))$  annehmen (denn wäre dies nicht so, könnte man es durch Anwenden der Untergruppe

$$\left\{ z \mapsto z, z \mapsto \frac{1}{z}, z \mapsto 1-z, z \mapsto 1-\frac{1}{z}, z \mapsto \frac{z}{z-1}, z \mapsto \frac{1}{1-z} \right\} < \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$$

erreichen, die  $\{0, 1, \infty\}$  auf sich abbildet). Es gilt also  $|\frac{b}{d}| \leq 1$ ,  $|\frac{a+b}{c+d}| \leq 1$ ,  $|\frac{b}{d} - \frac{a+b}{c+d}| = 1$ ,  $|\frac{b}{d} - \frac{a}{c}| \geq 1$  und  $|\frac{a}{c} - \frac{a+b}{c+d}| \geq 1$ . Daraus folgt  $|b| \leq |d|$ ,  $|a+b| \leq |c+d|$ ,  $|d| \cdot |c+d| = |ad - bc|$ ,  $|d| \cdot |c| \leq |ad - bc|$  und  $|c| \cdot |c+d| \leq |ad - bc|$ . Nun muss  $|d| = |c+d|$  sein, denn für  $|d| < |c+d|$  gilt  $|c| = |c+d|$  und

$$|ad - bc| = |d| \cdot |c+d| < |c+d|^2 = |c| \cdot |c+d| \leq |ad - bc|,$$

und im Falle  $|d| > |c+d|$  gilt  $|c| = |d|$  und

$$|ad - bc| = |d| \cdot |c+d| < |c| \cdot |d| \leq |ad - bc|,$$

in beiden Fällen ein Widerspruch. Aus  $|d| = |c + d|$  folgt  $|d|^2 = |ad - bc| = 1$  (da  $\frac{1}{p}$  kein Quadrat ist). Es folgt

$$|d| = 1, \quad |b| \leq 1, \quad |c| \leq 1, \quad |a| \leq 1,$$

also  $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ . ■

**Definition 16.9** Wir setzen

$$\mathrm{GL}_2^0(\mathbb{Z}_p) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) : |b| < 1 \right\},$$

und

$$\mathrm{SL}_2^0(\mathbb{Z}_p) := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p) \cap \mathrm{GL}_2^0(\mathbb{Z}_p).$$

Weiter sei  $\mathrm{PGL}_2^0(\mathbb{Z}_p)$  das Bild von  $\mathrm{GL}_2^0(\mathbb{Z}_p)$  in  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}_p)$ .

**Folgerung 16.10**

1. Die Fixgruppe  $G_0$  der Kante  $(\mathbf{K}_1(0), \mathbf{K}_{1/p}(0))$  ist  $\mathrm{PGL}_2^0(\mathbb{Z}_p)$ .
2. Der Index ist  $[G_1 : G_0] = p + 1$ .

BEWEIS:

1. Es ist

$$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)_{\mathbf{K}_{1/p}(0)} = g \cdot \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)_{\mathbf{K}_1(0)} \cdot g^{-1}$$

mit  $g = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Dies sind die Matrizen

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & pb \\ \frac{c}{p} & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}_p) \right\}.$$

Folglich ist

$$G_0 = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}_p) \cap g \cdot \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}_p) \cdot g^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}_p) : |b| < 1 \right\}.$$

2. Es sei  $\varphi : \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}_p) \rightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_p)$  die von  $\pi : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{F}_p$  induzierte Abbildung. Damit ist

$$G_0 = \varphi^{-1} \left( \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_p) \right\}}_{=: \mathrm{PGL}_2^0(\mathbb{F}_p)} \right).$$

Es ist

$$\begin{aligned} [G_1 : G_0] &= [\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_p) : \mathrm{PGL}_2^0(\mathbb{F}_p)] \\ &= [\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p) : \mathrm{GL}_2^0(\mathbb{F}_p)] \\ &= \frac{(p^2 - 1)(p^2 - p)}{(p - 1)(p^2 - p)} \\ &= p + 1, \end{aligned}$$

wie behauptet. ■

**Proposition 16.11** Es ist

$$G_2 = \left\langle \mathrm{PGL}_2^0(\mathbb{Z}_p), \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$$

und

$$[G_2 : \mathrm{PGL}_2^0(\mathbb{Z}_p)] = 2.$$

BEWEIS: Es ist  $\begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  in der Fixgruppe von  $\blacklozenge$ , also  $\left\langle \mathrm{PGL}_2^0(\mathbb{Z}_p), \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \leq G_2$ . Ist umgekehrt  $g \in G_2 \setminus \mathrm{PGL}_2^0(\mathbb{Z}_p)$ , so ist  $g \cdot \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}_2^0(\mathbb{Z}_p)$ . ■

Zusammengefasst erhalten wir den folgenden Satz:

**Satz 16.12** Es ist

$$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}_p) *_{\mathrm{PGL}_2^0(\mathbb{Z}_p)} \left\langle \mathrm{PGL}_2^0(\mathbb{Z}_p), \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Nun betrachten wir die Aktion von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$  auf  $T_p$ .

**Folgerung 16.13** Es ist

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p) *_{\mathrm{SL}_2^0(\mathbb{Z}_p)} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p).$$

(Dabei ist der zweite Faktor durch Konjugation isomorph zu  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)$ .)

BEWEIS: Der Stabilisator von  $\mathbf{K}_1(0)$  in  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Q}_p)$  ist

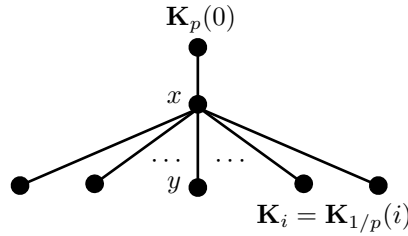
$$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}_p) \cap \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}_p).$$

Wir zeigen nun, dass das Segment

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \text{---} & \bullet \\ \mathbf{K}_1(0) & & \mathbf{K}_{1/p}(0) \end{array}$$

ein Fundamentalbereich für die Aktion von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$  auf  $T_p$  ist. Wir schreiben abkürzend  $x = \mathbf{K}_1(0)$  und  $y = \mathbf{K}_{1/p}(0)$ .

- $x$  und  $y$  liegen in verschiedenen Bahnen von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ . Es ist nämlich  $y = Bx$  mit  $B = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ . Gäbe es ein  $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$  mit  $Ax = y$ , so wäre  $A^{-1}Bx = x$ , also  $A^{-1}B$  im Stabilisator  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}_p)$  von  $x$ . Dies ist ein Widerspruch, da  $\det(A^{-1}B) = p \notin \mathbb{Z}_p^\times$ .
- Schreibe  $\mathbf{K}_i := \mathbf{K}_{1/p}(i)$  für  $i = 0, \dots, p-1$ .



Die Matrix  $A_i = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)$ , gegeben durch die Abbildung  $z \mapsto z - i$ , bildet  $\mathbf{K}_i$  auf  $y$  ab und lässt  $x$  fest. Die Matrix  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)$ , entsprechend der Abbildung  $z \mapsto -\frac{1}{z}$ , bildet  $\mathbf{K}_p(0)$  auf  $y$  ab und lässt  $x$  fest. Die Matrix  $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & \frac{1}{p} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ , entsprechend der Abbildung  $z \mapsto p^2 z$ , ist die Translation um zwei Ecken entlang der Achse durch 0 und  $\infty$ .

