

# Funktionentheorie I

Die Mitarbeiter von <http://mitschriebwiki.nomeata.de/>

10. Januar 2017



# Inhaltsverzeichnis

<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>2</b>
<b>I. Vorwort</b>	<b>5</b>
I.1. Über dieses Skriptum . . . . .	5
I.2. Wer . . . . .	5
I.3. Wo . . . . .	5
<b>1. Komplexe Zahlen</b>	<b>7</b>
<b>2. Topologische Begriffe</b>	<b>11</b>
<b>3. Stetigkeit, Zusammenhang, Gebiete</b>	<b>15</b>
<b>4. Komplexe Differenzierbarkeit, Holomorphie</b>	<b>19</b>
<b>5. Potenzreihen</b>	<b>23</b>
<b>6. Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen</b>	<b>27</b>
<b>7. Der komplexe Logarithmus</b>	<b>31</b>
<b>8. Komplexe Wegintegrale</b>	<b>35</b>
<b>9. Cauchyscher Integralsatz und Cauchysche Integralformeln</b>	<b>41</b>
<b>10. Folgerungen aus den Integralformeln</b>	<b>49</b>
<b>11. Weitere Eigenschaften holomorpher Funktionen</b>	<b>53</b>
<b>12. Das Schwarzsche Lemma</b>	<b>61</b>
<b>13. Isolierte Singularitäten</b>	<b>63</b>
<b>14. Laurententwicklung</b>	<b>67</b>
<b>15. meromorphe Funktionen, Möbiustransformationen</b>	<b>71</b>
<b>16. Die Umlaufzahl</b>	<b>77</b>
<b>17. Der Residuensatz und Folgerungen</b>	<b>81</b>
<b>18. Der Satz von Montel</b>	<b>87</b>
<b>19. Der Riemannsche Abbildungssatz</b>	<b>89</b>
<b>20. Homotopie und einfacher Zusammenhang</b>	<b>93</b>

21. Cauchyscher Integralsatz (Homotopieversionen)	97
22. Cauchyscher Integralsatz (Homologieversionen)	101
A. Satz um Satz (hüpft der Has)	105
Stichwortverzeichnis	108

# I. Vorwort

## I.1. Über dieses Skriptum

Dies ist ein erweiterter Mitschrieb der Vorlesung „Funktionentheorie I“ von Herrn Schmoeger im Sommersemester 2006 an der Universität Karlsruhe (TH). Die Mitschriften der Vorlesung werden mit ausdrücklicher Genehmigung von Herrn Schmoeger hier veröffentlicht, Herr Schmoeger ist für den Inhalt nicht verantwortlich.

## I.2. Wer

Beteiligt am Mitschrieb sind Ferdinand Szekeresch, Christian Schulz und andere.

## I.3. Wo

Alle Kapitel inklusive  $\text{\LaTeX}$ -Quellen können unter <http://mitschriebwiki.nomeata.de> abgerufen werden. Dort ist ein *Wiki* eingerichtet und von Joachim Breitner um die  $\text{\LaTeX}$ -Funktionen erweitert. Das heißt, jeder kann Fehler nachbessern und sich an der Entwicklung beteiligen. Auf Wunsch ist auch ein Zugang über *Subversion* möglich.



# 1. Komplexe Zahlen

$\mathbb{R}^2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$  Für  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$  definieren wir :  
 $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d); (a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$   
Wir setzen abkürzend:  $i := (0, 1)$  (**imaginäre Einheit**). Dann:  $i^2 = (-1, 0)$

## Satz 1.1

$\mathbb{R}^2$  ist mit obiger Addition und Multiplikation ein Körper. Dieser wird mit  $\mathbb{C}$  bezeichnet und heißt **Körper der komplexen Zahlen**.

- (1)  $(0, 0)$  ist das neutrale Element bzgl. der Addition.  $(1, 0)$  ist das neutrale Element bzgl. der Multiplikation.
- (2) Für  $(a, b) \in \mathbb{C}$  ist  $(-a, -b)$  das inverse Element bzgl. der Addition Für  $(a, b) \in \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$  ist  $(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$  das inverse Element bzgl. der Multiplikation

## Beweis

Nachrechnen! ■

Definiere  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $\varphi(a) := (a, 0)$  ( $a \in \mathbb{R}$ ). Dann gilt:  
 $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b), \varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b), \varphi(0) = (0, 0), \varphi(1) = (1, 0)$ .  $\varphi$  ist also ein injektiver Körperhomomorphismus. Also:  $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ .

Wir schreiben  $a$  statt  $(a, 0)$  für  $a \in \mathbb{R}$ . Insbesondere:  $i^2 = -1$ .

## Satz 1.2

Jedes  $z \in \mathbb{C}$  hat eine eindeutige Darstellung  $z = a + ib$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$   
 $\operatorname{Re} z := a$  (**Realteil von  $z$** ),  $\operatorname{Im} z := b$  (**Imaginärteil von  $z$** )

## Beweis

Sei  $z = (a, b) \in \mathbb{C}$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ );  $z = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0) = a + ib$

Eindeutigkeit: klar ■

## Definition

Sei  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ )

- (1)  $\bar{z} := a - ib$  heißt die zu  $z$  **konjugiert komplexe Zahl**

## 1. Komplexe Zahlen

(2)  $|z| := (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} (= \|(a, b)\| = \text{eukl. Norm von } (a, b) \in \mathbb{R}^2)$  heißt **Betrag von  $z$** ;  $|z| \geq 0$

### Geometrische Veranschaulichung von $\mathbb{C}$ : Komplexe Ebene

$|z|$  = Abstand von  $z$  und 0

#### Satz 1.3

Seien  $z, w \in \mathbb{C}$

$$(1) \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}); \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}); z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}; \bar{\bar{z}} = z; z = w \iff \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w, \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w; |z| = 0 \iff z = 0$$

$$(2) \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}; \overline{z \bar{w}} = \bar{z} \cdot w; \overline{\frac{1}{w}} = \frac{1}{\bar{w}}, \text{ falls } w \neq 0$$

$$(3) |\operatorname{Re} z| \leq |z|; |\operatorname{Im} z| \leq |z|$$

$$(4) |\bar{z}| = |z|; |z|^2 = z \cdot \bar{z} = \bar{z} \cdot z; \text{ für } z \neq 0: \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$(5) |zw| = |z| \cdot |w|; \left|\frac{1}{w}\right| = \frac{1}{|w|} \text{ falls } w \neq 0$$

$$(6) |z + w| \leq |z| + |w| \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

$$(7) ||z| - |w|| \leq |z - w|$$

#### Beweis

(1) - (5): nachrechnen!

