

19. Messbare Mengen und messbare Funktionen

Definition

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **(Lebesgue-)messbar** (mb) : $\iff \exists$ Folge quadrierbarer Mengen (A_k) mit

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

$\mathfrak{L}_n := \{A \subseteq \mathbb{R}^n : A \text{ ist messbar}\}$. Ist A quadrierbar $\implies A \in \mathfrak{L}_n$. Die Abbildung $\lambda_n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ definiert durch

$$\lambda_n(A) := \begin{cases} v_n(A) & , \text{ falls } A \text{ quadrierbar} \\ \infty & , \text{ falls } A \text{ nicht quadrierbar} \end{cases}$$

heißt das **n-dimensional Lebesguemaß**.

Beispiel

$$\mathbb{R}^n \in \mathfrak{L}_n, \lambda_n(\mathbb{R}^n) = \infty$$

Satz 19.1

Es seien $A, B, A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{L}_n$

$$(1) \ A \setminus B, \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j, \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{L}_n.$$

(2) Sei $B \subseteq A$

$$(i) \ \lambda_n(B) \leq \lambda_n(A).$$

$$(ii) \ \text{Ist } B \text{ quadrierbar} \implies \lambda_n(A \setminus B) = \lambda_n(A) - \lambda_n(B)$$

$$(3) \ \lambda_n\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(A_j).$$

(4) Aus $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$ folgt

$$\lambda_n\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j=1}^{\infty} \lambda_n(A_j)$$

(5) Ist A_1 quadrierbar und $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ folgt

$$\lambda_n\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j=1}^{\infty} \lambda_n(A_j)$$

(6) Ist $A_j \cap A_k = \emptyset$ ($j \neq k$) folgt

$$\lambda_n\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(A_j)$$

Ohne Beweis!

Folgerung 19.2

(1) Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $\implies A \in \mathfrak{L}_n$

(2) Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen $\implies A \in \mathfrak{L}_n$

Beweis

(1) folgt aus 17.10

(2) $\mathbb{R}^n \setminus A$ ist offen $\xrightarrow{(1)} \mathbb{R}^n \setminus A \in \mathfrak{L}_n \xrightarrow{19.1(1)} A \in \mathfrak{L}_n$. ■

Definition

Sei $A \in \mathfrak{L}_n$ und $F : A \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ eine Funktion. f heißt **messbar**: $\iff \exists$ Folge (φ_k) in \mathcal{T}_n : (φ_k) konvergiert fast überall auf \mathbb{R}^n punktweise gegen f_A .

Satz 19.3

$A \in \mathfrak{L}_n, f, g : A \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ seien Funktionen.

(1) Ist $f \in L(A) \implies f$ ist messbar.

(2) Sind f, g messbar $\implies f + g, f^+, f^-, cf$ ($c \in \mathbb{R}$), $|f|^p$ ($p > 0$), $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ sind messbar ($\infty^p := \infty$)

Ohne Beweis!