

inoffizielles Skript

# Differentialgeometrie

Gehalten von Dr. S. Gensing im Wintersemester 2012/13

getippt von Aleksandar Sandic\* und Jan-Bernhard Kordaß†

10. Januar 2017

\* [Aleksandar.Sandic@student.kit.edu](mailto:Aleksandar.Sandic@student.kit.edu)

† [Jan-Bernhard.Kordass@student.kit.edu](mailto:Jan-Bernhard.Kordass@student.kit.edu)



# Inhaltsverzeichnis

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Vorwort</b>   | <b>5</b>  |
| <b>1. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten</b>                                | <b>7</b>  |
| 1. Produkte von Mannigfaltigkeiten . . . . .                                 | 10        |
| 2. Untermannigfaltigkeiten . . . . .   | 10        |
| <b>2. Tangentialvektoren und Tangentialräume</b>                             | <b>13</b> |
| <b>3. Differentiale</b>  | <b>19</b> |
| <b>4. Tangentialbündel und Vektorfelder</b>                                  | <b>25</b> |
| 1. Das Tangentialbündel als glatte Mannigfaltigkeit . . . . .                | 25        |
| 2. Flüsse . . . . .  | 27        |
| <b>5. Vektorbündel</b>   | <b>33</b> |
| 1. Intermezzo: Multilineare Algebra . . . . .                                | 36        |
| 2. Bündelkonstruktion . . . . .  | 37        |
| 3. Differentialformen und die äußere Ableitung . . . . .                     | 41        |
| <b>6. Riemannsche Metriken</b>   | <b>47</b> |
| <b>7. Kovariante Ableitungen</b>   | <b>55</b> |
| 1. Lokale Koordinaten . . . . .  | 57        |
| 2. Transformationsverhalten . . . . .  | 58        |
| 3. Schnitte entlang von Ableitungen . . . . .                                | 59        |
| 4. Der Levi-Civita Zusammenhang . . . . .                                    | 62        |
| 5. Krümmungen . . . . .  | 65        |
| <b>8. Geodätische und die Exponentialabbildung</b>                           | <b>67</b> |
| 1. Polarkoordinaten . . . . .  | 70        |
| <b>9. Jacobifelder</b>   | <b>77</b> |
| 1. Ausblick: Hesse & Morse - Theorie . . . . .                               | 78        |
| 2. Zweite Ableitung des Energiefunktionals (in kritischen Punkten) . . . . . | 80        |
| 3. Exkurs: Überlagerungen, Fundamentalgruppe und Gruppenwirkungen . . . . .  | 90        |
| 4. Wirkung diskreter Gruppen . . . . .                                       | 92        |
| 5. Krümmungsschranken und Trigonometrie . . . . .                            | 95        |
| 6. Räume konstanter Krümmung . . . . .                                       | 97        |
| 7. Anwendung . . . . .   | 102       |

|                                 |                |
|---------------------------------|----------------|
| <b>A. Übungen</b>               | <b>107</b>     |
| 0. 22. Oktober 2012 . . . . .   | 107            |
| 1. 29. Oktober 2012 . . . . .   | 108            |
| 2. 5. November 2012 . . . . .   | 111            |
| 3. 12. November 2012 . . . . .  | 115            |
| 4. 19. November 2012 . . . . .  | 118            |
| 5. 26. November 2012 . . . . .  | 122            |
| 6. 3. Dezember 2012 . . . . .   | 125            |
| 7. 10. Dezember 2012 . . . . .  | 126            |
| 8. 17. Dezember 2012 . . . . .  | 130            |
| 9. 7. Januar 2012 . . . . .     | 133            |
| 10. 14. Januar 2012 . . . . .   | 138            |
| 11. 21. Januar 2012 . . . . .   | 142            |
| 12. 28. Januar 2012 . . . . .   | 145            |
| 13. 4. Februar 2012 . . . . .   | 148            |
| <br><b>Stichwortverzeichnis</b> | <br><b>150</b> |
| <br><b>Literaturverzeichnis</b> | <br><b>155</b> |

# Vorwort

## Über dieses Skript

Dies ist eine Mitschrift der Vorlesung „Differentialgeometrie“ von Dr. S. Grensing, gehalten im Wintersemester 2012/13 am Karlsruher Institut für Technologie. Dr. Grensing ist nicht für den Inhalt verantwortlich und es besteht weder eine Garantie für Vollständigkeit, noch Korrektheit der enthaltenen Aussagen.

## Wer

Das Skript wurde in Zusammenarbeit von Jan-Bernhard Kordaß und Aleksandar Sandic getippt. Bei Anmerkungen beziehungsweise beim Auffinden von Fehlern schickt bitte eine E-Mail an

[jan-bernhard.kordass@student.kit.edu](mailto:jan-bernhard.kordass@student.kit.edu)  
[aleksandar.sandic@student.kit.edu](mailto:aleksandar.sandic@student.kit.edu)

## Wo

Das Skript wurde ursprünglich auf GitHub geschrieben, befindet sich nun aber seit der Fertigstellung im Mitschriebwiki. Die GitHub Version ist „eingefroren“ und wird nicht mehr weiterentwickelt, alle Änderungen und Korrekturen sind von nun an an der Mitschriebwiki Version vorzunehmen.

Link zum Skript: <http://mitschriebwiki.nomeata.de/DiffGeo2012Skript.pdf>

Link zur Vorlesung: <http://www.math.kit.edu/iag5/edu/difgeo2012w/de>

Link zum Mitschriebwiki: <http://mitschriebwiki.nomeata.de/>

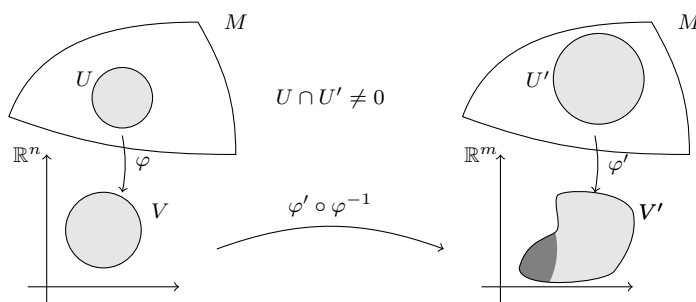
Link zur GitHub Version: <https://github.com/Tarcvar/Skript-DiffGeom>



# Kapitel 1.

## Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

**Definition** Eine  $n$ -dimensionale **topologische Mannigfaltigkeit**  $M$  ist ein topologischer **Hausdorff-Raum** mit einer abzählbaren Basis der **Topologie** in dem zu jedem Punkt  $p \in M$  eine offene Menge  $U$  mit  $p \in U$  existiert und ein **Homöomorphismus**  $\varphi: U \rightarrow V$  auf eine offene Menge  $V \subset \mathbb{R}^n$ .



$\varphi' \circ \varphi^{-1}$  ist ein Homöomorphismus offener Mengen des  $\mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{R}^m$ . Nach dem **Satz von Brouwer** (1912) gilt dann  $m = n$ . Damit ist die Dimension einer zusammenhängenden topologischen Mannigfaltigkeit eindeutig definiert.

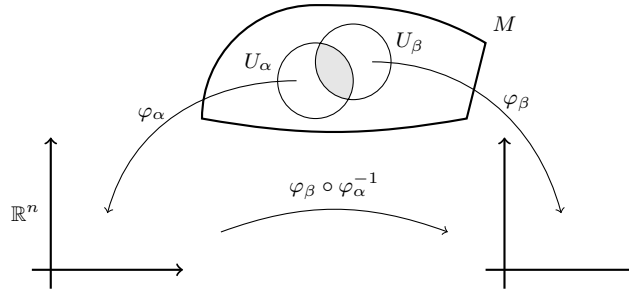
Die Abbildung  $\varphi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$  heißt **Karte** von  $M$  um  $p$ , die Menge  $U$  heißt **Kartengebiet**.

Eine Menge von Karten  $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in J\}$  heißt **Atlas** von  $M$ , falls  $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha = M$ .

Ein Atlas  $\mathcal{A}$  von  $M$  heißt  $C^k$ -Atlas, wenn für alle  $\alpha, \beta \in J$  mit  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  der sogenannte **Kartenwechsel**:

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

ein  $C^k$ -**Diffeomorphismus** ist.



Eine Karte  $\psi: U \rightarrow V$  von  $M$  heißt **verträglich** mit einem  $C^k$ -Atlas  $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in J\}$  wenn jeder Kartenwechsel

$$\varphi_\alpha \circ \psi^{-1}: \psi(U \cap U_\alpha) \rightarrow \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$$

ein  $C^k$ -Diffeomorphismus ist, also  $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{(\psi, U)\}$  ebenfalls ein  $C^k$ -Atlas ist. Die Menge aller mit  $\mathcal{A}$  verträglichen Karten ist ein **maximaler  $C^k$ -Atlas**. Jeder maximale Atlas enthält alle mit ihm verträglichen Karten. Ein maximaler  $C^k$ -Atlas heißt auch  **$C^k$ -differenzierbare Struktur**.

**Definition 1.1 (differenzierbare Mannigfaltigkeit)** Eine **differenzierbare Mannigfaltigkeit** der Klasse  $C^k$  ist eine topologische Mannigfaltigkeit zusammen mit einer  $C^k$ -differenzierbaren Struktur.

**Beispiel** Einige Beispiele für glatte Mannigfaltigkeiten:

- 1)  $M = \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{A} = \{(\text{id}_{\mathbb{R}^n}, \mathbb{R}^n)\}$
- 2)  $M \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\mathcal{A} = \{(\iota_M, M)\}$
- 3)  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$  ist eine eindimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit:

$$U = \{(\sin t, \cos t) \mid t \in (0, 2\pi)\}$$

ist offen in  $S^1$  und die Kartenabbildung

$$\varphi: (\sin t, \cos t) \mapsto t$$

ist ein Homöomorphismus.

$$\varphi': U' = \{(\sin t, \cos t) \mid t \in (-\pi, \pi)\} \rightarrow (-\pi, \pi)$$

ebenfalls.  $\mathcal{A} = \{(\varphi, U), (\varphi', U')\}$  ist ein Atlas von  $S^1$ , denn  $U \cup U' = S^1$ .

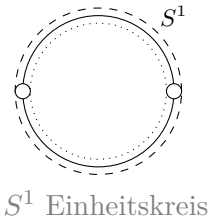
$$\varphi' \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap U') \rightarrow \varphi'(U \cap U')$$

$$(0, \pi) \cup (\pi, 2\pi) \rightarrow (-\pi, 0) \cup (0, \pi) \quad t \mapsto \begin{cases} t & 0 < t < \pi \\ t - 2\pi & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

- 4) Jeder reelle Vektorraum endlicher Dimension ist in kanonischer Weise eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit.

Wähle eine Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$  von  $V$ . Diese definiert mit

$$\varphi\left(\sum \lambda_i v_i\right) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$



$S^1$  Einheitskreis

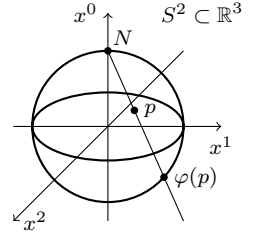


eine Bijektion auf  $\mathbb{R}^n$ . Damit erhält man eine globale Karte von  $V$ . Der zugehörige Atlas hängt nicht von der Wahl der Basis ab, denn ist  $\{w_1, \dots, w_n\}$  eine weitere Basis von  $V$  und  $\psi(\sum \lambda_i w_i) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  eine weitere Karte, so ist  $\varphi \circ \psi^{-1}$  als **Endomorphismus** des  $\mathbb{R}^n$  schon  $C^\infty$ .

5)  $S^n = \{(x^0, x^1, \dots, x^n) \mid \sum_{i=0}^n (x^i)^2 = 1\}$ .

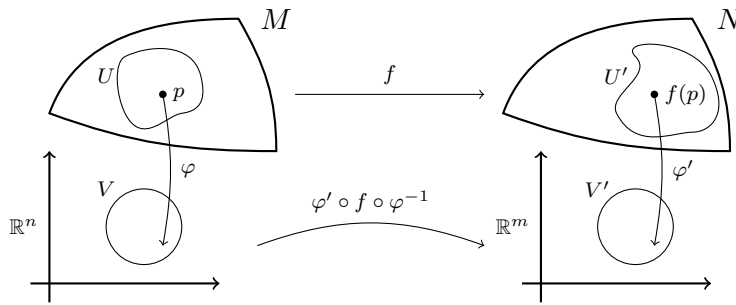
Betrachte den Nordpol  $N = (1, 0, \dots, 0)$  und den Südpol  $S = (-1, 0, \dots, 0)$  und die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi: U = S^n \setminus \{N\} &\rightarrow \mathbb{R}^n & x &\mapsto \left( \frac{x^1}{1-x^0}, \dots, \frac{x^n}{1-x^0} \right), \\ \psi: U' = S^n \setminus \{S\} &\rightarrow \mathbb{R}^n & x &\mapsto \left( \frac{x^1}{1+x^0}, \dots, \frac{x^n}{1+x^0} \right) \end{aligned}$$



Aufgabe: Zeige, dass  $(\varphi, U), (\psi, U')$  einen  $C^\infty$ -Atlas auf  $S^n$  definiert.

**Definition 1.2 (Differenzierbare Abbildungen)** Eine stetige Abbildung  $f: M \rightarrow N$  zwischen glatten Mannigfaltigkeiten  $M$  und  $N$  heißt **glatt** ( $C^\infty$ -differenzierbar), wenn es zu jedem  $p \in M$  Karten  $(\varphi, U)$  in  $M$  um  $p$  und geeignete  $(\varphi', U')$  in  $N$  um  $f(p)$  gibt, so dass  $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}$  glatt ist.



Die Menge aller glatten Abbildungen von  $M$  nach  $N$  wird  $C^\infty(M, N)$  genannt.

**Konvention:** Ab jetzt seien zunächst alle Mannigfaltigkeiten, wie auch alle Abbildungen als glatt vorausgesetzt.

**Bemerkung** Da Kartenwechsel  $C^\infty$  sind, gilt obige Bedingung automatisch für alle Karten von  $M$  und  $N$  (evtl. nach Einschränkung).

**Beispiel** Es folgen zwei Beispiele für differenzierbare Abbildungen:

(1)  $(\varphi, U) \in \mathcal{A} \Rightarrow \varphi \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$ , denn

$$\text{id}_{\mathbb{R}^n} \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ \varphi^{-1} \in C^\infty.$$

(2)  $f \in C^\infty(M, N)$ ,  $g \in C^\infty(N, P) \Rightarrow g \circ f \in C^\infty(M, P)$ , denn

$$\varphi_p \circ g \circ f \circ \varphi_m^{-1} = (\varphi_p \circ g \circ \varphi_n^{-1}) \circ (\varphi_n \circ f \circ \varphi_m^{-1}) \in C^\infty.$$

**Definition 1.3 (Diffeomorphismus)** Eine Abbildung  $f: M \rightarrow N$  heißt **Diffeomorphismus**, wenn  $f$  bijektiv ist und  $f$ , sowie  $f^{-1}$   $C^\infty$ -Abbildungen von  $M$  nach  $N$  sind. Insbesondere haben  $M$  und  $N$  in diesem Fall dieselbe Dimension. Die Menge der Diffeomorphismen von  $M$  nach  $M$  wird mit  $\text{Diff}(M)$  bezeichnet.  $(\text{Diff}(M), \circ)$  ist bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe.

## 1. Produkte von Mannigfaltigkeiten

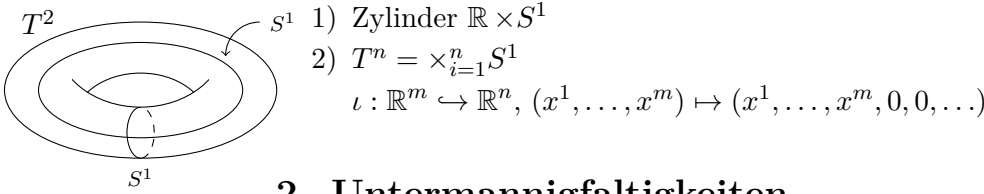
Es seien  $M$  und  $N$  glatte Mannigfaltigkeiten der Dimensionen  $m$  und  $n$ . Dann hat  $M \times N$  versehen mit der **Produkttopologie**, die Struktur einer Mannigfaltigkeit. Da  $M$  und  $N$  hausdorffsch sind und abzählbare Basen ihrer Topologie besitzen gilt dies auch für  $M \times N$ . Sind  $(\varphi, U)$  und  $(\psi, V)$  Karten von  $M$  bzw.  $N$ , so ist  $\varphi \times \psi$  ein Homöomorphismus von  $U \times V$  auf sein offenes Bild in  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n}$ .

Seien  $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{I}\}$  und  $\mathcal{A}' = \{(\psi_\beta, V_\beta) \mid \beta \in \mathcal{J}\}$   $C^\infty$ -Atlanten von  $M$  und  $N$ . Dann ist  $\mathcal{B} = \{(\varphi_\alpha \times \psi_\beta, U_\alpha \times V_\beta) \mid (\alpha, \beta) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}\}$  ein  $C^\infty$ -Atlas von  $M \times N$ , denn

$$(\varphi_\alpha \times \psi_\beta) \circ (\varphi_\mu \times \psi_\nu)^{-1} = (\varphi_\alpha \circ \varphi_\mu^{-1}) \times (\psi_\beta \circ \psi_\nu^{-1})$$

ist ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus. Damit ist  $M \times N$  in kanonischer Weise eine glatte  $(m+n)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Die kanonischen Projektionen  $\pi_M: M \times N \rightarrow M$ ,  $\pi_N: M \times N \rightarrow N$  und die Abbildung  $\tau: M \times N \rightarrow N \times M, (p, q) \mapsto (q, p)$  sind glatte Abbildungen.

**Beispiel** Es folgen einige Beispiele für Produkt-Mannigfaltigkeiten:

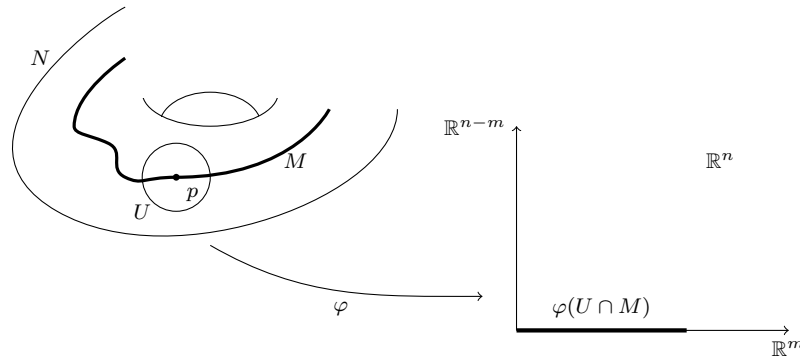


## 2. Untermannigfaltigkeiten

**Definition 1.4 (Untermannigfaltigkeit)** Es sei  $N$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge  $M \subseteq N$  heißt **Untermannigfaltigkeit** von  $N$ , wenn für alle  $p \in M$  eine Karte  $(\varphi, U)$  von  $N$  um  $p$  existiert, so dass

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap \underbrace{(\mathbb{R}^m \times \{0\})}_{\{(x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \cong \mathbb{R}^n\}}$$

gilt. Eine solche Karte heißt an  $M$  **adaptierte Karte**. Die Zahl  $n - m$  heißt **Kodimension** von  $M$  in  $N$ .



**Lemma 1.5** Es seien  $N$  eine  $n$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und  $M \subseteq N$  eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $N$ . Bezeichnet  $\mathcal{A}$  einen  $C^\infty$ -Atlas von  $N$  und  $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, (x^1, \dots, x^m, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^m)$ , so ist

$$\mathcal{B} = \{(\pi \circ \varphi|_{U \cap M}, U \cap M) \mid (\varphi, U) \in \mathcal{A} \text{ an } M \text{ adaptierte Karte}\}$$

ein  $C^\infty$ -Atlas von  $M$ .

**Beweis** Die Hausdorff-Eigenschaft und die Abzählbarkeit der Topologie werden von  $N$  auf  $M$  vererbt. Ist  $p \in N$ , so existiert eine adaptierte Karte  $(\varphi, U)$  von  $N$  um  $p$  und  $\pi \circ \varphi|_{U \cap M}$  ist ein Homöomorphismus von  $U \cap M$  auf eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^m$ . Jeder Kartenwechsel

$$(\pi \circ \varphi|_{U \cap M}) \circ (\pi \circ \psi|_{V \cap M})^{-1} = (\pi \circ \varphi) \circ (\psi^{-1} \circ \iota) = \pi \circ (\varphi \circ \psi^{-1}) \circ \iota$$

ist ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus. □

**Bemerkung** Erinnerung:  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt glatte  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ , wenn für alle  $p \in M$  eine offene Umgebung  $U$  und eine Abbildung  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit folgenden Eigenschaften existiert:

- (i)  $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$  ist ein Diffeomorphismus auf sein offenes Bild im  $\mathbb{R}^n$ .
- (ii)  $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$ .

Jedes solche  $M$  ist eine Untermannigfaltigkeit im Sinne von Definition 1.4, denn jedes  $\varphi$  wie oben ist wegen (i) eine Karte von  $\mathbb{R}^n$  (im Sinne glatter Mannigfaltigkeiten) und wegen (ii) eine an  $M$  adaptierte Karte. Also sind mit Lemma 1.5 glatte Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  glatte Mannigfaltigkeiten (im allgemeineren Sinne).



# Kapitel 2.

## Tangentialvektoren und Tangentialräume

Betrachte in der nebenstehenden Abbildung eine differenzierbare Kurve  $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S^2$  mit  $c(0) = p$ . Dann gilt:

$$0 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle c(t), c(t) \rangle = 2 \langle \dot{c}(0), c(0) \rangle = 2 \langle \dot{c}(0), p \rangle \Rightarrow \dot{c}(0) \in p^\perp.$$

Die Kurven heißen **äquivalent**, wenn es eine Karte  $(\varphi, U)$  von  $M$  und  $p$  gibt, so dass gilt

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ c_1) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ c_2)$$

**Lemma 2.1** *Der oben definierte Begriff der Äquivalenz ist unabhängig von der Wahl der Karte.*

**Beweis** Es sei  $(\psi, V)$  eine weitere Karte von  $M$  um  $p$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\psi \circ c_1) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ c_1) = D(\psi \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(p)} \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ c_1) \\ &= D(\psi \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(p)} \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ c_2) = \dots = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\psi \circ c_2). \quad \square \end{aligned}$$

**Definition 2.2 (Geometrische Definition des Tangentialraums)** *Es sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $p \in M$ . Ein (geometrischer) **Tangentialvektor** an  $M$  in  $p$  ist eine Äquivalenzklasse von Kurven  $c$  mit  $c(0) = p$ . Die Menge*

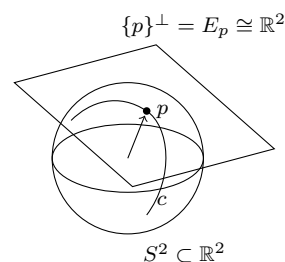
$$T_p^{\text{geo}} M = \{[c] \mid c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \text{ glatt}, c(0) = p\}$$

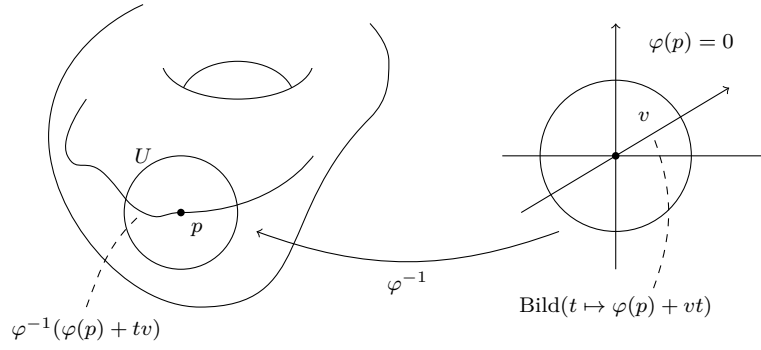
*heißt (geometrischer) **Tangentialraum** an  $M$  in  $p$ .*

**Bemerkung** Mit den Bezeichnungen wie oben ist die folgende Abbildung bijektiv:

$$A: T_p^{\text{geo}} M \rightarrow \mathbb{R}^n \quad [c] \mapsto \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ c).$$

**Beweis** Zu jedem Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  sei  $B(v) = [t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(p) + tv)]$  die Äquivalenzklasse der abgebildeten Kurve auf der Mannigfaltigkeit.





$$AB(v) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ B(v)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ \varphi^{-1}(\varphi(p) + tv)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi(p) + tv) = v.$$

$$BA(\underbrace{[c]}_{\exists c}) = B(v_c) = [t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(p) + tv_c)] \text{ wobei } v_c = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ c).$$

Die Kurven  $c$  und  $t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(p) + tv_c)$  sind äquivalent, also ist  $BA[c] = [c]$  und somit  $A$  bijektiv.  $\square$

Damit erhält  $T_p^{\text{geo}} M$  die Struktur eines reellen Vektorraumes vermöge der folgenden Verknüpfung:

$$\lambda[c_1] + \mu[c_2] = A^{-1}(\lambda A[c_1] + \mu A[c_2]).$$

Dabei gilt  $\lambda[c_1] + \mu[c_2] = [c]$  für  $c(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + t(\lambda v_1 + \mu v_2))$  mit  $v_i = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ c_i)$ .

**Lemma 2.3** Die oben definierte Lineare Struktur ist unabhängig von der Wahl der Karte.

**Beweis** Es sei  $(\psi, V)$  eine Karte von  $M$  um  $p$  und  $A'[c] = \frac{d}{dt} \Big|_t (\psi \circ c)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} AA'^{-1}(v) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ (\psi^{-1}(\psi(p) + tv))) \\ &= D(\varphi \circ \psi^{-1})|_{\psi(p)} \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\psi \circ \psi^{-1}(\varphi(p) + tv)) = D(\varphi \circ \varphi^{-1}) \cdot v. \end{aligned}$$

Also ist  $AA'^{-1}$  linear,

$$\begin{aligned} A'^{-1}(\lambda A'[c_1] + \mu A'[c_2]) &= A^{-1}(AA'^{-1}(\lambda A'[c_1] + \mu A'[c_2])) \\ &= A^{-1}(\lambda AA'^{-1}[c_1] + \mu AA'^{-1}[c_2]) \\ &= A^{-1}(\lambda A[c_1] + \mu A[c_2]). \end{aligned}$$

$\square$

**Motivation: Richtungsableitungen im  $\mathbb{R}^n$**

**Bemerkung** Für  $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^n$  ist die **Richtungsableitung** wie folgt definiert:

$$\partial_v f(x) = Df(x) \cdot v = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(x + tv).$$

Diese erfüllt die Leibniz-Regel:

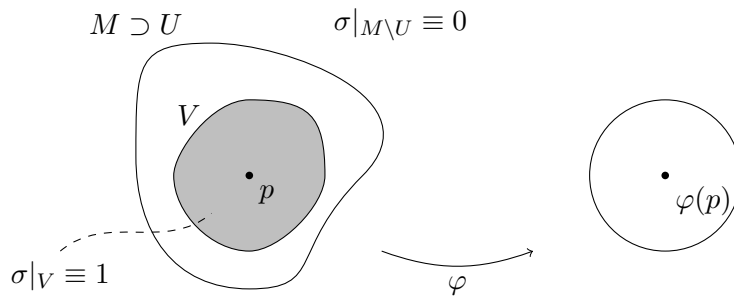
$$\partial_v(fg)(x) = \partial_v f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \partial_v g(x).$$

**Definition 2.4 (Algebraische Definition des Tangentialraumes)** Es sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $p \in M$ . Ein (algebraischer) **Tangentialvektor** an  $M$  in  $p$  ist eine Lineare Abbildung  $X_p: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ , welche die Leibniz-Regel erfüllt:

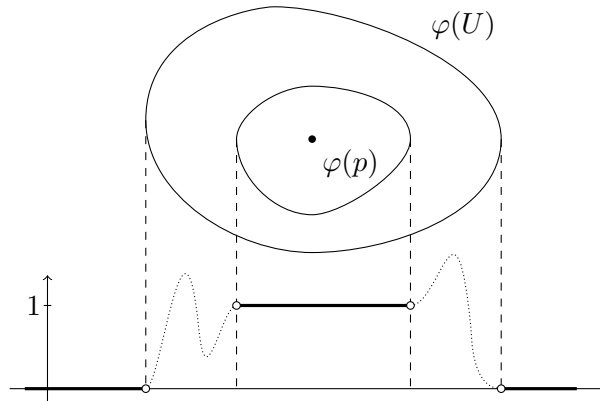
$$X_p(fg) = X_p(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot X_p(g).$$

Die algebraischen Tangentialvektoren bilden einen reellen Vektorraum  $T_p^{\text{alg}} M$ , den Tangentialraum an  $M$  in  $p$ .

**Lemma 2.5** Es sei  $U$  eine Umgebung von  $p \in M$ . Dann existiert eine Umgebung  $V \subset U$  von  $p$  und eine glatte reellwertige Funktion  $\sigma \in C^\infty(M)$  mit den Eigenschaften  $\sigma|_V = 1$  und  $\text{supp}(\sigma) \subset U$ .



**Beweis** Man kann ohne Einschränkung annehmen, dass  $U$  das Kartengebiet einer Karte  $\varphi$  von  $M$  um  $p$  ist und  $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$ . Es sei nun  $\varepsilon > 0$  so, dass  $\overline{B}_\varepsilon(0) \subset \varphi(U)$  gilt.



Ist dann  $\eta$  eine glatte Funktion auf  $\mathbb{R}$  mit  $\eta \equiv 1$  auf  $\left[-\frac{\varepsilon^2}{2}, \frac{\varepsilon^2}{2}\right]$  und  $\eta \equiv 0$  auf  $\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon^2, \varepsilon^2)$ , so hat für  $U_1 = \varphi^{-1}(B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0))$  die Funktion

$$\sigma(q) = \begin{cases} \eta(\|\varphi(q)\|^2) & \text{für } q \in U_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

die gewünschten Eigenschaften. □

**Lemma 2.6** Für alle  $X_p \in T_p^{\text{alg}} M$  gilt:

- (i)  $X_p(f) = 0$  falls  $f$  in einer Umgebung von  $p$  konstant ist.
- (ii)  $X_p(f) = X_p(g)$  falls  $f$  und  $g$  auf einer Umgebung übereinstimmen.

**Beweis** (ii) Es sei  $U$  eine Umgebung von  $p$  mit  $f|_U = g|_U$ . Ist dann  $\sigma$  wie in Lemma 2.5, so gilt  $\sigma f = \sigma g$  und aus

$$X_p(\sigma)f(p) + \sigma(p)X_p(f) = X_p(\sigma f) = X_p(\sigma g) = X_p(\sigma)g(p) + \sigma(p)X_p(g)$$

folgt  $X_p(f) = X_p(g)$ .

(i) Wegen der  $\mathbb{R}$ -Linearität und (ii) genügt es  $f \equiv 1$  zu betrachten. Es gilt

$$X_p(1) = X_p(1 \cdot 1) = X_p(1) \cdot 1 + 1 \cdot X_p(1) = 2 \cdot X_p(1),$$

$$\text{also } X_p(1) = 0.$$

□

**Bemerkung** Also gilt für  $f \in C^\infty(M)$  und  $g \in C^\infty(U)$  direkt:

$$\sigma g = \begin{cases} \sigma g|_U & \sigma g \in C^\infty(M) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aus  $\sigma g \in C^\infty(M)$  folgt  $X_p(g) = X_p(\sigma g)$ . Für eine Karte  $\varphi: U \rightarrow V$  von  $M$  und  $p$  seien algebraische Tangentialvektoren definiert:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \in T_p^{\text{alg}} M \quad \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p (f) = \partial_i(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) = D(f \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(p)} e_i.$$

**Satz 2.7** Die Vektoren  $\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p$  bilden eine Basis von  $T_p^{\text{alg}} M$ .

**Lemma 2.8** Es sei  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  und  $g \in C^\infty(B_\varrho(x_0))$ . Dann existieren glatte Funktionen  $h_i \in C^\infty(B_\varrho(x_0))$  mit  $h_i(x_0) = \partial_i g(x_0)$  und

$$g(x) = g(x_0) + \sum_{i=1}^n (x^i - x_0^i) h_i(x).$$

**Beweis (Beweis des Satzes)** Die  $j$ -te Komponente  $\varphi^j$  der Karte ist glatt und es gilt:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p (\varphi^j) = \partial_i(\varphi^j \circ \varphi^i)(\varphi(p)) = \partial_i x^j(\varphi(p)) = \delta_i^j.$$

Damit sind die Vektoren linear unabhängig.

Es sei  $X_p \in T_p^{\text{alg}} M$  und  $f \in C^\infty(M)$ . Für  $x_0 = \varphi(p) \in \mathbb{R}^n$ ,  $B_\varrho(x_0) \subset \varphi(U)$  und für  $g = f \circ \varphi^{-1}|_{B_\varrho(x_0)}$  gilt mit den Bezeichnungen wie im letzten Lemma:

$$\begin{aligned} X_p(f) &= X_p(g \circ \varphi) = X_p(g(\varphi(p))) + \sum (\varphi^i - \varphi(p)^i)(h_i \circ \varphi) \\ &= \underbrace{X_p(g(\varphi(p)))}_{=0} + \sum X_p((\varphi^i - \varphi(p)^i)(h_i \circ \varphi)) \\ &= \sum X_p(\varphi^i)(h_i \circ \varphi)(p) - X_p(\varphi(p)^i)(h_i \circ \varphi)(p) + \sum (\varphi^i - \varphi(p)^i)(p) X_p(h_i \circ \varphi) \\ &= \sum_{i=1}^n X_p(\varphi^i) \underbrace{(h_i \circ \varphi)(p)}_{\substack{=h_i(\varphi(p))=h_i(x_0)=\partial_i g(x_0) \\ =\partial_i(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))=\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p (f)}} \\ &= \sum_{i=1}^n X_p(\varphi^i) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p (f). \end{aligned}$$

□



**Bemerkung** Ist  $X_p = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ , so gilt  $\xi^i = X_p(\varphi^i)$ .

**Beweis (Beweis des Lemmas)** Es gilt:

$$g(x) - g(x_0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} g(tx + (1-t)x_0) dt = \sum_{i=1}^n (x^i - x_0^i) \underbrace{\int_0^1 \partial_i g(tx + (1-t)x_0) dt}_{=: h_i(x)} \square$$

**Satz 2.9 (Äquivalenz der Tangentialraumbegriffe)** Die Abbildung

$$J_p: T_p^{geo} M \rightarrow T_p^{alg} M \quad J_p[c](f) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ c)$$

ist ein linearer *Isomorphismus* „ $c(0)(f)$ “.

**Beweis** Wegen

$$\begin{aligned} J_p[c](f) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ c) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ c) \\ &= D(f \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(p)} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ c) = D(f \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(p)} A[c] \end{aligned}$$

ist  $J_p = D(\cdot) \circ A$  linear.

Ist  $[c] \in \text{Kern } J_p$ , so folgt aus  $0 = J_p[c](\varphi^i) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi^i \circ c)$ , dass  $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ c) = 0$  gilt, also  $[c] = 0$ . Damit ist  $J_p$  injektiv, also ein Isomorphismus.  $\square$

**Bemerkung** 1) Ist  $X_p = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ , so gilt  $X_p = \dot{c}(0)$  für  $c(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + t\xi)$ .

2) Für jede glatte Kurve  $c$  durch  $p$  ist  $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ c)$  der Koeffizientenvektor von  $\dot{c}(0)$  in der Basis  $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ .

**Satz 2.10 (Transformationsverhalten bei Kartenwechsel)** Es seien  $\varphi$  und  $\psi$  Karten in  $M$  um  $p$  und es bezeichnen  $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$  und  $\frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p$  die damit assoziierten Basen von  $T_p M$ . Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \sum_j \partial_i(\psi^j \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p.$$

Es sei  $X_p = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \sum \eta^j \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p$ . Dann gilt:

$$\eta^j = \sum \partial_i(\psi^j \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \xi^i \quad \text{bzw.} \quad \eta = D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \xi.$$

**Beweis** Es gelte  $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \sum \alpha_i^j \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p$  und nach obiger Bemerkung zum vorletzten Satz gilt:

$$\alpha_i^j = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (\psi^j) = \partial_i(\psi^j \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \quad \square$$



# Kapitel 3.

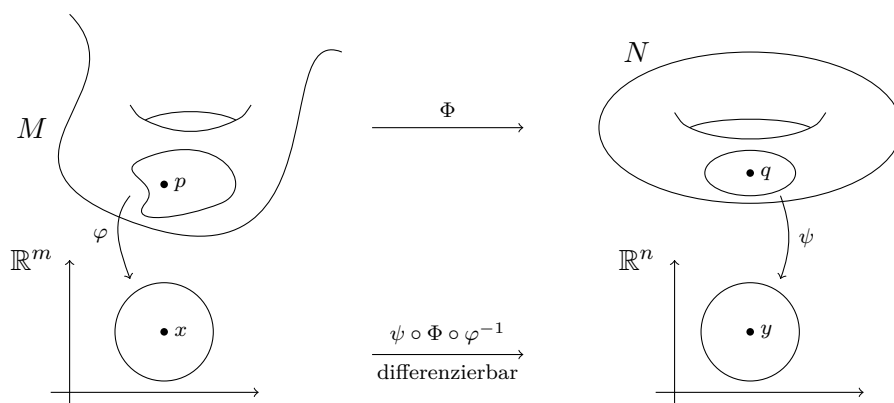
## Differentiale

Es seien  $M$  und  $N$  glatte Mannigfaltigkeiten und  $\Phi: M \rightarrow N$  eine glatte Abbildung. Sind  $p \in M$  und  $X_p \in T_p M$ , so ist

$$\Phi_{*p} X_p: C^\infty(N) \rightarrow \mathbb{R} \quad f \mapsto X_p(\underbrace{f \circ \Phi}_{\in C^\infty(N)}).$$

ein Tangentialvektor an  $N$  in  $\Phi(p)$ :

$$\begin{aligned} \Phi_{*p} X_p(fg) &= X_p((f \circ \Phi)(g \circ \Phi)) = X_p(f \circ \Phi)(g \circ \Phi)(p) + (f \circ \Phi)(p) X_p(g \circ \Phi) \\ &= \Phi_{*p} X_p(f)g(\Phi(p)) + f(\Phi(p)) \Phi_{*p} X_p(g). \end{aligned}$$



**Definition 3.1** Die lineare Abbildung  $\Phi_{*p}: T_p M \rightarrow T_{\Phi(p)} N$  heißt das **Differential** von  $\Phi$  in  $p$ . Der Rang von  $\Phi_{*p}$  bezeichnet man als den Rang von  $\Phi$  in  $p$ .

**Lemma 3.2 (Differentiale in lokalen Koordinaten)** Sind  $\varphi$  und  $\psi$  Karten von  $M$  und  $N$  um  $p$  und  $\Phi(p) = q$ , sowie  $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$  und  $\frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_q$  die Standardbasen von  $T_p M$  und  $T_q N$  bezüglich der Karten  $\varphi$  und  $\psi$ , so gilt:

$$\Phi_{*p} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \sum \partial_i (\psi^j \circ \Phi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_q.$$

Die partielle Ableitung  $\partial_i (\psi^j \circ \Phi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$  bezeichnet man auch kurz  $\frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i}(p)$ .

**Bemerkung** Aus der Linearität von  $\Phi_{*p}$  folgt, dass für  $X_p = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \in T_p M$  und  $\Phi_{*p} X_p = \sum \eta^j \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_q$  gilt:

$$\eta^j = \sum \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i} \xi^i, \text{ beziehungsweise } \eta = D(\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1}) \xi.$$

**Beweis**

$$\underbrace{\left( \Phi_{*p} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right)}_{\in T_q N} (\psi^j) = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (\psi^j \circ \Phi) = \partial_i (\psi^j \circ \Phi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) = \frac{\partial \Phi^j}{\partial y^i}(p). \quad \square$$

**Bemerkung (Charakterisierung durch Kurven)** Ist  $[c] \in T_p M$ , so gilt für  $f \in C^\infty(N)$ :

$$\Phi_{*p}[c](f) = [c](f \circ \Phi) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \underbrace{(f \circ \Phi \circ c)}_{\text{glatte Kurve auf } N} = [\Phi \circ c](f)$$

also  $\Phi_{*p}[c] = [\Phi \circ c]$ .

**Bemerkung (Tangentialräume an Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$ )** Ist  $U$  eine Untermannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^n$  mit den Eigenschaften

- (i)  $F: U \rightarrow M \cap F(U)$  ist ein Homöomorphismus,
- (ii)  $DF|_x: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$  ist injektiv für alle  $x \in U$ .

Dann ist  $\psi = F^{-1}$  eine Karte von  $M$ . Es bezeichnen  $\frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_p$  die Standardbasis bezüglich  $\psi$  und  $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x$  die Standardbasis bezüglich der kanonischen Karte  $\text{id}_{\mathbb{R}^m}$  des  $\mathbb{R}^m$ .

Dann gilt für  $g \in C^\infty(M)$  beliebig:

$$\frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_p (g) = \partial_i (g \circ \psi^{-1}) \underbrace{(\psi(p))}_{=x} = \partial_i (g \circ F)(x) = F_{*x} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) (f)$$

$$\begin{aligned} F_{*x} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) &= F_{*x}[t \mapsto x + te_i] = [t \mapsto F(x + te_i)] \\ &\sim \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} F(x + te_i) = DF|_x(e_i) = \partial_i F|_x \end{aligned}$$

$$T_p M = \langle \partial_1 F|_x, \dots, \partial_m F|_x \rangle$$

**Eigenschaften des Differentials**

- (i) (*Kettenregel*) Sind  $\Phi: M \rightarrow N$  und  $\Psi: N \rightarrow P$  glatt, so gilt:

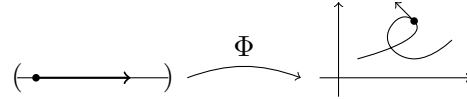
$$(\Psi \circ \Phi)_{*p} = \Psi_{*\Phi(p)} \circ \Phi_{*p}.$$

- (ii) Ist  $\Phi: M \rightarrow N$  ein Diffeomorphismus, so ist  $\Phi_{*p}$  ein Vektorraumisomorphismus.
- (iii) (*Satz von der Umkehrabbildung*) Ist  $\Phi: M \rightarrow N$  glatt und  $\Phi_{*p}$  bijektiv, so existieren Umgebungen  $U$  von  $p$  und  $V$  von  $\Phi(p)$ , so dass  $\Phi|_U: U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus ist.

**Definition 3.3 (Reguläre Punkte, Submersion, Immersion)** Es sei  $\Phi: M \rightarrow N$  glatt.

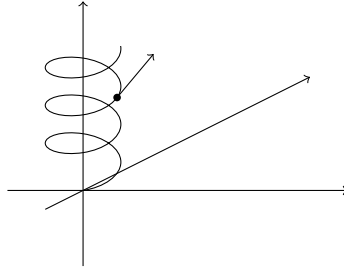
- (i) Es Punkt  $p \in M$  heißt **regulärer Punkt** von  $\Phi$ , wenn  $\Phi_{*p}$  surjektiv ist. Ein Punkt  $q \in N$  heißt **regulärer Wert**, wenn jeder Punkt  $p \in \Phi^{-1}(q)$  regulär ist.
- (ii) Die Abbildung  $\Phi$  heißt **Submersion**, wenn  $\Phi$  surjektiv ist und alle  $p \in M$  reguläre Punkte sind.
- (iii) Die Abbildung  $\Phi$  heißt **Immersion**, wenn für alle  $p \in M$   $\Phi_{*p}$  injektiv ist.
- (iv) Die Abbildung  $\Phi$  heißt **Einbettung**, wenn  $\Phi$  Immersion und Homöomorphismus auf sein Bild ist.

**Beispiel 1)** Betrachte eine Abbildung  $\Phi$



Immersion:  $\frac{d}{dt}$  Basis von  $T_x \mathbb{R}$ ,  $\Phi_{*x} \left( \frac{d}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \Phi$

- 2)  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$  ist eine Immersion aber ebenfalls nicht injektiv.
- 3)  $\mathbb{R} \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$  ist Immersion und Submersion.
- 4)  $\mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}, t \mapsto (e^{it}, t)$  ist eine Einbettung.



- 5) Ist  $M \subset N$  Untermannigfaltigkeit, so ist  $\iota: M \hookrightarrow N$  eine Einbettung.

**Satz 3.4** Es seien  $M$  und  $N$  glatte Mannigfaltigkeiten,  $\Phi: M \rightarrow N$  eine glatte Abbildung und  $p \in M$ , sowie  $q = \Phi(p)$ . Es bezeichnen  $m$  und  $n$  die Dimensionen von  $M$  und  $N$  und  $r$  den Rang von  $\Phi$  in  $p$ . Dann gelten folgende Aussagen:

- (i) Zu jeder Karte  $\psi$  von  $N$  um  $q$  mit  $\psi(q) = 0$  existiert eine Karte  $\alpha$  von  $M$  um  $p$  mit  $\alpha(p) = 0$  und glatte Funktionen  $f^{r+1}, \dots, f^n$  mit

$$(\psi \circ \Phi \circ \alpha^{-1})(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^r, f^{r+1}(x), \dots, f^n(x)).$$

- (ii) Falls der Rang von  $\Phi$  auf einer Umgebung von  $p$  konstant  $r$  ist, so existieren Karten  $\alpha$  um  $p$  mit  $\alpha(p) = 0$  und  $\beta$  um  $q$  mit  $\beta(q) = 0$ , so dass

$$(\beta \circ \Phi \circ \alpha^{-1})(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0).$$

**Korollar 3.5** (i) Falls  $\Phi$  auf einer offenen Umgebung von  $P = \Phi^{-1}(q)$  konstanten Rang  $r$  hat, so ist  $P$  eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension  $r$ .

- (ii) Ist  $q$  ein regulärer Wert von  $\Phi$ , so ist  $P = \Phi^{-1}(q)$  eine Untermannigfaltigkeit von  $M$  der Kodimension  $n$ .

Beispiel:  $\|\cdot\|^{-1}(1) = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$ .

- (iii) Ist  $\Phi_{*p}$  injektiv, so existiert eine Umgebung  $U$  von  $p$ , so dass  $\Phi(U) = Q \subset N$  eine Untermannigfaltigkeit von  $N$  ist.
- (iv) Ist  $\Phi$  eine Einbettung, so ist  $Q = \Phi(M)$  eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $N$  und  $\Phi: M \rightarrow Q$  ist ein Diffeomorphismus.

**Beweis** (i) Sei  $p \in P = \Phi^{-1}(q)$ . Nach Satz 3.4 (ii) existieren Karten  $(\alpha, U), (\beta, V)$  mit

$$(\beta \circ \Phi \circ \alpha^{-1})(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0)$$

und es gilt:

$$\begin{aligned} \alpha(P \cap U) &= (\alpha \circ \Phi^{-1} \circ \beta^{-1})(0) \\ &= \{x \in \alpha(U) \mid x^1 = \dots = x^r = 0\} = \alpha(U) \cap \{0\} \times \mathbb{R}^{m-r}. \end{aligned}$$

(ii) Ist  $q$  ein regulärer Wert von  $\Phi$ , so existieren nach Satz 3.4 (i) Karten  $\psi, \alpha$  mit

$$(\psi \circ \Phi \circ \alpha^{-1})(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^n) \quad (m \geq n = r)$$

für alle  $x \in \alpha(U)$ . Es gilt also für alle  $u \in U$ :

$$\text{Rang } \Phi_{*u} = \text{Rang } D(\psi \circ \Phi \circ \alpha^{-1})|_x = \text{Rang} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \\ \hline & & & 0 \end{array} \right) = n$$

Damit folgt die Behauptung aus (i).

(iii)  $\Phi_{*p}$  ist injektiv  $\Rightarrow r = m \leq n$ . Nach Wahl von Karten wie in (ii):

$$(\psi \circ \Phi \circ \alpha^{-1})(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^m, f^{m+1}(x), \dots, f^n(x))$$

$$\text{Rang } \Phi_{*u} = \text{Rang} \left( \begin{array}{ccc} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ \hline & & 0 \end{array} \right) = m$$

Nach der ersten Aussage des letzten Satzes erhalten wir spezielle Karten:

$$(\beta \circ \Phi \circ \alpha^{-1})(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m \times \{0\},$$

wobei  $\beta$  eine adaptierte Karte für  $\Phi(U) = Q$  ist.

(iv) folgt aus (iii). □

**Beweis (von Satz 3.4)** (i) Es sei  $(\psi, V)$  eine Karte von  $N$  um  $q$  mit  $\psi(q) = 0$ . Ist dann  $(\varphi, U)$  eine Karte von  $M$  um  $p$  mit  $\varphi(p) = 0$ , so kann man ohne Einschränkung annehmen, dass

$$\partial_i(\psi^j \circ \Phi \circ \varphi^{-1}) = \left( \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i} \right)_{i,j \leq r}$$

invertierbar ist. Es sei  $\alpha: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  gegeben durch

$$\alpha^j = \begin{cases} \psi^j \circ \Phi & \text{für } j \leq r \\ \varphi^j & \text{sonst} \end{cases}$$

Betrachte nun den Kartenwechsel

$$\left(\frac{\partial \alpha^j}{\partial x^i}\right)_{i,j} = \left(\partial_i(\alpha^j \circ \varphi^{-1})(0)\right)_{i,j} = \left(\begin{array}{c|cc} \left(\frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i}\right)_{i,j \leq r} & & * \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \\ & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Der Rang von  $\alpha$  in  $p$  ist damit gleich  $m$ . Nach dem Umkehrsatz ist  $\alpha$  ein lokaler Diffeomorphismus, also eine Karte von  $M$ . Ferner gilt für  $j \leq r$ :

$$\left((\psi \circ \Phi \circ \alpha^{-1})(x^1, \dots, x^m)\right)^j = (\psi^j \circ \Phi \circ \alpha^{-1})(\alpha(U)) = (\psi^j \circ \Phi)(U) = \alpha^j(U) = x^j.$$

Damit hat  $\psi \circ \Phi \circ \alpha^{-1}$  die gesuchte Darstellung.

(ii) Der Rang von  $\Phi$  sei auf  $U$  konstant gleich  $r$ . Dann gilt für alle  $x \in \alpha(U)$ .

$$r = \text{Rang } D(\psi \circ \Phi \circ \alpha^{-1})|_x = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ \hline & * & & \underbrace{\left(\frac{\partial f^{r+j}}{\partial x^{r+i}}\right)}_{\rightsquigarrow \text{Rang } 0} \end{array}\right)$$

Somit gilt auf einer Umgebung der 0 für alle  $i, j > r$ :  $\frac{\partial f^j}{\partial x^i} \equiv 0$ . Es gibt also glatte Funktionen  $g^{r+1}, \dots, g^n$  mit  $g^{r+j}(x^1, \dots, x^r) = f^{r+j}(x^1, \dots, x^n)$ .

Setzt man nun

$$\beta^j = \begin{cases} \psi^j & j \leq r \\ \psi^j - g^j \circ (\psi^1, \dots, \psi^r) & \text{sonst} \end{cases},$$

so gilt:

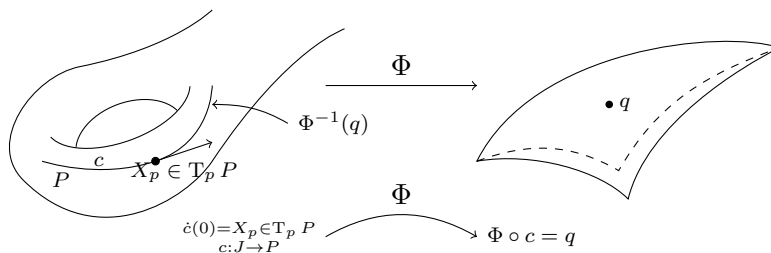
$$\left(\frac{\partial \beta^j}{\partial y^i}(q)\right)_{i,j} = \left(\begin{array}{c|c} \left(\frac{\partial \psi^j}{\partial y^i}\right)_{i,j \leq r} = \delta_i^j & 0 \\ \hline * & \underbrace{\left(\frac{\partial \psi^j}{\partial y^i}\right)}_{=\delta_i^j} - \underbrace{\left(\frac{\partial g^j}{\partial x^i}\right)}_{=0} \end{array}\right).$$

Damit gilt  $\left(\frac{\partial \beta^j}{\partial y^i}\right)_{i,j} = \delta_i^j$  und nach dem Umkehrsatz definiert  $\beta$  in einer Umgebung von  $q$  eine Karte von  $N$ . Wie oben rechnet man nach:

$$(\beta \circ \Phi \circ \alpha^{-1})(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0). \quad \square$$

**Bemerkung** Ist  $\Phi: M \rightarrow N$  glatt mit konstantem Rang  $r$  auf einer Umgebung von  $P = \Phi^{-1}(q)$ , so ist  $P$  eine  $(m-r)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $M$ .

Der Tangentialraum  $T_p P$  in  $p$  an  $P$  ist ein Untervektorraum von  $T_p M$  und es gilt:



Ist  $X_p = \dot{c}(0) \in T_p P$ , so ist  $c$  glatt als Abbildung  $\mathcal{I} \rightarrow M$  und ebenso  $\Phi \circ c \equiv q$ .  
Damit gilt:

$$\Phi_{*p}(\dot{c}(0)) = \underbrace{\overline{\Phi \circ c}}_{\equiv q}(0) = 0,$$

also  $T_p P \subseteq \text{Kern } \Phi_{*p}$ . Es gilt:

$$\dim T_p P = \dim P = m - r = \dim T_p M - \text{Rang } \Phi_{*p} = \dim \text{Kern } \Phi_{*p}.$$

**Beispiel 3.6** Die  $n$ -dimensionale Sphäre  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ist das reguläre Urbild der glatten Abbildung  $\Phi: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto \|x\|^2$ ;  $S^n = \Phi^{-1}(1)$ . Der Tangentialraum  $T_x \mathbb{R}^{n+1}$  ist vermöge der Abbildung

$$\mathbb{R}^{n+1} \ni V \mapsto [t \mapsto x + tv] \in T_x \mathbb{R}^{n+1}.$$

gegeben. Damit gilt genau dann  $v \in T_x S^n$ , wenn  $[x + tv] \in \text{Kern } \Phi_{*x}$ .

$$0 = \Phi_{*x}[x + tv] = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi(x + tv) = \partial_v \Phi(x) = D\Phi|_x(v) = \langle \text{grad } \Phi(x), v \rangle.$$

Es gilt  $\text{grad } \Phi(x) = (2x^1, \dots, 2x^{n+1}) = 2x$ , also gilt  $v \in T_x S^n$ , genau dann, wenn  $v \perp x$ .



# Kapitel 4.

## Tangentialbündel und Vektorfelder

**Definition 4.1 (Tangentialbündel)** Es sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Die Menge  $TM = \dot{\bigcup}_{p \in M} T_p M$  zusammen mit der sogenannten kanonischen Projektion  $\pi: TM \rightarrow M, T_p M \ni X_p \mapsto p$  heißt das **Tangentialbündel** von  $M$ .

### 1. Das Tangentialbündel als glatte Mannigfaltigkeit

Es sei  $(\varphi, U)$  eine Karte von  $M$ . Setzt man  $TM|_U = \pi^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_{p \in U} T_p M$ , so ist nach Satz 2.9 die Abbildung

$$\bar{\varphi}: TM|_U \rightarrow \underbrace{\varphi(U) \times \mathbb{R}^m}_{\subset \mathbb{R}^{2m}} \quad \underbrace{\sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p}_{=X_p \in T_p M} \mapsto (\varphi(p), \xi)$$

bijektiv. Es sei eine Topologie auf  $TM$  dadurch erklärt, dass eine Menge  $V \subset TM$  genau dann offen ist, wenn für alle Karten  $(\varphi, U)$  die Menge  $\bar{\varphi}(V \cap TM|_U)$  offen in  $\mathbb{R}^{2m}$  ist. Diese Topologie ist hausdorffsch und besitzt eine abzählbare Basis, da dies für  $M$  und  $\mathbb{R}^m$  gilt. Nach Konstruktion sind alle  $\bar{\varphi}$  Homöomorphismen. Ist  $\mathcal{A} = \{(\varphi, U)\}$  ein  $C^\infty$ -Atlas von  $M$ , so definiert

$$\bar{\mathcal{A}} = \{(\bar{\varphi}, TM|_U) \mid (\varphi, U) \in \mathcal{A}\}$$

eine glatte Struktur auf  $TM$ . Für Karten  $(\varphi, U), (\psi, V)$  von  $M$  ist der Kartenwechsel  $X_p = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \circ \bar{\varphi}^{-1}: \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^m \\ (x, \xi) &\mapsto (\psi \circ \varphi^{-1}(x), D(\psi \circ \varphi^{-1})|_x \xi), \end{aligned}$$

glatt. Damit trägt  $TM$  in kanonischer Weise eine glatte Struktur. Darüber hinaus ist die kanonische Projektion  $\pi: TM \rightarrow M$  bezüglich dieser glatten Struktur eine Submersion. (Beweis als Übungsaufgabe)

Ist  $N$  eine weitere glatte Mannigfaltigkeit und  $\Phi: M \rightarrow N$  glatt, so ist  $\Phi_*: TM \rightarrow TN, X_p \mapsto \Phi_{*p} X_p$  eine glatte Abbildung (ebensfalls Übungsaufgabe).

**Definition 4.2** Eine stetige Abbildung  $X: M \rightarrow TM$  mit  $\pi \circ X = \text{id}_M$  heißt **Vektorfeld** auf  $M$ . Ist  $X$  glatt (als Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten), so heißt  $X$  ein **glattes Vektorfeld**.

**Bemerkung** Ist  $(\varphi, U)$  eine Karte von  $M$ , so sind die Abbildungen  $U \rightarrow T M|_U$ ,  $p \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$  glatte Vektorfelder (in der Karte  $\varphi$  sind diese genau die Abbildungen  $(x, e_i)$ ). Ist  $X$  ein glattes Vektorfeld, so gilt für jedes  $u \in U$ :

$$X_u = \sum \xi^i(u) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_u,$$

wobei  $\xi(u) = (\xi^1(u), \dots, \xi^m(u))$  eine glatte Abbildung  $U \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist. Ein Vektorfeld ist genau dann glatt, wenn für jede Karte  $(\varphi, U)$  die Koeffizientenfunktionen  $\xi^i(u)$  von  $X_u = \sum \xi^i(u) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_u$  glatte Funktionen sind.

**Beispiel** Betrachte die  $n$ -Sphäre  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  und deren Tangentialraum  $T_p S^n = p^\perp$ . Ein glattes Vektorfeld auf  $S^n$  ist also eine glatte Abbildung  $X: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  mit  $X_p \perp p$ . Es sei  $n = 2k - 1$ , dann ist

$$X: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \quad (x^1, y^1, \dots, x^k, y^k) \mapsto (-y^1, x^1, \dots, -y^k, x^k)$$

ein glattes Vektorfeld auf  $S^n$  ohne eine Nullstelle.

**Bemerkung** Der **Satz vom Igel** besagt gerade: Jedes glatte Vektorfeld auf einer Sphäre gerader Dimension hat eine Nullstelle.

**Bemerkung** Es bezeichne  $\mathcal{V}(M)$  die Menge aller glatten Vektorfelder auf der Mannigfaltigkeit  $M$ . Der sogenannte **Nullschnitt**:

$$\sigma: M \rightarrow T M \quad p \mapsto 0_p \in T_p M$$

ist ein glattes Vektorfeld auf  $M$ .

*Übungsaufgabe:* Zeige dass der Nullschnitt eine Einbettung ist.

**Bemerkung** Sind  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$  und ist  $g \in C^\infty(M)$ , so sind die punktweise Summe  $X + Y$  und das Produkt  $gX$  wieder glatte Vektorfelder auf  $M$ . Damit ist  $\mathcal{V}(M)$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum beziehungsweise  $C^\infty(M)$ -Modul. Jedes Vektorfeld  $X$  ist eine Derivation von  $C^\infty(M)$ :

$$X(fg)(p) = X(f)(p)g(p) + f(p)X(g)(p) = (gX(f) + fX(g))(p).$$

Es seien  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$  glatte Vektorfelder. Die **Lieklammer**  $[X, Y]$  von  $X$  und  $Y$  ist dann durch den folgenden Ausdruck definiert:

$$[X, Y](f)(p) = X_p(Yf) - Y_p(Xf).$$

**Lemma 4.3** Die Lieklammer ist eine schiefsymmetrische  $\mathbb{R}$ -bilineare Abbildung  $\mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \rightarrow \mathcal{V}(M)$ . Es gilt die sogenannte **Jacobiidentität**:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

**Beweis** Es seien  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ ,  $f, g \in C^\infty(M)$  und  $p \in M$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} [X, Y](fg)[p] &= X_p(Y(f)g + fY(g)) - Y_p(X(f)g + fX(g)) \\ &= X_p(Y(f))g(p) + Y_p(f)X_p(g) + X_p(f)Y(g)(p) + f(p)X_p(Y(g)) \\ &\quad - Y_p(X(f))g(p) - X_p(f)Y_p(g) - Y_p(f)X(g)(p) - f(p)Y_p(X(g)) \\ &= (X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)))g(p) + f(p)(X_p(Y(g)) - Y_p(X(g))) \\ &= [X, Y]_p(f)g(p) + f(p)[X, Y]_p(g). \end{aligned}$$

Damit gilt  $[X, Y] \in \mathcal{V}(M)$ . Schiefsymmetrie und  $\mathbb{R}$ -Linearität gelten offensichtlich. Die Jacobiidentität sei als Übungsaufgabe überlassen (Nachrechnen!).  $\square$

**Lemma 4.4** *Es seien  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$  glatte Vektorfelder und  $(\varphi, U)$  eine Karte von  $M$ . Sind dann  $X|_U = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $Y|_U = \sum \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  und  $[X, Y]|_U = \sum \zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  die entsprechenden lokalen Darstellungen, so gilt:*

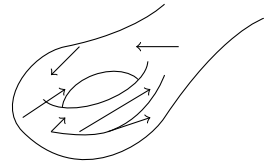
$$\zeta^j = \sum \left( \xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} - \eta^i \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \right).$$

Der Beweis ist als Übung überlassen.

## 2. Flüsse

Was haben Vektorfelder mit Differentialgleichungen zu tun? Jedes glatte Vektorfeld  $X$  definiert ein Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)} \\ \gamma(0) = p \end{cases},$$



oder in lokalen Koordinaten:

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) = \xi(\tilde{\gamma}(t)) \\ \tilde{\gamma}(0) = 0, \text{ falls } \varphi(p) = 0, \end{cases}$$

mit  $\tilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma$  für eine Karte  $(\varphi, U)$  um  $p$  und  $X|_U = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ .

**Definition 4.5** *Es sei  $X \in \mathcal{V}(M)$  ein glattes Vektorfeld und  $p \in M$ , sowie  $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$  ein offenes, zusammenhängendes Intervall um 0. Eine glatte Kurve  $\gamma: \mathcal{I} \rightarrow M$  mit*

$$\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)} \quad \gamma(0) = p$$

heißt **Integralkurve** oder **Trajektorie** von  $X$  durch  $p$ .

**Bemerkung** Eine Kurve  $\gamma$  ist genau dann Integralkurve von  $X$  durch  $p$ , wenn für jede Karte  $(\varphi, U)$  die Kurve  $\tilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma$  eine Lösung des (autonomen) Anfangswertproblems

$$\dot{\tilde{\gamma}} = \xi(\tilde{\gamma}(t)) \quad \tilde{\gamma}(0) = \varphi(p)$$

ist, wobei  $X|_U = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  gelte.

Für jedes  $p \in M$  ist somit (lokal) ein Anfangswertproblem gestellt. Gesucht ist eine „simultane“ Lösung all dieser Anfangswertprobleme, also eine Abbildung  $(t, p) \mapsto \gamma(t, p) = \gamma^t(p)$  mit

$$\begin{cases} \dot{\gamma}^t(p) = X_{\gamma^t(p)} \\ \gamma^0(p) = p \end{cases}.$$

**Satz 4.6 (Lokale Existenz und Eindeutigkeit)** *Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\mathcal{I}_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$  und  $F: \mathcal{I}_\varepsilon \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^k$ -differenzierbar. Dann existiert für alle  $x \in U$  eine Umgebung  $V$  von  $x$  in  $U$  und ein  $\delta > 0$ , so dass gilt:*

- (i) Für alle  $x \in V$  existiert eine  $C^{k+1}$ -Lösung  $\gamma_x: \mathcal{I}_\delta \rightarrow V$ , von  $\gamma'_x(t) = F(t, \gamma(t))$  und  $\gamma_x(0) = x$ .
- (ii) Diese Lösung ist lokal eindeutig, das heißt falls  $\tilde{\gamma}_x$  eine weitere Lösung auf  $\mathcal{I}_{\tilde{\delta}}$  ist, so gilt

$$\gamma_x(t) = \tilde{\gamma}_x(t)$$

(für alle  $|t| \leq \min\{\delta, \tilde{\delta}\}$ )

- (iii) Die Abbildung

$$\gamma: \mathcal{I}_\delta \times V \rightarrow U \quad (t, x) \mapsto \gamma_x(t)$$

ist  $C^k$ -differenzierbar.

Zum Beweis siehe Lang: „Differential and Riemannian Manifolds“, 3. Auflage, 1995, Chapter IV.1, p.65[5].

**Korollar 4.7** Es sei  $X \in \mathcal{V}(M)$  und  $p \in M$ . Dann existiert eine offene Umgebung  $U$  von  $p$ , ein  $\varepsilon > 0$  und eine glatte Abbildung:

$$\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \rightarrow M$$

so dass  $t \mapsto \gamma^t(p)$  eine Integralkurve von  $X$  durch  $p$  ist. (Setze dann  $F(t, x) = \xi(\varphi^{-1}(x))$ )

**Korollar 4.8** Sind  $\gamma_1: \mathcal{J}_1 \rightarrow M$ ,  $\gamma_2: \mathcal{J}_2 \rightarrow M$  Integralkurven eines Vektorfeldes  $X \in \mathcal{V}(M)$  durch  $p$ , dann gilt  $0 \in \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2$  und  $\gamma_1(0) = p = \gamma_2(0)$ . Nach Satz 4.6 (ii) gilt dann  $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$  für alle  $t \in \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2$ . Damit ist

$$\gamma: \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2 \rightarrow M \quad t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in \mathcal{J}_1 \\ \gamma_2(t) & t \in \mathcal{J}_2 \end{cases}$$

eine Integralkurve von  $X$  durch  $p$ . Also existiert für jedes  $p \in M$  ein maximaler Definitionsbereich  $\mathcal{I}_p$  für Integralkurven von  $X$  durch  $p$ ; dieser ist offen.

**Definition** Für  $X \in \mathcal{V}(M)$  heißt die, wie im vorigen Korollar definierte, Familie maximaler Integralkurven

$$\gamma(t, p) = \gamma^t(p) \quad (t \in \mathcal{I}_p)$$

der **Fluss** des Vektorfeldes  $X$ . Seinen Definitionsbereich notiert man mit:

$$\mathcal{D}_X = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times M \mid t \in \mathcal{I}_p\}.$$

**Satz 4.9** Ist  $X \in \mathcal{V}(M)$  ein glattes Vektorfeld mit Fluss  $\gamma$ , so ist  $\mathcal{D}_X$  eine offene Menge und sein Fluss  $\gamma: \mathcal{D}_X \rightarrow M$  glatt.

**Bemerkung** Es gilt:  $\gamma^0 = \text{id}_M$ . Ist  $(s, p) \in \mathcal{D}_X$ , so gilt

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (t \mapsto \gamma^{t+s}(p)) = X_{\gamma^s(p)},$$

also ist  $t \mapsto \gamma^{t+s}(p)$  eine Integralkurve von  $X$  durch  $q = \gamma^s(p)$ . Aus der Eindeutigkeit folgt damit:

$$\gamma^{t+s}(p) = \gamma^t(\gamma^s(p))$$

für alle  $s, t$ ,  $s + t \in \mathcal{I}_p$ , ferner gilt  $\mathcal{I}_q = \mathcal{I}_p - s$ . Kurz geschrieben:  $\gamma^{t+s} = \gamma^t \circ \gamma^s$ . Für alle  $t$  ist dann  $\mathcal{D}_t = \{p \in M \mid (t, p) \in \mathcal{D}_X\}$  offen und  $\gamma^t$  ein Diffeomorphismus von  $\mathcal{D}_t$  auf  $\mathcal{D}_{-t}$ , denn  $\gamma^{-t} \circ \gamma^t = \gamma^{-t+t} = \gamma^0 = \text{id}_M = \gamma^t \circ \gamma^{-t}$ . So definiert  $\gamma$  einen „lokalen Gruppenhomomorphismus“ von  $\mathbb{R}$  in  $M^M$ .

**Beweis (von Satz 4.9)** Es sei  $p \in M$  und  $\mathcal{J}_p^+$  die Menge aller  $t \geq 0$ , für welche eine offene Umgebung  $U$  von  $[0, t] \times \{p\}$  in  $\mathbb{R} \times M$  existiert, so dass  $\gamma$  auf  $U$  glatt ist.

- $\mathcal{J}_p^+$  ist ein Intervall,
- $\mathcal{J}_p^+ \subseteq \mathcal{J}_p \cap \mathbb{R}_{\geq 0}$
- $0 \in \mathcal{J}_p^+$
- $\mathcal{J}_p^+$  ist offen in  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ .

Es bleibt zu zeigen, dass  $\mathcal{J}_p^+$  abgeschlossen ist.

Es sei  $s \in \overline{\mathcal{J}_p^+} \cap (\mathcal{J}_p \cap \mathbb{R}_{\geq 0})$  und  $q = \gamma^s(p)$ . Dann existieren  $\varepsilon > 0$  und eine Umgebung  $U$  von  $q$ , so dass  $\gamma$  auf  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U$  glatt ist. Es sei  $t \in \mathcal{J}_p^+$  mit  $|s - t| < \varepsilon$  und  $\gamma^t(p) \in U$ . Nach Definition von  $\mathcal{J}_p^+$  existiert eine offene Umgebung  $V$  von  $p$  in  $M$  und  $\delta > 0$ , so dass  $(-\delta, t + \delta) \times V \subseteq \mathcal{D}_X$  gilt und darauf  $\gamma$  glatt ist. Dann ist  $V' = (\gamma^t|_V)^{-1}(U) = \{p' \in V \mid \gamma^t(p') \in U\}$  eine offene Umgebung von  $p$ . Für alle  $p' \in V'$  ist

$$r \mapsto \begin{cases} \gamma^r(p') & \text{falls } r < t + \delta \\ \gamma^{r-t}(\gamma^t(p')) & \text{falls } r \in (t, t + \varepsilon) \end{cases}$$

eine Integralkurve von  $X$  durch  $p'$  (die Flüsse  $\gamma^r$  und  $\gamma^{r-t} \circ \gamma^t$  existieren für die angegebenen Zeiten und stimmen auf dem Schnitt der Intervalle,  $(t, t + \delta)$ , überein). Es gilt also  $(-\delta, t + \varepsilon) \subseteq \mathcal{J}_{p'}$  für alle  $p' \in V'$  und somit  $(-\delta, t + \varepsilon) \times V' \subset \mathcal{D}_X$ . An der obigen Darstellung sieht man, dass  $\gamma$  auf dieser offenen Umgebung von  $[0, s] \times \{p\}$  glatt ist. Also gilt  $s \in \mathcal{J}_p^+$ . Analog argumentiert man für  $\mathcal{J}_p^-$ .  $\square$

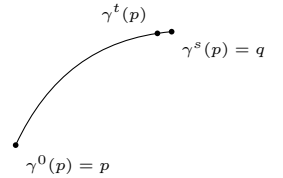
**Definition 4.10 (vollständiges Vektorfeld)** Ein Vektorfeld auf  $M$  heißt **vollständig**, wenn der Definitionsbereich seines Flusses gleich  $\mathbb{R} \times M$  ist.

**Bemerkung** Dies ist genau dann der Fall, wenn alle Integralkurven für alle Zeiten existieren. Ist  $X \in \mathcal{V}(M)$  vollständig und bezeichnet  $\gamma$  seinen Fluss, so ist jede  $\gamma^t$  ein Diffeomorphismus von  $M$  mit Inversen  $\gamma^{-t}$ .

**Lemma 4.11** Es sei  $c: \mathcal{I} \rightarrow M$  eine Integralkurve von  $X \in \mathcal{V}(M)$  durch  $p$  und  $t_n \in \mathcal{I}$  eine Folge, so dass die Grenzwerte  $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} t_\infty \in \mathbb{R}$  und  $c(t_n) \rightarrow q \in M$  existieren.

Dann gilt  $t_\infty \in \mathcal{I}_p$  und  $\gamma^{t_\infty}(p) = q$ .

**Beweis** Nach Korollar 4.7 existiert eine Umgebung  $U$  von  $q$  und  $\varepsilon > 0$ , so dass auf  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U$  ein lokaler Fluss von  $X$  definiert ist.



Wählt man  $k$  so groß, dass  $t_\infty - t_k < \varepsilon$  gilt, so ist für  $\bar{q} = c(t_k)$  und  $t$  mit  $|t - t_k| < \varepsilon$  der Fluss  $t \mapsto \gamma^{t-t_k}(\bar{q})$  erklärt. Aus Korollar 4.8 folgt, dass  $\gamma^{t_k}(p) = c(t_k) = \bar{q}$  gilt. Damit ist die Kurve

$$\bar{c}(t) = \begin{cases} c(t) & \text{für } t < t_\infty \\ \gamma^{t-t_k}(\bar{q}) & \text{falls } |t - t_k| < \varepsilon \end{cases}$$

eine glatte Fortsetzung von  $c$  und eine Integralkurve von  $X$  durch  $p$ . Insbesondere gilt  $t_\infty < t_k + \varepsilon$ , also  $t_\infty \in \mathcal{I}_p$  und

$$\gamma^{t_\infty}(p) = \gamma^{t_\infty-t_k}(\gamma^{t_k}(p)) = \bar{c}(t_\infty) = \lim_{t \rightarrow t_\infty} c(t) = q. \quad \square$$

**Bemerkung 4.12 (Moral des obigen Lemmas)** Integralkurven existieren für alle Zeiten oder aber sie verlassen jedes Kompaktum.

**Korollar 4.13** Hat  $X \in \mathcal{V}(M)$  kompakten Träger, so ist  $X$  vollständig. Ist  $M$  kompakt, so ist jedes glatte Vektorfeld vollständig.

**Beispiel** Das Vektorfeld  $X: \mathbb{R} \rightarrow T\mathbb{R}, t \mapsto t^2 \frac{\partial}{\partial t}$  ist nicht vollständig, denn  $c(t) = (1-t)^{-1}$  ist die Integralkurve von  $X$  durch 1.

Ist  $\Phi: M \rightarrow N$  glatt, so ist  $\Phi_*: TM \rightarrow TN$  glatt. Ist  $\Phi$  ein Diffeomorphismus, so ist  $\Phi^{-1}$  glatt und  $q \mapsto (\Phi_*X)_q = \Phi_{*\Phi^{-1}(q)}X_{\Phi^{-1}(q)}$  ist ein glattes Vektorfeld auf  $N$ . Es gilt für  $f \in C^\infty(N)$ :

$$(\Phi_*X)(f)(q) = X_{\Phi^{-1}(q)}(f \circ \Phi).$$

**Lemma 4.14** Es sei  $X \in \mathcal{V}(M)$ ,  $\Phi: M \rightarrow N$  ein Diffeomorphismus und es bezeichne  $\gamma$  den Fluss von  $X$  und  $\mathcal{D}_X$  seinen (maximalen) Definitionsbereich. Dann ist

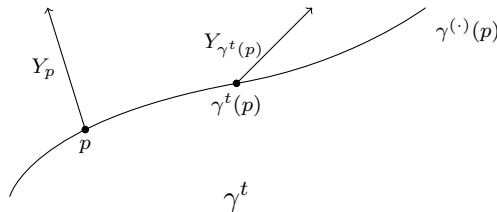
$$\{(t, q) \mid (t, \Phi^{-1}(q)) \in \mathcal{D}_X\} \rightarrow N \quad (t, q) \mapsto \Phi \circ \gamma^t \circ \Phi^{-1}(q)$$

der Fluss von  $\Phi_*X$ .

**Beweis** Für  $f \in C^\infty(N)$  und  $q \in N$  gilt

$$\begin{aligned} (\Phi_*X)(f)(q) &= X_{\Phi^{-1}(q)}(f \circ \Phi) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \Phi)(\gamma^t(\Phi^{-1}(q))) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\underbrace{\Phi \circ \gamma^t \circ \Phi^{-1}(q)}_{\text{Fluss von } \Phi_*X}). \end{aligned} \quad \square$$

*Erinnerung:*  $\frac{1}{t}(F(x+tv) - F(x))$  oder für  $c$  mit  $c(0) = x, \dot{c}(0) = v$ :  $\frac{1}{t}(F(c(t)) - F(x))$ . Nun seien  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ .



Im Allgemeinen liegen  $Y_{\gamma^t(p)}$  und  $Y_p$  in unterschiedlichen Tangentialräumen. Da aber  $\gamma^t$  (für kleine Zeiten) ein (lokaler) Diffeomorphismus ist, gilt

$$(\gamma_*^{-t}Y)_p := \gamma_{*\gamma^t(p)}^{-t}(Y_{\gamma^t(p)}) \in T_p M.$$

Die Differenz  $(\gamma_*^{-t}Y)_p - Y_p$  ist also wohldefiniert.

**Definition 4.15** Es seien  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$  und  $\gamma$  der Fluss von  $X$ . Das durch

$$p \mapsto \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( (\gamma_*^{-t}Y)_p - Y_p \right)$$

definierte glatte Vektorfeld heißt **Lieableitung** von  $Y$  längs  $X$ . Man schreibt  $\mathcal{L}_X Y$ .

Die Kurve  $(\gamma_*^{-t}Y)_p$  in  $T_p M$  ist glatt und  $(\mathcal{L}_X Y)_p = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\gamma_*^{-t}Y)_p$ . Dass  $\mathcal{L}_X Y$  glatt ist, rechnet man entweder in lokalen Koordinaten nach oder benutzt den folgenden Satz.

**Satz 4.16** Für  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$  gilt:

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y].$$

**Beweis** Es seien  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ ,  $f \in \mathbb{C}^\infty(M)$  und  $\gamma$  der Fluss von  $X$ .

Es ist zu zeigen:  $[X, Y]_p(f) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} ((\gamma_*^{-t}Y)_p(f) - Y_p(f))$ . Dazu sei (um  $(0, p)$ )

$$h(t, q) = f(\gamma^{-t}(q)) - f(q) \quad \text{und} \quad g_t(q) = \int_0^1 h'(ts, q) ds.$$

Dann gilt:

$$tg_t(q) = \int_0^1 h'(ts, q)(t) ds = \int_0^t h' = h(t, q) - h(0, q) = f(\gamma^{-t}(q)) - f(q)$$

also  $f \circ \gamma^t = f + tg_t$  und

$$g_0(q) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tg_t(q)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(\gamma^{-t}(q)) - f(q)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ \gamma^{-t})(q) = -X_q(f)$$

Betrachte:

$$(\gamma_*^{-t}Y)_p(f) = Y(f \circ \gamma^{-t})(\gamma^t(p)) = Y(f)(\gamma^t(p)) + tY_{g_t}(\gamma^t(p)).$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X Y)_q(f) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((\gamma_*^{-t}Y)_p(f) - Y_p(f)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Yf(\gamma^t(p)) - Y_p(f)) + \lim_{t \rightarrow 0} Y_{g_t}(\gamma^t(p)) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (Yf \circ \gamma^t)(p) + Yg_0(p) \\ &= X_p(Yf) - Y_p(Xf) = [X, Y]_p(f). \end{aligned} \quad \square$$

**Satz 4.17** Die Lieklammer  $[X, Y]$  zweier Vektorfelder  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$  verschwindet genau dann, wenn ihre Flüsse (lokal) kommutieren, i.e.

$$\gamma_X^s \circ \gamma_Y^t = \gamma_Y^t \circ \gamma_X^s.$$

Der Beweis sei als Übungsaufgabe überlassen.

Es seien  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$  und  $\Phi: M \rightarrow N$ . Bezeichnet  $\gamma$  den Fluss von  $X$ , so gilt

$$\begin{aligned} [\Phi_*X, \Phi_*Y] &= \mathcal{L}_{\Phi_*X}\Phi_*Y \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left( \Phi_* \circ \gamma_*^{-t} \circ \Phi_*^{-1}(\Phi_*Y) \right) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left( \Phi_* \circ \gamma_*^{-t} Y \right) = \Phi_* \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_*^{-t} Y \right) \\ &= \Phi_*(\mathcal{L}_X Y) = \Phi_*[X, Y]. \end{aligned}$$

Man erhält einen alternativen Beweis der Jacobiidentität.

**Beweis** Es seien  $X, Y, Z \in \mathcal{V}(M)$  und  $\gamma$  der Fluss von  $X$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} [X, [Y, Z]] &= \mathcal{L}_X[Y, Z] = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left( \gamma_*^{-t}[Y, Z] \right) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} [\gamma_*^{-t}Y, \gamma_*^{-t}Z] \\ &= \left[ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_*^{-t}Y, Z \right] + \left[ Y, \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_*^{-t}Z \right] \\ &= [\mathcal{L}_X Y, Z] + [Y, \mathcal{L}_X Z] \\ &= [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]] \\ &= -[Z, [X, Y]] - [Y, [Z, X]]. \end{aligned} \quad \square$$



# Kapitel 5.

## Vektorbündel

Betrachte  $TM$  als glatte Mannigfaltigkeit durch

$$\underbrace{\pi^{-1}(U)}_{=TM|_U} \rightarrow \underbrace{\varphi(U) \times \mathbb{R}^m}_{\cong U \times \mathbb{R}^m} \quad \underbrace{\sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p}_{=X_p} \mapsto (\varphi(p), \xi).$$

Fasern:  $T_p M = \pi^{-1}(p)$   $m$ -dimensionaler Vektorraum und  $X_p = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \mapsto \xi$  ist ein linearer Isomorphismus.

**Definition 5.1** Ein *glattes reelles Vektorbündel* vom Rang  $k$  über einer glatten Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine glatte Mannigfaltigkeit  $E$ , der sogenannte **Totalraum** des Bündels, zusammen mit einer glatten Abbildung  $\pi: E \rightarrow M$ , der Projektion, sodass für jedes  $p \in M$  gilt:

- (i) Die Faser  $E_p = \pi^{-1}(p)$  trägt die Struktur eines  $k$ -dimensionalen reellen Vektorraumes.
- (ii) Es existiert eine Umgebung  $U$  von  $p$  in  $M$  und ein Diffeomorphismus

$$\tau: E|_U = \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k,$$

so dass die Einschränkung

$$\tau_p: E_p \rightarrow \mathbb{R}^k \quad (\cong \{p\} \times \mathbb{R}^k)$$

ein linearer Isomorphismus ist. Ein solches  $\tau$  heißt **Bündelkarte**.

**Beispiel** (1)  $E = M \times \mathbb{R}^k$  mit  $\pi: E \rightarrow M, (p, x) \mapsto p$ .

(2) Das Tangentialbündel  $TM$  auf  $M$ .

(3) Ist  $E \xrightarrow{\pi} M$  ein Vektorbündel über  $M$  und  $U \subseteq M$  offen (oder eine Untermannigfaltigkeit), so ist  $E|_U = \pi^{-1}(U)$  ein Vektorbündel über  $U$ .

Ein **Vektorbündelmorphismus** zwischen zwei Vektorbündeln  $E \xrightarrow{\pi} M$  und  $E' \xrightarrow{\pi'} N$  ist eine glatte Abbildung  $F: E \rightarrow E'$ , so dass eine glatte Abbildung  $f$  existiert für die das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F} & E' \\ \pi \downarrow & \# & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

und ferner für  $p \in M$  die Abbildung  $E_p \xrightarrow{F} E'_{f(p)}$  linear ist.

Gilt  $M = N$  so ist ein  $M$ -Vektorbündelmorphismus  $F$  von  $E$  nach  $E'$  eine glatte Abbildung  $F: E \rightarrow E'$ , so dass das folgende Diagramm kommutiert und  $F$  faserweise linear ist.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F} & E' \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi' \\ & M & \end{array}$$

Die Vektorbündel  $E, E'$  über  $M$  heißen **isomorph**, wenn ein  $M$ -Vektorbündelmorphismus  $G$  existiert mit  $G \circ F = \text{id}_E$  und  $F \circ G = \text{id}_{E'}$ . Dies ist genau dann der Fall, wenn  $F$  faserweise ein Inverses besitzt. (Der Beweis dieser Aussage sei als Übungsaufgabe überlassen.)

Ein Vektorbündel  $E \xrightarrow{\pi} M$  heißt **trivial**, wenn es einen Vektorbündelisomorphismus von  $E$  auf  $M \times \mathbb{R}^k$  gibt. Jedes

$$\tau: E|_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$$

ist ein Vektorbündelisomorphismus. Die Bündelkarten werden daher auch **lokale Trivialisierungen** genannt.

Es sei  $(\tau_\alpha, U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{I}}$  eine Familie lokaler Trivialisierungen von  $E$  mit  $M = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} U_\alpha$ . Der Diffeomorphismus

$$\tau_\alpha \circ \tau_\beta^{-1}: (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k$$

definiert die sogenannten **Übergangsfunktionen**

$$g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}_k(\mathbb{R})$$

durch

$$\tau_\alpha \circ \tau_\beta^{-1}(p, x) = (p, g_{\alpha\beta}(p)x).$$

Die Übergangsfunktionen sind glatt und für alle  $p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$  gilt:

$$g_{\alpha\gamma}(p) = g_{\alpha\beta}(p) \cdot g_{\beta\gamma}(p),$$

denn

$$\begin{aligned} (p, g_{\alpha\gamma}(p)x) &= \tau_\alpha \circ \tau_\gamma^{-1}(p, x) \\ &= \tau_\alpha \circ \tau_\beta^{-1} \circ \tau_\beta \circ \tau_\gamma^{-1}(p, x) \\ &= (\tau_\alpha \circ \tau_\beta^{-1})(p, g_{\beta\gamma}(p)x) \\ &= (p, g_{\alpha\beta}(p) \cdot g_{\beta\gamma}(p)x). \end{aligned}$$

**Beispiel** Die Übergangsfunktionen von  $TM$  sind gegeben durch

$$D(\psi \circ \varphi^{-1}) = \left( \partial_i(\psi^j \circ \varphi^{-1}) \right)_{i,j \leq m}.$$

---

**Satz 5.2** Es sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit mit einer offenen Überdeckung  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$  und einer glatten Abbildung

$$g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$$

so dass für alle  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{I}$  und  $p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$  gilt:

$$g_{\alpha\gamma}(p) = g_{\alpha\beta}(p)g_{\beta\gamma}(p).$$

Dann ist

$$E = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} U_\alpha \times \mathbb{R}^k / \sim,$$

wobei  $(p, x)_\alpha \sim (q, y)_\beta$  genau dann gilt, wenn  $p = q$  und  $x = g_{\alpha\beta}(p)y$ , ein glattes Vektorbündel.

Der Beweis sei erneut als Aufgabe überlassen.

**Korollar** Ist  $E$  ein glattes Vektorbündel über  $M$  mit Übergangsfunktionen  $\{g_{\alpha\beta}\}$ , so ist das oben konstruierte Vektorbündel isomorph zu  $E$ .

Es sei  $E \xrightarrow{\pi} N$  ein Vektorbündel und  $\Phi: M \rightarrow N$  glatt. Das längs  $\Phi$  zurückgezogene Bündel („pullback“) ist definiert durch den Totalraum

$$E' = \Phi^*E = \{(p, x) \mid x \in E_{\Phi(p)}\} \subseteq M \times E,$$

die Projektion  $\pi': \Phi^*E \rightarrow M, (p, x) \mapsto p$  und die folgenden Bündelkarten: Es sei  $p \in M$  und  $(\tau, U)$  eine Bündelkarte von  $E$  um  $\Phi(p)$ , sowie  $(\varphi, V)$  eine Karte von  $M$  um  $p$  mit  $\Phi(V) \subseteq U$ . Dann definiert

$$\Phi^*E|_V \rightarrow V \times \mathbb{R}^k \quad (p, x) \mapsto (p, \tau_{\Phi(p)}(x))$$

eine Bündelkarte.

Sind  $E \xrightarrow{\pi} M, E' \xrightarrow{\pi'} N$  Vektorbündel, dann ist  $E \times E' \xrightarrow{\pi \times \pi'} M \times N$  mit lokalen Trivialisierungen  $\tau \times \tau'$  ebenfalls ein Vektorbündel. Insbesondere ist im Falle  $M = N$   $E \times E'$  ein Bündel über  $M \times M$ . Es sei  $\Delta: M \rightarrow M \times M, p \mapsto (p, p)$ .

$$\begin{array}{ccc} E \oplus E' = \Delta^*(E \times E') & \longrightarrow & E \times E' \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\Delta} & M \times M \end{array}$$

Das längs  $\Delta$  zurückgezogene Bündel  $E \oplus E' = \Delta^*(E \times E')$  heißt die **Whitneysumme** von  $E$  und  $E'$ . Faserweise gilt

$$(E \oplus E')_p = E_p \oplus E'_p.$$

Überlege:  $\mathrm{Hom}(E, E')$ , sowie  $E \otimes E', \otimes E$  und  $\wedge^p E, \wedge E$  sind „vernünftige“ Bündel.

## 1. Intermezzo: Multilineare Algebra

Es seien  $V$  und  $W$   $K$ -Vektorräume. Das **Tensorprodukt**  $V \otimes W$  ist der von den Elementen  $v \otimes w$  mit  $v \in V$ ,  $w \in W$ ,  $\lambda \in K$  und den Relationen

- (i)  $(v + v') \otimes w = v \otimes w + v' \otimes w$
- (ii)  $v \otimes (w + w') = v \otimes w + v \otimes w'$
- (iii)  $(\lambda v) \otimes w = \lambda(v \otimes w) = v \otimes (\lambda w)$

erzeugte Vektorraum.

**Eigenschaften:** (1) Die Abbildung  $b : V \times W \rightarrow V \otimes W$ ,  $(v, w) \mapsto v \otimes w$  ist bilinear.

(2)  $v \otimes w = 0 \Leftrightarrow v = 0$  oder  $w = 0$

(3)  $V \otimes K \cong V$

(4)  $V \otimes W \cong W \otimes V$

(5)  $V^* \otimes W \cong \text{Hom}(V, W)$  vermöge  $(\varphi \otimes w)(v) = \varphi(v) \cdot w$  wobei  $V^*$  der **Dualraum** zu  $V$  ist

(6) Sind  $\{v_i\}_{i \in \mathcal{I}}$  und  $\{w_j\}_{j \in \mathcal{J}}$  Basen von  $V$  und  $W$ , so ist  $\{v_i \otimes w_j\}_{(i,j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}}$  eine Basis von  $V \otimes W$ . Insbesondere gilt für Vektorräume endlicher Dimension, dass  $\dim(V \otimes W) = \dim V \cdot \dim W$

**Universelle Eigenschaft:** Ist  $U$  ein Vektorraum und  $\beta$  eine bilineare Abbildung von  $V \times W$  in  $U$ . Dann existiert genau eine lineare Abbildung  $\varphi : V \otimes W \rightarrow U$  mit  $\beta = \varphi \circ b$ .

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\beta} & U \\ \downarrow b & \searrow \varphi & \\ V \otimes W & & \end{array}$$

Diese Eigenschaft bestimmt  $(V \otimes W, b)$  eindeutig bis auf Isomorphie.

Das Bilden von Tensorprodukten ist bis auf Isomorphie assoziativ. Man schreibt daher

$$\bigotimes^p V = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{p\text{-mal}}$$

Setzt man  $\bigotimes^0 V = K$ , so wird  $\bigotimes V = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \bigotimes^p V$  mit dem durch die Zuordnungen

$$(v_1 \otimes \dots \otimes v_{p+1} \otimes \dots \otimes v_{p+q}) \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_{p+q} \in \bigotimes^{p+q} V$$

induzierten Produkt zu einer graduierten Algebra.

Das  $p$ -fach **äußere Produkt**  $\bigwedge^p V$  ist der von den Elementen  $v_1 \wedge \dots \wedge v_p$ ,  $v_i \in V$  und den Relationen

- (i)  $v_1 \wedge \dots \wedge v_i \wedge v_{i+1} \wedge \dots \wedge v_p = -v_1 \wedge \dots \wedge v_{i+1} \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_p$  (Schiefsymmetrie)
- (ii)  $(v_1 + w_1) \wedge \dots \wedge v_p = v_1 \wedge \dots \wedge v_p + w_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_p$
- (iii)  $(\lambda v_1) \wedge \dots \wedge v_p = \lambda(v_1 \wedge \dots \wedge v_p)$

erzeugte Vektorraum.

**Eigenschaften:** (1) Die Abbildung  $s : V \times \dots \times V \rightarrow \bigwedge^p V$ ,  $(v_1, \dots, v_p) \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_p$  ist multilinear und schief.

- (2) Es gilt  $v_1 \wedge \cdots \wedge v_p = 0$  genau dann wenn  $v_1, \dots, v_p$  linear abhängig sind.
- (3) Ist  $\{e_i\}_{i \leq n}$  eine Basis von  $V$ , so ist  $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_p\}$  eine Basis von  $\bigwedge^p V$ , es gilt also  $\dim \bigwedge^p V = \binom{n}{p}$ . Insbesondere ist  $\bigwedge^p V = 0$  falls  $p > n$  und  $\dim \bigwedge^n V = 1$  und für  $v_i = \sum \alpha_i^j e_j$  gilt:

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_p = \det(\alpha_i^j) \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$$

**Universelle Eigenschaft:** Ist  $U$  ein Vektorraum und  $\sigma$  eine schiefsymmetrische multilineare Abbildung  $\underbrace{V \times \cdots \times V}_{p\text{-mal}} \rightarrow U$ , so existiert genau eine lineare Abbildung  $\varphi : \bigwedge^p V \rightarrow U$  mit  $\sigma = \varphi \circ s$ .

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes^p V & \xrightarrow{\sigma} & U \\ s \downarrow & \searrow \varphi & \\ \bigwedge^p V & & \end{array}$$

Die Isomorphieklasse von  $(\bigwedge^p V, s)$  ist durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt.

Setzt man  $\bigwedge^0 V = k$ , so wird  $\bigwedge V = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \bigwedge^p V$  mit dem durch

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p, v_{p+1} \wedge \cdots \wedge v_{p+q}) \mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_{p+q}$$

induzierten Produkt zu einer assoziativen, graduiert kommutativen Algebra:  $v \in \bigwedge^p V$ ,  $w \in \bigwedge^q V$ ,  $v \wedge w = (-1)^{p \cdot q} w \wedge v$ . Sind  $V_1, V_2, W_1, W_2$  Vektorräume und  $\varphi \in \text{Hom}(V_1, W_1)$ ,  $\psi \in \text{Hom}(V_2, W_2)$ , so definiert die Fortsetzung von

$$\varphi \otimes \psi(v_1 \otimes v_2) = (\varphi(v_1)) \otimes (\psi(v_2))$$

ein Element  $\varphi \otimes \psi \in \text{Hom}(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2)$ . Sind  $V, W$  Vektorräume und  $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in \text{Hom}(V, W)$ , so induzieren diese eine lineare Abbildung

$$\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_p : \bigoplus^p V \rightarrow \bigoplus^p W$$

und

$$\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_p : \bigwedge^p V \rightarrow \bigwedge^p W$$

## 2. Bündelkonstruktion

Es seien  $E$  und  $E'$  Vektorbündel vom Rang  $k$  und  $l$ . Es bezeichnen stets  $\tau$  und  $\tau'$  lokale Trivialisierungen mit dem gleichen Trivialisierungsgebiet  $U$  sowie  $g_{\alpha\beta}$  und  $g'_{\alpha\beta}$  die Übergangsfunktionen von  $E$  beziehungsweise  $E'$ . Das **Tensorprodukt**  $E \otimes E'$  von  $E$  und  $E'$  ist das Vektorbündel mit den Fasern  $(E \otimes E')_p = E_p \otimes E'_p$ , also  $E \otimes E' = \bigcup_{p \in M} E_p \otimes E'_p \rightarrow M$  mit lokalen Trivialisierungen

$$\sigma : \begin{cases} (E \otimes E')|_U = \bigcup_{p \in U} E_p \otimes E'_p & \rightarrow U \times (\mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^l) \cong U \times \mathbb{R}^{kl} \\ E_p \otimes E'_p \ni w = \sum v_i \otimes u_i & \mapsto (p, \sum \tau_p(v_i) \otimes \tau'_p(u_i)) \end{cases}$$

das heißt dass  $\sigma = (\pi, \tau_p \otimes \tau'_p)$  ist. Wie in Kapitel 4 zeigt man dass  $E \otimes E'$  ein Bündel ist. Alternativ lässt sich  $E \otimes E'$  mit Satz 5.2 durch die Übergangsfunktion definieren:

$$E \otimes E' = \dot{\bigcup} U_\alpha \times (\mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^l) / \sim$$

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \otimes g'_{\alpha\beta}$$

Die Relation  $\sim$  ist durch  $h_{\alpha\beta}$  wie in Satz 5.2 definiert. Analog definiert man höhere Tensorprodukte  $\otimes^p E$ , die Tensoralgebra  $\otimes E$  und äußere Produkte  $\wedge^p E$  und  $\Lambda E$ . Das **duale Bündel**  $E^*$  hat die Fasern  $E_p^* = \text{Hom}(E_p, \mathbb{R})$  und lokale Trivialisierungen:

$$\sigma : E^*|_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$$

$$v^* \in E_p^* : \sigma(v^*) = (p, v^* \circ \tau_p^{-1})$$

$$= (p, (\tau_p^{-1})^*(v^*))$$

Die Übergangsfunktionen von  $E^*$  sind die transponierten Inversen der Übergangsfunktionen von  $E$ :

$$h_{\alpha\beta} = (g_{\alpha\beta}^{-1})^*$$

Das Bündel

$$T_s^r E = \underbrace{E \otimes \cdots \otimes E}_r \otimes \underbrace{E^* \otimes \cdots \otimes E^*}_s$$

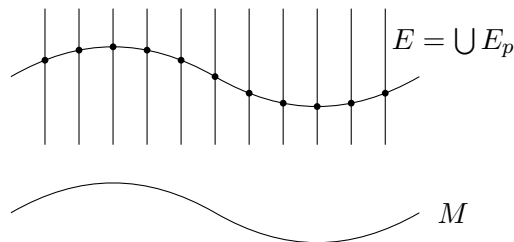
heißt das  $(r, s)$ -**Tensorbündel** von  $E$ . Das Homomorphismenbündel  $\text{Hom}(E, E^*)$  ist definiert durch

$$\sigma : \begin{cases} \text{Hom}(E, E')|_U = \dot{\bigcup}_{p \in U} \text{Hom}(E_p, E'_p) & \rightarrow U \times \text{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l) \\ \varphi \in \text{Hom}(E_p, E'_p) & \mapsto (p, \tau'_p \circ \varphi \circ \tau_p^{-1}) \end{cases}$$

Zur Definition der Übergangsfunktionen schreibt man  $\text{Hom}(E, E') \cong E^* \otimes E'$  und definiert  $h_{\alpha\beta} = (g_{\alpha\beta}^{-1})^* \otimes g'_{\alpha\beta}$ .

$$\begin{array}{ccc} V^* & & V \\ g_{\alpha\beta}^* \uparrow & \leftarrow (g_{\alpha\beta}^*)^{-1} & \downarrow g_{\alpha\beta} \\ W^* & & W \end{array}$$

**Definition 5.3** Es sei  $E \xrightarrow{\pi} M$  ein Vektorbündel über  $M$ . Ein **Schnitt** in  $E$  ist eine glatte Abbildung  $S : M \rightarrow E$  mit  $\pi \circ S = \text{id}_M$ , also  $S(p) \in E_p = \pi^{-1}(p)$ . Der Raum der Schnitte wird mit  $\Gamma(E)$  bezeichnet.  $\Gamma(E)$  ist ein  $C^\infty(M)$ -Modul.



$$\begin{array}{ccc}
 S_i^{-1}(p) = \tau^{-1}(p, e_i) & & \\
 S|_U : U \xrightarrow{\quad} E|_U \xrightarrow[\tau]{\cong} U \times \mathbb{R}^k & \swarrow & \text{Basis } \{e_i\} \text{ von } \mathbb{R}^k \\
 & \searrow \pi \circ S|_U & \\
 p \mapsto (p, x) & & \\
 p \longleftarrow (p, e_i) & & 
 \end{array}$$

Die  $S_i$  bilden punktweise eine Basis der Fasern.

Die Schnitte des  $(r, s)$ -Tensorbündels  $\Gamma(T_s^r(TM)) = \mathcal{T}_s^r(M)$  bezeichnet man als  $(r, s)$ -**Tensorfelder** auf  $M$ . Die  $(1, 0)$ -Tensorfelder sind genau die Vektorfelder auf  $M$ ;  $\mathcal{T}_0^1(M) = \mathcal{V}(M)$ . Es bezeichne  $\mathcal{V}^*(M) = \mathcal{T}_1^0(M)$  den Raum der  $(0, 1)$ -Tensorfelder.

**Proposition 5.4** Die  $(r, s)$ -Tensorfelder auf  $M$  entsprechen genau den  $C^\infty(M)$ -multilinearen Abbildungen

$$\underbrace{\mathcal{V}^*(M) \times \cdots \times \mathcal{V}^*(M)}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{\mathcal{V}(M) \times \cdots \times \mathcal{V}(M)}_{s\text{-mal}} \rightarrow C^\infty(M)$$

vermöge der linearen Forsetzung

$$\begin{aligned}
 p &\mapsto X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes \omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_s(\eta_1, \dots, \eta_r, Y_1, \dots, Y_s) \\
 &= \eta_1(X_1) \eta_2(X_2) \cdots \eta_r(X_r) \cdot \omega(Y_1) \cdots \omega_s(Y_s)(p)
 \end{aligned}$$

Der Beweis sei als Übung überlassen (siehe dazu auch Übungsblatt 5, Aufgabe 1).

**Beispiel** (1) Ist  $f \in C^\infty(M)$ , so ist durch sein Differential

$$df|_p(X_p) = X_p(f)$$

ein  $(0, 1)$ -Tensorfeld gegeben.

(2) Die Lieklammer  $[\cdot, \cdot]$  ist *nicht*  $C^\infty(M)$ -linear, also kein Tensorfeld.

Ein Element von  $T_p^*M$  bezeichnet man als **Kotangentialvektoren**,  $T_p^*M$  als **Kotangentialvektorraum** und das Bündel  $T^*M$  als **Kotangentialbündel**.

Ist  $(\varphi, U)$  eine Karte von  $M$ , dann bilden die Differentiale  $d\varphi^i = dx^i$  der Koordinatenfunktionen (punktweise) eine Basis von  $T_p^*M$ , denn

$$dx^i|_p \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \frac{\partial}{\partial x^j}(\varphi^i) = \delta_j^i.$$

Die  $dx^i$  sind also punktweise linear unabhängige  $(0, 1)$ -Tensorfelder über dem Kartengebiet  $U$ .

Ist  $\psi$  eine weitere Karte und bezeichnen  $\frac{\partial}{\partial y^i}$  beziehungsweise  $dy^i$  die entsprechenden Koordinaten(ko)tangentialvektoren, so gilt:

$$dx^i = \sum \alpha_j^i dy^j$$

mit

$$\alpha_j^i \stackrel{!}{=} dx^i \left( \frac{\partial}{\partial y^j} \right) = \sum \alpha_k^i dy^k \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial y^j} \right)}_{\delta_j^k}$$

denn

$$\alpha_j^i = \frac{\partial}{\partial y^j}(\varphi^i) = \frac{\partial \varphi^i}{\partial y^j} = \partial_j(\varphi^i \circ \psi^{-1})$$

Es gilt also  $\alpha = D(\psi \circ \varphi^{-1})^{x^{-1}}$ , vergleiche Satz 2.10.

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum \partial_i(\psi^j \circ \varphi^{-1}) \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

Diese transponierten Inversen der Differentiale der Kartenwechsel sind genau die Übergangsfunktionen  $h_{\alpha\beta} = (g_{\alpha\beta}^*)^{-1}$  in der Definition von  $(TM)^* = T^*M$ .

Ist  $S$  ein Tensorfeld vom Typ  $(0, s)$  auf einer Mannigfaltigkeit  $N$  und  $\Phi: M \rightarrow N$  eine glatte Abbildung.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_s^0(M) & \xleftarrow{\Phi^*} & \mathcal{T}_s^0(N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\Phi} & N \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} S: & \mathcal{V}(N) \times \cdots \times \mathcal{V}(N) & \rightarrow C^\infty(N) \\ \Phi^*S: & \mathcal{V}(M) \times \cdots \times \mathcal{V}(M) & \rightarrow C^\infty(M) \end{array}$$

Dann ergibt

$$\Phi^*S(X_1, \dots, X_s) = S(\Phi_*X_1, \dots, \Phi_*X_s)$$

ein  $(0, s)$ -Tensorfeld auf  $M$ , das entlang  $\Phi$  zurückgezogene Tensorfeld (**pullback**).

Es gilt  $\Phi^*(S \otimes T) = \Phi^*S \otimes \Phi^*T$  für  $S \in \mathcal{T}_s^0(N), T \in \mathcal{T}_t^0(N)$ . Ist  $\Psi: P \rightarrow M$  glatt, so gilt

$$(\Phi \circ \Psi)^* = \Psi^* \circ \Phi^*.$$

Ist  $\Phi$  ein Diffeomorphismus, so lässt sich  $\Phi^*$  für beliebige Tensorfelder  $S \in \mathcal{T}_s^r(M)$  definieren:

$$\begin{aligned} p &\mapsto \Phi^*S(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s)(p) \\ &S((\Phi^*)^{-1}\omega_1, \dots, (\Phi^*)^{-1}\omega_r, \Phi_*X_1, \dots, \Phi_*X_s)(p) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{array}{lll} S: & \underbrace{\mathcal{V}^*(N) \times \cdots \times \mathcal{V}^*(N)}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{\mathcal{V}(N) \times \cdots \times \mathcal{V}(N)}_{s\text{-mal}} & \rightarrow C^\infty(N) \\ \Phi^*S: & \mathcal{V}^*(M) \times \cdots \times \mathcal{V}^*(M) \times \mathcal{V}(M) \times \cdots \times \mathcal{V}(M) & \rightarrow C^\infty(M) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \omega &\in \mathcal{V}^*(M) = \mathcal{T}_1^0(M) & \rightarrow C^\infty(M) \\ X &\in \mathcal{V}(M) = \mathcal{T}_0^1(M) & \rightarrow C^\infty(M) \end{aligned}$$

Insbesondere:  $X \in \mathcal{T}_0^1(M) = \mathcal{V}(M) = \{\mathcal{V}^*(M) \rightarrow C^\infty(M)\}$

$$\Phi^*X(\omega) = X((\Phi^*)^{-1}\omega) = ((\Phi^*)^{-1}\omega)(X) = \omega(\Phi_*^{-1}X)$$

also  $\Phi^*X = \Phi_*^{-1}X$ .



**Beispiel (Anwendung)** Es sei  $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$  ein Atlas von  $M$ . Dann ist jedes  $\varphi_\alpha$  ein Diffeomorphismus von  $U_\alpha$  auf  $\varphi_\alpha(U_\alpha) = V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ . Ist  $S \in \mathcal{T}_s^r(M)$ , so ist

$$S_\alpha = (\varphi_\alpha^{-1})^* S|_{U_\alpha}$$

ein  $(r, s)$ -Tensorfeld auf  $V_\alpha$ .

Für alle  $\alpha, \beta$  mit  $U_\alpha \cap U_\beta$  gilt

$$\begin{aligned} (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})^* S_\alpha|_{V_\alpha \cap V_\beta} &= (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})^* ((\varphi_\alpha^{-1})^* S|_{U_\alpha})|_{V_\alpha \cap V_\beta} \\ &= (\varphi_\beta^{-1})^* \circ \varphi_\alpha^* \circ (\varphi_\alpha^{-1})^* S|_{U_\alpha}|_{V_\alpha \cap V_\beta} \\ &= (\varphi_\beta^{-1})^* S|_{U_\beta}|_{V_\alpha \cap V_\beta} \\ &= S_\beta|_{V_\alpha \cap V_\beta} \end{aligned}$$

Ist umgekehrt  $S_\alpha$  eine Familie von  $(r, s)$ -Tensorfeldern auf  $V_\alpha$  mit obigem Transformationsverhalten, so definiert dies ein  $(r, s)$ -Tensorfeld auf  $M$ .

**Definition 5.5** Es sei  $X \in \mathcal{V}(M)$  mit dem Fluss  $\gamma$  und  $S \in \mathcal{T}_s^r(M)$  ein glattes Tensorfeld auf  $M$ . Dann heißt

$$\mathcal{L}_X S = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\gamma^{t*} S)$$

die **Lieableitung** von  $S$  in Richtung  $X$ .

**Eigenschaften** (1)  $f \in \mathcal{T}_0^0(M) = C^\infty(M)$ . Dann ist  $\mathcal{L}_X f = df(X) = X(f)$ .

(2)  $X, Y \in \mathcal{T}_0^1(M) = \mathcal{V}(M)$ , so gilt

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y].$$

(3) Für  $S \in \mathcal{T}_s^r(M), T \in \mathcal{T}_{s'}^{r'}(M)$  gilt:

$$\mathcal{L}_X(S \otimes T) = (\mathcal{L}_X S) \otimes T + S \otimes (\mathcal{L}_X T).$$

### 3. Differentialformen und die äußere Ableitung

**Definition 5.6** Das Vektorbündel  $\wedge^k(T^*M)$  wird mit  $\wedge^k(M)$  bezeichnet und der Raum seiner Schnitte  $\Gamma(\wedge^k(T^*M))$  mit  $\Omega^k(M)$ . Die Elemente von  $\Omega^k(M)$  heißen **Differentialformen** vom Grad  $k$  oder kurz  **$k$ -Formen** auf  $M$ .

Ist  $(\varphi, U)$  eine Karte von  $M$ , so bilden die Differentiale der Koordinatenfunktionen  $dx^i = d\varphi^i$  eine Basis von  $T^*M$ . Diese sind (lokale) Schnitte in  $\wedge^1(T^*M)$ , also lokal 1-Formen. Das Differential von  $f \in C^\infty(M)$  ist eine 1-Form  $df(X) = X(f)$ . Lokal gilt  $df = \sum f_i dx^i$ , wobei  $f_i = df\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ .

Desweiteren sind (lokal) die  $\binom{m}{k}$   $k$ -Formen  $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$  mit  $i_1 < \dots < i_k$  eine Basis von  $\Omega^k$ . Jede  $k$ -Form  $\omega$  ist lokal von der Gestalt

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Jede  $k$ -Form definiert eine schiefsymmetrische  $C^\infty(M)$ -multilineare Abbildung

$$\underbrace{\mathcal{V}(M) \times \cdots \times \mathcal{V}(M)}_{k\text{-mal}} \rightarrow C^\infty(M)$$

$$\omega(X_1, \dots, X_k)(p) = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) f_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1}(X_{\sigma(i_1)}|_p) dx^{i_2}(X_{\sigma(i_2)}|_p) \cdots$$

Analog zu Proposition 5.4 gilt, dass jede solche schiefe  $C^\infty(M)$ -multilineare Abbildung eine  $k$ -Form definiert. Insbesondere gilt für

$$\omega = \sum f_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

dass

$$\begin{aligned} \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right) &= \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) f_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1}\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_{\sigma(1)}}}\right) \cdots dx^{i_k}\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_{\sigma(k)}}}\right) \\ &= \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) f_{i_1, \dots, i_k} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{j_{\sigma(1)}}} \cdots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{j_{\sigma(k)}}} \\ &= \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) f_{i_1, \dots, i_k} \delta_{j_{\sigma(1)}}^{i_1} \cdots \delta_{j_{\sigma(k)}}^{i_k} \\ &= f_{j_1, \dots, j_k}. \end{aligned}$$

Sind  $\omega \in \Omega^k(M)$  und  $\eta \in \Omega^l(M)$ , so definiert  $\omega \wedge \eta$  (punktweise) eine  $(k+l)$ -Form auf  $M$ . Ist  $\Phi: M \rightarrow N$  glatt und  $\omega \in \Omega^k(N)$ , so definiert  $(\Phi^*\omega)(X_1, \dots, X_k) = \omega(\Phi_*X_1, \dots, \Phi_*X_k)$  („push forward“) eine  $k$ -Form auf  $M$ . Für  $\eta \in \Omega^l(N)$  gilt  $\Phi^*(\omega \wedge \eta) = \Phi^*\omega \wedge \Phi^*\eta$ .

Damit ist für  $\omega \in \Omega^k(M)$  und  $X \in \mathcal{V}(M)$ ,  $\gamma$  der Fluss von  $X$ , die **Lieableitung** von  $\omega$  längs  $X$  definiert:

$$\mathcal{L}_X \omega = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\gamma^{t*} \omega).$$

Es gilt

$$\mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta) = (\mathcal{L}_X \omega) \wedge \eta + \omega \wedge (\mathcal{L}_X \eta).$$

Die 0-Formen sind die  $C^\infty$ -Funktionen auf  $M$ ,  $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$ . Die 1-Formen sind genau die Schnitte des Kotangententialbündels von  $M$ .

Für eine  $C^\infty$ -Funktion  $f$  auf  $M$  definiert  $df$  eine 1-Form auf  $M$  durch  $df(X) = X(f)$ . In lokalen Koordinaten gilt damit  $df = \sum_i g_i dx^i$  mit  $g_i = df\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ , also gilt  $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ .

Die  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $d: \Omega^0(M) \rightarrow \Omega^1(M)$  soll für beliebige Formen definiert werden. In lokalen Koordinaten definiert man für  $\omega \in \Omega^k(M)$ ,  $\omega = f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$  durch Lineare Fortsetzung

$$d\omega = df \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

Es bleibt zu zeigen, dass diese Definition unabhängig von der Wahl der Karte ist. Man geht dabei entweder vor wie im Beispiel vor Definition 5.5 beschrieben oder verwendet den folgenden Satz.

**Satz 5.7** Es seien  $\omega \in \Omega^k(M)$  und  $X_0, \dots, X_k \in \mathcal{V}(M)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, \dots, X_k) &= \sum_i (-1)^i X_i(\omega(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k)) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k). \end{aligned}$$

**Beweis** Man zeigt zunächst, dass der Term auf der rechten Seite, welcher offensichtlich schief ist, auch  $C^\infty(M)$ -linear ist. Es bezeichne dafür  $\eta$  den rechten Term und es seien  $X_0, \dots, X_k \in \mathcal{V}(M)$  und  $f \in C^\infty(M)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \eta(X_0, \dots, fX_l, \dots, X_k) &= \sum_{i \neq l} (-1)^i X_i(f) \omega(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k) \\ &\quad + \sum_{i \neq l} (-1)^i f X_i(\omega(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k)) \\ &\quad + (-1)^l f X_l(\omega(X_0, \dots, \hat{X}_l, \dots, X_k)) \\ &\quad + \sum_{\substack{i < j \\ i \neq l \neq j}} (-1)^{i+j} f \omega([X_i, X_j], \dots) \\ &\quad + \sum_{l < j} (-1)^{l+j} \omega([fX_l, X_j], \dots) \\ &\quad + \sum_{i < l} (-1)^{i+l} \omega([X_i, fX_l], \dots) \end{aligned}$$

Nebenrechnung (beziehungsweise Überlegung):

$$[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X$$

Damit folgt weiter:

$$\begin{aligned} \eta(X_0, \dots, fX_l, \dots, X_k) &= f\eta(X_0, \dots, X_k) \\ &\quad + \sum_{i \neq l} (-1)^i X_i(f) \omega(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k) \\ &\quad - \sum_{l < j} (-1)^{l+j} X_j(f) \omega(X_l, X_0, \dots, \hat{X}_l, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k) \\ &\quad + \sum_{i < l} (-1)^{i+l} X_i(f) \omega(X_l, X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_l, \dots, X_k) \\ &= f\eta(X_0, \dots, X_k) \\ &\quad + \sum_{i \neq l} (-1)^i X_i(f) \omega(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k) \\ &\quad - \sum_{l < j} (-1)^j X_j(f) \omega(X_0, \dots, X_l, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k) \\ &\quad - \sum_{i < l} (-1)^i X_i(f) \omega(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_l, \dots, X_k) \\ &= f\eta(X_0, \dots, X_k). \end{aligned}$$

Somit ist  $\eta$   $C^\infty$ -linear, das heißt definiert eine  $(k+1)$ -Form auf  $M$ . Im Folgenden kann man also annehmen:

$$\begin{aligned} d\omega &= f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ X_l &= \frac{\partial}{\partial x^{j_l}}, j_0 < \dots < j_k. \end{aligned}$$

Damit verschwinden alle Lieklammern auf der rechten Seite. Es gilt

$$\begin{aligned}
 \eta(X_0, \dots, X_k) &= \sum_l (-1)^l X_l \left( f \sum_{\sigma(0)=l} (-1)^l \operatorname{sgn}(\sigma) dx^{i_1}(X_{\sigma(1)}) \dots dx^{i_k}(X_{\sigma(k)}) \right) \\
 &= \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) X_{\sigma(0)}(f) dx^{i_1}(X_{\sigma(1)}) \dots dx^{i_k}(X_{\sigma(k)}) \\
 &= \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) df(X_{\sigma(0)}) dx^{i_1}, \dots \\
 &= d\omega(X_0, \dots, X_k).
 \end{aligned}$$

□

**Definition 5.8** Es sei  $\omega \in \Omega^k(M)$ . Die  $(k+1)$ -Form  $d\omega$  heißt das (**äußere**) **Differential** der Form  $\omega$ . Gilt  $d\omega = 0$ , so heißt  $\omega$  **geschlossen**. Existiert ein  $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$  mit  $d\eta = \omega$ , so heißt  $\omega$  **exakt**.

**Beispiel** (1) Für eine 1-Form  $\omega$  ist  $d\omega$  eine 2-Form:

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]).$$

(2) Für  $f \in C^\infty(M)$  ist  $df \in \Omega^1(M)$  und  $d(df)$  eine 2-Form:

$$\begin{aligned}
 d(df)(X, Y) &= X(df(Y)) - Y(df(X)) - df[X, Y] \\
 &= X(Y(f)) - Y(X(f)) - [X, Y](f) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Betrachte alternativ in lokalen Koordinaten:

$$\begin{aligned}
 d(df) &= d \left( \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \right) \\
 &= \sum d \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \wedge dx^i \\
 &= \sum_{i,j} \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}}_{\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}} \underbrace{dx^j \wedge dx^i}_{-dx^i \wedge dx^j} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

(3)  $\omega = xydy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$  ist nicht geschlossen, denn

$$d\omega = \frac{\partial xy}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial xy}{\partial y} \underbrace{dy \wedge dy}_{=0} = ydx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^2).$$

(4)  $\omega = ydx + xdy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$  ist exakt, denn für  $f(x, y) = xy$  gilt:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = ydx + xdy = \omega.$$

**Lemma 5.9** (i)  $d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$  ist  $\mathbb{R}$ -linear.

(ii)  $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$  für  $\omega \in \Omega^k(M), \eta \in \Omega^l(M)$ .

(iii)  $d \circ d = 0$ .

(iv)  $\Phi^*(d\omega) = d(\Phi^*\omega)$  für  $\Phi: M \rightarrow N$  glatt und  $\omega \in \Omega^k(M)$ .

**Beweis** (i) Klar, nach Definition.

(ii)  $\omega = f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ ,  $\eta = g dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \omega \wedge \eta &= f g dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}. \\ d(\omega \wedge \eta) &= (g df + f dg) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \\ &= g df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \\ &\quad + (-1)^k (f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \wedge dg \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta. \end{aligned}$$

(iii)  $\omega = f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ ,  $d\omega := df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$

$$\begin{aligned} d^2(\omega) &= d(df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\ &\stackrel{(ii)}{=} d^2 f \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + \sum_l df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge d^2 x^{i_l} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \\ &= 0 \end{aligned}$$

(iv)  $f \in C^\infty(N)$ ,  $X \in \mathcal{V}(M)$

$$\begin{aligned} (\Phi^* df)(X) &= df(\Phi_* X) = (\Phi_* X)(f) = X(f \circ \Phi) \\ &= X(\Phi^* f) = d(\Phi^* f)(X) \end{aligned}$$

Damit gilt für  $\omega = f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ :

$$\begin{aligned} \Phi^*(d\omega) &= \Phi^*(df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\ &= (\Phi^* df) \wedge \Phi^*(dx^{i_1}) \wedge \dots \wedge \Phi^*(dx^{i_k}) \\ &= d(\Phi^* f \Phi^* dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \Phi^* dx^{i_k}) = d(\Phi^* \omega) \end{aligned} \quad \square$$

**Erinnerung:** {geschlossene  $k$ -Formen} = Kern $\{d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)\}$ , {exakte  $k$ -Formen} = Bild $\{d: \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M)\}$ ,  $d \circ d = 0$

Der Quotient  $H_{\text{dR}}^k(M) = \frac{\text{Kern}\{d: \Omega^k \rightarrow \Omega^{k+1}\}}{\text{Bild}\{d: \Omega^{k-1} \rightarrow \Omega^k\}}$  heißt die  $k$ -te **deRham-Kohomologiegruppe**. Ist  $\Phi: M \rightarrow N$  glatt, so induziert  $\Phi^*$  wegen Lemma 5.9 (iv) einen Homomorphismus  $\Phi^* H_{\text{dR}}^k(N) \rightarrow \Phi^* H_{\text{dR}}^k(M)$ . Ist  $\Psi: P \rightarrow M$  glatt, so gilt

$$(\Phi \circ \Psi)^* = \Psi^* \circ \Phi^*$$

insbesondere gilt  $\text{id}_M^* = \text{id}_{H_{\text{dR}}^k}$  und ein Diffeomorphismus  $M \rightarrow N$  induziert einen Isomorphismus von  $H_{\text{dR}}^k(N)$  nach  $H_{\text{dR}}^k(M)$ .

**Beispiel** (1)  $H_{\text{dR}}^1(\mathbb{R}^2) = \{0\}$ , zu zeigen:  $d\omega = 0 \Rightarrow \omega = dh, \omega \in \Omega^1$   
 $\omega = f dx + g dy$  geschlossen

$$\begin{aligned} 0 = d(\omega) &= df \wedge dx + dg \wedge dy \\ &= \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy \\ &= \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

Setzt man

$$h(x, y) = \int_0^x f(t, 0) dt + \int_0^y g(x, t) dt$$

so gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x}(x) &= f(x, 0) + \int_0^y \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt \\ &= f(x, 0) + \int_0^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dt \\ &= f(x, y) \end{aligned}$$

Analog zeigt man, dass  $\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = g(x, y)$ . Damit gilt

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy = f dx + g dy = \omega$$

Daraus folgt  $H_{\text{dR}}^1(\mathbb{R}^2) = \{0\}$

(2)  $H_{\text{dR}}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \neq \{0\}$

Die Form  $\omega(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}(x dy - y dx)$  ist geschlossen. Wäre  $\omega$  exakt, so gäbe es  $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$  mit  $dh = \omega$ , das heißt

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \qquad \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Dann wäre

$$\begin{aligned} 0 &= h(1, 0) - h(1, 0) = \int_0^{2\pi} \frac{d}{dt} h(\cos t, \sin t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} -\sin t \frac{\partial h}{\partial x}(\cos t, \sin t) + \cos t \frac{\partial h}{\partial y}(\cos t, \sin t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t dt = 2\pi \end{aligned}$$

$\omega$  ist geschlossen aber *nicht* exakt und definiert eine Klasse

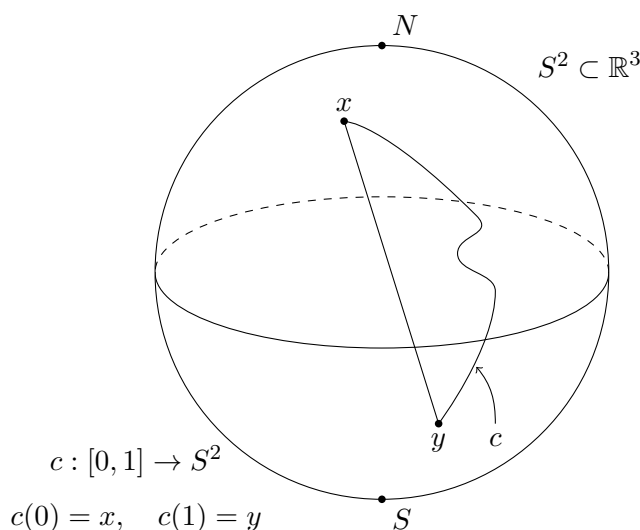
$$0 \neq [\omega] \in H_{\text{dR}}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$$

Insbesondere sind  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  *nicht* diffeomorph.

# Kapitel 6.

## Riemannsche Metriken

**Was ist Geometrie?** Vereinfacht ausgedrückt suchen wir eine Möglichkeit um Distanzen und Winkel auszudrücken. Betrachte im Folgenden die Einheitssphäre, auf der wir den eine Reise von  $x$  nach  $y$  unternehmen möchten.



Wir definieren mit  $\mathcal{L}(c) = \int_0^1 \|\dot{c}\| dt$  die **Riemann-Metrik**, also das Skalarprodukt mit allen  $T_p M$ . Damit folgt dass wenn  $c : [0, 1] \rightarrow M$  glatt ist, dass  $\mathcal{L}(c) = \int_0^1 \sqrt{\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle}$  und der Abstand auf  $M$  kann ausgedrückt werden durch  $d_M(x, y) = \inf\{\mathcal{L}(c) \mid c \text{ von } x \text{ nach } y\}$ .