(7) folgt aus (6) wörtlich wie in  $\mathbb{R}$

$$(6) |z + w|^2 \stackrel{(3)}{=} (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \stackrel{(2)}{=} (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w}$$

$$\stackrel{(1),(3)}{=} |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|\operatorname{Re}(z\bar{w})| + |w|^2$$

$$\stackrel{(3)}{\leq} |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2 \quad \blacksquare$$

#### Polarkoordinaten

Sei  $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ).  $r := |z|$

Bekannt:  $\exists \varphi \in \mathbb{R} : x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$

Dann:  $z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

Die Zahl  $\varphi$  heißt **ein** Argument von  $z$  und wird mit  $\arg z$  bezeichnet. Mit  $\varphi$  ist auch  $\varphi + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) ein Argument von  $z$ .

**Aber:** es gibt genau ein  $\varphi \in (-\pi, \pi]$  mit  $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Dieses  $\varphi$  heißt der **Hauptwert des Arguments** und wird mit  $\operatorname{Arg} z$  bezeichnet.

Seien  $z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} (\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R})$ .

Aus Additionstheoremen von Sinus und Cosinus folgt:

$$(*) \quad z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Aus (\*) folgt induktiv:



**Satz 1.4 (Formel von de Moivre)**

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}$$

**Wurzeln:**

Beachte:  $z^0 := 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

**Definition**

Sei  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Jedes  $z \in \mathbb{C}$  mit  $z^n = a$  heißt eine  **$n$ -te Wurzel aus  $a$** .

**Satz 1.5**

Sei  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und  $a = |a|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (\varphi \in \mathbb{R})$

Für  $k = 0, 1, \dots, n-1$  setze  $z_k = \sqrt[n]{|a|} \left( \cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \right)$

Dann:

$$(1) \quad z_j \neq z_k \text{ für } j \neq k$$

$$(2) \quad \text{für } z \in \mathbb{C} : z^n = a \iff z \in \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$$

**Spezialfall:  $a = 1$** 

$$z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, \dots, n-1) \text{ } n\text{-te Einheitswurzeln}$$

**Beispiel**

$$a = 1, n = 4, z_k = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \quad (k = 0, \dots, 3)$$

$$z_0 = 1, z_1 = i, z_2 = -1, z_3 = -i$$

**Beweis (von 1.5)**

(1) Übung

$$(2) \quad " \Leftarrow " : z_k^n \stackrel{1.4}{=} |a| (\cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi)) = |a| (\cos \varphi + i \sin \varphi) = a$$

$$" \Rightarrow " : \text{Sei } z^n = a \implies |z| = \sqrt[n]{|a|}, z \neq 0;$$

$$\text{Sei } z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$a = |a|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = z^n \stackrel{1.4}{=} \underbrace{|z|^n}_{=|a|} (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha))$$

$$\implies \cos \varphi = \cos(n\alpha), \sin \varphi = \sin(n\alpha)$$

$$\implies \exists j \in \mathbb{Z} : n\alpha = \varphi + 2\pi j \implies \alpha = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi j}{n}$$

$$\exists l \in \mathbb{Z}, k \in \{0, \dots, n-1\} : j = ln + k$$

$$\implies \frac{j}{n} = l + \frac{k}{n} = \alpha = \frac{\varphi}{n} + 2\pi\left(l + \frac{k}{n}\right) = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} + 2\pi l$$

$$\implies \cos \alpha = \cos \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \sin \alpha = \sin \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}$$

$$\implies z = z_k$$



## 2. Topologische Begriffe

### Definition

$(a_n)$  sei eine Folge in  $\mathbb{C}$ .

- (1)  $(a_n)$  heißt **beschränkt**  $\iff \exists c \geq 0 : |a_n| \leq c \ \forall n \in \mathbb{N}$
- (2)  $(a_n)$  heißt eine **Cauchy-Folge** (CF) :  $\iff \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \epsilon \ \forall n, m \geq n_0$
- (3)  $(a_n)$  heißt **konvergent** :  $\iff \exists a \in \mathbb{C} : |a_n - a| \rightarrow 0$  (  $\iff \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \epsilon \ \forall n \geq n_0$  )  
In diesem Fall ist  $a$  eindeutig bestimmt (Übung) und heißt der **Grenzwert** (GW) oder **Limes** von  $(a_n)$ . Man schreibt :  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  oder  $a_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$
- (4)  $(a_n)$  heißt **divergent** :  $\iff (a_n)$  konvergiert nicht.

### Beispiel

$$a_n = \frac{1}{n} + i\left(1 + \frac{1}{n}\right); |a_n - i| = \left|\frac{1}{n} - i\frac{1}{n}\right| = \frac{|1-i|}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \Rightarrow a_n \rightarrow i$$

Wie in  $\mathbb{R}$  bzw. mit 1.3, zeigt man:

### Satz 2.1

$(a_n), (b_n)$  seien Folgen in  $\mathbb{C}$ ;  $a, b \in \mathbb{C}$

- (1)  $(a_n)$  konvergent  $\Rightarrow a_n$  ist beschränkt.
- (2)  $(a_n)$  konvergent :  $\iff (\operatorname{Re} a_n), (\operatorname{Im} a_n)$  sind konvergent. In diesem Fall gilt  $\lim a_n = \lim \operatorname{Re} a_n + i \lim \operatorname{Im} a_n$
- (3) Es gelte  $(a_n) \rightarrow a, (b_n) \rightarrow b$ . Dann:  
 $a_n + b_n \rightarrow a + b, a_n b_n \rightarrow ab, \bar{a}_n \rightarrow \bar{a}, |a_n| \rightarrow |a|$   
Ist  $a \neq 0 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : a_n \neq 0 \ \forall n \geq m$  und  $\frac{1}{a_n} \rightarrow \frac{1}{a}$   
Ist  $a_{n_k}$  eine Teilfolge (TF) von  $(a_n) \Rightarrow a_{n_k} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$
- (4) Ist  $(a_n)$  beschränkt  $\Rightarrow (a_n)$  enthält eine konvergente TF (**Bolzano-Weierstraß**)
- (5)  $(a_n)$  ist eine CF  $\iff (a_n)$  ist konvergent (**Cauchy-kriterium**)

### Definition

$(a_n)$  sei eine Folge in  $\mathbb{C}$  und  $s_n := \sum_{i=1}^n a_i \ n \in \mathbb{N}$ .  $(s_n)$  heißt eine **unendliche Reihe** und wird mit  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  bezeichnet.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  heißt konvergent/divergent  $\iff (s_n)$  konvergent/divergent. Ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergent, so schreibt man  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$

### Beispiel (Geometrische Reihe)

$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + \dots$  ( $z \in \mathbb{C}$ ). Wie in  $\mathbb{R}$  zeigt man:

## 2. Topologische Begriffe

- (1)  $1 + z + \dots + z^n = \begin{cases} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} & , \text{ falls } z \neq 1 \\ n+1 & , \text{ falls } z = 1 \end{cases}$
- (2)  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  konvergent  $\iff |z| < 1$ . In diesem Fall  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

### Definition

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  heißt **absolut konvergent** :  $\iff \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  konvergent.

