

## Kapitel 17

# Randomisierte Tests und das Lemma von Neyman-Pearson

Wir betrachten folgendes Testproblem: Sei  $X \sim B(5, \theta)$  mit  $\theta \in \Theta = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$

$$H_0 : \theta = \frac{1}{2} \text{ vs. } H_1 : \theta = \frac{3}{4}$$

Wir wollen einen Test der Form

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq c \\ 1, & x > c \end{cases}$$

der das Niveau  $\alpha = 0,05$  einhält.

$$\beta\left(\frac{1}{2}\right) = P_{\frac{1}{2}}(X > c) \stackrel{!}{\leq} 5$$

$$\begin{aligned} P_{\frac{1}{2}}(X = 5) &= \left(\frac{1}{2}\right)^5 &= \frac{1}{32} < 0,05 \\ P_{\frac{1}{2}}(X \in \{4, 5\}) &= \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 &= \frac{6}{32} > 0,05 \end{aligned}$$

Das heißt der Test

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 4 \\ 1, & \text{falls } x = 5 \end{cases}$$

hält das Niveau  $\sigma$  ein. Leider wird das Signifikanzniveau nicht voll ausgeschöpft.  $\Rightarrow$  mache bei  $x = 4$  ein zusätzliches Experiment.

### Definition 17.1

Eine Funktion  $\varphi : \chi^n \rightarrow [0, 1]$ , die angibt mit welcher Wahrscheinlichkeit  $\varphi(x)$  die Hypothese  $H_0$  abgelehnt wird, heißt **randomisierter Test**. Die Gütefunktion wird jetzt definiert durch

$$\beta(\theta) := E_{\theta} \varphi(X).$$

**Bemerkung 17.1**

Die bisher betrachteten nicht randomisierten Tests sind ein Spezialfall:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin R \\ 1, & x \in R \end{cases}$$

Die Definition der Gütefunktion stimmt mit der bisherigen überein:

$$\beta(\theta) = E_{\theta} \varphi(X) = P_{\theta}(X \in R)$$

Im Beispiel: Wir lehnen  $H_0$  jetzt auch im Falle  $x = 4$  mit einer Wahrscheinlichkeit  $p$  ab:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x = 5 \\ \gamma, & x = 4 \\ 0, & x \in \{0, 1, 2, 3\} \end{cases}$$

$\gamma$  ist so zu bestimmen, dass der Test Niveau  $\alpha = 0,05$  hat.

$$0,05 \stackrel{!}{=} \beta\left(\frac{1}{2}\right) = E_{\frac{1}{2}} \varphi(x) = 1 \cdot \frac{1}{32} + \gamma \binom{5}{4} \frac{1}{32} \Rightarrow \gamma = \frac{3}{25}$$

Im Folgenden betrachten wir den Spezialfall  $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = \theta_1$$

**Definition 17.2**

Ein randomisierter Test  $\varphi^* : \chi^n \rightarrow [0, 1]$  heißt **Neyman-Pearson-Test**, wenn eine Konstante  $c^* \in [0, \infty)$  und eine Funktion  $\gamma : \chi^n \rightarrow [0, 1]$  gibt mit

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } L_x(\theta_1) > c^* L_x(\theta_0) \\ \gamma(x) & \text{falls } L_x(\theta_1) = c^* L_x(\theta_0) \\ 0 & \text{falls } L_x(\theta_1) < c^* L_x(\theta_0) \end{cases}$$

**Satz 17.1 (Lemma von Neyman-Pearson)**

- a) Ist  $\varphi^*$  ein Neyman-Pearson-Test mit  $\alpha = \beta_{\varphi^*}(\theta_0)$ . Dann ist  $\varphi^*$  trennscharf unter allen Tests zum gleichen Niveau  $\alpha$ , das heißt er hat den kleinsten Fehler zweiter Art.
- b) Für jedes  $\alpha \in (0, 1)$  existiert ein Neyman-Pearson-Test  $\varphi^*$  zum Niveau  $\alpha$ . Dabei kann  $\gamma(x) \equiv \gamma$  gewählt werden.

**Beweis**

- a) Sei  $\varphi$  ein weiterer Test zum Niveau  $\alpha$ . Zu zeigen:  $1 - \beta_{\varphi^*}(\theta_1) \leq 1 - \beta_{\varphi}(\theta_1)$   
Sei

$$A := \{x \in \chi^n \mid \varphi^*(x) > \varphi(x)\} \text{ und } B := \{x \in \chi^n \mid \varphi^*(x) < \varphi(x)\}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow \varphi^*(x) > 0 && \Rightarrow L_x(\theta_1) \geq c^* L_x(\theta_0) \\ x \in B &\Rightarrow \varphi^*(x) < 1 && \Rightarrow L_x(\theta_1) \leq c^* L_x(\theta_0) \end{aligned}$$

