

1 Komplexe Differenzierbarkeit

1.1 Grundlegendes

1.1.1 Vorbemerkungen zu \mathbb{C}

Wir fassen \mathbb{R}^2 als Körper \mathbb{C} auf, indem wir $z = (x, y)$, $w = (u, v) \in \mathbb{R}^2$ wie folgt verknüpfen:

$$z + w = \begin{pmatrix} x + u \\ y + v \end{pmatrix}, \quad z \cdot w = zw = \begin{pmatrix} xu - yv \\ yu + xv \end{pmatrix}.$$

Wir fassen \mathbb{R} als Teilmenge von \mathbb{C} auf, indem wir $x \in \mathbb{R}$ mit $(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ identifizieren.

Beachte: $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$. Mit $i := (0, 1)$ folgt also

$$i^2 = -1.$$

Schreibe also

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x + iy,$$

hierbei sei stets $x, y \in \mathbb{R}$.

Sei weiter $w = u + iv$ ($u, v \in \mathbb{R}$). Dann:

$$zw = (x + iy)(u + iv) = xu + i^2 yv + ixv + iyu = (xu - yv) + i(yu + xv).$$

Setze $\operatorname{Re} z := x$ (Realteil), $\operatorname{Im} z := y$ (Imaginärteil), wenn $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Real- und Imaginärteil sind eindeutig bestimmt. Das Konjugiert-Komplexe ist $\bar{z} := x - iy$. Damit ist

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}), \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}.$$

Der komplexe Betrag ist

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right|_2,$$

also gilt: $|z|^2 = x^2 + y^2 = z \cdot \bar{z}$.

Es gelten:

$$|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z| \leq \sqrt{2} \max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \quad (1.1)$$

sowie:

$$|z| = 0 \iff z = 0, \quad |wz| = |w||z|, \quad |w + z| \leq |w| + |z| \quad (\forall w, z \in \mathbb{C}).$$

Polarkoordinaten: Für $\phi, \psi \in \mathbb{R}$ setze

$$e^{i\phi} := \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} = \cos \phi + i \sin \phi.$$

Es gelten nach Ana 1:

$$e^{i\phi} e^{i\psi} = e^{i(\phi+\psi)}, \quad e^{i0} = 1, \quad |e^{i\phi}| = 1, \quad e^{i(\phi+2k\pi)} = e^{i\phi} \quad (\forall k \in \mathbb{Z}).$$

Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt (für $z \neq 0$):

$$z = r \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} = r e^{i\phi} \quad (= x + iy),$$

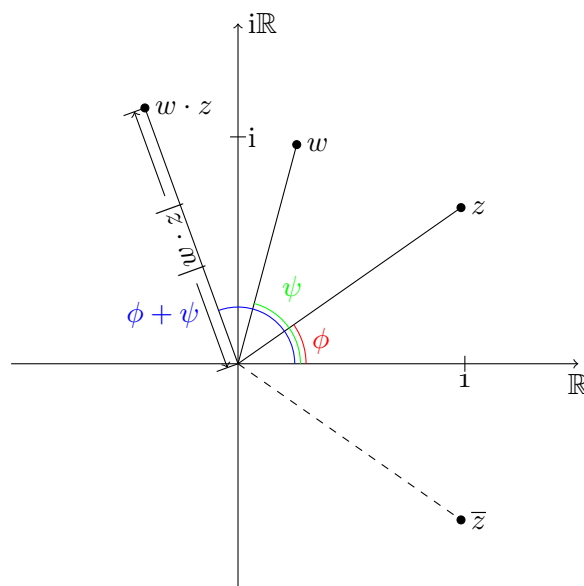
wobei r der Abstand von z zum Nullpunkt, also $|z|$, ist und

$$\phi = \arg z = \angle \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \in (-\pi, \pi], \quad \phi = \begin{cases} \text{sign}(y) \arccos \frac{x}{r}, & z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \\ \pi, & z \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

Sei weiter $w = s e^{i\psi}$ ($s \geq 0$). Dann

$$wz = s e^{i\psi} r e^{i\phi} = r s e^{i(\phi+\psi)}.$$

Also entspricht die komplexe Multiplikation der Multiplikation der Beträge und Addition der Winkel (mod 2π). Somit ist $z \mapsto wz$ für jedes feste w eine *Drehstreckung*.

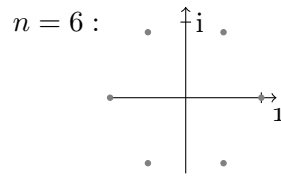


Einheitswurzeln: Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Sei $z^n = 1$ für $z = r e^{i\phi} \in \mathbb{C}$. Dann gilt: $1 = |1| = |z|^n = r^n$, also $r = 1$. Folglich:

$$1 = \left(e^{i\phi} \right)^n = e^{in\phi} = \cos(n\phi) + i \sin(n\phi).$$

Der Vergleich von Real- und Imaginärteil liefert $n\phi = 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Es gilt also:

$$z^n = 1 \iff z = e^{i \frac{2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$



Ferner: Für $z_n, z \in \mathbb{C}$ sagen wir, dass $z_n \rightarrow z$ ($n \rightarrow \infty$), wenn

$$|z - z_n| \rightarrow 0 \stackrel{(1.1)}{\iff} \operatorname{Re} z_n \rightarrow \operatorname{Re} z \text{ und } \operatorname{Im} z_n \rightarrow \operatorname{Im} z \quad (n \rightarrow \infty).$$

Somit haben \mathbb{R}^2 und \mathbb{C} den gleichen Konvergenzbegriff und außerdem die gleichen offenen und abgeschlossenen Kugeln:

$$B(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z_0 - z| < r\},$$

$$\overline{B}(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z_0 - z| \leq r\}, \quad (\forall z_0 \in \mathbb{C}, r > 0).$$

Sei $M \subseteq \mathbb{C}$. Betrachte $z = x + iy \in M$ als $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Sei $f: M \rightarrow \mathbb{C}$. Setze

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x, y), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x, y).$$

Also:

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}.$$

Somit ist $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ genau dann stetig (d.h. $z_n \rightarrow z$ (in M) $\implies f(z_n) \rightarrow f(z)$), wenn $u, v: M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind.

Fazit: Konvergenz, Offenheit, Abgeschlossenheit, Kompaktheit, Stetigkeit, etc. sind in \mathbb{R}^2 und \mathbb{C} gleich.

1.1.2 Komplexe Differenzierbarkeit

Stets sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und nichtleer, das heißt:

$$\forall z \in D \exists r = r(z) > 0 \text{ mit } B(z, r) \subseteq D \implies \overline{B}(z, \frac{r}{2}) \subseteq D.$$

Definition 1.1. Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt (*komplex*) *differenzierbar* in $z_0 \in D$, wenn

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$$

existiert. Dann heißt $f'(z_0)$ die *Ableitung* von f bei z_0 . Wenn f bei allen $z_0 \in D$ komplex differenzierbar ist, dann heißt f *holomorph*. Wir schreiben dann $f \in H(D)$. Iterativ definiert man höhere Ableitungen.

Bemerkung 1.2. (a) Offenbar sind die Funktionen $f(x) = 1$, $g(z) = z$ auf \mathbb{C} holomorph mit $f'(z) = 0$, $g'(z) = 1$.

(b) Genau wie in Analysis 1 zeigt man: Seien $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$ in $z \in D$ differenzierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann sind auch $\alpha f + \beta g$, $f \cdot g$ und $\frac{1}{f}$ (wenn $f(z) \neq 0$) in z differenzierbar und es gelten die bekannten Regeln. Ebenso gilt die Kettenregel.