Das wirft Fragen auf nach der Existenz kürzester Abstände, Unterschieden zwischen lokal Kürzestem und global Kürzesten und der Eindeutigkeit.

**Definition 6.1** *Es sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine **Riemannsche Metrik**  $g$  auf  $M$  ist gegeben durch ein Skalarprodukt auf jedem  $T_p M$ , welches glatt von  $p$  abhängt, das heißt  $g \in \mathcal{T}_2^0(M)$ , so dass  $g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  symmetrisch und positiv definit ist. Ist  $g$  eine Riemann-Metrik auf  $M$ , so heißt  $(M, g)$  eine **Riemannsche Mannigfaltigkeit**.*

Ist  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ ,  $X = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $Y =$

$\sum \eta^j \frac{\partial}{\partial y^j}$ , dann ist

$$\begin{aligned} g(X, Y) &= g\left(\sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum \eta^j \frac{\partial}{\partial y^j}\right) \\ &= \sum_{i,j} \xi^i \eta^j g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right) \\ &= \sum_{i,j} \xi^i \eta^j g_{ij} \quad (g_{ij} \text{ glatt, } g_{ij} = g_{ji}) \end{aligned}$$

**Beispiel** (1)  $\mathbb{R}^m$  trägt eine natürliche Riemannsche Metrik: Für  $x \in \mathbb{R}^m$  ist  $\mathcal{I}_x : T_x \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein (natürlicher) Isomorphismus. Damit definiert

$$g_x(\cdot, \cdot) = \langle \mathcal{I}_x(\cdot, \cdot), \mathcal{I}_x(\cdot, \cdot) \rangle$$

eine Riemannsche Metrik auf  $\mathbb{R}^m$ . Bezüglich der Karte  $(\text{id}, \mathbb{R}^m)$  gilt

$$g_{ij} = \sum \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j = \sum_i dx^i \otimes dx^j$$

(2) Betrachtet man Polarkoordinaten auf  $\mathbb{R}^2(r, \vartheta)$ :

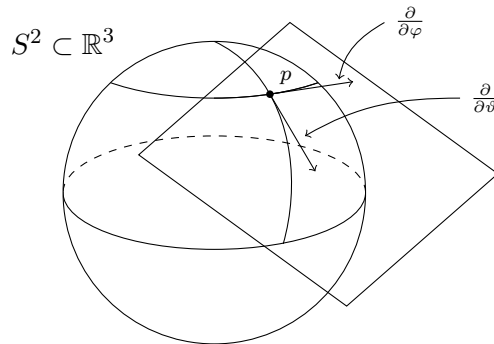
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{(r, \vartheta)} &= (\cos \vartheta, \sin \vartheta) \\ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Big|_{(r, \vartheta)} &= r(-\sin \vartheta, \cos \vartheta) \end{aligned}$$

$$g_{rr} = g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = 1$$

$$g_{\vartheta\vartheta} = g\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta}, \frac{\partial}{\partial \vartheta}\right) = r^2$$

$$g_{r\vartheta} = g_{\vartheta r} = 0$$

(3) Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$   $m$ -dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit.  $M$  trägt eine natürliche Riemann-Metrik:



Für jedes  $p \in M$  ist  $T_p M$  kanonisch isomorph zum von partiellen Ableitungen  $\partial_1 F|_p, \dots, \partial_m F|_p$  einer lokalen Parametrisierung  $F$  aufgespannten Untervektorraum  $\mathbb{R}^m$ . Mit diesem (lokalen) Isomorphismus definiert

$$g_{ij} = \langle \partial_i F, \partial_j F \rangle$$

eine Riemann-Metrik auf  $M$ .



**Bemerkung** Sind  $\varphi$  und  $\psi$  Karten einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  um  $p$  und sind  $g = \sum g_{ij} dx^i \otimes dx^j$  und  $h = \sum h_{ij} dy^i \otimes dy^j$  die lokalen Darstellungen bezüglich  $\varphi$  beziehungsweise  $\psi$ , so gilt

$$h_{kl} = g \left( \frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\partial}{\partial y^l} \right) = \sum_{i,j} \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \underbrace{\frac{\partial x^j}{\partial y^l} g_{ij}}_{\partial_l(\varphi^i \circ \psi^{-1})}$$

Eine Riemannsche Metrik induziert eine Metrik auf dem Kotangentenbündel: Die Isomorphismen  $T_p M \rightarrow T_p^* M$ ,  $X \mapsto \langle X, \cdot \rangle_p$  einen Isomorphismus von  $TM$  nach  $T^*M$ . Für  $\omega \in T_p^* M$  sei  $X(\omega) \in T_p M$  mit  $\omega = \langle X(\omega), \cdot \rangle_p$ . Man definiert nun durch

$$\langle \omega, \tilde{\omega} \rangle = \langle X(\omega), X(\tilde{\omega}) \rangle$$

ein Skalarprodukt auf  $T_p^* M$ . Für  $\omega = \sum \omega_i dx^i$ ,  $X(\omega) = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  gilt

$$\omega_i = \omega \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \left\langle X(\omega), \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle = \sum_j \xi^j g_{ij}$$

Also  $\xi^i = \sum g^{ij} \omega_j$ , wobei  $(g^{ij})$  die zu  $(g_{ij})$  inverse Matrix ist. Damit gilt:

$$\begin{aligned} \langle \omega, \tilde{\omega} \rangle &= \langle X(\omega), X(\tilde{\omega}) \rangle \\ &= \sum g_{kl} \xi^k \xi^l \\ &= \sum g_{kl} g^{ki} \omega_i g^{lj} \tilde{\omega}_j \\ &= \sum \delta_l^i g^{lj} \omega_i \tilde{\omega}_j \\ &= \sum g^{ij} \omega_i \tilde{\omega}_j \end{aligned}$$

Für beliebige Tensoren  $S, S' \in T_q^p(TM)$  und  $T, T' \in T_l^k(TM)$  definiert man induktiv durch lineare Fortsetzung Skalarprodukte wie folgt:

$$\langle S \otimes T, S' \otimes T' \rangle = \langle S, S' \rangle \otimes \langle T, T' \rangle.$$

Auf  $TM \otimes TM$  hat die Metrik die folgende Gestalt:

$$\langle X \otimes Y, \tilde{X} \otimes \tilde{Y} \rangle = \sum g_{ij} g_{kl} \xi^i \tilde{\xi}^j \eta^k \tilde{\eta}^l.$$

**Definition 6.2** Es seien  $(M, g)$  und  $(N, h)$  Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Ein Diffeomorphismus  $\Phi: M \rightarrow N$  heißt **Isometrie**, falls  $\Phi^*h = g$ , das heißt für alle  $p \in M$  und  $X, Y \in T_p M$  gilt:

$$\begin{aligned} g_p(X, Y) &= h_{\Phi(p)}(\Phi_{*p}X, \Phi_{*p}Y) \\ &= \underbrace{\Phi^*h(X, Y)}_{\rightsquigarrow \text{Pullback Metrik}} \end{aligned}$$

Ist umgekehrt  $\Phi: M \rightarrow N$  ein Diffeomorphismus und  $h$  eine Riemannsche Metrik auf  $N$ , so ist  $\Phi^*h$  eine Riemannsche Metrik auf  $M$ .

**Satz 6.3** Jede glatte Mannigfaltigkeit trägt eine Riemannsche Metrik.

Um Metriken in den Überlappungsgebieten von Karten „verkleben“ zu können, benötigt man das folgende Hilfsmittel.

**Satz (Zerlegung der Eins)** Es sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$  eine offene Überdeckung von  $M$ . Dann existiert eine **Zerlegung der Eins** auf einer abzählbaren, lokal endlichen Verfeinerung von  $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ , das heißt es existiert eine abzählbare offene Überdeckung  $\{V_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  von  $M$  und glatte Funktionen mit kompaktem Träger  $\alpha_k: M \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass gilt:

- (i)  $\forall k \in \mathbb{N} \exists i(k) \in \mathcal{I} : V_k \subseteq U_{i(k)}$  (Verfeinerung),
- (ii)  $\forall p \in M \exists U \ni p : \#\{k \mid V_k \cap U \neq \emptyset\} < \infty$  (lokal endlich),
- (iii)  $\forall k \in \mathbb{N} : \text{supp}(\alpha_k) \subseteq V_k$ ,
- (iv)  $\forall k \in \mathbb{N} \forall p \in M : 0 \leq \alpha_k(p) \leq 1$ ,
- (v)  $\forall p \in M : \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k(p) = 1$ .

(Wegen (ii) und (iii) ist die Summe in (v) endlich).

An dieser Stelle geht maßgeblich ein, dass die Topologie von  $M$  eine abzählbare Basis besitzt. Beweis siehe Boothby, Kapitel V.4 [1].

**Beweis** (von Satz 6.3) Es sei  $M$  eine glatte,  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.  $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$  ein Atlas von  $M$  und  $\{(V_k, \alpha_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine Zerlegung der Eins auf einer abzählbaren, lokal endlichen Verfeinerung von  $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ . Es sei  $\beta$  ein Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^m$ . Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  ist dann

$$g_k = \varphi_{i(k)}^* \Big|_{V_k} \beta$$

eine Riemannsche Metrik auf  $V_k$ . Damit ist  $g = \sum g_k \alpha_k$  eine Riemannsche Metrik auf  $M$ . Die Summe ist punktweise endlich und  $g$  ist als Komposition glatter Abbildungen selbst glatt. Symmetrie und Bilinearität folgen sofort. Für jedes  $p \in M$  gilt  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k(p) = 1$ , das heißt es existiert ein  $l \in \mathbb{N}$  mit  $\alpha_l(p) > 0$  und für  $X \in T_p M$  mit  $X \neq 0$  folgt:

$$\begin{aligned} g_p(X, X) &= \sum \underbrace{g_k(p)(X, X)}_{>0} \alpha_k(p) \\ &\geq g_l(p)(X, X) \alpha_l(p) > 0. \end{aligned}$$

Damit ist  $g$  positiv definit. □

Für eine glatte Kurve  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  heißt

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}\| = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt$$

die **(Kurven-)Länge** von  $\gamma$ . Ist  $\tau: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  glatt und monoton, so gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\gamma \circ \tau) &= \int_{\alpha}^{\beta} \|\dot{\gamma}(\tau(s))\| |\tau'(s)| ds \\ &= \int_a^b \|\dot{\gamma}\| = \mathcal{L}(\gamma). \end{aligned}$$

$\tau'$  ist die Ableitung von  $\tau$ , der Strich wurde aus ästhetischen Gründen statt dem Punkt gewählt

Damit ist die Kurvenlänge invariant unter Reparametrisierungen. Ist  $\gamma$  **regulär**, das heißt  $\dot{\gamma}(t) \neq 0$  für alle  $t \in [a, b]$ , so ist ihre sogenannte **Bogenlänge**

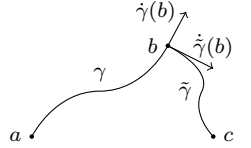
$$\sigma: [a, b] \rightarrow [0, \mathcal{L}(\gamma)], t \mapsto \mathcal{L}(\gamma|_{[a, t]}) = \int_a^t \|\dot{\gamma}\|.$$

streng monoton steigend, also  $\sigma'(s) = \|\dot{\gamma}(s)\| > 0$ . Für  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \sigma^{-1}: [0, \mathcal{L}(\gamma)] \rightarrow M$  gilt  $\|\dot{\tilde{\gamma}}\| \equiv 1$ . Die Kurve  $\tilde{\gamma}$  heißt **Bogenlängenparametrisierung** von  $\gamma$ . Gilt für  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  dass  $\|\dot{\gamma}\| \equiv \lambda$ , so heißt  $\gamma$  **proportional zur Bogenlänge** parametrisiert.

Sind  $\gamma: [a, b] \rightarrow M, \tilde{\gamma}: [b, c] \rightarrow M$  glatte Kurven mit  $\gamma(b) = \tilde{\gamma}(b)$ , so sei

$$\mathcal{L}(\gamma \cup \tilde{\gamma}) = \mathcal{L}(\gamma) + \mathcal{L}(\tilde{\gamma}).$$

Eine Kurve  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  heißt **stückweise glatt**, wenn  $t_0, \dots, t_k$  mit  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$  existieren, so dass  $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$  für alle  $i \leq k$  glatt ist.



**Definition 6.4** Für Punkte  $p, q \in M$  ist der **Abstand** definiert durch:

$$d(p, q) = \inf\{\mathcal{L}(\gamma) \mid \gamma: [0, 1] \rightarrow M \text{ stückweise glatt mit } \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}.$$

**Satz 6.5** Es sei  $(M, g)$  eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die Abstandsfunktionen bilden eine Metrik auf  $M$ , welche die ursprüngliche Topologie induziert.

Der Beweis sei zur Übung überlassen.

**Satz 6.6** Es seien  $(M, g)$  und  $(N, h)$  zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeiten und  $\Phi: M \rightarrow N$  ein Diffeomorphismus. Dann ist  $\Phi$  genau dann eine Isometrie, wenn  $\mathcal{L}(\Phi \circ \gamma) = \mathcal{L}(\gamma)$  für alle glatten  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$  gilt.

**Beweis** Dass eine Isometrie die Kurvenlängen erhält gilt offensichtlich. Erhält  $\Phi$  die Kurvenlängen, so erhält  $\Phi$  auch die Norm von Tangentialvektoren, denn andernfalls gäbe es  $X_p \in T_p M$  mit (ohne Einschränkung)

$$h_{\Phi(p)}(\Phi_{*p}X, \Phi_{*p}X) > g_p(X, X)$$

und eine Kurve  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$  mit  $\gamma(0) = X$  und es gälte (für hinreichend kleines  $\varepsilon$ ):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\gamma|_{[0, \varepsilon]}) &= \int_0^\varepsilon \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt \\ &< \int_0^\varepsilon \sqrt{h_{\Phi(\gamma(t))}(\Phi_{*\gamma(t)}\dot{\gamma}(t), \Phi_{*\gamma(t)}\dot{\gamma}(t))} dt \\ &= \int_0^\varepsilon \sqrt{h_{\Phi(\gamma(t))}((\Phi \circ \dot{\gamma})(t), (\Phi \circ \dot{\gamma})(t))} dt \\ &= \mathcal{L}((\Phi \circ \gamma)|_{[0, \varepsilon]}). \end{aligned}$$

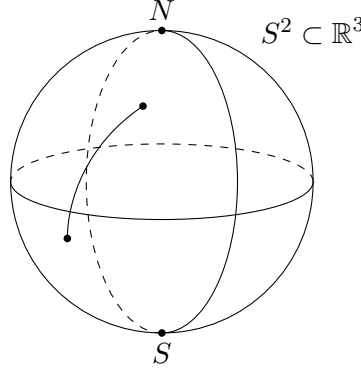
Mit der Polarisationsformel  $\langle x, y \rangle = -\frac{1}{2}(\|x - y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$  folgt dann, dass  $\Phi$  auch die Skalarprodukte erhält.  $\square$

**Definition 6.7** Eine Kurve  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  heißt **minimale Geodätische** von  $\gamma(a)$  nach  $\gamma(b)$ , falls ein  $\lambda \geq 0$  existiert, so dass für alle  $a \leq s < t \leq b$  gilt:

$$\mathcal{L}(\gamma|_{[s,t]}) = \lambda(t - s) = d(\gamma(s), \gamma(t)).$$

Eine Kurve  $\gamma$  heißt **Geodätische**, falls sie lokal minimierende Geodätische ist, das heißt für alle  $t \in [a, b]$  existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $\gamma|_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon]}$  minimierende Geodätische ist.

Eine bessere Vorstellung erhält man durch Betrachtung von Geodätischen als Isometrien von Intervallen in den euklidischen Raum, denn  $d(\gamma(s), \gamma(t)) = t - s = d_{\mathbb{R}}(t, s)$ .



Geodätische = Großkreissegmente

- Bemerkung** (1) Die Geodätischen von  $\mathbb{R}^n$  mit Standardmetrik sind genau die Geradensegmente.
- (2) Ist  $\gamma$  eine minimale Geodätische, so gilt  $\|\dot{\gamma}\| = \lambda$ , falls  $\lambda > 0$ , existiert eine Bogenlängenparametrisierung  $\tilde{\gamma}$  von  $\gamma$  auf  $[0, l]$  mit  $l = \mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(\tilde{\gamma})$  und  $d(\tilde{\gamma}(0), \tilde{\gamma}(t)) = t$ . Damit ist  $\tilde{\gamma}$  eine isometrische Einbettung von  $[0, l]$  in  $M$ .

**Definition 6.8** Es sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  eine (stückweise) glatte Kurve auf  $M$ . Das Integral

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_a^b \|\dot{\gamma}\|^2$$

heißt **Energie** von  $\gamma$ .

**Lemma 6.9** Für eine (stückweise) glatte Kurve  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ . Dann gilt:

$$\frac{1}{2} \mathcal{L}(\gamma)^2 \leq E(\gamma),$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn  $\gamma$  proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist.

**Beweis** Es gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für das Skalarprodukt  $(f, g) \mapsto \int_0^1 fg$  mit  $f, g \in C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ .

Nun sei  $f \equiv 1$  und  $g = \|\dot{\gamma}\|$ , so folgt:

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}\| \leq \left| \left( \int_0^1 f^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^1 g^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right| = \sqrt{2E(\gamma)}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn 1 und  $\|\dot{\gamma}\|$   $\mathbb{R}$ -linear abhängig sind, das heißt wenn  $\|\dot{\gamma}\| \equiv \lambda$  gilt.  $\square$

---

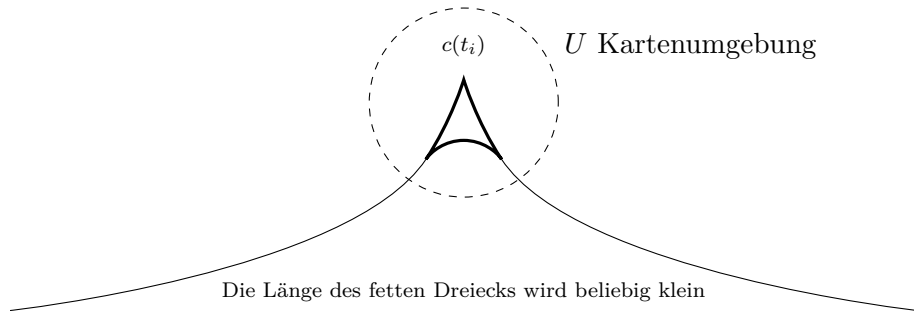
**Satz 6.10** *Eine (stückweise) glatte Kurve ist genau dann minimale Geodätische, wenn ihre Energie minimal ist.*

**Beweis** „ $\Rightarrow$ “: Es sei  $\gamma$  minimale Geodätische, das heißt  $\mathcal{L}(\gamma|_{[0,t]}) = \lambda t = d(\gamma(0), \gamma(t))$ .

Also gilt  $E(\gamma) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(\gamma)^2 \leq \frac{1}{2}\mathcal{L}(c)^2 \leq E(c)$ , wobei  $c$  eine Kurve zwischen den Endpunkten von  $\gamma$  ist und die letzte Ungleichung aus Lemma 6.9 folgt.

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $\gamma$  energieminimierend.

$$\frac{1}{2}d(\gamma(0), \gamma(1))^2 \leq \frac{1}{2}\mathcal{L}(\gamma)^2 \leq E(\gamma) \leq E(\underbrace{c_n}_{\text{reguläre Kurven}}) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(c_n)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}d(\gamma(0), \gamma(1))^2$$



Damit gilt:  $\mathcal{L}(\gamma) = d(\gamma(0), \gamma(1))$  und wegen Cauchy-Schwarz ist  $\gamma$  proportional zur Bogenlänge parametrisiert. Wendet man dieses Argument auf beliebige Teilstücke an, erhält man:

$$\mathcal{L}(\gamma|_{[s,t]}) = d(\gamma(s), \gamma(t)) = \lambda(s - t). \quad \square$$

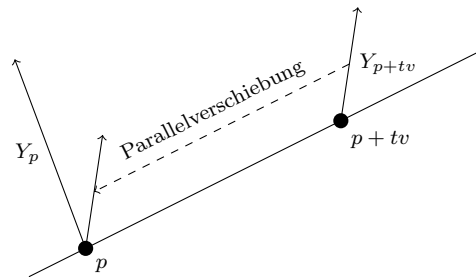


# Kapitel 7.

## Kovariante Ableitungen

**Frage:** Was ist eine „gute“ Differentialrechnung für Vektorfelder?

Das gewöhnliche Differential im  $\mathbb{R}^n$  für  $Y: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist gerade die lineare Abbildung  $DY|_p \cdot v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y(p + tv) - Y(p)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Y(p + tv)$ . Betrachte im euklidischen Fall einen Punkt  $p$ , sowie einen Tangentialvektor  $Y_p$ .



Nun gehe zur Betrachtung von Vektorfeldern  $X: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  über und setze  $D_X Y|_p = DY|_p \cdot X_p$ . Hierfür gilt:

- $D$  ist  $\mathbb{R}$ -linear in  $Y$ :  $D(Y + \tilde{Y}) = DY + D\tilde{Y}$ .
- Es gilt die Leibnizregel:  $D(fY) = Df \cdot Y + fDY$ .
- $D$  ist  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ -linear in  $X$ :

$$D_{fX} Y|_p = DY|_p \cdot (fX)_p = DY|_p \cdot f(p)X_p = f(p)DY|_p \cdot X_p = (fD_X Y)(p).$$

*Erinnerung:* Die Lieableitung  $\mathcal{L}_{(\cdot)} Y$  ist *nicht*  $C^\infty(M)$ -linear.

**Definition 7.1** Es seien  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $E$  ein Vektorbündel über  $M$ . Eine **kovariante Ableitung** (oder **Zusammenhang** ([engl.] „connection“)) auf  $E$  ist eine Abbildung

$$\nabla: \mathcal{V}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E), \quad \nabla(X, S) = \nabla_X S$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- (i)  $\nabla S$  ist  $C^\infty(M)$ -linear, das heißt

$$\nabla_{X+Y} S = \nabla_X S + \nabla_Y S \text{ und } \nabla_{fX} S = f\nabla_X S$$

für alle  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$  und  $f \in C^\infty(M)$ .

- (ii)  $\nabla_X$  ist  $\mathbb{R}$ -linear, das heißt für alle  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\nabla_X(\mu S + \nu T) = \mu \nabla_X S + \nu \nabla_X T.$$

(iii)  $\nabla_X$  erfüllt die folgende Leibnizregel:

$$\nabla_X(fS) = df(X) \cdot S + f \cdot \nabla_X S = X(f) \cdot S + f \cdot \nabla_X S.$$

Kurzform:  $\nabla: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$ ,  $S \mapsto \nabla_{(\cdot)} S$  ist eine  $C^\infty(M)$ -Modulderivation.

**Beispiel** (1) Das gewöhnliche Differential  $D$  definiert in kanonischer Weise eine kovariante Ableitung auf  $T\mathbb{R}^n$ .

$$X \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n), X: \mathbb{R}^n \rightarrow T\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \text{ via } \mathcal{I}: X_p \mapsto (p, \underbrace{\mathcal{I}_p(X_p)}_{=: \bar{X}_p}).$$

Nun ist wie folgt eine kovariante Ableitung gegeben:  $(\nabla_X Y)_p = \mathcal{I}^{-1}(p, D_{\bar{X}_p} \bar{Y})$ .

(2)  $E = M \times \mathbb{R}^n$ , ein Schnitt  $S$  von  $E$  ist von der Form  $S_p = (p, s(p))$ ,  $s: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  glatt.

Hier definiert man die kovariante Ableitung:

$$\nabla_X S = (p, \mathcal{I}_{s(p)}^{-1}(s_{*p}, X_p))$$

$$s_{*p}: T_p M \rightarrow T_p \mathbb{R}^n, s_{*p}: X_p \in T_p \mathbb{R}^n \xrightarrow{\mathcal{I}_{s(p)}} \mathbb{R}^n.$$

(3) Sei  $E = M \times \mathbb{R}^n$ , ein Schnitt  $S = (\text{id}, \sigma)$ ,  $\sigma: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Dann ist  $(\nabla_X S)_p = (p, \mathcal{I}_p(\sigma_{*p}(X_p)))$ ,  $\sigma_{*p}: T_p M \rightarrow T_{\sigma(p)} \mathbb{R}^n$ . Sei  $\omega = (\omega_j^k)_{j,k \leq n}$  eine  $(n \times n)$ -Matrix von 1-Formen auf  $M$ , das heißt  $\omega(X)|_p \in \mathfrak{M}^{n \times n}(\mathbb{R})$ . Für einen Schnitt  $S = (\text{id}, \sigma)$  und sei dann

$$(\nabla_X S)_p = (\text{id}, \mathcal{I}_p(\sigma_{*p}(X_p)) + \omega(X)|_p \cdot \sigma(p).$$

Dies definiert eine kovariante Ableitung auf  $E = M \times \mathbb{R}^n$ .

(4)  $d: \Omega^0(M) = C^\infty(M) = \Gamma(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^1(M) = \Gamma(T^*M) = \Gamma(\underbrace{T^*M \otimes (M \times \mathbb{R})}_{\text{Fasern: } T_p^*M \otimes \mathbb{R} \cong T_p^*M})$

mit  $f \mapsto [df: X \mapsto df(X) = X(f)]$ .

Dann ist

$$d: \mathcal{V}(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M),$$

$$\nabla_X f = d(X, f) \mapsto X(f)$$

eine kovariante Ableitung auf  $C^\infty(M)$ .

(5) Es sei  $M \subseteq \mathbb{R}^k$  eine glatte Untermannigfaltigkeit und  $\nabla$  die kanonische kovariante Ableitung auf  $T\mathbb{R}^k$ .

Erster Ansatz für eine kovariante Ableitung:

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}|_M \text{ das funktioniert noch nicht.}$$

Für  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$  seien  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  Fortsetzungen, das heißt  $\tilde{X}|_M = X$  und  $\tilde{Y}|_M = Y$ .

$$(\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})_p \in T_p \mathbb{R}^k \supseteq T_p M.$$

Nächster Ansatz, der tatsächlich eine kovariante Ableitung definiert.

$$\tilde{\nabla}_X Y = (\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}|_M)^{\text{proj } T_p M},$$

wobei  $X^{\text{proj } T_p M}$  die orthogonale Projektion von  $X$  auf den Tangentialraum  $T_p M$  bzgl. des Standardskalarproduktes ist.



Schreibt man in Beispiel 3)  $\sigma = (\sigma^1, \dots, \sigma^n)$ , so kann man  $d\sigma = (d\sigma^1, \dots, d\sigma^n)$  als 1-Form auf  $M$  mit Werten in  $\mathbb{R}^n$  auffassen:

$$\begin{aligned} d\sigma(X)_p &= (d\sigma^1(X)_p, \dots, d\sigma^n(X)_p) \\ &= (X(\sigma^1)_p, \dots, X(\sigma^n)_p) \\ &= \mathcal{I}_p\left(\sum X(\sigma^i)\partial_i\right), \end{aligned}$$

wobei  $\partial_i$  das  $i$ -te Koordinatenfeld in der Karte  $(\text{id}, \mathbb{R}^n)$  ist. Identifiziert man  $E = M \times \mathbb{R}^n$  mit  $C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ , so gilt  $\nabla_X S = d\sigma(X)\omega(X)\sigma$  (Kurzschreibweise für die zweite Komponente von  $S$ ). Lokal ist *jede* kovariante Ableitung von dieser Form.

**Lemma 7.2** *Die kovariante Ableitung  $(\nabla_X S)_p$  hängt nur von den Werten von  $X$  und  $S$  in einer Umgebung von  $p$  ab.*

**Beweis** Es seien  $p \in M$  und  $X_1, X_2 \in \mathcal{V}(M)$  sowie  $S_1, S_2 \in \Gamma(E)$  und  $U$  eine Umgebung von  $p$  mit  $X_1|_U = X_2|_U$  und  $S_1|_U = S_2|_U$ . Wähle nun ein  $\sigma \in C^\infty(M)$  mit dem Träger  $\text{supp } \sigma \subseteq U$  und  $\sigma|_V \equiv 1$  auf einer Umgebung  $V$  von  $p$ . Dann gilt:  $\sigma X_1 = \sigma X_2$  und  $\sigma S_1 = \sigma S_2$ . Für  $q \in V$  folgt dann:

$$\begin{aligned} (\nabla_{\sigma X_i} \sigma S_i)_q &= \sigma(q)(\nabla_{X_i} \sigma S_i)|_q \\ &= \sigma(q) \underbrace{(X_i(\sigma)|_q)}_{=0} S_i + \underbrace{\sigma(q)}_{=1} \nabla_{X_i} S_i|_q \\ &= \nabla_{X_i} S_i|_q \end{aligned}$$

Damit folgt  $\nabla_{X_1} S_1 = \nabla_{X_2} S_2$  □

## 1. Lokale Koordinaten

Es sei  $(\varphi, U)$  eine Karte von  $M$  um  $p \in M$  und  $E|_U \xrightarrow{\tau} U \times \mathbb{R}^n$ . Dann ist  $s_i(p) = \tau^{-1}(p, e_i)$  eine lokale Basis. Jeder Schnitt  $S$  ist also lokal von der Form  $S|_U = \sum_i \sigma^i s_i$ . Somit existieren glatte Funktionen  $\Gamma_{ij}^k$ , die sogenannten **Christoffelsymbole** mit

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} s^j = \sum_k \Gamma_{ij}^k s^k.$$

Für  $S = \sum \sigma^j s_j$  und  $X = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  folgt dann:

$$\begin{aligned} (\nabla_X S)_p &= \sum_{i,j} \xi_p^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} (\sigma^j s_j) \\ &= \sum_{i,j} \xi_p^i \left( \frac{\partial \sigma^j}{\partial x^i} \cdot s_j(p) \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} s_j|_p \right) \\ &= \sum_{i,j} \xi_p^i \left( \frac{\partial \sigma^j}{\partial x^i} \Big|_p s_j(p) + \sigma^j(p) \sum_k \Gamma_{ij}^k(p) s_k(p) \right) \\ &= \sum_k \left( \underbrace{\sum_i \xi_p^i \frac{\partial \sigma^k}{\partial x^i}}_{=X(\sigma^k)|_p} + \sum_{i,j} \xi_p^i \sigma^j(p) \Gamma_{ij}^k(p) \right) s_k(p) \\ &= X(\sigma^k)|_p = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\sigma^k \circ \gamma) \text{ mit } \dot{\gamma}(0) = X_p \end{aligned}$$

- Bemerkung** (1)  $X \mapsto (\nabla_X S)_p$  hängt nur von dem Wert  $X_p$  von  $X$  in  $p$  ab, Schreibweise  $(\nabla_X S)_p = \nabla_{X_p} S$ .
- (2)  $S \mapsto \nabla_{X_p} S$  hängt nur von den Werten von  $S$  entlang einer Kurve  $\gamma$  mit  $\dot{\gamma}(0) = X_p$  ab. Es gilt

$$\nabla_X S = \sum_k X(\sigma^k) S_k + \sum_k \sum_j \left( \left( \sum_i \Gamma_{ij}^k \xi^i \right) \sigma^j \right) S_k.$$

Schreibt man  $\sigma = (\sigma^1, \dots, \sigma^n)$  und fasst  $d\sigma = (d\sigma^1, \dots, d\sigma^n)$  als lokale 1-Form mit Werten in  $\mathbb{R}^n$  auf, so ist für  $s = (s_1, \dots, s_n)$   $d\sigma \cdot s = \sum d\sigma^j s^j$  eine lokale 1-Form mit Werten in  $E$ . Es gilt:  $d\sigma \cdot s(X) = D_X \sigma \cdot s$ . Analog definiert  $\omega(X) = (\omega_j^k(X))_{k,j}$  eine lokale 1-Form mit Werten in den reellen  $(n \times n)$ -Matrizen. Dann ist

$$\omega\sigma : X \mapsto \omega(X)\sigma = \left( \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \xi^i \sigma^j \right)^k$$

eine lokale 1-Form mit Werten in  $\mathbb{R}^n$  und  $\omega\sigma \cdot s$  eine lokale 1-Form mit Werten in  $E$ . Damit gilt

$$\nabla_X S = (d\sigma(X) + \omega(X)\sigma) \cdot s$$

oder kurz

$$\nabla = d + \omega.$$

## 2. Transformationsverhalten

Es seien  $E|_{U_\alpha} \xrightarrow{\tau_\alpha} U_\alpha \times \mathbb{R}^n$  und  $E|_{U_\beta} \xrightarrow{\tau_\beta} U_\beta \times \mathbb{R}^n$  lokale Trivialisierungen. Die Übergangsfunktion

$$\psi = \psi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$$

war durch

$$\tau_\beta \circ \tau_\alpha^{-1}(p, x) = (p, \psi x)$$

definiert. Für die lokalen Darstellungen  $S = \sum \sigma^j s_j = \sum \tilde{\sigma}^j s_j$  in  $\tau_\alpha$  beziehungsweise  $\tau_\beta$  gilt damit  $\tilde{\sigma}^i = \sum_k \psi_k^i \sigma^k$ , kurz  $\tilde{\sigma} = \psi\sigma$ . Es folgt daraus:

$$(d\sigma(X) + \omega(X)\sigma)S = \nabla_X S = (d\tilde{\sigma}(X) + \tilde{\omega}(X)\tilde{\sigma})\tilde{S}$$

also

$$\begin{aligned} d\sigma(X) + \omega(X)\sigma &= \psi^{-1}(d\tilde{\sigma}(X) + \tilde{\omega}(X)\tilde{\sigma}) \\ &= \psi^{-1}(d(\psi\sigma)(X) + \tilde{\omega}(X)\psi\sigma) \\ &= \psi^{-1}((D_X \psi)\sigma + \psi d\sigma(X) + \tilde{\omega}(X)\psi\sigma) \\ &= d\sigma(X) + \underbrace{(\psi^{-1}(D_X \psi) + \psi^{-1}\tilde{\omega}(X)\psi)}_{=\omega(X)}\sigma. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\tilde{\omega}(X) = \psi\omega(X)\psi^{-1} - D_X \psi \cdot \psi^{-1}. \quad (7.1)$$

Daher definiert  $\omega(X)$  *keinen* Schnitt in  $\text{Hom}(E, E)$ , denn in Kapitel 5 wurde gezeigt, dass die Übergangsfunktion von  $\text{Hom}(E, E)$  gegeben ist durch

$$(p, \eta) \rightarrow (p, \psi \circ \eta \circ \psi^{-1}).$$

**Bemerkung** Der zweite Summand in (7.1) hängt *nur* von der Übergangsfunktion  $\psi$  und  $X$  ab, und somit *nicht* von  $\nabla$ . Das heißt sind  $\nabla$  und  $\tilde{\nabla}$  kovariante Ableitungen auf  $E$ , so ist ihre Differenz  $\nabla - \tilde{\nabla}$  eine globale 1-Form mit Werten in  $\text{Hom}(E, E)$ .

Durch eine kovariante Ableitung auf einem Vektorbündel  $E$  erhalten wir kovariante Ableitungen auf dem dualen Vektorbündel  $E^*$  und Tensorprodukte von Vektorbündeln wie folgt:

**Proposition 7.3** Die für  $X \in \mathcal{V}(M)$ ,  $S^* \in \Gamma(E^*)$  und  $v \in E_p$  sowie eine Fortsetzung  $\tilde{v} \in \Gamma(E)$  von  $v_p$  durch

$$(\nabla_X^* S^*)_p(v) = X_p(S^*(\tilde{v})) - S^*|_p(\nabla_X \tilde{v})$$

definierte Abbildung ist eine kovariante Ableitung auf  $E^*$ . Dass  $S^*(\tilde{v}) = (S^*, \tilde{v})$  ist führt zu  $X_p(S^*, \tilde{v}) = (\nabla_X^* S^*, \tilde{v}) + (S^*, \nabla_X \tilde{v})$ .

Der Beweis sei zur Übung überlassen.

**Proposition 7.4** Es seien  $E_1$  und  $E_2$  Vektorbündel mit kovarianten Ableitungen  $\nabla^1$  und  $\nabla^2$  über  $M$ . Dann definiert für  $X \in \mathcal{V}(M)$ ,  $S_i \in \Gamma(E_i)$

$$\nabla_X(S_1 \otimes S_2) = \nabla_X^1 S_1 \otimes S_2 + \nabla_X^2 S_1 \otimes S_2$$

durch lineare Fortsetzungen eine kovariante Ableitung auf  $E_1 \otimes E_2$ .

**Definition 7.5** Die Abbildung

$$\begin{aligned} R^\nabla &= R : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E) \\ R(X, Y)S &= \nabla_X \nabla_Y S - \nabla_Y \nabla_X S - \nabla_{[X, Y]} S \end{aligned}$$

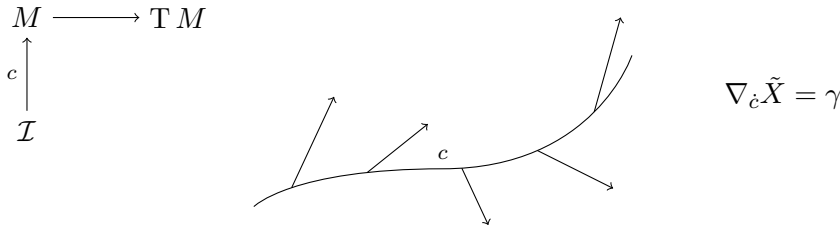
heißt der **Krümmungstensor** der Abbildung  $\nabla$ .

**Bemerkung** Für alle  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$  gilt  $R(Y, X) = -R(X, Y)$ .

**Proposition 7.6**  $R$  ist  $C^\infty(M)$ -linear in allen Argumenten.

Der Beweis sei zur Übung überlassen.

### 3. Schnitte entlang von Ableitungen



**Definition 7.7** Es seien  $E$  ein Vektorbündel über  $M$  mit kovarianter Ableitung  $\nabla$  und  $\Phi : N \rightarrow M$ . Ein **Schnitt** entlang  $\Phi$  ist eine glatte Abbildung  $S : N \rightarrow E$ , so dass  $S(p) \in E_{\Phi(p)}$  gilt, dies entspricht genau dem Schnitt in das längs  $\Phi$  zurückgezogene Bündel  $\Phi^*$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \Phi^* E & \hookrightarrow & E \\
 \tilde{S} \downarrow & \nearrow S & \downarrow \pi \\
 N & \xrightarrow{\Phi} & M
 \end{array}$$

Für einen Schnitt  $S$  in  $E$  längs  $\Phi$  und  $X_p \in T_p N$  ist die kovariante Abbildung  $\nabla_{X_p} S$  von  $S$  in Richtung  $X_p$  wie folgt definiert:

Es sei  $s_1, \dots, s_n$  eine lokale Basis über einer Trivialisierungsumgebung  $U \subseteq M$ . Dann ist  $S$  lokal gegeben durch

$$S_p = \sum_j \sigma^j(p) s_j(\Phi(p))$$

für  $p \in V = \Phi^{-1}(U) \subseteq N$ , und damit

$$\nabla_{X_p} S = (d\sigma(X_p) + \omega(\Phi_{*p} X_p) \sigma(p)) S(\Phi(p)).$$

Dies hängt nicht von der Wahl der Trivialisierung ab, denn ist  $U'$  ein weiteres Trivialisierungsgebiet mit lokaler Basis  $\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_n$  und Übergangsfunktion  $\psi : C \cap U' \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ , so gilt

$$\begin{aligned}
 \tilde{\sigma} &= (\psi \circ \Phi) \sigma \quad \text{und} \\
 \tilde{\omega} &= (\psi \circ \Phi) \omega (\psi \circ \Phi)^{-1} - d(\psi \circ \Phi) (\psi \circ \Phi)^{-1}
 \end{aligned}$$

damit folgt

$$\begin{aligned}
 & d\tilde{\sigma}(X_p) + \tilde{\omega}(\Phi_{*p} X_p) \tilde{\sigma}(p) - d((\psi \circ \Phi) \sigma)(X_p) \\
 & \quad + (\psi \circ \Phi) \omega(\Phi_{*p} X_p) (\psi \circ \Phi)^{-1} (\psi \circ \Phi) \sigma \\
 & \quad - d(\psi \circ \Phi)(X_p) (\psi \circ \Phi)^{-1} (\psi \circ \Phi) \sigma \\
 &= d(\psi \circ \Phi)(X_p) \sigma + (\psi \circ \Phi) \omega(\Phi_{*p} X_p) \sigma - d(\psi \circ \Phi)(X_p) \sigma \\
 &= (\psi \circ \Phi) (d\sigma(X_p) + \omega(\Phi_{*p} X_p) \sigma)
 \end{aligned}$$

Damit ist  $p \mapsto \nabla_{X_p} S$  als Schnitt entlang  $\Phi$  wohldefiniert.

**Bemerkung** Dies definiert eine kovariante Ableitung auf  $\Phi^* E \subseteq N \times E$ . Sind umgekehrt  $S \in \Gamma(E)$  und  $X_p \in T_p N$ , so ist  $S \circ \Phi$  ein Schnitt entlang  $\Phi$  und es gilt

$$\nabla_{X_p} (S \circ \Phi) = \nabla_{\Phi_{*p} X_p} S$$

**Spezialfall:** Sei  $\Phi = c : \mathcal{I} = [a, b] \rightarrow M$ . Ein Schnitt in  $E$  entlang  $c$  ist eine glatte Abbildung  $S : \mathcal{I} \rightarrow E$  mit  $S(t) \in E_{c(t)}$ . Die kovariante Abbildung  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}|_t} S$  wird kurz als  $\nabla_t S$  oder  $S'(t)$  geschrieben. In lokalen Koordinaten gilt

$$\begin{aligned}
 S' &= \left( d\sigma \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) + \omega \left( c_* \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \right) \sigma \right) S \circ c \\
 &= (\sigma' + \omega(\dot{c}) \sigma) S \circ c
 \end{aligned}$$

**Definition 7.8** Ein Schnitt  $S \in \Gamma(E)$  heißt **parallel** (oder **konstant**), wenn  $\nabla S \equiv 0$ . Ein Schnitt  $S$  entlang  $c$  heißt **parallel**, wenn  $S' \equiv 0$  gilt.

**Proposition 7.9** *Es sei  $c : \mathcal{I} \rightarrow M$  eine (stückweise) glatte Kurve und  $\xi \in E_{c(s)}$ . Dann existiert genau ein entlang  $c$  paralleler Schnitt  $S_\xi$  in  $E$  mit  $S_\xi(s) = \xi$ .*

**Beweis** in lokalen Koordinaten definiert

$$0 = S'_\xi(t) = (\sigma'(t) + \omega(\dot{c}(t)\sigma(t))S(dt))$$

ein lineares Differentialgleichungssystem:

$$\sigma'(t) = A(t) \cdot \sigma(t)$$

wobei  $A(t) = -\omega(\dot{c}(t))$ . Ist  $[t, T]$  ein kompaktes Teilintervall in  $\mathcal{I}$  mit  $s \in [t, T]$ , so existiert eine Partition  $t = t_0 < \dots < t_k = T$ , so dass  $c([t_i, t_{i+1}])$  in einer Trivialisierungsumgebung liegt. Man findet so sukzessive eindeutige Lösungen auf den Teilintervallen (*lineares System*), welche durch Fortsetzungen eine eindeutige Lösung auf  $[t, T]$  definieren. Erneut folgt aus der Eindeutigkeit, dass ein für alle Zeiten definierter paralleler Schnitt  $S_\xi$  existiert.  $\square$

**Definition 7.10** *Es sei  $c$  eine glatte Kurve in  $M$ . Die lineare Abbildung*

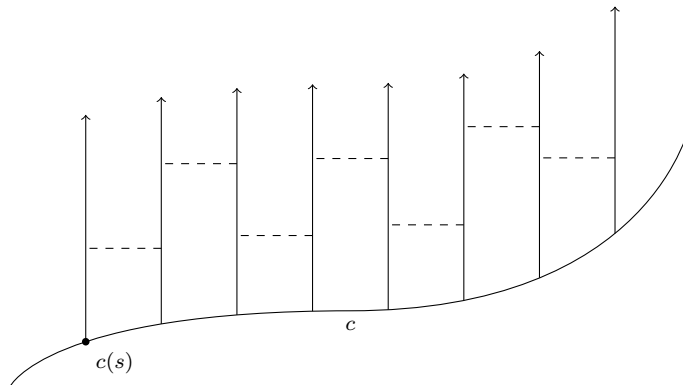
$$\begin{aligned} P_{s,t}^c : E_{c(s)} &\rightarrow E_{c(t)} \\ \xi &\mapsto S_\xi(t), \end{aligned}$$

wobei  $S_\xi$  den nach Proposition 7.9 eindeutigen parallelen Schnitt entlang  $c$  mit  $S_\xi(s) = \xi$  bezeichnet, heißt **Paralleltransport** entlang  $c$ .

**Bemerkung** (1)  $P_{s,t}^c$  ist invertierbar mit Inversen  $(P_{s,t}^c)^{-1} = P_{t,s}^c = P_{s,t}^{\bar{c}}$ , wobei  $\bar{c} = (s + t - \tau)$ .

(2) Die Abbildung  $P_{s,t}^c$  ist im Allgemeinen *nicht* unabhängig von der Wahl von  $c$ .

**Beispiel** In  $\mathbb{R}^n$  ist ein Vektorfeld  $X$  genau dann parallel, wenn  $X$  (beziehungsweise  $\bar{X}_p \in \mathcal{I}_p(X_p)$ ) konstant im „üblichen“ Sinne ist: Paralleltransport entlang einer Kurve entspricht der gewählten Parallelverschiebung.



Es seien  $S \in \Gamma(E)$  und  $X_p \in T_p M$ . Ist  $c$  eine Integralkurve von  $X_p$ , das heißt  $c(0) = p$  und  $\dot{c}(0) = X_p$ , so ist  $\tilde{S} = S \circ c$  ein Schnitt entlang  $c$  und es gilt  $\tilde{S}'(0) = \nabla_{X_p} S$ .

Nun sei ferner  $\xi_1, \dots, \xi_n$  eine Basis von  $E_p$  und es bezeichnen  $s_1, \dots, s_n$  die parallelen Schnitte entlang  $c$  mit  $s_i(0) = \xi_i$ . Dann gilt  $\tilde{S}(t) = \sum \sigma^j(t) s_j(t)$  und es folgt

$$\begin{aligned}
 \nabla_{X_p} S &= \tilde{S}'(0) = \nabla_t \left( \sum_j \sigma^j s_j \right) (0) \\
 &= \sum_j \left( (\sigma^j)' s_j + \underbrace{\sigma^j \nabla_t s_j}_{\equiv 0} \right) (0) \\
 &= \sum_j \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{\sigma^j(t) - \sigma^j(0)}{t} \right) s_j(0) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( \sum_j \sigma^j(t) s_j(0) - \sigma^j(0) s_j(0) \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( \sum_j \sigma^j(P_{t,0}^c(s_j(t)) - \sigma^j(0) s_j(0)) \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( P_{t,0}^c \left( \sum_j \sigma^j s_j(t) \right) - \sum_j \sigma^j s_j(0) \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( P_{t,0}^c(\tilde{S}(t) - \tilde{S}(0)) \right)
 \end{aligned}$$

#### 4. Der Levi-Civita Zusammenhang

Für das „gewöhnliche“ Differential auf  $\mathbb{R}^k$  gilt:

$$D Y(X) - D X(Y) = \sum_i^k \frac{\partial y^j}{\partial x^i} X^i - \frac{\partial x^j}{\partial x^i} Y^i = [X, Y].$$

**Definition 7.11** Es sei  $\nabla$  eine kovariante Ableitung auf  $TM$ . Das  $(1, 2)$ -Tensorfeld

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

heißt **Torsion** oder der **Torsionstensor** von  $\nabla$ . Die kovariante Ableitung heißt **torsionslos**, wenn  $T \equiv 0$  gilt.

Betrachtet man die Standardmetrik  $g^{\text{std}} = \langle \cdot, \cdot \rangle$  des  $\mathbb{R}^k$  in den Koordinaten  $(\text{id}, \mathbb{R}^k)$ , so gilt:

$$\begin{aligned}
 g^{\text{std}} &= \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j = \sum_{i,j} \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j \\
 &= \sum_i dx^i \otimes dx^i.
 \end{aligned}$$

Das heißt die Metrik  $g^{\text{std}}$  (das heißt die  $g_{ij}$ ) ist konstant.

**Satz 7.12 (Levi-Civita, 1961)** Auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit existiert genau ein torsionsloser Zusammenhang bezüglich dessen kovarianter Ableitung die Metrik parallel ist ( $\nabla g \equiv 0$ ).

*Zur Parallelität:* Die Metrik  $g$  einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist ein  $(0, 2)$ -Tensorfeld, das heißt lokal ist  $g$  endliche Summe von Elementen der Form  $\omega \otimes \eta$ , wobei  $\omega, \eta \in \Omega^1(M)$ .

Für  $X, Y, Z \in \mathcal{V}(M)$  gilt:

$$\begin{aligned}
 \nabla_Z(\omega \otimes \eta)(X, Y) &= ((\nabla_Z^* \omega) \otimes \eta + \omega \otimes (\nabla_Z^* \eta))(X, Y) \\
 &= (\nabla_Z^* \omega)(X) \eta(Y) + \omega(X) (\nabla_Z^* \eta)(Y) \\
 &= (Z(\omega(X)) - \omega(\nabla_Z X)) \eta(Y) + \omega(X) (Z(\eta(Y)) - \eta(\nabla_Z Y)) \\
 &= Z(\omega(X)) \eta(Y) + \omega(X) Z(\eta(Y)) - (\omega(\nabla_Z X) \eta(Y) + \omega(X) \eta(\nabla_Z Y)) \\
 &= Z((\omega \otimes \eta)(X, Y)) - (\omega \otimes \eta)(\nabla_Z X, Y) - (\omega \otimes \eta)(X, \nabla_Z Y)
 \end{aligned}$$

Somit ist  $g$  genau dann parallel, wenn für  $X, Y, Z \in \mathcal{V}(M)$  gilt:

$$0 = (\nabla_Z g)(X, Y) = Z(g(X, Y)) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y)$$

beziehungsweise

$$Z \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle.$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn der Paralleltransport entlang von Kurven eine lineare Isometrie ist (vgl. Aufgabe 3 auf dem Übungsblatt 8). Ist  $c$  eine glatte Kurve,  $P_t: T_{c(0)} M \rightarrow T_{c(t)} M$  eine Isometrie, so gilt für alle  $X, Y \in T_{c(0)} M$ :

$$g_{c(0)}(X, Y) = g_{c(t)}(P_t X, P_t Y) = (P_t^* g_{c(t)})(X, Y).$$

Also gilt  $P_t^* g_{c(t)} = g_{c(0)}$  und es folgt:

$$\nabla_t g = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((P_t^* g_{c(t)}) - g_{c(0)}) = 0.$$

**Beweis (von Satz 7.12)** Ist  $\nabla$  eine kovariante Ableitung mit den geforderten Eigenschaften, so gilt für  $X, Y, Z \in \mathcal{V}(M)$ :

$$\begin{aligned}
 X \langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \\
 Y \langle Z, X \rangle &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle \\
 &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \overline{\langle Z, \nabla_X Y \rangle} - \langle Z, [X, Y] \rangle \\
 Z \langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle
 \end{aligned}$$

Indem man die ersten beiden Gleichungen addiert und die Dritte abzieht erhält man:

Koszul-Formel

$$\begin{aligned}
 2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle &= X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle \\
 &\quad - \langle X, \nabla_Y Z - \nabla_Z Y \rangle \\
 &\quad - \langle Y, \nabla_X Z - \nabla_Z X \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle \\
 &= X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle.
 \end{aligned}$$

Die rechte Seite der Gleichung ist  $C^\infty(M)$ -linear in  $Z$ , definiert also für alle  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$  eine 1-Form  $\omega_{(X,Y)}$ . Da die Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  positiv definit ist, existiert ein Vektorfeld  $A_{(X,Y)} \in \mathcal{V}(M)$  mit  $\omega_{(X,Y)} = \langle A_{(X,Y)}, \cdot \rangle$ , das, wie man leicht nachrechnet,  $A_{(X,Y)}$ -linear und derivativ in  $Y$  und  $C^\infty(M)$ -linear in  $X$  ist und durch

$$\begin{aligned}
 \nabla: \quad \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) &\rightarrow \mathcal{V}(M) \\
 (X, Y) &\mapsto A_{(X,Y)}
 \end{aligned}$$

wird eine eindeutige kovariante Ableitung definiert, die die geforderten Eigenschaften erfüllt.  $\square$

**Bemerkung** Die zur Definition des Levi-Civita Zusammenhangs verwendete Formel bezeichnet man als **Koszul-Formel**.

**Definition 7.13** Die nach obigem Satz eindeutig bestimmte, torsionsfreie Zusammenhang bezüglich dessen die Metrik parallel ist, heißt **Levi-Civita Zusammenhang**.

**Beispiel** (1) Der Levi-Civita Zusammenhang des  $\mathbb{R}^k$  mit der Standardmetrik ist die gewöhnliche Ableitung  $D$ .

(2) Ist  $M \subseteq \mathbb{R}^k$  eine Untermannigfaltigkeit mit der induzierten Metrik, so ist durch

$$(\nabla_X Y)_p = (D_X Y|_p)^T = D_X Y|_p - (D_X Y|_p)^\perp$$

ein Zusammenhang definiert, der gerade der Levi-Civita Zusammenhang ist, denn  $\nabla$  ist torsionslos, da  $D$  torsionslos ist und für Vektorfelder  $X, Y, Z \in \mathcal{V}(M)$  gilt:

$$\begin{aligned} Z \langle X, Y \rangle &= \langle D_Z Y, Y \rangle + \langle X, D_Z Y \rangle \\ &= \langle (D_Z X)^T + (D_Z X)^\perp, Y \rangle + \langle X, (D_Z Y)^T + (D_Z Y)^\perp \rangle \\ &= \langle (D_Z X)^T, Y \rangle + \langle X, (D_Z Y)^T \rangle \\ &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle. \end{aligned}$$

**Lokale Koordinaten** Es sei  $(M, g)$  eine Riemmannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita Zusammenhang  $\nabla$ . In einer Karte gilt:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Es sei

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle \text{ und } g = \langle \cdot, \cdot \rangle = \sum g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Es gilt  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ , denn

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = \left[ \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= \sum_{l,m} g^{kl} g_{lm} \Gamma_{ij}^m \\ &= \sum_{l,m} g^{kl} \left\langle \Gamma_{ij}^m \frac{\partial}{\partial x^m}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle \\ &= \sum_l g^{kl} \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_l g^{kl} \left( \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right). \end{aligned}$$



## 5. Krümmungen

Man definiert die zweite kovariante Ableitung als

$$\nabla_{X,Y}^2 Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z.$$

(Formale Produktregel:  $\nabla_X(\nabla_Y Z) = \nabla_X(\nabla Z(Y)) = (\nabla_X(\nabla Z))(Y) + (\nabla Z)(\nabla_X Y) = \nabla_{X,Y}^2 Z + \nabla_{\nabla_X Y} Z$ .)

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z - (\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{\nabla_Y X} Z) \\ &= \nabla_{X,Y}^2 Z - \nabla_{Y,X}^2 Z. \end{aligned}$$

**Proposition 7.14** Für  $X, Y, Z, W \in \mathcal{V}(M)$  gilt:

- (i)  $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ ,
- (ii)  $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(Y, X)Z, W \rangle = -\langle R(X, Y)W, Z \rangle$ ,
- (iii)  $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle$ .

Der Beweis sei als Übung überlassen.

Es seien  $X, Y \in T_p M$  linear unabhängig. Dann hängt

$$\frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{\|X\|^2 \|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2}$$

nur von der von  $X$  und  $Y$  aufgespannten Ebene ab. Um das zu zeigen seien  $Z = aX + bY$ ,  $W = cX + dY$  und ohne Einschränkung seien  $X, Y$  orthonormal. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|Z\|^2 \|W\|^2 - \langle Z, W \rangle^2 &= \|aX + bY\|^2 \|cX + dY\|^2 - \langle aX + bY, cX + dY \rangle^2 \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 = a^2 d^2 + b^2 c^2 - 2abcd \\ &= (ad - bc)^2 \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} \frac{\langle R(aX + bY, cX + dY)(cX + dY), (aX + bY) \rangle}{\|aX + bY\|^2 \|cX + dY\|^2 - \langle aX + bY, cX + dY \rangle^2} &= \frac{(ad - bc)^2 \langle R(X, Y)Y, X \rangle}{(ad - bc)^2} \\ &= \langle R(X, Y)Y, X \rangle. \end{aligned}$$

**Definition 7.15** Es sei  $\sigma$  eine von  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$  aufgespannte Ebene in  $T_p M$ . Dann heißt

$$\sec_p(\sigma) = \sec_p(X, Y) = \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{\|X\|^2 \|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2}$$

die **Schnittkrümmung** der Ebene  $\sigma$ .

Es sei  $e_1, \dots, e_m \in T_p M$  eine Orthonormalbasis bezüglich  $g(p)$ . Die für  $X, Y \in T_p M$  durch Spurbildung definierte Abbildung

$$\text{ric}_p(X, Y) = \text{spur } R(\cdot, X)Y = \sum_i \langle R(e_i, X)Y, e_i \rangle$$

heißt **Ricci-Tensor** in  $p$ . Aus den Symmetrien von  $R$  folgt, dass  $\text{ric}_p$  symmetrisch ist. Es existiert ein  $(1, 1)$ -Tensorfeld  $\text{Ric}$ , so dass

$$\text{ric}_p(X, Y) = \langle \text{Ric}(X), Y \rangle$$

für alle  $p \in M$ ,  $X, Y \in T_p M$  gilt.

**Definition 7.16** Für  $X \in T_p M$ ,  $X \neq 0$  heißt

$$\frac{\text{ric}_p(X, X)}{\|X\|^2} = \left\langle \text{Ric} \left( \frac{X}{\|X\|} \right), \frac{X}{\|X\|} \right\rangle$$

die **Ricci-Krümmung** in  $p$  in Richtung  $X$ . Die Spur von  $\text{Ric}$

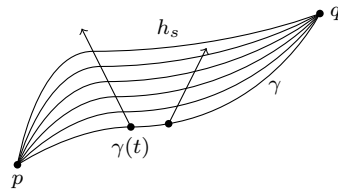
$$\text{scal}(p) = \text{spur } \text{Ric}_p(\cdot) = \sum_i \text{ric}_p(e_i, e_i) = \sum_{i,j} \langle R(e_i, e_j)e_j, e_i \rangle$$

heißt die **Skalarkrümmung** von  $M$  in  $p$ .

# Kapitel 8.

## Geodätische und die Exponentialabbildung

**Heuristik:** Geodätische sind Minimalstellen des Energiefunktional  $\gamma \mapsto E(\gamma) = \int \|\dot{\gamma}\|^2$ . Was sind kritische Punkte dieser Abbildung? Für  $f \in C^\infty(M)$  ist  $p$  kritischer Punkt, wenn alle Richtungsableitungen verschwinden, das heißt  $0 = X(f) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (f(c(t)))$ .



Eine „Kurve“ durch  $\gamma$  ist eine sogenannte **glatte Variation**  $h: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ ,  $h(s, t) = h_s(t)$  mit  $h_0 = \gamma$  und  $h_s(0) = p$ , sowie  $h_s(1) = q$  für alle  $s \in [0, 1]$ . Dann ist

$$X(t) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} h_s(t)$$

ein glattes Vektorfeld entlang  $\gamma$ . Ferner gilt  $X(0) = 0$  und  $X(1) = 0$ . Nun betrachte

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} E(h_s) = \int_0^1 \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \left\langle \frac{d}{dt} h_s(t), \frac{d}{dt} h_s(t) \right\rangle \\ &= \int_0^1 2 \left\langle \nabla_s \frac{d}{dt} h_s(t), \frac{d}{dt} h_s(t) \right\rangle \\ &= \int_0^1 2 \left\langle \nabla_t \underbrace{\frac{d}{ds} h_s(t)}_{=X(t)}, \frac{d}{dt} h_s(t) \right\rangle \\ &= \int_0^1 2 \left\langle \nabla_t X, \frac{d}{dt} h_s(t) \right\rangle \\ &= 2 \int_0^1 \frac{d}{dt} \left\langle X, \frac{d}{dt} h_s(t) \right\rangle - \left\langle X, \nabla_t \frac{d}{dt} h_s(t) \right\rangle \\ &= \underbrace{2 \int_0^1 \frac{d}{dt} \left\langle X, \frac{d}{dt} h_s(t) \right\rangle}_{=0} - 2 \int_0^1 \left\langle X, \nabla_t \frac{d}{dt} h_s(t) \right\rangle \\ &= -2 \int_0^1 \langle X(t), \nabla_t \dot{\gamma}(t) \rangle dt \end{aligned}$$

**Definition 8.1** Eine glatte Kurve  $c$  in  $M$  heißt **Geodätische**<sup>1</sup>, wenn  $\nabla_t \dot{c} \equiv 0$  gilt.

Ist  $c$  Geodätische, so ist  $c$  proportional zur Bogenlänge parametrisiert, das heißt  $\|\dot{c}\| = \text{const}$ , denn  $\frac{d}{dt} \|\dot{c}(t)\|^2 = \frac{d}{dt} \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle = 2 \langle \nabla_t \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle = 0$ . Mit  $c$  ist auch jede affine Umparametrisierung  $t \mapsto c(at + b)$  eine Geodätische.

**Proposition 8.2** Für jedes  $p \in M$  und  $v \in T_p M$  existiert genau eine Geodätische  $\gamma_{p,v}: [0, \varepsilon] \rightarrow M$  mit  $\gamma_{p,v}(0) = p$  und  $\dot{\gamma}_{p,v}(0) = v$ . Zudem hängt  $\gamma_{p,v}$  glatt von  $p$  und  $v$  ab.

**Beweis** (A) Es sei  $(\varphi, U)$  eine Karte um  $p$ ,  $\gamma^i(t) = \varphi^i(\gamma(t))$ . Dann besitzt das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{cases} 0 = \nabla_t \dot{\gamma}|_t = \sum_k \left( \ddot{\gamma}^k(t) + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t) \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{\gamma(t)} \\ \gamma^i(0) = \varphi^i(p) \\ \dot{\gamma}^i(0) = \xi_p^i, \quad v = \sum \xi_p^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung (lokal), welche glatt von den Startwerten  $p$  und  $v$  abhängt.