Wörtlich wie in  $\mathbb{R}$  beweist, bzw. formuliert man:

### Satz 2.2

$(a_n)$  sei eine Folge in  $\mathbb{C}$

- (1) Ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergent  $\Rightarrow a_n \rightarrow 0$
- (2) Ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolut konvergent  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergent und  $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$
- (3) Es gelten Cauchy Kriterium, Majorantenkriterium, Minorantenkriterium, Wurzelkriterium, Quotientenkriterium und der Satz über das Cauchyprodukt.

### Definition

Sei  $A \subseteq \mathbb{C}$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$  und  $\epsilon > 0$

- (1)  $U_\epsilon(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \epsilon\}$   **$\epsilon$ -Umgebung von  $z_0$  oder offene Kreisscheibe** von  $z_0$  mit Radius  $\epsilon$   
 $\overline{U_\epsilon(z_0)} := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \epsilon\}$  (**abgeschlossene Kreisscheibe** von  $z_0$  mit Radius  $\epsilon$ )  
 $\dot{U}_\epsilon(z_0) := U_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$  (**punktierte Kreisscheibe**)
- (2)  $z_0 \in A$  heißt **innerer Punkt von A** :  $\iff \exists \epsilon > 0 : U_\epsilon(z_0) \subseteq A$   
 $A^\circ := \{z \in A | z \text{ innerer Punkt von } A\}$  heißt das **Innere von A**. Klar ist:  $A^\circ \subseteq A$   
 $A$  heißt **offen** :  $\iff A = A^\circ$
- (3)  $A$  heißt **abgeschlossen** :  $\iff \mathbb{C} \setminus A$  ist offen.
- (4)  $A$  heißt **beschränkt** :  $\iff \exists c \geq 0 : |a| \leq c \forall a \in A$
- (5)  $A$  heißt **kompakt** :  $\iff A$  ist beschränkt und abgeschlossen.
- (6)  $z_0$  heißt ein **Häufungspunkt** von  $A$  :  $\iff \forall \epsilon > 0 : \dot{U}_\epsilon(z_0) \cap A \neq \emptyset$ .  
 $\bar{A} := \{z \in \mathbb{C} | z \text{ ist HP von } A\} \cup A$  heißt die **Abschließung** von  $A$
- (7)  $z_0$  heißt ein **Randpunkt** von  $A$   
:  $\iff \forall \epsilon > 0 : U_\epsilon(z_0) \cap A \neq \emptyset$  und  $U_\epsilon(z_0) \cap (\mathbb{C} \setminus A) \neq \emptyset$   
 $\partial A := \{z \in \mathbb{C} | z \text{ ist Randpunkt von } A\}$  wird als **Rand von A** bezeichnet

Wie in  $\mathbb{R}$  zeigt man:

**Satz 2.3**

- (1)  $A$  heißt abgeschlossen  $\iff A = \bar{A} \iff$  der Grenzwert jeder konvergenten Folge aus  $A$  gehört zu  $A$ .
- (2)  $z_0$  ist HP von  $A \iff \exists$  Folge  $(z_n)$  in  $A \setminus \{z_0\} : z_n \rightarrow z_0$
- (3)  $A$  ist kompakt :  $\iff$  jede Folge in  $A$  enthält eine konvergente Teilfolge deren Limes zu  $A$  gehört  
 $\iff$  jede offene Überdeckung von  $A$  enthält eine endliche Überdeckung von  $A$ .



### 3. Stetigkeit, Zusammenhang, Gebiete

In diesem Paragraphen seien  $D, E \subseteq \mathbb{C}$ ,  $D \neq \emptyset \neq E$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion. Die Funktionen  $\operatorname{Re} f$ ,  $\operatorname{Im} f$ ,  $|f| : D \rightarrow \mathbb{R}$  sind definiert durch:

$$(\operatorname{Re} f)(z) := \operatorname{Re} f(z), (\operatorname{Im} f)(z) := \operatorname{Im} f(z), |f|(z) := |f(z)|.$$

#### Definition

Sei  $z_0$  ein HP von  $D$  und  $a \in \mathbb{C}$ .

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a : \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(z) - a| < \varepsilon \forall z \in \dot{U}_\delta(z_0) \cap D$$

In diesem Fall schreibt man  $f(z) \rightarrow a$  ( $z \rightarrow z_0$ )

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  existiert :  $\iff \exists a \in \mathbb{C} : \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a$ . Es gelten die üblichen Rechenregeln.

#### Definition

(1) Sei  $z_0 \in D$ .  $f$  heißt **stetig** in  $z_0$  :  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \forall z \in \dot{U}_\delta(z_0) \cap D$

(2)  $f$  heißt stetig auf  $D$  :  $\iff f$  ist in jedem  $z \in D$  stetig. In diesem Fall schreiben wir  $f \in C(D)$ .

#### Beispiel

(1)  $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$  ( $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ ). Klar:  $p \in C(\mathbb{C})$  (Linearkombination stetiger Funktionen).

$$(2) f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re} z}{z} & , \text{ falls } z \neq 0 \\ 0 & , \text{ falls } z = 0. \end{cases}$$

Klar:  $f \in C(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ . Für  $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ist  $f(z) = 1 \not\rightarrow f(0) = 0$  ( $z \rightarrow 0$ ).  $f$  ist in  $z_0 = 0$  nicht stetig.

$$(3) f(z) = \begin{cases} \frac{(\operatorname{Re} z)^2}{z} & , \text{ falls } z \neq 0 \\ 0 & , \text{ falls } z = 0. \end{cases}$$

Für  $z \neq 0$  :  $|f(z)| = \frac{|\operatorname{Re} z|^2}{|z|} \leq \frac{|z|^2}{|z|} \leq |z| \Rightarrow f$  ist in  $z_0 = 0$  stetig. Insgesamt:  $f \in C(\mathbb{C})$ .

#### Beispiel

$D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ; für  $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \in D$  mit  $\varphi \in (-\pi, \pi]$  sei  $f(z) := \varphi = \operatorname{Arg} z$ . Behauptung: Ist  $z_0 \in \mathbb{R}$  und  $z_0 < 0 \Rightarrow f$  ist in  $z_0$  nicht stetig. Denn:

Sei  $z_n := |z_0|(\cos(\pi - \frac{1}{n}) + i \sin(\pi - \frac{1}{n}))$ ,  $w_n := |z_0|(\cos(-\pi + \frac{1}{n}) + i \sin(-\pi + \frac{1}{n})) \Rightarrow z_n \rightarrow -|z_0| = z_0$ ,  $w_n \rightarrow -|z_0| = z_0$  und  $f(z_n) = \operatorname{Arg} z_n = \pi - \frac{1}{n} \rightarrow \pi$ ,  $f(w_n) = \operatorname{Arg} w_n = -\pi + \frac{1}{n} \rightarrow -\pi$

Wie im  $\mathbb{R}^n$  beweist man die folgenden Sätze 3.1, 3.2 und 3.3

#### Satz 3.1

Sei  $z_0 \in D$ .

