

Kapitel 4

Höhere Dimensionen und weitere Modelle

4.1 Höhere Dimensionen

Für die euklidische Ebene $\mathbb{E}^2 = (\mathbb{R}^2, d_e)$ ist der n -dimensionale euklidische Raum $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, d_e)$ mit

$$d_e : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto d_e(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}$$

die naheliegende Verallgemeinerung. Durch Nullsetzen der Koordinaten $3, \dots, n$ sehen wir in ihr die ebene euklidische Geometrie. Analog können wir die zweidimensionale sphärische Geometrie auf \mathbb{S}^2 auf

$$\mathbb{S}^n := \left\{ x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 = 1 \right\}$$

übertragen. Auch hier findet man \mathbb{S}^2 wieder. Für die zweidimensionale hyperbolische Geometrie haben wir bereits das Halbebenenmodell

$$\mathbb{H}^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}, \quad ds_h^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{x_2^2}$$

kennengelernt. Für eine differentierbare Kurve $c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{H}^2$, $c(t) = (x_1(t), x_2(t))$ liefert dies eine Längenmessung

$$L_h(c) = \int_a^b \|c'(t)\|_{c(t)}^h dt = \int_a^b \frac{\sqrt{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2}}{x_2(t)} dt$$

ein Modell für die n -dimensionale hyperbolische Geometrie ist dann kanonisch gegeben durch

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\},$$

dem *oberen Halbraum*. Für das Wegelement gilt

$$ds_{\mathbb{H}^n}^2 = \frac{\sum_{k=1}^n dx_k^2}{x_n^2},$$

wir erhalten für eine differenzierbare Kurve $c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))$ also durch

$$L_{\mathbb{H}^n}(c) = \int_a^b \|c'(t)\|_{c(t)}^{\mathbb{H}^n} dt = \int_a^b \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^n (c'_k(t))^2}}{c_n(t)} dt$$

eine Längenmessung. Diese liefert eine Längenmetrik

$$d_{\mathbb{H}^n} : \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (p, q) \mapsto d_{\mathbb{H}^n}(p, q) := \inf_{c \in \Omega_{pq}(\mathbb{H}^n)} L_{\text{hyp}}(c).$$

Damit wird $(\mathbb{H}^n, d_{\mathbb{H}^n})$ zu einem metrischen Raum. Dieser ist ein Modell für die n -dimensionale hyperbolische Geometrie.

Weiter hatten wir bereits das Einheitskreismodell für die ebene hyperbolische Geometrie kennengelernt. Dieses lässt sich ebenfalls verallgemeinern zu

$$\mathbb{D}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^n x_k^2 < 1\},$$

wobei für das Wegelement

$$ds_{\mathbb{D}^n}^2 = \frac{4 \sum_{k=1}^n dx_k^2}{(1 - \sum_{k=1}^n x_k^2)^2}$$

gilt. Damit wird $(\mathbb{D}^n, d_{\mathbb{D}^n})$ zu einem metrischen Raum, dem *Einheitsballmodell* der n -dimensionalen hyperbolischen Geometrie.

Bemerkung 4.1.1 (i) Wir werden sehen: Die beiden vorgestellten Modelle $(\mathbb{H}^n, d_{\mathbb{H}^n})$ und $(\mathbb{D}^n, d_{\mathbb{D}^n})$ sind isometrisch.
(ii) \mathbb{H}^n und \mathbb{D}^n enthalten (viele) Kopien von $\mathbb{H}^2, \mathbb{D}^2$ (beispielsweise durch Nullsetzen von Koordinaten).

4.2 Das Hyperboloidmodell

Definiere auf \mathbb{R}^{n+1} die quadratische Form

$$\star : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x \star y = \sum_{k=1}^n x_k y_k - x_{n+1} y_{n+1}.$$

Definiere für $c \in \mathbb{R}$ dann $\mathbb{L}_c^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \star x = c\}$. \mathbb{L}_0 heißt auch *Nullkegel*. $\mathbb{L}_{-c^2}^3$ spielt in der speziellen Relativitätstheorie eine wichtige Rolle (Lorentz-Minkowski-Raumzeit). Für unser hyperbolisches Modell setze

$$\mathbb{L}^n := \mathbb{L}_{-1}^n := \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1\}.$$

Im Folgenden wollen wir eine Längemessung auf \mathbb{L}^n definieren. Für eine differenzierbare Kurve $c : I \longrightarrow \mathbb{L}^n$, $t \mapsto c(t) = (c_1(t), \dots, c_{n+1}(t))$ gilt $c(t) \star c(t) = -1$ für alle $t \in I$, also

$$-1 = c(t) \star c(t) = c_1(t)^2 + \dots + c_n(t)^2 - c_{n+1}(t)^2.$$

Ableiten auf beiden Seiten liefert

$$0 = c'_1(t)c_1(t) + \dots + c'_n(t)c_n(t) - c'_{n+1}(t)c_{n+1}(t) = c'(t) \star c(t).$$

der Tangentialraum an $c(t)$ in $p \in \mathbb{L}^n$ ist also

$$\begin{aligned} T_p \mathbb{L}^n &= \{c'(0) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid c : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{L}^n \text{ ist differenzierbar mit } c(0) = p\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \star p = 0\} \\ &= p^{\perp \star}, \end{aligned}$$

der Orthogonalraum von p bezüglich der quadratischen Form \star .