(c) Polynome p sind auf \mathbb{C} und rationale Funktionen $f = \frac{p}{q}$ mit einem Polynom $q \neq 0$ sind auf $\{z \in \mathbb{C} : q(z) \neq 0\}$ holomorph mit den reellen Formeln für p' , f' .

Erinnerung an Analysis 1: Gegeben seien $a_n \in \mathbb{C}$ ($n \in \mathbb{N}_0$) und ein $c \in \mathbb{C}$. Die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n$$

konvergiert absolut für alle z mit

$$|z - c| < \rho := \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1} \in [0, \infty]$$

und divergiert, falls $z \notin \overline{B}(c, \rho)$.

Reduktion auf $c = 0$: Betrachte

$$h(w) := f(c + w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n,$$

wobei $w = z - c \in B(0, \rho)$, $z = c + w$.

Satz 1.3 (vgl. Analysis 1, Theorem 4.12). *Sei*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n, \quad z \in B(c, \rho),$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist $f \in H(B(c, \rho))$ und

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - c)^{n-1} =: g(z) \quad (\forall z \in B(c, \rho)),$$

wobei die Potenzreihe g den gleichen Konvergenzradius ρ hat.

Sei $m \in \mathbb{N}$. Iterativ folgt:

$$\exists f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n \cdot \dots \cdot (n - m + 1) a_n (z - c)^{n-m}, \quad \forall z \in B(c, \rho).$$

Beweis. Wie in Analysis 1 zeigt man: g hat Konvergenzradius ρ . Sei oBdA $c = 0$.

Seien $z \in B(0, \rho)$, $\varepsilon > 0$, $r > 0$ mit $|z| < r < \rho$. Sei $w \in \overline{B}(0, r)$ mit $w \neq z$.

Da $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n r^{n-1}$ absolut konvergiert, existiert ein $N = N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$ mit

$$0 \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} n |a_n| r^{n-1} \leq \varepsilon. \quad (*)$$

Ferner:

$$0 \leq d(w) := \left| \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - g(z) \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\left(\frac{w^n - z^n}{w - z} - n z^{n-1} \right)}_{=: p_n(w)} \right|$$

mit $p_n(w) = w^{n-1} + z w^{n-2} + \dots + z^{n-1} - n z^{n-1}$. Dabei gelten:

- $p_n(w) \rightarrow 0$, $w \rightarrow z$ (für jedes feste $n \in \mathbb{N}$)
- $|p_n(w)| \leq r^{n-1} + r r^{n-2} + \dots + r^{n-1} + n r^{n-1} = 2n r^{n-1}$ (**)

Damit folgt:

$$0 \leq d(w) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |p_n(w)| \stackrel{(**)}{\leq} \sum_{n=1}^N |a_n| |p_n(w)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2n |a_n| r^{n-1} \\ \stackrel{(*)}{\leq} N \max\{|a_1| |p_1(w)|, \dots, |a_N| |p_N(w)|\} + 2\varepsilon \rightarrow 2\varepsilon \quad (w \rightarrow z) \quad (N = N_\varepsilon \text{ fest!})$$

$\implies \lim_{w \rightarrow z} d(w) \leq 2\varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\lim_{w \rightarrow z} d(w) = 0$. \square

Beispiele mit $\rho = \infty$.

$$(a) \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \exp'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \exp(z).$$

$$(b) \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad \sin'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = \cos(z).$$

$$(c) \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \\ \cos'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} z^{2n-1} \stackrel{l=n-1}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{(2l+1)!} z^{2l+1} = -\sin(z).$$

Seien $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in D$, $z \in D$. Setze wieder $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$, $x_0 = \operatorname{Re} z_0$, $y_0 = \operatorname{Im} z_0$, also

$$f(x, y) = u(x, y) + i v(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}.$$

Sei $z \neq z_0$ und f bei z_0 komplex differenzierbar. Dann gilt:

$$\frac{1}{|z - z_0|} |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| = \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| \longrightarrow 0, \quad z \rightarrow z_0.$$

Die Zahl $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ kann als \mathbb{C} -lineare Abbildung $w \mapsto f'(z_0)w$ aufgefasst werden. Diese ist dann auch \mathbb{R} -linear auf \mathbb{R}^2 , kann also durch eine reelle 2×2 -Matrix dargestellt werden. Nach Analysis 2 ist nun f in $z_0 = (x, y)$ reell differenzierbar und somit existieren die partiellen Ableitungen von u und v und es gilt

$$f'(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}. \quad (+)$$

Satz 1.4. Sei $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$. Dann sind äquivalent:

- (a) f ist in z_0 komplex differenzierbar.
- (b) f ist in z_0 reell differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \quad (\text{CR})$$

Insbesondere ist $f'(z_0)$ schiefsymmetrisch.

Beweis. Die letzte Behauptung folgt aus (+) und (CR)₂.

(a) \implies (b): Sei $r > 0$ mit $B(z_0, r) \subseteq D$, $t \in \mathbb{Q}$ mit $0 < |t| < r$. Dann gelten

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(z_0 + t) - f(z_0)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} (u(x_0 + t, y_0) - u(x_0, y_0)) + \frac{i}{t} (v(x_0 + t, y_0) - v(x_0, y_0)) \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (1.2)$$

und

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{it} (f(z_0 + it) - f(z_0)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(-i \frac{1}{t} (u(x_0, y_0 + t) - u(x_0, y_0)) + \frac{i}{it} (v(x_0, y_0 + t) - v(x_0, y_0)) \right) \\ &= -i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Vergleichen von Real- und Imaginärteil liefert (CR).

(b) \implies (a): Setze

$$w = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \stackrel{(\text{CR})}{=} \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \in \mathbb{C}.$$

Dann gilt:

$$w(z - z_0) = (\operatorname{Re} w)(x - x_0) - (\operatorname{Im} w)(y - y_0) + i((\operatorname{Re} w)(y - y_0) + (\operatorname{Im} w)(x - x_0))$$

$$\stackrel{\text{Def. } w}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) \end{pmatrix} \quad (\text{in } \mathbb{R}^2).$$

$$\begin{aligned} \implies |f(z) - f(z_0) - w(z - z_0)| &= \frac{1}{|z - z_0|} \\ &= \left| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right|_2^{-1} \left| \begin{pmatrix} u(x, y) - u(x_0, y_0) - \left(\nabla u(x_0, y_0) \mid \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right) \\ v(x, y) - v(x_0, y_0) - \left(\nabla v(x_0, y_0) \mid \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right) \end{pmatrix} \right|_2 \rightarrow 0, \end{aligned}$$

für $(x_0, y_0) = z_0 \rightarrow z = (x, y)$, da u, v differenzierbar. \square

Beispiel 1.5. (a) $f(z) = \bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$, ist nirgends komplex differenzierbar, obwohl $f(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ reell C^∞ ist. Denn $u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$; also

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y),$$

was (CR)₁ widerspricht.