Also (wir betrachten nur den diskreten Fall):

$$\begin{aligned} \beta_{\varphi^*}(\theta_1) - \beta_{\varphi}(\theta_1) &= \sum_{x \in \mathcal{X}^n} (\varphi^*(x) - \varphi(x)) L_x(\theta_1) \\ &= \sum_{x \in A} (\varphi^*(x) - \varphi(x)) L_x(\theta_1) + \sum_{x \in B} (\varphi^*(x) - \varphi(x)) L_x(\theta_1) \\ &\geq \sum_{x \in A} (\varphi^*(x) - \varphi(x)) c^* L_x(\theta_0) + \sum_{x \in B} (\varphi^*(x) - \varphi(x)) c^* L_x(\theta_0) \\ &= c^* \sum_{x \in \mathcal{X}^n} (\varphi^*(x) - \varphi(x)) = c^* \left( \underbrace{\beta_{\varphi^*}(\theta_0)}_{=\alpha} - \underbrace{\beta_{\varphi}(\theta_0)}_{\leq \alpha} \right) \geq 0 \end{aligned}$$

b) Für  $c \geq 0$  sei

$$\alpha(c) := P_{\theta_0} \left( \frac{L_X(\theta_1)}{L_X(\theta_0)} > c \right) \text{ sowie } \alpha(c^-) := P_{\theta_0} \left( \frac{L_X(\theta_1)}{L_X(\theta_0)} \geq c \right)$$

Sei  $c^* := \inf\{c | \alpha(c) \leq \alpha\}$ . Dann gilt:  $\alpha(c^*) \geq \alpha \geq \alpha(c^*)$ .

Sei außerdem

$$\gamma^* = \begin{cases} 0, & \text{falls } \alpha(c^*-) = \alpha(c^*) \\ \frac{\alpha - \alpha(c^*)}{\alpha(c^*-) - \alpha(c^*)}, & \text{falls } \alpha(c^*-) > \alpha(c^*) \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \beta_{\varphi^*}(\theta_0) &= E_{\theta_0} \varphi^*(X) \\ &= P_{\theta_0} \left( \frac{L_X(\theta_1)}{L_X(\theta_0)} > c^* \right) + \gamma^* P_{\theta_0} \left( \frac{L_X(\theta_1)}{L_X(\theta_0)} = c^* \right) + 0 \\ &= \alpha(c^*) + \gamma^* (\alpha(c^*-) - \alpha(c^*)) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

### Beispiel 17.1

Es sei  $P_{\theta} \sim \text{Exp}(\theta)$  und  $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$  mit  $\theta_0 < \theta_1$ . Es ist

$$L_x(\theta) = \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^n X_i} = \theta^n e^{-\theta n \bar{X}}$$

Betrachte

$$c^* < q(x) = \frac{L_X(\theta_1)}{L_X(\theta_0)} = \left( \frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^n e^{n\bar{x}(\theta_0 - \theta_1)} =: q^*(\bar{x})$$

$q^*(\bar{x})$  ist fallen in  $\bar{x}$ . Also ist der zugehörige Neyman-Pearson-Test äquivalent zu:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \bar{X} < c^* \quad (\Leftrightarrow q(x) > \tilde{c}) \\ \gamma^*, & \text{falls } \bar{X} = c^* \quad (\Leftrightarrow q(x) = \tilde{c}) \\ 0, & \text{falls } \bar{X} > c^* \quad (\Leftrightarrow q(x) < \tilde{c}) \end{cases}$$

$$\alpha(c) = P_{\theta_0}(\bar{X} < c) = P_{\theta_0}(\sum_{i=1}^n X_i < nc)$$

Es ist  $\sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(n, \theta_0)$  für  $\theta \in \Theta$ . Offenbar ist  $\alpha(c) = P_{\theta_0}(\bar{x} < c)$  stetig in  $c$  und damit  $\gamma^* = 0$ .  $c$  ist so zu wählen, dass

$$P_{\theta_0} \left( \sum_{i=1}^n X_i < nc^* \right) \stackrel{!}{=} \alpha$$

Wir betrachten jetzt wieder den Fall:

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta > \theta_0$$

Im allgemeinen können wir hier nicht wie vorher einen trennscharfen Test konstruieren. Es gibt aber Spezialfälle wo das klappt.

### Definition 17.3

$\{f(x, \theta), \theta \in \Theta\}$  bzw.  $\{p(x, \theta), \theta \in \Theta\}$  heißt **Familie von (Zähl-)Dichten mit monotonen Dichtequotienten**, falls es eine messbare Funktion  $T : \chi^n \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, so dass

$$q(x) = \frac{L_x(\theta_1)}{L_x(\theta_0)} = q^*(T(X_1, \dots, X_n))$$

und  $q^*$  eine monotone Funktion in  $T(x_1, \dots, x_n) = T(x)$  ist  $\forall \theta_0 < \theta_1$

### Beispiel 17.2 (vgl. Beispiel 15.3)

Die Familie der Exponentialverteilungen erfüllt die Bedingung mit  $T(x) = \bar{x}$ .

### Satz 17.2

- a) Sei  $x \in \chi^n$  eine Zufallsstichprobe zu einer Verteilung mit monoton nicht fallendem Dichtequotienten in  $T(x)$ . Jeder Test der Form:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & T(x) > t_0 \\ \gamma, & T(x) = t_0 \\ 0, & T(x) < t_0 \end{cases}$$

ist gleichmäßig bester Test für das Testproblem

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta > \theta_0$$

zum Niveau

$$\alpha = E_{\theta_0}(\varphi(X)) = \sup_{\theta \leq \theta_0} E_{\theta}(\varphi(X))$$

- b) Für jedes  $\alpha \in (0, 1)$  und  $\theta_0 \in \Theta$  existiert ein Test wie in a) beschrieben.