Der Stabilisator von  $y$  in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$  ist

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)_y = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)_x \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der Stabilisator der Kante  $(x, y)$  ist

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Q}_p) \cap \mathrm{PGL}_2^0(\mathbb{Z}_p).$$

Die Einbettung von  $\mathrm{SL}_2^0(\mathbb{Z}_p)$  in der ersten Faktor ist  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , die Einbettung in den zweiten Faktor ist  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & \frac{b}{p} \\ pc & d \end{pmatrix}$ . ■

**Bemerkung 16.14** Es gilt

$$\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]\right) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) *_{\Gamma^0(p)} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}),$$

mit  $\Gamma^0(p) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : p|b \right\}$ .

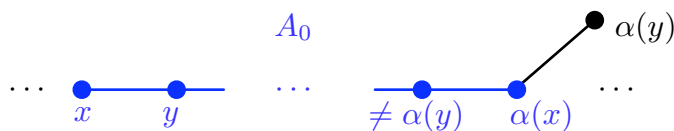
BEWEISSKIZZE: Das Segment von  $x$  nach  $y$  ist ein Fundamentalbereich für die Gruppenaktion, denn  $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & \frac{1}{p} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$  und  $A_i \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ . Nutze aus, dass  $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$  dicht in  $\mathbb{Q}_p$  liegt (da  $\mathbb{Z}$  dicht in  $\mathbb{Z}_p$  liegt). ■

## 17 Der Satz von Ihara

Zunächst eine allgemeine Aussage über Bäume:

**Proposition 17.1** Es sei  $T$  ein Baum und  $\alpha \in \mathrm{Aut}(T)$  inversionsfrei. Dann gilt *entweder*  $\alpha$  hat einen Fixpunkt, *oder* es gibt eine eindeutige Achse  $A(\alpha)$  in  $T$ , auf der  $\alpha$  durch (nichttriviale) Translation operiert.

BEWEIS: Es sei  $d_0 := \min\{d(x, \alpha(x)) : x \in E(T)\}$ . Falls  $d_0 = 0$ , so hat  $\alpha$  einen Fixpunkt. Falls  $d_0 > 0$ , so wähle  $x$  mit  $d(x, \alpha(x)) = d_0$ . Es sei  $A_0$  der eindeutige stachelfreie Weg in  $T$  von  $x$  nach  $\alpha(x)$  und  $y$  der Nachbar von  $x$  in  $A_0$ .



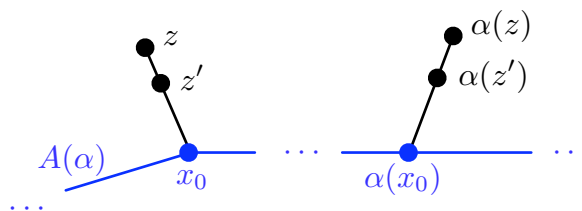
Dann muss  $\alpha(y)$  ein Nachbar von  $\alpha(x)$  sein, aber zugleich nicht in  $A_0$  liegen, da sonst  $d_0$  nicht minimal wäre. Induktiv kann man so schließen:

$$\alpha(A_0) \cap A_0 = \{\alpha(x)\}.$$

Das ganze lässt sich nun für  $\alpha(x)$  wiederholen, so dass wir die Achse

$$A(\alpha) := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \alpha^n(A_0)$$

erhalten. Zur Eindeutigkeit kann man sich Folgendes überlegen: Sei  $z \notin A(\alpha)$ . Dann „projiziere“  $z$  auf  $A(\alpha)$  durch den eindeutigen kürzesten Weg  $\overline{zx_0}$  für ein geeignetes  $x_0 \in A(\alpha)$ .



Betrachtet man einen Nachbarn  $z'$  von  $z$  in  $\overline{zx_0}$ , so wird dieser Nachbar auf einen Nachbarn von  $\alpha(z)$  zwischen  $\alpha(x_0)$  und  $\alpha(z)$  abgebildet, kann also nicht „geschoben“ werden. ■

Fixpunkte eines Elementes  $g \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$  sind Lösungen von

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d} = z \quad \Leftrightarrow \quad cz^2 + dz = az + b.$$

Wir geben nun eine **Klassifikation der Elemente von  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$**  anhand ihrer Fixpunkte.

1. Fall:  $c = 0$ . Ein Fixpunkt ist  $\infty$ .

- Falls  $d \neq a$ , so ist  $\frac{b}{a-d}$  ein weiterer Fixpunkt.
- Falls  $d = a$  und  $b = 0$ , so ist  $g = \mathrm{id}$ , also ist jeder Punkt ein Fixpunkt.
- Falls  $d = a$  und  $b \neq 0$ , so ist  $g$  eine Translation, d.h.  $\infty$  ist der einzige Fixpunkt.

2. Fall:  $c \neq 0$ . Die Lösungen der Fixpunktgleichung sind durch

$$\frac{a-d}{2c} \pm \frac{1}{2c} \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}$$

gegeben. Wir betrachten den Term unter der Wurzel:

$$\begin{aligned} (a-d)^2 + 4bc &= a^2 + d^2 - 4ad + 4bc + 2ad \\ &= (a+d)^2 - 4\det(g) \\ &= \mathrm{Spur}(g)^2 - 4\det(g). \end{aligned}$$

Die Spur und die Determinante von  $g$  sind natürlich durch einen Vertreter in  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$  gegeben. Man überzeugt sich leicht, dass beim folgenden Vergleich von  $\mathrm{Spur}(g)^2$  mit  $4\det(g)$  die Wahl des Vertreters unerheblich ist.

- $\mathrm{Spur}(g)^2 = 4\det(g)$ : In diesem Fall hat  $g$  genau einen Fixpunkt in  $\mathbb{Q}_p$ , nämlich  $\frac{a-d}{2c}$ .

- $|\text{Spur}(g)^2| > |4 \det(g)|$ : In diesem Fall liegen beide Fixpunkte von  $g$  in  $\mathbb{Q}_p$  (nach dem Lemma von Hensel, siehe van der Waerden [6], § 144).
- $|\text{Spur}(g)^2| \leq |4 \det(g)|$ , aber  $\text{Spur}(g)^2 \neq 4 \det(g)$ : In diesem Fall hat  $g$  zwei Fixpunkte in der Erweiterung  $\mathbb{Q}_p(\sqrt{\text{Spur}(g)^2 - 4 \det(g)})$ .

**Bemerkung 17.2** Die Eigenwerte von  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  sind Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda(a + d) - bc + ad = 0.$$

Die Eigenwerte sind also

$$\frac{a + d}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\text{Spur}(g)^2 - 4 \det(g)},$$

d.h.  $g$  hat genau dann zwei verschiedene Fixpunkte, wenn  $g$  zwei verschiedene Eigenwerte hat.

### Definition und Bemerkung 17.3

1. Hat  $g$  nur einen Fixpunkt, so heißt  $g$  **parabolisch** und ist konjugiert zu  $z \mapsto z + z_0$  für ein  $z_0 \in \mathbb{Q}_p^\times \setminus (\mathbb{Q}_p^\times)^2$ .
2.  $g$  hat zwei verschieden Fixpunkte (also zwei verschiedene Eigenwerte). Haben die beiden Eigenwerte von  $g$  den gleichen Betrag, so heißt  $g$  **elliptisch**, andernfalls **hyperbolisch**.
3. Ist  $|\text{Spur}(g)^2| > |4 \det(g)|$ , so ist  $g$  hyperbolisch und konjugiert zu  $z \mapsto \lambda z$  für ein  $\lambda \in \mathbb{Q}_p$ ,  $|\lambda| > 1$  (denn falls  $|\lambda| < 1$ , konjugiere mit  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ).
4. Ist  $|\text{Spur}(g)^2| \leq |4 \det(g)|$ , so ist  $g$  (parabolisch oder) elliptisch, und in  $\text{PGL}_2(\mathbb{Q}_p(\sqrt{\text{Spur}(g)^2 - 4 \det(g)}))$  konjugiert zu  $z \mapsto \lambda z$  mit  $|\lambda| = 1$ .