(B) (Alternativ) Ist  $(\varphi, U)$  eine Karte von  $M$  um  $p$ , dann ist

$$\bar{\varphi}: \begin{cases} TM|_U & \rightarrow \mathbb{R}^{2m} \\ X_p = \sum \xi_p^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p & \mapsto \bar{\varphi}(X_p) = (\varphi^1(p), \dots, \varphi^m(p), \xi_p^1, \dots, \xi_p^m) \\ & =: (y^1, \dots, y^{2m}) \end{cases}$$

eine Karte von  $TM$ . Es sei  $S$  das durch

$$S: \begin{cases} TM & \rightarrow TM \\ X = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} & \mapsto \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial y^i} - \sum_{i,j,k=1}^m \Gamma_{ij}^k \xi^i \xi^j \frac{\partial}{\partial y^{m+k}} \end{cases}$$

definierte glatte Vektorfeld auf  $TM$ .  $g^t$  ist genau dann Integralkurve von  $S$  durch  $X_p = \sum \xi_p^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ , wenn

$$\frac{d}{dt} g^t = \dot{g}^t = S(g^t) \text{ und } g^0 = X_p.$$

Setzt man  $\bar{\varphi}(g^t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^m(t), \eta^1(t), \dots, \eta^m(t))$ , so ist dies genau dann der Fall, wenn gilt:

$$\begin{aligned} (\dot{\gamma}^1, \dots, \dot{\gamma}^m, \dot{\eta}^1, \dots, \dot{\eta}^m) &= \left( \eta^1, \dots, \eta^m, -\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^1 \eta^i \eta^j, \dots, -\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^m \eta^i \eta^j \right) \\ \rightsquigarrow \eta^i &= \dot{\gamma}^i \text{ und } \dot{\eta}^i = -\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^i \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \end{aligned}$$

und

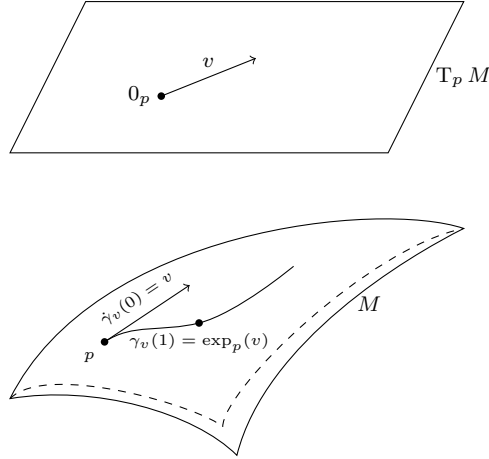
$$(\gamma^1(0), \dots, \gamma^m(0), \eta^1(0), \dots, \eta^m(0)) = \bar{\varphi}(X_p) = (\varphi^1(p), \dots, \varphi^m(p), \xi_p^1, \dots, \xi_p^m)$$

also genau dann, wenn

$$\gamma(t) = \bar{\varphi}^{-1}(\gamma^1(t), \dots, \gamma^m(t))$$

eine Geodätische durch  $p$  mit  $\dot{\gamma}(0) = X_p$  ist. Der maximale Fluss  $g^t$  von  $S$  heißt **geodätischer Fluss**. Mit Satz 4.9 folgt die Aussage der Proposition.  $\square$

<sup>1</sup>Die Äquivalenz zur bereits bekannten Definition wird in Kürze gezeigt.



Für  $v \in T_p M$  sei  $\gamma_v(t) = \pi(g^t(v))$  die eindeutige Geodätische mit  $\gamma_v(0) = p$  und  $\dot{\gamma}_v(0) = v$ . Ist  $\delta \in \mathbb{R}$  und  $c(t) = \gamma_v(\delta t)$ , so ist  $c$  eine Geodätische durch  $p$  mit  $\dot{c}(0) = \delta v$ , das heißt  $c = \gamma_{\delta v}$ , beziehungsweise  $\gamma_{\delta v}(t) = \gamma_v(\delta t)$ .

Der Definitionsbereich  $\mathcal{D}_S$  des geodätischen Flusses ist eine offene Menge in  $\mathbb{R} \times T_p M$  und somit sind sowohl  $\mathcal{D} = \{v \in T M \mid (1, v) \in \mathcal{D}_S\}$ , als auch  $\mathcal{D}_p = \mathcal{D} \cap T_p M$  offen für alle  $p \in M$  (in  $T M$ , beziehungsweise  $T_p M$ ). Weiterhin gilt  $0_p \in \mathcal{D}_p$ .

**Definition 8.3** Die Abbildung  $\exp_p: \mathcal{D}_p \rightarrow M$ ,  $v \mapsto \gamma_v(1)$  heißt **Exponentialabbildung**.

Es wurde bereits gezeigt, dass  $\nabla_t \dot{\gamma}_v \equiv 0$  ist (Geodätische Differentialgleichung). Die Exponentialabbildung ist nach Satz 4.6 glatt. Es gilt  $\exp_p(0_p) = p$ . Zur Berechnung des Differentials von  $\exp_p$  in  $0_p$

$$\exp_{p*0_p}: T_{0_p} T_p M \rightarrow T_p M$$

identifiziert man  $T_{0_p} T_p M$  mit  $T_p M$ . Es gilt

$$\exp_{p*0_p}(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp_p(tv) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_{tv}(1) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_v(t) = \dot{\gamma}_v(0) = v,$$

also  $\exp_{p*0_p} = \text{id}_{T_p M}$ . Es existiert für alle  $p \in M$  eine Umgebung  $V$  von  $0_p \in T_p M$  und  $U$  von  $p$ , so dass  $\exp_p: V \rightarrow U$  ein Diffeomorphismus ist. Wählt man eine Orthonormalbasis  $e_1, \dots, e_m$  von  $T_p M$  und setzt

$$\psi: T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m, v = \sum_i b^i e_i \mapsto (b^1, \dots, b^m),$$

so ist  $(\psi \circ \exp_p|_U^{-1}, U)$  eine Karte von  $M$  um  $p$ . Im Allgemeinen ist dies keine Isometrie!

**Definition 8.4** Diese Karte bezeichnet man als **Riemannsche Normalkoordinaten**.

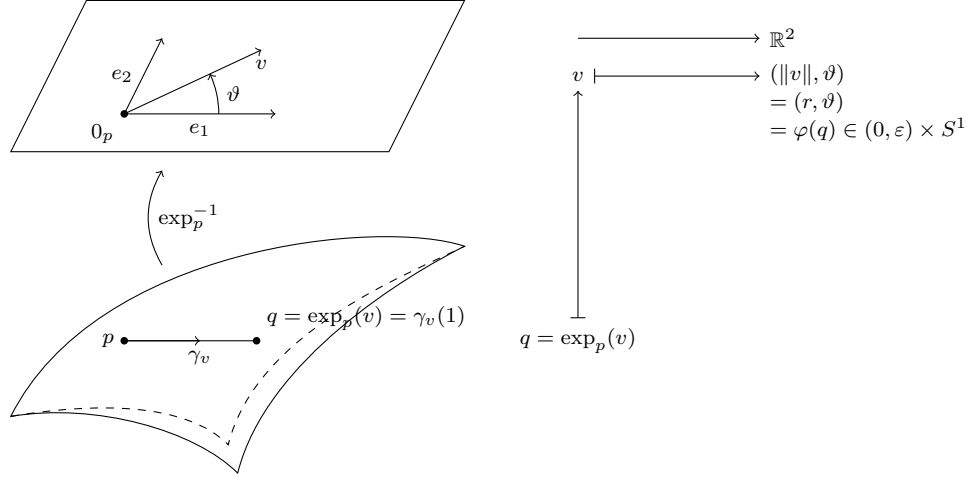
**Proposition 8.5** In Riemannschen Normalkoordinaten gilt für alle  $i, j, k \leq m$ :

- (i)  $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$
- (ii)  $\Gamma_{ij}^k(0) = 0$
- (iii)  $\partial_k g_{ij}(0) = \left. \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right|_0 = 0$

Der Beweis sei zur Übung überlassen.

## 1. Polarkoordinaten

Es ist  $\varphi = (r, \vartheta^1, \dots, \vartheta^{m-1})$  die Hintereinanderausführung von Riemannschen Normalkoordinaten des  $\mathbb{R}^m$ .



Die Umkehrabbildung ist ein Diffeomorphismus

$$f: (0, \varepsilon) \times S^{m-1} \rightarrow U \subseteq M, (t, v) \mapsto \exp_p(tv) = \gamma_v(t).$$

Für jedes  $v \in S^{m-1}$  ist  $t \mapsto f(t, v) = \gamma_v(t)$  eine Geodätische in  $M$ . Wir bezeichnen solche Geodätischen im Folgenden als **radiale Geodätische**.

**Lemma 8.6 (Gauß-Lemma)** *Jede radiale Geodätische  $\gamma_v$  ist orthogonal zu der geodätischen Sphäre*

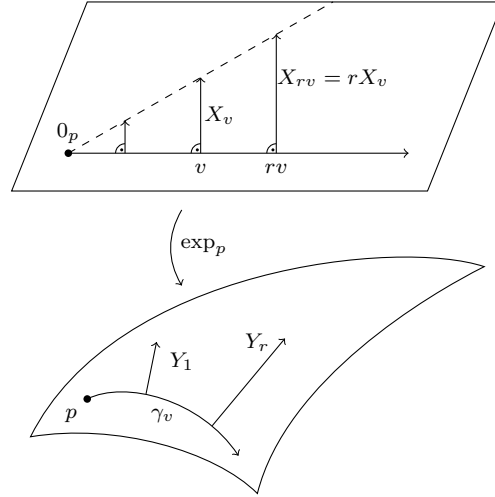
$$S_r = \{q \in M \mid \exists v \in T_p M : \|v\| = r \text{ und } q = \exp_p(v)\}.$$

**Beweis** Man zeigt das Folgende: Ist  $X$  ein Vektorfeld auf  $S^{m-1}$  und bezeichnet man seine Fortsetzung auf  $(0, \varepsilon) \times S^{m-1}$  „ $\subseteq \mathbb{B}_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$  bzw.  $\mathbb{B}_\varepsilon(0_p) \setminus \{0_p\} \subseteq T_p M$  mit  $X_{rv} = X_v$ , so ist

$$Y_q = Y_{f(r,v)} = f_{*(r,v)}(0, X_v) = \exp_{p*}(rX_v)$$

orthogonal zu

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_q = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=r} \exp_p(tv) = \dot{\gamma}_v(r)$$



$Y(t) = Y_{\gamma_v(t)}$  als Vektorfeld entlang  $\gamma_v$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=r} \left\langle Y, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle_{\gamma_v(t)} &= \langle \nabla_t Y|_r, \dot{\gamma}_v(r) \rangle + \langle Y(r), \underbrace{\nabla_t \dot{\gamma}_v|_r}_{=0} \rangle \\ &= \langle \nabla_{Y(r)} \dot{\gamma}_v(r), \dot{\gamma}_v(r) \rangle + \langle \underbrace{[\dot{\gamma}_v(r), Y(r)]}_{=[f_* (\frac{\partial}{\partial r}), f_*(0, X_v)]} , \dot{\gamma}_v(r) \rangle \\ &= \frac{1}{2} Y(t) \|\dot{\gamma}_v\|^2 = 0. \end{aligned} \quad \begin{aligned} &= f_* [\frac{\partial}{\partial r}, X] = 0 \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\left\langle Y(r), \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle_{\gamma_v(r)} = \left\langle \exp_{p*}(r X_v), \dot{\gamma}_v(r) \right\rangle \xrightarrow{r \rightarrow 0} \left\langle \exp_{p*}(0_p), v \right\rangle = 0,$$

also  $\left\langle Y, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle \equiv 0$ . □

**Bemerkung** Insbesondere gilt für alle  $i \leq m-1$ :

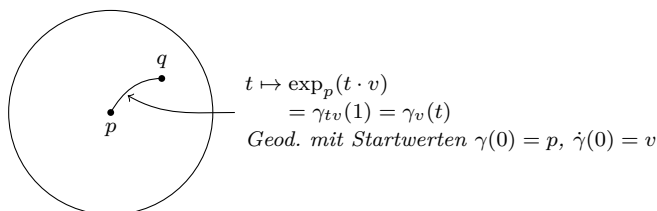
$$\left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \vartheta^i} \right\rangle = 0.$$

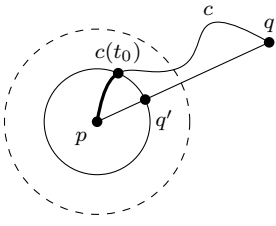
**Satz 8.7** Für jedes  $p \in M$  existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so dass für alle  $q \in \mathbb{B}_\varepsilon(p)$  genau eine minimierende Geodätische von  $p$  nach  $q$  existiert, das heißt eine Geodätische  $\gamma$  im Sinne der Definition 8.1 mit  $\mathcal{L}(\gamma) = d(p, q)$ . Ist  $q \notin \exp_p(\mathbb{B}_\varepsilon(0_p)) = \mathbb{B}_\varepsilon(p)$ , so existiert ein  $q' \in \partial \mathbb{B}_\varepsilon(p)$  mit

$$d(p, q) = \varepsilon + d(q', q).$$

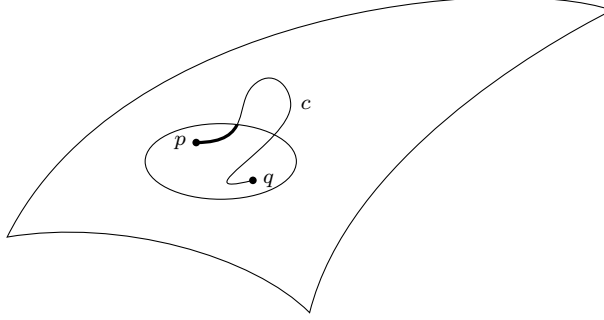
Ferner, ist  $\delta < \varepsilon$  und  $q \notin \mathbb{B}_\delta(p)$ , so existiert ein  $q' \in \mathbb{B}_\delta(q)$  mit

$$d(p, q) = \delta + d(q', q)$$





**Beweis** Es sei  $\varepsilon > 0$  so, dass auf  $\mathbb{B}_\varepsilon(p)$  Polarkoordinaten  $\varphi = (r, \vartheta^1, \dots, \vartheta^{m-1})$  existieren. Sei weiter  $c: [0, 1] \rightarrow M$  eine beliebige glatte Kurve von  $p$  nach  $q$  mit Koordinaten  $\varphi(c(t)) = (r(t), \vartheta^1(t), \dots, \vartheta^{m-1}(t))$ .



Das Bild von  $c$  ist nicht notwendig in  $\mathbb{B}_\varepsilon(0)$  enthalten

Für  $t_0 = \inf\{t \in [0, 1] \mid c(t) \notin \mathbb{B}_\varepsilon(p)\}$  ist  $c|_{[0, t_0]}$  eine Kurve zu  $\mathbb{B}_\varepsilon(p)$ . Es gilt

$$\left\| \frac{\partial}{\partial r} \Big|_t \right\| = \|\dot{\gamma}_w(t)\| = \|w\| = 1.$$

Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} \|\dot{c}(t)\| &= \|\dot{c}(t)\| \left\| \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{c(t)} \right\| \\ &\geq \left| \left\langle \dot{c}(t), \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{c(t)} \right\rangle \right| \\ &= \left| \left\langle \dot{r}(t) \frac{\partial}{\partial r} + \sum_{i=1}^{m-1} \dot{\vartheta}^i(t) \frac{\partial}{\partial \vartheta^i}, \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{c(t)} \right\rangle \right| \\ &= \left| \left\langle \dot{r}(t) \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{c(t)}, \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{c(t)} \right\rangle \right| \\ &= |\dot{r}(t)|, \end{aligned}$$

wobei die Gleichheit genau dann gilt, wenn  $\dot{c}(t)$  und  $\frac{\partial}{\partial r} \Big|_{c(t)}$  linear abhängig sind.

$$\mathcal{L}(c) = \int_0^{t_0} \|\dot{c}\| + \int_{t_0}^T \|\dot{c}\| \geq \int_0^{t_0} \left| \left\langle \dot{c}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle \right| = \int_0^{t_0} |\dot{r}| = r(t_0)$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn  $\vartheta^1(t), \dots, \vartheta^{m-1}(t)$  konstant sind und  $\dot{r}(t) \geq 0$  gilt, also genau dann, wenn  $c$  eine monotone Umparametrisierung von  $t \mapsto \exp_p(tv)$  für  $v \in S^{m-1}$  ist.

Für den zweiten Teil sei  $\varepsilon$  so, dass Polarkoordinaten  $\varphi = (r, \vartheta^1, \dots, \vartheta^{m-1})$  um  $p$  existieren. Es sei  $q \in \mathbb{B}_\delta(p)$  und  $c$  sei eine glatte Kurve von  $p$  nach  $q$ . Für  $t_0 = \inf\{t \in [0, 1] \mid c(t) \notin \mathbb{B}_\delta(p)\}$  gilt dann:

$$\mathcal{L}(c) \geq \delta + d(c(t_0), q) \geq \delta + d(\partial \mathbb{B}_\delta(p), q),$$

also  $d(p, q) = \inf_c \mathcal{L}(c) \geq \delta + d(\partial \mathbb{B}_\delta(p), q)$ . Da  $\partial \mathbb{B}_\delta(p)$  kompakt ist, die Abstandsfunktion  $d(\cdot, q)$  auf  $\partial \mathbb{B}_\delta(p)$  ihr Minimum in  $q'$  an. Damit gilt

$$\begin{aligned} d(q', q) &= d(\partial \mathbb{B}_\delta(p), q) \quad \text{und} \\ d(p, q) &= d(p, q') + d(q', q) = \delta + d(q', q) \end{aligned}$$

somit gilt dann die Behauptung.  $\square$



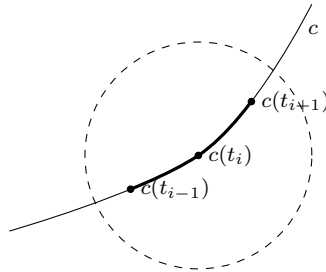
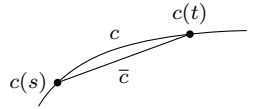
**Korollar 8.8** Für alle  $p \in M$  existiert ein  $\varrho > 0$ , so dass für alle  $q, q' \in \mathbb{B}_\varrho(p)$  genau eine minimierende Geodätische von  $q$  nach  $q'$  existiert.

**Beweis** Für  $q \in M$  existiert ein  $\varrho = \varrho(q) > 0$ , so dass  $\exp$  auf  $\mathbb{B}_\varrho(q)$  ein Diffeomorphismus ist. Da  $\exp : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  glatt und  $\mathcal{D}$  offen ist, existiert eine Umgebung  $U_q$  von  $q$ , so dass  $\exp_p : \mathbb{B}_{\frac{\varrho}{2}}(0_q) \rightarrow \mathbb{B}_{\frac{\varrho}{2}}(q')$  ein Diffeomorphismus ist für alle  $q' \in U_q$ . Für  $p \in M$  existiert nach Satz 8.7 ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $\overline{\mathbb{B}_\varepsilon(p)}$  kompakt ist. Die Überdeckung  $\bigcup_{q \in \overline{\mathbb{B}_\varepsilon(p)}} \mathbb{B}_{\frac{\varrho(q)}{2}}(q)$  besitzt eine endliche Teilüberdeckung. Für  $\varrho = \min_{i \leq k} \{\frac{\varrho(q_i)}{4}\}$  existieren auf jedem  $\mathbb{B}_{2\varrho}(q)$ ,  $q \in \overline{\mathbb{B}_\varepsilon(p)}$ , Polarkoordinaten; insbesondere existiert für  $q, q' \in \mathbb{B}_\varrho(p)$  eine eindeutige minimierende Geodätische von  $q$  nach  $q'$ .  $\square$

**Bemerkung** Die Geodätischen im obigen Korollar hängen stetig von ihren Endpunkten ab.

**Korollar 8.9** Es seien  $p, q \in M$  und  $c : [0, 1] \rightarrow M$  stückweise glatte Kurven von  $p$  nach  $q$ , so dass  $\mathcal{L}(c) = d(p, q)$ . Damit ist  $c$  eine umparametrisierte Geodätische im Sinne von Definition 8.1.

**Beweis** Die Kurve ist lokal längenminimierend, denn ist  $\bar{c}$  eine Kurve von  $c(s)$  nach  $c(t)$  mit  $\mathcal{L}(\bar{c}) < \mathcal{L}(c|_{[s,t]})$ , so wäre  $c|_{[0,s]} \cup \bar{c} \cup c|_{[t,1]}$  eine Kurve kürzer als  $c$ . Da  $c$  kompaktes Bild hat, existiert ein minimales  $\varrho > 0$  für alle  $c(t)$  wie in Korollar 8.8. Dann findet man eine Partition  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$  mit  $d(c(t_{i-1}), c(t_i)) < \frac{\varrho}{2}$ , so dass  $c|_{[t_{i-1}, t_{i+1}]}$  glatt ist.



Dann stimmt  $c|_{[t_{i-1}, t_{i+1}]}$  für jedes  $i < k$  mit der nach Korollar 8.8 eindeutigen Geodätischen (bis auf Umparametrisierung) überein.  $\square$

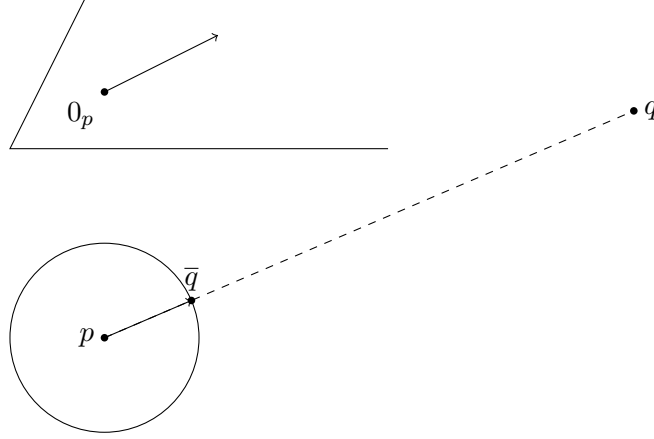
**Definition 8.10** Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit heißt **geodätisch vollständig**, wenn jede Geodätische auf ganz  $\mathbb{R}$  fortgesetzt werden kann.

**Satz 8.11 (Satz von Hopf-Rinow)** Für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i)  $M$  ist geodätisch vollständig, das heißt jede Geodätische existiert für alle Zeiten.
- (ii) Für alle  $p \in M$  gilt  $\mathcal{D}_p = T_p M$ , also  $\exp$  ist auf ganz  $M$  definiert.
- (iii) Es existiert ein  $p \in M$  mit  $\mathcal{D}_p = T_p M$ , also  $\exp_p$  ist auf  $T_p M$  für ein  $p \in M$  definiert.
- (iv) Abgeschlossene und beschränkte Teilmengen sind kompakt.
- (v)  $M$  ist vollständig (als metrischer Raum).

Jede dieser Eigenschaften impliziert, dass je zwei Punkte  $p, q$  in  $M$  durch eine minimierende Geodätische von  $p$  nach  $q$  verbunden werden können.

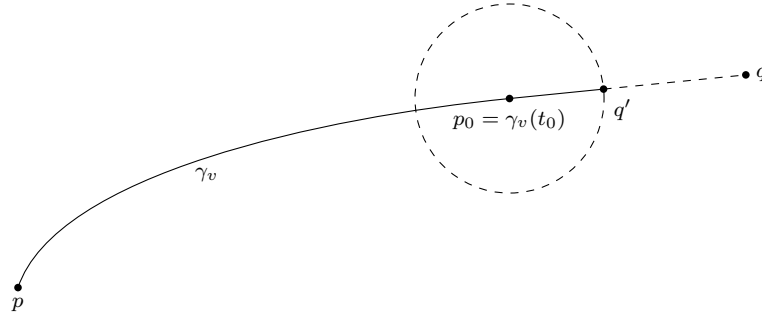
**Beweis** Man zeigt zunächst, dass es, falls (iii) für  $p \in M$  gilt, zu jedem  $q \in M$  eine minimierende Geodätische von  $p$  nach  $q$  gibt. Es gelte  $\mathcal{D}_p = T_p M$  und es sei  $q \in M$ .



Für  $\varepsilon > 0$  wie in Satz 8.7 ist  $\partial \mathbb{B}_{\frac{\varepsilon}{2}}(p)$  kompakt; es sei  $\bar{q} \in \partial \mathbb{B}_{\frac{\varepsilon}{2}}(p)$  ein Punkt minimalen Abstandes zu  $q$ . Dann gilt  $\bar{q} = \exp_p(\frac{\varepsilon}{2}v)$  für ein  $v \in T_p M$  mit  $\|v\| = 1$ .

*Behauptung:* Dann ist  $\gamma_v|_{[0, R]} : t \mapsto \exp_p(tv)$  minimierende Geodätische nach  $q$  für  $R = d(p, q)$ .

Es sei  $\mathcal{I} = \{t \in [0, R] \mid d(\gamma_v(t), q) = R - t\}$ . Dann ist  $\mathcal{I}$  nichtleer und abgeschlossen, denn  $t \mapsto d(\gamma_v(t), q) + t$  ist stetig.



Für  $t_0 \in \mathcal{I}$  und  $0 < \varrho < \varepsilon_0$  sei  $q' \in \partial \mathbb{B}_{\varrho}(\gamma_v(t_0))$  wie in Satz 8.7 angewandt auf  $p_0 = \gamma_v(t_0)$ . Dann gilt  $d(p_0, q) = \varrho + d(q', q)$  und es folgt:

$$\begin{aligned} d(p, q') &\geq d(p, q) - d(q', q) \\ &= d(p, q) - d(p_0, q) + \varrho \\ &= R - (R - t) + \varrho = t_0 + \varrho \end{aligned}$$

Damit ist die Verkettung von  $\gamma_v|_{[0, t_v]}$  und der minimalen Geodätischen von  $p_0$  nach  $q'$  nach Korollar 8.9 eine Geodätische. Aus der Eindeutigkeit von kurzen Geodätischen folgt, dass diese Zusammensetzung mit  $\gamma_v$  übereinstimmt. Es gilt also  $q' = \gamma_v(t_0 + \varrho)$  und mit  $d(\gamma_v(t_0 + \varrho), q) = d(p_0, q) - \varrho = R - (t_0 + \varrho)$  gilt  $t_0 + \varrho \in \mathcal{I}$ .

Wir können nun die einzelnen Implikationen zeigen. Dabei gelten (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (iii) offensichtlich.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv): Es gelte  $\mathcal{D}_p = T_p M$  und es sei  $K \subseteq M$  abgeschlossen und beschränkt.

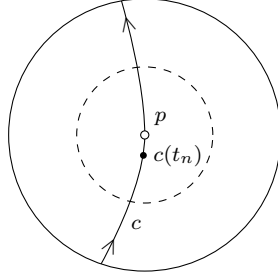
Dann existiert  $R$  mit  $K \subseteq \overline{B}_R(p)$ . Da  $\overline{B}_R(0_p)$  kompakt ist, ist auch  $K$  kompakt.

(iv)  $\Rightarrow$  (v): gilt offensichtlich

(v)  $\Rightarrow$  (i): Es sei  $c$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische mit maximalem Definitionsintervall  $\mathcal{I}$ .  $\mathcal{I}$  ist nichtleer und offen. Ist  $(t_n)$  eine Folge in  $\mathcal{I}$  mit Grenzwert  $t$ . Dann ist  $q_n = c(t_n)$  wegen

$$d(c(t_n), c(t_m)) \leq |t_m - t_n|$$

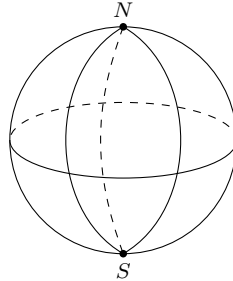
eine Cauchy-Folge und konvergiert somit gegen ein  $p \in M$ .



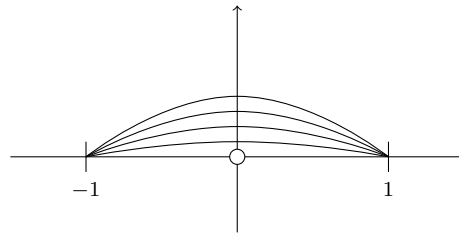
Es sei  $\rho > 0$  wie in Korollar 8.8. Für hinreichend großes  $n$  gilt dann  $|t_n - t| < \frac{\rho}{2}$ . Die nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische von  $q_n = c(t_n)$  mit Startvektor  $\dot{c}(t_n)$  existiert auf  $(-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2})$ , setzt also  $c$  bis zum Zeitpunkt  $|t_n| + \frac{\rho}{2} > |t|$  fort.  $\square$

**Bemerkungen/Beispiele** (1) Geodätische sind im Allgemeinen nicht eindeutig.

Betrachte die Einheitssphäre mit Geodätischen vom Nord- zum Südpol:



(2)  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$



(3)  $B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2$  ist geodätisch konvex aber nicht vollständig.

**Korollar 8.12** Es seien  $M$  eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $c$  eine Geodätische. Dann gilt:

(i)  $c$  ist lokal längenminimierend.

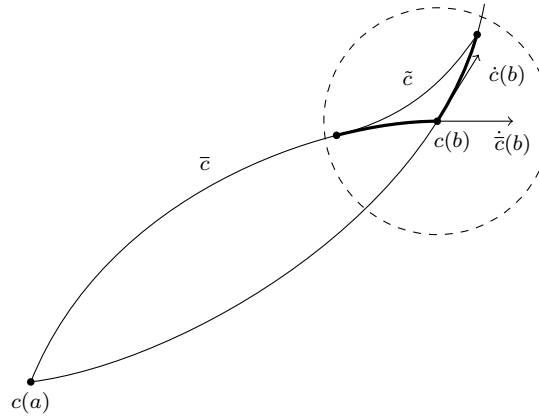
(ii) Falls es keine kürzere Geodätische von  $c(a)$  nach  $c(b)$  gibt, so ist  $c|_{[a,b]}$  minimal.

(iii) Falls es eine weitere Geodätische  $\bar{c}$  von  $c(a)$  nach  $c(b)$  mit  $\mathcal{L}(\bar{c}) = \mathcal{L}(c|_{[a,b]})$  gibt, so ist  $c|_{[a,b+\varepsilon]}$  für kein  $\varepsilon$  minimierend.

**Beweis** (i) Siehe Korollar 8.9.

(ii) Nach dem Satz von Hopf-Rinow existiert eine minimale Geodätische von  $c(a)$  nach  $c(b)$ . Ist  $c$  also die Kürzeste von  $c(a)$  nach  $c(b)$ , so ist  $c$  auch minimierend.

(iii) Ist  $\bar{c}$  eine weitere Geodätische von  $c(a)$  nach  $c(b)$ , so gilt  $\dot{c}(b) \neq \dot{\bar{c}}(b)$ .



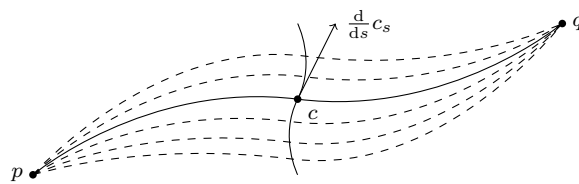
Die zusammengesetzte Kurve kann keine Geodätische sein, da die Tangentialvektoren nicht übereinstimmen.

Für hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$  existiert dann nach Satz 8.7 eine minimierende Geodätische  $\tilde{c}$  von  $\bar{c}(b - \varepsilon)$  nach  $c(b + \varepsilon)$ . Die Länge von  $\bar{c}|_{[a, b-\varepsilon]} \cup \tilde{c}$  ist strikt kleiner als die Länge von  $c|_{[a, b+\varepsilon]}$ . Damit ist  $c|_{[a, b+\varepsilon]}$  nicht minimierend.  $\square$

# Kapitel 9.

## Jacobifelder

Für  $p, q \in M$  sei  $\Omega_{pq}$  der Raum aller glatten Kurven  $c : [0, 1] \rightarrow M$  mit  $c(0) = p$  und  $c(1) = q$ .



**Definition 9.1** Eine (*glatte*) **Variation** einer glatten Kurve  $c : [a, b] \rightarrow M$  ist eine glatte Abbildung

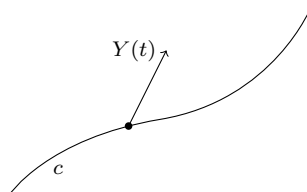
$$h : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M \quad h_s(t) = h(s, t)$$

mit  $h_0 = c$ . Gilt  $h(\cdot, a) \equiv c(a)$  und  $h(\cdot, b) \equiv c(b)$ , so heißt  $h$  eine **Variation mit festen Endpunkten** oder **eigentliche Variation**. Man schreibt  $c_s$  für eine Variation  $h$  von  $c$ .

Ist  $c_s$  eine glatte Variation von  $c$ , so ist

$$\begin{aligned} Y(t) &:= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} c_s(t) \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} h(s, t) = h_{*(0,t)} \left( \frac{\partial}{\partial s} \right) \end{aligned}$$

ein Vektorfeld entlang  $c$ . Ist  $c_s$  eigentlich, so gilt  $Y(a) = 0 \in T_{c(a)} M$  und  $Y(b) = 0 \in T_{c(b)} M$ .



Tatsächlich ist jedes Vektorfeld ein solches Variationsfeld einer Variation von  $c$ : Ist  $Y$  ein Vektorfeld entlang  $c$ , so definiert  $h(s, t) = \exp_{c(t)}(sY(t))$  eine Variation von  $c$  und es gilt:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} h(s, t) &= \exp_{c(t)*0}(Y(t)) \\ &= \text{id}_{T_{c(t)} M}(Y(t)) = Y(t). \end{aligned}$$

Falls  $Y$  in den Endpunkten von  $c$  verschwindet, so ist die so definierte Variation eigentlich. Bestimme  $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} E(c_s)$  und  $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \mathcal{L}(c_s)$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \langle \dot{c}_s, \dot{c}_s \rangle &= \langle \nabla_s \dot{c}(s), \dot{c}(s) \rangle \\ &= \left\langle \nabla_s \frac{d}{dt} c_s, \dot{c}(s) \right\rangle = \left\langle \nabla_t \frac{d}{ds} c_s, \dot{c}_s \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} c_s, \dot{c}_s \right\rangle' - \left\langle \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} c_s, \nabla_t \dot{c}_s \right\rangle \\ &= \langle Y, \dot{c} \rangle' - \langle Y, \nabla_t \dot{c} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{s=0} \|\dot{c}_s\| &= \frac{1}{2\|\dot{c}_s\|} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \langle \dot{c}_s, \dot{c}_s \rangle \\ &= \frac{\langle Y, \dot{c} \rangle' - \langle Y, \nabla_t \dot{c} \rangle}{\|\dot{c}\|} \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} E(c_s) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \int_a^b \frac{1}{2} \|\dot{c}_s\|^2 = \langle Y, \dot{c} \rangle|_a^b - \int_a^b \langle Y, \nabla_t \dot{c} \rangle$$

Betrachte  $E : \Omega_{pq} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist  $c \in \Omega_{pq}$  genau dann eine Geodätische, wenn  $c$  ein kritischer Punkt von  $E$  ist, das heißt  $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} E(c_s) = 0$  für jede eigentliche Variation von  $c$ . Ist  $c$  ein kritischer Punkt von  $E$ , so sei  $c_s$  die von  $Y = f \nabla_t \dot{c}$  mit  $f(0) = 0 = f(1)$  erzeugte Variation. Dann ist  $c_s$  eigentlich und es gilt

$$0 = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} E(c_s) = - \int_a^b f \|\nabla_t \dot{c}\|^2$$

also  $\nabla_t \dot{c} = 0$ . Ist  $c$  nach der Bogenlänge parametrisiert, so gilt

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \mathcal{L}(c_s) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} E(c_s)$$

Eine Kurve  $c \in \Omega_{pq}$  ist genau dann ein kritischer Punkt von  $\mathcal{L}$ , wenn  $c$  eine umparametrisierte Geodätische ist.

## 1. Ausblick: Hesse & Morse - Theorie

Sei  $f \in C^\infty(M)$ , sei nach Konvention  $\nabla_X f = X(f) = df(X)$ , und  $\nabla f = df \in \Omega^1(M) = \Gamma(TM^*)$ . Für die Hessesche  $H_f = \nabla^2 f$  gilt nach Proposition 7.3:

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(X, Y) &= (\nabla_X df)(Y) = X(df(Y)) - df(\nabla_X Y) \\ &= X(Yf) - (\nabla_X Y)(f) \quad (= \nabla_{X,Y}^2 \text{ in Kapitel 7}) \\ &= [X, Y]f + Y(Xf) - \underbrace{(\nabla_X Y - \nabla_Y X)f}_{[X,Y] \text{ Torsionsfreiheit}} - (\nabla_Y X)f \\ &= Y(Xf) - (\nabla_Y X)(f) = \nabla^2 f(Y, X) = H_f(Y, X) \end{aligned}$$

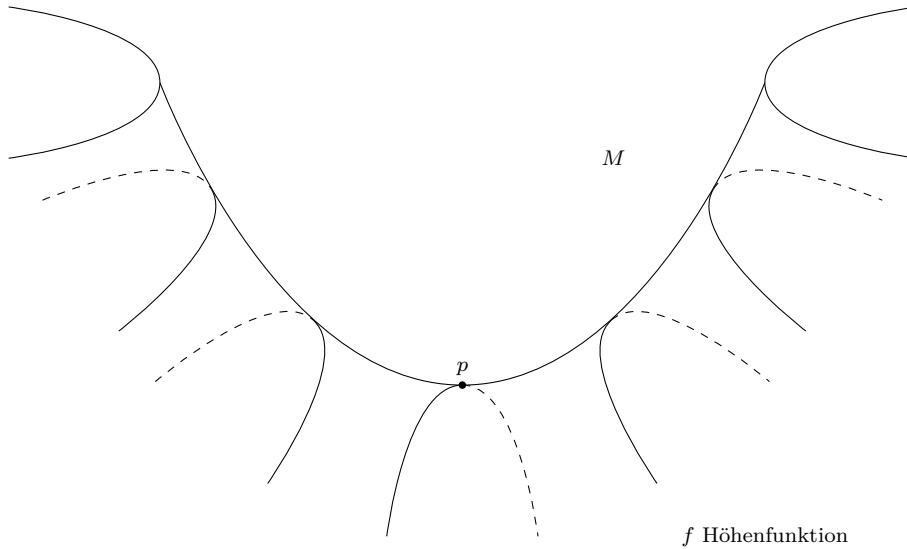
Die Hessesche ist also eine symmetrische  $\mathbb{R}$ -Bilinearform  $H_f : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ . Sie ist im Allgemeinen *nicht*  $C^\infty(M)$ -bilinear. Ist  $p \in M$  ein kritischer Punkt von  $f$ , das heißt  $df|_p = 0$ , dann hängt  $H_f|_p$  nur von  $\xi = X_p$  und  $\eta = Y_p$  ab: Ist  $\tilde{X}$  ein Vektorfeld mit  $\tilde{X}_p = \xi = X_p$ , so gilt:

$$\begin{aligned} H_f|_p(\tilde{X}, Y) &= \tilde{X}_p(Yf) - \underbrace{df|_p(\nabla_{\tilde{X}} Y)}_{=0} = \tilde{X}_p(Yf) = \xi(Yf) \\ &= X_p(Yf) = \dots = H_f|_p(X, Y) \end{aligned}$$

$H_f|_p$  ist eine Bilinearform auf  $T_p M$ . Insbesondere hängt  $H_f|_p$  nur von der differenzierbaren Struktur von  $M$  und *nicht* von der Riemannschen Struktur ab. Ist  $H_f$  nicht ausgeartet, so heißt die Anzahl der negativen Eigenwerte der **Index** von  $f$  in  $p$ . Ist  $v \in T_p M$  der Eigenvektor zu einem negativen Eigenwert  $k$  und  $\gamma$  eine Kurve mit  $\gamma(0) = p$  und  $\dot{\gamma}(0) = v$ . Dann gilt

$$0 > \lambda \|v\|^2 = H_f|_p(v, v) = v((f \circ \gamma)') = \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} f(\gamma(t))$$

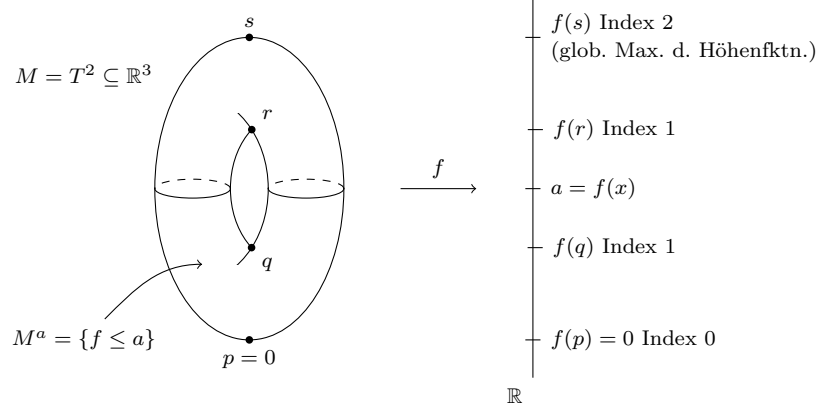
Entlang der Kurve  $\gamma$  nimmt  $f$  also ein striktes Maximum an.



Tatsächlich ist jeder nicht ausgeartete kritische Punkt von solcher Gestalt.

**Morse-Lemma** Es sei  $p \in M$  ein nicht ausgearteter kritischer Punkt von  $f \in C^\infty(M)$  mit Index  $\alpha$ . Dann existiert eine Karte  $(\varphi, U)$  um  $p$  mit  $\varphi(p) = 0$  und  $f = f(p) - (\varphi^1)^2 - (\varphi^2)^2 - \dots - (\varphi^\alpha)^2 + (\varphi^{\alpha+1})^2 + \dots + (\varphi^m)^2$ .

## Morse-Theorie



Die Topologien von  $M^a$  und  $M^b$  sind identisch, wenn zwischen  $a$  und  $b$  keine kritischen Werte auftreten. „Rekonstruktion“: Klebe sukzessive für die nicht ausgearteten kritischen Punkte  $p$  Zellen der Dimension  $\text{Ind}_f(p)$ , das heißt  $\mathbb{B}_1(0) \subseteq \mathbb{R}^{\text{Ind}_f(p)}$ .

Auf jeder glatten Mannigfaltigkeit existiert eine sogenannte **Morse-Funktion**, das heißt eine Funktion mit isolierten kritischen Punkten, die alle nicht entartet sind und für die  $f^{-1}([a, b])$  kompakt ist. Ist  $f(p) = a$  ein kritischer Wert, so unterscheiden sich  $M^{a-\varepsilon}$  und  $M^{a+\varepsilon}$  durch das Ankleben einer  $\text{Ind}_f(p)$ -Zelle.

Weitere Informationen zu diesem Thema lassen sich im Buch „Morse Theory“ von J. Milnor [6] finden.

## 2. Zweite Ableitung des Energiefunktional (in kritischen Punkten)

Es sei  $c$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische,  $c_s$  eine Variation von  $c$  und  $Y(t) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} c_s(t)$ . Dann gelten die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 E(c_s) &= \frac{1}{2} \int_0^{\mathcal{L}} \|\dot{c}_s\|^2 \\
 \frac{d}{ds} \langle \dot{c}_s, \dot{c}_s \rangle &= 2 \langle \nabla_s \dot{c}_s, \dot{c}_s \rangle \\
 &= 2 \left\langle \nabla_t \frac{d}{ds} c_s, \dot{c}_s \right\rangle \\
 \frac{d^2}{ds^2} \langle \dot{c}_s, \dot{c}_s \rangle &= 2 \left\langle \nabla_s \nabla_t \frac{d}{ds} c_s, \dot{c}_s \right\rangle + 2 \left\langle \nabla_t \frac{d}{ds} c_s, \nabla_s \dot{c}_s \right\rangle \\
 &= 2 \left\langle \nabla_s \nabla_t \frac{d}{ds} c_s, \dot{c}_s \right\rangle + 2 \left\| \nabla_t \frac{d}{ds} c_s \right\|^2 \\
 \nabla_s \nabla_t \frac{d}{ds} c_s &= \nabla_t \nabla_s \frac{d}{ds} c_s + R \left( \underbrace{\frac{d}{ds} c_s, \frac{d}{dt} c_s}_{s=0: Y(t)} \right) \frac{d}{ds} c_s
 \end{aligned}$$

Zur Übersichtlichkeit setzen wir nun  $\nabla_t Y =: Y'$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} \langle \dot{c}_s, \dot{c}_s \rangle &= \left\langle \nabla_t \nabla_s \frac{d}{ds} c_s, \dot{c}_s \right\rangle + \langle R(Y, \dot{c}) Y, \dot{c} \rangle + \|\nabla_t Y\|^2 \\
 &= \left\langle \nabla_s \frac{d}{ds} c_s, \dot{c} \right\rangle' - \langle R(Y, \dot{c}) \dot{c}, Y \rangle + \|Y'\|^2
 \end{aligned}$$



$$\frac{d^2}{ds^2} E(c_s) = \left\langle \nabla_s \frac{d}{ds} c_s, \dot{c}_s \right\rangle \Big|_0^{\mathcal{L}} + \int_0^{\mathcal{L}} \|Y'\|^2 - \langle R(Y, \dot{c}) \dot{c}, Y \rangle$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} \|\dot{c}_s\| &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \left( \frac{1}{2\|\dot{c}_s\|} \frac{d}{ds} \|\dot{c}_s\|^2 \right) \\ &= -\frac{1}{4} \left( \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \|\dot{c}_s\|^2 \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} \|\dot{c}_s\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} \mathcal{L}(c_s) &= \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} E(c_s) - \frac{1}{4} \int \left( \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \|\dot{c}_s\|^2 \right)^2 \\ &= \left\langle \nabla_s \frac{d}{ds} c_s, \dot{c}_s \right\rangle \Big|_0^{\mathcal{L}} + \int_0^{\mathcal{L}} \|Y'\|^2 - \langle R(Y, \dot{c}) \dot{c}, Y \rangle - (\langle Y', \dot{c} \rangle)^2 \end{aligned}$$

Bezeichnet  $Y^\perp = Y - \langle \dot{c}, Y \rangle \dot{c}$  den Normalenanteil von  $Y$  bezüglich  $\dot{c}$ , so gilt:

$$\begin{aligned} Y^{\perp'} &= Y' - \langle \nabla_t \dot{c}, Y \rangle \dot{c} - \langle \dot{c}, Y' \rangle \dot{c} - \langle \dot{c}, Y \rangle \nabla_t \dot{c} \\ &= Y' - \langle \dot{c}, Y' \rangle \dot{c} = (Y')^\perp \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|Y'^\perp\| - \langle R(Y^\perp, \dot{c}) \dot{c}, Y^\perp \rangle &= \langle Y' - \langle \dot{c}, Y' \rangle \dot{c}, Y' - \langle \dot{c}, Y' \rangle \dot{c} \rangle - \langle R(Y, \dot{c}) \dot{c}, Y \rangle \\ &\quad + \langle R(Y, \dot{c}) \dot{c}, \langle \dot{c}, Y \rangle \dot{c} \rangle \\ &\quad + \langle R(\langle \dot{c}, Y \rangle \dot{c}, \dot{c}) \dot{c}, Y - \langle \dot{c}, Y' \rangle \dot{c} \rangle \\ &= \|Y'\|^2 - \langle R(Y, \dot{c}) \dot{c}, Y \rangle - (\langle Y', \dot{c} \rangle)^2 \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} \mathcal{L}(c_s) = \left\langle \nabla_s \frac{d}{ds} c_s, \dot{c} \right\rangle \Big|_0^{\mathcal{L}} + \int_0^{\mathcal{L}} \|Y'^\perp\|^2 - \langle R(Y^\perp, \dot{c}) \dot{c}, Y^\perp \rangle$$

**Erinnerung** Für eine glatte Funktion  $f$  auf  $M$  gilt in kritischen Punkten  $p$ :

$$H_f(v, v) = \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} f(\gamma(t))$$

mit  $\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = v$ . Diese Eigenschaft verwenden wir in der folgenden Definition als Ausgangspunkt.

**Definition 9.2** Es sei  $Y$  ein Vektorfeld entlang einer nach Bogenlänge parametrisierte geodätische Kurve  $c$  und  $c_s$  die von  $Y$  erzeugte Variation. Die durch

$$\mathcal{I}(Y, Y) = \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} E(c_s)$$

auf dem Vektorraum der Vektorfelder entlang  $c$  definierte symmetrische Bilinearform heißt die **Indexform** von  $c$ .

Sind  $X, Y$  Vektorfelder entlang  $c$ , welche in den Endpunkten verschwinden, so gilt

$$\mathcal{I}(X, Y) = - \int_0^{\mathcal{L}} \langle X'' + R(X, \dot{c}) \dot{c}, Y \rangle$$

denn bezeichnet  $c_s$  die von  $Y$  erzeugte eigentliche Variation, so gilt

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} E(c_s) &= \left\langle \nabla_s \frac{d}{ds} c_s, \dot{c} \right\rangle \Big|_0^{\mathcal{L}} + \int_0^{\mathcal{L}} \|Y'\|^2 - \langle R(Y, \dot{c}) \dot{c}, Y \rangle \\ &= \int_0^{\mathcal{L}} \langle Y', Y \rangle' - \langle Y'', Y \rangle - \langle R(Y, \dot{c}) \dot{c}, Y \rangle \\ &= \langle Y', Y \rangle \Big|_0^{\mathcal{L}} - \int_0^{\mathcal{L}} \langle Y'', Y \rangle + \langle R(Y, \dot{c}) \dot{c}, Y \rangle \\ &= - \int_0^{\mathcal{L}} \langle Y'' + R(Y, \dot{c}) \dot{c}, Y \rangle. \end{aligned}$$

Die Indexform um eine Geodätische  $c$  ist genau dann ausgeartet, wenn ein in den Endpunkten verschwindendes Vektorfeld entlang  $c$  existiert mit

$$Y'' + R(Y, \dot{c}) \dot{c} \equiv 0. \quad (9.1)$$

**Definition 9.3** Ein Vektorfeld entlang einer Geodätischen  $c$  heißt **Jacobifeld**, wenn es die obige Differentialgleichung (9.1) erfüllt.

**Lemma 9.4** Es sei  $c: [0, 1] \rightarrow M$  eine Geodätische,  $p = c(0)$ . Dann existiert für alle  $v, w \in T_p M$  genau ein Jacobifeld  $\mathcal{J}$  entlang  $c$  mit  $\mathcal{J}(0) = v$ ,  $\mathcal{J}'(0) = w$ .

**Beweis** Es sei  $e_1, \dots, e_m \in T_p M$  eine Orthonormalbasis des Tangentialraums in  $p$  und es bezeichnen  $E_1, \dots, E_m$  die entlang  $c$  parallelen Vektorfelder mit  $E_i(0) = e_i$ . Dann ist jedes Vektorfeld  $Y$  entlang  $c$  von der Form  $Y = \sum_i \eta^i E_i$  und es gilt:

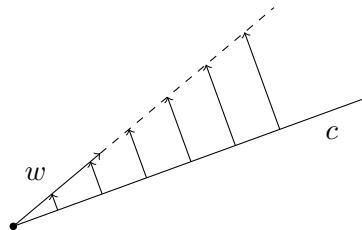
$$Y' = \sum_i (\dot{\eta}^i E_i + \eta^i \nabla_t E_i) = \sum_i \dot{\eta}^i E_i$$

sowie  $Y'' = \sum \ddot{\eta}^i E_i$ . Setzt man  $R(E_j, \dot{c}) \dot{c} = \sum_i \varrho_j^i E_i$ , so ist (9.1) zum System linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\ddot{\eta}^i + \sum_j \eta^j \varrho_j^i = 0.$$

Existenz und Eindeutigkeit folgen mit der Lösungstheorie gewöhnlicher Differentialgleichungen.  $\square$

**Beispiel (Jacobifelder des  $\mathbb{R}^n$ )** Die Geodätischen des  $\mathbb{R}^n$  sind genau die Geraden. Ein Vektorfeld  $Y$  entlang einer Geraden ist genau dann ein Jacobifeld, wenn  $Y'' = 0$  gilt; jedes solche ist der Form  $Y(t) = v + tw$ .



Sind die Startwerte eines Jacobifeldes tangential an  $c$ , etwa  $\mathcal{J}(0) = \lambda \dot{c}(0)$  und  $\mathcal{J}'(0) = \mu \dot{c}(0)$ , so gilt

$$\mathcal{J}(t) = (\lambda + t\mu)\dot{c}(t),$$

denn

$$\begin{aligned}\mathcal{J}''(t) &= \nabla_t(\mu \dot{c}(t) + (\lambda + t\mu) \underbrace{\nabla_t \dot{c}(t)}_{=0}) = \mu \nabla_t \dot{c} = 0, \\ R(\mathcal{J}, \dot{c})\dot{c}|_t &= (\lambda + t\mu)R(\dot{c}, \dot{c})\dot{c} = 0.\end{aligned}$$

Zu  $c$  tangentiale Jacobifelder tragen keine geometrischen Informationen; vgl. zweite Ableitung des Längenfunktional. Gilt für die Startwerte eines Jacobifeldes  $\mathcal{J}(0)$  und  $\mathcal{J}'(0) = \dot{c}(0)^\perp$

$$\langle \mathcal{J}', \dot{c} \rangle' = \langle \mathcal{J}'', \dot{c} \rangle + \langle \mathcal{J}', \nabla_t \dot{c} \rangle = -\langle R(\mathcal{J}, \dot{c})\dot{c}, \dot{c} \rangle = 0,$$

also  $\mathcal{J}'(t) \perp \dot{c}(t)$  für alle Zeiten  $t$  und  $\langle \mathcal{J}, \dot{c} \rangle' = \langle \mathcal{J}', \dot{c} \rangle = 0$ , somit  $\mathcal{J}(t) \perp \dot{c}(t)$  für alle  $t$ .

Der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der Jacobifelder entlang einer Geodätischen  $c$  hat die Dimension  $2\dim(M)$  und die zu  $c$  normalen Jacobifelder bilden einen Vektorraum der Dimension  $2\dim(M) - 2$ .

**Satz 9.5** *Es sei  $c: [0, 1] \rightarrow M$  eine Geodätische und  $c_s$  eine Variation von  $c$ , so dass alle Kurven  $c_s$  Geodätische sind. Dann ist das zugehörige Variationsfeld ein Jacobifeld entlang  $c$ . Jedes Jacobifeld ist von dieser Gestalt.*

**Beweis** Es sei  $c_s$  eine Variation von  $c$  und alle  $c_s$  seien Geodätische. Dann gilt:

$$\begin{aligned}Y'' &= \nabla_t \left( \nabla_t \frac{d}{ds} c_s \right) \Big|_{s=0} \\ &= \nabla_t \left( \nabla_s \frac{d}{dt} c_s \right) \Big|_{s=0} \\ &= \underbrace{\nabla_s \nabla_t \frac{d}{dt} c_s}_{=0} + R \left( \underbrace{\frac{d}{dt} c_s}_{=\dot{c}}, \underbrace{\frac{d}{ds} c_s}_{=Y} \right) \underbrace{\frac{d}{dt} c_s}_{=\dot{c}} \Big|_{s=0} \\ &= -R(Y, \dot{c})\dot{c}\end{aligned}$$

Es sei umgekehrt  $\mathcal{J}$  ein Jacobifeld entlang  $c$ ,  $\gamma$  die durch  $\gamma(0) = c(0)$ ,  $\dot{\gamma}(0) = \mathcal{J}(0)$  definierte Geodätische, sowie  $V$  und  $W$  die entlang  $\gamma$  parallelen Vektorfelder mit  $V(0) = \dot{c}(0)$  und  $W(0) = \mathcal{J}'(0)$ . Dann ist

$$c_s(t) = \exp_{\gamma(s)}(t(V(s) + sW(s)))$$

eine Variation von  $c$  und alle Kurven  $c_s$  sind Geodätische. Das zugehörige Variationsfeld  $Y = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} c_s$  ist nach dem oben Bewiesenen ein Jacobifeld. Es gilt

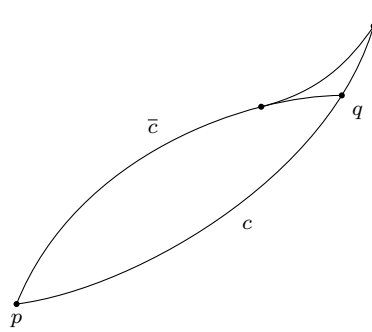
$$Y(0) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \exp_{\gamma(s)}(0) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \gamma(s) = \mathcal{J}(0).$$

und

$$\begin{aligned}
 Y'(0) &= \nabla_t \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} c_s \Big|_{t=0} \\
 &= \nabla_s \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp_{\gamma(s)}(t(V(s) + sW(s))) \Big|_{s=0} \\
 &= \nabla_s (V(s) + sW(s)) \Big|_{s=0} \\
 &= V'(0) + W(0) + 0W'(0) \\
 &= W(0) = \mathcal{J}'(0)
 \end{aligned}$$

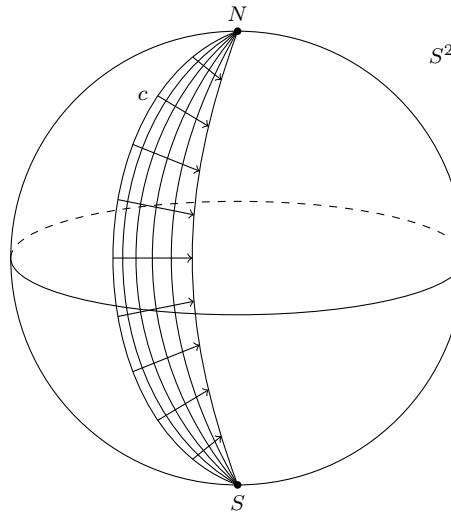
Nach Lemma 9.4 stimmen  $\mathcal{J}$  und  $Y$  überein. □

**Erinnerung (Korollar 8.12 (iii))** Die zusammengesetzte Kurve oben ist kürzer als die durchgezogene Kurve unten.



**Definition 9.6** Ein Punkt  $p \in M$  heißt zu  $q$  **konjugiert**, wenn  $q$  ein singulärer Wert von  $\exp_p$  ist.  $p$  heißt **konjugiert zu  $q$  entlang der Geodätischen  $c$** , wenn  $\exp_{p*\dot{c}(0)}$  singulär ist, das heißt  $\text{Kern } \exp_{p*\dot{c}(0)} \neq \{0\}$ .

**Proposition 9.7** Ein Punkt  $p$  ist genau dann konjugiert zu  $q$  entlang einer Geodätischen  $c$ , wenn es ein nichttriviales Jacobifeld entlang  $c$  gibt, welches in den Endpunkten verschwindet.



**Beweis** Nach Satz 9.5 ist jedes Jacobifeld  $\mathcal{J}$  entlang  $c$  mit  $\mathcal{J}(0) = 0$  von der Gestalt  $\mathcal{J}(t) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp_p(t(\dot{c}(0) + s\mathcal{J}'(0)))$ , oder allgemein  $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp_{\gamma(s)}(t(V(s) + sW(s)))$ . Es gilt dann

$$\mathcal{J}(1) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp_p(\dot{c}(0) + s\mathcal{J}'(0)) = \exp_{p*\dot{c}(0)}(\mathcal{J}'(0))$$

Damit existiert genau dann ein nichttriviales Jacobifeld  $\mathcal{J}$  entlang  $c$  mit  $\mathcal{J}(0) = 0$ ,  $\mathcal{J}(1) = 0$ , wenn  $\text{Kern } \exp_{p*\dot{c}(0)} \neq \{0\}$ .  $\square$

**Bemerkung** 1) Der Raum der nichttrivialen Jacobifelder mit verschwindenden Endpunkten entlang  $c$  hat genau die Dimension  $\dim \text{Kern } \exp_{p*\dot{c}(0)}$ .

2) Ist  $p$  konjugiert zu  $q$ , so ist  $q$  konjugiert zu  $p$ .

3) Für jedes Jacobifeld  $\mathcal{J}$  entlang  $c$  mit  $\mathcal{J}(0) = 0 = \mathcal{J}(1)$  gilt  $\langle \mathcal{J}, \dot{c} \rangle = \langle \mathcal{J}', \dot{c} \rangle = 0$ , denn

$$\langle \mathcal{J}', \dot{c} \rangle' = \langle \mathcal{J}'', \dot{c} \rangle = -\langle R(\mathcal{J}, \dot{c})\dot{c}, \dot{c} \rangle = 0,$$

also ist  $\langle \mathcal{J}', \dot{c} \rangle = \langle \mathcal{J}, \dot{c} \rangle'$  konstant. Ferner gilt  $\langle \mathcal{J}(0), \dot{c}(0) \rangle = 0 = \langle \mathcal{J}(1), \dot{c}(1) \rangle$ , also ist  $\langle \mathcal{J}, \dot{c} \rangle \equiv 0$ .

4) Sind  $p$  und  $q$  nicht entlang  $c$  zueinander konjugiert, dann ist jedes Jacobifeld  $\mathcal{J}$  entlang  $c$  eindeutig durch  $\mathcal{J}(0)$  und  $\mathcal{J}(1)$  bestimmt, denn sind  $\mathcal{J}$  und  $\tilde{\mathcal{J}}$  Jacobifelder mit identischen Randwerten, so ist  $\mathcal{J} - \tilde{\mathcal{J}}$  ein Jacobifeld welches in den Endpunkten verschwindet.

5) Zwei Punkte sind genau dann konjugiert entlang der Geodätischen  $c$ , wenn eine eigentliche geodätische Variation von  $c$  existiert.

**Satz 9.8** Es seien  $p, q \in M$  und sei  $c : [0, 1] \rightarrow M$  eine Geodätische von  $p$  nach  $q$ .

(i) Ist entlang  $c$  kein Punkt zu  $p$  konjugiert, dann existiert eine Umgebung  $U$  von  $c$  in  $\Omega_{pq}$ , so dass  $\mathcal{L}(\tilde{c}) > \mathcal{L}(c)$  und  $E(\tilde{c}) \geq E(c)$  für alle  $\tilde{c} \in U$  gelten.

(ii) Falls ein  $t_0 \in (0, 1)$  existiert, so dass  $p = c(0)$  zu  $c(t_0)$  entlang  $c$  konjugiert ist, so existiert eine eigentliche Variation  $c_s$  von  $c$  mit  $\mathcal{L}(c_s) < \mathcal{L}(c)$  und  $E(c_s) < E(c)$  für hinreichend kleine  $s$ .