(b) $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$, $z \in \mathbb{C}$, ist nur in $z = 0$ komplex differenzierbar, denn hier ist $u(x, y) = x^2 + y^2$, $v(x, y) = 0$ und somit:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 2x \stackrel{!}{=} \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 0 \iff x = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 2y \stackrel{!}{=} -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 0 \iff y = 0.$$

$$(c) \quad f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{=u} + i \underbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}_{=v} \text{ ist holomorph f\"ur } z \neq 0 \text{ (Bem. 1.2).}$$

Bemerkung 1.6. Sei f in $z = x + iy$ komplex differenzierbar. Nach (+) und (CR) gilt:

$$A := f'(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) & -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Also gilt $\rho := \det A = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)^2 + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)^2 = \frac{\partial v}{\partial x}(x, y)^2 + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)^2 \geq 0$ und
 $f'(z) \neq 0 \iff \det A > 0$. Ferner ist $A^T A = (\det A)I$. Sei $f'(z) \neq 0$. Dann gilt

$$\frac{1}{\sqrt{\rho}} A \text{ orthogonal} \quad (*)$$

$$\implies |Av|_2 = \sqrt{\rho} |v|_2 \quad (\forall v \in \mathbb{R}^2). \quad (**)$$

Sei $\gamma_j \in C^1((-1, 1), \mathbb{R}^2)$ eine Kurve in D mit $\gamma_j(0) = (x, y)$, $\gamma_j'(0) =: v_j \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ($j = 1, 2$). Dann ist $Av_j = f'(x, y)\gamma_j'(0) = (f \circ \gamma_j)'(0)$ ein Tangentenvektor der Bildkurve $f \circ \gamma_j$ bei $f(x, y)$ ($j = 1, 2$). Weiter gilt:

$$\frac{(v_1 | v_2)}{|v_1|_2 |v_2|_2} \stackrel{(*), (**)}{=} \frac{\frac{1}{\rho}(Av_1 | Av_2)}{\frac{1}{\rho}|Av_1|_2 |Av_2|_2},$$

woraus durch Anwenden des Arcuscosinus folgt: $\angle(v_1, v_2) = \angle(Av_1, Av_2)$ (Winkel ohne Orientierung).

Also ist der Winkel der Urbildtangente gleich dem Winkel der Bildtangente unter f . Falls also $f'(z) \neq 0$, dann ist f bei $z = x + iy$ *winkeltreu* („konform“). Ferner ist f orientierungstreu, da $\det A > 0$.

Definition 1.7. Seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offen und nichtleer. Sei $f: U \rightarrow V$ bijektiv und $f \in H(U)$, $f^{-1} \in H(V)$. Dann heißt f *biholomorph*. (Dann heißen U und V auch „konform quivalent“.)

Satz 1.8. (a) Seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offen und nichtleer, $f: U \rightarrow V$ biholomorph. Dann ist $f'(z) \neq 0$ fur alle $z \in U$ und es gilt

$$(f^{-1})'(f(z)) = (f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} = \frac{1}{f'(z)} \quad (\forall z \in U, \forall w = f(z) \in V).$$

(b) Seien $f \in H(D) \cap C^1(D, \mathbb{R}^2)$, $z_0 \in D$, $f'(z_0) \neq 0$. Dann existieren offene $U, V \subseteq \mathbb{C}$ mit $z_0 \in U$, $f(z_0) \in V$, sodass $f: U \rightarrow V$ biholomorph ist. Somit ist a) auf f fur alle $z \in U$ und $w = f(z) \in V$ anwendbar.

Beweis. (a) Nach Bem. 1.2 und $z = f^{-1}(f(z))$ ($\forall z \in U$) folgt $1 = (f^{-1})'(f(z))f'(z)$. Durchdividieren ergibt Behauptung a).

(b) Nach Bem. 1.6 ist $f'(z_0)$ als 2×2 -Matrix invertierbar. Der Umkehrsatz aus Analysis 2 liefert Behauptung b). \square

Definition. Eine Funktion $u \in C^2(D, \mathbb{R})$ heißt *harmonisch* auf D , wenn fur alle $(x, y) \in D$ gilt:

$$\Delta u(x, y) := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

Satz 1.9. (a) Sei $f \in H(D) \cap C^2(D, \mathbb{R}^2)$. Dann sind $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ harmonisch auf D .
 (b) Sei $u \in C^2(D, \mathbb{R})$ auf D harmonisch, $B_0 := B((x_0, y_0), r) \subseteq D$ für ein $r > 0$, $(x_0, y_0) \in D$. Dann existiert ein $f \in H(B_0)$ mit $u = \operatorname{Re} f$.

Beweis. (a) Der Satz von Schwarz aus Analysis 2 (Satz 2.21) liefert

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \stackrel{(\text{CR})}{=} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

(b) Setze für $(x, y) \in B_0$

$$v(x, y) = - \int_{x_0}^x \frac{\partial u}{\partial y}(s, y_0) \, ds + \int_{y_0}^y \frac{\partial u}{\partial x}(x, s) \, ds.$$

Beachte: die Strecken von (x_0, y_0) nach (x, y_0) und von (x, y_0) nach (x, y) liegen in B_0 . Analysis 1 und 2 liefern: $v \in C^1(B_0)$ und

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, s) \, ds && \text{Beachte hier: } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, s) = - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, s) \\ &= - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0) = - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \end{aligned}$$

$\implies (\text{CR})_2$. Ferner $\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \implies (\text{CR})$ gilt. Mit Satz 1.4 folgt: $f = u + iv$ ist auf B_0 holomorph. \square

Beispiel. Sei $f(z) = z^3 = (x + iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3$. Satz 1.9 liefert: $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ ist harmonisch auf \mathbb{C} .

1.2 Elementare Funktionen

1.2.1 Möbiustransformationen

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{M}_{22}(\mathbb{C})$ mit $\det A = ad - bc \neq 0$ (dann ist $c \neq 0$ oder $d \neq 0$). Setze

$$m_A(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{für } z \in D_A := \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}, & c \neq 0, \\ \mathbb{C}, & c = 0. \end{cases}$$

m_A heißt *Möbius-Transformation*. Offensichtlich ist $m_A \in H(D_A)$.

Eigenschaften: Sei A wie oben und $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} \in \operatorname{M}_{22}(\mathbb{C})$ mit $\det \tilde{A} \neq 0$.

(a) Es gilt

$$m_A(z) = z \quad (\forall z \in D_A) \iff A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{für ein } a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Beweis. „ \Leftarrow “: einsetzen! „ \Rightarrow “: Für alle $z \in D$ gilt:

$$m_A(z) = z \implies cz^2 + (d-a)z - b = 0 \quad (\forall z \in D_A)$$

$$\implies c = 0, d = a, b = 0 \implies A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}. \quad \square$$

(b) Für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt $m_{\alpha A} = m_A$.

(c) Es gilt $m_A(m_{\tilde{A}}(z)) = m_{A\tilde{A}}(z)$ (soweit alles definiert).

Beweis. Für passende z :

$$m_A(m_{\tilde{A}}(z)) = \frac{a \frac{\tilde{a}z + \tilde{b}}{\tilde{c}z + \tilde{d}} + b}{c \frac{\tilde{a}z + \tilde{b}}{\tilde{c}z + \tilde{d}} + d} = \frac{(a\tilde{a} + b\tilde{c})z + (a\tilde{b} + b\tilde{d})}{(c\tilde{a} + d\tilde{c})z + (c\tilde{b} + d\tilde{d})} = m_{A\tilde{A}}(z). \quad \square$$

(d) Es gilt: $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Damit folgt: $D_{A^{-1}} = \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}, & c \neq 0, \\ \mathbb{C}, & c = 0. \end{cases}$

Man zeigt leicht, dass gilt:

$$m_A(D_A) \subseteq D_{A^{-1}}, \quad (*)$$

$$m_{A^{-1}}(D_{A^{-1}}) \subseteq D_A. \quad (**)$$

Also folgt aus c): $m_A(D_A) = D_{A^{-1}}$ (wende auf (**) m_A an), $m_{A^{-1}}(D_{A^{-1}}) = D_A$ (wende auf (*) $m_{A^{-1}}$ an) und $(m_A)^{-1} = m_{A^{-1}}$.