### Bemerkung 17.4

1. Ist  $g \in \text{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$  hyperbolisch, so gibt es eine Achse  $A_g$  in  $T_p$ , auf der  $g$  durch Translation um  $v(\lambda) (= \lfloor \log_p |\lambda| \rfloor) \neq 0$  operiert.
2. Ist  $g$  parabolisch, so hat  $g$  genau ein Fixende und viele Fixpunkte, aber keine Fixachse.



3. Ist  $g$  elliptisch mit Fixpunkten in  $\mathbb{Q}_p$ , so gibt es eine Achse  $A_g$  in  $T_p$ , die punktwise fix ist unter der Aktion von  $g$ .
4. Ist  $g$  elliptisch mit Fixpunkten in  $\mathbb{Q}_p(\sqrt{p})$ , so invertiert  $g$  eine Kante in  $T_p$ .
5. Ist  $g$  elliptisch mit Fixpunkten in  $\mathbb{Q}_p(\sqrt{a})$ ,  $a \in \mathbb{Z}_p^\times \setminus (\mathbb{Z}_p^\times)^2$ ,  $a \neq p$ , so fixiert  $g$  genau eine Ecke in  $T_p$ , nämlich  $\mathbf{K}_{|z_1 - z_2|}(z_1)$ , wobei  $z_1, z_2$  die Fixpunkte sind.

**Satz 17.5 (Satz von Ihara)**

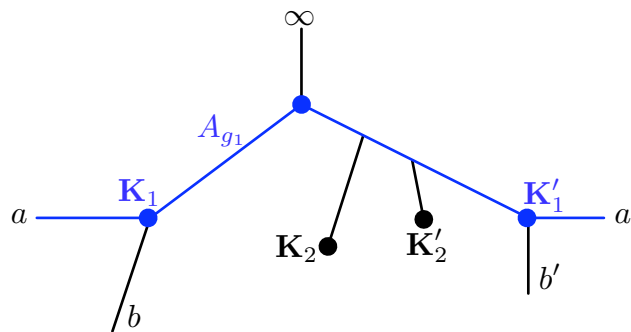
Ist  $G \leq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$  und jedes Element  $g \in G \setminus \{\mathrm{id}\}$  hyperbolisch, so ist  $G$  eine freie Gruppe.

BEWEIS: Nach Bemerkung 17.4(1) und Proposition 17.1 kann kein Element von  $G \setminus \{\mathrm{id}\}$  einen Fixpunkt haben, also operiert  $G$  frei auf dem Baum  $T_p$ . Nach Satz 5.4 ist  $G$  eine freie Gruppe. ■

**Beispiel 17.6** Es seien  $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}'_1$  Ecken in  $T_p$ , so dass  $\mathbf{K}_1 \cap \mathbf{K}'_1 = \emptyset$  gilt. Gesucht ist  $g_1 \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$  mit  $g_1(\mathbf{K}_1) = \mathbf{K}'_1$  und  $\overline{\mathbf{K}_1 \mathbf{K}'_1} \subset A_{g_1}$ . Es seien  $a, b, a', b'$  Enden in  $T_p$  mit  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{M}(a, b, \infty)$  und  $\mathbf{K}'_1 = \mathbf{M}(a', b', \infty)$  (vgl. Abbildung weiter unten). Wähle  $g_1$  so, dass

$$\begin{aligned} g_1(a) &= a, \\ g_1(b) &= b', \\ g_1(a') &= a' \end{aligned}$$

gilt. Dann gilt  $g(\mathbf{K}_1) = \mathbf{K}'_1$ , denn für ein weiteres  $c \in \mathbf{K}_1$  ist  $g(c) \in \mathbf{K}'_1$ , da  $g(A_{a, \infty}) = A_{a', \infty}$ . (Beachte, dass  $g_1$  zwar Fixpunkte in  $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$  hat, aber nicht auf  $T_p$ .)



Nun seien  $\mathbf{K}_2$  und  $\mathbf{K}'_2$  weitere Kreise, so dass  $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}'_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}'_2$  paarweise disjunkt sind. Es sei  $g_2 \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$  mit  $g_2(\mathbf{K}_2) = \mathbf{K}'_2$  und  $\overline{\mathbf{K}_2 \mathbf{K}'_2} \subset A_{g_2}$ .

Wir werden unten zwei verschiedene Beweise dafür angeben. Zunächst betrachten wir die Aktion von  $g_1$  (und analog  $g_2$ ) genauer. Als Teilmenge von  $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$  ist

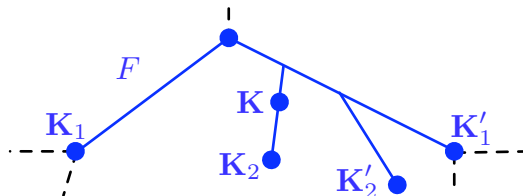
$$g_1(\mathbf{K}_1) = \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) \setminus \mathbf{K}_{|a'-b'|/p}(a').$$

ERSTER BEWEIS: (Dieser Beweis funktioniert auch für ein entsprechendes Resultat in  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ .) Es sei  $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) \setminus (\mathbf{K}_1 \cup \mathbf{K}'_1 \cup \mathbf{K}_2 \cup \mathbf{K}'_2)$ , und

$$g = g_1^{\varepsilon_1} g_2^{\delta_1} \cdots g_1^{\varepsilon_n} g_2^{\delta_n}$$

$$g(z) \in \begin{cases} \mathbf{K}_1, & \varepsilon_1 < 0 \\ \mathbf{K}'_1, & \varepsilon_1 > 0 \\ \mathbf{K}_2, & \varepsilon_1 = 0, \delta_1 < 0 \\ \mathbf{K}'_2, & \varepsilon_1 = 0, \delta_1 > 0 \end{cases}.$$

ZWEITER BEWEIS: Es sei  $F \subset T_p$  der von den Ecken  $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}'_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}'_2$  aufgespannte Teilbaum, und  $\mathbf{K}$  eine Ecke in  $F \setminus \{\mathbf{K}_1, \mathbf{K}'_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}'_2\}$ .


$$g = g_1^{\varepsilon_1} g_2^{\delta_1} \cdots g_1^{\varepsilon_n} g_2^{\delta_n}$$

**Bemerkung 17.7** Es sei

$$T_p(G) := \bigcup_{q \in G} qF.$$

$T_p(G)$  ist ein Baum und nach Konstruktion  $G$ -invariant.  $T_p(G)/G$  ist ein endlicher Graph und isomorph zu  $F/\sim$ , wobei  $\sim$  durch Identifizierung zweier Eckpunkte, die zu  $g_i$  gehören, gegeben ist.

