

# 15. Integration von Treppenfunktionen

## Definition

- (1)  $\mathfrak{M} := \{I : I \text{ ist ein beschränktes Intervall in } \mathbb{R}\}$ . Also:  $I \in \mathfrak{M} : \iff \exists a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } a < b : I = [a, b] \text{ oder } I = (a, b) \text{ oder } I = [a, b) \text{ oder } I = (a, b] \text{ oder } I = \{a\}$ .

In den ersten 4 Fällen setzt man  $|I| := b - a$  und  $|\{a\}| := 0$  (Intervalllänge).

- (2) Sei  $n \in \mathbb{R}$  und es seien  $I_1, I_2, \dots, I_n \in \mathfrak{M}$ . Dann heißt  $Q := I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$  ein **Quader** im  $\mathbb{R}^n$  und  $v_n(Q) := |I_1| \cdot |I_2| \cdot \dots \cdot |I_n|$  das ( $n$ -dim.) **Volumen von  $Q$** .

## Beispiel

( $n = 2$ )

(i)  $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2], v_2(Q) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$ .

(ii)  $Q = [a_1, b_1] \times \{a\}, v_2(Q) = 0$ .

- (3) Eine Funktion  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt eine **Treppenfunktion** im  $\mathbb{R}^n : \iff \exists$  Quader  $Q_1, \dots, Q_m$  im  $\mathbb{R}^n$  mit:

(i)  $Q_j \cap Q_k = \emptyset \ (j \neq k)$

(ii)  $\varphi$  ist auf jedem  $Q_j$  konstant

(iii)  $\varphi = 0$  auf  $\mathbb{R}^n \setminus (Q_1 \cup \dots \cup Q_m)$

$\mathcal{T}_n =$  Menge aller Treppenfunktionen in  $\mathbb{R}^n$ .

Der nächste Satz wird hier nicht bewiesen:

## Satz 15.1 (Disjunkte Quaderzerlegung und Treppenfunktionsraum)

- (1) Es seien  $Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_k$  Quader im  $\mathbb{R}^n$ . Dann ex. Quader  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$  im  $\mathbb{R}^n : Q'_1 \cup Q'_2 \cup \dots \cup Q'_k = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_m$  und  $Q_j \cap Q_k = \emptyset \ (j \neq k)$ .

*Beachte:*  $Q_1, \dots, Q_m$  sind nicht eindeutig bestimmt.

- (2)  $\mathcal{T}_n$  ist ein reeller Vektorraum.

- (3) Aus  $\varphi, \psi \in \mathcal{T}_n$  folgt:  $|\varphi|, \varphi \cdot \psi \in \mathcal{T}_n$ .

## Definition

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ .

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & , \text{ falls } x \in A \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

## 15. Integration von Treppenfunktionen

$1_A$  heißt die **charakteristische Funktion von  $A$** .

Aus 15.1 folgt:

Ist  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, dann gilt:  $\varphi \in \mathcal{T}_n \iff \exists$  Quader  $Q_1, \dots, Q_m$  in  $\mathbb{R}^n$  und  $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ :

$$\varphi = \sum_{j=1}^m c_j 1_{Q_j} \quad (*)$$

*Beachte:*

- (1) Die Darstellung von  $\varphi$  in  $(*)$  ist i.A. *nicht* eindeutig.
- (2) In  $(*)$  wird *nicht* gefordert, dass  $Q_j \cap Q_k = \emptyset$  ( $j \neq k$ ).

### Beispiel

FIXME: Bild

$$\varphi = 2 \cdot 1_{Q_1} + 3 \cdot 1_{Q_2}.$$

### Satz 15.2 (Integral über Treppenfunktion (mit Definition))

Sei  $\varphi \in \mathcal{T}_n$  wie in  $(*)$ .

$$\int \varphi dx := \int \varphi(x) dx := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi dx := \sum_{j=1}^m c_j v_n(Q_j)$$

*Behauptung:*  $\int \varphi dx$  ist wohldefiniert, d.h. obige Def. ist unabhängig von der Darstellung von  $\varphi$  in  $(*)$ .

**Vorbemerkung:** Sei  $Q = I_1 \times \dots \times I_n$  Quader im  $\mathbb{R}^n$  ( $I_j \in \mathfrak{M}$ ). Sei  $p \in \{1, \dots, n-1\}$ .  $P := I_1 \times \dots \times I_p$ ,  $R := I_{p+1} \times \dots \times I_n$ .  $P$  ist ein Quader im  $\mathbb{R}^p$ .  $R$  ist ein Quader im  $\mathbb{R}^{n-p}$ .  $Q = P \times R$ .  $v_n(Q) = v_p(P) \cdot v_{n-p}(R)$ . Ist  $z = (x, y) \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^p$ ,  $y \in \mathbb{R}^{n-p} \implies 1_Q(z) = 1_P(x) \cdot 1_R(y)$ .