(1)  $f$  ist stetig in  $z_0 \iff \operatorname{Re} f$  und  $\operatorname{Im} f$  sind stetig in  $z_0 \iff$  für jede Folge  $(z_n)$  in  $D$  mit  $z_n \rightarrow z_0 : f(z_n) \rightarrow f(z_0)$ .

- (2) Ist  $z_0$  ein HP von  $D$ , so gilt:  $f$  ist in  $z_0$  stetig  $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$
- (3) Sei  $g : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine weitere Funktion und  $f$  und  $g$  seien stetig in  $z_0$ . Dann sind  $f + g, fg, |f|$  stetig in  $z_0$ ; ist  $f(z) \neq 0 \forall z \in D \Rightarrow \frac{1}{f}$  ist stetig in  $z_0$ .

**Satz 3.2**

Sei  $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{C}, g : E \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion und  $f(D) \subseteq E$ . Ist  $f$  stetig in  $z_0$  und  $g$  stetig in  $f(z_0)$ , so ist  $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig in  $z_0$ .

**Satz 3.3**

$D$  sei **kompakt** und  $f \in C(D)$

- (1)  $f(D)$  ist kompakt
- (2)  $\exists \max |f|(D), \exists \min |f|(D)$

**Definition**

Sei  $[a, b] \subseteq \mathbb{R} (a < b)$ . Eine stetige Funktion  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  heißt ein **Weg** (in  $\mathbb{C}$ ).  $\gamma(a)$  heißt **Anfangspunkt** von  $\gamma$ ,  $\gamma(b)$  heißt **Endpunkt** von  $\gamma$ .  $\gamma([a, b])$  heißt der **Träger** von  $\gamma$ . 3.3  $\Rightarrow \gamma([a, b])$  ist kompakt. ("Rektifizierbarkeit" und "Länge" von  $\gamma$ : siehe Analysis II)

**Beispiele:**

- (1) Seien  $z_0, z_1 \in \mathbb{C}; \gamma(t) := z_0 + t(z_1 - z_0), t \in [0, 1]. S[z_0, z_1] := \gamma([0, 1])$  heißt die **Verbindungsstrecke** von  $z_0$  und  $z_1$ .
- (2) Sei  $z_0 \in \mathbb{C}, r > 0; \gamma(t) := z_0 + r(\cos t + i \sin t), t \in [0, 2\pi]. \gamma(0) = z_0 + r = \gamma(2\pi), \gamma([0, 2\pi]) = \partial U_r(z_0)$

Für den Rest des §en sei  $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{C}$

**Definition**

$M$  heißt **konvex** : $\Leftrightarrow$  aus  $z_0, z_1 \in M$  folgt stets:  $S[z_0, z_1] \subseteq M$ .

**Definition**

- (1) Eine Funktion  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{C}$  heißt auf  $M$  **lokalkonstant** : $\Leftrightarrow \forall a \in M \exists \delta = \delta(a) > 0 : \varphi$  ist auf  $U_\delta(a) \cap M$  konstant. Beachte: i.d.Fall:  $\varphi \in C(M)$ .
- (2)  $M$  heißt **zusammenhängend** (zsh) : $\Leftrightarrow$  jede auf  $M$  lokalkonstante Funktion ist auf  $M$  konstant.
- (3)  $M$  heißt **wegzusammenhängend** (wegzsh) : $\Leftrightarrow$  zu je zwei Punkten  $z, w \in M$  existiert ein Weg  $\gamma[a, b] \rightarrow \mathbb{C} : \gamma([a, b]) \subseteq M, \gamma(a) = z$  und  $\gamma(b) = w$ .



(4)  $M$  heißt ein **Gebiet** : $\Leftrightarrow M$  ist offen und wegzsh.

**Bemerkung:**

(1) Mengen die offen und konvex sind, sind Gebiete.

(2) wegzsh  $\Rightarrow$  zsh (" $\Leftarrow$ " ist i.a. falsch)

**Satz 3.4**

$M$  sei offen, dann sind äquivalent:

(1)  $M$  ist ein Gebiet

(2)  $M$  ist wegzsh

(3)  $M$  ist zsh

(4) Aus  $M = A \cup B, A \cap B = \emptyset, A, B$  offen folgt stets:  $A = \emptyset$  oder  $B = \emptyset$ .

**Beweis**

(1)  $\Leftrightarrow$  (2): klar, (2)  $\Leftrightarrow$  (3): ohne Beweis.

(3)  $\Rightarrow$  (4): Sei  $M = A \cup B, A \cap B = \emptyset, A, B$  offen. Annahme:  $A \neq \emptyset$  und  $B \neq \emptyset$ . Definiere

$$\varphi : M \rightarrow \mathbb{C} \text{ durch } \varphi(z) := \begin{cases} 1, & z \in A \\ 0, & z \in B \end{cases}.$$

Sei  $z_0 \in M$ . 1. Fall (2. Fall) :  $z_0 \in A(B)$ ,  $A(B)$  offen  $\Rightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq A(B) \Rightarrow \varphi$  ist auf  $U_\delta(z_0)$  konstant.  $\varphi$  ist also auf  $M$  lokalkonstant. Vor  $\Rightarrow \varphi$  ist auf  $M$  konstant  $\Rightarrow 1 = 0$ , Wid!

(4)  $\Rightarrow$  (3): Sei  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{C}$  lokalkonstant. Annahme:  $\varphi$  ist nicht konstant auf  $M$ .  $\exists z_0, w_0 \in M : \varphi(z_0) \neq \varphi(w_0)$ .  $A := \{z \in M : \varphi(z) = \varphi(z_0)\}; z_0 \in A$ , also  $A \neq \emptyset$ .  $B := M \setminus A, w_0 \in B$ , also  $B \neq \emptyset$ . Klar:  $M = A \cup B, A \cap B = \emptyset$ .