**Lemma 9.9 (globales Gauß Lemma)** Es seien  $v, w \in T_p M$  und  $c(t) = \exp_p(t \cdot v)$ . Dann gilt

$$\langle \exp_{p*tv}(v), \exp_{p*tv}(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Insbesondere ist jede Geodätische in  $p$  orthogonal zu der Abstandssphäre

$$S_r(p) = \{q \mid d(p, q) = r\}.$$

**Beweis**  $Y$  sei das durch die Startwerte  $Y(0) = 0$  und  $Y'(0) = \frac{w}{t}$  bestimmte Jacobifeld entlang  $c$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} Y(t) &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp_{\gamma(s)}(t(V(s) + sW(s))) & \gamma(0) &= p, \dot{\gamma}(0) = Y(0) = 0 \\ &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp_p\left(t\left(v + s\frac{w}{t}\right)\right) & V(s) &= V(0) = \dot{c}(0) = v \\ &= \exp_{p*tv}(w) & W(s) &= \dots = \frac{w}{t} \end{aligned}$$

Es sei  $\frac{w}{t} = \lambda v + u$  mit  $u \perp v$ . Der zu  $c$  tangential Anteil von  $Y$  ist dann

$$Y^T(s) = \lambda s \dot{c}(s),$$

denn  $Y^{T''} = 0$  und  $R(Y^T, \dot{c})\dot{c} = \lambda s R(\dot{c}, \dot{c})\dot{c} = 0$ . Also gilt  $Y(t) = \lambda t \dot{c}(t) + Y^\perp(t)$ , wobei  $Y^\perp$  der zu  $c$  orthogonale Anteil von  $Y$  ist. Es folgt

$$\begin{aligned} \langle \exp_{p*tv}(v), \exp_{p*tv}(w) \rangle &= \left\langle \underbrace{\frac{d}{dt} \exp_p(tv)}_{=c}, Y(t) \right\rangle \\ &= \langle \dot{c}(t), \lambda t \dot{c}(t) + Y^\perp(t) \rangle \\ &= \lambda t \|\dot{c}(t)\|^2 = \lambda t \|v\|^2 \end{aligned}$$

$$\langle v, w \rangle = \langle v, t(\lambda v + w) \rangle = t\lambda \|v\|^2 \quad \square$$

**Lemma 9.10** *Es sei  $c: [0, 1] \rightarrow M$  eine Geodätische,  $v = \dot{c}(0) \in T_p M$  und  $\psi$  (stückweise) glatte Kurve in  $T_p M$  mit  $\psi(0) = 0$  und  $\psi(1) = v$ , dann gilt*

$$\mathcal{L}(\exp_p \circ \psi) \geq \mathcal{L}(c),$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn  $\psi$  eine monotone Reparametrisierung von  $t \mapsto tv$  ist.

**Beweis** Es seien  $\varrho$  und  $\vartheta$  glatt, so dass  $\psi = \varrho\vartheta$  mit  $\|\vartheta\| \equiv 1$  (Polarkoordinaten).

$$\begin{aligned} \|(\exp_p \circ \psi)'\|^2 &= \|\exp_{p*\varrho\vartheta}(\varrho'\vartheta + \varrho\vartheta')\|^2 \\ &= \varrho'^2 \underbrace{\langle \exp_{p*\varrho\vartheta}(\vartheta), \exp_{p*\varrho\vartheta}(\vartheta) \rangle}_{=\langle \vartheta, \vartheta \rangle = 1} \\ &\quad + 2\varrho\varrho' \underbrace{\langle \exp_{p*\varrho\vartheta}(\vartheta), \exp_{p*\varrho\vartheta}(\vartheta') \rangle}_{=\langle \vartheta, \vartheta' \rangle = \frac{1}{2}\|\vartheta\|^{2'} = 0} \\ &\quad + \varrho^2 \langle \exp_{p*\varrho\vartheta}(\vartheta'), \exp_{p*\varrho\vartheta}(\vartheta') \rangle \\ &= \varrho'^2 + \varrho^2 \|\exp_{p*\psi}(\vartheta')\|^2 \end{aligned}$$

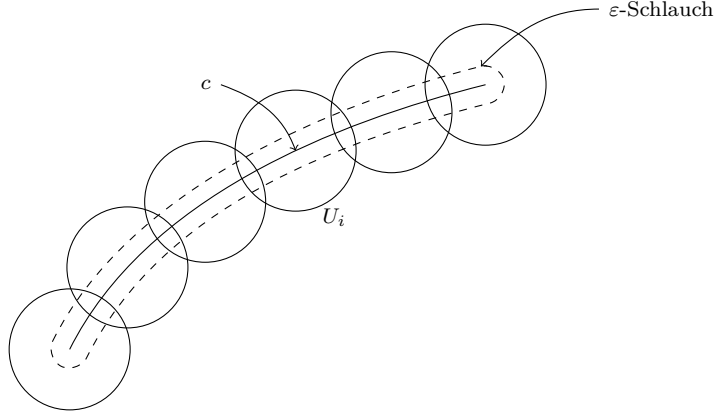
Damit folgt

$$\mathcal{L}(\exp_p \circ \psi) \geq \int_0^1 |\varrho'| \geq |\varrho(1) - \varrho(0)| = \|v\| = \mathcal{L}(c)$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn  $\vartheta$  konstant und  $\varrho$  monoton ist.  $\square$

**Beweis (von Satz 9.8)** (i) Es sei  $c: [0, 1] \rightarrow M$  eine Geodätische, seien  $p = c(0)$  und  $q = c(1)$  und es existieren keine zu  $p$  konjugierten Punkte entlang  $c$ . Es bezeichne  $\varphi: [0, 1] \rightarrow T_p M$  mit  $\varphi(t) = tv$ . Für jedes  $t \in [0, 1]$  ist nach Voraussetzung  $\exp_{p*\varphi(t)}$  regulär, also eine lokaler Diffeomorphismus. Es sei  $\{W_i\}$  eine endliche offene Überdeckung von  $\varphi([0, 1])$ , so dass  $\exp_p|_{W_i}: W_i \rightarrow \exp_p(W_i) = U_i$  ein Diffeomorphismus ist.

*Ziel:* Lifte Variationen von  $M$  nach  $T_p M$ .



Es sei  $t_i$  eine Partition von  $[0, 1]$ , so dass  $\varphi([t_{i-1}, t_i]) \subseteq W_i$ . Ist  $c_s$  eine Variation von  $c$ , so kann  $\varepsilon > 0$  so gewählt werden, dass

$$c_s: [t_{i-1}, t_i] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U_i = \exp_p(W_i)$$

gilt. Dies definiert eine Variation  $\psi_s$  von  $\varphi$  wie folgt: Ist  $\psi_s$  bis  $t_{i-1}$  definiert und gilt  $\psi_s(t_{i-1}) \in W_i$ , so setzt man  $\psi_s(t) = \exp_p|_{W_i}^{-1}(c_s(t))$ . Nach Lemma 9.10 gilt also

$$\mathcal{L}(\exp_p \circ \psi_s) = \mathcal{L}(c_s) \geq \mathcal{L}(c)$$

für alle  $s$ . Mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung folgt dann:

$$E(c_s) \geq \frac{1}{2} \mathcal{L}(c_s)^2 \geq \frac{1}{2} \mathcal{L}(c)^2 = E(c)$$

(ii) Es sei  $c(t_0)$  entlang  $c$  zu  $p = c(0)$  konjugiert.

**Behauptung:** Dann existiert ein zu  $c$  orthogonales Vektorfeld  $Y$  entlang der Geodätischen  $c$  mit  $Y(0) = 0$ ,  $Y(1) = 0$  und  $\mathcal{I}(Y, Y) = 0$ .

Dann gilt für die zugehörige eigentliche Variation  $c_s$  von  $c$ :

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathcal{L}(c_s) = \lambda \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} E(c_s) = 0$$

und, da  $Y$  normal ist,

$$\left. \frac{d^2}{ds^2} \right|_{s=0} \mathcal{L}(c_s) = \left. \frac{d^2}{ds^2} \right|_{s=0} E(c_s) = \mathcal{I}(Y, Y) < 0$$

Somit ist  $c$  lokales Maximum.

**Beweis der Behauptung:** Es existiert ein nichttriviales (zu  $c$  orthogonales) Jacobifeld  $\mathcal{J}$  entlang  $c|_{[0, t_0]}$  mit  $\mathcal{J}(0) = 0$  und  $\mathcal{J}(t_0) = 0$ . *Erinnerung:* Ist  $c \in \Omega_{pq}$  eine Geodätische und  $t_0 \in (0, 1)$ , so dass  $c(t_0)$  zu  $p = c(0)$  entlang  $c$  konjugiert ist, so existiert ein Vektorfeld  $Y$  entlang  $c$  mit  $\mathcal{I}(Y, Y) < 0$ .

*Beweis der Existenz von  $Y$ :* Da  $c(t_0)$  zu  $p$  entlang  $c$  konjugiert ist, existiert ein nichttriviales Jacobifeld  $J$  entlang  $c|_{[0, t_0]}$  mit  $J(0) = 0$ ,  $J(t_0) = 0$ .

Es sei  $X$  das entlang  $c$  parallele Vektorfeld mit  $X(t_0) = -J'(t_0)$  (nach Lemma 9.4 ist  $J'(t_0) \neq 0$ ) und  $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\alpha(0) = 0 = \alpha(1)$  und  $\alpha(t_0) = 1$ . Für  $z = \alpha \cdot X$  und  $\eta > 0$  sei

$$Y(t) = \begin{cases} J(t) + \eta \cdot Z(t) & \text{für } 0 \leq t \leq t_0 \\ \eta \cdot Z(t) & \text{für } t_0 < t \leq 1 \end{cases}$$

$Y$  ist nun stückweise glatt, die Variationsformeln für  $\mathcal{L}$  und  $E$ , beziehungsweise die Indexform lassen sich aber ganz analog für stückweise glatte Vektorfelder beziehungsweise Variationen formalisieren. Es gilt, da  $Y$  orthogonal zu  $c$  ist, für die zu  $Y$  gehörigen Variationen  $c_s$ :

$$\begin{aligned} J(Y, Y) &= \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} E(c_s) = \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} \mathcal{L}(c_s) \\ &= \int_0^1 \|Y'\|^2 - \langle R(Y, \dot{c})\dot{c}, Y \rangle \\ &= \int_0^{t_0} \langle J', J' \rangle - \langle R(J, \dot{c})\dot{c}, J \rangle \\ &\quad + 2\eta \int_0^{t_0} \langle J', Z' \rangle - \langle R(J, \dot{c})\dot{c}, Z \rangle \\ &\quad + \eta^2 \int_0^1 \langle Z', Z' \rangle - \langle R(Z, \dot{c})\dot{c}, Z \rangle \end{aligned}$$

und mit

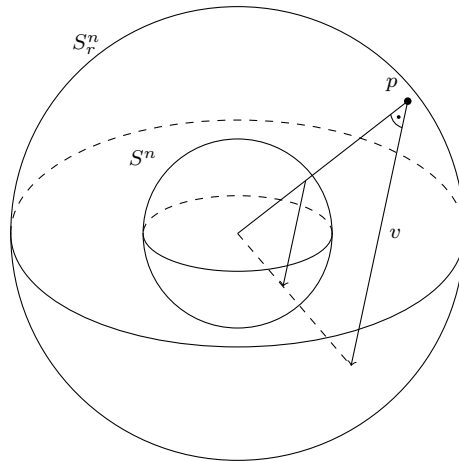
$$\begin{aligned} \langle J', J \rangle' &= \langle J', J' \rangle + \langle J'', J \rangle \\ &= \langle J', J' \rangle - \langle R(J, \dot{c})\dot{c}, J \rangle \\ \langle J', Z \rangle' &= \langle J', Z' \rangle + \langle J'', Z \rangle \\ &= \langle J', Z' \rangle - \langle R(J, \dot{c})\dot{c}, Z \rangle \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} J(Y, Y) &= \langle J', J \rangle \Big|_0^{t_0} + 2\eta \langle J', Z \rangle \Big|_0^{t_0} + \eta^2 J(Z, Z) \\ &= 0 + 2\eta (\langle J'(t_0), Z(t_0) \rangle - \langle J'(0), Z(0) \rangle) + \eta^2 J(Z, Z) \\ &= -2\eta \|J'(t_0)\|^2 + \eta^2 J(Z, Z) \end{aligned}$$

Für hinreichend kleines  $\eta > 0$  ist damit  $\mathcal{J}(Y, Y) < 0$ . □

Betrachte die Sphäre vom Radius  $r > 0$ ,  $S_r^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ :



Als differenzierbare Mannigfaltigkeit ist  $S_r^n$  diffeomorph zur Standardsphäre  $S^n = S_1^n$ , vermöge der Abbildung  $p \mapsto \frac{1}{r}p$ . Bezeichnet  $\langle \cdot, \cdot \rangle_r$ , die von  $\mathbb{R}^{n+1}$  auf  $S_r^n$  induzierte Riemannsche Metrik, so sind  $(S_r^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_r)$  und  $(S^n, r^2 \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$  isometrisch. Es folgt



also  $\text{diam}(S_r^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_r) = \pi r = r \text{diam}(S^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ . Für die Schnittkrümmung einer von  $v, w \in T_p M$  aufgespannte Ebene

$$\begin{aligned} \sec_p^{S_r^n}(\{v, w\}) &= \frac{\langle R(v, w)w, v \rangle_r}{\|v\|_r^2 \|w\|_r^2 - \langle v, w \rangle_r} = \frac{r^2 \langle R(v, w)w, v \rangle_1}{r^4 (\|v\|_1^2 \|w\|_1^2 - \langle v, w \rangle_1)} \\ &= \frac{1}{r^2} \sec_p^{S^n}(\{v, w\}) = \frac{1}{r^2}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für die Ricci-Krümmung:

$$\begin{aligned} \text{ric}_p^{S_r^n}(v, v) &= \sum_i \left\langle R\left(e_i, \frac{v}{\|v\|_1}\right) \frac{v}{\|v\|_1}, e_i \right\rangle \\ &= \|v\|_1^2 \sum_{i \geq 2} \sec_p^{S_r^n}(\{v, e_i\}) = \|v\|_1^2 \frac{1}{r^2} (n-1) \\ &= (n-1) \frac{1}{r^2} \langle v, v \rangle_1. \end{aligned}$$

wobei  $\{\frac{v}{\|v\|_1}, e_2, \dots, e_n\}$  eine Orthonormalbasis ist.

**Satz 9.11 (Bonnet-Myers)** *Es sei  $(M, g)$  eine vollständige  $m$ -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit*

$$\text{ric}_p \geq (m-1) \frac{1}{r^2} g$$

*für ein  $r > 0$ . Dann gilt*

$$\text{diam}(M, g) \leq \pi r = r \text{diam}(S^m, \langle \cdot, \cdot \rangle_1).$$

*Insbesondere ist  $M$  kompakt.*

**Beweis** Es sei  $l < \text{diam}(M, g)$ . Dann existieren  $p, q \in M$  mit  $(p, q) = l$  und nach dem Satz von Hopf-Rinow eine minimale Geodätische  $c: [0, l] \rightarrow M$  von  $p$  nach  $q$ . Für jedes Vektorfeld  $Y$  entlang  $c$ , welches in den Endpunkten verschwindet, ist  $J(Y, Y) \geq 0$ . Es sei  $\dot{c}(0) = e_1, \dots, e_m \in T_p M$  eine Orthonormalbasis und  $E_i$  die entlang  $c$  parallelen Vektorfelder mit  $E_i(0) = e_i$  für  $i \leq m$ . Für

$$\begin{aligned} Y_i(t) &= \sin\left(\frac{\pi}{l}t\right) E_i(t) \\ 0 \leq J(Y_i, Y_i) &= - \int_0^l \langle Y_i'' + R(Y_i, \dot{c})\dot{c}, Y_i \rangle \\ &= - \int_0^l \left\langle -\frac{\pi^2}{l^2} \sin\left(\frac{\pi}{l}t\right) E_i(t) + \sin\left(\frac{\pi}{l}t\right) R(E_i, \dot{c})\dot{c}, \sin\left(\frac{\pi}{l}t\right) E_i(t) \right\rangle \\ &= \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi}{l}t\right) \left( \frac{\pi^2}{l^2} - \langle R(E_i, \dot{c})\dot{c}, E_i(t) \rangle \right). \end{aligned}$$

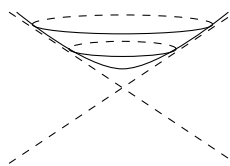
Es folgt

$$0 \leq \sum_{i \geq 2} J(Y_i, Y_i) = \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi}{l}t\right) \underbrace{\left( (m-1) \frac{\pi^2}{l^2} - \text{ric}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) \right)}_{\leq (m-1) \left( \frac{\pi^2}{l^2} - \frac{1}{r^2} \right)}$$

und somit  $\frac{\pi^2}{l^2} - \frac{1}{r^2} \geq 0$ , also  $l \leq \pi r$ . □

**Bemerkung** (1) Die Existenz einer uniformen positiven Krümmungsschranke ist entprechend

$$M = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1, x_3 > 0\}$$



Dies ist nicht  $\mathbb{H}^2$

Es gilt:

$$\sec_x(M, g) = \frac{1}{\|x\|^4}$$

also  $\sec > 0$ , aber  $\sec_x \xrightarrow{\|x\| \rightarrow \infty} 0$  und  $M$  ist nicht kompakt.

- (2) Die Durchmesserschranke im Satz von Bonnet-Myers ist scharf in dem Sinne, dass falls  $(M, g)$  eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit  $\text{ric} \geq (m - 1)\frac{1}{r^2}$  ist und  $\text{diam}(M, g) = \pi r$  gilt, so folgt  $(M, g)$  ist isometrisch zu  $S_r^m$ . (Cheng, 1975 [3])

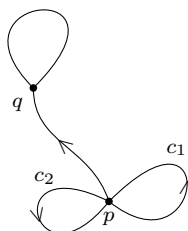
### 3. Exkurs: Überlagerungen, Fundamentalgruppe und Gruppenwirkungen

**Erinnerung** Zwei Wege, stetige Abbildungen,  $c_0, c_1 : [0, 1] \rightarrow M$  heißen **homotop**, wenn eine stetige Abbildung

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$$

existiert mit  $H(0, \cdot) = c_0$  und  $H(1, \cdot) = c_1$ . Gilt  $H(\cdot, 0) \equiv c_0(0) = c_1(0) = p$  und  $H(\cdot, 1) \equiv c_0(1) = c_1(1) = q$ , so heißt  $H$  eigentlich.

**Bemerkung** Sind zwei glatte Wege homotop, so kann eine glatte Homotopie gewählt werden. Die **Fundamentalgruppe**  $\pi_1(M, p)$  ist die Menge der Homotopieklassen von Wegen  $c \in \Omega_{pq}$  bezüglich eigentlicher Homotopien mit der durch die Verkettung von Wegen induzierten Gruppenstruktur.



Für eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit sind  $\pi_1(M, p)$  und  $\pi_1(M, q)$  isomorph, schreibe  $\pi_1(M)$ . Eine Mannigfaltigkeit heißt **einfach zusammenhängend**, falls  $M$  zusammenhängend ist und  $\pi_1(M) = 0$  gilt.

Eine glatte Abbildung  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  heißt **Überlagerung**, wenn für alle  $p \in M$  eine Umgebung  $U$  existiert, so dass  $\pi^{-1}(U) = \dot{\bigcup} U_i$  eine disjunkte Vereinigung offener Mengen  $U_i$  ist und für alle  $U_i : \pi|_{U_i} : U_i \rightarrow U$  ein Diffeomorphismus ist. Sind  $M$  und  $\tilde{M}$  Riemannsch, so heißt eine Überlagerung  $\pi$  **Riemannsche Überlagerung**, falls  $\pi$  eine lokale Isometrie ist.

**Proposition 9.12** *Es seien  $M$  und  $\tilde{M}$  zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeiten,  $\tilde{M}$  vollständig und  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  eine lokale Isometrie. Dann ist  $\pi$  eine Riemannsche Überlagerung.*

**Beweis** Für  $p \in M$  und  $v \in T_p M$  seien  $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ ,  $\tilde{v} = \pi_{*\tilde{p}}^{-1}(v) \in T_{\tilde{p}} \tilde{M}$  und  $\tilde{c}$  die Geodätische von  $\tilde{M}$  mit  $\tilde{c}(0) = \tilde{p}$ ,  $\dot{\tilde{c}}(0) = \tilde{v}$ . Dann existiert  $\tilde{c}$  für alle Zeiten. Da  $\pi$  eine lokale Isometrie ist, ist  $c = \pi \circ \tilde{c}$  eine auf ganz  $\mathbb{R}$  definierte Geodätische von  $M$  mit  $c(0) = \pi(\tilde{p}) = p$  und  $\dot{c}(0) = \pi_{*\tilde{p}}(\dot{\tilde{c}}(0)) = v$ . Nach dem Satz 8.11 von Hopf-Rinow ist  $M$  damit vollständig. Es sei  $p = \pi(\tilde{p})$  und sei  $q \in M$ . Dann existiert eine Geodätische  $c : [0, 1] \rightarrow M$  von  $p$  nach  $q$ . Es sei  $\tilde{c}$  die Geodätische in  $\tilde{M}$  mit  $\tilde{c}(0) = \tilde{p}$  und  $\dot{\tilde{c}} = \pi_{*\tilde{p}}^{-1}(\dot{c}(0))$ . Dann gilt  $\pi \circ \tilde{c} = c$  und  $\pi(\tilde{c}(1)) = c(1) = q$ . Damit ist  $\pi$  surjektiv. Betrachte nun das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{B}_\varepsilon(0_{\tilde{p}}) & \xrightarrow{\exp_{\tilde{p}}} & \mathbb{B}_\varepsilon(\tilde{p}) \\
 \pi_{*\tilde{p}} \downarrow & \# & \downarrow \pi \\
 T_p M \supseteq \mathbb{B}_\varepsilon(0_p) & \xrightarrow{\exp_p} & \mathbb{B}_\varepsilon(p) \subseteq M
 \end{array}
 \quad \tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$$

Für hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$  ist  $\exp$  ein Diffeomorphismus und das folgende Diagramm kommutiert. Damit ist  $\pi|_{\mathbb{B}_\varepsilon(\tilde{p})}$  ein Diffeomorphismus. Wären für  $\tilde{p}_1$  und  $\tilde{p}_2$  die  $\varepsilon$ -Bälle nicht disjunkt und es existiere eine nichttriviale Geodätische der Länge  $< 2\varepsilon$  von  $\tilde{p}_1$  nach  $\tilde{p}_2$  und damit eine Geodätische von  $p$  nach  $p$  der Länge  $< 2\varepsilon$ , also in  $\mathbb{B}_\varepsilon(p)$ . Also sind  $\mathbb{B}_\varepsilon(\tilde{p}_1)$  und  $\mathbb{B}_\varepsilon(\tilde{p}_2)$  für  $\tilde{p}_1 \neq \tilde{p}_2$  disjunkt.  $\square$

**Proposition 9.13** *Es seien  $\tilde{M}$  und  $M$  zusammenhängenden Riemannsche Mannigfaltigkeiten und  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  eine Riemannsche Überlagerung. Dann ist  $\tilde{M}$  genau dann vollständig, wenn  $M$  vollständig ist.*

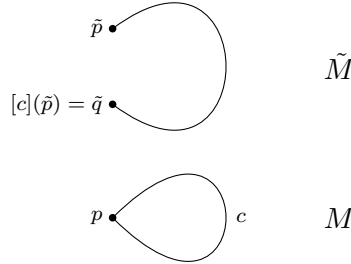
**Beweis** „ $\Rightarrow$ “: Folgt nach Proposition 9.12

„ $\Leftarrow$ “: Es sei  $M$  vollständig und  $\tilde{p}_i$  eine Cauchy-Folge in  $\tilde{M}$ . Dann ist  $p_i = \pi(\tilde{p}_i)$  auch eine Cauchy-Folge, denn  $\pi$  ist 1-Lipschitz, konvergiert also gegen  $p \in M$ . Dann liegen fast alle  $p_i$  in einer Umgebung  $U$ , so dass  $\pi|_{U_k} : U_k \rightarrow U$  eine Isometrie ist. Sei  $U_k$  so, dass fast alle  $\tilde{p}_i$  in  $U_k$  liegen. Dann konvergiert  $\tilde{p}_i$  gegen  $\tilde{p} \in U_i$ , mit  $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ .  $\square$

Für jede zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit  $M$  existiert eine bis auf Isometrie eindeutige einfach zusammenhängende Riemannsche Überlagerung  $\tilde{M}$ . Betrachte die topologisch universelle Überlagerung  $\tilde{M}$  von  $M$ . Zieht man die differenzierbare und geometrische Struktur von  $M$  auf  $\tilde{M}$  zurück, so wird  $\tilde{M}$  zu einer Riemannschen Mannigfaltigkeit und die Überlagerungsabbildung zu einer Riemannschen Überlagerung,

*Problem:* Es ist nicht klar, warum  $\tilde{M}$  eine abzählbare Basis der Topologie hat. Es gibt dabei zwei Auswege, zum Einen kann man zeigen dass  $\pi_1(M)$  abzählbar ist (Diplomarbeit von M. Herrmann), die andere Möglichkeit ist in „Foundations of Differential Geometry“, Band I, Appendix 2 [4] beschrieben.

Die Fundamentalgruppe  $\pi_1(M)$  ist isomorph zur Gruppe der Decktransformationen:



Jede Decktransformation ist glatt, also ein Diffeomorphismus, und sogar eine Isometrie, da  $\pi$  eine lokale Isometrie ist. Jedes Element von  $\pi_1(M)$  induziert eine Isometrie von  $\tilde{M}$ .

## 4. Wirkung diskreter Gruppen

Es seien  $\Gamma$  eine diskrete Gruppe und  $X$  eine Menge. Eine **Wirkung** von  $\Gamma$  auf  $X$ , geschrieben  $\Gamma \curvearrowright X$ , ist ein Gruppenhomomorphismus  $\varrho : \Gamma \rightarrow \text{Sym}(X)$ , schreibe  $\varrho(\gamma)(x) = \gamma.x$ , und insbesondere gilt  $\gamma.(\delta.x) = (\gamma\delta).x$  und  $1_\Gamma.x = x$ . Ist  $\Gamma \curvearrowright X$  eine Wirkung, so bezeichnet  $\Gamma.x = \{\gamma.x \mid \gamma \in \Gamma\}$  die **Bahn** oder den **Orbit** von  $x$  und  $\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma.x = x\}$  die **Isotropieuntergruppe** von  $\Gamma$  in  $x$ . Jede Wirkung induziert eine Äquivalenzklassenrelation auf  $X$ :

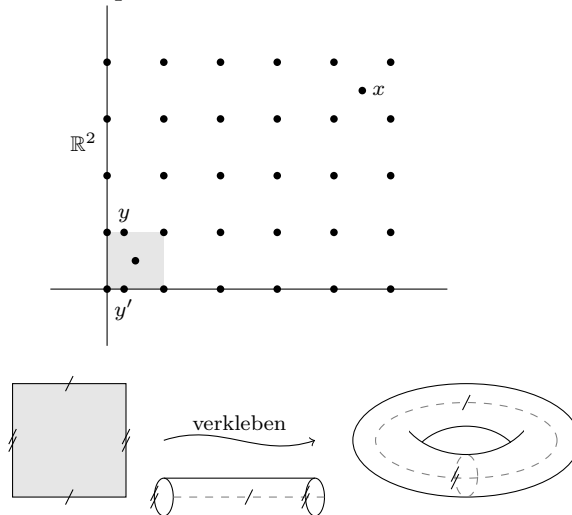
$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \gamma \in \Gamma : \gamma.x = y \Leftrightarrow y \in \Gamma.x$$

Die Äquivalenzklasse  $[x]_\sim$  ist also genau die Bahn durch  $x$ . Der Quotient  $X/\Gamma = x/\sim = \bigcup \Gamma.x$  heißt **Bahnenraum** der Wirkung, die Abbildung  $X \rightarrow X/\Gamma, x \mapsto [x]_\sim$  die **kanonische Projektion**. Eine Wirkung heißt **frei**, wenn für alle  $x \in X$   $\Gamma_x = \{1_\Gamma\}$  gilt. Es sei  $M$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\Gamma$  eine glatte oder isometrische Wirkung, das heißt  $\varrho : \Gamma \rightarrow \text{Diff}(M)$  oder  $\varrho : \Gamma \rightarrow \text{Iso}(M)$ . Eine solche Wirkung heißt **eigentlich diskontinuierlich**, wenn für jedes Kompaktum  $K \subseteq M$  mit  $\#\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma.K \cap K \neq \emptyset\} < \infty$ ; in diesem Fall ist  $M/\Gamma$  hausdorffsch. Ist diese Wirkung zudem frei, so ist der Bahnenraum  $M/\Gamma$  in natürlicher Weise eine (Riemannsche) Mannigfaltigkeit und die kanonische Projektion  $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$  eine Riemannsche Überlagerung.

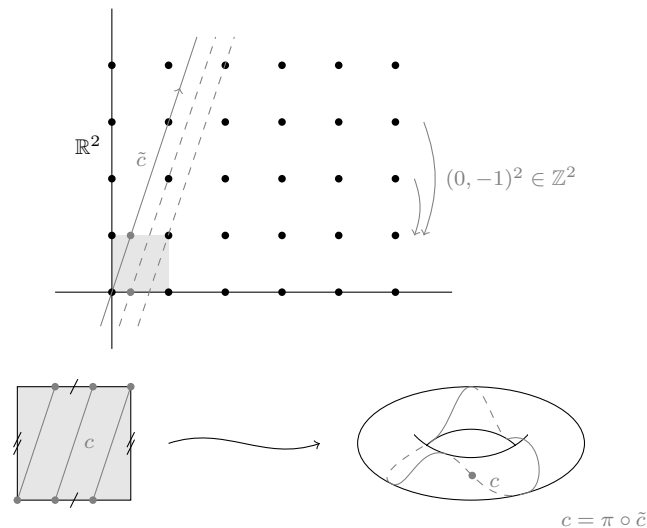
**Beispiel 9.14** (1) Ist  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  eine universelle Riemannsche Überlagerung, so ist  $\pi_1(M) \curvearrowright \tilde{M}$  frei und eigentlich diskontinuierlich und isometrisch, der Quotient  $\tilde{M}/\pi_1(M)$  ist isometrisch zu  $M$ .

- (2) Betrachte die Wirkung  $\mathbb{Z}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^2$  durch Translationen  $(a, b) \cdot (x, y) = (x+a, y+b)$ . Die Wirkung von  $\mathbb{Z}^2$  auf  $\mathbb{R}^2$  ist isometrisch, frei und eigentlich diskontinuierlich.

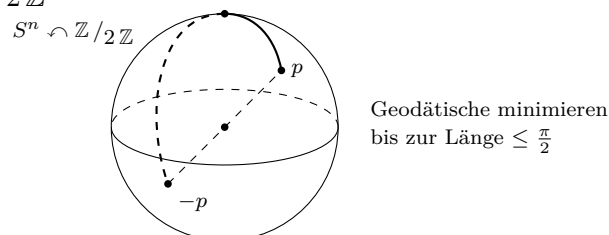
**Beweis** Der Quotient  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  ist diffeomorph zum Torus  $T^2 = S^1 \times S^1$ . Die glatte Abbildung  $\mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ ,  $(x, y) \mapsto (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$  faktorisiert über die Wirkung und induziert einen Diffeomorphismus.



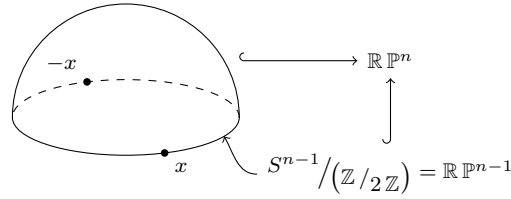
Die durch die Wirkung auf  $T^2$  induzierte Metrik ist flach, in dem Sinne dass die Krümmung konstant Null ist. Die Geodätischen des flachen Torus sind genau die Bilder von Geodätischen des  $\mathbb{R}^2$ , also von Geraden, unter der kanonischen Projektion.



- (3) Der  $n$ -dimensionale reell-projektive Raum  $\mathbb{RP}^n$ : betrachte  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright S^n$ ,  $\gamma \cdot p = -p$ ,  $\gamma \neq 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .



$$\mathbb{R}P^n = S/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$



Es sei  $(M, g)$  vollständig und  $\text{ric}_{(M, g)} \geq (n-1)\frac{1}{r^2}g$  für ein  $r > 0$ . Dann erfüllt auch  $\tilde{M}$  diese Voraussetzungen; insbesondere ist  $\tilde{M}$  (ebenfalls) kompakt. Da  $\pi_1(M) \curvearrowright \tilde{M}$  eigentlich diskontinuierlich wirkt, gilt

$$\#\pi(M) = \#\{\gamma \in \pi_1(M) \mid \gamma \cdot \tilde{M} \cap \tilde{M} \neq \emptyset\} < \infty$$

**Korollar (zum Satz von Bonnet-Myers)** Unter den Voraussetzungen des Satzes hat  $M$  eine endliche Fundamentalgruppe.

**Satz 9.15 (Hadamard-Cartan)** *Es sei  $(M, g)$  eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit  $\text{sec}_{(M, g)} \leq 0$ . Dann ist für alle  $p \in M$  die Exponentialabbildung  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  eine Überlagerung. Insbesondere ist jede einfach zusammenhängende vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit  $\text{sec} \leq 0$  diffeomorph zu  $\mathbb{R}^m$ .*

**Beweis** Es sei  $c$  eine Geodätische und  $Y$  ein Jacobifeld entlang  $c$  mit  $Y(0) = 0$ . Dann gilt für  $f(t) = \|Y(t)\|^2$ :

$$f'(0) = 2\langle Y'(0), Y(0) \rangle = 0$$

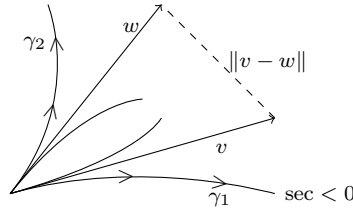
und

$$\begin{aligned} f'' &= 2(\langle Y'', Y \rangle + \langle Y', Y' \rangle) \\ &= 2(\|Y'\|^2 - \underbrace{\langle R(Y, \dot{c})\dot{c}, Y \rangle}_{=\lambda \text{sec}(\dot{c}, Y) \leq 0}) \geq 0 \end{aligned}$$

Also ist  $f$  nichtnegativ und konvex. Wäre  $Y$  ein nichttriviales Jacobifeld, welches in Punkten 0 und  $t_0$  verschwindet, so folgte aus  $f(0) = 0$  und  $f(t_0) = 0$ , dass  $f$ , und damit  $Y$  verschwindet. Somit existieren auf  $M$  keine zueinander konjugierten Punkte. Die Exponentialabbildung ist also ein lokaler Diffeomorphismus. Die Metrik  $\tilde{g} = \exp_{p*}(g)$  auf  $T_p M$  ist nach dem Gauß-Lemma und dem Satz von Hopf-Rinow vollständig. Nach Proposition 9.12 ist damit  $\exp_p(T_p M, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$  eine Riemannsche Überlagerung.  $\square$

**Erinnerung (Blatt 12, Aufgabe 2)** Seien  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  Geodätische mit  $\gamma_i(0) = p$ ,  $v = \dot{\gamma}_1(0)$ ,  $w = \dot{\gamma}_2(0)$  und  $\mathcal{L}(t) = d(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) &= t\|v - w\| \left( 1 - \frac{1}{12} \text{sec}(v, w)(1 + \langle v, w \rangle)t^2 \right) + o(t^3) \\ \left( 1 - \frac{1}{12} \text{sec}(v, w)(1 + \langle v, w \rangle)t^2 \right) + o(t^3) &\begin{cases} > 1 & \text{für } \text{sec} < 0 \\ = 1 & \text{für } \text{sec} = 0 \\ < 1 & \text{für } \text{sec} > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

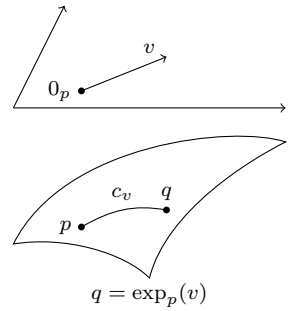


**Ziel:** Wir suchen ein globales Analogum.

## 5. Krümmungsschranken und Trigonometrie

Es bezeichne  $d_p$  die Abstandsfunktion  $d_p(q) = d(p, q)$ . Diese ist, in einer punktierten Umgebung von  $p$ , glatt und es gilt  $d_p(q) = \|\exp_p^{-1}(q)\|$ . Es folgt dann

$$\begin{aligned} X(d_p)(q) &= \frac{d}{dt} \|\exp_p^{-1}(\exp_p(tX))\| \\ &= \frac{1}{\|\underbrace{\exp_p^{-1}(q)}_{=v}\|} \langle \exp_{p*}^{-1}(X), v \rangle \\ &\stackrel{\text{G.L.}}{=} \frac{1}{\|v\|} \langle X, \underbrace{\exp_{p*}(v)}_{\dot{c}_v(1)} \rangle \quad (\text{nach Gauß-Lemma}) \end{aligned}$$



Für eine glatte Funktion  $f$  heißt das durch  $X(f) = \langle \text{grad } f, X \rangle$  definierte Vektorfeld der **Gradient** von  $f$ . Es ist  $X(f) = df(X)$  und  $\langle \text{grad } f, \cdot \rangle = df$ . Für den Gradienten von  $d_p$  gilt nach der obigen Rechnung:

$$\text{grad } d_p = \frac{\exp_{p*}(v)}{\|v\|} = \frac{\dot{c}(1)}{\|\dot{c}(0)\|} = \frac{\dot{c}(1)}{\|\dot{c}(1)\|},$$

also  $\|\text{grad } d_p\| \equiv 1$ . Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U$  offen in  $M$ , heißt **lokale Abstandsfunktion**, wenn  $\|\text{grad } f\| \equiv 1$  gilt. Für  $p \in U$  sei  $c_p$  die Integralkurve von  $\text{grad } f$  mit  $c_p(f(p)) = p$ . Ist  $c$  eine (stückweise) glatte Kurve von  $p$  nach  $q$ , so gilt

$$\mathcal{L}(c) = \int_0^1 \|\dot{c}\| \stackrel{C.S.}{\geq} \left| \int_0^1 \langle \text{grad } f, \dot{c} \rangle \right| = |f(q) - f(p)|$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn  $c$  eine monotone Reparametrisierung von  $c_p$  ist. Damit ist  $c_p$  eine (minimale) Geodätische, welche die Niveaumengen von  $f$  durchläuft. Es gilt

$$\begin{aligned} H_f(X, Y) &= X(Yf) - (\nabla_X Y)(f) \\ &= X \langle \text{grad } f, Y \rangle - \langle \text{grad } f, \nabla_X Y \rangle \\ &= \langle \nabla_X \text{grad } f, Y \rangle \end{aligned}$$

und mit  $\|\text{grad } f\| \equiv 1$  folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} X \|\text{grad } f\|^2 \\ &= \langle \nabla_X \text{grad } f, \text{grad } f \rangle \\ &= H_f(X, \text{grad } f). \end{aligned}$$

Für ein  $r \in \mathbb{R}$  sei  $M_r = f^{-1}(r)$  eine Niveaufläche von  $f$ . Ist  $X$  tangential zu  $M_r$ , das heißt existiert eine Integralkurve  $\gamma$  von  $X$  in  $M_r$ , dann gilt

$$0 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f(\gamma(t))) = X(f) = \langle \text{grad } f, X \rangle,$$

also ist  $\text{grad } f$  orthogonal zu  $M_r$ . Für zu  $M_r$  tangentialen Vektorfelder  $X$  und  $Y$  gilt dann

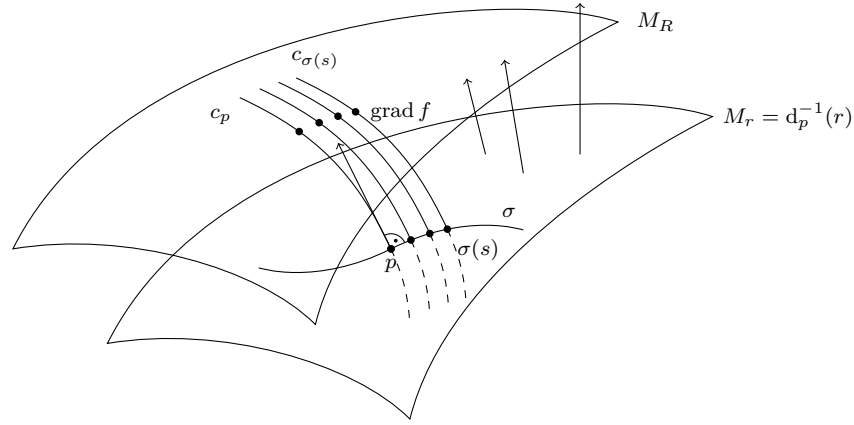
$$0 = X \langle \text{grad } f, Y \rangle = \langle \nabla_X \text{grad } f, Y \rangle + \langle \text{grad } f, \nabla_X Y \rangle$$

also  $H_f(X, Y) = -\langle \text{grad } f, \nabla_X Y \rangle$ . Für  $p \in U$  wird durch  $X \mapsto \nabla_X \text{grad } f$  ein linearer Endomorphismus  $A_p : \text{grad } f^\perp \rightarrow \text{grad } f^\perp$  definiert. Es bezeichne

$$A_t = A_{c_p(t)} : \dot{c}_p(t)^\perp \rightarrow \dot{c}_p(t)^\perp$$

$\text{grad } f|_{c_p(t)}$

eine Einschränkung auf  $c_p$ . Es sei  $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M_r$  eine glatte Kurve mit  $\sigma(0) = p$ .



Dann ist  $(t, s) \mapsto c_{\sigma(s)}(t)$  glatt und für alle  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  ist dann  $c_{\sigma(s)}$  eine Geodätische durch  $\sigma(s)$ ; also ist  $c_s = c_{\sigma(s)}$  eine geodätische Variation von  $c_0 = c_p$ . Es bezeichne  $\mathcal{J}$  das zugehörige Jacobifeld entlang  $c_p$  mit  $\mathcal{J}'(t) = A_t \cdot \mathcal{J}(p)$ .

Sei  $f = d_p$  die Abstandsfunktion zu  $p \in M$  und  $c$  eine Geodätische von  $p$  nach  $q = c(r)$  (nicht konjugiert zu  $c$ ), das heißt  $q \in M_r = d_p^{-1}(r)$ . Dann ist jedes Jacobifeld  $\mathcal{J}$  entlang  $c$  mit  $\mathcal{J}(0) = 0$  und  $\mathcal{J} \perp \dot{c}$  von obiger Gestalt:  $\mathcal{J}$  wird von einer geodätischen Variation  $c_s$  erzeugt. Jede Geodätische  $t \mapsto c_s(t)$  ist minimierend, also

- $c_s(r) \in M_r = d_p^{-1}(r)$
- $d_p(c_s(t)) = t \Rightarrow c_s$  ist eine Integralkurve von  $\text{grad } d_p$

Für  $\sigma(s) = c_s(r)$  stimmt dann  $\mathcal{J}$  mit obiger Konstruktion überein.

$$A' \mathcal{J} = (A \mathcal{J})' - A \mathcal{J}' = \mathcal{J}'' - A^2 \mathcal{J} = -R(\mathcal{J}, \dot{c}) \dot{c} - A^2 \mathcal{J}$$

Setzt man  $R_t = R(\cdot, \dot{c}) \dot{c}$ , so gilt

$$A'_t + A_t^2 + R_t = 0,$$

die sogenannte **Riccatigleichung**. Ist  $E$  ein entlang  $c$  paralleles Vektorfeld mit  $\|E\| = 1$  und  $E \perp \dot{c}$ , so gilt

$$\langle AE, E \rangle' = \langle A'E, E \rangle = -\langle R(E, \dot{c}) \dot{c}, E \rangle - \langle A^2 E, E \rangle = -\sec(E, \dot{c}) - \|AE\|^2$$



Ist die Krümmung von  $(M, g)$  nach unten beschränkt,  $\sec_{(M,g)} \geq \kappa$ , so folgt die sogenannte **Riccatiungleichung**:

$$\langle AE, E \rangle' = -\sec(E, i) - \|AE\|^2 \leq -\kappa - \langle AE, E \rangle^2$$

Setzt man  $a = \langle AE, E \rangle$ , so gilt

$$a' \leq -\kappa - a^2$$

## 6. Räume konstanter Krümmung

Es bezeichne  $M_\kappa^n$  den endlich zusammenhängenden  $n$ -dimensionalen Raum mit konstanter Krümmung  $\kappa$ , also für  $\kappa = -1$  den hyperbolischen Raum  $\mathbb{H}^n$ , für  $\kappa = 0$  die Ebene  $\mathbb{R}^n$  und die Sphäre  $S^n$  im Falle  $\kappa = 1$ . Dann ist ein Jacobifeld entlang einer Geodätischen  $c$  in  $M_\kappa^n$  eine Linearkombination von Jacobifeldern  $j \cdot E$ , wobei  $E$  ein entlang  $c$  paralleles Einheitsfeld ist und  $j$  eine Lösung der eindimensionalen Jacobigleichung

$$j'' + \kappa j = 0$$

Es bezeichnen  $\text{sn}_\kappa$  und  $\text{cs}_\kappa$  die Lösungen mit  $\text{sn}_\kappa(0) = 0$ ,  $\text{sn}'_\kappa(0) = 1$  und  $\text{cs}_\kappa(0) = 1$ ,  $\text{cs}'_\kappa(0) = 0$ , das heißt

$$\text{sn}_\kappa(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-\kappa}} \sinh(\sqrt{-\kappa}t) & \text{für } \kappa < 0 \\ t & \text{für } \kappa = 0 \\ 1/\sqrt{\kappa} \sin(\sqrt{\kappa}t) & \text{für } \kappa > 0 \end{cases}$$

$$\text{cs}_\kappa(t) = \begin{cases} \cosh(\sqrt{-\kappa}t) & \text{für } \kappa < 0 \\ t & \text{für } \kappa = 0 \\ \cosh(\sqrt{\kappa}t) & \text{für } \kappa > 0 \end{cases}$$

Dabei gilt  $\text{sn}'_\kappa = \text{cs}_\kappa$  und  $\text{cs}'_\kappa = -\kappa \text{sn}_\kappa$ . Setzt man  $\text{ct}_\kappa(t) = \frac{\text{cs}_\kappa(t)}{\text{sn}_\kappa(t)}$  ( $= (\ln \text{sn}_\kappa)'$ ), so gilt  $\text{ct}'_\kappa = -\kappa - \text{ct}_\kappa^2$ . Allgemeiner gilt für eine Lösung  $j$  von  $j'' + \kappa j = 0$  und  $b = (\ln j)'$

$$b' = \left( \frac{j'}{j} \right)' = \frac{j''j - j'^2}{j^2} = \frac{-\kappa j^2 - j'^2}{j^2} = -\kappa - b^2$$

das heißt  $b$  löst die eindimensionale Riccatiungleichung. Es sei  $\mathcal{J}$  ein Jacobifeld entlang einer Geodätischen  $c$  in  $M_\kappa^n$  mit  $\mathcal{J}(0) = 0$  und  $\mathcal{J} \perp \dot{c}$ . Dann ist  $\mathcal{J} = \text{sn}_\kappa Y$ , wobei  $Y$  ein zu  $c$  orthogonales und entlang  $c$  paralleles Vektorfeld ist.

$$AY = A \frac{1}{\text{sn}_\kappa} \mathcal{J} = \frac{1}{\text{sn}_\kappa} \mathcal{J}' = \frac{\text{sn}'_\kappa}{\text{sn}_\kappa} Y = \frac{\text{cs}_\kappa}{\text{sn}_\kappa} Y = \text{ct}_\kappa Y.$$

*Ziel:* Wir suchen eine Abschätzung für Eigenwerte, beziehungsweise Operatornorm von  $A_t$  und für das Wachstum von Jacobifeldern bei unteren Krümmungsschranken.

**Lemma 9.16** *Es seien  $a, b: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  glatt für ein Intervall  $\mathcal{I}$ , sowie*

- $a' \leq -\kappa - a^2$
- $b' = -\kappa - b^2$

- $a(t_0) \leq b(t_0)$  für ein  $t_0 \in \mathcal{I}$ .

Dann gilt:

- (i)  $a(t) \leq b(t)$  für alle  $t \geq t_0$
- (ii) Gilt  $a(t_0) = b(t_0)$  und  $a(t_1) = b(t_1)$  für  $t_1 > t_0$ , so folgt  $a|_{[t_0, t_1]} = b|_{[t_0, t_1]}$ .
- (iii) Gilt  $\mathcal{I} = (0, t_1]$  und  $\lim_{t \rightarrow 0} a(t) = \infty$ , so folgt  $a \leq \text{ct}_\kappa$  und falls  $a(t_0) = \text{ct}_\kappa(t_0)$ , so gilt  $a = \text{ct}_\kappa$  auf  $\mathcal{I}$ .

**Beweis** Es gilt

$$\begin{aligned} \left( (b-a)e^{\int b+a} \right)' &= ((b' - a') + (b-a)(b+a)) e^{\int b+a} \\ &= \underbrace{(b' + b^2)}_{=-\kappa} - \underbrace{(a' + a^2)}_{\leq -\kappa} e^{\int b+a} \geq 0 \end{aligned}$$

Also ist  $(b-a)e^{\int b+a}$  monoton wachsend, das heißt  $b-a \geq 0$  und es gilt (i). (ii) folgt sofort aus der Monotonie. Gilt  $a(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \infty$ , so existiert ein  $\varphi: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $a(t) = (\text{ct}_\kappa \circ \varphi)(t)$  und  $\varphi(0) = 0$ . Nun gilt  $a' = \varphi'(\text{ct}'_\kappa \circ \varphi)$ , also

$$\begin{aligned} 0 &= -\kappa + \kappa = (\text{ct}'_\kappa + \text{ct}_\kappa^2) \circ \varphi - (a' + a^2) \\ &= \text{ct}'_\kappa \circ \varphi + (\text{ct}_\kappa \circ \varphi)^2 - \varphi'(\text{ct}'_\kappa \circ \varphi) - (\text{ct}_\kappa \circ \varphi)^2 \\ &= (1 - \varphi') \underbrace{(\text{ct}'_\kappa \circ \varphi)}_{\leq 0} \end{aligned}$$

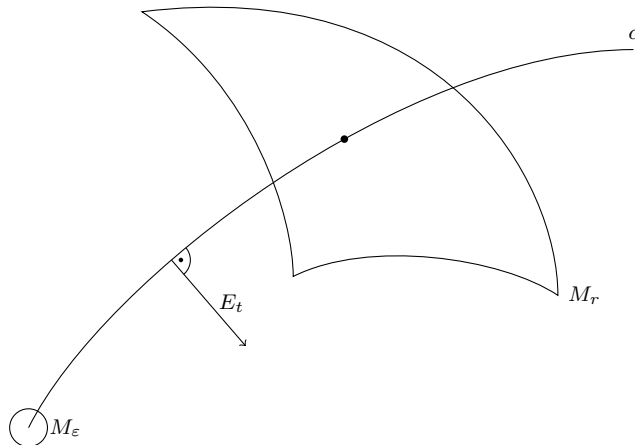
und es folgt  $\varphi' \geq 1$ . Da  $\varphi(0) = 0$ , folgt  $\varphi(t) \geq t$ . Da  $\text{ct}_\kappa$  monoton fallend ist, gilt

$$a = (\text{ct}_\kappa \circ \varphi) \leq \text{ct}_\kappa.$$

Die Gleichheit wird wie oben gezeigt. □

Es gelte  $\sec_{(M,g)} \geq \kappa$  und es sei  $c$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische mit  $c(0) = p$ . Wie oben bezeichne  $A_t$  das symmetrische Endomorphismenfeld  $A_t: \dot{c}(t)^\perp \rightarrow \dot{c}(t)^\perp$ ,  $X \mapsto \nabla_X \text{grad } d_p$ . Für ein entlang  $c$  paralleles Vektorfeld  $E$  mit  $\|E\| = 1$  und  $E \perp \dot{c}$  sei  $a = \langle AE, E \rangle$ . Dann gilt:

$$a' = \langle A'E, E \rangle = -\langle R(E, \dot{c})\dot{c}, E \rangle - \langle A^2 E, E \rangle \leq -\kappa - \langle AE, E \rangle^2 = -\kappa - a^2.$$



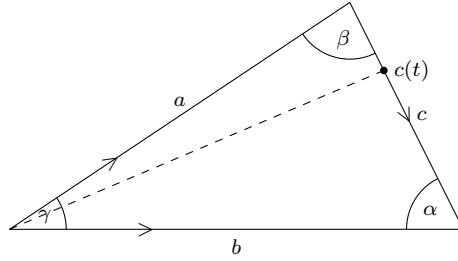
An jeder Stelle, solange kein konjugierter Punkt vorliegt, kann  $E$  als normiertes Jacobifeld  $\frac{\mathcal{J}}{\|\mathcal{J}\|}(t)$  realisiert werden, wobei  $\mathcal{J}(0) = 0$  und  $\mathcal{J} \perp \dot{c}$ .

$$a = \left\langle A \frac{\mathcal{J}}{\|\mathcal{J}\|}, \frac{\mathcal{J}}{\|\mathcal{J}\|} \right\rangle = \frac{\langle \mathcal{J}', \mathcal{J} \rangle}{\langle \mathcal{J}, \mathcal{J} \rangle} = \left( \ln \overbrace{\|\mathcal{J}\|}^{\rightarrow 0}_{\rightarrow \infty} \right)' \rightarrow \infty$$

Mit  $a \xrightarrow{t \rightarrow 0} \infty$  und Lemma 9.16 folgt  $a \leq ct_\kappa$  (bis zum ersten konjugierten Punkt). Insbesondere folgt

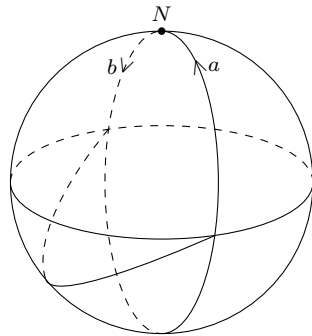
$$\|A\| = \sup_{\|E\|=1} \langle AE, E \rangle \leq ct_\kappa.$$

**Definition** Ein (**geodätisches**) **Dreieck**  $\Delta(a, b, c)$  in  $M$  besteht aus drei geodätischen Segmenten  $a$ ,  $b$  und  $c$  mit  $a(0) = b(0)$ ,  $a(1) = c(0)$  und  $c(1) = b(1)$ . Es bezeichnen  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  die inneren Winkel in  $\Delta$ . Ferner sei  $|a| = \mathcal{L}(a)$  die Länge von  $a$  (analog für  $b$  und  $c$ ).



Ein Vergleichsdreieck in  $M_\kappa^2$ , der einfach zusammenhängenden vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit mit  $\sec \equiv \kappa$ , ist ein Dreieck  $\bar{\Delta}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$  mit  $|\bar{a}| = |a|$ ,  $|\bar{b}| = |b|$  und  $|\bar{c}| = |c|$ . Es existiert ein (bis auf Isomorphie) eindeutiges Vergleichsdreieck, wenn gilt:

- (i)  $|a| + |b| \geq |c|$ ,  $|b| + |c| \geq |a|$ ,  $|c| + |a| \geq |b|$
- (ii)  $U(\Delta(a, b, c)) = |a| + |b| + |c| < \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$  (für  $\kappa > 0$ )

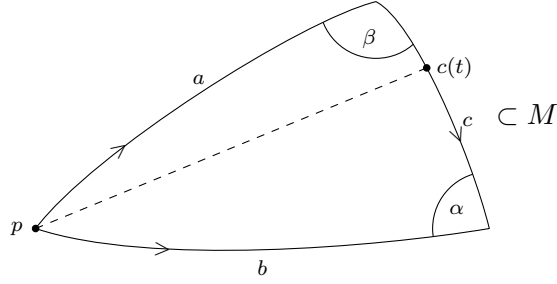


mehrere Möglichkeiten  
für  $c$  in diesem Beispiel

**Satz 9.17 (Alexandrov-Toponogov)** Es sei  $(M, g)$  eine vollständige Riemannsche  $m$ -Mannigfaltigkeit mit  $\sec_{(M, g)} \geq \kappa$  und im Falle  $\kappa > 0$  gelte  $M \not\cong S_{1/\sqrt{\kappa}}^m$ . Ist dann  $\Delta(a, b, c)$  ein geodätisches Dreieck mit  $|c| \leq |a| + |b|$ , sowie, im Falle  $\kappa > 0$ ,  $|c| < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$  und  $a$  und  $b$  seien minimierende Geodätische. Dann gilt für das Vergleichsdreieck  $\bar{\Delta}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$  in  $M_\kappa^2$ :  $\bar{d}_{\bar{p}} \leq d_p$

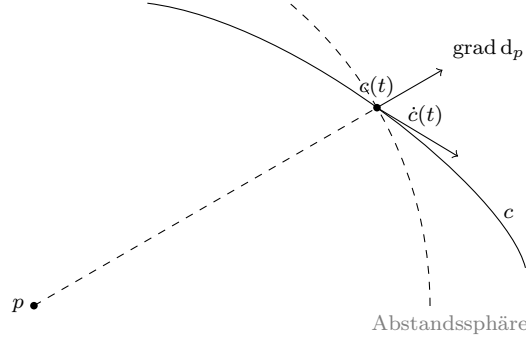
- (i)  $d(\bar{p}, \bar{c}(t)) \leq d(p, c(t))$

(ii)  $\bar{\alpha} \leq \alpha$  und  $\bar{\beta} \leq \beta$ .



**Bemerkung** Das Ausschlussen von  $S_{1/\sqrt{\kappa}}^m$  ist nach dem Satz von Cheng[3] keine Einschränkung.

Es seien  $a, b$  und  $c$  nach Bogenlänge parametrisiert und  $p = a(0) = b(0)$ . Es existiere zu jedem  $c(t)$  eine eindeutige Geodätische von  $p$ . Dann ist insbesondere  $d_p$  um  $c(t)$  glatt. Die Abstandsfunktion wird nun so modifiziert, dass in der Abschätzung nicht zwischen dem zu  $\text{grad } d_p$  kollinearen Anteil und dem zur Abstandssphäre tangentialen Teil unterschieden werden muss.



**Karchers Trick** Es sei

$$m_\kappa(r) = \int_0^r \text{sn}_\kappa = \begin{cases} \frac{1}{\kappa}(1 - \text{cs}_\kappa(r)) & \kappa \neq 0 \\ \frac{1}{2}r^2 & \kappa = 0 \end{cases},$$

dann ist  $m_\kappa(0) = 0, m'_\kappa = \text{sn}_\kappa$ , also  $m_\kappa$  streng monoton auf  $[0, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}]$ , und es gilt  $\text{cs}_\kappa + \kappa m_\kappa \equiv 1$ . Es sei  $r(t) = d(p, c(t))$  und  $e = m_\kappa \circ r$ . Dann ist

$$\begin{aligned} r' &= \frac{d}{dt}(d_p \circ c) = \dot{c}(d_p) = \langle \text{grad } d_p, \dot{c} \rangle, \\ r'' &= \langle \nabla_{\dot{c}} \text{grad } d_p, \dot{c} \rangle = H_{d_p}(\dot{c}, \dot{c}) \end{aligned}$$

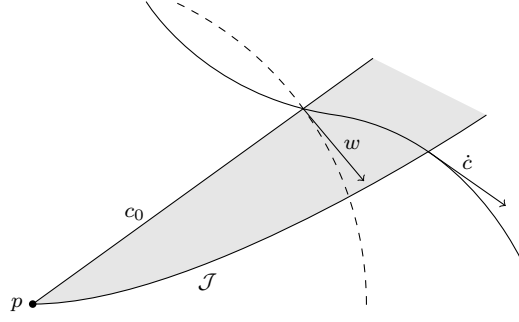
Zerlegt man  $\dot{c}$  orthogonal in  $\dot{c} = v + w$  mit  $w \perp \text{grad } d_p$ , so folgt aus  $H_{d_p}(\text{grad } d_p, \cdot) \equiv 0$  gerade

$$H_{d_p}(\dot{c}, \dot{c}) = H_{d_p}(w, w) = \|w\|^2 \left\langle A \frac{w}{\|w\|}, \frac{w}{\|w\|} \right\rangle \leq (\text{ct}_\kappa) \|w\|^2.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} e'' &= (m''_\kappa \circ r)r'^2 + (m'_\kappa \circ r)r'' = (\text{cs}_\kappa \circ r) \langle \text{grad } d_p, \dot{c} \rangle^2 + (\text{sn}_\kappa \circ r) H_{d_p}(\dot{c}, \dot{c}) \\ &\leq (\text{cs}_\kappa \circ r) \|v\|^2 + (\text{sn}_\kappa \circ r) (\text{ct}_\kappa \circ r) \|w\|^2 = (\text{cs}_\kappa \circ r) (\|v\|^2 + \|w\|^2) = (\text{cs}_\kappa \circ r) \\ &= 1 - \kappa(m_\kappa \circ r) = 1 - \kappa e, \end{aligned}$$

also  $e'' + \kappa e \leq 1$ .



Im Fall konstanter Krümmung gilt für eine analog definierte modifizierte Abstandsfunktion

$$\bar{e} = (m_\kappa \circ \bar{r}), \quad \bar{e}'' + \kappa \bar{e} \equiv 1.$$

Ist wie oben  $\dot{\bar{c}} = \bar{v} + \bar{w}$  (mit  $w, \bar{w} \neq 0$ ), so existiert ein Jacobifeld entlang der Geodätischen von  $p$  nach  $c(t)$  von der Form  $J = \text{sn}_\kappa E$ , wobei  $E$  die parallele Fortsetzung von  $\bar{w}$  ist, und es gilt  $J(d_{\bar{p}}(\bar{c}(t))) = w$ . Damit folgt

$$H_{d_{\bar{p}}}(\dot{\bar{c}}, \dot{\bar{c}})|_r = \langle AJ, J \rangle|_r = \langle J', J \rangle|_r = \text{cs}_\kappa(r) \langle E, w \rangle = \text{ct}_\kappa \|w\|^2$$

und in der obigen Abschätzung gilt die Gleichheit.

### Beweisskizze (zum Satz von Alexandrov-Toponogov 9.17)

- (i) *Annahme:* Es gelte  $|a| + |b| + |c| < \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ . Der Fall  $|a| + |b| = |c|$  ist trivialerweise korrekt. Es gelte also  $|a| + |b| > |c|$ , dann ist jedenfalls  $p \notin c$ . Es seien  $r = d_p \circ c$  und  $e = m_\kappa \circ r$  wie oben, sowie  $\bar{r}$  und  $\bar{e}$  für das Vergleichsdreieck. Betrachte  $f = e - \bar{e}$ .

**Fall 1:** Zu jedem  $c(t)$  existiert eine eindeutige minimierende Geodätische, damit ist  $r$  und damit auch  $f$  differenzierbar. Es gilt

$$f'' = e'' - \bar{e}'' \leq 1 - \kappa e - (1 - \kappa \bar{e}) = -\kappa f.$$

Angenommen es gäbe ein  $s \in (0, l)$ ,  $l = |c|$  mit  $f(s) < 0$ . Weiter sei  $\varepsilon > 0$  so, dass gilt

$$l + \varepsilon < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa + \varepsilon}}.$$

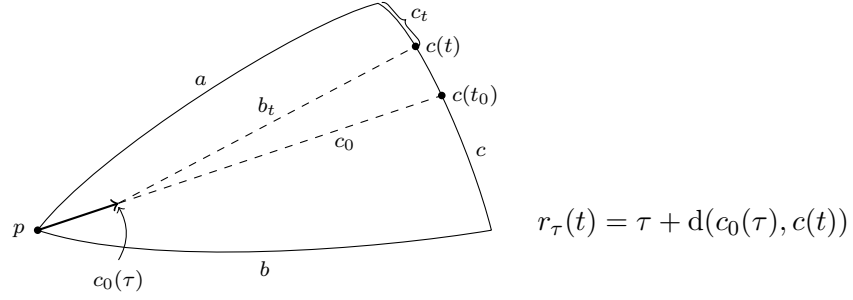
Es sei  $g(t) = \text{sn}_{\kappa+\varepsilon}(t+\varepsilon)$  die, auf  $[0, l]$  positive, Lösung von  $g'' + (\kappa + \varepsilon)g = 0$ . Betrachte  $h = \frac{f}{g}$ . Dann gilt  $h(s) < 0$  und  $h(0) = 0 = h(l)$  und somit nimmt  $h$  ein negatives Minimum, etwa  $t_0$ , an.