**Bemerkung 17.8** Für jedes  $\nu \geq 1$  gibt es in  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$  (und in  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ ) eine Untergruppe  $G$  mit:

- $G$  ist frei vom Rang  $\nu$ .
- $G \setminus \{\mathrm{id}\}$  enthält nur hyperbolische Elemente.
- Es gibt eine offene Teilmenge  $F$  von  $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$  (bzw.  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ) mit  $g(F) \cap F = \emptyset$  für alle  $g \in G$ ,  $g \neq \mathrm{id}$ . Es ist

$$F = \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) \setminus \bigcup_{i=1}^{\nu} (\mathbf{K}_i \cup \mathbf{K}'_i).$$

Eine solche Gruppe  $G$  heißt **Schottky-Gruppe**.



## Teil V

# Diskontinuierliche Gruppen

## 18 Möbiustransformationen

**Definition und Bemerkung 18.1** Es sei  $X$  ein topologischer Raum und  $G$  eine Gruppe von Homöomorphismen von  $X$ , die effektiv operiert.

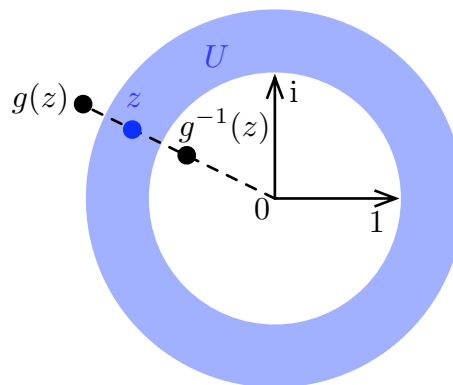
1.  $G$  **operiert diskontinuierlich** in  $x \in X$ , wenn es eine offene Umgebung  $U$  von  $x$  gibt mit  $g(U) \cap U = \emptyset$  für alle bis auf endlich viele  $g \in G$ .
2.  $G$  heißt **diskontinuierlich**, wenn es ein  $x \in X$  gibt, so dass  $G$  in  $x$  diskontinuierlich operiert.
3. Die Menge der **gewöhnlichen Punkte**,

$$\Omega(G) := \{x \in X : G \text{ operiert diskontinuierlich in } x\},$$

ist eine offene,  $G$ -invariante Teilmenge von  $X$ . Es ist  $U \subseteq \Omega(G)$ .

**Beispiel 18.2** Diskontinuierliche Gruppen.

1. Es sei  $X = \hat{\mathbb{C}} := \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  die **Riemannsche Zahlenkugel**. Es sei  $g \in \text{PGL}_2(\mathbb{C})$  und  $G = \langle g \rangle$ .
  - (a)  $g$  ist hyperbolisch. Dann ist  $g$  konjugiert zu  $z \mapsto \lambda z$  mit  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $|\lambda| > 1$ . Setze  $U := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < |\lambda|\}$ . In der folgenden Skizze ist  $\lambda = \frac{5}{3}$ .

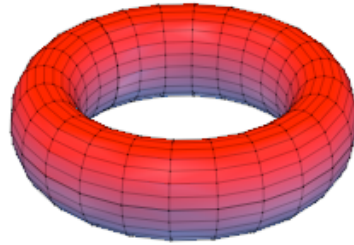


Für  $z \in U$  und  $n \in \mathbb{Z}$  ist  $g^n(z) = \lambda^n z$ , also

$$|g^n(z)| = |\lambda|^n |z| = \begin{cases} > |z|, & n \geq 1 \\ < |z|, & n \leq -1 \\ |z|, & n = 0 \end{cases}.$$

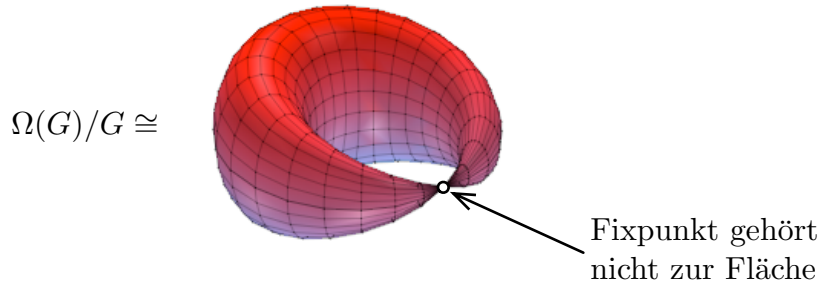
Also ist  $g^n(U) \cap U = \emptyset$  für  $n \neq 0$ . Damit ist  $G$  diskontinuierlich und es ist  $\Omega(G) = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\}$ . Der Bahnenraum  $\Omega(G)/G$  ist ein Torus, den man durch Identifizieren des inneren und des äußeren Randes von  $U$  erhält.

$\Omega(G)/G \cong$



Die Projektion  $\Omega(G) \rightarrow \Omega(G)/G$  ist ein lokaler Homöomorphismus.

- (b)  $g$  ist elliptisch. Dann ist  $g$  konjugiert zu  $z \mapsto \lambda z$  mit  $|\lambda| = 1$ . Ist  $\lambda$  eine  $n$ -te Einheitswurzel, so ist  $G$  endlich und operiert somit diskontinuierlich auf  $\hat{\mathbb{C}}$ . Es ist  $\hat{\mathbb{C}}/G \cong \hat{\mathbb{C}}$ . Ist  $\lambda$  keine Einheitswurzel, so ist  $G$  unendlich und  $G \cong \mathbb{Z}$ . Jeder Punkt des Einheitskreises  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  ist ein Häufungspunkt von  $\{\lambda^n : n \in \mathbb{Z}\}$ , denn ist  $\lambda_0$  ein Häufungspunkt, so gibt es eine Folge  $(\lambda^{n_i})_i$  mit  $\lambda^{n_i} \rightarrow \lambda_0$ , und damit gilt auch  $\lambda^{-n_{i+1}} \lambda^{n_i} \rightarrow 1$ . Es folgt nun, dass  $G$  in keinem Punkt diskontinuierlich operiert, da für  $z \in \hat{\mathbb{C}}$  die Folge  $g^{-n_{i+1}} g^{n_i}(z)$  gegen  $z$  konvergiert.
- (c)  $g$  ist parabolisch. Dann ist  $g$  konjugiert zu  $z \mapsto z + 1$ , und  $G \cong \mathbb{Z}$  ist diskontinuierlich auf  $U := \{z \in \mathbb{C} : -\frac{1}{2} < \operatorname{Re}(z) < \frac{1}{2}\}$ . Es ist  $\Omega(G) = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$ . Man erhält den Bahnenraum  $\Omega(G)/G$ , indem man die Ränder des Streifens  $U$  miteinander identifiziert und in dem so erhaltenen Zylinder die „Ränder im Unendlichen“ miteinander identifiziert, also zu einem Punkt zusammenzieht.



Dieser Punkt entspricht für  $z \mapsto z + 1$  dem Fixpunkt  $\infty$  und gehört nicht zur Fläche  $\Omega(G)/G$ . Wählt man ein zu  $z \mapsto z + 1$  konjugiertes  $g$  derart, dass 0 der Fixpunkt ist, so erhält man als Projektion

$$\mathbb{C} \cong \Omega(G) \rightarrow \Omega(G)/G \cong \mathbb{C}^\times, \quad z \mapsto e^{2\pi iz}.$$

2. Ähnlich wie für  $\hat{\mathbb{C}}$  können wir die Aktion von  $g \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$  auf  $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$  betrachten. Es sei  $G = \langle g \rangle$ .
  - (a)  $g$  ist hyperbolisch. Wie im komplexen Fall ist  $g$  konjugiert zu  $z \mapsto \lambda z$  mit  $|\lambda| > 1$ , und  $G$  ist diskontinuierlich. Es ist  $\Omega(G) = \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) \setminus \{\text{Fixpunkte von } g\}$ .
  - (b)  $g$  ist elliptisch.  $G$  ist genau dann diskontinuierlich, wenn  $g$  von endlicher Ordnung ist.
  - (c)  $g$  ist parabolisch. Dann ist  $g$  konjugiert zu  $z \mapsto z + 1$ . Für jedes  $z \in \mathbb{Q}_p$  konvergiert  $g^{p^n}(z) = z + p^n$  gegen  $z$ . In jeder Umgebung von  $z$  gibt es also unendlich viele  $g^{p^n}$  und somit ist  $G$  nicht diskontinuierlich.