### Beweis (von 15.2)

Induktion nach  $n$ .

IA:  $n = 1$ : Übung

IV: Die Beh. sei gezeigt für jedes  $q \in \{1, \dots, n-1\}$ .

IS: Sei  $p \in \{1, \dots, n-1\}$ . Vorbemerkung  $\implies \exists$  Quader  $P_1, \dots, P_m$  im  $\mathbb{R}^p$  und Quader  $R_1, \dots, R_m$  im  $\mathbb{R}^{n-p}$ :  $Q_j = P_j \times R_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ). Für  $z \in \mathbb{R}^n$  schreiben wir  $z = (x, y)$ ,  $x \in \mathbb{R}^p$ ,  $y \in \mathbb{R}^{n-p}$ .

Sei  $y \in \mathbb{R}^{n-p}$  fest.  $\varphi_y(x) := \varphi(x, y)$  ( $x \in \mathbb{R}^p$ ).

$$\varphi_y(x) = \varphi(x, y) \stackrel{(*)}{=} \sum_{j=1}^m c_j 1_{Q_j}(x, y) \stackrel{\text{Vorbem.}}{=} \sum_{j=1}^m c_j 1_{P_j}(x) \cdot 1_{R_j}(y) = \sum_{j=1}^m \underbrace{c_j 1_{R_j}(y)}_{=: d_j = d_j(y)} \cdot 1_{P_j}(x) = \sum_{j=1}^m d_j 1_{P_j}(x)$$

$$\implies \varphi_y = \sum_{j=1}^m d_j 1_{P_j} \implies \varphi_y \in \mathcal{T}_p$$

IV  $\implies \sum_{j=1}^m d_j v_p(P_j) = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_y(x) dx$  ist unabhängig von der Darstellung von  $\varphi_y$  (und damit auch von  $\varphi$ ).

$$\text{Def. } \phi : \mathbb{R}^{n-p} \rightarrow \mathbb{R} \text{ durch } \phi(y) := \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_y(x) dx = \sum_{j=1}^m d_j(y) v_p(P_j) = \sum_{j=1}^m c_j 1_{R_j}(y) v_p(P_j) = \sum_{j=1}^m \underbrace{c_j v_p(P_j)}_{=: e_j} 1_{R_j}(y)$$

$$\implies \phi = \sum_{j=1}^m e_j \cdot 1_{R_j} \implies \phi \in \mathcal{T}_{n-p}.$$

IV  $\implies \int_{\mathbb{R}^{n-p}} \phi(y) dy = \sum_{j=1}^m e_j v_{n-p}(R_j) = \sum_{j=1}^m c_j v_p(P_j) v_{n-p}(R_j) = \sum_{j=1}^m c_j v_n(Q_j)$  ist unabhängig von der Darstellung von  $\varphi$ . ■

Aus dem Beweis von 15.2 folgt:

**Satz 15.3 (Satz von Fubini für Treppenfunktionen)**

Ist  $\varphi \in \mathcal{T}_n$  und  $p \in \{1, \dots, n-1\}$  so gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) dz = \int_{\mathbb{R}^{n-p}} \left( \int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^p} \left( \int_{\mathbb{R}^{n-p}} \varphi(x, y) dy \right) dx$$

**Satz 15.4 (Eigenschaften des Integrals über Treppenfunktionen)**

Es seien  $\varphi, \psi \in \mathcal{T}_n$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

$$(1) \int (\alpha\varphi + \beta\psi) dx = \alpha \int \varphi dx + \beta \int \psi dx$$

$$(2) \left| \int \varphi dx \right| \leq \int |\varphi| dx$$

$$(3) \text{ Aus } \varphi \leq \psi \text{ auf } \mathbb{R}^n \text{ folgt } \int \varphi dx \leq \int \psi dx$$

**Beweis**

(1) Übung

(2) Sei  $\varphi = \sum_{j=1}^m c_j 1_{Q_j}$  wie in (\*). Wegen 15.1: O.B.d.A:  $Q_j \cap Q_k = \emptyset$  ( $j \neq k$ ). Dann:  
 $|\varphi| = \sum_{j=1}^m |c_j| 1_{Q_j}$ .

$$\implies \left| \int \varphi dx \right| = \left| \sum_{j=1}^m c_j v_n(Q_j) \right| \leq \sum_{j=1}^m |c_j| v_n(Q_j) = \int |\varphi| dx.$$

(3) Übung ■