Sei  $z_1 \in A$ .  $\varphi$  ist lokalkonstant  $\Rightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(z_1) \subseteq M$  und  $\varphi$  ist auf  $U_\delta(z_1)$  konstant. Sei  $z \in U_\delta(z_1)$ .  $\varphi(z) = \varphi(z_1) \stackrel{z_1 \in A}{=} \varphi(z_0) \Rightarrow z \in A$ . Also:  $U_\delta(z_1) \subseteq A$ .  $A$  ist also offen. Ähnlich:  $B$  ist offen. Fazit:  $M = A \cup B, A \cap B = \emptyset, A, B$  offen,  $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ . Wid zur Vor. ■

**Folgerung 3.5**

Sei  $A \subseteq \mathbb{C}$ ,  $A$  sei offen und abgeschlossen. Dann:  $A = \emptyset$  oder  $A = \mathbb{C}$ .

**Beweis**

$B := \mathbb{C} \setminus A$ ; dann  $A, B$  offen,  $A \cap B = \emptyset$  und  $\mathbb{C} = A \cup B$ .  $\mathbb{C}$  ist ein Gebiet  $\stackrel{3.4}{\Rightarrow} A = \emptyset$  oder  $B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$  oder  $A = \mathbb{C}$ . ■

**Satz 3.6**

Sei  $M$  zsh und  $g \in C(M)$ . Dann ist  $g(M)$  zsh.

**Beweis**

Sei  $\varphi : g(M) \rightarrow \mathbb{C}$  auf  $g(M)$  lokalkonstant. Zu zeigen:  $\varphi$  ist auf  $g(M)$  konstant.  $\psi := \varphi \circ g : M \rightarrow \mathbb{C}$ . Sei  $z_0 \in M \Rightarrow g(z_0) \in g(M) \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$  und  $c \in \mathbb{C} : (*) \varphi(w) = c \forall w \in U_\varepsilon(g(z_0)) \cap g(M). g$

### 3. Stetigkeit, Zusammenhang, Gebiete

stetig in  $z_0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : |g(z) - g(z_0)| < \varepsilon \forall z \in U_\delta(z_0) \cap M$ . Sei  $z \in U_\delta(z_0) \cap M$ . Dann:  
 $g(z) \in U_\varepsilon(g(z_0)) \cap g(M) \xrightarrow{(*)} \varphi(g(z)) = c \Rightarrow \psi(z) = c$ . Also ist  $\psi$  auf  $M$  lokalkonstant.  $M$  zsh  
 $\Rightarrow \psi(z) = c \forall z \in M$ . Sei  $w \in g(M) \Rightarrow \exists z \in M : w = g(z) \Rightarrow \varphi(w) = \varphi(g(z)) = \psi(z) = c$ .  $\varphi$  ist  
 also auf  $g(M)$  konstant. ■

#### Beispiele:

(1)  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  ist zsh.

(2) Ist  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ein Weg, so ist  $\gamma([a, b])$  zsh.

#### Beweis

(2) folgt aus (1) und 3.6

(1) Sei  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  lokalkonstant. Also:  $\forall t \in [a, b] \exists \delta(t) > 0 : \varphi$  ist auf  $U_{\delta(t)}(t) \cap [a, b]$   
 konstant.  $[a, b] \subseteq \cup_{t \in [a, b]} U_{\delta(t)}(t) \xrightarrow{2.3} \exists t_1, \dots, t_n \in [a, b] : [a, b] \subseteq \cup_{j=1}^n U_{\delta(t_j)}(t_j)$ .  $\exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C} :$   
 $\varphi(t) = c_j \forall t \in U_{\delta(t_j)}(t_j) \cap [a, b] \Rightarrow \varphi([a, b]) = \{c_1, \dots, c_n\}$ . O.B.d.A:  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ . Annahme:  
 $c_1 \neq c_2$  etwa  $c_1 < c_2$ .  $\varphi \in C[a, b]$ . ZWS  $\Rightarrow [c_1, c_2] \subseteq \varphi([a, b])$  Wid! Also:  $c_1 = c_2$ . Analog:  
 $c_2 = c_3 = \dots = c_n$ .  $\varphi$  ist also konstant. ■

## 4. Komplexe Differenzierbarkeit, Holomorphie

In diesem §en sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ ,  $D$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion.

### Definition

- (1)  $f$  heißt in  $z_0 \in D$  **komplex differenzierbar** (komplex differenzierbar) :  $\iff$  es ex.  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h})$ . I.d. Fall heißt obiger Grenzwert die Ableitung von  $f$  in  $z_0$  und wird mit  $f'(z_0)$  bezeichnet.
- (2)  $f$  heißt auf  $D$  **holomorph** (analytisch) :  $\iff f$  ist zu jedem  $z \in D$  differenzierbar.
- (3)  $H(D) := \{g : D \rightarrow \mathbb{C} : g \text{ ist auf } D \text{ holomorph}\}$ .

### Beispiele:

- (1)  $D = \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}, f(z) := z^n$ .  
Wie in  $\mathbb{R}$  zeigt man:  $f \in H(\mathbb{C})$  und  $f'(z) = nz^{n-1} \forall z \in \mathbb{C}$ .
- (2)  $D = \mathbb{C}, f(z) = \bar{z}$ . Sei  $z_0 \in \mathbb{C}$  und  $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .  
 $Q(h) := \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{\bar{z_0 + h} - \bar{z_0}}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$ ; z.B. ist  $Q(h) = 1$ , falls  $h \in \mathbb{R}$  und  $Q(h) = -1$ , falls  $h \in i\mathbb{R} := \{it : t \in \mathbb{R}\}$ . Also ex.  $\lim_{h \rightarrow 0} Q(h)$  **nicht**.  $f$  ist also in **keinem**  $z \in \mathbb{C}$  komplex differenzierbar.

Sei  $u := \operatorname{Re} f$  und  $v := \operatorname{Im} f$ . Fasst man  $D$  als Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  auf, und schreibt man  $z = (x, y)$  statt  $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ), so ist  $f = (u, v) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine vektorwertige Funktion.  
 $f(z) = u(z) + iv(z) = (u(z), v(z)) = (u(x, y), v(x, y)) = f(x, y)$ .

**Erinnerung (Ana II):**  $f$  heißt im  $(x_0, y_0) \in D$  reell differenzierbar :  $\iff$  es ex. reelle  $2 \times 2$ -Matrix  $A$ :

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - A \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}{\|(h, k)\|} = 0$$

### Beispiel

$D = \mathbb{C}, f(z) = \bar{z}$ , reelle Auffassung:  $f(x, y) = (x, -y)$ .  $f$  ist in **jedem**  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  reell differenzierbar, aber in **keinem**  $z \in \mathbb{C}$  komplex differenzierbar.

### Satz 4.1

Sei  $u := \operatorname{Re} f, v := \operatorname{Im} f$ ; Sei  $z_0 = (x_0, y_0) = x_0 + iy_0 \in D$  ( $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ ).