**Satz 18.3** Es sei  $\mathbb{K}$  ein Körper der Charakteristik 0 und  $G < \mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$  eine endliche Untergruppe. Dann ist  $G$  isomorph zu einer der folgenden Gruppen:

1.  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  mit  $n \geq 1$ .
2.  $D_n$  (Diedergruppe) mit  $n \geq 1$ .
3.  $A_4$  (Tetraedergruppe).
4.  $S_4$  (Oktaedergruppe).
5.  $A_5$  (Ikosaedergruppe).

BEWEIS: Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass jedes  $g \in G$  zwei Fixpunkte in  $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$  hat (notfalls müssten wir zu einer endlichen Körpererweiterung von  $\mathbb{K}$  übergehen, um dies zu gewährleisten). Es sei  $n = |G|$  und  $Z = \{z_1, \dots, z_m\}$  die Menge der Fixpunkte von Elementen aus  $G \setminus \{\mathrm{id}\}$ . Dann operiert  $G$  auf  $Z$ : Ist  $z_i$  Fixpunkt von  $h$ , und ist  $g \in G$ , so ist  $g(z_i)$  ein Fixpunkt von  $ghg^{-1}$ .

Es seien nun  $z_1, \dots, z_s$  Vertreter der  $G$ -Bahnen. Setze  $\nu_i = |G_{z_i}|$ , d.h. es ist  $|G_{z_i}| = \frac{n}{\nu_i}$  (beachte:  $\nu_i | n$ ). Es gilt

$$2n - 2 = \sum_{i=1}^s (\nu_i - 1) \frac{n}{\nu_i},$$

was äquivalent ist zu

$$1 \leq 2 - \frac{2}{n} = \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{\nu_i}\right) < 2.$$

Gesucht ist eine Lösung dieser Gleichung, die die Bedingungen  $n, \nu_i \in \mathbb{N}$ ,  $\nu_i \geq 2$ ,  $\nu_i | n$  erfüllt. Die Fälle  $s = 1$  und  $s \geq 4$  lassen sich direkt ausschließen, da hier die rechte Seite der Gleichung  $< 1$  bzw.  $\geq 2$  ist.

$s = 2$ : Es ist  $2 - \frac{2}{n} = 2 - \frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2}$ , und da  $\nu_i | n$  gilt, folgt  $\nu_1 = \nu_2 = n$ . Somit haben alle Elemente die selben Fixpunkte, es ist  $G \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

$s = 3$ : Ohne Einschränkung sei  $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \nu_3$ . Dann ist

$$3 - \frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2} - \frac{1}{\nu_3} = 2 - \frac{2}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3} = 1 + \frac{2}{n}.$$

Damit muss  $\nu_1 = 2$  sein, sonst wäre die linke Seite der Gleichung zu klein. Ebenso muss  $\nu_2 \leq 3$  sein.

$\nu_2 = 2$ : Es ist  $\nu_3 = \frac{n}{2}$ , d.h.  $G$  enthält ein Element  $\tau$  von Ordnung  $\frac{n}{2}$  und ein Element  $\sigma$  von Ordnung 2 mit  $\sigma\tau\sigma = \tau^{-1}$  ( $\sigma$  vertauscht die Fixpunkte von  $\tau$ ). Es ist also  $\langle \sigma, \tau \rangle \cong D_{\frac{n}{2}}$ .

$\nu_2 = 3$ : Es muss  $\nu_3 \in \{3, 4, 5\}$  sein. Für  $\nu_3 = 3$  ist  $G \cong A_4$  und  $n = 12$ . Für  $\nu_3 = 4$  ist  $G \cong S_4$  und  $n = 24$ . Für  $\nu_3 = 5$  ist  $G \cong A_5$  und  $n = 60$ . ■

## 19 Diskontinuierliche Untergruppen von $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$

**Bemerkung 19.1** Es sei  $\mathbb{K}$  ein bewerteter Körper, etwa  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}_p$  (vgl. van der Waerden [6], § 141). Dann gilt:



1.  $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$  ist ein Hausdorff-Raum.
2.  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$  ist eine topologische Gruppe, d.h. die Abbildungen  $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$  und  $g \mapsto g^{-1}$  sind stetig.

BEWEIS:

1. Eine Umgebungsbasis für  $\infty$  ist durch die Mengen  $U_r = \{z \in \mathbb{K} : |z| > r\}$  mit  $r > 0$  gegeben.
2. Wir können  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$  als die offene Teilmenge  $\{(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4 : ad - bc \neq 0\}$  von  $\mathbb{K}^4$  auffassen. Dann bekommt  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$  die Quotiententopologie, d.h.

$$d(g_1, g_2) < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \exists A_1 \in g_1, A_2 \in g_2 : \|A_1 - A_2\| < \varepsilon$$

für eine beliebige Norm von  $\mathbb{K}^4$ . Dies ist verträglich mit Multiplikation und Inversion. ■

**Bemerkung 19.2** Ist  $G < \mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$  diskontinuierlich, so ist  $G$  diskret als Teilmenge von  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$  (d.h.  $G$  hat keinen Häufungspunkt in  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ ).

BEWEIS: Zunächst stellen wir fest, dass  $G < \mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$  genau dann diskret ist, wenn  $\mathrm{id}$  kein Häufungspunkt von  $G$  ist. Wäre nämlich  $g \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$  ein Häufungspunkt von  $G$ , d.h. gäbe es eine Folge  $(g_i)$  mit  $g_i \rightarrow g$  und  $g_i \neq g_j$  für  $i \neq j$ , so konvergierte  $g_{i+1}^{-1}g_i$  nach  $g^{-1}g = \mathrm{id}$ , da die Gruppenverknüpfungen stetig sind.

Es reicht also im Folgenden zu zeigen, dass  $\mathrm{id}$  kein Häufungspunkt ist. Dazu sei  $G$  nun eine nicht-diskrete Untergruppe. Es gibt also eine Folge  $(g_i)$ , die gegen  $\mathrm{id}$  konvergiert. Dann ist auch  $g_i(x) = x$  für jedes  $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ , und für jede Umgebung  $U$  von  $x$  ist  $g_i(U) \cap U \neq \emptyset$  für unendlich viele  $i$ . Also operiert  $G$  nicht diskontinuierlich in allen  $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ . ■

**Bemerkung 19.3** Es sei  $\mathbb{K}$  ein bewerteter und lokalkompakter Körper,  $G$  eine diskontinuierliche Untergruppe von  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$  und  $\infty \in \Omega(G)$ . Dann ist für jede Konstante  $C > 0$  die Menge

$$\left\{ c \in \mathbb{K} : \text{es gibt } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G \text{ mit } |c| < C \right\}$$

endlich.