Es gilt also  $h(t_0) < 0$ ,  $h'(t_0) = 0$  und  $h''(t_0) \geq 0$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} f'' + \kappa f &= g''h + 2g'h' + gh'' + \kappa gh = -(\kappa + \varepsilon)gh + 2g'h' + gh'' + \kappa gh \\ \text{in } t_0: &\underbrace{-\varepsilon gh}_{>0} + \underbrace{2g'h'}_{=0} + \underbrace{gh''}_{\geq 0} > 0 \end{aligned}$$

im Widerspruch zu  $f'' + \kappa f \leq 0$ .

**Fall 1 gilt nicht:** Es gibt nun keine eindeutige Geodätische und für den Umfang gilt  $\|a\| + \|b\| + \|c\| \geq \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$

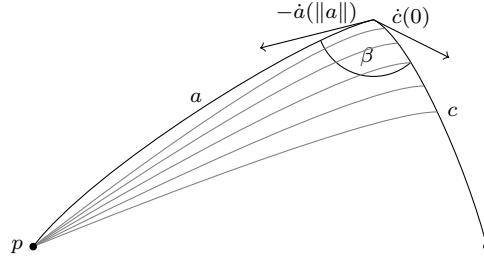


Es sei  $t_0 = \sup\{t \mid \text{Umfang } \Delta(a, b_t, c_t) < \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}\}$ . Für  $t \rightarrow t_0$  konvergiert  $\Delta(a, b_t, c_t)$  gegen ein Dreieck mit Umfang  $\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ , das heißt das Vergleichsdreieck konvergiert gegen einen Großkreis. Insbesondere folgt mit dem ersten Teil aus (i):

$$\max_{s \in [0, t]} d(p, c(s)) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}.$$

Damit existiert ein  $q \in M$  mit  $d(p, q) = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ , im Widerspruch zur Voraussetzung  $M \not\cong S_{\frac{1}{\sqrt{\kappa}}}^n$  (siehe Cheng [3]).

(ii) Variationsfeld:



Es sei  $c_s$  die minimierende, nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische von  $p$  nach  $c(s)$  und  $Y$  das von  $c_s$  erzeugte Variationsfeld. Dann gilt

$$\begin{aligned} -\cos \beta &= \langle \dot{c}(0), \dot{a}(|a|) \rangle = \langle Y(|a|), \dot{a}(|a|) \rangle = \int_0^{|a|} \langle Y, \dot{a} \rangle' = \mathcal{L}'(c_s) \stackrel{(i)}{\geq} \mathcal{L}'(\bar{c}_s) \\ &= \dots = -\cos \bar{\beta} \end{aligned}$$

Also insgesamt:  $\bar{\beta} \leq \beta$ .

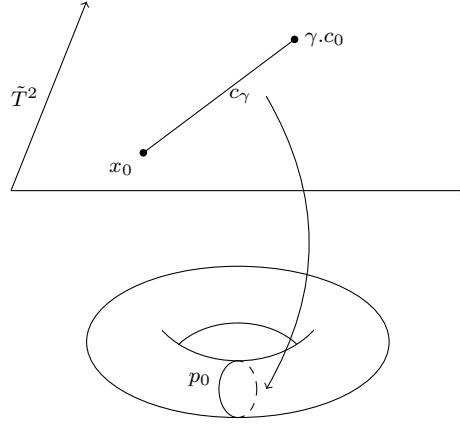
(□)

## 7. Anwendung

**Satz 9.18 (Gromov)** Es existieren Konstanten  $c(n), c(n, \lambda, D)$ , so dass gilt:

- (i) Hat  $M^n$  die Schnittkrümmung  $\text{sec} \geq 0$ , so läßt sich  $\pi_1(M^n)$  mit  $\leq c(n)$  Elementen erzeugen.
- (ii) Hat  $M^n$  die Schnittkrümmung  $\text{sec} \geq -\lambda^2$  und  $\text{diam}(M) \leq D$ , so lässt sich  $\pi_1(M)$  mit  $\leq c(n, \lambda, D)$  Elementen erzeugen.

**Beweisskizze** Es sei  $\Gamma = \pi_1(M, p_0) \curvearrowright \tilde{M}$  und sei  $x_0 \in \pi^{-1}(p_0)$ .



Für  $\gamma \in \Gamma$  sei  $|\gamma| = d(x_0, \gamma.x_0)$ . Ist dann  $c_\gamma$  minimal von  $x_0$  nach  $\gamma.x_0$ , so ist eine Projektion  $\bar{c}_\gamma = \pi \circ c_\gamma$  eine Schleife in  $\gamma$ . Ferner gilt  $\#\{\gamma \in \Gamma \mid |\gamma| \leq r\} < \infty$ , denn andernfalls gäbe es eine (nichtkonstante) Folge  $\gamma_i \in \Gamma$  mit  $|\gamma_i| \leq r$ , das heißt  $\gamma_i.x_0 \in \bar{B}_r(x_0)$ , also ohne Einschränkung  $\gamma_i.x_0 \xrightarrow{i \rightarrow \infty} y$  und  $q = \pi(y)$ . Dann gälte

$$\pi^{-1}(B_\delta(q)) = \dot{\bigcup}_i B_\delta = \dot{\bigcup}_{\gamma \in \Gamma} \gamma.B_\delta(y) \quad \nexists$$

Wähle  $\gamma_1 \in \Gamma$  mit  $|\gamma_1| = \min\{|\gamma| \mid \gamma \in \Gamma \setminus \{1_p\}\}$ . Sind  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  gewählt mit  $|\gamma_1| \leq |\gamma_2| \leq \dots \leq |\gamma_k|$ , so bezeichne  $G_k = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_k \rangle$ . Ist  $G_k \neq \Gamma$ , so sei  $\gamma_{k+1} \in \Gamma$  mit  $|\gamma_{k+1}| = \min\{|\gamma| \mid \gamma \in \Gamma \setminus G_k\}$ .

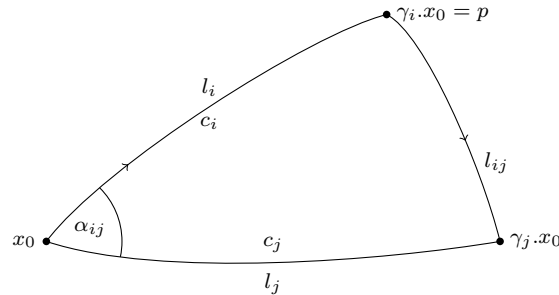
Es bezeichne  $l_i = |\gamma_i|$ ,  $l_{ij} = d(\gamma_i.x_0, \gamma_j.x_0) = d(x_0, \gamma_i^{-1}\gamma_j.x_0) = |\gamma_i^{-1}\gamma_j|$ . Dann gilt für  $i < j$ :

$$l_i \leq l_j \leq l_{ij}.$$

Wäre  $l_{ij} < l_j = |\gamma_j|$ , so gälte für  $\tilde{\gamma}_j = \gamma_i^{-1}\gamma_j$ :

$$|\tilde{\gamma}_j| < |\gamma_j| \text{ und } \langle \gamma_1, \dots, \gamma_j \rangle = \langle \gamma_1, \dots, \tilde{\gamma}_j \rangle$$

im Widerspruch zur Wahl von  $\gamma_j$ .

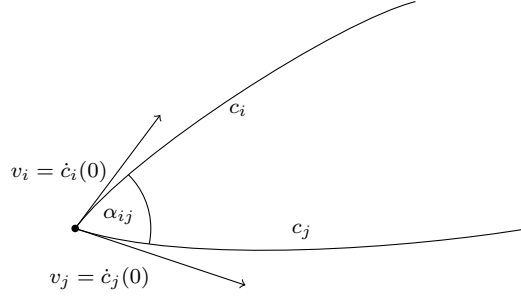


Nach Topogonov folgt  $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_{ij} \leq \alpha_{ij}$ .

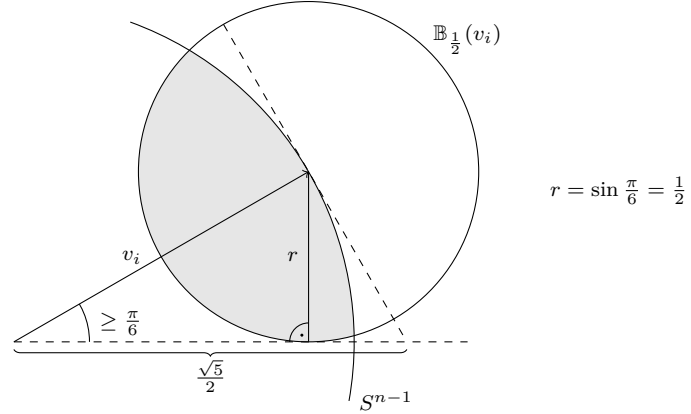
(i) Von nun an sei  $\sec \geq 0$ .

$$\cos \bar{\alpha}_{ij} = \frac{l_i^2 + l_j^2 - l_{ij}^2}{2l_i l_j} \leq \frac{l_i^2 + l_j^2 - l_j^2}{2l_i^2} = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$

Daraus folgt  $\alpha_{ij} \geq \bar{\alpha}_{ij} \geq \frac{\pi}{3}$



$\{v_i\} \subseteq \underbrace{\overline{B}_1(0)}_{\text{kompakt}} \subseteq T_{x_0}\tilde{M}$  und  $\#\{v_i\} = \#\{\gamma_i\}$  endlich.



$r = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ , also sind die Bälle  $B_{\frac{1}{2}}(v_i)$  disjunkt. Betrachte das Volumen der „unteren Hälfte“, diese liegt in  $B_{\frac{\sqrt{5}}{2}}(0)$ . Damit gilt

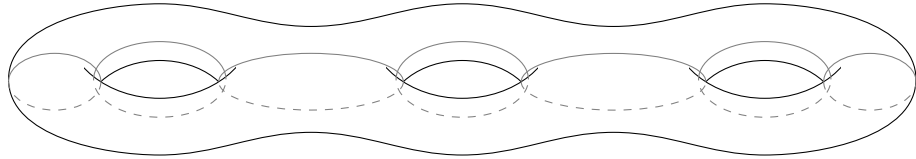
$$\frac{\kappa}{2} \text{vol}(B_{\frac{1}{2}}(0)) \leq \text{vol } B_{\frac{\sqrt{5}}{2}}(0),$$

also

$$\kappa \leq 2 \frac{\text{vol}\left(B_{\frac{\sqrt{5}}{2}}(0)\right)}{\text{vol}\left(B_{\sqrt{\frac{5}{2}}}\right)} = 2\sqrt{5}^n (= c(n))$$

(ii) Fall:  $\kappa \geq -\lambda^2$ .

Gibt es eine Durchmesserschranke?



$\pi_1(\sum g)$  wird erzeugt von  $2g$  Elementen und es gilt

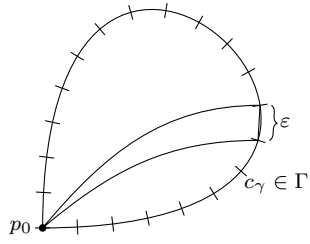
$$\cos \bar{\alpha}_{ij} = \frac{\cosh(\lambda l_i)^2 + \cosh(\lambda l_j)^2 - \cosh(\lambda l_{ij})^2}{\sinh(\lambda l_i) \sinh(\lambda l_j)}$$

$\bar{\alpha}_{ij}$  fällt monoton in  $l_i$ , also wächst  $\cos \bar{\alpha}_{ij}$  monoton in  $l_i$  und es lässt sich folge Abschätzung verwenden:

$$\cos \bar{\alpha}_{ij} \leq \dots \leq \frac{\cosh(\lambda l_j)}{\cosh(\lambda l_j) + 1} \leq \frac{\cosh(2\lambda D + 1)}{\cosh(2\lambda D + 1) + 1}$$

Jedes  $\gamma \in \pi_1(M)$  ist Produkt von Klassen von Schleifen der Länge  $\leq 2D + \varepsilon$ .





Damit funktioniert der Rest des Beweises ähnlich wie oben.

(□)



# Anhang A.

## Übungen

### Übung 0 vom 22. Oktober 2012

**Definition (Graßmann-Mannigfaltigkeiten)** Sei  $k \leq n$  und  $\text{Gr}_k(\mathbb{R}^n) = \{V \subseteq \mathbb{R}^n \mid \dim V = k\}$

*Behauptung:*  $\text{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$  ist eine glatte Mannigfaltigkeit.

**Bemerkung** Für  $k = 1$  ist  $\text{Gr}_1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}P^n$

$X_0 \in \text{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \mathbb{R}^n = X_0 \oplus X_0^\perp$ ,  $X_0 = \text{span}\{e_1, \dots, e_k\}$

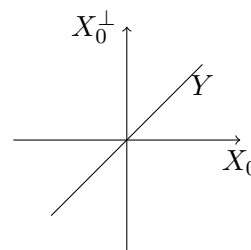
Definiere  $U_{X_0} := \{Y \in \text{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \mid Y \cap X_0^\perp = \{0\}\}$ . Für  $Y \in U_{X_0}$  gilt dann:  $\text{pr}_{X_0}(Y) = X_0 \Rightarrow \text{pr}_{X_0}$  ist ein Isomorphismus

$$X_0 \xrightarrow{(\text{pr}_{X_0}|_Y)^{-1}} Y \xrightarrow{\text{pr}_{X_0}^\perp} X_0^\perp$$

Definiere

$$\phi_{X_0} : \begin{cases} U_{X_0} & \rightarrow \text{Hom}(X_0, X_0^\perp) \\ & \cong \mathbb{R}^{k \cdot (n-k)} \\ Y & \mapsto \text{pr}_{X_0^\perp} \circ (\text{pr}_{X_0}|_Y)^{-1} \end{cases}$$

$$\phi_{X_0}^{-1} : \begin{cases} \text{Hom}(X_0, X_0^\perp) & \rightarrow U_{X_0} \\ f & \mapsto \text{Graph}(f) = \{x + xf \mid x \in X_0\} \end{cases}$$



*Zu zeigen:*

- (1)  $U_{X_0}$  ist offen
- (2)  $\phi_{X_0}, \phi_{X_0}^{-1}$  sind beide stetig
- (3)  $\phi_{X_0} \circ \phi_{X_0}^{-1}$  ist glatt
- (4)  $\text{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$  ist Hausdorffsch und hat eine abzählbare Basis der Topologie

**Welche Topologie eigentlich?** Sei  $V = \{(v_1, \dots, v_k) \in (\mathbb{R}^n)^k \mid v_1, \dots, v_k \text{ linear unabhängige}\}$  und  $\pi : V \rightarrow \text{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ ,  $(v_1, \dots, v_k) \mapsto \text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ . Topologie auf  $\text{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ : induziert von der Quotienttopologie auf  $V/\sim \pi$ , also

$$U \subset \text{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \text{ offen} \Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \text{ offen}$$

$V$  ist offen in  $(\mathbb{R}^n)^k$ :  $V = \widetilde{\det}^{-1}(\mathbb{R}^{\binom{n}{k}} \setminus \{0\})$  mit  $\widetilde{\det}(v_1, \dots, v_k) = (\det(k \times k\text{-Untermatrizen}))$

*Zu zeigen:*  $\pi^{-1}(U_{X_0})$  offen

$$\pi^{-1}(U_{X_0}) = \{(v_1, \dots, v_k) \in V \mid \text{pr}_{X_0}|_{\text{span}\{v_i\}} \text{ hat vollen Rang}\} = \{(v_1, \dots, v_k) \in V \mid \text{pr}_{X_0}(V - i) \text{ sind linear unabhängige}\} = (\widetilde{\det} \circ (\text{pr}_{X_0}, \dots, \text{pr}_{X_0}))^{-1}(\mathbb{R}^{\binom{n}{k}} \setminus \{0\})$$

$\Rightarrow U_{X_0}$  ist offen.

**zu 2)** *Behauptung:* für alle  $Y \in U_{X_0}$  gibt es genau eine Basis  $(y_1, \dots, y_k)$  von  $Y$  sodass  $\text{pr}_{X_0}(y_i) = x_i$  für eine feste Orthonormalbasis  $(x_1, \dots, x_k)$  von  $X_0$ . Bezeichnet  $B(Y)$  diese Basis, so ist  $B : U_{X_0} \rightarrow V$  stetig

*Beweis:* Existenz und Eindeutigkeit ✓ ( $\text{pr}_{X_0}$  ist Isomorphismus)

Für  $(v_1, \dots, v_k) \in \pi^{-1}(U_{X_0})$  ist  $B \circ \pi(v_1, \dots, v_k) = ((\text{pr}_{X_0}|_{\text{span}\{v_1, \dots, v_k\}})^{-1} X_i)_{i \leq k}$ .

Die Darstellungsmatrix von  $(\text{pr}_{X_0}|_{\text{span}\{v_1, \dots, v_k\}})^{-1}$  bezüglich  $\{x_i\}, \{y_i\}$  hängt stetig von den  $v_i$  ab. Daraus folgt dass  $B \circ \pi|_{\pi^{-1}(U_{X_0})}$  stetig ist, womit auch  $B$  stetig ist. Es gilt:

$$B(Y)_i = \underbrace{x_i}_{\in X_0} + \underbrace{\phi_{X_0}(Y)_{X_i}}_{\in X_0^\perp} \quad (*)$$

$\Rightarrow \phi_{X_0}(Y)_{x_i}$  hängt stetig von  $Y$  ab.

$\Rightarrow$  Darstellende Matrix von  $\phi_{X_0}(Y)$  hängt stetig von  $Y$  ab  $\Rightarrow \phi_{X_0}$  ist stetig

$(*) \Rightarrow B(\phi_{X_0}^{-1}(A))_i = x_i + Ax_i \Rightarrow B \circ \phi_{X_0}^{-1}$  ist stetig (sogar glatt)

$$\phi_{X_0}^{-1} = (\pi \circ B) \circ \phi_{X_0}^{-1} \text{ ist stetig}$$

**zu 3)**  $\phi_{X_0} \circ \phi_{\tilde{X}_0}^{-1} = \phi_{X_0} \circ \pi \circ \underbrace{(B_{\tilde{X}_0} \circ \phi_{\tilde{X}_0}^{-1})}_{\text{ist glatt, s. o.}}$  ist glatt.

$\phi_{X_0} \circ \pi$  ist glatt, da  $\phi_{X_0} \circ \pi(v_1, \dots, v_k)(x_i) = (\underbrace{B_{X_0} \circ \pi}_{\text{glatt (Darst. aus Beh.)}})(v_1, \dots, v_k) - x_i$

**zu 4)** Abzählbare Basis der Topologie wird von  $V$  geerbt. *Hausdorffsch:* Seien  $X_0 \neq \tilde{X}_0 \in \text{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \xrightarrow[\text{Üb. Aufg.}]{\text{L. A.}} \exists Z \subseteq \mathbb{R}^n, \dim Z = n - k : Z \cap X_0 = \{0\} = Z \cap \tilde{X}_0, U_{\underbrace{Z^\perp}_{k\text{-dim}}} \ni X_0, \tilde{X}_0$

*Alternativ:* Sei  $w \in X_0 \setminus \tilde{X}_0$  und  $d_w^2 : \text{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}, Y \mapsto (\text{dist}(w, Y))^2 \Rightarrow d_w^2(X_0) = 0, d_w^2(\tilde{X}_0) > 0$ . Falls  $d_w^2$  stetig ist, gilt:  $(d_w^2)^{-1}((-\infty, \frac{d_w^2(\tilde{X}_0)}{2}))$  und  $(d_w^2)^{-1}((\frac{d_w^2(\tilde{X}_0)}{2}, \infty))$  trennen und sind offen.

## Übung 1 vom 29. Oktober 2012

### Aufgabe 1

a) Es seien  $S^n = \{(x^0, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n (x^i)^2 = 1\}$ ,  $N = (1, 0, \dots, 0)$  und  $S = (-1, 0, \dots, 0)$ . Weiter seien

$$\varphi : S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad x \mapsto \left( \frac{x^1}{1-x^0}, \dots, \frac{x^n}{1-x^0} \right)$$

und

$$\psi : S^n \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad x \mapsto \left( \frac{x^1}{1+x^0}, \dots, \frac{x^n}{1+x^0} \right)$$

Zeigen Sie, dass  $\{(\varphi, S^n \setminus \{N\}), (\psi, S^n \setminus \{S\})\}$  ein  $C^\infty$ -Atlas für  $S^n$  ist.

b) Für  $i = 0, \dots, n$  sei  $U_i^\pm = \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid \pm x_i > 0\}$  und

$$\varphi_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (x^0, \dots, x^n) \mapsto (x^0, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n).$$

Zeigen Sie, dass  $\{(\varphi_i^\varepsilon, U_i^\varepsilon) \mid i = 0, \dots, n, \varepsilon \in \{+, -\}\}$  ein  $C^\infty$ -Atlas ist, der mit dem durch stereographische Projektion gegebenen verträglich ist.

### Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass durch die Karte

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto x^3$$

eine  $C^\infty$ -Struktur induziert wird, die von der kanonischen (von  $\text{id}_\mathbb{R}$  induzierten)  $C^\infty$ -Struktur auf  $\mathbb{R}$  abweicht. Sind die beiden Strukturen diffeomorph?

### Aufgabe 3

Es sei  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Weiter seien  $M_1$  und  $M_2$  zwei  $C^k$ -Mannigfaltigkeiten und  $N_i \subseteq M_i$  Untermannigfaltigkeiten.

Zeigen Sie: Ist  $f \in C^j(M_1, M_2)$  für  $1 \leq j \leq k$  und ist  $f(N_1) \subseteq N_2$ , so ist  $f|_{N_1} \in C^j(N_1, N_2)$ .

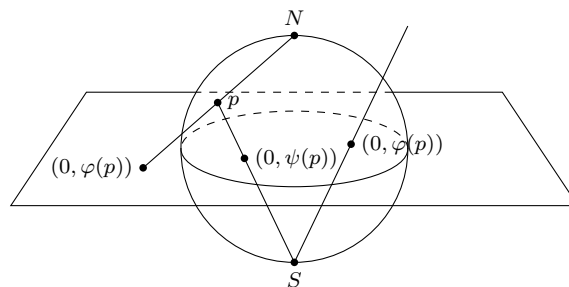
### Aufgabe 4

In welchen der folgenden Fälle ist  $N$  eine Untermannigfaltigkeit der glatten Mannigfaltigkeit  $M$ ?

a)  $M = S^n$ ,  $N = \{(x^0, \dots, x^n) \in S^n \mid x^2 = \dots = x^n = 0\}$

b)  $M = \mathbb{R}^2$ ,  $N = \{(0, y) \mid y \geq 0\} \cup \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$

### Lösung 1



a)  $S^n = (S^n \setminus \{N\}) \cup (S^n \setminus \{S\}) \checkmark$

$\varphi, \psi$  Homöomorphismen,  $\Phi : \{(x^0, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^0 < 1\} \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto \frac{1}{1-x^0}(x^1, \dots, x^n) \Rightarrow$

$\Phi$  ist stetig  $\Rightarrow \varphi = \Phi|_{S^n \setminus \{N\}}$  ist stetig. Es ist

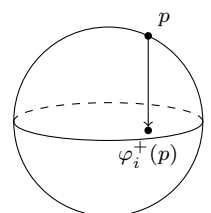
$$\varphi^{-1}(y) = \frac{1}{1 + \|y\|^2}(\|y\|^2 - 1, 2y)$$

also ist  $\varphi^{-1}$  stetig. Analog für  $\psi$ :

$$\varphi \circ \psi^{-1}(y) = \frac{y}{\|y\|^2} = \psi \circ \varphi^{-1}(y)$$

für  $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Also glatter Kartenwechsel.

$$\begin{aligned} \varphi_i^\pm : U_i^\pm &\rightarrow B_1(0) \subset \mathbb{R}^n & x &\mapsto (x^0, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n) \\ (\varphi_i^\pm)^{-1} : B_1(0) &\rightarrow U_i^\pm & y &\mapsto (y^0, \dots, y^{i-1}, \pm(1 - \|y\|^2), y^i, \dots, y^{n+1}) \end{aligned}$$



$\varphi_i^\pm \circ (\varphi_j^\pm)^{-1}$  glatt  
 $\psi \circ (\varphi_j^\pm)^{-1}$  glatt  
 $\varphi \circ (\varphi_j^\pm)^{-1}$  glatt  
 $\varphi_i^\pm \circ \varphi$  glatt  
 $\varphi_i^\pm \circ \psi$  glatt

b) asdf

## Lösung 2

$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$

*Behauptung:*  $\varphi$  induziert eine  $C^\infty$ -Struktur auf  $\mathbb{R}$ , die von der Standardstruktur abweicht.

Dazu müssen wir zeigen:

- (i)  $\{(\varphi, \mathbb{R})\}$  ist ein  $C^\infty$ -Atlas
- (ii)  $\varphi$  ist nicht verträglich mit  $(\text{id}, \mathbb{R})$

*Beweis:*

- (i)  $\varphi$  ist Homöomorphismus, da  $\varphi$  und  $\varphi^{-1} : x \mapsto \sqrt[3]{x}$  stetig sind. Offensichtlich überdeckt  $\varphi$  ganz  $\mathbb{R}$ . Der einzige Kartenwechsel  $\varphi \circ \varphi^{-1} = \text{id}_{\mathbb{R}}$  ist glatt.

- (ii) Betrachte

$$\text{id}_{\mathbb{R}} \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} : x \mapsto \sqrt[3]{x}$$

$\text{id}_{\mathbb{R}} \circ \varphi^{-1}$  ist in 0 nicht differenzierbar  $\Rightarrow$  (ii) ✓

*Behauptung:* Die beiden  $C^\infty$  Strukturen sind diffeomorph

*Beweis:* Sei

$$f : \begin{array}{ccc} \text{von id induziert} & & \text{von } \varphi \text{ induziert} \\ (\mathbb{R}, \tau_{\text{std}}) & \rightarrow & (\mathbb{R}, \tau) \\ x & \mapsto & \sqrt[3]{x} \end{array}$$

Dann ist  $f$  bijektiv. Es gilt für  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\varphi \circ f \circ (\text{id}_{\mathbb{R}})^{-1}(x) = (\sqrt[3]{x})^3 = x$$

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, \tau_{\text{std}}) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}, \tau) \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\varphi \circ f \circ (\text{id}_{\mathbb{R}})^{-1}} & \mathbb{R} \end{array}$$

ist glatt. Betrachte nun  $f^{-1} : \text{id}_{\mathbb{R}} \circ f^{-1} \circ \varphi^{-1}(x) = (\sqrt[3]{x})^3 = x$  ist glatt. Damit ist  $f$  ein Diffeomorphismus.

## Lösung 3

$k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ,  $M_1, M_2$   $C^k$ -Mannigfaltigkeiten,  $N_i \subseteq M_i$  Untermannigfaltigkeit,  $f \in C^j(M_1, M_2)$  wobei  $j \leq k$ ,  $f(N_1) \subseteq N_2$ .

*Behauptung:*  $f|_{N_1} \in C^j(N_1, N_2)$

*Beweis:* Sei  $p \in N_1$ , sei  $(\varphi_1, U_1)$  eine an  $N_1$  adaptierte Karte von  $M_1$  um  $p$ , das heißt  $p \in U_1$ .

$$\varphi_1(U_1 \cap N_1) = \varphi_1(U_1) \cap (\mathbb{R}^{\dim N_1} \times \{0\}^{n-\dim N})$$

Sei  $(\varphi_2, U_2)$  eine an  $N_2$  adoptierte Karte von  $M_2$  um  $f(p)$ . Dann erhalten wir Karten von  $N_i$ , indem wir die Projektion  $\pi_i : \mathbb{R}^{\dim M_i} \rightarrow \mathbb{R}^{\dim N_i}, x \mapsto (x^1, \dots, x^{\dim N_i})$  hinter die Karten  $\varphi_i$  schalten (das heißt betrachte  $\pi_i \circ \varphi_i$ ).

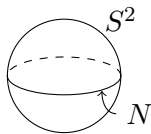
Es ist

$$(\pi_2 \circ \varphi_2) \circ f|_{N_1} \circ (\pi_1 \circ \varphi_1)^{-1} = \underbrace{\pi_2}_{C^\infty} \circ \underbrace{(\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1})}_{C^j} \circ C_1$$

mit  $C_1 : \mathbb{R}^{\dim N_1} \ni x \mapsto (x, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{\dim M_1}$ . Also  $(\pi_2 \circ \varphi_2) \circ f \circ (\pi_1 \circ \varphi_1)^{-1} \in C^j$  und damit  $f|_{N_1} \in C^j(N_1, N_2)$

## Lösung 4

a)  $M = S^n$ ,  $N = \{(x^0, x^1, \dots, x^n) \in S^n \mid x^2 = \dots = x^n = 0\}$ ; Skizze für  $n = 2$ :



*Behauptung:*  $N$  ist eine Untermannigfaltigkeit von  $M$ .

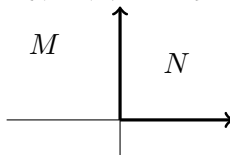
*Beweis:* Sei  $\varphi : \overbrace{S^n \setminus \{(1, 0, \dots, 0)\}}^{=:U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi(x) = \frac{1}{1-x^0}(x^1, \dots, x^n)$

Zu zeigen:  $\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R} \times \{0\}^{n-1})$

$$\varphi(U \cap N) = \varphi(N \setminus \{(1, \dots, 0)\}) = \mathbb{R} \times \{0\}^{n-1}$$

Für  $p \in N \setminus \{(1, 0, \dots, 0)\}$  ist  $\varphi$  also eine adoptierte Karte um  $p$ . Für  $p = (1, 0, \dots, 0)$  ist analog  $\psi$  (aus 1 a)) eine adoptierte Karte.

b)  $M = \mathbb{R}^2$ ,  $N = \{(x, 0) \mid x \geq 0\} \cup \{(0, y) \mid y \geq 0\}$ ; Skizze:



*Behauptung:*  $N$  ist keine glatte Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^2$ .

*Beweis:* Angenommen  $N$  wäre Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^2$ . Da  $N$  homöomorph zu  $\mathbb{R}$  ist, wäre es eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit. Damit existiert eine Karte  $(\varphi, U)$  von  $\mathbb{R}^2$  um  $(0, 0)$  mit  $\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$ . Betrachte  $\varphi^{-1}$ , beziehungsweise  $f(t) = \varphi^{-1}(t, 0)$ . Es sei  $t_0 \in \mathbb{R}$  mit  $f(t_0) = (0, 0)$ . Da  $f(t) \in N \cap U$  ist entweder  $f(t) \in \{(0, y) \mid y \geq 0\}$  für  $t > t_0$  und  $f(t) \in \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$  für  $t < t_0$  oder umgekehrt. Dann ist  $f'(t) \in \mathbb{R}e_2$  für  $t > t_0$  und  $f'(t) \in \mathbb{R}e_1$  für  $t < t_0$  oder umgekehrt.

$$\Rightarrow f'(0) \in \mathbb{R}e_1 \cap \mathbb{R}e_2 = \{(0, 0)\}$$

$$\text{Andererseits: } f'(0) = \underbrace{(D\varphi^{-1}|_{\varphi(0,0)})}_{\text{Isom., da } \varphi^{-1} \text{ Diffeom.}} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Übung 2 vom 5. November 2012

### Aufgabe 1

Es sei  $\psi : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \text{Bild}(\psi) \subset \mathbb{R}^2$ ,  $(r, \vartheta) \mapsto r(\cos(\vartheta), \sin(\vartheta))$ . Dann ist die Inverse  $\varphi = \psi^{-1}$  eine Karte von  $\mathbb{R}^2$  mit Kartengebiet  $\text{Bild}(\psi)$  und Komponenten  $r = \varphi^1$ ,  $\vartheta = \varphi^2$ .

Berechnen Sie  $\frac{\partial}{\partial r}$  und  $\frac{\partial}{\partial \vartheta}$  in kartesischen Koordinaten, d.h. bzgl der kanonischen Karte  $\text{id}_{\mathbb{R}^2}$ , und skizzieren Sie diese.

### Aufgabe 2

a) Es seien  $M_1$  und  $M_2$  glatte Mannigfaltigkeiten. Zeigen sie, dass die Projektionen

$$\pi_i : M_1 \times M_2 \rightarrow M_i \quad (p_1, p_2) \mapsto p_i$$

Submersionen sind.

b) Es sei

$$f : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto (\sin(t), \sin(2t)).$$

Zeigen Sie, dass  $f$  eine injektive Immersion, aber keine Einbettung ist und skizzieren Sie  $\text{Bild}(f)$ .

### Aufgabe 3

Es sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + az^2$ . Skizzieren Sie für  $a = 0$ ,  $a = 1$  und  $a = -1$  die Niveaumengen

$$f^{-1}(c) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = c\}$$

mit  $c \in \mathbb{R}$ . Welche Niveaumengen sind  $C^\infty$ -Untermannigfaltigkeiten von  $\mathbb{R}^3$ ?

### Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Gruppen  $\text{SL}(n, \mathbb{R})$  und  $\text{O}(n, \mathbb{R})$  glatte Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^{n \times n}$  sind, indem Sie sie als reguläre Urbilder darstellen und bestimmen Sie ihre Dimensionen.

### Lösung 1

Es sei  $\psi : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\})$ ,  $(r, \vartheta) \mapsto r(\cos \vartheta, \sin \vartheta)$ , die Inverse  $\varphi = \psi^{-1}$  ist eine Karte von  $\mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \Big|_p &= \frac{\partial (\text{id}^1 \circ \varphi^{-1})}{\partial r} (\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + \frac{\partial (\text{id}^2 \circ \varphi^{-1})}{\partial r} (\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p \\ &= \frac{\partial (\text{id}^1 \circ \psi)}{\partial r} (\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + \frac{\partial (\text{id}^2 \circ \psi)}{\partial r} (\varphi(p))^2 \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p \\ &= \cos(\vartheta(p)) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + \sin(\vartheta(p)) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p \\ &= \frac{1}{r(p)} \left( r(p) \cos(\vartheta(p)) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + r(p) \sin(\vartheta(p)) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p \right) \\ &= \frac{1}{r(p)} \left( \psi^1(\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial r} \Big|_p + \psi^2(\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Big|_p \right) \\ &= \frac{1}{\|p\|} \left( p^1 \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + p^2 \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p \right) \end{aligned}$$

Als Vektorfeld:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{\|(x, y)\|} \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

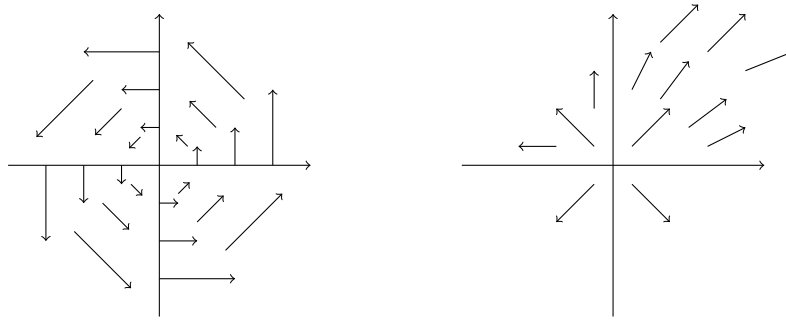
Desweiteren gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Big|_p &= \frac{\partial (\text{id}^1 \circ \varphi^{-1})}{\partial \vartheta} (\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + \frac{\partial (\text{id}^2 \circ \varphi^{-1})}{\partial \vartheta} (\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p \\ &= \dots = -p^2 \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + p^1 \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p \end{aligned}$$

Also:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$$





## Lösung 2

a) Zeige dass  $\pi_i : M_1 \times M_2 \rightarrow M_i$ ,  $(p_1, p_2) \mapsto p_i$  eine Submersion ist.

Sei  $(p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$ . Seien  $\varphi_i$  Karten von  $M_i$  um  $p_i$  mit Kartengebieten  $U_i$ . Dann ist  $\varphi_1 \times \varphi_2 : U_1 \times U_2 \rightarrow \varphi_1(U_1) \times \varphi_2(U_2)$  eine Karte von  $M_1 \times M_2$  um  $(p_1, p_2)$ . Es ist

$$\varphi_i \circ \pi_i \circ (\varphi_1 \times \varphi_2)^{-1} = \varphi_i \circ \pi_i \circ (\varphi_1^{-1} \times \varphi_2^{-1}).$$

Für  $(x_1, x_2) \in \varphi_1(U_1) \times \varphi_2(U_2)$  ist

$$\varphi_i \circ \pi_i \circ (\varphi_1 \times \varphi_2)^{-1}(x_1, x_2) = \varphi_i(\pi_i(\varphi_1^{-1}(x_1), \varphi_2^{-1}(x_2))) = \varphi_i(\varphi_i^{-1}(x_i)) = x_i.$$

Daraus folgt dass  $\varphi_i \circ \pi_i \circ (\varphi_1 \times \varphi_2)^{-1}$  glatt ist. Der Rest des Beweises kann auf zwei Arten erfolgen.

*Variante 1:* Es folgt dass  $D(\varphi_i \circ \pi_i \circ (\varphi_1 \times \varphi_2)^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

Dies ist die Darstellungsmatrix von  $\pi_{1*}$  bezüglich den Basen  $\frac{\partial}{\partial \varphi_1^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi_1^d}$  und  $\frac{\partial}{\partial(\varphi_1 \times \varphi_2)^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial(\varphi_1 \times \varphi_2)^{\dim M_1 + \dim M_2}}$ . Also ist  $\pi_{1*}$  surjektiv. Auch  $\pi_1$  ist surjektiv, also ist  $\pi_1$  eine Submersion. Der Beweis für  $\pi_2$  folgt analog.

*Variante 2:* Sei  $X = \sum_{j=0}^{\dim M_1} \xi^j \frac{\partial}{\partial \varphi_1^j} \Big|_{p_1} \in T_{p_1} M_1$ . Setze

$$\tilde{X} = \sum_{j=1}^{\dim M_1} \xi^j \frac{\partial}{\partial(\varphi_1 \times \varphi_2)^j} \Big|_p \in T_p(M_1 \times M_2).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \pi_{1*} \tilde{X} &= \sum_{k=1}^{\dim M_1} \left( \sum_j \underbrace{\partial_j (\varphi^k \circ \pi_1 \circ (\varphi_1 \times \varphi_2)^{-1})}_{=\delta(k,j)} (\varphi_1(p_1), \varphi_2(p_2)) \xi^j \right) \frac{\partial}{\partial \varphi_1^k} \Big|_{p_1} \\ &= \sum_{k=1}^{\dim M_1} \xi^k \frac{\partial}{\partial \varphi_1^k} \Big|_{p_1} = X \end{aligned}$$

Daraus folgt dass  $\pi_{1*}$  surjektiv ist.

b) Zeige dass  $f : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto (\sin(t), \sin(2t))$  eine injektive Immersion aber keine Einbettung ist.

*f ist injektiv:* Seien  $t_1, t_2 \in (0, 2\pi)$  mit  $f(t_1) = f(t_2)$ . Damit muss auch gelten dass  $\sin(t_1) = \sin(t_2)$  und  $\sin(2t_1) = \sin(2t_2)$ . Aus diesen beiden Bedingungen folgt dass für  $t_1, t_2$  gelten muss:

- $t_1 = t_2$  oder  $\frac{\pi}{2} - t_1 = t_2 - \frac{\pi}{2}$  oder  $\frac{3\pi}{2} - t_1 = t_2 - \frac{3\pi}{2}$
- $2t_1 = 2t_2$  oder  $\frac{\pi}{2} - 2t_1 = 2t_2 - \frac{\pi}{2}$  oder  $\frac{3\pi}{2} - 2t_1 = 2t_2 - \frac{3\pi}{2}$

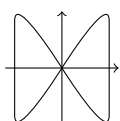
Aus den beiden Bedingungen folgt somit dass  $t_1 = t_2$  gilt.

$f$  ist eine Immersion: Es reicht zu zeigen, dass  $f_{*t} = 0$  für alle  $t$  gilt. Es gilt  $Df(t) = (\cos(t), 2\cos(2t))$ , also

$$Df(t) = 0 \Leftrightarrow \cos(t) = 0 \text{ und } \cos(2t) = 0 \\ \Leftrightarrow \left(t = \frac{\pi}{2} \vee t = \frac{3\pi}{2}\right) \wedge \left(2t = \frac{\pi}{2} \vee 2t = \frac{3\pi}{2} \vee 2t = \frac{5\pi}{2} \vee 2t = \frac{7\pi}{2}\right)$$

Das ist aber nicht möglich, also ist  $Df(t) \neq 0$ .  $Df(t)$  ist die Darstellungsmatrix, also ist auch  $f_{*t} \neq 0$ .

Skizze:



$f$  ist keine Einbettung: Es gilt dass  $\left(\frac{1}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$  nicht in  $(0, 2\pi)$  konvergiert, aber es ist  $f\left(\frac{1}{k}\right) \rightarrow (0, 0) = f(\pi) \in \text{Bild } f$ . Damit ist  $f$  kein Homöomorphismus auf das Bild.

### Lösung 3

Es gilt  $Df(x, y, z) = 2(x, y, az)$ , daraus folgt für  $a = \pm 1$  dass  $Df(x, y, z) \neq 0$  für alle  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  ist, und für  $a = 0$  ist  $Df(x, y, z) \neq 0$  für alle  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus z\text{-Achse}$ . Damit ist für  $c > 0$  dann  $f^{-1}(c)$  in der Menge der regulären Punkte von  $f$  enthalten.

**Für  $c = 0$ :** Wir betrachten nun drei Fälle

$a = 1$ : Für  $\text{id}_{\mathbb{R}^3}$  gilt  $f^{-1}(c) = \{0\} = \mathbb{R}^3 \cap \{0\}^{3-0}$ , also ist  $f^{-1}(0)$  eine 0-dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^3$ .

$a = 0$ : Definiere  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $(x, y, z) \mapsto (z, x, y)$ . Damit ist  $\varphi$  ein Diffeomorphismus, also eine globale Karte von  $\mathbb{R}^3$  und es gilt:

$$\varphi(f^{-1}(0)) = \varphi(z\text{-Achse}) = \mathbb{R} \times \{0\}^2,$$

also ist  $f^{-1}(0)$  eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^3$ .

$a = -1$ :  $f^{-1}(0)$  ist keine Untermannigfaltigkeit. Angenommen es wäre eine, dann wäre  $f^{-1}(0)$  zweidimensional:

$$\varphi: f^{-1}(0) \cap \{(x, y, z) \mid z > 1\} \rightarrow \underbrace{\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_1(0)}}_{x^2+y^2=z^2>1} \quad (x, y, z) \mapsto (x, y)$$

ist ein Homöomorphismus. Da für  $(x, y, 0) \in f^{-1}(0)$  gilt  $x^2 + y^2 = 0$ , also  $x = y = 0$ , zerfällt  $f^{-1}(0) \setminus \{(0, 0, 0)\}$  in zwei Zusammenhangskomponenten, was einen Widerspruch zur Zweidimensionalität von  $f^{-1}(0)$  bildet.  $\nexists$

**Für  $c < 0$ :** Wir betrachten nur noch zwei Fälle

$a = 1, 0$ : Definitionssache, aber ja: Die Aussage über  $\emptyset$  liefert dass es für alle  $p$  in der Untermannigfaltigkeit eine globale Karte gibt.

$a = -1$ : Es gilt

$$f^{-1}(c) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 = c\} = \{(x, y, z) \mid z^2 = x^2 + y^2 + |c|\},$$

das heißt für  $(x, y, z) \in f^{-1}(c)$  gilt  $z \neq 0$ , also  $\{0\} \notin f^{-1}(c)$ . Daraus folgt dass alle Punkte aus  $f^{-1}(c)$  regulär sind.

### Lösung 4

Zeige dass die Gruppen  $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A = 1\}$  und  $O(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid AA^T = I_n\}$  glatte Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^{n \times n}$  sind.

Definiere  $f = \det$ , dann ist  $SL(n, \mathbb{R}) = f^{-1}(1)$ . Dann gilt

$$\frac{\partial(f)}{\partial a_{ij}} = \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \left( \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} \det A[k, j] a_{jk} \right) = (-1)^{i+j} \det A[i, j]$$

$A[k, j]$  bezeichnet die Matrix  $A$  bei der die  $k$ -te Zeile und die  $j$ -te Spalte weggelassen wurden

Es ist  $Df(A) = 0 \Leftrightarrow \forall i, j \det A[i, j] = 0 \Rightarrow \det A = 0$ , damit ist 1 regulärer Wert.

Also ist  $\dim SL(n, \mathbb{R}) = \dim \mathbb{R}^{n \times n} - \dim \mathbb{R} = n^2 - 1$ .

Definiere nun  $g : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A \mapsto AA^T$ . Dann ist  $O(n) = g^{-1}(I_n)$  und es gilt

$$\begin{aligned} Dg(A)(B) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g(A + tB) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (AA^T + tAB^T + tBA + t^2BB^T) = AB^T + BA^T \end{aligned}$$

Seien nun  $A \in O(n, \mathbb{R})$  und  $C \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n}$ . Es bleibt zu zeigen dass ein  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  existiert sodass  $Dg(A)(B) = C$ . Es gilt:

$$Dg(A) \left( \frac{1}{2} CA \right) = \frac{1}{2} \left( \underbrace{AA^T}_{=I} C^T + C \underbrace{AA^T}_{=I} \right) = C$$

Daraus folgt dass  $I$  ein regulärer Wert von  $g$  ist und  $O(n, \mathbb{R})$  eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^{n \times n}$  der Dimension  $n^2 - \dim \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n} = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ .

## Übung 3 vom 12. November 2012

### Aufgabe 1

Es sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie:

- Die kanonische Projektion  $\pi : TM \rightarrow M$  ist ein Submersion.
- Der Nullschnitt  $\sigma : M \rightarrow TM$ ,  $p \mapsto 0 \in T_p M$  ist eine Einbettung.
- Ist  $N$  eine weitere glatte Mannigfaltigkeit und  $\Phi : M \rightarrow N$  glatt, so ist  $\Phi_* : TM \rightarrow TN$  glatt.

### Aufgabe 2

Es sei  $M$  eine glatte  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ .

- Zeigen Sie, dass die Lieklammer im Allgemeinen nicht  $C^\infty(M)$ -bilinear ist.
- Zeigen Sie, dass  $XY$  mit  $XY(p)(f) := X_p(Y(f))$  für  $p \in M$  und  $f \in C^\infty(M)$  im Allgemeinen kein Vektorfeld ist.

Es sei ferner  $(\varphi, U)$  eine Karte von  $M$  und  $X|_U = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $Y|_U = \sum_{i=1}^n \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ , sowie

$[X, Y]|_U = \sum_{i=1}^n \zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  die lokalen Darstellungen von  $X$ ,  $Y$  und  $[X, Y]$  bezüglich  $\varphi$ .

- Zeigen Sie, dass gilt:

$$\zeta^j = \sum_{i=1}^n \left( \xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} - \eta^i \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \right).$$

### Aufgabe 3

- Es seien auf  $\mathbb{R}^2$  die beiden Vektorfelder  $X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$  und  $Y = -2y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}x \frac{\partial}{\partial y}$  gegeben. Skizzieren Sie die Vektorfelder und bestimmen Sie die Flüsse von  $X$  und  $Y$ .

- b) Auf dem Torus  $T^2 = S^1 \times S^1 = \{(e^{i\vartheta^1}, e^{i\vartheta^2}) \in \mathbb{C}^2 \mid \vartheta^1, \vartheta^2 \in \mathbb{R}\}$  betrachten wir für  $k \in \mathbb{N}$  das Vektorfeld  $X_k = \frac{\partial}{\partial \vartheta^1} + \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial \vartheta^2}$ . Bestimmen Sie die Integralkurve von  $X_k$  durch den Punkt  $(1, 1) \in T^2$ .

### Lösung 1

Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Sei desweiteren für alle drei Teilaufgaben  $p \in M$ ,  $\varphi$  eine Karte um  $p$  mit Kartengebiet  $U$  und

$$\bar{\varphi} : \begin{cases} TM|_U & \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_q & \mapsto (\varphi(q), \xi) \end{cases}$$

eine Karte von  $TM$ . Alle diese Karten bilden dann einen Atlas von  $TM$ .

- a) Zeige:  $\pi : TM \rightarrow M$ ,  $T_p M \ni x \mapsto p$  ist eine Submersion.

Es ist

$$\begin{aligned} \varphi \circ \pi \circ \bar{\varphi}^{-1}(\underbrace{y, \xi}_{\in \varphi(U) \times \mathbb{R}^n}) &= \varphi \left( \pi \left( \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi^{-1}(y)} \right) \right) \\ &= \varphi(\varphi^{-1}(y)) = y \end{aligned}$$

also ist  $\pi$  glatt. Desweiteren ist

$$D(\varphi \circ \pi \circ \bar{\varphi}^{-1})|_{(y, \xi)} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

surjektiv und damit auch  $\pi_{*} \bar{\varphi}^{-1}(y, \xi)$ . Offensichtlich ist  $\pi$  surjektiv und damit eine Submersion.

- b) Zeige:  $\sigma : M \rightarrow TM$ ,  $p \mapsto 0_{T_p M}$  ist eine Einbettung.

Es gilt

$$\bar{\varphi} \circ \sigma \circ \varphi^{-1}(y) = \bar{\varphi}(0_{T_{\varphi^{-1}(y)} M}) = (\varphi(\varphi^{-1}(y)), 0) = (y, 0)$$

Daraus folgt dass  $D(\bar{\varphi} \circ \sigma \circ \varphi^{-1})|_y = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}$  injektiv ist und damit auch

$\sigma_{*} \varphi^{-1}(y)$ .  $\sigma$  ist injektiv und stetig,  $\pi \circ \sigma = \text{id}_M$ , also ist  $\sigma^{-1} = \pi|_{\text{Bild}(\sigma)}$  stetig.

- c) Zeige: Ist  $\Phi : M \rightarrow N$  eine glatte Abbildung, so auch  $\Phi_* : TM \rightarrow TN$ .

Sei  $\psi$  eine Karte um  $\Phi(p)$  und  $\bar{\psi}$  die zugehörige Karte von  $TN$ .

$$\begin{aligned} (\bar{\psi} \circ \Phi_* \circ \bar{\varphi}^{-1})(\underbrace{y, \xi}_{\in \varphi(U) \times \mathbb{R}^n}) &= (\bar{\psi} \circ \Phi_*) \left( \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi^{-1}(y)} \right) \\ &= \bar{\psi} \left( \sum_i \left( \sum_j \frac{\partial \Phi^i}{\partial x^j} \Big|_{\varphi^{-1}(y)} \xi^j \right) \frac{\partial}{\partial \psi^i} \Big|_{\Phi(\varphi^{-1}(y))} \right) \\ &= \left( \underbrace{(\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1})(y)}_{\text{glatt}}, \underbrace{\left( \sum_j \underbrace{\frac{\partial \Phi^i}{\partial x^j} \Big|_{\varphi^{-1}(y)}}_{\text{glatt in } y} \overbrace{\xi^j}^{\text{glatt in } \xi} \right)}_{\text{glatt}} \right)_{i=1, \dots, n} \end{aligned}$$

Daraus folgt dass  $\Phi_*$  glatt ist.

## Lösung 2

a) Zu zeigen:  $[\cdot, \cdot]$  ist im Allgemeinen nicht  $C^\infty(M)$ -bilinear.

$M = \mathbb{R}$ ,  $\frac{\partial}{\partial x} = X = Y$ ,  $f = \text{id}$ , „ $x$ “

$$\begin{aligned} [X, \underbrace{fY}_{=x \frac{\partial}{\partial x}}] &\stackrel{c)}{=} \left( 1 \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{=1} - x \underbrace{\frac{\partial 1}{\partial x}}_{=0} \right) \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \\ f[X, Y] &\stackrel{c)}{=} f \left( 1 \underbrace{\frac{\partial 1}{\partial x}}_{=0} - 1 \underbrace{\frac{\partial 1}{\partial x}}_{=0} \right) \frac{\partial}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

b) Zu zeigen: für  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$  ist  $XY$  mit  $(XY)|_p(f) = X_p(Y(f))$  im Allgemeinen keine Derivation.

$$\begin{aligned} (XY)_p(fg) &= X_p(Y(fg)) \\ &= X_p(q \mapsto Y_q(fg)) \\ &= X_p(q \mapsto f(q)Y_q(g) + g(q)Y_q(f)) \\ &= X_p(fY(g) + gY(f)) \\ &= X_p(fY(g)) + X_p(gY(f)) \\ &= f(p) \cdot X_p(Y(g)) + Y_p(g) \cdot X_p(f) + g(p) \cdot X_p(Y(f)) + Y_p(f)X_p(g) \\ &= f(p) \cdot (XY)|_p(g) + g(p)(XY)|_p(f) + \underbrace{Y_p(g)X_p(f) + Y_p(f)X_p(g)}_{\neq 0} \end{aligned}$$

$M = \mathbb{R}$ ,  $X = Y = \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $f = g = \text{id} \Rightarrow$  Leibnitz-Regel gilt nicht.

c) Bemerkung: Ist  $X|_U = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  lokale Darstellung bezüglich  $\varphi$  von  $X \in \mathcal{V}(M)$ , so ist

$$\xi^i = X(\varphi^i)$$

Seien  $X|_U = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $Y|_U = \sum_i \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Damit gilt dann

$$\begin{aligned} [X, Y](x^j) &= (XY - YX)(x^j) \\ &= X(Y(x^j)) - Y(X(x^j)) \\ &= X \left( \sum_i \eta^i \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^i}(x^j)}_{\delta_{ij}} \right) - Y \left( \sum_i \xi^i \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^i}(x^j)}_{\delta_{ij}} \right) \\ &= X(\eta^j) - Y(\xi^j) \\ &= \sum_i \left( \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}(\eta^j) - \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}(\xi^j) \right) \end{aligned}$$

## Lösung 3

a) Es seien  $X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $Y = -2y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}x \frac{\partial}{\partial y} \in \mathcal{V}(\mathbb{R})$ , bestimme  $\gamma_x^t$  und  $\gamma_y^t$ .

Für  $X: t \mapsto \gamma_*^t(p)$  ist Integralkurve von  $X$  mit  $\gamma_x^0(p) = p$ . Gesucht: Kurve mit  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma_{*t} \frac{\partial}{\partial t} = X(\gamma(t)) \Leftrightarrow \gamma_{*t} \frac{\partial}{\partial t}(x) = X(\gamma(t))(x)$  und  $\gamma_{*t} \frac{\partial}{\partial t}(y) = X(\gamma(t))(y) \Leftrightarrow \gamma_1'(t) = -\gamma_2(t)$  und  $\gamma_2'(t) = \gamma_1(t)$ . Das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} \text{ und } \gamma(0) = p$$

hat als Lösung  $t \mapsto \exp(t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) \cdot p$ . Es gilt:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2n} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2n+1} = (-1)^n \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \exp \left( t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k (\dots)^k \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} t^{2k} & - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k \\ - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} t^{2k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daraus folgt  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \cdot p = \gamma_x^t(p)$

Für  $Y: \gamma_{*t} \frac{\partial}{\partial t} = Y(\gamma(t))$ ,  $\gamma(0) = p \xrightarrow{\text{analog}} \gamma'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \gamma(t)$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^{2n} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

Daraus folgt  $\underbrace{\gamma(t)}_{=\gamma_x^t(p)} = \exp(t \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}) \cdot p = \begin{pmatrix} \cos(t) & -2\sin(t) \\ \frac{1}{2}\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \cdot p$

b) asdf

## Übung 4 vom 19. November 2012

### Aufgabe 1

Es seien  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ . Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass  $X$  und  $Y$  vollständig sind. Zeigen Sie dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i)  $[X, Y] = 0$ .

(ii) Die Flüsse von  $X$  und  $Y$  kommutieren, d.h.  $\gamma_X^t \circ \gamma_Y^s = \gamma_Y^s \circ \gamma_X^t$  für alle  $s, t \in \mathbb{R}$ .

**Anmerkung:** Die Aussage gilt auch für nicht vollständige Vektorfelder für geeignete Zeiten  $s$  und  $t$ .

### Aufgabe 2

Es sei  $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$  eine offene Überdeckung von  $M$  und für alle  $\alpha, \beta \in I$  mit  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  seien eine glatte Funktion  $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}_k(\mathbb{R})$  gegeben. Es gelte  $g_{\alpha\beta}(p) = g_{\alpha\gamma}(p) \cdot g_{\gamma\beta}(p)$  für alle  $\alpha, \beta, \gamma \in I$  und  $p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ .

Weiter sei

$$E := \bigcup_{\alpha \in I} (U_\alpha \times \mathbb{R}^k) / \sim,$$

wobei für  $p \in U_\alpha$ ,  $q \in U_\beta$  und  $v, w \in \mathbb{R}^k$  gelte:

$$(p, v) \sim (q, w) \Leftrightarrow p = q \text{ und } v = g_{\alpha\beta}(q)w$$

Zeigen Sie, dass  $\pi : E \rightarrow M, [p, v] \mapsto p$  ein Vektorbündel über  $M$  vom Rang  $k$  ist.

### Aufgabe 3

Es seien  $E, E'$  Vektorbündel über  $M$  und  $F : E \rightarrow E'$  ein Bündelmorphismus, der faserweise ein Isomorphismus ist, d.h für alle  $p \in M$  ist  $F_p : E_p \rightarrow E'_p$  ein Isomorphismus.

Zeigen Sie, dass  $F$  ein Bündelisomorphismus ist, es also einen zu  $F$  inversen Bündelmorphismus gibt.

### Aufgabe 4

a) In einem Vektorbündel  $E$  vom Rang  $k$  über  $M$  gebe es  $k$  punktweise linear unabhängige Schnitte. Zeigen Sie, dass  $E$  trivial ist.

b) Zeigen Sie, dass  $TS^3$  trivial ist.

**Hinweis:** Unter dem kanonischen Isomorphismus  $T_p \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}^4$  entspricht  $T_p S^3 \subset T_p \mathbb{R}^4$  dem orthogonalen Komplement  $p^\perp$ .

### Lösung 1

(ii)  $\Rightarrow$  (i): Es ist  $\gamma_X^{-t} \circ \gamma_Y^s \circ \gamma_X^t(p) = \gamma_X^{-t} \circ \gamma_X^t \circ \gamma_Y^s(p) = \gamma_Y^s(p)$ , und daraus folgt

$$\begin{aligned} Y|_p &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\gamma_Y^s(p)) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} ((\gamma_X^{-t} \circ \gamma_Y^s)(\gamma_X^t(p))) \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\gamma_X^{-t} \circ (s \mapsto \gamma_Y^s(\gamma_X^t(p)))) \\ &= \gamma_{X*}^{-t} Y|_{\gamma_X^t(p)} \end{aligned}$$

Es gilt  $[X, Y]|_p = (\mathcal{L}_X Y)_p = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\gamma_X^{-t} Y)_p = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} Y_p = 0$ .

(i)  $\Rightarrow$  (ii): betrachte  $\gamma_{X*}^{-t} Y_{\gamma_X^t(p)} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\gamma_X^{-t} \circ \gamma_Y^s \circ \gamma_X^t(p))$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} (\gamma_{X*}^{-t} Y_{\gamma_X^t(p)}) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\gamma_{X*}^{-(t_0+t)} Y_{\gamma_X^{t_0+t}(p)}) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} ((\gamma_X^{-t_0} \circ \gamma_X^{-t})_* Y_{\gamma_X^t(\gamma_X^{t_0}(p))}) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\gamma_{X*}^{-t_0} \gamma_{X*}^{-t} Y_{\gamma_X^t(\gamma_X^{t_0}(p))}) \\ &= \gamma_{X*}^{-t_0} \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\gamma_{X*}^{-t} Y_{\gamma_X^t(\gamma_X^{t_0}(p))}) \right) \\ &= \gamma_{X*}^{-t_0} \left( (\mathcal{L}_X Y)_{\gamma_X^{t_0}(p)} \right) = \gamma_{X*}^{-t_0} \underbrace{([X, Y]_{\gamma_X^{t_0}(p)})}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt dass  $t \mapsto \gamma_{X*}^{-t} Y_{\gamma_X^t(p)}$  konstant ist, also ist

$$\gamma_{X*}^{-t} Y_{\gamma_X^t(p)} = \underbrace{\gamma_X^{-0}}_{=\text{id}_M} Y_{\gamma_X^0(p)} = Y_p$$

Sei  $c(s) := \gamma_X^{-t}(\gamma_Y^s(q))$ , dann folgt

$$\dot{c}(s) = \gamma_{X*}^{-t} \left( \frac{d}{ds} (\gamma_Y^s(q)) \right) = \gamma_{X*}^{-t} Y_{\gamma_Y^s(q)} = Y_{\gamma_X^{-t}(\gamma_Y^s(q))} = Y_{c(s)}$$

Daraus folgt dass  $c$  eine eindeutige Integralkurve zu  $Y$  durch  $c(0) = \gamma_X^{-t}(q)$  ist.

Damit folgt dann

$$\gamma_X^{-t}(\gamma_Y^s(q)) = \gamma_Y^s(\gamma_X^{-t}(q))$$

und damit

$$\gamma_X^{-t} \circ \gamma_Y^s = \gamma_Y^s \circ \gamma_X^{-t}$$

## Lösung 2

Sei  $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$  eine offene Überdeckung von  $M$ ,  $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}(k, \mathbb{R})$ ,  $g_{\alpha\gamma}(p) = g_{\alpha\beta}(p) \cdot g_{\beta\gamma}(p)$  für alle  $p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ . Sei  $E := \dot{\bigcup}_{\alpha \in I} (U_\alpha \times \mathbb{R}^k) / \sim$ , wobei für  $(p, v)_\alpha \in U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ ,  $(q, w)_\beta \in U_\beta \times \mathbb{R}^k$  gilt  $(p, v)_\alpha \sim (q, w)_\beta \Leftrightarrow p = q$  und  $v = g_{\alpha\beta}(p) \cdot w$ .

*Behauptung:*  $\pi : E \rightarrow M$ ,  $[p, v] \mapsto p$  ist ein Vektorbündel.