Lemma 4.2.1 *Die quadratische Form \star auf \mathbb{R}^{n+1} eingeschränkt auf den Tangentialraum $T_p \mathbb{L}^n$ von \mathbb{L}^n im Punkt p ist positiv definit für alle $p \in \mathbb{L}^n$.*

Beweis. Sei $p = (p_1, \dots, p_n, p_{n+1}) = (\hat{p}, p_{n+1}) \in \mathbb{L}^n$ mit $\hat{p} \in \mathbb{R}^n$ und $x = (\hat{x}, x_{n+1}) \in T_p \mathbb{L}^n$ mit $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$. Sei weiter mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf \mathbb{R}^n gegeben. Wir betrachten zwei Fälle.

Fall (a) Es gilt $x_{n+1} = 0$. Dann ist $x \star x = \langle \hat{x}, \hat{x} \rangle$ und \star ist damit wegen der positiven Definitheit von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ebenfalls positiv definit.

Fall (b) Sei nun $x_{n+1} \neq 0$. Dann gilt auch $x = (\hat{x}, x_{n+1}) \neq 0$. Wir müssen also zeigen, dass

$x \star x > 0$. Nach Definition des Tangentialraums ist

$$0 = x \star p = x_1 p_1 + \dots + x_n p_n - x_{n+1} p_{n+1} = \langle \hat{x}, \hat{p} \rangle - x_{n+1} p_{n+1}$$

und da $p \in \mathbb{L}^n$ weiter

$$-1 = p \star p = \langle \hat{p}, \hat{p} \rangle - p_{n+1}^2.$$

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ergibt

$$\langle \hat{x} \hat{x} | \hat{p} \hat{p} \rangle \geq \langle \hat{x}, \hat{p} \rangle^2 = (x_{n+1} p_{n+1})^2 = x_{n+1}^2 (1 + \langle \hat{p}, \hat{p} \rangle)$$

und damit

$$(x \star x) \langle \hat{p}, \hat{p} \rangle = (\langle \hat{x}, \hat{x} \rangle - x_{n+1}^2) \langle \hat{p}, \hat{p} \rangle \geq x_{n+1}^2 > 0.$$

Da $\langle \hat{p}, \hat{p} \rangle > 0$, folgt $x \star x > 0$, was zu zeigen war. \square .

Bemerkung 4.2.2 (i) Aus Lemma 4.2.1 folgt, dass \star für alle $p \in \mathbb{L}^n$ ein Skalarprodukt auf $T_p \mathbb{L}^n$ definiert, also eine Riemannsche Metrik ist. Das Wegelement

$$ds_{\mathbb{L}^n}^2 = \sum_{k=1}^n dx_k^2 - dx_{n+1}^2$$

induziert für differenzierbare Kurven $c : I \rightarrow \mathbb{L}^n$, $c(t) = (c_1(t), \dots, c_{n+1}(t))$ eine Längenmessung

$$L_h(c) = \int_I \sqrt{\sum_{k=1}^n c'_k(t)^2 - c'_{n+1}(t)^2} dt.$$

Diese liefert eine Abstandsfunktion $d_{\mathbb{L}^n}$, womit $(\mathbb{L}^n, d_{\mathbb{L}^n})$ zu einem metrischen Raum wird, dem Hyperboloidmodell für die n -dimensionale hyperbolische Geometrie.

(ii) Die Kurve

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^n, \quad t \mapsto c(t) = (\sinh t, 0, \dots, 0, \cosh t)$$

ist eine isometrische Einbettung (d.h. $c(\mathbb{R})$ ist eine hyperbolische Geodätische), denn für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $c(t) \star c(t) = \sinh^2 t - \cosh^2 t = -1$ sowie

$$\|c'(t)\|_{\mathbb{L}^n}^2 = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1,$$

also

$$d_{\mathbb{L}^n}(c(t_1), c(t_2)) = \int_{t_1}^{t_2} \|c'(t)\|_{\mathbb{L}^n}^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} dt = t - s = d_e(s, t),$$

das heißt c ist eine abstandstreue Kurve, also eine Isometrie.

4.3 Die Modelle sind isometrisch

Satz 4.3.1 Die metrischen Räume $(\mathbb{H}^n, d_{\mathbb{H}^n})$, $(\mathbb{D}^n, d_{\mathbb{D}^n})$ und $(\mathbb{L}^n, d_{\mathbb{L}^n})$ sind isometrische Modelle der n -dimensionalen hyperbolischen Geometrie.

