

Kapitel 1

Banachräume und lineare Operatoren

1.1 Banachräume und metrische Räume

Es sei X ein VR über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, wobei $X = 0$ solange nichts anderes gesagt wird.

Definition 1.1 Eine Halbnorm p auf X ist eine Abb. $p : X \rightarrow \mathbb{R}_+^0$ mit

$$(a) \quad p(\alpha x) = |\alpha|p(x) \quad \forall x \in \mathbb{K}, x \in X \quad (\text{Homogenität})$$

$$(b) \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in X \quad (\Delta\text{-Ungleichung})$$

$$(c) \quad p(x) = 0 \implies x = 0 \quad \forall x \in X \quad (\text{Definitheit})$$

so heißt p Norm und (X, p) normierter VR (nVR). Man schreibt meist $\|x\| = p(x)$ und p

Bemerkung 1.2

$$(a) \quad \text{Es gilt: } |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

$$(b) \quad \|x\| = \text{"Länge" von } x$$

Δ -Ungl. = Hier geht es um eine kleine Zeichnung rein!

$$(c) \quad 1.1 \text{ a)} \implies p(0) = p(0 \cdot 0) = 0 \cdot p(0) = 0$$

Definition 1.3 Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ konvergiert gegen $x \in X$, wenn

$$(1.1) \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \|x_n - x\| \leq \epsilon \quad \forall n \geq N_\epsilon \quad (x_n) \text{ ist eine Cauchy-folge (CF) in } X, \text{ wenn}$$

$$(1.2) \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \|x_n - x_m\| \leq \epsilon \quad \forall n, m \geq N_\epsilon$$

Ein $nVR (X, \|\cdot\|)$ heißt Banachraum, wenn er vollständig ist, d.h. jede Cauchy-Folge hat einen Grenzwert. Wenn die Norm klar ist, so schreibt man X statt $(X, \|\cdot\|)$.

Bemerkung 1.4

(a) Eine konvergente Folge ist CF, da

$$\|x_n - x_m\| \leq \|x_n - x\| + \|x - x_m\| \leq 2\epsilon \quad \forall n, m \geq N_\epsilon, N_\epsilon \text{ aus (1.1)}$$

(b) Wenn $x_n \rightarrow x$ und $x_n \rightarrow y$ in X ($n \rightarrow \infty$), so gilt $x = y$, wegen Def. 1.1 c) und

$$\|x - y\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - y\| \leq 2\epsilon \quad \text{für } n \geq \max\{N_\epsilon(x), N_\epsilon(y)\}.$$

(wobei $N_\epsilon(x), N_\epsilon(y)$ aus (1.1)), hier ist $\epsilon > 0$ beliebig

$$\implies \|x - y\| = 0 \xrightarrow{1.1c)} x = y$$

(c) CF und konvergente Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind beschränkt, d.h. $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$

Beweis Nach (1.2) $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $\|x_n - x_N\| \leq 1 \quad \forall n \geq N$.

$$\implies \|x_n\| \leq \|x_n - x_N\| + \|x_N\| \leq 1 + \|x_N\| \quad \forall n \geq N.$$

Ferner: $\|x_n\| \leq \max\{\|x_1\|, \dots, \|x_N\|\}$ für $n = 1, \dots, N$ ■

Beispiel 1.6

(a) $X = \mathbb{K}^d$ mit $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^d |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p \leq \infty$

$$\|x\|_\infty = \max_{k=1 \dots d} |x_k|, \text{ wobei } x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{K}^d.$$

$(X, \|\cdot\|_p)$ ist BR für $1 \leq p \leq \infty$ (BR = Banachraum).

(b) $X = C([0, 1]) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ stetig}\}$

Dabei sind $f + g, \alpha f$ für $f, g \in X, \alpha \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \text{gegeben durch: } (f + g)(t) &= f(t) + g(t) \\ (\alpha f)(t) &= \alpha f(t), \quad t \in [0, 1] \end{aligned}$$

Bekannt ist: X ist VR.

$$\text{Supremumsnorm für } f \in X : \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| \quad (= \max_{t \in [0, 1]} |f(t)|).$$

Klar: $\|f\|_\infty \in [0, \infty), \|f\|_\infty = 0 \implies f = 0$

$$\|\alpha f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |\alpha f(t)| = |\alpha| |f(t)| = |\alpha| \|f\|_\infty$$

$$\|f + g\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) + g(t)| \leq \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| + |g(t)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

$\implies (X, \|\cdot\|_\infty)$ ist nVR.

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine CF in $(X, \|\cdot\|_\infty)$

$\implies |f_n(t) - f_m(t)| \leq \|f_n(t) - f_m(t)\|_\infty \leq \epsilon \quad \forall n, m \geq N_\epsilon, \text{ wobei } \epsilon > 0 \text{ bel.,}$
gilt für alle $t \in [0, 1]$. (*)

$\implies (f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ ist CF in $\mathbb{K} \xrightarrow{\mathbb{K} \text{ vollst.}} \exists f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t), \quad t \in [0, 1].$

Sei $t \in [0, 1], \varepsilon > 0, N_\varepsilon$ aus (*), $n \geq N_\varepsilon$

$$|f(t) - f_n(t)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_m(t) - f_n(t)| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m(t) - f_n(t)\|_\infty \leq \varepsilon$$

Da N_ε unabhängig von t , gilt $\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon$.

D.h.: $f_n \rightarrow f$ glm. in $t \in [0, 1]$. z.Z. bleibt Stetigkeit von f .

(c) Haben $f_n \in X = C([0, 1])$

$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}$ mit $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ und $t, s \in [0, 1]$ gegeben, wähle $n = N_\varepsilon$. Dann $\exists \delta = \delta(n) = \delta(\varepsilon)$, so dass:

$|f_n(t) - f_n(s)| \leq \varepsilon$ wenn $|t - s| \leq \delta$ (f_n glm. stetig)