Insbesondere sind $m_A: D_A \rightarrow D_{A^{-1}}$, $m_{A^{-1}}: D_{A^{-1}} \rightarrow D_A$ biholomorph.

(e) Sei $c = 0$ (also $d \neq 0$). Dann ist $m_A(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ eine affine Abbildung, also $m_A = T \circ S$ mit $Tw = w + \frac{d}{a}$ (Translation) und $Sw = \frac{a}{d}w$ (Drehstreckung). Sei nun $c \neq 0$. Dann gilt $m_A = A_2 \circ J \circ A_1$, wobei $A_1w = cw + d$, $A_2w = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c}w$ (affin) und $Jw = \frac{1}{w}$ ($w \neq 0$) (Inversion).

$$\text{Beweis. Es gilt } \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c} \frac{1}{cz+d} = A_2(J(A_1(z))). \quad \square$$

Fasse jede Gerade in \mathbb{C} als verallgemeinerten Kreis über ∞ auf. Also ist ein verallgemeinerter Kreis K entweder eine Gerade oder eine echte Kreislinie. Beachte: K wird durch die Angabe dreier verschiedener Punkte in \mathbb{C}_∞ eindeutig bestimmt.

(f) Jede Möbiustransformation bildet einen verallgemeinerten Kreis bijektiv auf einen verallgemeinerten Kreis ab.

Beweis. Nach 1.9(e) ist die Behauptung nur für Translationen T , Drehstreckungen S und die Inversion J zu zeigen. Klar: T , S sind „verallgemeinert kreistreu“.

Zu J : Sei $r > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann:

$$z \in K := \partial B(z_0, r) \iff r^2 = |z - z_0|^2 = (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = |z|^2 - z_0\bar{z} - \bar{z}_0z + |z_0|^2.$$

Damit:

$$K = \{z \in \mathbb{C} : \alpha|z|^2 + c\bar{z} + \bar{c}z + \delta = 0\} \quad (*)$$

für feste $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$ mit $|c|^2 > \alpha\delta$, wobei $z_0 = -\frac{c}{\alpha}$, $r^2 = \frac{|c|^2}{\alpha^2} - \frac{\delta}{\alpha}$, falls $\alpha \neq 0$.

\rightsquigarrow Für $\alpha \neq 0$ beschreibt $(*)$ die echte Kreislinie $\partial B(z_0, r)$. Für $\alpha = 0$ beschreibt $(*)$ die Gerade $\operatorname{Re}(\bar{c}z) = -\frac{\delta}{2}$ (Beachte: $c \neq 0$). Multipliziere $(*)$ mit $\frac{1}{|z|^2}$. Dann erfüllt $w = Jz = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ die Gleichung:

$$0 = \underbrace{\alpha}_{=: \delta'} + \underbrace{c}_{=: -\bar{c}'} w + \underbrace{\bar{c}}_{=: -c'} \bar{w} + \underbrace{\delta}_{=: \alpha'} |w|^2.$$

Weiter gilt: $|c'|^2 - \alpha'\delta' = |c|^2 - \alpha\delta > 0$. Wenn K durch $(*)$ beschrieben wird, dann folgt also $J(K) \subseteq K'$, wobei K' ein verallgemeinerter Kreis ist. Genauso: $J(K') \subseteq K$. Da $J^2 = \operatorname{id}$ folgt $K' = J^2(K') \subseteq J(K) \implies J(K) = K'$. \square

Definition 1.10. Setze $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, wobei gelten soll:

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C} : z\infty &= \infty + z = \infty, \quad \frac{z}{\infty} = 0, \\ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : z \cdot \infty &= \infty \cdot z = \infty, \quad \frac{z}{0} = \infty. \end{aligned}$$

Verboten: $0 \cdot \infty$, $\infty \cdot 0$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

Wir schreiben $z_n \rightarrow \infty$, wenn $|z_n| \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow +\infty$).

Beachte: Dieses ∞ ist ein anderes als $\pm\infty$ in \mathbb{R} aus Analysis 1.

Setze bezüglich dieser „Konvergenz“ m_A „stetig“ fort durch

$$m_A(\infty) := \begin{cases} \frac{a}{c}, & c \neq 0 \\ \infty, & c = 0 \end{cases}.$$

Beachte:

$$m_A(z) = \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} \quad (z \neq 0), \quad m_A\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$$

(beachte: $-\frac{ad}{c} + b \neq 0$, da $\det A \neq 0$).

Mit etwas Rechnung folgt: $m_A: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ ist bijektiv mit $(m_A)^{-1} = m_{A^{-1}}: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$.

Sei $\mathcal{M} := \{m_A: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty \mid \det A \neq 0\}$. Mit obigen Eigenschaften (und etwas Rechnung bezüglich ∞) folgt:

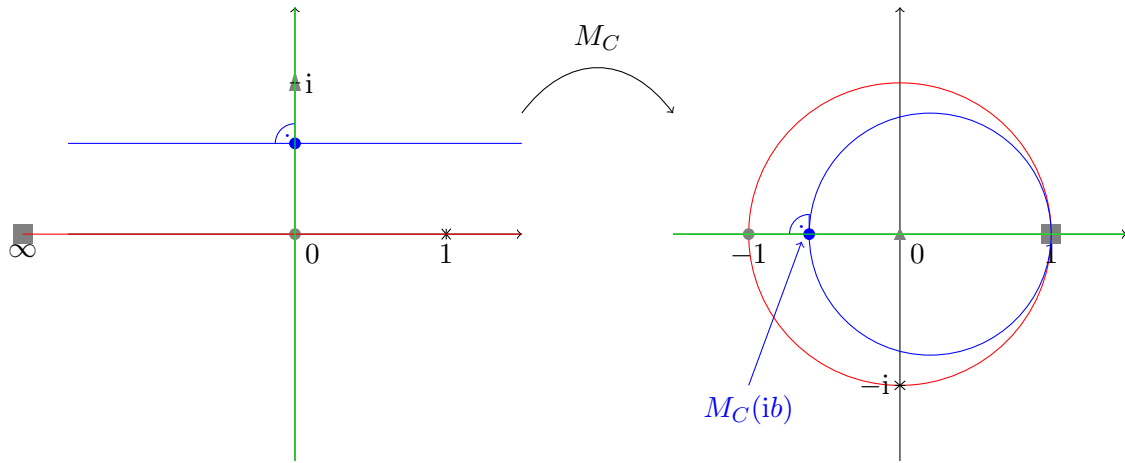
- \mathcal{M} ist eine Gruppe bezüglich der Komposition.
- $\Phi: \operatorname{GL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}$, $A \mapsto m_A$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit $\operatorname{Kern}\Phi = \{\alpha I \mid \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$.

Beispiel 1.11 (Cayley-Transformation). Sei $C = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$ ($\rightsquigarrow \det C = 2i \neq 0$) $\rightsquigarrow M_C(z) = \frac{z - i}{z + i}$.

Dabei: $M_C(-i) = \frac{-2}{0} = \infty$, $M_C(\infty) = \frac{1 - \frac{i}{\infty}}{1 + \frac{i}{\infty}} = 1$. Weiter: $M_C(0) = -1$, $M_C(1) = \frac{1 - i}{1 + i} = -i$.