Beweis. Für den Beweis wollen wir ein weiteres Modell angeben und anschließend explizite Isometrien in die drei obigen Modelle angeben. Betrachte die obere Hemisphäre

$$\mathbb{K}^n := \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1, x_{n+1} > 0 \right\}$$

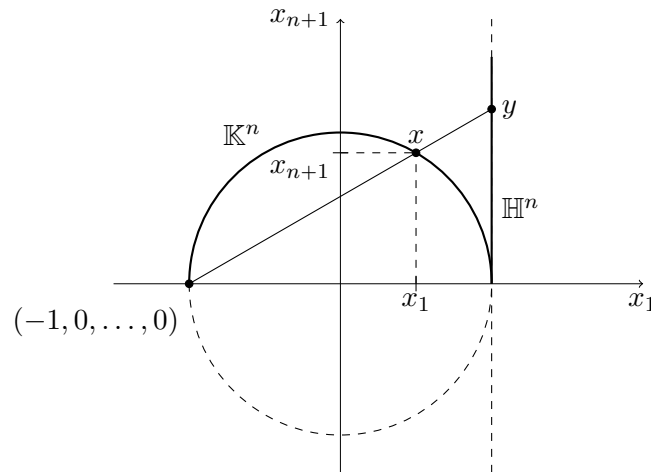
mit dem Wegelement

$$ds_{\mathbb{K}^n}^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2}.$$

Diese wird zu einem metrischen Raum $(\mathbb{K}^n, d_{\mathbb{K}^n})$. Betrachte nun die Abbildung

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{H}^n := \{(1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} > 0\} \\ x = (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto \alpha(x) =: y = \left(1, \frac{2x_2}{x_1 + 1}, \dots, \frac{2x_{n+1}}{x_1 + 1}\right) =: (y_1, \dots, y_{n+1}) \end{aligned}$$

Dann ist α gerade die Zentralprojektion von $(-1, 0, \dots, 0)$ aus.

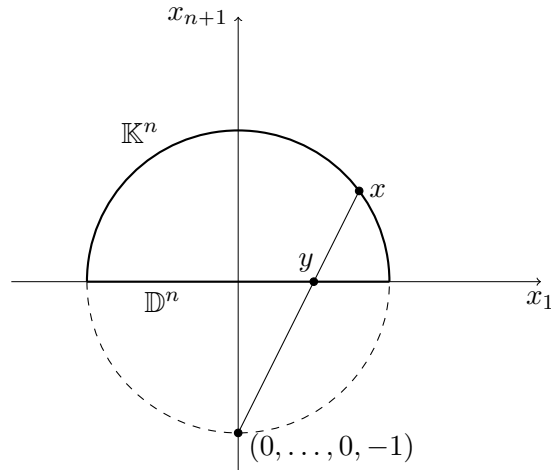


Die Formel für α ergibt sich direkt durch den Strahlensatz. Definiere nun

$$\beta : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{D}^n = \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0, \sum_{i=1}^n x_i^2 < 1 \right\}$$

$$x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \beta(x) =: y = \left(\frac{x_1}{x_{n+1} + 1}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1} + 1}, 0 \right) = (y_1, \dots, y_{n+1})$$

Dann ist β die Zentralprojektion von $(0, \dots, 0, -1)$ aus:



Auch hier ergibt sich die Formel unmittelbar. Definiere schließlich noch

$$\gamma : \mathbb{L}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n, \quad x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \gamma(l) =: y = \left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}, \frac{1}{x_{n+1}} \right) = (y_1, \dots, y_{n+1})$$

Auch γ ist die Zentralprojektion von $(0, \dots, 0, -1)$ aus. Wir zeigen nun (exemplarisch): Für eine differenzierbare Kurve $c : I \longrightarrow \mathbb{K}^n$, $t \mapsto (x_1(t), \dots, x_{n+1}(t))$ gilt

$$L_{\mathbb{H}^n}(\alpha \circ c) = L_{\mathbb{K}^n}(c),$$

das heißt α ist längentreu. Daraus folgt mit den Definitionen der Metriken bereits $d_{\mathbb{H}^n}(\alpha(p), \alpha(q)) = d_{\mathbb{K}^n}(p, q)$ für alle $p, q \in \mathbb{K}^n$, also dass α eine Isometrie ist. Parametrisiere nun die Bildkurve $\alpha \circ c$ durch

$$y_2(t) := \frac{2x_2(t)}{x_1(t) + 1}, \dots, y_{n+1}(t) := \frac{2x_{n+1}(t)}{x_1(t) + 1}.$$

Es gilt dann

$$y'_k(t) = \frac{dy_k(t)}{dt} = \frac{2x'_k(t)(x_1(t) + 1) - 2x_k(t)x'_1(t)}{(x_1(t) + 1)^2} = \frac{2}{x_1(t) + 1} \left(x'_k(t) - \frac{x_k(t)}{x_1(t) + 1} x'_1(t) \right).$$

Wegen

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i(t)^2 = 1$$

folgt

$$\sum_{i=2}^{n+1} x_i(t)^2 = 1 - x_1(t)^2$$

und

$$x_1(t)x_1'(t) = - \sum_{i=2}^{n+1} x_i(t)x_i'(t).$$

Damit erhalten wir

$$L_{\mathbb{H}^n}(\alpha \circ c) = \int_I \frac{1}{y_{n+1}(t)} \sqrt{\sum_{i=2}^{n+1} y_i'(t)^2} dt, \quad L_{\mathbb{K}^n}(c) = \int_I \frac{1}{x_{n+1}(t)} \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} x_i'(t)^2} dt.$$