„ $\sim$ “ ist Äquivalenzrelation: •  $(p, v)_\alpha \sim (p, v)_\alpha$  gilt:  $g_{\alpha\alpha}(p) = \text{id}$   $v = g_{\alpha\alpha}(p) \cdot v$

$$\underbrace{g_{\alpha\alpha}(p)}_{\in \text{GL}(k, \mathbb{R})} \cdot g_{\alpha\alpha}(p)$$

•  $(p, v)_\alpha \sim (q, w)_\beta \Rightarrow (q, w)_\beta \sim (p, v)_\alpha$  gilt:  $p = q$ ,  $v = g_{\alpha\beta}(p)w \Rightarrow w = (g_{\alpha\beta}(p))^{-1}v = g_{\beta\alpha}(p) \cdot v$   $(g_{\alpha\alpha}(p) = g_{\alpha\beta}(p)g_{\beta\alpha}(p))$

• Transitivität folgt aus  $g_{\alpha\gamma} = g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}$

$E_p$  ist  $k$ -dimensionaler Vektorraum:

$$[(p, v)_\alpha] + \lambda[(p, w)_\alpha] := [(p, v + \lambda w)_\alpha]$$

unabhängig von  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} [(p, v)_\beta] + \lambda[(p, w)_\beta] &= [(p, g_{\alpha\beta}(p)v)_\alpha] + \lambda[(p, g_{\alpha\beta}(p)w)_\alpha] \\ &= [(p, g_{\alpha\beta}(p)v + \lambda g_{\alpha\beta}(p)w)_\alpha] \\ &= [(p, g_{\alpha\beta}(p) \cdot (v + \lambda w))_\alpha] = [(p, v + \lambda w)_\beta] \end{aligned}$$

$k$ -dimensional:  $q|_{\{p\} \times \mathbb{R}^k} : \{p\} \times \mathbb{R}^k \rightarrow E_p$  ist Vektorraum-Isomorphismus (wobei  $q : \dot{\bigcup}_{\alpha \in I} (U_\alpha \times \mathbb{R}^k) \rightarrow E$ )

**Bündelkarten (glatt):**  $\Phi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^k \rightarrow E|_{U_\alpha}$ ,  $(p, v) \mapsto [(p, v)_\alpha]$  ist Homöomorphismus, da  $\sim|_{(U_\alpha \times \mathbb{R}^k) \times (U_\alpha \times \mathbb{R}^k)}$  die triviale Äquivalenzrelation ist.

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}(p, v) &= \Phi_\alpha([(p, v)_\beta]) \\ &= \Phi_\alpha([(p, g_{\alpha\beta}(p)v)_\alpha]) \\ &= (p, g_{\alpha\beta}(p)v) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}$  ist glatt.  $\Phi_\alpha|_{E_p}$  ist Vektorraum-Isomorphismus.

„normale“ Karten: Sei  $\varphi$  Karte von  $M$  mit Kartengebiet  $U \subset U_\alpha \rightsquigarrow \bar{\varphi}_\alpha : E|_U \rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^k$ ,  $e \mapsto (\varphi(\pi(e)), (\Phi_\alpha)^2(e))$ .

Glatte Kartenwechsel ✓

**E Hausdorffsch:**  $[(p, v)_\alpha] \neq [(q, w)_\beta] \in E$

$p \neq q$ : Die Urbilder in  $M$  trennender Umgebungen von  $p$  und  $q$  unter  $\pi$  trennen die Punkte in  $E$ .

$p = q$ :  $v \neq g_{\alpha\beta}(p)w \rightsquigarrow$  trennen im  $\mathbb{R}^k$  und über  $\Phi_\alpha$  zurückziehen.

**abzählbare basis der Topologie (für  $U_\alpha \times \mathbb{R}^k$  ✓):** Es gibt ein  $I' \subseteq I$  mit  $I$  abzählbar und  $M = \bigcup_{\alpha \in I'} U_\alpha$ . Sei  $\{V_j \mid j \in J'\}$  abzählbare Basis der Topologie von  $M$ . Dann ist mit  $J = \{j \in J' \mid V_j \subset U_\alpha \text{ für ein } \alpha \in I\}$ ,  $\{V_j \mid j \in J\}$  auch



abzählbare Basis der Topologie von  $M$ , denn  $U \subset M \Rightarrow$   
 $\text{offen}$

$$\begin{aligned} U &= \bigcup_{\alpha \in I} (U_\alpha \cap U) \\ &= \bigcup_{\alpha \in I} \bigcup_{\substack{j \in J' \\ U_j \subset U_\alpha \cap U}} V_j & (U_j \subset U_\alpha \cap U \Rightarrow j \in J) \\ &= \bigcup_{\alpha \in I} \bigcup_{\substack{j \in J \\ V_j \subset U_\alpha \cap M}} V_j \end{aligned}$$

Für  $j \in J$  sei  $\alpha(j) \in I$ , sodass  $V_j \subset U_{\alpha(j)}$ . Setze  $I' := \{\alpha(j) \mid j \in J\}$ .

$$\bigcup_{\alpha \in I'} U_\alpha = \bigcup_{j \in J} U_{\alpha(j)} \supseteq \bigcup_{j \in J} V_j = M$$

### Lösung 3

Es seien  $E, E'$  Vektorbündel über  $M$  und  $F : E \rightarrow E'$  sei ein Bündelmorphismus mit dem Isomorphismus  $F_p : E_p \rightarrow E'_p$  für alle  $p \in M$ .

*Behauptung:*  $F$  ist ein Bündelisomorphismus

$F$  ist surjektiv, denn für  $e \in E'$  ist  $F_{\pi'(e)} : E_{\pi'(e)} \rightarrow E'_{\pi'(e)}$  bereits ein Isomorphismus, also existiert ein Urbild  $\tilde{e} \in E_{\pi'(e)} \subset E$  mit  $F(\tilde{e}) = F_{\pi'(e)}(\tilde{e}) = e$ . Dass  $F$  injektiv ist folgt analog, da  $\pi' \circ F = \pi$ .

Damit existiert ein  $G : E' \rightarrow E$  mit  $G \circ F = \text{id}$ ,  $F \circ G = \text{id}$  und  $\pi \circ G = \pi'$ . Damit gilt auch

$$G(e') = (F_{\pi'(e)})^{-1}(e')$$

Es sei nun ein offenes  $U \subseteq M$  mit den Trivialisierungen  $E|_U$  und  $E'|_U$  gegeben.

$$\begin{array}{ccc} E|_U & \xrightarrow[\cong]{\Phi} & U \times \mathbb{R}^k \\ \left( \begin{array}{c} \uparrow \\ F \\ \downarrow \end{array} \right) G & & \Phi' \circ F \circ \Phi^{-1} = \tilde{F} \left( \begin{array}{c} \uparrow \\ \tilde{F} \\ \downarrow \end{array} \right) \tilde{G} = \Phi \circ G \circ \Phi'^{-1} \\ E'|_U & \xrightarrow[\cong]{\Phi'} & U \times \mathbb{R}^k \end{array}$$

Da  $\pi' \circ F = \pi$  ist, existiert eine Abbildung  $f : U \rightarrow \text{GL}(k, \mathbb{R})$  sodass  $\tilde{F}(p, v) = (p, f(p) \cdot v)$  ist. Daraus folgt dass  $\tilde{G}(p, w) = (p, (f(p))^{-1}w)$  glatt ist, da  $\cdot^{-1} : \text{GL}(k, \mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}(k, \mathbb{R})$  glatt ist (denn  $A^{-1} = \frac{1}{\det A}((-1)^{i+j} \det A[i, j])_{i,j}^T$ ). Damit ist  $G$  glatt und somit auch ein Bündelmorphismus.

### Lösung 4

(a) *Behauptung:* Es sei  $E$  ein Vektorbündel vom Rang  $k$  über  $M$  auf dem  $k$  punktweise linear unabhängige Schnitte existieren. Dann ist  $E$  trivial.

Es seien  $\sigma_1, \dots, \sigma_k : M \rightarrow E$  Schnitte, die punktweise linear unabhängig sind. Dann hat  $E_p$  als Basis  $\sigma_1(p), \dots, \sigma_k(p)$ . Definiere nun  $F : E \rightarrow M \times \mathbb{R}^k$ ,  $\sum_{i=1}^k a_i \sigma_i(p) \mapsto (p, a_1, \dots, a_k)$ . Es gilt  $\pi_1 \circ F = \pi$  und  $F_p$  ist ein Isomorphismus.  $F$  ist glatt, denn für eine Bündelkarte  $\Phi$  ist  $\tilde{\sigma}_i = \Phi^2 \circ \sigma_i$ , das heißt  $\Phi(\sigma(p)) = (p, \tilde{\sigma}(p))$ . Mit  $A(p) = (\tilde{\sigma}_1(p), \dots, \tilde{\sigma}_k(p))^{-1}$  gilt:

$$F \circ \Phi^{-1}(p, v) = (p, A(p) \cdot v)$$

$\Phi^2$  ist die zweite Komponente

Daher ist  $F$  glatt und mit Aufgabe 3 folgt, dass  $F$  ein Bündelmorphismus ist.

(b) *Zu zeigen:*  $T S^3 \cong S^3 \times \mathbb{R}^3$

Es gilt:

$$T_p S^3 \cong p^\perp \ni \underbrace{\begin{pmatrix} -p_2 \\ p_1 \\ -p_4 \\ p_3 \end{pmatrix}}_{=: \sigma_1(p)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} p_3 \\ -p_4 \\ -p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}}_{\sigma_2(p)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -p_4 \\ -p_3 \\ p_2 \\ p_1 \end{pmatrix}}_{\sigma_3(p)}$$

Dadurch sehen wir dass  $\sigma_i(p) \perp \sigma_j(p)$  für  $i \neq j$ , woraus folgt dass  $\sigma_1, \dots, \sigma_3$  punktweise linear unabhängige Schnitte sind. Mit (a) folgt dann die Behauptung.

**Anmerkung** Der Raum der Schnitte  $\Gamma(M, E)$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, also ist lineare Unabhängigkeit für Schnitte definiert. Linear unabhängige Schnitte sind im Allgemeinen *nicht* punktweise linear unabhängig. Betrachte beispielsweise

$$\pi_1 : \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}_{\substack{\text{Mf.} \\ \text{VR}}} \rightarrow \mathbb{R}$$

Dann sind  $\sigma_1(t) = (t, 1)$  und  $\sigma_2(t) = (t, t)$  linear unabhängig, aber in jedem Punkt linear abhängig.

## Übung 5 vom 26. November 2012

### Aufgabe 1

Beweisen Sie Proposition 5.4 der Vorlesung: Die  $(r, s)$ -Tensorfelder auf  $M$  entsprechen genau den  $C^\infty(M)$ -multilinearen Abbildungen

$$\underbrace{\mathcal{V}^*(M) \times \dots \times \mathcal{V}^*(M)}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{\mathcal{V}(M) \times \dots \times \mathcal{V}(M)}_{s\text{-mal}} \rightarrow C^\infty(M)$$

### Aufgabe 2

Bestimmen Sie, welche der folgenden auf  $\mathbb{R}^3$  definierten Differentialformen geschlossen und welche exakt sind:

- a)  $\omega_1 = yzdx + xzdy + xydz$
- b)  $\omega_2 = y^2dx + x^3yzdy + x^2ydz$
- c)  $\omega_3 = xdx + x^2y^2dy + yzdz$
- d)  $\omega_4 = 2xy^2 dx \wedge dy + z dy \wedge dz$

### Aufgabe 3

Es sei  $\vartheta : S^1 \setminus \{1\} \rightarrow (0, 2\pi), e^{i\vartheta} \mapsto \vartheta$ . Zeigen Sie, dass sich  $d\vartheta$  auf ganz  $S^1$  fortsetzen lässt.

**Einschub** Für ein Tensorprodukt  $V \otimes W$  und ein Element  $v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 \in V \otimes W$  gilt im Allgemeinen

$$v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 \neq v_3 \otimes w_3$$

*Beispiel:*  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Lösung 1**

Wir zeigen dass die  $(r, s)$ -Tensorfelder den  $C^\infty(M)$ -multilinearen Abbildungen entsprechen.

$$\underbrace{\mathcal{V}^*(M) \times \dots \times \mathcal{V}^*(M)}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{\mathcal{V}(M) \times \dots \times \mathcal{V}(M)}_{s\text{-mal}}$$

Zunächste zeigen wir die Behauptung punktweise. Sei dazu  $p \in M$  und die Abbildung

$$F_p : T_p M \otimes \dots \otimes T_p M \otimes T_p^* M \otimes \dots \otimes T_p^* M \rightarrow \text{Multilin}_{\mathbb{R}}(T_p^* M \otimes \dots \otimes T_p M)$$

definiert durch

$$\begin{aligned} F_p \left( \sum_i a_i \overbrace{X_1^i}^{\in T_p M} \otimes \dots \otimes X_r^i \otimes \overbrace{\omega_1^i}^{\in T_p^* M} \otimes \dots \otimes \omega_s^i \right) (\eta_1, \dots, \eta_r, Y_1, \dots, Y_s) \\ := \sum_i a_i \eta_1(X_1^i) \cdot \dots \cdot \eta_r(X_r^i) \cdot \omega_1^i(Y_1) \cdot \dots \cdot \omega_s^i(Y_s) \end{aligned}$$

**$F_p$  ist wohldefiniert:** •  $F_p(\dots)$  ist  $\mathbb{R}$ -multilinear ✓

- Sei  $Z_1, \dots, Z_r$  Basis von  $T_p M$ ,  $\mu_1, \dots, \mu_s$  die dazu duale Basis von  $T_p^* M$ . Damit ist  $\{Z_{i_1} \otimes \dots \otimes Z_{i_r} \otimes \mu_{j_1} \otimes \dots \otimes \mu_{j_s} \mid i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \in \{1, \dots, n\}\}$  eine Basis von  $T_p M \otimes \dots \otimes T_p^* M$ . Sei  $X_k^i = \sum_{\alpha} \chi_{k,\alpha}^i Z_{\alpha}$ ,  $\omega_l^i = \sum_{\beta} w_{l,\beta}^i \mu_{\beta}$ , dann folgt

$$\begin{aligned} & \sum_i a_i X_1^i \otimes \dots \otimes \omega_s^i \\ &= \sum_i a_i \left( \sum_{\alpha_1} \chi_{1,\alpha_1}^i Z_{\alpha_1} \right) \otimes \dots \otimes \left( \sum_{\beta_s} w_{s,\beta_s}^i \mu_{\beta_s} \right) \\ &= \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_r \\ \beta_1, \dots, \beta_s}} \underbrace{\left( \sum_i a_i \chi_{1,\alpha_1}^i \cdot \dots \cdot \chi_{r,\alpha_r}^i \cdot w_{1,\beta_1}^i \cdot \dots \cdot w_{s,\beta_s}^i \right)}_{=A_{\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s}} Z_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes Z_{\alpha_r} \otimes \mu_{\beta_1} \otimes \dots \otimes \mu_{\beta_s} \end{aligned}$$

Damit folgt insgesamt

$$\begin{aligned} F_p \left( \sum_i a_i X_1^i \otimes \dots \right) &= \sum a_i \eta_1(X_1^i) \cdot \dots \cdot \omega_s^i(Y_s) \\ &= \dots \\ &= \sum_{\alpha_1, \dots, \beta_s} A_{\alpha_1, \dots, \beta_s} \eta_1(Z_{\alpha_1}) \cdot \dots \cdot \mu_{\beta_s}(Y_s) \\ &= F_p \left( \sum A_{\alpha_1, \dots, \beta_s} Z_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \mu_{\beta_s} \right) \end{aligned}$$

**$F_p$  ist  $\mathbb{R}$ -linear**

**$F_p$  ist surjektiv:** Sei  $g : T_p^* M \times \dots \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $\mathbb{R}$ -multilineare Abbildung, dann ist  $g$  eindeutig bestimmt durch

$$\stackrel{\mathbb{R} \ni}{A_{\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s}} = g(\mu_{\alpha_1}, \dots, \mu_{\alpha_r}, \beta_1, \dots, \beta_s), \text{ mit } \alpha_1, \dots, \beta_s \in \{1, \dots, n\}$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned} F_p \left( \sum A_{\alpha_1, \dots, \beta_s} Z_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \mu_{\beta_s} \right) (\mu_{\tilde{\alpha}_1}, \dots, Z_{\tilde{\beta}_s}) &= \sum A_{\alpha_1, \dots, \beta_s} \underbrace{\mu_{\tilde{\alpha}_1}(Z_{\alpha_1})}_{\delta_{\tilde{\alpha}_1 \alpha_1}} \cdot \dots \cdot \underbrace{\mu_{\beta_s}(Z_{\tilde{\beta}_s})}_{\delta_{\beta_s \tilde{\beta}_s}} \\ &= A_{\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\beta}_s} \\ &= g(\mu_{\tilde{\alpha}_1}, \dots, Z_{\tilde{\beta}_s}) \end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$g = F_p \left( \sum A_{\alpha_1, \dots, \beta_s} Z_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes Z_{\beta_s} \right)$$

**$F_p$  ist injektiv:** Ist  $0 = F_p(\sum A_{\alpha_1, \dots, \beta_s} Z_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \mu_{\beta_s})$ , so folgt

$$\begin{aligned} 0 &= F_p(\mu_{\tilde{\alpha}_1}, \dots, \mu_{\tilde{\alpha}_r}, Z_{\tilde{\beta}_1}, \dots, Z_{\tilde{\beta}_s}) \\ &= A_{\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\beta}_s} \text{ für alle } \tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\beta}_s \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

Daraus folgt  $\sum A_{\alpha_1, \dots, \beta_s} Z_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \mu_{\beta_s} = 0$

Insgesamt folgt damit dass  $F_p$  ein Isomorphismus von  $\mathbb{R}$ -Vektorräumen ist. Wir definieren nun

$$F : \mathcal{T}_s^r(M) \rightarrow \text{Multilin}_{C^\infty(M)}(\underbrace{\mathcal{V}^*(M) \times \dots \times \mathcal{V}^*(M)}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{\mathcal{V}(M) \times \dots \times \mathcal{V}(M)}_{s\text{-mal}}, C^\infty(M))$$

durch

$$F(S)(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s)(p) := F_p(S_p)(\omega_1|_p, \dots, \omega_r|_p, X_1|_p, \dots, X_s|_p)$$

**$F(S)(\omega_1, \dots, X_s) \in C^\infty(M)$ :** lokale Koordinaten  $\rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial x^i} x^i$ , Koeffizienten von  $\omega_1, \dots, X_s$  glatt  $\Rightarrow F(S)(\omega_1, \dots, X_s)$  glatt

**$F(S)$  ist  $C^\infty(M)$ -multilinear:** Seien  $f \in C^\infty(M)$  und  $\tilde{\omega}_i \in \mathcal{V}^*(M)$ , damit ist dann:

$$\begin{aligned} F(S)(\omega_1, \dots, \omega_i + f\tilde{\omega}_i, \dots, X_s)(p) &= F_p(S_p)(\omega_1|_p, \dots, \omega_i|_p + f(p)\tilde{\omega}_i|_p, \dots, X_s|_p) \\ &= F_p(S_p)(\omega_1|_p, \dots, \omega_i|_p, \dots, X_s|_p) \\ &\quad + f(p)F_p(S_p)(\omega_1|_p, \dots, \tilde{\omega}_i|_p, \dots, X_s|_p) \\ &= F(S)(\omega_1, \dots, \omega_i, \dots, X_s)(p) \\ &\quad + f(p)F(S)(\omega_1, \dots, \tilde{\omega}_i, \dots, X_s)(p) \end{aligned}$$

**$F$  ist  $C^\infty(M)$ -linear ✓**

**$F$  ist injektiv:**  $F(S) = 0$ , also ist  $F_p(S_p) = 0$  für alle  $p \in M$ . Da  $F_p$  injektiv ist, ist  $S_p = 0$  für alle  $p \in M$  und damit  $S = 0$ .

**$F$  ist surjektiv:** Sei  $g : \mathcal{V}^*(M) \times \dots \times \mathcal{V}^*(M) \times \mathcal{V}(M) \times \dots \times \mathcal{V}(M) \rightarrow C^\infty(M)$  eine  $C^\infty(M)$ -multilineare Abbildung. Seien weiter  $p \in M$ ,  $\varphi$  eine Karte um  $p$  und  $\chi$  eine glatte cut-off Funktion mit  $\text{supp } \chi \subset \text{Kartengebiet von } \varphi$  und  $\chi \equiv 1$  auf einer Umgebung  $V$  von  $p$ . Für  $q \in V$  ist

$$\begin{aligned} g(\omega_1, \dots, X_s)(q) &= g(\chi\omega_1 + (1-\chi)\omega_1, \dots, \chi X_s + (1-\chi)X_s)(q) \\ &= g(\chi\omega_1, \chi\omega_2 + (1-\chi)\omega_2, \dots, \chi X_s + (1-\chi)X_s)(q) \\ &\quad + \underbrace{(1-\chi)(q)}_{=0} g(\omega_1, \chi\omega_2 + (1-\chi)\omega_2, \dots) \\ &= g(\chi\omega_1, \chi\omega_2 + (1-\chi)\omega_2, \dots, \chi X_s + (1-\chi)X_s)(q) \\ &= \dots = g(\chi\omega_1, \dots, \chi X_s)(q) \quad (*) \end{aligned}$$

Sei  $S_p := \sum A_{\alpha_1, \dots, \beta_s}(p) \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}} \Big|_p \otimes \dots \otimes dx^{\beta_s}|_p$  mit

$$A_{\alpha_1, \dots, \beta_s}(p) = g(\chi dx^{\alpha_1}, \dots, \chi \frac{\partial}{\partial x^{\beta_s}})$$

Bachrechnen ergibt dass andere Karten das gleiche  $S_p$  liefern. Daher ist  $S$  auf ganz  $M$  definiert. Wegen (\*) und der lokalen Darstellung gilt  $F(S) = g$ .

## Lösung 2

a)  $\omega_1 = yzdx + xzdy + xydz$  ist geschlossen und exakt

$$\left( df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right)$$

$$d(xyz) = (yz)dx + (xz)dy + (xy)dz \Rightarrow 0 = d \circ d(xyz) = d\omega_1$$

b)  $\omega_2 = y^2dx + x^3yzdy + x^2ydz$  ist weder geschlossen noch exakt.

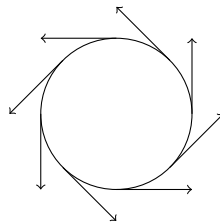
$d\omega_2 \neq 0$  (nachrechnen); angenommen  $\exists \eta : d\eta = \omega_2 \Rightarrow 0 = d^2\eta = d\omega_2 \neq 0 \not\Rightarrow \omega_2$   
nicht exakt

c)  $d\omega_3 \neq 0$

d)  $\omega_4$  ist exakt

## Lösung 3

Skizze:



## Übung 6 vom 3. Dezember 2012

### Aufgabe 1

Es sei  $(M, g)$  eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie:

- Für je zwei Punkte in  $M$  existiert eine stückweise glatte Kurve, die diese verbindet.
- Die Abstandsfunktion

$$d(p, q) = \inf \{ \mathcal{L}(c) \mid c : [0, 1] \rightarrow M \text{ ist stückweise glatt, } c(0) = p, c(1) = q \}$$

ist eine Metrik, welche die ursprüngliche Topologie erzeugt.

### Aufgabe 2

Es sei für  $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\langle x, y \rangle := -x^0y^0 + x^1y^1 + \dots + x^ny^n,$$

sowie

$$\mathbb{H}^n := \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = -1, x^0 > 0 \}.$$

Zeigen Sie, dass  $\mathbb{H}^n$  eine glatte Mannigfaltigkeit ist, und  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  für alle  $p \in \mathbb{H}^n$  ein Skalarprodukt auf  $T_p \mathbb{H}^n \subset T_p \mathbb{R}^{n+1}$  definiert und die Gesamtheit dieser Skalarprodukte eine Riemannsche Metrik  $g$  auf  $\mathbb{H}^n$  ist.

Die Riemannsche Mannigfaltigkeit  $(\mathbb{H}^n, g)$  heißt *n-dimensionaler hyperbolischer Raum*.

### Aufgabe 3

Es sei  $s = (-1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Zeigen Sie:

a) Die Abbildung  $\varphi$  mit

$$\varphi(x) := s - \frac{2(x-s)}{\langle x-s, x-s \rangle}, \quad x \in \mathbb{H}^n,$$

ist ein Diffeomorphismus von  $\mathbb{H}^n$  auf  $\{\xi \in \mathbb{R}^n \cong \{0\} \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\xi\| < 1\}$ .

b) In der Karte  $\varphi$  hat die Riemannsche Metrik auf  $\mathbb{H}^n$  die Form

$$\frac{4}{(1 - \|\xi\|^2)^2} \sum_{i=1}^n d\xi^i \otimes d\xi^i.$$

### Lösung 1

a) asdf

b) asdf

### Lösung 2

asdf

### Lösung 3

a) asdf

b) asdf

## Übung 7 vom 10. Dezember 2012

### Aufgabe 1

Es sei  $S^2$  versehen mit der von der euklidischen Metrik auf  $\mathbb{R}^3$  induzierten Metrik. Weiter sei  $c : [0, 1] \rightarrow S^2$  eine kürzeste  $C^1$ -Kurve zwischen  $c(0) = N = (0, 0, 1)$  und  $c(1)$ . Zeigen Sie, dass das Bild von  $c$  in einem Großkreis enthalten ist.

**Hinweis:** Betrachten Sie die Parametrisierung  $(\varphi, \vartheta) \mapsto (\cos(\vartheta) \cos(\varphi), \cos(\vartheta) \sin(\varphi), \sin(\vartheta))$ .

### Aufgabe 2

Es sei  $M$  eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^k$  und  $\nabla$  der kanonische Zusammenhang auf dem Tangentialbündel des  $\mathbb{R}^k$ . Für ein Vektorfeld  $X$  auf  $M$  bezeichne  $\tilde{X}$  eine beliebige Fortsetzung von  $X$  zu einem Vektorfeld auf  $\mathbb{R}^k$  und für  $v \in \mathbb{R}^k \cong T_p \mathbb{R}^k$  bezeichne  $v^{T_p M}$  die orthogonale Projektion von  $v$  auf den Tangentialraum von  $M$  an  $p$ .

Zeigen Sie, dass

$$\nabla^M : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \rightarrow \mathcal{V}(M) \quad (\nabla_X^M Y)_p := ((\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})_p)^{T_p M},$$

einen Zusammenhang auf dem Tangentialbündel von  $M$  definiert.

### Aufgabe 3

a) Es sei  $E$  ein Vektorbündel über  $M$  und  $\nabla$  ein Zusammenhang auf  $E$ . Weiter sei

$$\nabla^* : \mathcal{V}(M) \times \Gamma(E^*) \rightarrow \Gamma(E^*), \quad (\nabla_X^*(s^*))_p(v) := X_p(s^*(\tilde{v})) - s_p^*((\nabla_X(\tilde{v}))_p)$$

für  $X \in \mathcal{V}(M)$ ,  $s^* \in \Gamma(E^*)$ ,  $v \in E_p$  und  $\tilde{v} \in \Gamma(E)$  eine Fortsetzung von  $v$ .

Zeigen Sie, dass  $\nabla^*$  ein Zusammenhang auf  $E^*$  ist.

- b) Es seien  $E_1$  und  $E_2$  Vektorbündel über  $M$  mit Zusammenhängen  $\nabla^1$  und  $\nabla^2$ . Zeigen Sie, dass es auf  $E_1 \otimes E_2$  genau einen Zusammenhang  $\nabla$  gibt, der

$$\nabla_X(s_1 \otimes s_2) = \nabla_X^1(s_1) \otimes s_2 + s_1 \otimes \nabla_X^2(s_2)$$

für  $X \in \mathcal{V}(M)$  und  $s_i \in \Gamma(E_i)$  erfüllt.

### Lösung 1

$c : [0, 1] \rightarrow (S^2, g_{\text{std}})$  kürzeste  $C^1$ -Kurve zwischen  $c(0) = N = (0, 0, 1)$  und  $c(1)$ .

*Behauptung:* Bild  $c$  ist im Großkreis enthalten.

Wähle ein geeignetes Intervall der Länge  $2\pi$ , sodass

$$\begin{aligned} f : I \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &\rightarrow f\left(I \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ (\varphi, \vartheta) &\mapsto (\cos \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, \sin \vartheta) \end{aligned}$$

bijektiv ist und  $c(1) \in U$  (falls  $c(1) \neq N, S$ ). Daraus folgt dass  $f^{-1}$  eine Karte von  $S^2$  ist. Sei nun ohne Einschränkung  $c$  in keiner Umgebung von 0 konstant. Weiter sei  $\gamma := f^{-1} \circ c$  (eventuell nur in einer Umgebung von 0 ohne  $\{0\}$  definiert). Es bleibt nun zu zeigen, dass  $\gamma_1$  konstant ist.

Bestimme  $g_{ij}$  bezüglich  $f^{-1}$ . Es ist

$$\begin{aligned} \partial_1 f &= \frac{\partial f}{\partial \varphi} = (-\cos \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta \cos \varphi, 0) \\ \partial_2 f &= \frac{\partial f}{\partial \vartheta} = (-\sin \vartheta \cos \varphi, -\sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} g_{11} &= \langle \partial_1 f, \partial_1 f \rangle = \cos^2 \vartheta \\ g_{22} &= \langle \partial_2 f, \partial_2 f \rangle = 1 \\ g_{12} &= \langle \partial_1 f, \partial_2 f \rangle = 0 = g_{21} \end{aligned}$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned} L(c|_{(0,\varepsilon)}) &= \int_0^\varepsilon \sqrt{g(\dot{c}, \dot{c})} = \int_0^\varepsilon \sqrt{g_{11}(c(t))\dot{\gamma}_1(t)^2 + g_{22}(c(t))\dot{\gamma}_2(t)^2} dt \\ &= \int_0^\varepsilon \sqrt{\underbrace{\cos^2(\gamma_2(t))}_{\geq 0} \dot{\gamma}_1(t)^2 + \dot{\gamma}_2(t)^2} dt \\ &\geq \int_0^\varepsilon |\dot{\gamma}_2(t)| dt = L(\tilde{c}) \end{aligned}$$

für  $\tilde{c}(t) = f(\gamma_1(\varepsilon)\gamma_2(t))$ . Dann ist  $c$  die Kürzeste. Daraus folgt  $L(c|_{(0,\varepsilon]}) = L(\tilde{c}|_{(0,\varepsilon]})$  und somit ist für alle  $t \in (0, \varepsilon]$  stets  $\cos^2(\gamma_2(t))\dot{\gamma}_1(t) = 0$ . Da  $\cos^2(\gamma_2(t)) > 0$  muss  $\dot{\gamma}_1(t) = 0$  gelten. Da sich  $c$  nicht aus Bild  $f$  heraus bewegt, außer eventuell für  $c(1)$ , ist  $\dot{\gamma}_1(t) = 0$  für alle  $t \in (0, 1)$ .

### Lösung 2

Sei  $M$  eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^k$  und die Abbildung  $\nabla^M : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \rightarrow \mathcal{V}(M)$  mit  $(\nabla_X^M Y)_p := ((\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})_p)^{T_p M}$ , wobei  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  Fortsetzungen von  $X, Y$  sind. Wir haben zu zeigen:

(0) Unabhängigkeit von der Wahl der Fortsetzungen

$$(1.1) \quad \nabla_{X_1+X_2}^M Y = \nabla_{X_1}^M Y + \nabla_{X_2}^M Y$$

$$(1.2) \quad \nabla_{fX}^M Y = f \nabla_X^M Y$$

$$(2.1) \quad \nabla_X^M (Y_1 + \lambda Y_2) = \nabla_X^M Y_1 + \lambda \nabla_X^M Y_2$$

$$(2.2) \quad \nabla_X^M (fY) = X(f) \cdot Y + f \nabla_X^M Y$$

(3)  $\nabla_X^M Y \in \mathcal{V}(M)$  (klar ist, dass auf  $T_p M$  projiziert wird)

Wir werden nun diese einzelnen Behauptungen beweisen, wobei der Beweis von (2.1) in (1.1) enthalten ist.

(0) Es sei  $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  glatt mit  $c(0) = p$  und  $\dot{c}(0) = X_p$ . Damit erhält man folgendes:

$$\begin{aligned} ((\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}))^{T_p M} &= ((D \tilde{Y})_p \tilde{X}_p)^{T_p M} \\ &= ((D \tilde{Y})_p X_p)^{T_p M} \quad \Rightarrow \text{unabh. von der Wahl von } \tilde{X} \\ &= \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\tilde{Y} \circ c(t)) \right)^{T_p M} \\ &= \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (Y \circ c(t)) \right)^{T_p M} \quad \Rightarrow \text{unabh. von der Wahl von } \tilde{Y} \end{aligned}$$

(1.1) Wähle  $\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2$ , beziehungsweise  $\tilde{Y}_1 + \lambda \tilde{Y}_2$ , als Fortsetzung entsprechend der Regeln für  $\nabla$ . Daraus folgen dann die Behauptungen.

(1.2) Es gilt:

$$\begin{aligned} (\nabla_{fX}^M Y)_p &= ((\nabla_{f\tilde{X}} \tilde{Y})_p)^{T_p M} = ((D \tilde{Y})_p \underbrace{(f \tilde{X})_p}_{=f(p)X_p})^{T_p M} \\ &= ((D \tilde{Y})_p (f(p)X_p))^{T_p M} \\ &= f(p) ((D \tilde{Y})_p X_p)^{T_p M} \\ &= f(p) (\nabla_X^M Y)_p \end{aligned}$$

(2.2) Es gilt:

$$\begin{aligned} (\nabla_X^M (fY))_p &= ((D(\widetilde{fY}))_p \cdot X_p)^{T_p M} \\ &= \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} ((\widetilde{fY}) \circ c)(t) \right)^{T_p M} \\ &= \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} ((fY) \circ c)(t) \right)^{T_p M} \\ &= \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f(c(t)) \cdot Y(c(t)))(t) \right)^{T_p M} \\ &= \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f(c(t))) Y(c(0)) + f(c(0)) \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (Y(c(t))) \right)^{T_p M} \\ &= (X_P(f) \cdot Y_p + f(p) (\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})_p)^{T_p M} \\ &= X_p(f) \cdot Y_p^{T_p M} + f(p) ((\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})_p)^{T_p M} \\ &= X_p(f) Y_p + f(p) (\nabla_X^M Y)_p \end{aligned}$$



- (3) Es gilt  $(\nabla_X^M Y)_p \in T_p M$  (klar wegen Projektion) und hängt glatt von  $p$  ab. Sind  $e_1, \dots, e_n$  um  $p$ , definiere glatte Vektorfelder, so dass für  $q \in \text{Umg}(p)$   $e_1|_q, \dots, e_n|_q$  (erhalte mit Gram-Schmitt (glatt!)) eine Orthonormalbasis ist, so ist (lokal):

$$\nabla_X^M Y = \sum_{i=1}^n \langle D\tilde{Y} \cdot \tilde{X}, e_i \rangle \cdot e_i \Rightarrow \text{glatt}$$

(Erhalte  $e_1, \dots, e_n$  aus beliebigen lokalen Basisvektoren durch Gram-Schmitt.)

**Bemerkung** •  $\nabla^M$  ist der **Levi-Civita Zusammenhang** von  $(M, g)$  mit  $g(X, Y) = \langle X, Y \rangle$ .

- Die Projektion auf  $T_p M$  ist nötig, zum Beispiel  $M = S^1$ ,  $\tilde{X} = \tilde{Y} = \begin{pmatrix} -Y \\ X \end{pmatrix} \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^2) \Rightarrow X = Y = \tilde{X}|_{S^1} \in \mathcal{V}(S^1)$

$$D\tilde{Y} \cdot \tilde{X} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -Y \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X \\ -Y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in (T_{(X,Y)} S^1)^\perp$$

### Lösung 3

- a) Es sei  $E$  ein Vektorbündel über  $M$  und  $\nabla$  ein Zusammenhang auf  $E$ . Betrachte  $(\nabla_X^* s^*)_p(v) := X_p(s^* \tilde{v}) - s_p^*((\nabla_X \tilde{v})_p)$  mit  $X \in \mathcal{V}(M)$ ,  $s^* \in \Gamma(E^*)$ ,  $v \in E_p$ ,  $\tilde{v} \in \Gamma(E)$  und  $\tilde{v}_p = v$ . Warum dieses  $\nabla^*$  betrachten? Für  $s^* \in \Gamma(E^*)$ ,  $s \in \Gamma(E)$  sei

$$\langle s^*, s \rangle := s^*(s) \in C^\infty(M)$$

Damit ist

$$\begin{aligned} X(\langle s^*, s \rangle) &= \langle \nabla_X^* s^*, s \rangle + \langle s^*, \nabla_X s \rangle \\ &= (\nabla_X^* s^*)(s) + s^*(\nabla_X s) \end{aligned}$$

Das führt zu

$$(\nabla_X^* s^*)(s) = X(s^*(s)) - s^*(\nabla_X s)$$

- b) Seien  $E_1$  und  $E_2$  Vektorbündel mit Zusammenhängen  $\nabla^1$  und  $\nabla^2$ . Wir haben zu zeigen, dass es genau einen Zusammenhang  $\nabla$  auf  $E_1 \otimes E_2$  gibt mit  $\nabla_X(S_1 \otimes S_2) = (\nabla_X^1 S_1) \otimes S_2 + S_1 \otimes (\nabla_X^2 S_2)$ .

**Eindeutigkeit:** Seien  $s \in \Gamma(E_1 \otimes E_2)$  und seien  $e_1^1, \dots, e_m^1, e_1^2, \dots, e_n^2 : U \rightarrow E_1$  beziehungsweise  $E_2$  lokale Basisschnitte von  $E_1$  und  $E_2$ . Daraus folgt  $s|_U = \sum \sigma_{ij} e_i^1 \otimes e_j^2$ .

$$\begin{aligned} \nabla_x(s)|_U &= \nabla_X \left( \sum_{ij} \sigma_{ij} e_i^1 \otimes e_j^2 \right) \\ &= \sum_{ij} \left( X(\sigma_{ij}) \cdot e_i^1 \otimes e_j^2 + \sigma_{ij} \nabla_X(e_i^1 \otimes e_j^2) \right) \\ &= \sum_{ij} \left( X(\sigma_{ij}) e_i^1 \otimes e_j^2 + \sigma_{ij} ((\nabla_X^1 e_i^1) \otimes e_j^2 + e_i^1 \otimes (\nabla_X^2 e_j^2)) \right) \end{aligned}$$

**Existenz:** Zeige die Unabhängigkeit von der Wahl der  $e_i^k$ .

## Übung 8 vom 17. Dezember 2012

### Aufgabe 1

Es sei  $E$  ein Vektorbündel über  $M$  mit kovarianter Ableitung  $\nabla$ . Zeigen Sie, dass

$$R : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \times \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$$

$$R(X, Y)S = \nabla_X \nabla_Y S - \nabla_Y \nabla_X S - \nabla_{[X, Y]} S$$

eine  $C^\infty(M)$ -multilineare Abbildung ist.

### Aufgabe 2

Es sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $R$  der Krümmungstensor des Levi-Civita-Zusammenhangs auf  $M$ . Zeigen Sie, daß für alle  $X, Y, Z, W \in \mathcal{V}(M)$  gilt:

- a)  $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$
- b)  $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(X, Y)W, Z \rangle$
- c)  $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle$

### Aufgabe 3

Es sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für eine glatte Kurve  $c : [a, b] \rightarrow M$  bezeichne  $P_{a,b}^c : T_{c(a)}M \rightarrow T_{c(b)}M$  den Paralleltransport entlang  $c$  bezüglich des Levi-Civita-Zusammenhangs. Zeigen Sie, daß  $P_{a,b}^c$  eine lineare Isometrie ist.

Bevor wir mit den Lösungen beginnen zeigen wir zunächst den folgenden Sachverhalt

*Behauptung:* Für eine glatte Kurve  $c$  und Vektorfelder  $X, Y$  längs  $c$  gilt:

$$\frac{d}{dt} g_{c(t)}(X(t), Y(t)) = g_{c(t)}((\nabla_t X)(t), Y(t)) + g_{c(t)}(X(t), (\nabla_t Y)(t))$$

*Beweis:* Mit dem Levi-Civita Zusammenhang gilt

$$\nabla_t(g \circ c) = \nabla_{c_* \frac{\partial}{\partial t}} g = 0.$$

Daraus folgt dann mit  $g = \sum g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ :

$$\begin{aligned}
 0 &= (\nabla_t(g \circ c))(X(t), Y(t)) \\
 &= \left( \nabla_t \left( \left( \sum g_{ij} dx^i \otimes dx^j \right) \circ c \right) \right) (X(t), Y(t)) \\
 &= \left( \sum \frac{d}{dt} (g_{ij} \circ c) \cdot dx^i|_{c(t)} \otimes dx^j|_{c(t)} + \sum g_{ij} \circ c \cdot \underbrace{\nabla_t(dx^i|_{c(t)} \otimes dx^j|_{c(t)})}_{= \nabla_t(dx^i|_{c(t)}) \otimes dx^j|_{c(t)} + dx^i|_{c(t)} \otimes (\nabla_t(dx^j|_{c(t)}))} \right) (X(t), Y(t)) \\
 &= \sum \frac{d}{dt} (g_{ij} \circ c) dx^i|_{c(t)} \otimes dx^j|_{c(t)} (X(t), Y(t)) \\
 &\quad + \sum (g_{ij} \circ c) \left( (\nabla_t dx^i|_{c(t)})(X(t)) \cdot dx^j|_{c(t)}(Y(t)) + dx^i|_{c(t)}(X(t)) \cdot (\nabla_t(dx^j|_{c(t)}))(Y(t)) \right) \\
 &= \sum \frac{d}{dt} (g_{ij} \circ c) \cdot dx^i|_{c(t)}(X(t)) \cdot dx^j|_{c(t)}(Y(t)) \\
 &\quad + \sum (g_{ij} \circ c) \left( \left( \frac{d}{dt} dx^i|_{c(t)}(X(t)) - dx^i|_{c(t)}(\nabla_t X(t)) \right) \cdot dx^j|_{c(t)}(Y(t)) \right. \\
 &\quad \left. + dx^i|_{c(t)}(X(t)) \cdot \left( \frac{d}{dt} (dx^j|_{c(t)}(Y(t)) - dx^j|_{c(t)}(\nabla_t Y(t))) \right) \right) \\
 &= \sum \frac{d}{dt} \left( (g_{ij} \circ c) \cdot dx^i|_{c(t)}(X(t)) \cdot dx^j|_{c(t)}(Y(t)) \right) \\
 &\quad - \sum (g_{ij} \circ c) dx^i|_{c(t)}(\nabla_t X(t)) \cdot dx^j|_{c(t)}(Y(t)) \\
 &\quad - \sum (g_{ij} \circ c) dx^i|_{c(t)}(X(t)) \cdot dx^j|_{c(t)}(\nabla_t Y(t)) \\
 &= \frac{d}{dt} \left( \sum g_{ij}(c(t)) \cdot (dx^i|_{c(t)} \otimes dx^j|_{c(t)})(X(t), Y(t)) \right) \\
 &\quad - \sum g_{ij}(c(t)) \cdot dx^i|_{c(t)} \otimes dx^j|_{c(t)}(\nabla_t X(t), Y(t)) \\
 &\quad - \sum g_{ij}(c(t)) \cdot dx^i|_{c(t)} \otimes dx^j|_{c(t)}(X(t), \nabla_t Y(t)) \\
 &= \frac{d}{dt} \left( g_{c(t)}(X(t), Y(t)) \right) - g_{c(t)}(\nabla_t X(t), Y(t)) - g_{c(t)}(X(t), \nabla_t Y(t))
 \end{aligned}$$

Wir verwenden dabei für  $\nabla$  das  $\nabla^*$  aus Aufgabe 3 a) von Blatt 7.

### Lösung 1

Es sei  $E$  ein Vektorbündel über  $M$  mit kovarianter Ableitung  $\nabla$  und sei die Abbildung  $R : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$  definiert durch  $R(X, Y)S = \nabla_X \nabla_Y S - \nabla_Y \nabla_X S - \nabla_{[X, Y]} S$ . Wir wollen zeigen dass  $R$  eine  $C^\infty(M)$ -multilineare Abbildung ist.

- Sei  $g \in C^\infty(M)$ :

$$\begin{aligned}
 [fX, Y](g) &= f \cdot X(Y(g)) - Y(f \cdot X(g)) \\
 &= f \cdot X(Y(g)) - f \cdot Y(X(g)) - Y(f) \cdot X(g) \\
 &= f \cdot [X, Y](g) - Y(f) \cdot X(g) \\
 &= (f \cdot [X, Y] - Y(f) \cdot X)(g)
 \end{aligned}$$

- Additivität: ✓
- 

$$\begin{aligned}
 R(fX, Y)S &= \nabla_{fX} \nabla_Y S - \nabla_Y \nabla_{fX} S - \nabla_{[fX, Y]} S \\
 &= f \nabla_X \nabla_Y S - Y(f) \cdot \nabla_X S - f \cdot \nabla_Y \nabla_X S - f \nabla_{[X, Y]} S + Y(f) \nabla_X S \\
 &= f(\nabla_X \nabla_Y S - \nabla_Y \nabla_X S - \nabla_{[X, Y]} S) = f \cdot R(X, Y)S
 \end{aligned}$$

- In zweiter Komponente: ✓  $(R(X, Y)S = -R(Y, X)S)$

•

$$\begin{aligned}
 D(X, Y)(f \cdot S) &= \nabla_X \underbrace{\nabla_Y(f \cdot S)}_{=Y(f) \cdot S + f \cdot \nabla_Y S} - \nabla_Y \underbrace{\nabla_X(f \cdot S)}_{=X(f) \cdot S + f \cdot \nabla_X S} - \underbrace{\nabla_{[X, Y]}(f \cdot S)}_{=[X, Y](f) \cdot S + f \cdot \nabla_{[X, Y]} S} \\
 &= X(Y(f)) \cdot S + Y(f) \nabla_X S + X(f) \cdot \nabla_Y S + f \cdot \nabla_X \nabla_Y S \\
 &\quad - (Y(X(f)) \cdot S + X(f) \nabla_Y S + Y(f) \cdot \nabla_X S + f \cdot \nabla_Y \nabla_X S) \\
 &\quad - X(Y(f)) + Y(X(f)) - f \nabla_{[X, Y]} S \\
 &= f \cdot R(X, Y)S
 \end{aligned}$$

## Lösung 2

Aufgrund des Levi-Civita Zusammenhangs gilt  $\nabla = \nabla^{2c}$ .

- a) *Behauptung:*  $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$

Aufgrund der  $C^\infty(M)$ -multilinearität genügt es die Behauptung für  $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$  und  $Z = \frac{\partial}{\partial x^k}$  zu zeigen. Daraus folgt  $[X, Y] = [X, Z] = [Y, Z] = 0$ .

$$\begin{aligned}
 R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X + \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y \\
 &= \nabla_X (\underbrace{\nabla_Y Z - \nabla_Z Y}_{=[Y, Z] \text{ (da } \nabla \text{ torsionslos)}}) + \nabla_Y (\underbrace{\nabla_Z X - \nabla_X Z}_{=[Z, X]=0}) + \nabla_Z (\underbrace{\nabla_X Y - \nabla_Y X}_{=[X, Y]=0}) = 0
 \end{aligned}$$

- b) Im Folgenden setzen wir  $R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$ , zu beweisen ist dann dass  $R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$ .

Es genügt zu zeigen dass  $R(X, Y, U, U) = 0$  für alle  $X, Y$  ist, da  $R(X, Y, Z + W, Z + W) = R(X, Y, Z, Z) + R(X, Y, Z, W) + R(X, Y, W, Z) + R(X, Y, W, W)$  ist. Wir können annehmen, dass  $[X, Y] = 0$  gilt.

$$\begin{aligned}
 R(X, Y, U, U) &= g(\nabla_X \nabla_Y U - \nabla_Y \nabla_X U, U) \\
 &= g(\nabla_X \nabla_Y U, U) - g(\nabla_Y \nabla_X U, U) \\
 &= X(\underbrace{g(\nabla_Y U, U)}) - g(\nabla_Y U, \nabla_X U) - Y(\underbrace{g(\nabla_X U, U)}) + g(\nabla_X U, \nabla_Y U) \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2}(g(\nabla_Y U, U) + g(U, \nabla_Y U))}_{=\frac{1}{2}Y(g(U, U))} - \frac{1}{2}X(g(U, U)) \\
 &= \frac{1}{2}(X(Y(g(U, U))) - Y(X(g(U, U)))) = \frac{1}{2}[X, Y](g(U, U)) = 0
 \end{aligned}$$

- c) *behauptung:*  $R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$

Nach a) gilt:

$$R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0 \quad (\text{I})$$

$$R(Y, Z, W, X) + R(Z, W, Y, X) + R(W, Y, Z, X) = 0 \quad (\text{II})$$

$$R(Z, W, X, Y) + R(W, X, Z, Y) + R(X, Z, W, Y) = 0 \quad (\text{III})$$

$$R(W, X, Y, Z) + R(X, Y, W, Z) + R(Y, W, X, Z) = 0 \quad (\text{IV})$$

Addiert man die Gleichungen zu (I) - (III) + (II) - (IV) bleibt übrig:

$$2R(X, Y, Z, W) - 2R(Z, W, X, Y) = 0$$

### Lösung 3

*Behauptung:* Für den Levi-Civita Zusammenhang ist die Parallelverschiebung eine Isometrie.

Es sei  $c : I \rightarrow M$  und  $X_{c(0)}, Y_{c(0)} \in T_{c(0)} M$  mit  $X(t) = P_{0,t}^c X_{c(0)}$  und  $Y(t) = P_{0,t}^c Y_{c(0)}$ . Daraus folgt

$$\frac{d}{dt} g(X(t), Y(t)) = g(\underbrace{\nabla_t X(t)}_{=0}, Y(t)) + g(X(t), \underbrace{\nabla_t Y(t)}_{=0}) = 0$$

und damit gilt dann

$$g(P_{0,t}^c X_{c(0)}, P_{0,t}^c Y_{c(0)}) = g(X_{c(0)}, Y_{c(0)})$$

## Übung 9 vom 7. Januar 2012

### Aufgabe 1

Es sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $p \in M$ . Berechnen Sie  $g_{ij}(p)$ ,  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(p)$  und  $\Gamma_{ij}^k(p)$  in Riemannschen Normalkoordinaten um  $p$ .

**Hinweis:** Welche Form haben die Geodätischen durch  $p$  in dieser Karte?

### Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Schnittkrümmungen der Riemannschen Mannigfaltigkeiten  $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$  und  $\mathbb{H}^n$  (siehe Blatt 6 Aufgaben 2 und 3).

### Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Schnittkrümmungen der  $n$ -Sphäre vom Radius  $r > 0$ , also von  $S^n$  mit der von  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = r\}$  induzierten Riemannschen Metrik.

**Hinweis:** Benutzen Sie, dass der Levi-Civita Zusammenhang auf  $S^n$  durch  $(\nabla_X Y)_p = ((DY)_p \cdot X_p)^{T_p S^n}$  gegeben ist.

### Lösung 1

Nach der Vorlesung gibt es einen Diffeomorphismus

$$\exp_p : \underbrace{U(0)}_{\subset T_p M} \rightarrow \underbrace{U(p)}_{\subset M}$$

Seien  $e_1, \dots, e_n \in T_p M$  eine Orthonormalbasis von  $T_p M$  und sei  $\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) := \exp_p(x_1 e_1, \dots, x_n e_n)$  definiert.

**Behauptung:**

- (i)  $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$
- (ii)  $\frac{d}{dx^2}(g_{ij})(p) = 0$
- (iii)  $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$

**Beweis:**

- (i)

$$g_p \left( \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p \right) = g_p(e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

$\begin{matrix} \text{---id} \\ \text{---exp}_{p*}(e_i) = \text{exp}_{p*}(e_j) \end{matrix}$

$\gamma_v(t) := \exp_p(tv)$  ist die Geodätische die in  $p$  in Richtung  $v$  startet.

*Beweis:* Es sei  $c_v$  die Geodätische mit  $c_v(0) = p$ ,  $\dot{c}_v(0) = v$ , sowie  $c_{\lambda v}$  die Geodätische mit  $c_{\lambda v}(0) = p$ ,  $\dot{c}_{\lambda v}(0) = \lambda v$ , wobei  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Definiere nun  $\gamma(t) := c_v(\lambda t)$ . Dann ist  $\gamma(t) = c_{\lambda v}(t)$ , denn:

- $\gamma(0) = c_v(0) = p$
- $\dot{\gamma}(0) = \lambda \cdot \dot{c}_v(0) = \lambda v$
- $\ddot{\gamma}^k(t) + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t)$   
 $= \lambda^2 \left( \ddot{c}_v^k(\lambda t) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(c_v(\lambda t)) \dot{c}_v^i(\lambda t) \dot{c}_v^j(\lambda t) \right)$   
 $= 0$

Betrachte also

$$c_v(t) = c_v(t \cdot 1) = c_{tv}(1) = \exp_p(t \cdot v)$$

Die Geodätischen durch  $p$  werden also von den Normalkoordinaten auf die Ursprungsgeraden abgebildet. Setze  $\gamma(t) = t \cdot e_{i_0}$ , dann ist  $\exp_p \circ \gamma$  eine Geodätische und damit gilt für alle  $k$ :

$$0 = \ddot{\gamma}^k + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = 0 + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \circ \gamma \delta_{i i_0} \delta_{j i_0} = \Gamma_{i_0 i_0}^k \circ \gamma$$

**Beweis:**

(iii) Nun sei  $i_0 \neq j_0$  und  $\tilde{\gamma}(t) = t(e_{i_0} + e_{j_0})$ , damit ist  $\exp_p \circ \tilde{\gamma}$  eine Geodätische und für alle  $k$  gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{\tilde{\gamma}}^k + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \dot{\tilde{\gamma}}^i \dot{\tilde{\gamma}}^j = 0 + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k (\delta_{i i_0} + \delta_{i j_0}) (\delta_{j i_0} + \delta_{j j_0}) \\ &= \left( \Gamma_{i_0 i_0}^k + \Gamma_{j_0 j_0}^k + \Gamma_{i_0 j_0}^k + \Gamma_{j_0 i_0}^k \right) \circ \gamma \end{aligned}$$

In 0 gilt  $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0) = p$ , also  $\Gamma_{ij}^k(\gamma(0)) = 0$ . Daraus folgt dann:

$$0 = \Gamma_{i_0 j_0}^k(\tilde{\gamma}(0)) + \Gamma_{j_0 i_0}^k(\tilde{\gamma}(0)) = 2\Gamma_{i_0 j_0}^k(p)$$

Damit folgt schließlich  $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$  für alle  $i, j, k$ .

(ii)

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right|_p &= \left. \frac{\partial}{\partial x^k} \right|_p \left( g \left( \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p \right) \right) \\ &= g \left( \left. \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \right|_p \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p \right) + g \left( \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p, \left. \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \right|_p \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p \right) \\ &= g \left( \sum_l \Gamma_{ki}^l(p) \cdot \left. \frac{\partial}{\partial x^l} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p \right) + g \left( \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p, \sum_l \underbrace{\Gamma_{kj}^l(p)}_{=0} \left. \frac{\partial}{\partial x^l} \right|_p \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

## Lösung 2

a) *Behauptung:*  $\sec(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}}) \equiv 0$

Es gilt  $\nabla_X Y = D Y \cdot X$  und, wegen Torsionsfreiheit,  $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X = D Y \cdot X - D X \cdot Y$ . Nun gilt

$$R(X, Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]}Z$$

Bevor wir fortfahren benötigen wir noch eine Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}
 & (D(DZ \cdot Y) \cdot X - D(DZ \cdot X) \cdot Y)_i \\
 &= \sum_l (D(DZ \cdot Y))_{il} \cdot X_l - \sum_l (D(DZ \cdot X))_{il} \cdot Y_l \\
 &= \sum_l \partial_l ((DZ \cdot Y)_i) \cdot X_l - \sum_l \partial_l (DZ \cdot X)_i \cdot Y_l \\
 &= \sum_l \partial_l \left( \sum_m \underbrace{(DZ)_{im}}_{=\partial_m Z_i} \cdot Y_m \right) \cdot X_l - \sum_l \partial_l \left( \sum_m (DZ)_{im} \cdot X_m \right) \cdot Y_l \\
 &= \sum_{lm} (\partial_l (\partial_m Z_i \cdot Y_m) \cdot X_l - \partial_l (\partial_m Z_i \cdot X_m) \cdot Y_l) \\
 &= \sum_{lm} (\partial_l \partial_m Z_i Y_m X_l + \partial_m Z_i \partial_l Y_m X_l - \underbrace{\partial_l \partial_m Z_i}_{=\partial_m \partial_l Z_i} X_m Y_l + \partial_m Z_i \partial_l X_m Y_l) \\
 &= \sum_m \partial_m Z_i \cdot (DY \cdot X)_m - \sum_m \partial_m Z_i (DX \cdot Y)_m \\
 &= (DZ \cdot (DY \cdot X) - DZ \cdot DX \cdot Y)_i \\
 &= (DZ \cdot (DY \cdot X - DX \cdot Y))_i
 \end{aligned}$$

Mit dieser Nebenrechnung folgern wir schließlich  $R(X, Y)Z = 0$  und daraus folgt letztendlich

$$\sec(\text{span}\{X, Y\}) = \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{\|X\|^2 \|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2} = 0$$

- b) Wir berechnen die Komponenten  $R_{ijkl} = R(\frac{\partial}{\partial \xi^i}, \frac{\partial}{\partial \xi^j}, \frac{\partial}{\partial \xi^k}, \frac{\partial}{\partial \xi^l}) = g(R(\frac{\partial}{\partial \xi^i}, \frac{\partial}{\partial \xi^j}) \frac{\partial}{\partial \xi^k}, \frac{\partial}{\partial \xi^l})$  in der Karte  $\varphi$  aus Aufgabe 6.3. In dieser Karte gilt  $g = \frac{4}{(1-\|\xi\|^2)^2} \sum_i d\xi^i \otimes d\xi^i$ ,

also  $g_{ij} = \delta_{ij} \frac{4}{(1-\|\xi\|^2)^2}$ .

