

## 25. Funktionen von beschränkter Variation

### Definition

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathfrak{Z}$ .  $V_f(Z) := \sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})|$  ist die **Variation** von  $f$  bezüglich  $Z$ .

**Beachte:** Sind  $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z}$  und  $Z_1 \subseteq Z_2 \implies V_f(Z_1) \leq V_f(Z_2)$ .  $M_f = \{V_f(Z) : Z \in \mathfrak{Z}\}$ .  $f$  heißt von **beschränkter Variation**, in Zeichen:  $f \in \text{BV}[a, b] : \iff M_f$  ist nach oben beschränkt. In diesem Fall heißt  $V_f[a, b] := \sup M_f$  die **Totalvariation** von  $f$  (auf  $[a, b]$ ).

### Beispiel

$$f(x) := \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{x}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$f \in C[0, 1]$ . Sei  $n \in \mathbb{N}$ .  $Z_n := \{0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-2}, \dots, \frac{1}{n-(n-1)}\}$ . Nachrechnen:  $V_f(Z_n) \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Also:  $f \notin \text{BV}[0, 1]$ .

### Hilfssatz

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar auf  $[a, b]$  und  $f'$  sei auf  $[a, b]$  beschränkt. Dann ist  $f$  auf  $[a, b]$  Lipschitzstetig.

### Beweis

$L := \sup\{|f'(x)| : x \in [a, b]\}$ . Sei  $x, y \in [a, b]$ , etwa  $x \leq y$ .  $|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)(x - y)| = |f'(\xi)||x - y| \leq L|x - y|, \xi \in [x, y]$ . ■

### Satz 25.1 (Varianzeigenschaften)

- (1) Ist  $f \in \text{BV}[a, b] \implies f$  ist beschränkt auf  $[a, b]$ .
- (2) Ist  $f$  auf  $[a, b]$  Lipschitzstetig  $\implies f \in \text{BV}[a, b]$ .
- (3) Ist  $f$  differenzierbar auf  $[a, b]$  und  $f'$  beschränkt auf  $[a, b] \implies f \in \text{BV}[a, b]$
- (4)  $C^1[a, b] \subseteq \text{BV}[a, b]$
- (5) Ist  $f$  monoton auf  $[a, b] \implies f \in \text{BV}[a, b]$  und  $V_f[a, b] = |f(b) - f(a)|$
- (6)  $\text{BV}[a, b]$  ist ein reeller Vektorraum
- (7) Ist  $c \in (a, b)$ , so gilt:  $f \in \text{BV}[a, b] \iff f \in \text{BV}[a, c]$  und  $f \in \text{BV}[c, b]$ . In diesem Fall:  $V_f[a, b] = V_f[a, c] + V_f[c, b]$ .

### Beweis

- (1) Sei  $x \in [a, b]$  (beliebig, fest).  $Z := \{a, x, b\}$ ,  $V_f(Z) = |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq V_f[a, b] \implies |f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f(a) + f(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| \leq V_f(Z) + |f(a)| \leq V_f[a, b] + |f(a)|$

- (2)  $\exists L \geq 0 : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \forall x, y \in [a, b]$ . Sei  $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathfrak{Z}$ .  $\sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})| \leq \sum_{j=1}^n L|x_j - x_{j-1}| = L \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) = L(b - a)$
- (3) folgt aus (2) und dem Hilfssatz
- (4) folgt aus (3)
- (5)  $f$  sei wachsend auf  $[a, b]$ . Sei  $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathfrak{Z}$ .  $V_f(Z) = \sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})| = \sum_{j=1}^n f(x_j) - f(x_{j-1}) = f(b) - f(a) = |f(b) - f(a)|$
- (6) Übung.
- (7)  $I := [a, b], I_1 := [a, c], I_2 := [c, b]$ .

„ $\Rightarrow$ “: Sei  $Z_1$  eine Zerlegung von  $I_1$  und  $Z_2$  eine Zerlegung von  $I_2$ .  $Z := Z_1 \cup Z_2 \Rightarrow Z \in \mathfrak{Z}$  und  $V_f(Z_1), V_f(Z_2) \leq V_f(Z_1) + V_f(Z_2) = V_f(Z) \leq V_f[a, b] \Rightarrow f \in \text{BV}(I_1)$  und  $f \in \text{BV}(I_2)$  und  $V_f(I_1) + V_f(I_2) \leq V_f[a, b]$

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $Z \in \mathfrak{Z}, \tilde{Z} := Z \cup \{c\}, Z_1 := \tilde{Z} \cap I_1, Z_2 := \tilde{Z} \cap I_2$ .  $Z_1$  und  $Z_2$  sind Zerlegungen von  $I_1$  bzw.  $I_2$  und  $V_f(Z) \stackrel{s.o.}{\leq} V_f(\tilde{Z}) = V_f(Z_1) + V_f(Z_2) \leq V_f(I_1) + V_f(I_2) \Rightarrow f \in \text{BV}[I]$  und  $V_f(I) \leq V_f(I_1) + V_f(I_2)$ . ■

**Satz 25.2 (Eigenschaften Funktion von beschränkter Varianz)**

- (1)  $f \in \text{BV}[a, b] \iff \exists f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit:  $f_1, f_2$  sind wachsend auf  $[a, b]$  und  $f = f_1 - f_2$ .
- (2)  $\text{BV}[a, b] \subseteq \text{R}[a, b]$ .
- (3) Ist  $f \in C^1[a, b] \Rightarrow V_f[a, b] = \int_a^b |f'| dx$ .

**Beweis**

(3) später in allgemeiner Form (Analysis II, §12 od. §13)

(2) folgt aus (1) und 23.4

- (1) „ $\Rightarrow$ “:  $V_f[a, a] := 0, f_1(x) := V_f([a, x])$  ( $x \in [a, b]$ ),  $f_2 := f_1 - f$ . Dann:  $f = f_1 - f_2$ . Seien  $c, d \in [a, b]$  und  $c < d$ .  $f_1(d) = V_f[a, d] \stackrel{25.1(7)}{=} V_f[a, c] + V_f[c, d] = f_1(c) + \underbrace{V_f[c, d]}_{\geq 0} \geq f_1(c) \Rightarrow f_1$  ist wachsend.  $f(d) - f(c) \leq |f(d) - f(c)| = V_f(\tilde{Z})$  (wobei  $\tilde{Z} = \{c, d\}$ )  $\leq V_f[c, d] = f_1(d) - f_1(c) \Rightarrow f_2(d) - f_2(c) \geq 0 \Rightarrow f_2$  ist wachsend.

„ $\Leftarrow$ “: 25.1(5), (6) ■