Für die Integranden rechnen wir mit $x_k := x_k(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y_{n+1}^2} \left(\sum_{i=2}^{n+1} (y_i')^2 \right) &= \frac{(x_1 + 1)^2}{4x_{n+1}^2} \frac{4}{(x_1 + 1)^2} \left(\sum_{i=2}^{n+1} \left(x_i' - \frac{x_i}{x_1 + 1} x_1' \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{x_{n+1}^2} \left(\sum_{i=2}^{n+1} (x_i')^2 - \frac{2x_1'}{x_1 + 1} x_1 \sum_{i=2}^{n+1} x_i' x_i + \frac{(x_1')^2}{(x_1 + 1)^2} \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2 \right) \\ &= \frac{1}{x_{n+1}^2} \left(\sum_{i=2}^{n+1} (x_i')^2 + \frac{2x_1'}{x_1 + 1} x_1 x_1' + \frac{(x_1')^2}{(x_1 + 1)^2} (1 - x_1^2) \right) \\ &= \frac{1}{x_{n+1}^2} \left(\sum_{i=2}^{n+1} (x_i')^2 + (x_1')^2 \frac{2x_1}{x_1 + 1} + (x_1')^2 \frac{(1 - x_1)(1 + x_1)}{(x_1 + 1)^2} \right) \\ &= \frac{1}{x_{n+1}^2} \left(\sum_{i=2}^{n+1} (x_i')^2 + \frac{(x_1')^2}{x_1 + 1} (2x_1 + 1 - x_1) \right) \\ &= \frac{1}{x_{n+1}^2} \left(\sum_{i=1}^{n+1} (x_i')^2 \right), \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. Für β und γ verfähre analog. □

4.4 Isometrien und Geodätische des Halbraum-Modells

Satz 4.4.1 *Die folgenden Selbstabbildungen sind Isometrien von $(\mathbb{H}^n, d_{\mathbb{H}^n})$:*

- (i) *Euklidische Drehungen um die x_n -Achse.*
- (ii) *Translationen parallel zur Hyperebene $x_n = 0$.*
- (iii) *Streckungen $x \mapsto \lambda x$ für $\lambda > 0$.*

Beweis. (i) Eine Rotation um die x_n -Achse ist gegeben durch eine Matrix

$$R = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}(n), \quad A \in \mathcal{O}(n-1).$$

Ist $c : I \longrightarrow \mathbb{H}^n$ eine differenzierbare Kurve mit $c(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, so ist

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{H}^n}(R \circ c) &= \int_I \frac{1}{(R \circ c)_n(t)} \sqrt{\sum_{i=1}^n (R \circ c)'_i(t)^2} \, dt \\ &= \int_I \frac{1}{x_n(t)} \|(R \circ c)'\|_e \, dt \\ &= \int_I \frac{1}{x_n(t)} \|Rc'(t)\|_e \, dt \\ &= \int_I \frac{1}{x_n(t)} \|c'(t)\|_e \, dt \\ &= L_{\mathbb{H}^n}(c), \end{aligned}$$

wobei die Linearität von R sowie $R \in \text{Isom}(\mathbb{E}^n)$ benutzt wurde.

(ii) Eine Translation in (x_1, \dots, x_{n-1}) -Richtung ist gegeben durch die Abbildung

$$T_a : \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}^n, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1 + a_1, \dots, x_{n-1} + a_{n-1}, x_n)$$

mit $(a_1, \dots, a_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^n$. Dann gelten jedoch erneut $(T_a \circ c)'(t) = c'(t)$ sowie $\frac{1}{(T_a \circ c)_n(t)} = \frac{1}{x_n(t)}$, woraus $L_{\mathbb{H}^n}(c) = L_{\mathbb{H}^n}(T_a \circ c)$ folgt.

(iii) Ein Streckung ist durch eine Abbildung

$$s_\lambda : \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}^n, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

gegeben. Dann gilt

$$\frac{1}{(s_\lambda \circ c)_n(t)} \sqrt{\sum_{i=1}^n (s_\lambda \circ c)'_i(t)^2} = \frac{1}{\lambda x_n(t)} \sqrt{\lambda^2 \sum_{i=1}^n x'_i(t)^2} = \frac{1}{x_n(t)} \sqrt{\sum_{i=1}^n x'_i(t)^2}$$

und es folgt die Behauptung. □

Bemerkung 4.4.2 Mit Satz 4.4.1 hat man viele Isometrien: $(\mathbb{H}^n, d_{\mathbb{H}^n})$ ist homogen bezüglich der Isometriegruppe: Für $p_0 = e_n$ und beliebigem $p \in \mathbb{H}^n$ strecke p_0 um den Faktor p_n und verschiebe ihn anschließend um $(p_1, \dots, p_{n-1}, 0)$. Dann ist

$$p = (T_{(p_1, \dots, p_{n-1}, 0)} \circ s_{p_n})(p_0).$$

Man kann zeigen: Die Isometrien aus Satz 4.4.1 sind nicht alle Isometrien von $(\mathbb{H}^n, d_{\mathbb{H}^n})$.

Lemma 4.4.3 Der Teilraum $U \subseteq \mathbb{H}^n$ gegeben durch die Gleichungen $x_i = 0$ für $i \in \{1, \dots, n-2\}$ mit der von \mathbb{H}^n induzierten Riemannschen Metrik ist isometrisch zu $(\mathbb{H}^2, d_{\mathbb{H}^2})$.