$f$  ist in  $z_0$  komplex differenzierbar. :  $\iff f$  ist in  $(x_0, y_0)$  reell differenzierbar und es gelten die **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen** (CRD):

$$u_x(z_0) = v_y(z_0), u_y(z_0) = -v_x(z_0)$$

Ist  $f$  in  $z_0$  komplex differenzierbar, so ist  $f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0) = v_y(z_0) - iu_y(z_0)$

### Beweis

Sei  $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$  und  $s = h + ik \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ( $\alpha, \beta, h, k \in \mathbb{R}$ )

$f$  ist in  $z_0$  komplex differenzierbar und  $f'(z_0) = a \iff \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(z_0+s) - f(z_0) - as}{|s|} = 0$

$$\begin{aligned} \xLeftrightarrow{\text{Zerlegen}} \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} & \left( \underbrace{\frac{u(x_0+h, y_0+k) - u(x_0, y_0) - (\alpha h + \beta k)}{\|(h, k)\|}}_{=:\varphi_1(h,k)} \right. \\ & \left. + i \underbrace{\frac{v(x_0+h, y_0+k) - v(x_0, y_0) - \beta h - \alpha k}{\|(h, k)\|}}_{=:\varphi_2(h,k)} \right) = 0 \end{aligned}$$

$\iff \varphi_1(h, k) \rightarrow 0, \varphi_2(h, k) \rightarrow 0 ((h, k) \rightarrow (0, 0))$   
 $\iff u$  und  $v$  sind in  $(x_0, y_0)$  reell differenzierbar,  $u'(x_0, y_0) = (\alpha, -\beta)$  und  $v'(x_0, y_0) = (\beta, \alpha)$   
 $\iff f$  ist in  $(x_0, y_0)$  reell differenzierbar und es gelten die CRD. Ist  $f$  in  $z_0$  komplex differenzierbar  $\implies f'(z_0) = a = \alpha + i\beta = u_x(z_0) + iv_x(z_0)$  ■

### Folgerung 4.2

Es sei  $f \in H(D)$

- (1)  $f$  ist auf  $D$  lokal konstant  $\iff f' = 0$  auf  $D$ .
- (2) Ist  $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ , so ist  $f$  auf  $D$  lokal konstant.
- (3) Ist  $f(D) \subseteq i\mathbb{R}$ , so ist  $f$  auf  $D$  lokal konstant.
- (4) Ist  $D$  ein **Gebiet** so gilt:
  - (i)  $f$  ist auf  $D$  konstant  $\iff f' = 0$  auf  $D$ .
  - (ii) ist  $f(D) \subseteq \mathbb{R}$  oder  $\subseteq i\mathbb{R}$ , so ist  $f$  auf  $D$  konstant.

### Beweis

$u := \operatorname{Re} f, v := \operatorname{Im} f$ .

- (1) "  $\implies$  " klar!  
 "  $\Leftarrow$  " 4.1  $\implies u_x = u_y = v_x = v_y = 0$  auf  $D$ . Ana II  $\implies u, v$  sind auf  $D$  lokal konstant.
- (2)  $f(D) \subseteq \mathbb{R} \implies v = 0$  auf  $D \implies v_x = v_y = 0$  auf  $D \xrightarrow{\text{CRD}} u_x = u_y = 0$  auf  $D$ . Weiter wie bei (1).
- (3) Sei  $f(D) \subseteq i\mathbb{R}, g := if \implies g \in H(D), g(D) \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{(2)} g$  ist auf  $D$  lokal konstant.  $\implies f$  ist auf  $D$  lokal konstant.
- (4) folgt aus (1),(2),(3) und 3.4 ■

**Satz 4.3**

Sei  $z_0 \in D$  und  $f$  in  $z_0$  komplex differenzierbar.

(1)  $f$  ist in  $z_0$  stetig.

(2) Sei  $g : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine weitere Funktion und  $g$  sei komplex differenzierbar in  $z_0$

(i) Für  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  ist  $\alpha f + \beta g$  komplex differenzierbar in  $z_0$  und

$$(\alpha f + \beta g)'(z_0) = \alpha f'(z_0) + \beta g'(z_0)$$

(ii)  $fg$  ist in  $z_0$  komplex differenzierbar und

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$

(iii) Ist  $g(z_0) \neq 0$ , so ex. ein  $\delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq D, g(z) \neq 0 \forall z \in U_\delta(z_0)$ ,  
 $\frac{f}{g} : U_\delta(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  ist in  $z_0$  komplex differenzierbar und

$$\frac{f}{g}'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}$$

(3) **Kettenregel:** Sei  $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{C}, E$  offen,  $f(D) \subseteq E$  und  $h : E \rightarrow \mathbb{C}$  komplex differenzierbar in  $f(z_0)$ . Dann ist  $h \circ f : D \rightarrow \mathbb{C}$  komplex differenzierbar in  $z_0$  und

$$(h \circ f)'(z_0) = h'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$$

**Definition**

Sei  $f \in H(D)$  und  $z_0 \in D$ .  $f$  heißt in  $z_0$  **zweimal komplex differenzierbar** :  $\iff f'$  ist in  $z_0$  komplex differenzierbar. I.d. Fall:  $f''(z_0) := (f')'(z_0)$  (2. Ableitung von  $f$  in  $z_0$ ). Entsprechend definiert man höhere Ableitungen von  $f$  in  $z_0$ , bzw. auf  $D$ . Übliche Bezeichnungen:  $f'', f''', f^{(4)}, \dots, f^{(0)} := f$



## 5. Potenzreihen

Im Folgenden sei  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{C}$ ,  $(f_n)$  eine Folge von Funktionen  $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$  und  $s_n := f_1 + f_2 + \dots + f_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

### Definition

- (1)  $(f_n)$  heisst auf A **punktweise konvergent** :  $\iff \forall z \in A$  ist  $(f_n(z))$  konvergent.  
In diesem Fall heisst  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ , definiert durch  $f(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$ , die **Grenzfunktion** von  $(f_n)$ .

- (2)  $(f_n)$  heisst auf A **gleichmaessig (glm) konvergent** :  $\iff \exists f : A \rightarrow \mathbb{C}$  mit:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |f_n(z) - f(z)| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0 \forall z \in A$$

In diesem Fall sagt man :  $(f_n)$  konvergiert auf A gleichmaessig gegen  $f$ .

- (3)  $(f_n)$  heisst auf A **lokal gleichmaessig konvergent** :  $\iff (f_n)$  konvergiert auf jeder kompakten Teilmenge von A gleichmaessig. ( $\iff \forall a \in A \exists \rho > 0 : (f_n)$  konvergiert auf  $U_\rho(a) \cap A$  gleichmaessig)

- (4)  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  konvergiert auf A punktweise :  $\iff (s_n)$  konvergiert auf A punktweise.  
 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  konvergiert auf A gleichmaessig :  $\iff (s_n)$  konvergiert auf A gleichmaessig.  
 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  konvergiert auf A lokal gleichmaessig :  $\iff (s_n)$  konvergiert auf A lokal gleichmaessig.