BEWEIS: Wir nehmen an,  $g_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$  sei eine Folge in  $G$  mit  $|c_n| < C$  und  $g_n \neq g_m$  für  $n \neq m$ . Da  $\mathbb{K}$  lokalkompakt ist, hat  $(c_n)$  einen Häufungspunkt, also gelte ohne Einschränkung  $c_n \rightarrow c$  (ansonsten wähle eine konvergente Teilfolge von  $(c_n)$ ). Wegen  $\infty \in \Omega(G)$  ist die Folge  $\frac{a_n}{c_n} = g_n(\infty)$

beschränkt, also ohne Einschränkung  $a_n \rightarrow a$ . Ebenso ist  $-\frac{d_n}{c_n} = g_n^{-1}(\infty)$  beschränkt, also ohne Einschränkung  $d_n \rightarrow d$ . Auch  $\frac{b_n}{d_n} = g_n(0)$  ist beschränkt, da sonst in jeder Umgebung von  $\infty$  unendlich viele  $G$ -äquivalente Punkte liegen, also ohne Einschränkung  $b_n \rightarrow b$ . Es folgt  $a_n d_n - b_n c_n \rightarrow ad - bc = 1$  und  $\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ . Dies ist nach Bemerkung 19.2 ein Widerspruch zur Diskontinuität von  $G$ . ■

**Folgerung 19.4** Ist  $G < \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$  diskontinuierlich, so ist für jede Ecke  $x \in E(T_p)$  die Fixgruppe  $G_x$  endlich.

BEWEIS: Ohne Einschränkung können wir Folgendes annehmen:

- $G < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Q}_p)$  (sonst ersetze  $\mathbb{Q}_p$  durch den Körper  $\mathbb{K}$  mit  $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}_p] = 4$ , in dem alle quadratischen Polynome über  $\mathbb{Q}_p$  zerfallen).
- $x = \mathbf{K}_1(0)$  (sonst wähle  $g \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$  mit  $g(x) = \mathbf{K}_1(0)$  und betrachte  $gG_xg^{-1} = (gGg^{-1})_{\mathbf{K}_1(0)}$ ).
- $\infty \in \Omega(G)$  (sonst finde für  $z \in \Omega(G)$  ein  $g \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}_p)$  mit  $g(z) = \infty$  und ersetze  $G$  durch  $gGg^{-1}$ ).

Nach Bemerkung 19.3 enthält  $G$  nur endlich viele Elemente  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  mit  $|c| \leq 1$ , also auch  $c \in \mathbb{Z}_p$ . Der Stabilisator von  $\mathbf{K}_1(0)$  ist nach Proposition 16.8 aber gerade  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}_p)$ . ■

**Bemerkung 19.5** Ist  $G$  eine endlich erzeugte Untergruppe von  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$ , so gibt es in  $T_p$  einen  $G$ -invarianten Teilbaum  $T_p(G)$ , so dass  $T_p(G)/G$  ein endlicher zusammenhängender Graph ist.

BEWEIS: Es seien  $g_1, \dots, g_n$  die Erzeuger von  $G$  und so geordnet, dass  $g_1, \dots, g_k$  hyperbolisch und  $g_{k+1}, \dots, g_n$  elliptisch oder parabolisch sind. Ohne Einschränkung habe jedes  $g_j$ ,  $j = k+1, \dots, n$ , einen Fixpunkt  $x_j$  in  $T_p$ . Für jedes hyperbolische  $g_i$  sei  $F_i$  ein Abschnitt in der Achse  $A_{g_i}$  mit Anfangspunkt  $x_i$  und Endpunkt  $g_i(x_i)$ . Es sei  $F$  der von den  $F_i$  und den  $x_j$  aufgespannte Teilbaum von  $T_p$ , und

$$T_p(G)/G := \bigcup_{g \in G} g(F).$$

Dieser Graph ist nach Konstruktion  $G$ -invariant.  $T_p(G)$  ist zusammenhängend, da für jedes  $i = 1, \dots, n$  gilt:

$$F \cap g_i(F) \neq \emptyset,$$

und mit Induktion über die Länge  $\ell(g)$  von  $g \in G$  als Wort in  $g_1, \dots, g_n$  folgt, dass  $T_p(G)$  zusammenhängend ist. ■

Wir kombinieren die Endlichkeitsaussagen der Bemerkungen 19.3 und 19.5 im folgenden Satz.

**Satz 19.6** Es sei  $G$  eine endlich erzeugte diskontinuierliche Untergruppe von  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$ . Dann gilt:

1.  $G$  ist isomorph zur Fundamentalgruppe eines endlichen Graphen von endlichen Gruppen.
2.  $G$  ist **virtuell frei**, d.h.  $G$  enthält eine freie Untergruppe, die ein Normalteiler von endlichem Index ist.

BEWEIS:

1. Dies folgt aus Bemerkung 19.5, Folgerung 19.4 und Satz 12.3.
2. Folgt aus Teil 1 und dem folgenden Satz 19.7. ■

**Satz 19.7** Ist  $G$  die Fundamentalgruppe eines endlichen, zusammenhängenden Graphen  $\mathcal{G} = (\Gamma, G_x, G_k, \alpha_k)$  von endlichen Gruppen, so ist  $G$  virtuell frei.

BEWEIS: Induktion über die Anzahl  $n$  der Kanten von  $\Gamma$ .

$n = 0$ : In diesem Fall ist nichts zu zeigen.

$n \geq 1$ : Es sei  $k \in K(\Gamma)$  und  $\Gamma' = \Gamma - k$ . Wir unterscheiden nun die Fälle, dass  $\Gamma'$  zusammenhängend ist oder nicht.

1.  $\Gamma'$  ist zusammenhängend. Es sei  $G'$  die Fundamentalgruppe des Graphen von Gruppen zu  $\Gamma'$  und  $C = G_k$ . Dann ist  $G = \mathrm{HNN}(G', C, \alpha_k, \alpha_{\bar{k}})$ .
2.  $\Gamma'$  ist nicht zusammenhängend. Dann ist die  $\Gamma'$  die disjunkte Vereinigung  $\Gamma' = \Gamma'_1 \dot{\cup} \Gamma'_2$ . In diesem Fall seien  $G_1$  und  $G_2$  die Fundamentalgruppen von  $\Gamma'_1$  bzw.  $\Gamma'_2$  und  $C = G_k$ . Es ist  $G = G_1 *_C G_2$ .

Nach Induktionsvoraussetzung haben  $G'$  bzw.  $G_1$  und  $G_2$  freie Normalteiler  $F'$  bzw.  $F_1$  und  $F_2$  von endlichem Index. Je nach Fall sei nun  $A = G'/F'$  bzw.  $A = G_1/F_1$  und  $B = G_2/F_2$ . Weiter seien  $p_A$  bzw.  $p_B$  die entsprechenden Restklassenhomomorphismen. Dann sind  $p_A|_{\alpha_k(C)}$  und  $p_B|_{\alpha_{\bar{k}}(C)}$  injektiv (da die endliche Gruppe  $\alpha_k(C)$  nur trivialen Schnitt mit dem freien Kern der Abbildung haben kann).