Beweis. Die Riemannsche Metrik von \mathbb{H}^n ist

$$ds_{\mathbb{H}^n}^2 = \frac{1}{x_n^2} (dx_1^2 + \dots + dx_n^2).$$

Die auf U induzierte Metrik ist dann

$$ds_{\mathbb{H}^n}|_U = \frac{1}{x_n^2} (dx_{n-1}^2 + dx_n^2),$$

welche bis auf die Indizes mit der Metrik der hyperbolischen Ebene übereinstimmt. \square

Lemma 4.4.4 Die Projektion

$$\text{pr} : \mathbb{H}^n \longrightarrow U \cong \mathbb{H}^2, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (0, \dots, 0, x_{n-1}, x_n)$$

verkürzt die Länge von Kurven. Insbesondere sind Geodätische in U bereits Geodätische in \mathbb{H}^n , das heißt U ist total geodätisch.

Beweis. Sei $c : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{H}^n$, $c(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ eine differenzierbare Kurve. Dann ist

$$(\text{pr} \circ c)(t) = (0, \dots, 0, x_{n-1}(t), x_n(t))$$

und damit

$$L_{\mathbb{H}^n}(c) = \int_a^b \frac{1}{x_n(t)} \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i'(t)^2} dt \geq \int_a^b \frac{1}{x_n(t)} \sqrt{x_{n-1}'(t)^2 + x_n'(t)^2} dt = L_U(\text{pr} \circ c),$$

woraus die Behauptung folgt. \square

Satz 4.4.5 Die Geodätischen in \mathbb{H}^n sind (parametrisierte) Halbgeraden senkrecht zur Hyperebene $x_n = 0$ oder parametrisierte Halbkreise orthogonal zur Hyperebene $x_n = 0$. Insbesondere gibt es durch zwei verschiedene Punkte genau eine Geodätische.

Beweis. Seien $p, q \in \mathbb{H}^n$. Es seien p', q' die Projektionen von p, q auf die Hyperebene $H_n : x_n = 0$. Betrachte nun die zu H_n orthogonale Ebene $\sigma = \overline{pp'qq'}$. Gilt $p' = q'$, so wähle eine beliebige Gerade g in H_n durch p' , ansonsten setze $g = \overline{p'q'}$. Nach Satz 4.3.1 existieren Translationen und Rotationen in $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$, welche σ auf U abbilden. Da U isometrisch zu \mathbb{H}^2 ist, ist auch σ isometrisch zu \mathbb{H}^2 . Weiter ist nach Lemma 4.4.2 σ total geodätisch. Damit ist die Geodätische

durch p und q gegeben durch die Geodätische durch p und q in U , welche ein Halbkreis oder eine Halbgerade orthogonal zu g ist. \square

Bemerkung 4.4.6 (i) Wie \mathbb{H}^2 kann man auch Kopien von \mathbb{H}^k für $k \leq n$ in \mathbb{H}^n konstruieren.

Setze dazu $x_1 = \dots = x_{n-k} = 0$.

(ii) Geodätische in anderen Modelle erhält man durch folgende Proposition: Die Zentralprojektion α, β, γ aus Satz 4.3.1 sind kreis- und winkeltreu (vgl. Cannon). Damit zeigt man: Geodätische in \mathbb{D}^n sind euklidische Kreissegmente in \mathbb{D}^n , welche orthogonal zu $\partial\mathbb{D}^n = \mathbb{S}^n$ sind. Geodätische im Hyperboloidmodell sind gerade die Schnitte von \mathbb{L}^n mit zweidimensionalen Untervektorräumen des \mathbb{R}^{n+1} .

4.5 Alle Isometrien des Hyperboloid-Modells

Seien $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$. Das *Lorentz-Minkowski-Produkt* von x und y ist definiert als

$$x \star y := \sum_{k=1}^n x_k y_k - x_{n+1} y_{n+1}.$$

Dies definiert eine symmetrische Bilinearform

$$B : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto B(x, y) = x \star y$$

und die zu B assoziierte quadratische Form

$$Q : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto Q(x) = B(x, x) = x \star x$$

auf \mathbb{R}^{n+1} .

Bemerkung 4.5.1 Die Bilinearform B ist nicht ausgeartet.

Beweis. Es gelte $B(x, y) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^{n+1}$. Sein $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ die Standardbasis des \mathbb{R}^{n+1} . Dann gilt für $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ insbesondere

$$0 = B(x, e_i) = x \star e_i = x_i, \quad 0 = B(x, e_{n+1}) = x \star e_{n+1} = -x_{n+1},$$

also $x_i = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n+1\}$ und damit $x = 0$. \square

Das Hyperboloidmodell der n -dimensionalen hyperbolischen Geometrie ist nun gegeben durch

$$\mathbb{L}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid Q(x) = x \star x = -1, x_{n+1} > 0\}.$$

- Definition 4.5.2** (i) Eine *lineare Isometrie* $f : \mathbb{L}^n \longrightarrow \mathbb{L}^n$ ist die Einschränkung einer linearen Abbildung $F : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, die das Lorentz-Minkowski-Produkt erhält. Für $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ gilt also $B(F(x), F(y)) = F(x) \star F(y) = x \star y = B(x, y)$ und insbesondere $Q(F(x)) = Q(x)$.
- (ii) Eine *Riemannsche Isometrie* $f : \mathbb{L}^n \longrightarrow \mathbb{L}^n$ ist ein Diffeomorphismus, sodass für differenzierbare Kurven c_1, c_2 mit $c_1(0) = c_2(0) = p \in \mathbb{L}^n$ gilt

$$\mathrm{ds}_{\mathbb{L}^n}^2(f(p))((f \circ c_1)'(0), (f \circ c_2)'(0)) = \mathrm{ds}_{\mathbb{L}^n}^2(p)(c_1'(0), c_2'(0)),$$

das heißt f lässt die riemannsche Metrik invariant.