Durch $\{0, 1, \infty\}$ läuft der verallgemeinerte Kreis $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Nach verläuft der Bildkreis $M_C(\mathbb{R}_\infty)$ durch die Bilder $-1, -i, 1$. Dies ist $\mathbb{S} = \partial\mathbb{D}$ mit $\mathbb{D} = B(0, 1)$. Also $M_C(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{S}$.

Ferner: Für $b \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ gilt $M_C(ib) = \frac{b - 1}{b + 1}$, insbesondere $M_C(i) = 0$. $i\mathbb{R}_\infty$ verläuft durch $0, i, \infty$. \mathbb{R}_∞ verläuft durch die Bildpunkte $-1, 0, 1 \implies M_C(i\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty$. Mit Analysis 1: $M_C(i\mathbb{R}_+) = [-1, 1)$.



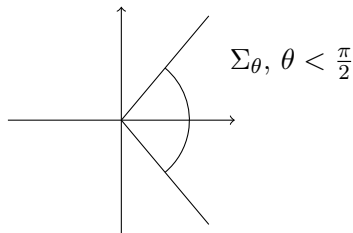
Die Gerade $K: ib + x, x \in \mathbb{R}, (b > 0 \text{ fest})$ wird auf den verallgemeinerten Kreis K' durch $M_C(ib) \in (-1, 1)$ und $1 = M_C(\infty)$ abgebildet. Nach Bem. 1.6 und da K die imaginäre Achse im Winkel $\frac{\pi}{2}$ schneidet, schneidet $M_C(K)$ die reelle Achse ($= M_C(i\mathbb{R}_\infty)$) auch senkrecht in $M_C(ib)$. $\Rightarrow M_C(K)$ ist symmetrisch zur x -Achse und liegt in \mathbb{D} . $\Rightarrow M_C(\mathbb{H}_+) \subseteq \mathbb{D}$, mit $\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$. Sei weiter $w \in \mathbb{D}$. Sei K der Kreis durch w und 1, der symmetrisch zur x -Achse ist. Sei $a \in (-1, 1)$ der zweite Schnittpunkt von K mit der x -Achse. \Rightarrow Es gibt genau ein $b \in (0, \infty)$ mit $a = \frac{b-1}{b+1}$. Also: Ist $w \in M_C(ib + \mathbb{R}_\infty) \Rightarrow M_C(\mathbb{H}_+) = \mathbb{D} \Rightarrow M_C: \mathbb{H}_+ \rightarrow \mathbb{D}$ ist biholomorph.

1.2.2 Potenzen und Wurzeln

Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Mit $\sqrt[n]{x}$ wird stets die reelle Wurzel bezeichnet. Für $\theta \in (0, \pi]$ definiere den (offenen) Sektor:

$$\Sigma_\theta := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \theta\}$$

Speziell: $\Sigma_\pi = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ (geschlitzte Ebene), $\Sigma_{\frac{\pi}{2}} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > 0\} = \mathbb{C}_+$ (rechte Halbebene)



$$z = re^{i\phi} \in \Sigma_\theta \iff r > 0, |\phi| < \theta$$

(wobei $|\phi| \leq \pi$)

Betrachte: $P_n(z) = z^n, z \in \mathbb{C}$. Dann: $P_n(re^{i\phi}) = r^n e^{i\phi n}$. Also bildet P_n den Halbstrahl $\{re^{i\phi}, r > 0\}$ mit Winkel $\phi \in (-\pi, \pi]$ bijektiv auf den Halbstrahl $\{se^{i\phi n}, s > 0\}$ mit n -fachem Winkel (modulo 2π) ab.

Setze $p_n := P_n|_{\Sigma_{\frac{\pi}{n}}}$. Dann ist $p_n: \Sigma_{\frac{\pi}{n}} \rightarrow \Sigma_\pi$ bijektiv.

Beachte: P_n ist schon auf $\overline{\Sigma_{\frac{\pi}{n}}}$ nicht mehr injektiv. Beispiel für $n = 2$:

$$+i, -i \in \overline{\Sigma_{\frac{\pi}{2}}} = \overline{\mathbb{C}_+}, P_2(i) = -1 = P_2(-i).$$

Definition 1.12. Der Hauptzweig der n -ten Wurzel ist die Umkehrabbildung $r_n = p_n^{-1}: \Sigma_\pi \rightarrow \Sigma_{\frac{\pi}{n}}$. Man schreibt $r_n(w) =: w^{\frac{1}{n}}$ für $w \in \Sigma_\pi$.

Per Definition haben wir $r_n(z^n) = z$ ($\forall z \in \Sigma_{\frac{\pi}{n}}$), $r_n(w)^n = w$ ($\forall w \in \Sigma_{\pi}$). Es gilt:

$$r_n(se^{i\psi}) = \sqrt[n]{s}e^{i\frac{\psi}{n}} \quad (\forall s > 0, |\psi| < \pi) \quad (1.5)$$

(denn: $z = \sqrt[n]{s}e^{i\frac{\psi}{n}} \in \Sigma_{\frac{\pi}{n}}$ und $z^n = se^{i\psi}$)

Insbesondere: $r_n(x) = \sqrt[n]{x}$ für $x > 0$.

Weiter: $p_n'(z) = nz^{n-1} \neq 0$ ($\forall z \in \Sigma_{\frac{\pi}{n}}$).

Mit Satz 1.8 sind $r_n \in H(\Sigma_{\pi})$ und

$$\left. \begin{array}{l} p_n: \Sigma_{\frac{\pi}{n}} \rightarrow \Sigma_{\pi} \\ r_n: \Sigma_{\pi} \rightarrow \Sigma_{\frac{\pi}{n}} \end{array} \right\} \text{biholomorph}$$

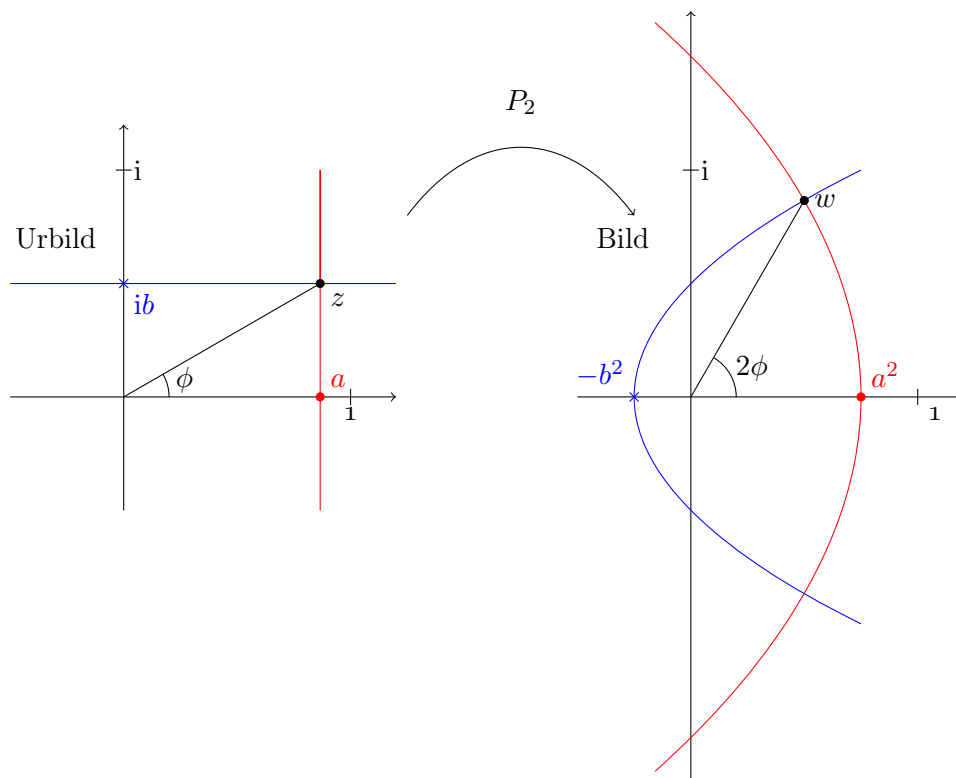
Abbildungsverhalten der Quadratfunktion

- **Vertikale Gerade** $\operatorname{Re} z = a$ mit einem festen $a > 0$. Also gilt für $z = x + iy$, dass $w := z^2 = a^2 - y^2 + i \cdot 2ay$ (mit $a = x$) ($y \in \mathbb{R}$ ist Parameter). Also ist $\operatorname{Im} w = 2ay$, also $y = \frac{\operatorname{Im} w}{2a}$. Damit folgt:

$$\operatorname{Re} w = a^2 - y^2 = a^2 - \frac{(\operatorname{Im} w)^2}{4a^2} \leq a^2.$$

Also ist $\operatorname{Im} w = \pm 2a\sqrt{a^2 - \operatorname{Re} w}$ eine nach links offene Parabel mit Scheitel $(a^2, 0)$.

- **Horizontale Gerade** $\operatorname{Im} z = b$ mit einem festen $b > 0$. Also gilt für $z = x + iy$, dass $w := z^2 = x^2 - b^2 + i \cdot 2bx$ (mit $y = b$) ($x \in \mathbb{R}$ ist Parameter). Wie oben erhält man $\operatorname{Im} w = 2bx$, also $x = \frac{\operatorname{Im} w}{2b}$ und $\operatorname{Re} w = x^2 - b^2$. Also ist $\operatorname{Im} w = \pm 2b\sqrt{b^2 + \operatorname{Re} w}$ eine nach rechts offene Parabel mit Scheitel $(-b^2, 0)$.



Weitere Zweige der Wurzel

Sei $\beta \in (-\pi, \pi]$. Setze

$$E_\beta = \{te^{i\psi} \mid t > 0, \psi \in (\beta, \beta + 2\pi)\} = \mathbb{C} \setminus \{re^{i\beta} \mid r \geq 0\}.$$

Sei nun $n = 2$, dann ist

$$W_{\alpha,2} = \{se^{i\phi} \mid s > 0, \phi \in (\alpha, \alpha + \pi)\}$$

eine gedrehte Halbebene.

Da $\frac{\beta}{2} < \phi < \frac{\beta}{2} + \pi \iff \beta < 2\phi < \beta + 2\pi$, ist $p_2^o := P_2|_{W_{\frac{\beta}{2},2}}$ eine Bijektion

$$p_2^o: W_{\frac{\beta}{2},2} \rightarrow E_\beta.$$

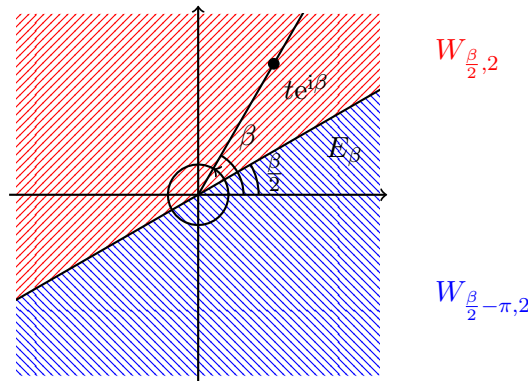
Da $E_\beta = \{te^{i\psi} \mid t > 0, \psi \in (\beta - 2\pi, \beta)\}$, ist ebenso $p_2^u := P_2|_{W_{\frac{\beta}{2}-\pi,2}}$ eine Bijektion

$$p_2^u: W_{\frac{\beta}{2}-\pi,2} \rightarrow E_\beta.$$

Also erhalten wir für jedes $\beta \in (-\pi, \pi]$ genau zwei Zweige der Wurzel

$$r_2^o = (p_2^o)^{-1}: E_\beta \rightarrow W_{\frac{\beta}{2},2},$$

$$r_2^u = (p_2^u)^{-1}: E_\beta \rightarrow W_{\frac{\beta}{2}-\pi,2}.$$



Eigenschaften: Sei $t > 0$, $\psi \in (\beta, \beta + 2\pi)$, $z = te^{i\psi}$. Es gilt

- $r_2^o(te^{i\psi}) = \sqrt{t}e^{i\frac{\psi}{2}} =: w^o$

Denn: $(w^o)^2 = \left(\sqrt{t}e^{i\frac{\psi}{2}}\right)^2 = te^{i\psi} = z$ und $\frac{\psi}{2} \in (\frac{\beta}{2}, \frac{\beta}{2} + \pi)$, also $w^o \in W_{\frac{\beta}{2},2}$.

- $r_2^u(te^{i\psi}) = \sqrt{t}e^{i\frac{\psi}{2}}e^{-i\pi} =: w^u$

Denn: $(w^u)^2 = \left(\sqrt{t}e^{i\frac{\psi}{2}}e^{-i\pi}\right)^2 = te^{i\psi}e^{-2\pi i} = z$ und $\frac{\psi}{2} - \pi \in (\frac{\beta}{2} - \pi, \frac{\beta}{2})$, also $w^u \in W_{\frac{\beta}{2}-\pi,2}$.

Beispiel. Sei $\beta = \frac{\pi}{4}$. Gefordert ist also im Urbild der Wurzel, dass $\psi \in (\frac{\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{4})$, sowie $t > 0$.

Sei $\psi = \pi$, $t = 1$, also $z = e^{i\pi} = -1$. Dann $r_2^o(-1) = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $r_2^u(-1) = e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-i\pi} = -i$.

Sei $\psi = 2\pi$, $z = t = te^{2\pi i} > 0$. Dann $r_2^o(t) = \sqrt{t}e^{i\pi} = -\sqrt{t}$, $r_2^u(t) = \sqrt{t}e^{i\pi}e^{-i\pi} = \sqrt{t}$.

Entsprechend erhält man für jedes $\beta \in (-\pi, \pi]$ genau n Zweige der n -ten Wurzel (mit jeweils passenden α !).

1.2.3 Exponentialfunktion und Logarithmus

Aus Analysis 1 haben wir: Seien $z, w \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$. Dann gelten:

$$\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w), \quad \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)} \neq 0 \quad (1.6)$$

$$e^z = \exp(z) = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (x, y \in \mathbb{R}!) \quad (1.7)$$

$$\exp(z) = \exp(z + 2\pi i) \quad (\exp \text{ ist } 2\pi i\text{-periodisch}) \quad (1.8)$$

$$e^z = 1 \iff z = 2\pi i k \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \quad (1.9)$$

Mit (1.7) folgt:

- **Horizontale Gerade** $y = \operatorname{Im} z = b$ ($b \in \mathbb{R}$ fest). Die Exponentialfunktion liefert dann einen Ursprungsstrahl $e^x (\cos b + i \sin b)$, wobei $x \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist. Hierbei ist \exp bijektiv, da das reelle \exp bijektiv ist.
- **Vertikale Gerade** $x = \operatorname{Re} z = a$ ($a \in \mathbb{R}$ fest). Die Exponentialfunktion bildet diese Gerade ab auf den Kreis $\partial B(0, e^a)$ (lasse in (1.7) $y \in \mathbb{R}$ laufen). Dies ist surjektiv, aber nicht injektiv.