Im ersten Fall induziert  $p_A$  einen Homomorphismus

$$p : G \rightarrow \mathrm{HNN}(A, C, p_A \circ \alpha_k, p_A \circ \alpha_{\bar{k}}) = \langle G', t | t \alpha_k(c) t^{-1} = \alpha_{\bar{k}}(c) \ \forall c \in C \rangle.$$

Im zweiten Fall induzieren  $p_A$  und  $p_B$  einen Homomorphismus

$$p : G \rightarrow A *_C B.$$

Ist  $H \leq G$  eine endliche Untergruppe, so ist  $H \cap \mathrm{Kern}(p) = \{1\}$ , denn  $H$  ist konjugiert zu einer Untergruppe von  $G'$  bzw. von  $G_1$  oder  $G_2$ , aber  $\mathrm{Kern}(p) \cap G_1 = \mathrm{Kern}(p) \cap F_1$ . Wir verwenden die folgenden Behauptungen, die im Anschluss an den Beweis des Satzes bewiesen werden:

1. Im ersten Fall gibt es eine endliche Gruppe  $G_0$  und einen Homomorphismus  $\varphi : \mathrm{HNN}(A, C, p_A \circ \alpha_k, p_B \circ \alpha_{\bar{k}}) \rightarrow G_0$ , so dass  $\varphi|_A$  injektiv ist.
2. Im zweiten Fall gibt es eine endliche Gruppe  $G_0$  und einen Homomorphismus  $\varphi : A *_C B \rightarrow G_0$ , so dass  $\varphi|_A$  und  $\varphi|_B$  injektiv sind.

Dann setzen wir  $\varrho := \varphi \circ p : G \rightarrow G_0$ . Es gilt, dass  $\varrho|_H$  injektiv ist für alle endlichen Untergruppen  $H \leq G$ . Also ist  $\mathrm{Kern}(\varrho)$  ein Normalteiler von endlichem Index, da das Bild endlich ist. Im zweiten Fall folgt aus Folgerung 9.4, dass  $\mathrm{Kern}(\varrho)$  frei ist. Im ersten Fall kann man dies aus einer analogen Aussagen für die HNN-Erweiterung folgern.

Damit ist der Satz bewiesen und es bleibt die Existenz von  $G_0$  und  $\varphi$  zu zeigen. Wir beginnen mit dem zweiten Fall:

Dazu seien  $A/C = \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_d\}$  und  $B/C = \{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_e\}$  die Mengen der Rechtsnebenklassen (eigentlich:  $A/(p_A \circ \alpha_k(C))$  und  $B/(p_B \circ \alpha_{\bar{k}}(C))$ ), und  $X$  sei die Menge

$$X = A/C \times C \times B/C.$$

Dann ist

$$A/C \times C \rightarrow A, \quad (\bar{a}_i, c) \mapsto a_i c$$

eine bijektive Abbildung.  $A$  operiert auf  $A/C \times C$  durch Rechtsmultiplikation, d.h.  $a \cdot (\bar{a}_i, c) = (\bar{a}_j, \tilde{c})$ , wenn  $a_j \tilde{c} = a_i c a$  gilt, insbesondere ist  $c' \cdot (\bar{a}_i, c) = (\bar{a}_i, cc')$  für  $c' \in C$ . Somit operiert  $A$  auch auf  $X$  durch  $a \cdot (\bar{a}_i, c, \bar{b}_j) = (a \cdot (\bar{a}_i, c), \bar{b}_j)$ . Entsprechend operiert  $B$  auf  $C \times B/C$  durch  $b \cdot (c, \bar{b}_j) = (\tilde{c}, \bar{b}_k)$ , wenn  $b_k \tilde{c} = b_j c b$ . Ebenso operiert  $B$  auf  $X$ . Wir erhalten so injektive Homomorphismen  $\psi_A : A \rightarrow \mathrm{Perm}(X)$  und  $\psi_B : B \rightarrow \mathrm{Perm}(X)$  mit  $\psi_A \circ \alpha_k = \psi_B \circ \alpha_{\bar{k}}$ . Wähle also  $G_0 = \mathrm{Perm}(X)$ . Durch die UAE von  $A *_C B$  erhalten wir einen eindeutigen Homomorphismus  $\varphi$  mit  $\varphi|_A = \psi_A$  und  $\varphi|_B = \psi_B$ .

Nun zeigen wir die Existenz von  $G_0$  und  $\varphi$  für den ersten Fall:

Dazu seien  $C_1 = \alpha_k(C)$ ,  $C_2 = \alpha_{\bar{k}}(C)$  und  $\psi := \alpha_{\bar{k}} \circ \alpha_k^{-1} : C_1 \xrightarrow{\sim} C_2$ . Weiter seien  $a_1, \dots, a_d$  Repräsentanten von  $A/C_1$  und  $a'_1, \dots, a'_d$  Repräsentanten von

$A/C_2$ . Jedes  $a \in A$  hat also eine eindeutige Darstellung  $a = a_i c$  für ein  $i$  und  $c \in C_1$ . Somit ist die Abbildung

$$\vartheta : A \rightarrow A, \quad a = a_i c \mapsto a'_i \psi(c)$$

bijektiv. Für  $a \in A$  und  $c' \in C_1$  ist

$$\begin{aligned} \vartheta(ac') &= \vartheta(a_i cc') \\ &= a'_i \psi(cc') \\ &= a'_i \psi(c) \psi(c') \\ &= \vartheta(a) \psi(c'). \end{aligned} \quad (*)$$

Wähle nun  $G_0 = \mathrm{Perm}(A)$  und definiere  $\varphi : \mathrm{HNN}(A, C, \alpha_k, \alpha_{\bar{k}}) \rightarrow G_0$  durch

$$\begin{aligned} \varphi(a)(a') &= a'a \quad \text{für alle } a, a' \in A, \\ \varphi(t) &= \vartheta. \end{aligned}$$

$\varphi$  ist wohldefiniert: Für  $c \in C_1$  ist  $tct^{-1} = \psi(c)$ . Für  $a \in A$  ist

$$\begin{aligned} \varphi(tct^{-1})(a) &= \vartheta(\varphi(c)(\vartheta^{-1}(a))) \\ &= \vartheta(\vartheta^{-1}(a)c) \\ &\stackrel{(*)}{=} \vartheta(\vartheta^{-1}(a))\psi(c) \\ &= a\psi(c). \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. ■

**Beispiel 19.8** Als Beispiel zur Konstruktion von  $G_0$  und  $\varphi$  aus dem Beweis von Satz 19.7 betrachten wir

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Schreiben wir  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{1, a, c, ac\}$  und  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{1, b, b^2, c, bc, b^2c\}$ , so ist

$$X = \{1, a\} \times \{1, c\} \times \{1, b, b^2\}.$$

Es ist  $|X| = 12$ , also  $G_0 = \mathrm{S}_{12}$ . Es ist  $\mathrm{Bild}(\varphi) = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ .

Ohne Beweis stellen wir fest, dass auch die Umkehrung von Satz 19.7 gilt.

**Satz 19.9** Eine endlich erzeugte Gruppe ist genau dann virtuell frei, wenn sie Fundamentalgruppe eines zusammenhängenden, endlichen Graphen von endlichen Gruppen ist.