- (iii) Eine *topologische Isometrie* $f : \mathbb{L}^n \longrightarrow \mathbb{L}^n$ ist ein Homöomorphismus, der die Abstandsfunktion $d_{\mathbb{L}^n}$ invariant lässt, also

$$d_{\mathbb{L}^n}(f(x), f(y)) = d_{\mathbb{L}^n}(x, y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{L}^n$.

Satz 4.5.3 Eine reelle $(n+1) \times (n+1)$ -Matrix M mit Spalten m_1, \dots, m_{n+1} definiert eine lineare Isometrie von \mathbb{L}^n genau dann, wenn die folgenden beiden Bedingungen gelten:

- (1) Für alle Indizes $i, j \in \{1, \dots, n+1\}$ gilt $m_i \star m_j = e_i \star e_j$, wobei $\mathcal{E} := \{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ die Standardbasis der \mathbb{R}^{n+1} bezeichne.
- (2) Der letzte Eintrag in der Spalte m_{n+1} ist positiv.

Dabei ist die erste Bedingung (1) äquivalent zu

- (1') M ist invertierbar mit inverser Matrix $M^{-1} = JM^T J$, wobei

$$J = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Beweis. Offensichtlich ist J die Abbildungsmatrix des Lorentz-Minkowski-Produkts bezüglich der Standardbasis, denn es gilt

$$e_i \star e_j = J_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{für } i = j, \ i, j \in \{1, \dots, n\} \\ -1, & \text{für } i = n+1 = j \\ 0, & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

Also gilt für $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$: $x \star y = x^T J y$. Somit ist $Mx \star My = x^T M^T J M y$ und M ist invariant genau dann, wenn $x^T M^T J M y = x \star y$, also genau dann, wenn $M^T J M = J$. Der (i, j) -te Eintrag von $M^T J M$ ist $m_i \star m_j$ und jener von J ist $e_i \star e_j$. Da J invertierbar ist, folgt aus (1), dass M

ebenfalls invertierbar ist, denn es gilt

$$\det M = \det m_{ij} = \det(m_i \star m_j) = \det(e_i \star e_j) = \det J = -1.$$

Bemerkung 4.5.4 Die linearen Abbildungen aus Satz 4.5.3 definieren eine Gruppe $\mathcal{O}^+(n, 1) \subseteq \mathcal{O}(n, 1)$, wobei

$$\mathcal{O}(n, 1) = \{M \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)} \mid M^T J M = J\}$$

eine semi-orthogonale Gruppe ist. Diese ist ein Spezialfall von

$$\mathcal{O}(p, q) = \{M \in \mathbb{R}^{(p+q+1) \times (p+q+1)} \mid M^T \tilde{J} M = \tilde{J}\}$$

mit

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$$

Satz 4.5.5 Sei $f : \mathbb{L}^n \longrightarrow \mathbb{L}^n$ eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) f ist eine lineare Isometrie.
- (ii) f ist eine Riemannsche Isometrie.
- (iii) f ist eine topologische Isometrie.

Insbesondere ist also $\text{Isom}(\mathbb{H}^n) = \mathcal{O}^+(n, 1)$. Weiter gilt für $p, q \in \mathbb{L}^n$

$$p \star q = -\cosh(d_{\mathbb{L}^n}(p, q))$$

Beweis. "(i) \rightarrow (ii)" Sei zunächst f eine lineare Isometrie, das heißt es gibt eine lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, welche \star erhält, \mathbb{L} in sich selbst abbildet und $F|_{\mathbb{L}^n} = f$ erfüllt. Die Riemannsche Metrik $ds_{\mathbb{L}^n}^2$ ist in jedem Punkt $x \in \mathbb{L}^n$ ein Skalarprodukt im Tangentialraum $T_x \mathbb{L}^n$, gegeben durch

$$ds_{\mathbb{L}^n}^2(x) : T_x \mathbb{L}^n \times T_x \mathbb{L}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad ds_{\mathbb{L}^n}^2(x)(c'_1(0), c'_2(0)) = c'_1(0) \star c'_2(0)$$

Für müssen zeigen, dass f dieses Skalarprodukt invariant lässt. Es gilt für $x \in \mathbb{L}^n$ und $c'_1(0), c'_2(0) \in T_x \mathbb{L}^n$:

$$\begin{aligned} ds_{\mathbb{L}^n}^2(f(x))((f \circ c_1)'(0), (f \circ c_2)'(0)) &= ds_{\mathbb{L}^n}^2(f(x))((df \circ c'_1)(0), (df \circ c'_2)(0)) \\ &= ds_{\mathbb{L}^n}^2(F(x))((dF \circ c'_1)(0), (dF \circ c'_2)(0)) \\ &= ds_{\mathbb{L}^n}^2(F(x))((F(c'_1(0)), F(c'_2(0))) \\ &= F(c'_1(0)) \star F(c'_2(0)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c'_1(0) \star c'_2(0) \\
&= ds_{\mathbb{L}^n}^2(x)(c'_1(0), c'_2(0)),
\end{aligned}$$

also ist f eine Riemannsche Isometrie.