Definiere den vertikalen Streifen $S_r(a_1, a_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \in (a_1, a_2)\}$ (mit $a_1 < a_2$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$) und den horizontalen Streifen $S_i(b_1, b_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \in (b_1, b_2)\}$ (wobei $2\pi k - \pi \leq b_1 < b_2 < 2\pi k + \pi$, $k \in \mathbb{Z}$). Dann ist

$$\exp: S_r(a_1, a_2) \rightarrow B(0, e^{a_2}) \setminus B(0, e^{a_1})$$

surjektiv, aber nicht injektiv, und

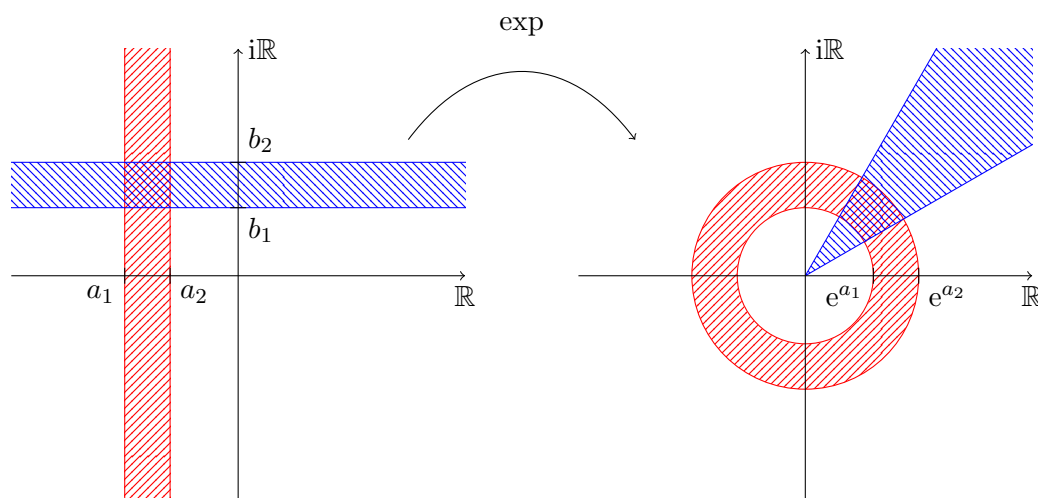
$$\exp: S_i(b_1, b_2) \rightarrow \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \arg z \in (\theta_1, \theta_2)\}$$

bijektiv (wobei $\theta_j = \arg(\cos b_j + i \sin b_j)$ für $j = 1, 2$).

Sei speziell $S_i = S_i(-\pi, \pi)$. Wegen $\cos b_j + i \sin b_j = 1$, $\theta_1 = -\pi$, $\theta_2 = \pi$, ist dann

$$\exp|_{S_i}: S_i \rightarrow \Sigma_\pi$$

bijektiv.



Definition 1.13. Der *Hauptzweig des Logarithmus* ist

$$\log := (\exp|_{S_i})^{-1} : \Sigma_\pi \rightarrow S_i.$$

Bemerkung. \ln bezeichnet stets den reellen Logarithmus. $\exp|_{S_i+i\alpha}$ liefert andere Zweige des Logarithmus auf passenden E_α .

Per Definition gelten

$$\begin{aligned} \log(\exp(z)) &= z \quad (\forall z \in S_i), \\ \exp(\log(z)) &= z \quad (\forall z \in \Sigma_\pi). \end{aligned}$$

Da für alle z gilt $\exp'(z) = \exp(z) \neq 0$, liefert Satz 1.8, dass

$$\exp: S_i \rightarrow \Sigma_\pi, \quad \log: \Sigma_\pi \rightarrow S_i$$

biholomorph sind, und es existiert die Ableitung

$$\log'(w) = \frac{1}{\exp'(z)} = \frac{1}{\exp(z)} = \frac{1}{w}$$

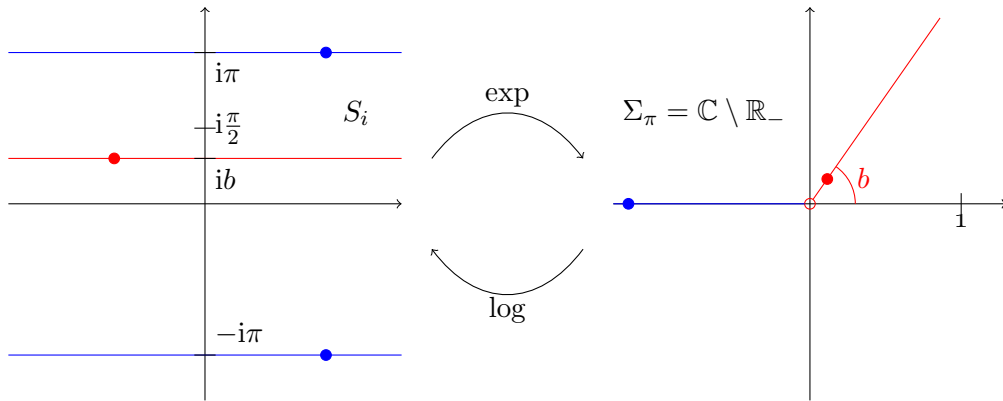
für alle $w = e^z \in \Sigma_\pi$, wobei $z \in S_i$.

Für $w = re^{i\phi}$ mit $r > 0$, $\phi \in (-\pi, \pi)$ gilt

$$\log(re^{i\phi}) = \ln(r) + i\phi, \tag{1.10}$$

denn $\exp(\ln(r) + i\phi) \stackrel{(1.7)}{=} re^{i\phi}$ und $\ln(r) + i\phi \in S_i$.

Beispiel. $\log(r) = \ln(r)$, $\log(i) = \log(e^{i\frac{\pi}{2}}) = i\frac{\pi}{2}$.



wobei: $e^{x+i\pi} = e^x e^{i\pi} = -e^x$, $e^{x-i\pi} = e^x e^{-i\pi} = -e^x$, $e^{x+ib} = e^x e^{ib}$ für $x \in \mathbb{R}$, $b \in (-\pi, \pi)$ und es gilt:

$$\log re^{ib} = \ln(r) + ib \tag{1.11}$$

wobei $r > 0$ und $b \in (-\pi, \pi)$, also $re^{ib} \in \Sigma_\pi$.