Klar: gleichmaessig Konvergenz  $\implies$  lokal gleichmaessig Konvergenz  $\implies$  punktweise Konvergenz.

Wie in der Analysis zeigt man:

### Satz 5.1

- (1)  $(f_n)$  konvergiert auf A gleichmaessig gegen  $f$ , alle  $f_n$  seien in  $z_0 \in A$  stetig.  $\implies f$  ist in  $z_0$  stetig.

- (2) **Cauchy Kriterium:**

$$(f_n) \text{ konvergiert auf A gleichmaessig} \iff \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon \quad \forall n, m \geq n_0 \quad \forall z \in A$$

- (3) **Kriterium von Weierstrass:**

Sei  $(a_n)$  eine Folge in  $[0, \infty)$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)$  konvergiert und  $|f_n(z)| \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall z \in A$ .

Dann konvergiert  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  auf A gleichmaessig.

### Definition

Sei  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  eine Folge in  $\mathbb{C}$  und  $z_0 \in \mathbb{C}$ .

Eine Reihe der Form  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  heisst eine **Potenzreihe (PR)**.

Wir setzen  $\rho := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$  ( $\rho = \infty$  falls  $(\sqrt[n]{|a_n|})$  unbeschränkt) und

$$r := \begin{cases} 0 & \text{falls } \rho = \infty \\ \infty & \text{falls } \rho = 0 \\ \frac{1}{\rho} & \text{falls } 0 < \rho < \infty \end{cases}.$$

$r$  heisst der **Konvergenzradius (KR)** der Potenzreihe.

Wie in der Analysis zeigt man:

### Satz 5.2

Die Summe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  habe den Konvergenzradius  $r$

- (1) Ist  $r = 0$ , so konvergiert die Potenzreihe nur in  $z = z_0$
- (2) Ist  $r = \infty$ , so konvergiert die Potenzreihe in jedem  $z \in \mathbb{C}$  absolut.  
Die Potenzreihe konvergiert auf  $\mathbb{C}$  lokal gleichmässig.
- (3) Ist  $0 < r < \infty$  so gilt:
  - (i) die Potenzreihe konvergiert in jedem  $z \in U_r(z_0)$  absolut.
  - (ii) die Potenzreihe divergiert zu jedem  $z \notin \overline{U_r(z_0)}$ .
  - (iii) für  $z \in \partial U_r(z_0)$  ist keine allgemeine Aussage möglich.
  - (iv) die Potenzreihe konvergiert auf  $U_r(z_0)$  lokal gleichmässig.

### Beispiel:

- (1)  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  hat den Konvergenzradius  $r = 1$ . Für  $|z| = 1$  ist  $z^n$  keine Nullfolge  $\implies \sum_{n=0}^{\infty} z^n$  ist divergent zu jedem  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| = 1$ .
- (2)  $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$  hat den Konvergenzradius  $r = 0$ .
- (3)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$  hat den Konvergenzradius  $r = 1$ . Sei  $|z| = 1$ ,  $|\frac{z^n}{n^2}| = \frac{1}{n^2}$ ; Majorantenkriterium  $\implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$  konvergiert.



- (4)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ . Wie in der Analysis: die Potenzreihe hat den Konvergenzradius  $r = \infty$ .

**Satz 5.3**

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  habe den Konvergenzradius  $r$ . Dann hat die Potenzreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z - z_0)^{n-1}$  ebenfalls den Konvergenzradius  $r$ .

**Beweis**

$$\alpha_n = na_n; \sqrt[n]{|\alpha_n|} = \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{|a_n|}; \sqrt[n]{n} \rightarrow 1 \Rightarrow \limsup \sqrt[n]{|\alpha_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \quad \blacksquare$$

**Definition**

Für  $z_0 \in \mathbb{C} : U_{\infty}(z_0) := \mathbb{C}$ .

**Satz 5.4**

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  habe den Konvergenzradius  $r > 0$  ( $r = \infty$  zugelassen). Die Funktion  $f : U_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  sei definiert durch  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ . Dann

(1)  $f \in H(U_r(z_0))$  und  $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z - z_0)^{n-1} \quad \forall z \in U_r(z_0)$

(2)  $f$  ist auf  $U_r(z_0)$  beliebig oft komplex db und

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n (z - z_0)^{n-k} \quad \forall z \in U_r(z_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(3)  $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

**Beweis**

(1) O.B.d.A  $z_0 = 0$ .

Für  $w \in U_r(0) : g(w) := \sum_{n=1}^{\infty} na_n w^{n-1}$ . Sei  $w \in U_r(0)$ . Wähle  $\rho > 0$ , so daß  $|w| < \rho < r$ .

$b_n := n^2 |a_n| \rho^{n-2}$  ( $n \geq 2$ );  $\sqrt[n]{|b_n|} \rightarrow \frac{\rho}{r} < 1 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} b_n$  konvergent;  $c := \sum_{n=2}^{\infty} b_n$ . Sei  $z \in U_{\rho}(0)$

und  $z \neq w$ . Betrachte dann

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) = \frac{1}{z - w} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z^n - w^n) - \sum_{n=1}^{\infty} na_n w^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \underbrace{\left( \frac{z^n - w^n}{z - w} - nw^{n-1} \right)}_{=: \alpha_n}.$$

Nachrechnen:  $\alpha_n = (z - w) \sum_{k=1}^{n-1} kw^{k-1} z^{n-k-1}$ .

Dann gilt:

$$|\alpha_n| = |z - w| \left| \sum_{k=1}^{n-1} kw^{k-1} z^{n-k-1} \right| \leq |z - w| \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{k}_{< \rho} \underbrace{|w|^{k-1}}_{< \rho} \underbrace{|z|^{n-k-1}}_{< \rho}$$

## 5. Potenzreihen

$$\begin{aligned}
&\leq |z - w| \sum_{k=1}^{n-1} k \rho^{n-2} = |z - w| \rho^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} \leq |z - w| \rho^{n-2} n^2 \\
&\Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) \right| = \left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n \alpha_n \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| |\alpha_n| \\
&\leq \left( \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n^2 \rho^{n-2} \right) |z - w| = c |z - w| \\
&\Rightarrow (z \rightarrow w) \quad f \text{ ist in } w \text{ komplex db und } f'(w) = g(w)
\end{aligned}$$

(2) folgt aus (1) induktiv.