"(ii) \rightarrow (iii)" Sei nun f eine Riemannsche Isometrie. Dann gilt für jede differenzierbare Kurve $c \in \Omega_{pq}(\mathbb{L}^n)$

$$\begin{aligned}
L_{\mathbb{L}^n}(f \circ c) &= \int_I \sqrt{ds_{\mathbb{L}^n}^2((f \circ c)(t))((f \circ c)'(t), (f \circ c)'(t))} dt \\
&= \int_I \sqrt{ds_{\mathbb{L}^n}^2(c(t))(c'(t), c'(t))} dt \\
&= L_{\mathbb{L}^n}(c),
\end{aligned}$$

und für $p, q \in \mathbb{L}^n$ also auch $d_{\mathbb{L}^n}(f(p), f(q)) = d_{\mathbb{L}^n}(p, q)$.

Für die fehlende Implikation zu zeigen, beweisen wir zunächst die Abstandsformel. Seien $p, q \in \mathbb{L}^n$ beliebig, $t = d_{\mathbb{L}^n}(p, q)$. Den Abstand erhält man durch Integration der Riemannschen Metrik entlang der eindeutigen Geodätischen zwischen p und q . Diese Metrik ist nach obigem aber invariant unter linearen Isometrien, wir können also p und q zunächst durch eine lineare Isometrie in eine spezielle Position überführen und anschließend erst die Distanz berechnen. Sei dazu m_1 der Einheitstangentenvektor (bzgl. $ds_{\mathbb{L}^n}^2(p)$) im Punkt p an die Schnittkurve $[p, q, 0] \cap \mathbb{L}^n$ (welche gerade die Geodätische zwischen p und q ist). Weiter sei $m_{n+1} = p$. Beachte: m_1 und m_{n+1} sind orthogonal bzgl. \star . Nach dem Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren können wir m_1, m_{n+1} zu einer \star -ONB $\{m_1, m_2, \dots, m_n, m_{n+1}\}$ von \mathbb{R}^{n+1} erweitern, sodass also gilt $m_i \star m_j = e_i \star e_j$ für alle i, j . Nach Satz 4.7 definiert die Matrix $M = (m_1 | m_2 | \dots | m_{n+1}) \in \mathcal{O}^+(n, 1)$ eine lineare Isometrie. Die inverse Abbildung M^{-1} ist ebenfalls eine lineare Isometrie von \mathbb{L}^n und bildet p auf e_{n+1} und $[p, q] = [m_1, m_{n+1}] \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ auf den Unterraum $\sigma = [e_1, e_{n+1}]$ ab. Der Schnitt $\sigma \cap \mathbb{L}^n$ ist ein Hyperbel-Ast durch die Punkte $M^{-1}(p) = e_{n+1}$ und $M^{-1}(q)$. Da $t = d_{\mathbb{L}^n}(p, q) = d_{\mathbb{L}^n}(M^{-1}(p), M^{-1}(q))$ und die Geodätische von e_1 nach e_{n+1} nach Bogenlänge parametrisiert ist, können wir annehmen, dass $M^{-1}(q) = (\sinh t, 0, \dots, 0, \cosh t)$. Dann gilt

$$p \star q = M^{-1}(p) \star M^{-1}(q) = (0, \dots, 0, 1) \star (\sinh t, 0, \dots, 0, \cosh t) = -\cosh t = -\cosh(d_{\mathbb{L}^n}(p, q)),$$

was gerade zu zeigen war. Wir können nun die fehlende Implikation beweisen:

"(iii) \rightarrow (i)" Sei $f : \mathbb{L}^n \rightarrow \mathbb{L}^n$ eine topologische Isometrie, es gelte also

$$d_{\mathbb{L}^n}(f(p), f(q)) = d_{\mathbb{L}^n}(p, q)$$

für alle $p, q \in \mathbb{L}^n$. Wähle eine Basis $\{v_1, \dots, v_{n+1}\} \subseteq \mathbb{L}^n$ von \mathbb{R}^{n+1} . Sei $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$

die lineare Abbildung gegeben durch $F(v_i) = f(v_i)$ für alle i . Dann erhält F das Lorentz-Minkowski-Produkt \star , d.h. $F|_{\mathbb{L}^n}$ ist eine lineare Isometrie, denn: Schreibe die Standardsbasisvektoren e_i als $e_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} v_j$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 F(e_i) \star F(e_j) &= \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} a_{ik} a_{jl} f(v_k) \star f(v_l) \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} a_{ik} a_{jl} (-\cosh(d_{\mathbb{L}^n}(f(v_k), f(v_l)))) \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} a_{ik} a_{jl} (-\cosh(d_{\mathbb{L}^n}(v_k, v_l))) \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} a_{ik} a_{jl} v_k \star v_l \\
 &= e_i \star e_j
 \end{aligned}$$