Vorsicht: Logarithmusgesetz gilt in \mathbb{C} nur eingeschränkt. Beispiel: Seien $\phi, \psi \in (-\pi, \pi)$, $\phi + \psi > \pi \implies \phi + \psi - 2\pi \in (-\pi, \pi)$. Damit:

$$\log(e^{i\phi}e^{i\psi}) = \log e^{i(\phi+\psi-2\pi)} \stackrel{(1.11)}{=} i(\phi + \psi - 2\pi) \neq i\phi + i\psi \stackrel{(1.11)}{=} \log(e^{i\phi}) + \log(e^{i\psi}).$$

Definition 1.14. Seien $z = re^{i\phi} \in \Sigma_\pi$, $r > 0$, $\phi \in (-\pi, \pi)$, $w = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Setze

$$z^w := \exp(w \log z) \stackrel{(1.11)}{=} \exp((x + iy)(\ln(r) + i\phi)) = \underbrace{e^{x \ln r}}_{=|z|^x} e^{-y\phi} e^{i(x\phi + y \ln(r))}.$$

Beispiel. $i^i \rightsquigarrow r = 1, \phi = \frac{\pi}{2}, x = 0, y = 1 \implies i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Bemerkung 1.15. Seien z, w wie in Definition 1.14, $n \in \mathbb{N}$, $w_k = x_k + iy_k$ ($k = 1, 2$), $x_k, y_k \in \mathbb{R}$. Dann:

$$(a) \quad z^n \stackrel{1.14}{=} \exp(n \log z) \stackrel{(1.6)}{=} \exp(\log z) \cdots \exp(\log z) \stackrel{1.14}{=} \underbrace{z \cdots z}_{n\text{-fach}} \stackrel{\text{alte Def.}}{=} z^n.$$

$$\bullet \quad z^0 = \exp(0 \log z) = 1.$$

$$\bullet \quad z^{-1} \stackrel{1.14}{=} \exp(-\log z) \stackrel{(1.6)}{=} \frac{1}{\exp(\log z)} = \frac{1}{z}.$$

\implies Def. 1.14 passt zu ganzen Exponenten.

$$(b) \quad z^{w_1+w_2} \stackrel{1.14}{=} \exp((w_1 + w_2) \log z) \stackrel{(1.6)}{=} \exp(w_1 \log z) \cdot \exp(w_2 \log z) \stackrel{1.14}{=} z^{w_1} z^{w_2}$$

$$\implies z = z^{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}} = \underbrace{z^{\frac{1}{n}} \cdots z^{\frac{1}{n}}}_{n\text{-fach}} = (z^{\frac{1}{n}})^n.$$

\implies Für $w = \frac{1}{n}$ stimmen Definition 1.14 und 1.12 überein.

$$(c) \quad \frac{\partial}{\partial z} z^w = \frac{\partial}{\partial z} \exp(w \log z) = \exp(w \log z) \frac{w}{z} \stackrel{(b)}{=} w z^{w-1},$$

$$\frac{\partial}{\partial w} z^w = \frac{\partial}{\partial w} \exp(w \log z) = \log(z) z^w.$$

$$(d) \quad |z^w| \stackrel{1.14}{=} |z|^{\operatorname{Re} w} e^{-\operatorname{Im}(w) \arg(z)} \leq |z|^{\operatorname{Re} w} e^{\pi |\operatorname{Im} w|}.$$

1.2.4 Sinus und Kosinus

Seien $z, w \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) Aus den Reihendarstellungen folgen (Analysis 1):

$$\sin(-z) = -\sin(z), \quad \cos(-z) = \cos(z) \tag{1.12}$$

$$\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z), \quad \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \tag{1.13}$$

$$\text{mit (1.12):} \quad \cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \tag{1.14}$$

$$\stackrel{(1.7)}{\implies} \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{ix}e^{-y} + e^{ix}e^y) = \frac{1}{2}e^{-y}(\cos x + i \sin x) + \frac{1}{2}e^y(\cos x - i \sin x)$$

$$= \cos(x) \cosh(y) + i \sin(x) \sinh(y) \tag{1.15}$$

$$\text{wobei } \cosh(y) = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}), \quad \sinh(y) = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$$

$$\text{Genauso: } \sin z = \sin(x) \cosh(y) + i \cos(x) \sinh(y) \tag{1.16}$$

\leadsto \sin, \cos sind in imaginärer Richtung unbeschränkt.

Aus (1.14) folgt ferner (Analysis 1):

$$\cos(z) - \cos(w) = -2 \sin\left(\frac{z+w}{2}\right) \sin\left(\frac{z-w}{2}\right) \quad (1.17)$$

Weiter gilt mit (1.14) und (1.6): $\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(e^{iz} \underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}}}_{=i} + e^{-iz} \underbrace{e^{-i\frac{\pi}{2}}}_{=-i} \right) = -\sin(z)$.

Genauso: $\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z$.

$$\implies \cos(z + 2\pi) = \cos(z), \quad \sin(z + 2\pi) = \sin(z).$$

Nullstellen: $\sin(z) = 0 \xLeftrightarrow{(1.14)} e^{iz} = e^{-iz} \xLeftrightarrow{(1.7)} e^{-y}(\cos x + i \sin x) = e^y(\cos x - i \sin x)$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \text{Imaginärteil: } \sin x = 0 \text{ (da } e^y \neq -e^{-y}) \\ \text{Realteil: } \cos x = 0 \text{ oder } e^y = e^{-y} \text{ (} \iff y = 0 \text{)} \end{array} \right\} \iff z = k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}.$$

Damit: $\cos(z) = 0 \iff z = k\pi + \frac{\pi}{2}$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

Zusammengefasst: \sin, \cos haben auf \mathbb{C} nur die reellen Nullstellen und Perioden. (1.18)

Wenn der reelle \sin bzw. \cos auf $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ injektiv ist, dann ist der komplexe \sin bzw. \cos auf $S_r(a, b)$ injektiv. (1.19)

Beweis. (für \cos): Nach Voraussetzung muss \cos auf (a, b) strikt monoton sein.

$\implies (a, b) \subseteq (k\pi, (k+1)\pi)$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

Seien also $z, w \in S_r(a, b)$ (wobei $z \neq w$) $\implies z + w, z - w \neq 2j\pi$ ($\forall j \in \mathbb{Z}$)

$$\xRightarrow{(1.11)} \cos z - \cos w \neq 0. \quad \square$$

$\implies \cos$ ist auf $S_r(0, \pi)$ injektiv, \sin ist auf $S_r(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ injektiv.

Bild von \cos auf $S_r(0, \pi)$: S_r : Horizontale Gerade: $z = x + ib$ mit $x \in \mathbb{R}$ und festem $b \in \mathbb{R}$. Mit (1.15):

$$\cos(t) = \cosh(b) \cos(x) + i \sinh(b) \sin(x)$$

\implies Bild der Geraden ist eine Ellipse $E(b)$ mit Scheiteln $(\pm \cosh(b), 0)$ und $(0, \pm \sinh(b))$.

Für $x \in (0, \pi)$ erhalten wir für $b > 0$ den oberen Bogen von $E(b)$, den unteren Bogen für $b < 0$. Da $x \neq 0, \pi$ sind diese Bogen ohne die Endpunkte:

$$(\pm \underbrace{\cosh(b)}_{\geq 1}, 0) \implies \cos(S_r) \subseteq D := \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, \infty)).$$

Klar: $\cos((0, \pi)) = (-1, 1)$. Sei $w \in D \setminus (-1, 1)$, also $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, da hier $w = u + iv$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Suche $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit

$$w \in E(b) \iff f(b) := \frac{u^2}{\cosh^2(b)} + \frac{v^2}{\sinh^2(b)} \stackrel{!}{=} 1.$$

So ein b existiert, da f stetig ist (ZWS): $f(b) \rightarrow 0$ für $b \rightarrow \pm\infty$, $f(b) \rightarrow \pm\infty$ für $b \rightarrow 0$, da $v \neq 0$.

$\implies \cos: S_r \rightarrow D$ bijektiv \implies haben Hauptzweig des Arcuscosinus:

$$\arccos: D \rightarrow S_r, \quad \arccos = (\cos|_{S_r})^{-1}.$$

Da $\cos'(z) = -\sin(z) \neq 0 \ \forall z \in S_r$ sind

$$\cos: S_r \rightarrow D, \quad \arccos: D \rightarrow S_r$$

biholomorph. Mit Verschiebung: $\sin: S_r(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow D$ ist biholomorph mit Inversem \arcsin .