## Literatur

- [1] R. DIESTEL  
*Graphentheorie*  
Springer 2006  
<http://www.math.uni-hamburg.de/home/diestel/books/graphentheorie/>
- [2] M. GRASSL, W. GLOBKE  
*Algorithmen für Gruppen und Codes*  
<http://www.stud.uni-karlsruhe.de/~uy7t/zeugs/>
- [3] A. HATCHER  
*Algebraic Topology*  
Cambridge University Press 2001  
<http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html>
- [4] S. LANG  
*Algebra*  
Springer 2002
- [5] J.P. SERRE  
*Trees*  
Springer 1980
- [6] B.L. VAN DER WAERDEN  
*Algebra II*  
Springer 1993

# Index

- $E(\Gamma)$  (Ecken), 1
- $F(X)$  (freie Gruppe), 20
- $G_1 * G_2$  (freies Produkt), 28
- $G_1 *_A G_2$  (Amalgam), 32
- $G_x$  (Fixgruppe), 38
- $Gk$  (Bahn von  $k$ ), 17
- $K(\Gamma)^+, K(\Gamma)^-$  (Orientierung), 1
- $K(\Gamma)$  (Kanten), 1
- $T_p$  (Bruhat-Tits-Baum), 69
- $T_p^*$  (Unterteilung von  $T_p$ ), 77
- $\text{Aut}(\Gamma)$ , 9
- $F(\mathcal{G})$ , 53
- $\mathcal{G}(\Gamma, \varrho)$  (Graph von Gruppen), 39
- $\Gamma(G, S)$  (Cayley-Graph), 10
- $\Gamma - x$ , 5
- $\Gamma/G$  (Quotientengraph), 17
- $\Gamma/Z$  (Kontraktion), 7
- $\Gamma_{\text{sub}}$  (Unterteilung), 19
- $\Gamma$  (Graph), 1
- $\mathbf{K}_r(a)$  (Kreis in  $\mathbb{Q}_p$ ), 67
- $\Omega(G)$  (gewöhnliche Punkte), 89
- $\text{PGL}_2$ , 73
- $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$  (projektive Gerade), 70
- $\text{PSL}_2$ , 30, 77
- $\mathbb{Q}_p$  ( $p$ -adische Zahlen), 65
- $\mathbb{Z}_p$  ( $p$ -adische Zahlen), 63
- $\ell(x)$  (Länge), 37
- $\text{EP}(\Gamma)$  (Endpunkte), 5
- $\hat{\mathbb{C}}$  (Riemmansche Zahlenkugel), 89
- $i(k), t(k)$ , 1
- $\mathbf{M}(a, b, c)$  (Median), 71
- $\pi_1(\mathcal{G}, T), \pi_1(\mathcal{G})$  (Fundamentalgruppe), 52
- $\pi_1(\Gamma, p), \pi_1(\Gamma)$  (Fundamentalgruppe), 23
- $\text{Typ}(x)$ , 37
- $v(a)$  ( $p$ -adische Bewertung), 66
- $d(\Gamma)$  (Durchmesser), 4
- $d(x, y)$  (Metrik), 4
- $e(\Gamma), k(\Gamma)$ , 7
- $g(\Gamma)$  (Geschlecht), 7
- $v(x)$  (Valenz), 5
- Achse, 70
- Aktion, 12
  - diskontinuierlich, 89
  - effektiv, 12
  - frei, 21
  - inversionsfrei, 17
  - treu, 12
- amalgamiertes Produkt, 32
- Anfangspunkt, 2
- aufspannender Baum, 6
- Automorphismengruppe, 9
- Automorphismus, 2
- baryzentrische Unterteilung, 19, 77
- Baum, 4
  - aufspannend, 6
- Betti-Zahl (siehe Geschlecht), 7
- Bruhat-Tits-Baum, 69
- Cayley-Graph, 10
- Diedergruppe, 10, 91
- diskontinuierlich, 89
- Doppelkante, 3
- Durchmesser, 4
- Ecke, 1
- effektiv (siehe treue Aktion), 12
- einfacher Weg, 3
- elliptisch, 84
- Ende, 69
- endlich
  - Präsentation, 27
- endlich präsentierbar, 27
- Endpunkt, 2, 5
- Fixgruppe, 38
- frei operieren, 21
- freie Gruppe, 20
- freies Produkt, 28

- 
- Fundamentalebene, 40, 43
  - Fundamentalgruppe, 23, 46, 51, 52
  - Gerüst, 6
  - Geschlecht, 7
  - geschlossener Weg, 3
  - gewöhnliche Punkte, 89
  - Graph, 1
    - baryzentrische Unterteilung, 19
    - Baum, 4
    - Cayley-, 10
    - kombinatorisch, 4
    - Quotienten-, 17
    - Unterteilung, 19
    - von Gruppen, 39
    - zusammenhängend, 3
  - Gruppe
    - Aktion, 12
    - Automorphismen, 9
    - Cayley-Graph, 10
    - diskontinuierlich, 89
    - endlich präsentierbar, 27
    - Fix-, 38
    - frei, 20
    - freies Produkt, 28
    - Fundamental-, 23
    - Koprodukt, 29
    - Schottky-, 87
    - topologisch, 93
    - virtuell frei, 95
  - Halbebene, 40
  - HNN-Erweiterung, 51
  - hyperbolisch, 84
  - Ihara's Satz, 85
  - Ikosaedergruppe, 91
  - Index (siehe Ordnung), 5
  - Ineffektivitätskern, 12
  - inversionsfreie Aktion, 17
  - Isomorphismus, 2
    - geometrisch, 1
    - orientiert, 1
  - Klassifikation in  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$ , 83
  - Kleinsche Vierergruppe, 15
  - kombinatorischer Graph, 4
  - Kontraktion, 8
  - Koprodukt, 29
  - Kreis, 3
    - in  $\mathbb{Q}_p$ , 67
    - Schleife, 3
  - Kurosh's Satz, 60
  - Länge, 37
  - Möbiustransformation, 40, 72
  - Median, 71
  - Metrik, 4
  - Morphismus, 2
    - äquivariant, 48
  - Nielsen-Schreier-Satz, 22
  - Normalform, 35
  - obere Halbebene, 40
  - Oktahedergruppe, 91
  - Operation (siehe Aktion), 12
  - Ordnung, 5
  - orientierte Kanten, 1
  - Orientierung, 1, 69
  - p-adische Bewertung, 66
  - p-adische Zahlen
    - Körper, 65
    - Ring, 63
  - p-adischer Betrag, 66
  - parabolisch, 84
  - Präsentation, 27
    - endlich, 27
  - projektive Gerade, 70
  - projektive Gruppe, 73
    - spezielle, 30, 77
  - Quotientengraph, 17
  - reduziertes Wort, 57



- 
- Relationen, 27
  - Riemannsche Zahlenkugel, 89
  - Satz
    - Ihara, 85
    - Kurosh, 60
    - Nielsen-Schreier, 22
  - Schleife, 3
  - Schottky-Gruppe, 87
  - Segment, 43
  - simplizialer Komplex, 4
  - Stabilisator (siehe Fixgruppe), 38
  - stachelfreier Weg, 3
  - Strahl, 69
    - äquivalent, 69
  - Tetraedergruppe, 91
  - topologische Gruppe, 93
  - treue Aktion, 12
  - Typ, 37, 53, 57
  - UAE, 20, 28
  - unendliche Kette, 6
  - universelle Überlagerung, 27, 53
  - universelle Abbildungseigenschaft, 20
  - Unterteilung, 19, 77
  - Valenz (siehe Ordnung), 5
  - virtuell frei, 95
  - Wald, 8
  - Weg, 2
    - einfach, 3
    - geschlossen, 3
    - Kreis, 3
    - Schleife, 3
    - stachelfrei, 3
  - Wort
    - reduziert, 57
    - vom Typ  $w$ , 57
  - zusammenhängend
    - Graph, 3
  - zyklisch reduziert, 37
  - zyklomatische Zahl (siehe Geschlecht), 7