Zeige noch, dass $F|_{\mathbb{L}^n} = f$. Betrachte dazu $\tilde{f} = F^{-1} \circ f$. Dann sind offensichtlich äquivalent:

- (1) $F|_{\mathbb{L}^n} = f$.
- (2) $\tilde{f} = \text{id}_{\mathbb{L}^n}$.
- (3) Für alle $x \in \mathbb{L}^n$ gilt $\tilde{f}(x) - x = 0$.
- (4) Für alle $x \in \mathbb{L}^n$ und $i \in \{1, \dots, n+1\}$ gilt $(\tilde{f}(x) - x) \star e_i = 0$
- (5) Für alle $x \in \mathbb{L}^n$ und $i \in \{1, \dots, n+1\}$ gilt $\tilde{f}(x) \star e_i = x \star e_i$.

Dies folgt daraus, dass \star nicht ausgeartet ist. Seien also x, i beliebig aber fest. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}(x) \star e_i &= \tilde{f}(x) \star \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} v_j \\
 &= \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} (\tilde{f}(x) \star v_j) \\
 &= \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} (\tilde{f}(x) \star \tilde{f}(v_j)) \\
 &= \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} (-\cosh(d_{\mathbb{L}^n}(\tilde{f}(x), \tilde{f}(v_j)))) \\
 &= \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} (-\cosh(d_{\mathbb{L}^n}(x, v_j))) \\
 &= \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} (x \star v_j) \\
 &= x \star e_i,
 \end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Korollar 4.5.6 (i) $(\mathbb{L}^n, d_{\mathbb{L}^n})$ (und damit auch jedes andere Modell der n -dimensionalen hyperbolischen Geometrie) ist 2-Punkt homogen. Insbesondere ist \mathbb{L}^n homogen, d.h. die Isometriegruppe $\mathcal{O}^+(n, 1)$ operiert transitiv auf \mathbb{L}^n . Algebraisch erhalten wir

$$\mathbb{L}^n \cong \mathcal{O}^+(n, 1) / \text{Stab}_{\mathcal{O}^+(n, 1)}(e_{n+1}) \cong \mathcal{O}^+(n, 1) / \mathcal{O}(n).$$

(ii) Geodätische in \mathbb{L}^n sind (parametrisierte) Schnitte von \mathbb{L}^n mit zweidimensionalen Untervektorräumen des \mathbb{R}^{n+1} .

Beweis. (i) Der Beweis von Satz 4.5.5 zeigt: Für $p, q \in \mathbb{L}^n$ mit $d_{\mathbb{L}^n}(p, q) = t$ existiert eine Isometrie $f_{pq} : \mathbb{L}^n \rightarrow \mathbb{L}^n$ gegeben durch eine Matrix $M \in \mathcal{O}^+(n, 1)$, die das Paar (p, q) auf das Standardpaar in der Ebene $[e_1, e_{n+1}]$ abbildet:

$$f_{pq}(p) = e_{n+1}, \quad f_{pq}(q) = e_1 \sinh t + e_{n+1} \cosh t.$$

Insbesondere ist $p = f_{pq}^{-1}(e_{n+1})$, \mathbb{L}^n ist also eine $\mathcal{O}^+(n, 1)$ -Bahn. Für den Stabilisator von e_{n+1} gilt

$$\begin{aligned} \text{Stab}_{\mathcal{O}^+(n, 1)}(e_{n+1}) &= \{M \in \mathcal{O}^+(n, 1) \mid M(e_{n+1}) = e_{n+1}\} \\ &= \left\{ \left(\begin{array}{c|c} M' & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) \in \mathcal{O}^+(n, 1) \mid M' \in \mathcal{O}(n) \right\} \\ &\cong \mathcal{O}(n) \end{aligned}$$

(ii) Für eine parametrisierte Hyperbel $\gamma_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^n$, $\gamma_0(t) = (\sinh t, 0, \dots, 0, \cosh t)$ gilt

$$d_{\mathbb{L}^n}(\gamma_0(t_1), \gamma_0(t_2)) = \int_{t_1}^{t_2} \|\gamma_0'(t)\|_{\gamma_0(t)}^{\mathbb{L}^n} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\cosh^2 t - \sinh^2 t} dt = t_2 - t_1,$$

das heißt γ_0 ist eine Geodätische und es gilt $\gamma_0(\mathbb{R}) = \mathbb{L}^n \cap [e_1, e_{n+1}]$. Sei nun f_{pq} die Isometrie, welche (p, q) nach $[e_1, e_{n+1}] \cap \mathbb{L}^n$ abbildet. Dann gilt für die Geodätische γ durch p und q

$$\gamma(\mathbb{R}) = f^{-1}(\gamma_0(\mathbb{R})) = f^{-1}([e_1, e_{n+1}] \cap \mathbb{L}^n) = f^{-1}([e_1, e_{n+1}]) \cap \mathbb{L}^n,$$

wobei die Linearität von f^{-1} und $f^{-1}(\mathbb{L}^n) = \mathbb{L}^n$ ausgenutzt wurde. Damit ist $\gamma(\mathbb{R})$ ein zweidimensionaler Untervektorraum von \mathbb{R}^{n+1} , was den Beweis abschließt. \square