Für die Ableitungen der Metrik gilt dann:

$$g_{ij,k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^k} = 16\delta_{ij} \frac{\xi^k}{(1-\|\xi\|^2)^3}.$$

Die Koeffizienten der zu  $(g_{ij})$  inversen Matrix sind  $g^{kl} = \delta_{kl} \frac{(1-\|\xi\|^2)^2}{4}$ . Damit gilt für die Christoffelsymbole

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l g^{kl} (g_{jl,i} - g_{ij,l} + g_{li,j}) = \frac{2}{1-\|\xi\|^2} (\delta_{jk} \xi^i - \delta_{ij} \xi^k + \delta_{ki} \xi^j).$$

Für die Ableitungen gilt also:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \xi^l} (\Gamma_{ij}^k) &= \frac{\partial}{\partial \xi^l} \left( \frac{2}{1-\|\xi\|^2} \right) (\delta_{jk} \xi^i - \delta_{ij} \xi^k + \delta_{ki} \xi^j) + \frac{2}{1-\|\xi\|^2} \frac{\partial}{\partial \xi^l} (\delta_{jk} \xi^i - \delta_{ij} \xi^k + \delta_{ki} \xi^j) \\
 &= \frac{4\xi^l}{(1-\|\xi\|^2)^2} (\delta_{jk} \xi^i - \delta_{ij} \xi^k + \delta_{ki} \xi^j) + \frac{2}{1-\|\xi\|^2} (\delta_{jk} \delta_{li} - \delta_{ij} \delta_{lk} + \delta_{ki} \delta_{lj}).
 \end{aligned}$$

Nun können wir die Koeffizienten des Krümmungstensors berechnen. Es gilt :

$$\begin{aligned}
 R\left(\frac{\partial}{\partial \xi^i}, \frac{\partial}{\partial \xi^j}\right) \frac{\partial}{\partial \xi^k} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial \xi^i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \xi^j}} \frac{\partial}{\partial \xi^k} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial \xi^j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \xi^i}} \frac{\partial}{\partial \xi^k} - \nabla_{[\frac{\partial}{\partial \xi^i}, \frac{\partial}{\partial \xi^j}] = 0} \frac{\partial}{\partial \xi^k} \\
 &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial \xi^i}} \left( \sum_l \Gamma_{jk}^l \frac{\partial}{\partial \xi^l} \right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial \xi^j}} \left( \sum_l \Gamma_{ik}^l \frac{\partial}{\partial \xi^l} \right) \\
 &= \sum_l \left( \frac{\partial}{\partial \xi^i} (\Gamma_{jk}^l) \frac{\partial}{\partial \xi^l} + \Gamma_{jk}^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial \xi^i}} \frac{\partial}{\partial \xi^l} - \frac{\partial}{\partial \xi^j} (\Gamma_{ik}^l) \frac{\partial}{\partial \xi^l} - \Gamma_{ik}^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial \xi^j}} \frac{\partial}{\partial \xi^l} \right) \\
 &= \sum_l \left( \frac{\partial}{\partial \xi^i} (\Gamma_{jk}^l) \frac{\partial}{\partial \xi^l} - \frac{\partial}{\partial \xi^j} (\Gamma_{ik}^l) \frac{\partial}{\partial \xi^l} \right) + \sum_{l,m} \left( \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^m \frac{\partial}{\partial \xi^m} - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^m \frac{\partial}{\partial \xi^m} \right) \\
 &= \sum_l \left( \frac{\partial}{\partial \xi^i} (\Gamma_{jk}^l) - \frac{\partial}{\partial \xi^j} (\Gamma_{ik}^l) + \sum_{\alpha} (\Gamma_{jk}^{\alpha} \Gamma_{i\alpha}^l - \Gamma_{ik}^{\alpha} \Gamma_{j\alpha}^l) \right) \frac{\partial}{\partial \xi^l} =: \sum_l R_{ijk}{}^l \frac{\partial}{\partial \xi^l}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 R_{ijk}{}^l &= \frac{4}{(1-\|\xi\|^2)^2} \left( \xi^i (\delta_{kl} \xi^j - \delta_{jk} \xi^l + \delta_{lj} \xi^k) - \xi^j (\delta_{kl} \xi^i - \delta_{ik} \xi^l + \delta_{li} \xi^k) \right. \\
 &\quad + \frac{1-\|\xi\|^2}{2} ((\delta_{kl} \delta_{ij} - \delta_{jk} \delta_{il} + \delta_{lj} \delta_{ik}) - (\delta_{kl} \delta_{ij} - \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{li} \delta_{jk})) \\
 &\quad + \sum_{\alpha} ((\delta_{k\alpha} \xi^j - \delta_{jk} \xi^{\alpha} + \delta_{\alpha j} \xi^k) (\delta_{\alpha l} \xi^i - \delta_{i\alpha} \xi^l + \delta_{li} \xi^{\alpha}) \\
 &\quad \left. - (\delta_{k\alpha} \xi^i - \delta_{ik} \xi^{\alpha} + \delta_{\alpha i} \xi^k) (\delta_{\alpha l} \xi^j - \delta_{j\alpha} \xi^l + \delta_{lj} \xi^{\alpha})) \right) \\
 &= \frac{4}{(1-\|\xi\|^2)^2} \left( -\delta_{jk} \xi^i \xi^l + \delta_{lj} \xi^i \xi^k + \delta_{ik} \xi^j \xi^l - \delta_{li} \xi^j \xi^k \right. \\
 &\quad + \frac{1-\|\xi\|^2}{2} (-\delta_{jk} \delta_{il} + \delta_{lj} \delta_{ik} + \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{li} \delta_{jk}) \\
 &\quad + \sum_{\alpha} ((\delta_{k\alpha} \delta_{\alpha l} \xi^i \xi^j - \delta_{k\alpha} \delta_{i\alpha} \xi^j \xi^l + \delta_{k\alpha} \delta_{lj} \xi^i \xi^{\alpha} \\
 &\quad - \delta_{jk} \delta_{\alpha l} \xi^i \xi^{\alpha} + \delta_{jk} \delta_{i\alpha} \xi^l \xi^{\alpha} - \delta_{jk} \delta_{li} (\xi^{\alpha})^2 \\
 &\quad + \delta_{\alpha j} \delta_{\alpha l} \xi^i \xi^k - \delta_{\alpha j} \delta_{i\alpha} \xi^k \xi^l + \delta_{\alpha j} \delta_{li} \xi^k \xi^{\alpha}) \\
 &\quad - (\delta_{k\alpha} \delta_{\alpha l} \xi^i \xi^j - \delta_{k\alpha} \delta_{j\alpha} \xi^i \xi^l + \delta_{k\alpha} \delta_{lj} \xi^i \xi^{\alpha} \\
 &\quad - \delta_{ik} \delta_{\alpha l} \xi^j \xi^{\alpha} + \delta_{ik} \delta_{j\alpha} \xi^l \xi^{\alpha} - \delta_{ik} \delta_{lj} (\xi^{\alpha})^2 \\
 &\quad \left. + \delta_{\alpha i} \delta_{\alpha l} \xi^j \xi^k - \delta_{\alpha i} \delta_{j\alpha} \xi^k \xi^l + \delta_{\alpha i} \delta_{lj} \xi^k \xi^{\alpha})) \right) \\
 &= \frac{4}{(1-\|\xi\|^2)^2} \left( -\delta_{jk} \xi^i \xi^l + \delta_{lj} \xi^i \xi^k + \delta_{ik} \xi^j \xi^l - \delta_{li} \xi^j \xi^k + (1-\|\xi\|^2) (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{li} \delta_{jk}) \right. \\
 &\quad + \sum_{\alpha} ((\delta_{kl} \xi^i \xi^j - \delta_{ik} \xi^j \xi^l + \delta_{li} \xi^j \xi^k - \delta_{jk} \xi^i \xi^l + \delta_{jk} \xi^l \xi^i - \delta_{jk} \delta_{li} \|\xi\|^2 + \delta_{jl} \xi^i \xi^k - \delta_{ij} \xi^k \xi^l + \\
 &\quad \left. - (\delta_{kl} \xi^i \xi^j - \delta_{jk} \xi^i \xi^l + \delta_{lj} \xi^i \xi^k - \delta_{ik} \xi^j \xi^l + \delta_{ik} \xi^l \xi^j - \delta_{ik} \delta_{lj} \|\xi\|^2 + \delta_{il} \xi^j \xi^k - \delta_{ij} \xi^k \xi^l + \right. \\
 &\quad \left. (1-\|\xi\|^2) (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{li} \delta_{jk}) + \|\xi\|^2 (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{li} \delta_{jk}) \right) \\
 &= \frac{4}{(1-\|\xi\|^2)^2} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{li} \delta_{jk})
 \end{aligned}$$

Und somit

$$\begin{aligned}
 R_{ijkl} &= g\left(\sum_m R_{ijk}{}^m \frac{\partial}{\partial \xi^m}, \frac{\partial}{\partial \xi^l}\right) = \sum_m R_{ijk}{}^m g\left(\frac{\partial}{\partial \xi^m}, \frac{\partial}{\partial \xi^l}\right) \\
 &= \frac{4}{(1-\|\xi\|^2)^2} R_{ijk}{}^l = \frac{16}{(1-\|\xi\|^2)^4} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{li} \delta_{jk}).
 \end{aligned}$$



Für linear unabhängige  $X = \sum X_i \frac{\partial}{\partial \xi^i}$ ,  $Y = \sum Y_j \frac{\partial}{\partial \xi^j} \in T_p \mathbb{H}^n$  gilt dann

$$\begin{aligned}
 R(X, Y, Y, X) &= \sum_{i,j,k,l} X_i X_l Y_j Y_k R\left(\frac{\partial}{\partial \xi^i}, \frac{\partial}{\partial \xi^j}, \frac{\partial}{\partial \xi^k}, \frac{\partial}{\partial \xi^l}\right) \\
 &= \sum_{i,j,k,l} X_i X_l Y_j Y_k \frac{16}{(1-\|\xi\|^2)^4} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{li} \delta_{jk}) \\
 &= \sum_{i,j} X_i X_j Y_j Y_i \left(\frac{4}{(1-\|\xi\|^2)^2}\right)^2 - \sum_{i,j} X_i^2 Y_j^2 \left(\frac{4}{(1-\|\xi\|^2)^2}\right)^2 \\
 &= \sum_{i,j} X_i X_j Y_j Y_i g\left(\frac{\partial}{\partial \xi^i}, \frac{\partial}{\partial \xi^i}\right) g\left(\frac{\partial}{\partial \xi^j}, \frac{\partial}{\partial \xi^j}\right) - \sum_{i,j} X_i^2 Y_j^2 g\left(\frac{\partial}{\partial \xi^i}, \frac{\partial}{\partial \xi^i}\right) g\left(\frac{\partial}{\partial \xi^j}, \frac{\partial}{\partial \xi^j}\right) \\
 &= \left(\sum_i g\left(X_i \frac{\partial}{\partial \xi^i}, Y_i \frac{\partial}{\partial \xi^i}\right)\right) \left(\sum_j g\left(X_j \frac{\partial}{\partial \xi^j}, Y_j \frac{\partial}{\partial \xi^j}\right)\right) \\
 &\quad - \left(\sum_i g\left(X_i \frac{\partial}{\partial \xi^i}, X_i \frac{\partial}{\partial \xi^i}\right)\right) \left(\sum_j g\left(Y_j \frac{\partial}{\partial \xi^j}, Y_j \frac{\partial}{\partial \xi^j}\right)\right) \\
 &= g(X, Y)^2 - \|X\|^2 \|Y\|^2 = -(\|X\|^2 \|Y\|^2 - g(X, Y)^2).
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\sec(\text{span}\{X, Y\}) = \frac{R(X, Y, Y, X)}{\|X\|^2 \|Y\|^2 - g(X, Y)^2} = -1.$$

### Lösung 3

Sei  $S^n(r) := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = r\}$ , *Behauptung*:  $\sec_{S^n(r)} \equiv \frac{1}{r^2}$

Sei  $\nabla = \nabla S^n(r)$  der Levi-Civita Zusammenhang von  $(S^n(r), g_{\text{ind}})$ . Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
 (\nabla_X Y)_p &= \left( (\nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}} Y)_p \right) T_p S^n(r) \\
 &= (\nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}} Y)_p - \langle (\nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}} Y)_p, N(p) \rangle \cdot N(p)
 \end{aligned}$$

wobei  $N(p) = \frac{1}{r} \cdot p$  das Normaleneinheitsvektorfeld an  $S^n(r)$  ist. Betrachte nun

$$\begin{aligned}
 \langle (\nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}} Y)_p, N(p) \rangle &= \underbrace{X_p \langle \overbrace{Y, N}^{\equiv 0} \rangle}_{=0} - \langle Y_p, (\nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}} N)_p \rangle \\
 &= -\langle Y_p, \underbrace{(D N)_p}_{\frac{1}{r} \cdot \text{id}} \cdot X_p \rangle \\
 &= -\frac{1}{r} \langle Y_p, X_p \rangle
 \end{aligned}$$

Daraus folgt dann  $\nabla_X Y = \nabla_X^{R^{n+1}} Y + \frac{1}{r} \langle X, Y \rangle N$ . Als nächstes betrachten wir nun:

$$\begin{aligned}
 R^{S^n(r)}(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \\
 &= \nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}} (\nabla_Y Z) + \frac{1}{r} \langle X, \nabla_Y Z \rangle \cdot N \\
 &\quad - \nabla_Y^{\mathbb{R}^{n+1}} (\nabla_X Z) - \frac{1}{r} \langle Y, \nabla_X Z \rangle \cdot N \\
 &\quad - \nabla_{[X, Y]}^{\mathbb{R}^{n+1}} Z - \frac{1}{r} \langle [X, Y], Z \rangle \cdot N \\
 &= \overbrace{R^{\mathbb{R}^{n+1}}(X, Y)Z}^{=0} + \nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}} \left( \frac{1}{r} \langle Y, Z \rangle \cdot N \right) + \frac{1}{r} \langle X, \nabla_Y^{\mathbb{R}^{n+1}} Z + \frac{1}{r} \langle Y, Z \rangle \cdot \overset{\perp X}{N} \rangle N \\
 &\quad - \nabla_Y^{\mathbb{R}^{n+1}} \left( \frac{1}{r} \langle X, Y \rangle N \right) - \frac{1}{r} \langle Y, \nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}} Z + \frac{1}{r} \langle X, Z \rangle \cdot \overset{\perp Y}{N} \rangle \cdot N \\
 &\quad - \frac{1}{r} \langle \underbrace{[X, Y]}_{=DY \cdot X - DX \cdot Y} Z \rangle \cdot N \\
 &= X \left( \frac{1}{r} \langle Y, Z \rangle \right) N + \frac{1}{r} \langle Y, Z \rangle \nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}} N + \frac{1}{r} \langle X, DY \cdot Z \cdot Y \rangle \cdot N \\
 &\quad - Y \left( \frac{1}{r} \langle X, Z \rangle \right) \cdot N - \frac{1}{r} \langle X, Z \rangle \nabla_Y^{\mathbb{R}^{n+1}} N - \frac{1}{r} \langle Y, DX \cdot Z \cdot X \rangle \cdot N - \frac{1}{r} \langle DY \cdot X \\
 &\quad - DX \cdot Y, Z \rangle \cdot N \\
 &= \frac{1}{r} (\langle DY \cdot X, Z \rangle + \langle Y, DX \cdot Z \cdot X \rangle) \cdot N + \frac{1}{r} \langle Y, Z \rangle \overset{=\frac{1}{r} \cdot \text{id}}{\widehat{DN}} \cdot X + \langle X, DY \cdot Z \cdot Y \rangle \cdot N \\
 &\quad - \frac{1}{r} (\langle DX \cdot Y, Z \rangle + \langle X, DX \cdot Z \cdot Y \rangle) \cdot N - \frac{1}{r^2} \langle XZ \rangle \cdot Y + \langle Y, DX \cdot Z \cdot X \rangle \cdot N \\
 &\quad - \frac{1}{r} \langle DY \cdot X - DX \cdot Y, Z \rangle \cdot N \\
 &= \frac{1}{r^2} (\langle Y, Z \rangle \cdot X - \langle X, Z \rangle \cdot Y)
 \end{aligned}$$

Daraus folgt dann

$$\langle D(X, Y)Y, X \rangle = \frac{1}{r^2} (\langle Y, Y \rangle \langle X, X \rangle - \langle X, Y \rangle^2)$$

und damit folgt dann schließlich

$$\sec_{S^n(r)}(\{X, Y\}) = \frac{1}{r^2}$$

## Übung 10 vom 14. Januar 2012

Übungsblatt 10 enthielt keine Aufgaben, deshalb befassen wir uns hier mit den Geodätischen von  $\mathbb{H}^2$ . Wir betrachten zunächst die folgenden drei bisherigen Modelle

**Hyperboloid:**  $\{x \in \mathbb{R}^{2+1} \mid \overbrace{-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2}^{=\langle x, x \rangle} = -1, x_0 > 0\}$  und  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{T_p \mathbb{H}^2 \times T_p \mathbb{H}^2}$  ist das Skalarprodukt.

**Poincare Kreisscheibenmodell:**  $D := \{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid \|\xi\| < 1\}$ ,  $g_D = \frac{4}{(1-\|\xi\|^2)^2} \sum d\xi^i \otimes d\xi^i$

**Poincare obere Halbebene Modell:**  $H := \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ ,  $g_H = \frac{1}{y^2} (dx \otimes dx + dy \otimes dy)$

**Isometrie zwischen  $D$  und  $H$ :** Betrachte  $D$  als Teilmenge von  $\mathbb{C}$  mittels  $\psi : H \rightarrow D, z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$

$$|\psi(z)|^2 = \frac{z-i}{z+i} \cdot \frac{\bar{z}+i}{\bar{z}-i} = \frac{z\bar{z}+i(z-\bar{z})+1}{z\bar{z}-i(z-\bar{z})+1} = \frac{|z|^2 - 2\operatorname{Im}(z) + 1}{|z|^2 + 2\operatorname{Im}(z) + 1} \stackrel{\operatorname{Im}(z) > 0}{<} 1$$

Definiere weiter  $\varphi : D \rightarrow H$  mit  $\xi = \xi_1 + i\xi_2 \mapsto -i\frac{\xi+1}{\xi-1}$ . Dann folgt

$$\operatorname{Im}(\varphi(\xi)) = \frac{\overbrace{1-|\xi|^2}^{>0}}{\underbrace{|\xi|^2 - 2\operatorname{Re}(\xi) + 1}_{\geq (\operatorname{Re}(\xi)-1)^2 > 0}} > 0$$

Durch Nachrechnen ergibt sich  $\varphi \circ \psi = \operatorname{id}$  und  $\psi \circ \varphi = \operatorname{id}$ . Da  $\varphi$  und  $\psi$  holomorph sind, folgt dass sie auf  $C^\infty$  glatt sind. Wir zeigen schließlich dass  $\psi$  eine Isometrie ist. Dazu fassen wir  $\psi$  als reelle Funktion auf:

$$\psi(x, y) = \begin{pmatrix} \psi_1(x, y) \\ \psi_2(x, y) \end{pmatrix}$$

Da  $\psi$  holomorph ist erfüllt  $\psi$  auch die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \qquad \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = -\frac{\partial \psi_2}{\partial x}$$

Es sei  $p = (x, y) \in H$  und sei  $ye_1, ye_2$  eine Orthonormalbasis von  $T_p H$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} g_D(\psi_{*p}(ye_1), \psi_{*p}(ye_2)) &= y^2 g_D\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \\ &= \frac{4y^2}{(1 - \|\psi\|^2)^2} \cdot \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial y}\right) \\ &= 0 \\ g_D(\psi_{*p}(ye_1), \psi_{*p}(ye_1)) &= \frac{4y^2}{(1 - \|\psi\|^2)^2} \cdot \left(\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x}\right)^2\right) \\ &= \dots = 1 \\ g_D(\psi_{*p}(ye_2), \psi_{*p}(ye_2)) &= \dots = 1 \end{aligned}$$

Daraus folgt dass  $\psi_*$  eine Orthonormalbasis auf eine Orthonormalbasis abbildet und daher ist  $\psi$  eine Isometrie.

**Isometrien von  $H$**  Zu  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  mit  $ad - bc > 0$  betrachte

$$h(z) = \frac{az + b}{bz + d} \qquad ((\text{spezielle}) \text{ Möbiustransformation})$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(h(z)) &= \operatorname{Im}\left(\frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2}\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{acz\bar{z} + bd + adz + bc\bar{z}}{|cz + d|^2}\right) \\ &= \frac{(ad - bc)\operatorname{Im}(z)}{|cz + d|^2} > 0 \end{aligned} \qquad (\text{für } z \in H)$$

Es gilt somit  $h : H \rightarrow H$ , sowie

$$h^{-1}(z) = \frac{1}{ad-bc} \cdot \frac{dz-b}{-cz+a} \quad (\text{nachrechnen})$$

Daraus folgt dass  $h$  ein Diffeomorphismus ist. Für  $v \in T_z H$  und  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$  gilt:

$$\begin{aligned} h_{*z}V = Dh|_zV &= \begin{pmatrix} v_1 \frac{\partial \operatorname{Re}(h)}{\partial x} + v_2 \frac{\partial \operatorname{Re}(h)}{\partial y} \\ v_1 \frac{\partial \operatorname{Im}(h)}{\partial x} + v_2 \frac{\partial \operatorname{Im}(h)}{\partial y} \end{pmatrix} \stackrel{\text{C-R}}{\underset{\text{DGL}}{=}} \begin{pmatrix} v_1 \lambda - v_2 \mu \\ v_2 \mu + v_1 \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \frac{\partial \operatorname{Re}(h)}{\partial x} =: \lambda \\ \frac{\partial \operatorname{Im}(h)}{\partial x} =: \mu \end{array} \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re}((\lambda + i\mu)(v_1 + iv_2)) \\ \operatorname{Im}((\lambda + i\mu)(v_1 + iv_2)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(h'(z) \cdot (v_1 + iv_2)) \\ \operatorname{Im}(h'(z) \cdot (v_1 + iv_2)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für  $v, w \in T_z H$  gilt:

$$\begin{aligned} g_H(v, w) &= \frac{1}{\operatorname{Im}(z)^2} (v_1 w_1 + v_2 w_2) \\ &= \frac{1}{\operatorname{Im}(z)^2} \operatorname{Re}(\underbrace{(v_1 + iv_2)}_{=: \tilde{v}} \overline{\underbrace{(w_1 + iw_2)}_{=: \tilde{w}}}) \end{aligned}$$

Es ist

$$h'(x) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

Daraus folgt dann

$$\begin{aligned} g_H|_{h(z)}(h_{*z}v, h_{*z}w) &= \frac{1}{(\operatorname{Im}(h(z)))^2} \cdot \operatorname{Re}(h'(z) \tilde{v} \overline{h'(z) \tilde{w}}) \\ &= \frac{|h'(z)|^2}{\operatorname{Im}(h(z))^2} \cdot \operatorname{Re}(\tilde{v} \tilde{w}) = \frac{|h'(z)|^2}{\operatorname{Im}(h(z))^2} \cdot g_h|_z(v, w) \end{aligned}$$

Wobei  $\operatorname{Im}(h(z)) = \frac{ad-bc}{|cz+d|^2} \cdot \operatorname{Im}(z) = |h'(z)| \cdot \operatorname{Im}(z)$  gilt, daraus folgt dass  $h$  eine Isometrie ist.

**Beispiel** (1) Für  $w \in H$  ist

$$h_w(z) = \frac{\operatorname{Im}(w) \cdot z + \operatorname{Re}(w)}{0 \cdot z + 1} = \operatorname{Im}(w) \cdot z + \operatorname{Re}(w)$$

eine Isometrie von  $H$ , da  $\operatorname{Im}(w) > 0$  und  $h_w(i) = \operatorname{Im}(w)i + \operatorname{Re}(w) = w$ . Daraus folgt dass es genügt die Geodätischen durch  $i$  zu betrachten.

(2) Für  $\theta \in \mathbb{R}$  ist

$$h_\theta = \frac{\cos(\theta)z - \sin(\theta)}{\sin(\theta)z + \cos(\theta)}$$

Eine Isometrie von  $H$  mit

$$h_\theta(i) = i \frac{\cos(\theta) - \frac{1}{i} \sin(\theta)}{\sin(\theta)i + \cos(\theta)} = i$$

und

$$h'_\theta(i) = \frac{1}{(\sin(\theta)i + \cos(\theta))^2} = e^{-2i\theta}$$

Für  $v \in T_i H$  mit  $\|v\| = 1$  können wir also  $\theta \in \mathbb{R}$  wählen mit  $h_{\theta*}e_2 = v$ . Daraus folgt dass es genügt die Geodätischen  $\gamma$  mit  $\gamma(0) = i$  und  $\dot{\gamma}(0) = e_2$  zu bestimmen.

$$\begin{aligned} g_{ij,1} &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x} = \delta_{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{y^2} \right) = 0 \\ g_{ij,2} &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial y} = \delta_{ij} \cdot \frac{-2}{y^3} \\ g_{kl} &= y^2 \cdot \delta_{kl} \\ \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 g^{kl} (g_{jl,i} - g_{ij,l} + g_{il,j}) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -\frac{1}{y} \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y} \quad \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}$$

alle Anderen sind „= 0“. Die geodätische Differentialgleichung lautet  $\ddot{\gamma}^k + \sum_{ij} (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma) \cdot \dot{\gamma}^i \cdot \dot{\gamma}^j = 0$ . Daraus folgt

$$\ddot{\gamma}^1 - \frac{2}{\gamma^2} \dot{\gamma}^1 \cdot \dot{\gamma}^2 = 0 \quad \ddot{\gamma}^2 - \frac{1}{\gamma^2} ((\dot{\gamma}^2)^2 - (\dot{\gamma}^1)^2) = 0$$

*Ansatz:*  $\gamma^1 \equiv 0$  (erfüllt die erste Gleichung)  $\rightsquigarrow \ddot{\gamma}^2 = \frac{1}{\gamma^2} (\dot{\gamma}^2)^2$

*Lösung:*  $\gamma^2(t) = e^t$

Damit ist  $\gamma(t) = ie^t$  die Geodätische durch  $i$  mit der Startrichtung  $e_2$ . Die anderen Geodätischen, die in  $i$  starten sind von der Form

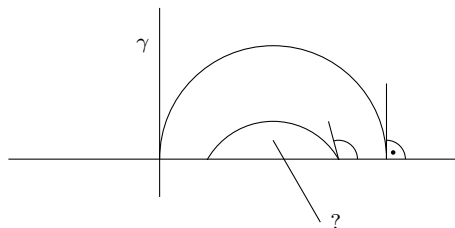
$$h_\theta(\gamma(t)) = \frac{\cos(\theta)ie^t - \sin(\theta)}{\sin(\theta)ie^t + \cos(\theta)}$$

Möbiustransformationen bilden Geraden und Kreise auf Geraden und Kreise ab.

Damit ist  $\gamma_\theta = h_\theta \circ \gamma$  eine Gerade oder ein Kreis.

$$\gamma_\theta(t) \rightarrow \begin{cases} -\frac{\sin \theta}{\cos \theta} & \text{für } t \rightarrow -\infty \\ \frac{\cos \theta}{\sin \theta} & \text{für } t \rightarrow \infty \end{cases}$$

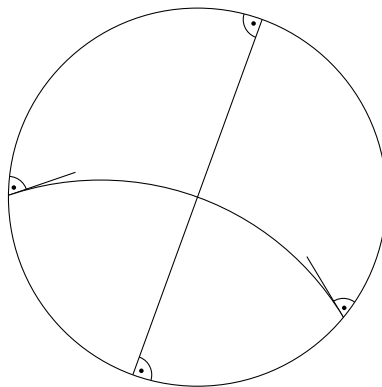
Für  $\sin \theta, \cos \theta \neq 0$  ergibt sich:



Es ist

$$\frac{\dot{\gamma}_\theta(t)}{|\dot{\gamma}_\theta(t)|} = \dots = \frac{i \cos \theta + e^t \sin \theta}{\cos \theta + i e^t \sin \theta} \rightarrow \begin{cases} i & \text{für } t \rightarrow -\infty \\ -i & \text{für } t \rightarrow \infty \end{cases}$$

Also schneidet der Kreis die  $\mathbb{R}$ -Achse im rechten Winkel und damit liegt der Mittelpunkt in  $\mathbb{R}$ :  $\frac{1}{2} \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)$ . Wegen  $h_w(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$  gilt das Gleiche für alle Geodätischen.



## Übung 11 vom 21. Januar 2012

### Aufgabe 1

Es sei  $\kappa \in \mathbb{R}$  und

$$C_\kappa(t) = \begin{cases} \cos(\sqrt{\kappa}t) & \kappa > 0 \\ 1 & \kappa = 0 \\ \cosh(\sqrt{|\kappa|}t) & \kappa < 0 \end{cases} \quad S_\kappa(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sin(\sqrt{\kappa}t) & \kappa > 0 \\ t & \kappa = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|\kappa|}} \sinh(\sqrt{|\kappa|}t) & \kappa < 0 \end{cases}$$

Es sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\gamma$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische. Für alle  $t$  und jede Ebene  $P \leq T_{\gamma(t)} M$  mit  $\dot{\gamma}(t) \in P$  gelte  $\sec(P) = \kappa$ .

Zeigen Sie, dass jedes orthogonale Jacobivektorfeld  $J$  längs  $\gamma$  die Form

$$J(t) = C_\kappa(t)A(t) + S_\kappa(t)B(t)$$

mit parallelen Vektorfeldern  $A, B$  längs  $\gamma$  hat.

### Aufgabe 2

Es sei  $(M, g)$  eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit von konstanter Schnittkrümmung  $\kappa \in \mathbb{R}$  und  $p \in M$ . Zeigen Sie, dass es genau dann zu  $p$  konjugierte Punkte gibt, wenn  $\kappa > 0$  gilt.

### Lösung 1

*Erinnerung:* Definition von Jacobifeldern

$$\ddot{J}(t) + (R(\mathcal{J}, \dot{\gamma})\dot{\gamma})(t) = 0 \quad (\text{Jacobi-Gleichung})$$

(Vektorfelder von Variationen durch Geodätische)

$$\begin{aligned}\langle \ddot{\mathcal{J}}, \mathcal{J} \rangle &= -R(\mathcal{J}, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \mathcal{J}) \\ &= -\sec(\{\mathcal{J}, \dot{\gamma}\}) \cdot (\|\mathcal{J}\|^2 \underbrace{\|\dot{\gamma}\|^2}_{=0} - \langle \mathcal{J}, \dot{\gamma} \rangle^2) \\ &= -\kappa \langle \mathcal{J}, \mathcal{J} \rangle\end{aligned}$$

Wir möchten nun zeigen dass  $\ddot{\mathcal{J}} = -\kappa \mathcal{J}$  gilt. Es sei  $e_1, \dots, e_{n-1}, e_n = \dot{\gamma}(t)$  eine Orthonormalbasis von  $T_{\gamma(t)} M$ . Daraus folgt  $0 = R(\mathcal{J}, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, e_n)$  und  $0 = \langle \mathcal{J}, e_n \rangle$ . Für  $i < n$  gilt:

$$R(\mathcal{J} + e_i, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, \mathcal{J} + e_i) = \kappa \cdot (\underbrace{\|\mathcal{J} + e_i\|^2}_{=1} \cdot \underbrace{\|\dot{\gamma}\|^2}_{=0} - \underbrace{\langle \mathcal{J} + e_i, \dot{\gamma} \rangle^2}_{=0}) = \kappa \cdot \|\mathcal{J} + e_i\|^2$$

und

$$\begin{aligned}R(\mathcal{J} + e_i, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, \mathcal{J} + e_i) &= R(\mathcal{J}, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, \mathcal{J}) + R(e_i, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, e_i) + 2R(\mathcal{J}, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, e_i) \\ &= \kappa \cdot (\|\mathcal{J}\|^2 + \|e_i\|^2) + 2R(\mathcal{J}, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, e_i)\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$R(\mathcal{J}, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, e_i) = \frac{1}{2} \kappa (\|\mathcal{J} + e_i\|^2 - \|\mathcal{J}\|^2 - \|e_i\|^2) = \kappa \langle \mathcal{J}, e_i \rangle$$

und damit gilt  $R(\mathcal{J}, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \kappa \cdot \mathcal{J}$  und damit wird die Jacobi-Gleichung zu  $\ddot{\mathcal{J}} = -\kappa \mathcal{J}$ . Setze  $A(0) = \mathcal{J}(0)$  und  $B(0) = \dot{\mathcal{J}}(0)$  parallel fort zu  $A(t)$  und  $B(t)$  und definiere  $\tilde{\mathcal{J}}(t) = C_\kappa(t) \cdot A(t) + S_\kappa(t) \cdot B(t)$ . Betrachte nun:

$$\frac{D}{dt} \triangleq \nabla_t$$

$$\begin{aligned}\frac{D}{dt} \tilde{\mathcal{J}} &= C'_\kappa A + C_\kappa \underbrace{\frac{D}{dt} A}_{=0} + S'_\kappa B + S_\kappa \underbrace{\frac{D}{dt} B}_{=0} = C'_\kappa A + S'_\kappa B \\ \ddot{\mathcal{J}} &= C''_\kappa A + S''_\kappa B\end{aligned}$$

Es gilt:

$$C''_\kappa = -\kappa C_\kappa \qquad S''_\kappa = -\kappa S_\kappa$$

Daraus folgt  $\ddot{\tilde{\mathcal{J}}} = -\kappa \tilde{\mathcal{J}}$  und damit  $\tilde{\mathcal{J}} = \mathcal{J}$  (eindeutige Lösung zu gegebenen  $\mathcal{J}(0)$ ,  $\dot{\mathcal{J}}(0)$ ). Der Beweis zeigt, dass parallele  $A, B \perp \dot{\gamma}$  ein Jacobifeld definieren.

## Lösung 2

**k > 0:** Sei  $v \in T_p M$  mit  $\|v\| = 1$  und  $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ . Da  $M$  vollständig ist, ist  $\gamma$  auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert. Es sei  $B(0) \in v^\perp$  und  $B$  die parallele Fortsetzung längs  $\gamma$ . Setze  $\mathcal{J}(t) = S_\kappa(t) \cdot B(t)$ . Daraus folgt dass  $\mathcal{J}$  ein Jacobifeld ist mit  $\mathcal{J}(0) = \underbrace{S_\kappa(0)}_{=0} B(0) = 0$

und

$$\mathcal{J}\left(\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}\right) = \frac{1}{\kappa} \sin(\pi) \cdot B\left(\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}\right) = 0$$

Daraus folgt dass  $p$  und  $\gamma(\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}})$  konjugiert sind.

$k \leq 0$ : Angenommen  $p$  und  $q$  sind konjugiert längs  $\gamma$  (mit  $\|\dot{\gamma}\| = 1$ ). Es sei  $\gamma(0) = p$  und  $\gamma(t_0) = q$  mit  $t_0 \geq 0$ . Dann gibt es ein Jacobifeld  $\mathcal{J} \neq 0$  längs  $\gamma$  mit  $\mathcal{J}(0) = 0 = \mathcal{J}(t_0)$  und damit ist  $\mathcal{J}$  orthogonal. Nach Aufgabe 1 gilt  $\mathcal{J} = C_\kappa \cdot A + S_\kappa \cdot B$ . Es gilt:

$$0 = \mathcal{J}(0) = C_\kappa(0) \cdot A(0) + S_\kappa(0) \cdot B(0) = A(0)$$

Da  $A$  parallel ist gilt  $A \equiv 0$  und daraus folgt

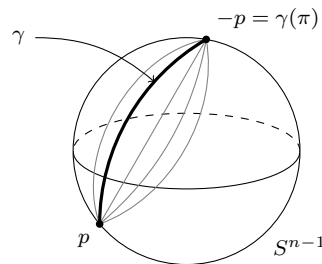
$$0 = \mathcal{J}(t_0) = \underbrace{S_\kappa(t_0)}_{=0} \cdot B(t_0) > 0$$

$$= \begin{cases} t_0 & \text{falls } k=0 \\ \frac{1}{\sqrt{|\kappa|}} \sinh(\sqrt{|\kappa|}t_0) & \text{falls } k<0 \end{cases}$$

Daraus folgt  $B(t_0) = 0$  und, da  $B$  parallel ist,  $B \equiv 0$ . Also ist  $\mathcal{J} \equiv 0$ , was einen Widerspruch darstellt.  $\nmid$

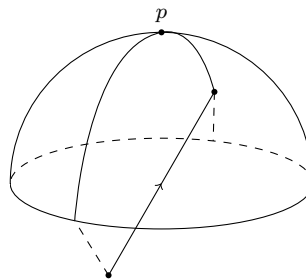
**Bemerkung** Der Beweis von Aufgabe 2 zeigt: Eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit  $\sec \equiv \kappa > 0$  hat Durchmesser  $\leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} = \text{diam}(S^n(\sqrt{\kappa}) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = \sqrt{\kappa}\})$

**Beispiel** (1)  $S^n, \sec \equiv 1$ ;  $p$  und  $-p$  sind konjugiert:



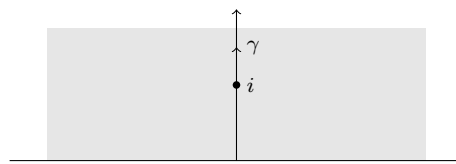
und  $p$  ist zudem zu sich selbst konjugiert ( $\mathcal{J}(2\pi) = 0$ ), und dies sind alle zu  $p$  konjugierten Punkte.

(2)  $\mathbb{RP}^n = S^n/q \sim (-q)$  mit der von  $S^n$  induzierten Metrik  $\rightsquigarrow [p] = [-p]$ . Daraus folgt dass  $[p]$  der einzige zu  $p$  konjugierte Punkt ist.



(3)  $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$  parallele Vektorfelder = konstante Vektorfelder. Damit haben die Jacobifelder die Form  $\mathcal{J}(t) = A + tB$ . (mit  $A, B \in \mathbb{R}^n$ )

(4)  $\mathbb{H}^2$





$\gamma(t) = ie^t$  Geodätische (letzte Übung)

$$\dot{\gamma}(t) = e^t \frac{\partial}{\partial y} = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es sei  $A$  ein paralleles Vektorfeld längs  $\gamma$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \nabla_t A = \nabla_t \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \nabla_t \begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nabla_t \begin{pmatrix} 0 \\ A_2 \end{pmatrix} \\ &= A'_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + A_1 \cdot \nabla_t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + A'_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + A_2 \cdot \nabla_t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A'_1 \\ A'_2 \end{pmatrix} + A_1 \cdot \nabla_{\dot{\gamma}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + A_2 \cdot \nabla_{\dot{\gamma}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{wobei } \nabla_{\dot{\gamma}} = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A'_1 \\ A'_2 \end{pmatrix} + e^t A_1 \begin{pmatrix} \overbrace{\Gamma_{21}^1(\gamma(t))}^{=-\frac{1}{\gamma^2(t)} = -\frac{1}{e^t}} \\ \underbrace{\Gamma_{21}^2(\gamma(t))}_{=0} \end{pmatrix} + e^t A_2 \begin{pmatrix} \overbrace{\Gamma_{22}^1(\gamma(t))}^{=0} \\ \underbrace{\Gamma_{22}^2(\gamma(t))}_{=\frac{1}{e^t}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A'_1 - A_1 \\ A'_2 + A_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daraus folgt  $A_1(t) = A_1(0) \cdot e^t$  und  $A_2(t) = A_2(0) \cdot e^{-t}$ .

## Übung 12 vom 28. Januar 2012

### Aufgabe 1

Es sei  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  eine Geodätische mit  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma'(0) = v$ ,  $\|v\| = 1$  und  $w \in T_p M$  mit  $\|w\| = 1$  und  $\langle v, w \rangle = 0$ . Es sei  $J$  das durch

$$J(t) = (\exp_p)_{*tv} tw \in T_{\gamma(t)} M$$

gegebene Jacobivektorfeld längs  $\gamma$  und  $\sigma = \text{span}\{v, w\}$ . Zeigen Sie, dass die Taylorentwicklung von  $|J(t)|$  gegeben ist durch

$$|J(t)| = t - \frac{1}{6} \sec(\sigma) t^3 + o(t^3) \quad \text{für } t \rightarrow 0.$$

**Hinweis:** Berechnen Sie zunächst die Entwicklung von  $|J(t)|^2$  und zeigen Sie hierfür die Identität  $\nabla_{\gamma'}(R(\gamma', J)\gamma')(0) = R(\gamma', J')\gamma'(0)$ .

### Aufgabe 2

Es seien  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, a] \rightarrow M$  zwei Geodätische mit  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) =: p$ , deren Ableitungen  $v := \dot{\gamma}_1(0)$  und  $w := \dot{\gamma}_2(0)$  normiert und linear unabhängig seien. Weiter sei  $L(t) = d(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ .

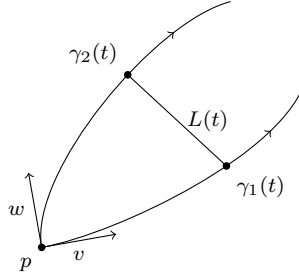
Zeigen Sie, dass

$$L(t) = t\|v - w\| - \frac{1}{12} \sec(\text{span}\{v, w\})\|v - w\|(1 + \langle v, w \rangle)t^3 + o(t^3) \quad \text{für } t \rightarrow 0$$

gilt.

**Hinweis:** Betrachten Sie die Variation  $(t, s) \mapsto \exp(s \exp_{\gamma_1(t)}^{-1}(\gamma_2(t)))$ .

Skizze:



### Lösung 1

Offensichtlich gilt  $\mathcal{J}(0) = 0$ . Außerdem gilt nach der Kettenregel für die Ableitung

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\exp_p(t(v + sw))) = (\exp_p)_{*tv}(tw) = \mathcal{J}(t)$$

Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} \mathcal{J}'(0) &= \nabla_t(\exp_{p*tv}(tw))|_0 = \nabla_t(t \cdot \exp_{p*tv}(w))|_0 \\ &= \exp_{p*tv}(w) + t \cdot \nabla_t(\exp_{p*tv}(w))|_0 \\ &= w \end{aligned}$$

Ferner gilt  $|\mathcal{J}(t)|^2 = \langle \mathcal{J}(t), \mathcal{J}(t) \rangle$ . Wir betrachten nun die Ableitungen davon:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{J}, \mathcal{J} \rangle'(0) &= 2\langle \mathcal{J}', \mathcal{J} \rangle(0) = 0 \\ \langle \mathcal{J}, \mathcal{J} \rangle''(0) &= 2(\langle \mathcal{J}'', \mathcal{J} \rangle + \langle \mathcal{J}', \mathcal{J}' \rangle)(0) \\ &= 2\|w\|^2 = 2 \\ \langle \mathcal{J}, \mathcal{J} \rangle'''(0) &= 2(\langle \mathcal{J}''', \mathcal{J} \rangle + \langle \mathcal{J}'', \mathcal{J}' \rangle + 2\langle \mathcal{J}', \mathcal{J}' \rangle)(0) \\ &= 6\langle \mathcal{J}'''(0), \mathcal{J}'(0) \rangle = -6\langle R(\dot{\gamma}(0), \underbrace{\mathcal{J}(0)}_{=0})\dot{\gamma}(0), \mathcal{J}'(0) \rangle = 0 \\ \mathcal{J}'''(0) &= \nabla_t(\mathcal{J}''(t))|_0 = \nabla_t(-R(\mathcal{J}, \dot{\gamma})\dot{\gamma})|_0 \\ &= \nabla_{\dot{\gamma}}(-R(\mathcal{J}, \dot{\gamma})\dot{\gamma}) \stackrel{\text{Hinweis}}{=} -R(\mathcal{J}', \dot{\gamma})\dot{\gamma}|_0 \\ &= -R(w, v)v \\ \langle \mathcal{J}, \mathcal{J} \rangle^{(4)}(0) &= 2(\langle \mathcal{J}^{(4)}, \mathcal{J} \rangle + \langle \mathcal{J}''', \mathcal{J}' \rangle + 3(\langle \mathcal{J}''', \mathcal{J}' \rangle + \langle \mathcal{J}'', \mathcal{J}'' \rangle))(0) \\ &= 8\langle \mathcal{J}'''(0), \mathcal{J}'(0) \rangle = -8\langle R(w, v)v, w \rangle \\ &= -8\sec(\sigma) \end{aligned}$$

**Beweis des Hinweises** Für alle Vektorfelder  $W$  längs  $\gamma$  gilt:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_t(R(\dot{\gamma}, \mathcal{J})\dot{\gamma}), w \rangle(0) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\langle R(\dot{\gamma}, \mathcal{J})\dot{\gamma}, w \rangle) - \underbrace{\langle R(\dot{\gamma}, \mathcal{J})\dot{\gamma}, \nabla_t w \rangle(0)}_{=0 \text{ in } 0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\langle R(\dot{\gamma}, w)\dot{\gamma}, \underbrace{\mathcal{J}}_{=0 \text{ in } 0} \rangle) \\ &= \langle \nabla_t(R(\dot{\gamma}, w)\dot{\gamma}), \mathcal{J} \rangle(0) + \langle R(\dot{\gamma}, w)\dot{\gamma}, \mathcal{J}' \rangle(0) \\ &= \langle R(\dot{\gamma}, \mathcal{J}')\dot{\gamma}, w \rangle(0) \end{aligned}$$

□

Aus den Ableitungen folgt nun

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}(t)|^2 &= 0 + 0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 + \frac{1}{4} \cdot (-8) \cdot \sec(\sigma) \cdot t^4 + o(t^4) \\ &= t^2 - \frac{1}{3} \sec(\sigma) t^4 + o(t^4) \end{aligned}$$

Es sei nun

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}(t)| &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + o(t^3) \\ |\mathcal{J}(t)|^2 &= a_0^2 + 2a_0 a_1 t + (2a_0 a_2 + a_1^2) t^2 + 2(a_0 a_3 + a_1 a_2) t^3 + (2a_3 a_1 + a_2^2) t^4 + o(t^4) \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert:

$$a_0 = 0, \quad a_1^2 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{1}{6} \sec(\sigma)$$

und es gilt  $a_1 = 1$  denn  $|\mathcal{J}(t)| \geq 0$ .

## Lösung 2

Sei  $\sigma = \text{span}\{v, w\}$  und  $V(t, s) := \exp_{\gamma_1(t)}(s \cdot \exp_{\gamma_1(t)}^{-1}(\gamma_2(t)))$ . Wir definieren desweiteren

$$T(t, s) := \frac{d}{ds}(V(t, s)) \quad S(t, s) := \frac{d}{dt}(V(t, s))$$

Die Abbildung  $c_t := s \mapsto V(t, s)$  ist eine Geodätische von  $\gamma_1(t)$  nach  $\gamma_2(t)$  und daraus folgt dann  $S(t, s) = \dot{c}_t$ . Desweiteren ist  $t \mapsto c_t$  eine Variation durch Geodätische und damit  $s \mapsto T(t, s)$  ein Jacobifeld längs  $c_t$ . Es gilt

$$c_t(0) = \gamma_1(t) \quad c_t(1) = \gamma_2(t)$$

und daraus folgt  $L(c_t) = \|S(t, 0)\|$ . Für genügend kleines  $t$  gilt dann:

$$L(t) = L(c_t) = \|S(t, 0)\|$$

Es gilt:

- $\nabla_s \nabla_s T = -R(T, S)S$  ( $T$  Jacobifeld längs  $c_t$ )
- $\nabla_s S = 0$  ( $c_t$  Geodätische,  $\dot{c}_t = S(t, \cdot)$ )
- $\nabla_t S = \nabla_s T$

Ferner gilt  $L^2(t) = \langle S(t, 0), S(t, 0) \rangle$  für kleines  $t$  und daraus folgt dann

$$(L^2)'(0) = 2\langle \nabla_t S, S \rangle(0, 0)$$

mit  $S(0, 0) = \dot{c}_0(0) = 0$  und  $c_0 \equiv p$ . Damit folgt also:

$$(L^2)'' = 2(\langle \nabla_t \nabla_t S, S \rangle + \langle \nabla_t S, \nabla_t S \rangle)(0, 0) = 2\langle \nabla_s T, \nabla_s T \rangle(0, 0)$$

Wir wissen bereits dass  $T(0, 0) = \dot{\gamma}_1(0) = v$ ,  $T(0, 1) = w$  und  $c_0 \equiv p$ , also  $\nabla_s = \frac{d}{ds}$ . Es gilt

$$\nabla_s \nabla_s T(0, s) = -R(T(0, s), \underbrace{S(0, s)}_{=0}) \underbrace{S(0, s)}_{=0} = 0$$

Damit ist  $T(0, \cdot)$  linear, also  $T(0, s) = v + S(w - v)$  und damit  $\nabla_s T(0, s) = w - v$ . Daraus folgt dann  $(L^2)'' = 2 \cdot \|w - v\|^2$ . Wir möchten nun dass folgendes gilt:

$$(L^2)'''(0) = 6\langle \nabla_t \nabla_t S, \nabla_t S \rangle(0, 0) \stackrel{!}{=} 0$$

Dazu zeigen wir zunächst die folgenden drei Gleichungen:

- (1)  $\nabla_t T(0, s) = 0$
- (2)  $\nabla_s \nabla_t T(0, s) = 0$
- (3)  $\nabla_t \nabla_t S(0, s) = 0$

Dass (2) aus (1) folgt ist klar. Dass (3) aus (2) folgt zeigt Folgendes (in  $(0, s)$ ):

$$\nabla_t \nabla_t S = \nabla_t \nabla_s T = \underbrace{\nabla_s \nabla_t T}_{=0} + \underbrace{R(T, S)T}_{=0}$$

Um (1) zu zeigen gilt  $(\nabla_t T)(0, 0) = (\nabla_t T)(0, 1)$  und dann bleibt noch zu zeigen, dass  $(\nabla_t T)(0, s)$  linear ist. Mit (3) folgt dann schließlich  $(L^2)'''(0) = 0$ . Für die vierte Ableitung gilt dann

$$(L^2)^{(4)}(0) \underset{\substack{S(0,s)=0 \\ (\nabla_t \nabla_t S(0,0)=0)}}{=} \dots = 8 \langle \nabla_t \nabla_t \nabla_t S, \nabla_t S \rangle(0, 0)$$

Es gilt:

$$\nabla_t \nabla_t \nabla_t S = \nabla_t (\nabla_t \nabla_s T) = \nabla_t (R(T, S)T + \nabla_s \nabla_t T) \underset{\text{Hinweis A 1}}{=} R(T, \nabla_t S)T + \nabla_t \nabla_s \nabla_t T$$

In  $(0, 0)$  gilt:

$$R(T, \underbrace{\nabla_t S}_{=\nabla_s T})T(0, 0) = R(\underbrace{\dot{\gamma}_1(0)}_{=v}, w - v) \underbrace{\dot{\gamma}_1(0)}_{=v}$$

Damit folgt dann insgesamt:

$$\begin{aligned} (L^2)^{(4)}(0) &= 8 \langle R(v, w - v)v, \overbrace{\nabla_t S(0, 0)}^{=w-v} \rangle + 8 \underbrace{\langle \nabla_t \nabla_s \nabla_t T, \nabla_t S \rangle(0, 0)}_{=...=0} \\ &= 8 \langle R(v, w - v)v, w - v \rangle \\ &= 8 \langle R(v, w)v, w \rangle \\ &= -8 \langle R(v, w)w, v \rangle \\ &= -8 \sec(\sigma) \underbrace{(\|v\|^2 \|w\|^2)}_{=1} - \langle v, w \rangle^2 \end{aligned}$$

## Übung 13 vom 4. Februar 2012

### Aufgabe 1

Es seien  $2 \leq p \in \mathbb{N}$  und  $1 \leq q_1, \dots, q_k < p$  zu  $p$  teilerfremde natürliche Zahlen. Zeigen Sie, dass die Gruppe der  $p$ -ten Einheitswurzeln  $E_p = \{z \in \mathbb{C} \mid z^p = 1\}$  durch

$$z.(z_1, \dots, z_k) := (z^{q_1} z_1, \dots, z^{q_k} z_k)$$

frei und eigentlich diskontinuierlich auf  $S^{2k-1} = \{(z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k \mid \sum_{i=1}^k |z_i|^2 = 1\}$  operiert.

Die Quotientenmannigfaltigkeit  $L(p, q_1, \dots, q_k) = S^{2k-1}/E_p$  nach dieser Wirkung wird *Linsenraum* vom Typ  $(p, q_1, \dots, q_k)$  genannt.

### Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass es auf  $T^n$  keine Riemannsche Metrik mit positiver Schnittkrümmung gibt.

### Aufgabe 3

Es seien  $M, M_1, M_2$  zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeiten und  $\pi_i : M \rightarrow M_i$  Riemannsche universelle Überlagerungen mit Decktransformationsgruppen  $\Gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ). Zeigen Sie, dass  $M_1$  und  $M_2$  genau dann isometrisch sind, wenn es eine Isometrie  $\hat{\varphi} : M \rightarrow M$  gibt, so dass  $\Gamma_1 = \hat{\varphi}\Gamma_2\hat{\varphi}^{-1}$ .

### Lösung 1

**Operation:** Für alle  $z \in E_p$  ist  $S^{2k-1} \rightarrow S^{2k-1}, x \mapsto z.x$  stetig und für alle  $z, \tilde{z} \in E_p$  und alle  $x \in S^{2k-1}$  gilt  $z.(\tilde{z}.x) = (z \cdot \tilde{z}).x$ .

**Die Operation ist frei:** Es ist zu zeigen dass für alle  $x \in S^{2k-1}$  gilt  $(E_p)_x = \{1\}$ , beziehungsweise für alle  $z \in E_p \setminus \{1\}$  und alle  $x \in S^{2k-1}$  gilt  $z.x \neq x$ , beziehungsweise dass für alle  $z \in E_p$  gilt dass wenn es ein  $x \in S^{2k-1}$  mit  $z.x$  gibt  $z = 1$  gelten muss. Es seien  $E_p$  und  $(z_1, \dots, z_k) \in S^{2k-1}$  mit

$$(z_1, \dots, z_k) = z.(z_1, \dots, z_k) = (z^{q_1} z_1, \dots, z^{q_k} z_k)$$

Da  $(z_1, \dots, z_k) \in S^{2k-1}$  ist, existiert ein  $j \in \{1, \dots, k\}$  mit  $z_j \neq 0$ , und daraus folgt  $z^{q_j} = 1$ . Es seien  $a, b \in \mathbb{Z}$  mit  $1 = aq_j + bp$ . Es gilt dann

$$1 = 1^a \cdot 1^b = (z^{q_j})^a (z^p)^b = z^{aq_j + bp} = z^1 = z$$

**Die Operation ist eigentlich kontinuierlich** Die Gruppe ist endlich und alle endlichen Gruppen operieren eigentlich diskontinuierlich, dann bleibt zu zeigen dass für alle  $K \in S^{2k-1}$  die Menge  $\{z \in E_p \mid z.K \cap K \neq \emptyset\}$  endlich ist.

Der Quotient  $L(p, q_1, \dots, q_k)$  nach dieser Operation ist also eine Mannigfaltigkeit. Für  $z = e^{2\pi i \frac{l}{p}}$  ist die induzierte Abbildung eine Drehung um den Winkel  $\frac{2\pi l}{p} q_j$  in der  $x_{2j-1}x_{2j}$ -Ebene. Damit ist die Operation bezüglich der Standardmetrik isometrisch und daraus folgt dass  $L(p, q_1, \dots, q_k)$  eine  $\text{sec} > 0$ -Metrik besitzt. Im Fall  $p = 2$  gilt  $q_1 = \dots = q_k = 1$  und es ist  $L(2, 1, \dots, 1) = \mathbb{R} \mathbb{P}^{2k-1}$ . Laut Vorlesung gilt: Für  $k \geq 2$  ist  $S^{2k-1} \rightarrow L(p, q_1, \dots, q_k)$  die universelle Überlagerung. Dann sind die Einheitswurzeln gerade die Decktransformationsgruppe, also folgt

$$\pi_1(L(p, q_1, \dots, q_k)) \cong E_p \cong \mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_p$$

**Korollar** Jede endlich erzeugte abelsche Gruppe ist isomorph zur Fundamentalgruppe einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit mit nichtnegativer Schnittkrümmung.

**Beweis** Sei  $G$  eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Nach dem Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen gilt:

- (1)  $G \cong \mathbb{Z}^l \oplus \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_n}$
- (2)  $(M, g_M)$  und  $(N, g_N)$  haben die Schnittkrümmung  $\text{sec} \geq 0$  und damit hat  $(M \times N, g_M \oplus g_N)$  auch  $\text{sec} \geq 0$  (wobei  $(g_M \oplus g_N)(X_M + X_N, Y_M + Y_N) = g_M(X_M + Y_M) + g_N(X_N, Y_N)$ )

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \pi_1(T^n \times L(p_1, 1, \dots, 1) \times \dots \times L(p_n, 1, \dots, 1)) \\ \cong \pi_1(T^n) \oplus \pi_1(L(p_1, 1, \dots, 1)) \oplus \dots \oplus \pi_1(L(p_n, 1, \dots, 1)) \\ \cong \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_n} \cong G \end{aligned} \quad \square$$

Die Mannigfaltigkeiten  $L(p, q_1, \dots, q_k)$  und  $L(p, q'_1, \dots, q'_k)$  sind:

- homotopieäquivalent genau dann wenn  $q_1 \cdot \dots \cdot q_k \equiv \pm l^k q'_1 \cdot \dots \cdot q'_k \pmod{p}$  für ein  $l \in \mathbb{Z}_p$  [7]
- homöomorph genau dann wenn es ein  $l \in \mathbb{Z}_p$  und ein  $\sigma \in S_k$  gibt sodass für alle  $i$  gilt  $q_i \equiv \pm l q'_{\sigma(i)} \pmod{p}$  [2]

Also handelt es sich um homotopieäquivalente, aber nicht homöomorphe Mannigfaltigkeiten.

### Lösung 2

Nach dem Korollar von Bonnet-Myers ist die Fundamentalgruppe eine vollständige Mannigfaltigkeit mit  $\text{ric} \geq (n-1)\kappa > 0$  endlich.  $\pi_1(T^n) = \mathbb{Z}^n$  nicht.

### Lösung 3

Wir kürzen mit (\*) die rechte Seite der Behauptung ab, also

$$\text{Es gibt eine Isometrie } \hat{\varphi} : M \rightarrow M, \text{ sodass } \Gamma_1 = \hat{\varphi} \Gamma_2 \hat{\varphi}^{-1} \quad (*)$$

„ $\Leftarrow$ “: Es sei  $\hat{\varphi} : M \rightarrow M$  eine Isometrie mit (\*). Definiere die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & M \\ \pi_2 \downarrow & \curvearrowright ? & \downarrow \pi_1 \\ M_2 & \xrightarrow{\varphi} & M_1 \end{array}$$

$$\varphi : M_2 \rightarrow M_1 \quad \text{Bahn} \quad \varphi(\Gamma_2 x) = \Gamma_1 \hat{\varphi}(x)$$

*Behauptung:*  $\varphi$  ist wohldefiniert

*Beweis:* Es ist zu zeigen dass für alle  $\gamma_2 \in \Gamma_2$  es ein  $\gamma_1 \in \Gamma_1$  gibt mit  $\hat{\varphi}(\gamma_2 x) = \gamma_1 \hat{\varphi}(x)$ . Für  $\gamma_2 \in \Gamma_2$  ist  $\hat{\varphi} \circ \gamma_2 \circ \hat{\varphi}^{-1} =: \gamma_1 \in \Gamma_1$ . Dann folgt  $\gamma_1(\hat{\varphi}(x)) = \hat{\varphi}(\gamma_2(x))$ . Die gleiche Konstruktion für  $\hat{\varphi}^{-1}$  liefert  $\varphi^{-1}$ . Da  $\pi_i$  ein lokaler Diffeomorphismus ist folgt dass  $\varphi$  und  $\varphi^{-1}$  glatt sind. Da  $\varphi$  und  $\pi_i$  lokale Isometrien sind und  $\pi_2$  surjektiv ist, ist  $\varphi$  eine lokale Isometrie, und weil  $\varphi$  ein Diffeomorphismus ist folgt dass  $\varphi$  eine Isometrie ist.

„ $\Rightarrow$ “: Es sei  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  eine Isometrie. Dann ist  $\varphi \circ \pi_2$  eine lokale Isometrie, da  $\varphi$  ein Diffeomorphismus ist und  $\pi_2$  eine Überlagerung, und damit ist  $\varphi \circ \pi_2$  eine Riemannsche Überlagerung. Aus  $\pi_1(M) = \{0\}$  folgt dass  $\varphi \circ \pi_1$  die universelle Überlagerung ist; diese ist nach der Vorlesung bis auf Isomorphie eindeutig. Das bedeutet es existiert eine Isometrie  $\hat{\varphi} : M \rightarrow M$  mit  $\pi_1 \circ \hat{\varphi} = \varphi \circ \pi_2$ .

*Behauptung:*  $\Gamma_1 = \hat{\varphi} \Gamma_2 \hat{\varphi}^{-1}$

*Beweis:* „ $\subseteq$ “:

$$\pi_1 \circ \hat{\varphi} \circ \gamma_2 \circ \hat{\varphi}^{-1} = \varphi \circ \pi_2 \circ \gamma_2 \circ \hat{\varphi}^{-1} \stackrel{\gamma_1 \in \Gamma_2}{=} \varphi \circ \pi_2 \circ \hat{\varphi}^{-1} = \pi_1 \circ \hat{\varphi} \circ \hat{\varphi}^{-1} = \pi_1$$

„ $\supseteq$ “:

$$\pi_2 \circ \hat{\varphi}^{-1} \circ \gamma_1 \circ \hat{\varphi} = \varphi^{-1} \circ \pi_1 \circ \gamma_1 \circ \hat{\varphi} = \varphi^{-1} \circ \pi_1 \circ \hat{\varphi} = \pi_2 \circ \hat{\varphi}^{-1} \circ \hat{\varphi} = \pi_2$$

Daraus folgt

$$\gamma_2 = \hat{\varphi}^{-1} \circ \gamma_1 \circ \hat{\varphi} \in \Gamma_2 \quad \gamma_1 = \hat{\varphi} \circ \gamma_2 \circ \hat{\varphi}^{-1} \in \hat{\varphi} \Gamma_2 \hat{\varphi}^{-1}$$

# Stichwortverzeichnis

- Abstand, [51](#)
- Abstandsfunktion
  - lokale, [95](#)
- Alexandrov-Toponogov, [99](#)
- äquivalent, [13](#)
- Atlas, [7](#)
  - maximaler, [8](#)
- Bahn, [92](#)
- Bahnenraum, [92](#)
- Bogenlänge, [51](#)
- Bogenlängenparametrisierung, [51](#)
- Cheng, [90](#), [102](#)
- Christoffelsymbole, [57](#)
- $C^k$ -differenzierbare Struktur, [8](#)
- Diffeomorphismus, [9](#)
- Differential, [19](#), [44](#)
  - form, [41](#)
  - äußeres, [44](#)
- Dreieck
  - geodatisches, [99](#)
- duale Bündel, [38](#)
- Einbettung, [21](#)
- einfach zusammenhängend, [90](#)
- Energie, [52](#)
- exakt, [44](#)
- Exponentialabbildung, [69](#)
- Fluss, [28](#)
  - geodätischer, [68](#)
- $k$ -Form, [41](#)
- Fundamentalgruppe, [90](#)
- Geodätische, [52](#), [68](#)
  - minimale, [52](#)
  - radiale, [70](#)
- geschlossen, [44](#)
- glatt, [9](#)
  - stückweise, [51](#)
- Gradient, [95](#)
- Gromov, [102](#)
- homotop, [90](#)
- Igel, Satz vom, [26](#)
- Immersion, [21](#)
- Index, [79](#)
- Indexform, [81](#)
- Integralkurve, [27](#)
- Isometrie, [49](#)
- Isotropieuntergruppe, [92](#)
- Jacobifeld, [82](#)
- Jacobiidentität, [26](#)
- Karchers Trick, [100](#)
- Karte, [7](#)
  - adaptierte, [10](#)
  - Bündel-, [33](#)
  - verträgliche, [8](#)
- Kartengebiet, [7](#)
- Kartenwechsel, [7](#)
- Kodimension, [10](#)
- Kohomologiegruppe
  - deRahm-, [45](#)
- konjugiert, [84](#)
  - entlang einer Geodatischen, [84](#)
- Koszul-Formel, [64](#)
- Kotangential
  - bündel, [39](#)
  - vektor, [39](#)
  - vektorraum, [39](#)
- kovariante Ableitung, [55](#)
- Länge
  - Kurven-, [50](#)
- Levi-Civita Zusammenhang, [64](#)
- Lieableitung, [31](#), [41](#), [42](#)
- Lieklammer, [26](#)

- Mannigfaltigkeit
  - differenzierbare, [8](#)
  - Riemannsche, [47](#)
  - topologische, [7](#)
  - Unter-, [10](#)
- Metrik
  - Riemann-, [47](#)
- Morse-Funktion, [80](#)
- Normalkoordinaten
  - Riemannsche, [69](#)
- Nullschnitt, [26](#)
- Orbit, [92](#)
- Paralleltransport, [61](#)
- Parametrisierung
  - proportional zur Bogenlänge, [51](#)
- Produkt
  - äußeres, [36](#)
- Projektion
  - kanonische, [92](#)
- pullback, [35](#), [40](#)
- regulär
  - Kurve, [51](#)
  - Punkt, [21](#)
  - Wert, [21](#)
- Riccatigleichung, [96](#)
- Riccatiungleichung, [97](#)
- Ricci-Krümmung, [66](#)
- Ricci-Tensor, [66](#)
- Richtungsableitung, [14](#)
- Schnitt, [38](#), [59](#)
  - konstanter, [60](#)
  - paralleler, [60](#)
- Schnittkrümmung, [65](#)
- Skalarkrümmung, [66](#)
- Submersion, [21](#)
- Tangential
  - bündel, [25](#)
  - raum, [13](#)
  - vektor, [13](#), [15](#)
- Tensor
  - bündel, [38](#)
  - feld, [39](#)
  - produkt, [36](#), [37](#)
  - Krümmungs-, [59](#)
- Torsion, [62](#)
- torsionslos, [62](#)
- Torsionstensor, [62](#)
- Totalraum, [33](#)
- Trajektorie, [27](#)
- Trivialisierung
  - lokale, [34](#)
- Übergangsfunktionen, [34](#)
- Überlagerung, [91](#)
  - Riemannsche, [91](#)
- Variation, [77](#)
  - eigentliche, [77](#)
  - glatte, [67](#)
  - mit festen Endpunkten, [77](#)
- Vektorbündel
  - glattes reelles, [33](#)
  - isomorphes, [34](#)
  - morphismus, [33](#)
  - triviales, [34](#)
- Vektorfeld, [25](#)
  - glattes, [25](#)
  - vollständiges, [29](#)
- vollständig
  - geodätisch, [73](#)
- Whitneysumme, [35](#)
- Wirkung, [92](#)
  - eigentlich diskontinuierliche, [92](#)
  - freie, [92](#)
- Zerlegung der Eins, [50](#)
- Zusammenhang, [55](#)
  - Levi-Civita-, [129](#)







# Literaturverzeichnis

- [1] W.M. Boothby. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry (2nd Ed)*. Pure and Applied Mathematics. Elsevier Science, 1986.
- [2] E.J. Brody. The topological classification of the lens spaces. 1960.
- [3] Shiu-Yuen Cheng. Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications. *Mathematische Zeitschrift*, 143:289–297, 1975.
- [4] S. Kobayashi and K Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*, volume 1. Interscience Publishers, 1963.
- [5] S. Lang. *Differential and Riemannian Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1995.
- [6] J. Milnor. *Morse Theory: Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells*. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 1963.
- [7] P. Olum. Mappings of manifolds and the notion of degree. 1953.