(3) folgt aus (2) mit  $z = z_0$ . ■

### Definition

Seien  $r_1, r_2 \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$ . Dann

$$\min\{r_1, r_2\} = \begin{cases} \min\{r_1, r_2\} & , \text{ falls } r_1, r_2 < \infty \\ r_2 & , \text{ falls } r_1 = \infty \\ r_1 & , \text{ falls } r_2 = \infty \end{cases}$$

### Satz 5.5

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$  seien Potenzreihen mit den Konvergenzradien  $r_1$  und  $r_2$ . Dann hat für  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) (z - z_0)^n$  einen Konvergenzradius  $r \geq \min\{r_1, r_2\}$

### Beweis

Klar. ■

### Beispiel

$$a_n = b_n, \alpha = 1, \beta = -1$$

## 6. Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen

Bekannt aus §5:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  konvergiert absolut in jedem  $z \in \mathbb{C}$

$$e^z := \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} (z \in \mathbb{C})$$

klar:  $e^0 = 1, e^1 = e$

### Satz 6.1

- (1)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  konvergiert auf  $\mathbb{C}$  lokal gleichmäßig.
- (2)  $\exp \in H(\mathbb{C})$  und  $\exp'(z) = \exp(z) \forall z \in \mathbb{C}$
- (3) **Additionstheorem:**  $e^{z+w} = e^z e^w \forall z, w \in \mathbb{C}$
- (4)  $e^z \cdot e^{-z} = 1$ , insbesondere  $e^z \neq 0$
- (5) Für  $z = x + iy (x, y \in \mathbb{R})$ :  $e^z = e^x e^{iy}, |e^{iy}| = 1, |e^z| = e^x$

### Beweis

(1) folgt aus 5.2

(2) 5.4  $\implies \exp \in H(\mathbb{C})$  und  $\exp'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \exp(z) (z \in \mathbb{C})$

(3) Sei  $c \in \mathbb{C}$  zunächst fest.

$$f(z) := e^z e^{c-z} (z \in \mathbb{C}),$$

$$f \in H(\mathbb{C}) \text{ und } f'(z) = e^z e^{c-z} + e^z e^{c-z} (-1) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$\mathbb{C}$  ist ein Gebiet  $\xrightarrow{4.2} f$  ist auf  $\mathbb{C}$  konstant.

$$f(0) = e^c. \text{ Also: } e^z e^{c-z} = e^c \quad \forall z \in \mathbb{C} \forall c \in \mathbb{C}$$

Setze  $c := z + w$

(4) folgt aus (3)

(5) Nur zu zeigen:  $|e^{iy}| = 1 (y \in \mathbb{R})$

$$\overline{e^{iy}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\overline{iy})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\overline{iy})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iy)^n}{n!} = e^{-iy}$$

$$\implies |e^{iy}|^2 = e^{iy} \overline{e^{iy}} = e^{iy} e^{-iy} \stackrel{(4)}{=} 1$$

■

**Definition**

Für  $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\cos z &:= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) && \text{Cosinus} \\ \sin z &:= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) && \text{Sinus}\end{aligned}$$

**Satz 6.2**

(1)

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

(2)  $\cos, \sin \in H(\mathbb{C})$

$$\cos' z = -\sin z, \quad \sin' z = \cos z \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

(3)  $e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad \forall z \in \mathbb{C}$ .

Insbesondere:  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}$ . Damit lautet für  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  die Darstellung in Polarkoordinaten:  $z = |z|e^{i \arg z}$ .

(4) Additionstheoreme:

$$\begin{aligned}\cos(z+w) &= \cos z \cos w - \sin z \sin w \\ \sin(z+w) &= \sin z \cos w + \sin w \cos z \quad \forall z, w \in \mathbb{C}\end{aligned}$$

(5)  $\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

**Beweis**

(1) nur für  $\cos$ :

$\forall z \in \mathbb{C}$ :

$$\cos z = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{i^n + (-i)^n}{n!}}_{\begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ 2(-1)^n, & n = 2k \end{cases}} z^n$$

$$\implies \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

(2) Aus der Definition folgt:  $\cos \in H(\mathbb{C})$  und

$$\cos' z = \frac{1}{2}(ie^{iz} - ie^{-iz}) = \frac{i}{2}(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{-1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = -\sin z$$

Analog für den Sinus.

(3) , (4) , (5) folgen aus der Definition. ■

**Folgerung 6.3**

- (1)  $e^{2k\pi i} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ ; insbesondere:  $e^{2\pi i} = 1$
- (2)  $e^{i\pi} + 1 = 0$
- (3) Für  $z \in \mathbb{C} : e^z = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : z = 2k\pi i$
- (4)  $e^{z+2\pi i} = e^z \quad \forall z \in \mathbb{C}$  (Die Exponentialfkt. hat die Periode  $2\pi$ )
- (5) Für  $z \in \mathbb{C} :$   
 $\sin z = 0 \implies \exists k \in \mathbb{Z} : z = k\pi$   
 $\cos z = 0 \implies \exists k \in \mathbb{Z} : z = \frac{2k+1}{2}\pi$

**Beweis**

- (1) 6.2 (3)  $\implies e^{2k\pi i} = \cos(2k\pi) + i \sin(2k\pi) = 1 (k \in \mathbb{Z})$
- (2)  $e^{i\pi} \stackrel{6.2(3)}{=} \cos \pi + i \sin \pi = -1$
- (3) "  $\implies$  " Sei  $z = x + iy \in \mathbb{C} (x, y \in \mathbb{R})$  und  $e^z = 1$   
 $\implies e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) = 1$   
 $\implies e^x \cos y = 1, e^x \sin y = 0 \implies \sin y = 0 \implies \exists k \in \mathbb{Z} : y = k\pi$   
 $1 = |e^z| = e^x \implies x = 0 \implies \cos y = 1 \implies k = 2j (j \in \mathbb{Z}) \implies z = i2j\pi$
- (4)  $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$
- (5) Nur für sin. Sei  $z \in \mathbb{C} :$   
 $\sin z = 0 \iff e^{iz} = e^{-iz} \iff e^{2iz} = 1 \stackrel{(3)}{\iff} \exists k \in \mathbb{Z} : 2iz = 2k\pi i$   
 $\iff \exists k \in \mathbb{Z} : z = k\pi.$  ■

**Definition**

Für  $z \in \mathbb{C} :$

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{2k+1}{2}\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \textbf{Tangens}$$

$$\cot z := \frac{\cos z}{\sin z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \quad \textbf{Cotangens}$$

$\tan$  und  $\cot$  sind auf ihrem Definitionsbereichen holomorph.



## 7. Der komplexe Logarithmus

### Definition

Sei  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  Jedes  $z \in \mathbb{C}$  mit  $e^z = w$  heißt **ein Logarithmus von  $w$** . Man schreibt in diesem Fall (ungenau):  $z = \log w$ .

### Satz 7.1

Sei  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $w = |w|e^{i\text{Arg}w}$  ( $\text{Arg}w \in (-\pi, \pi]$ )

Für  $z \in \mathbb{C}$  gilt:  $e^z = w \iff \exists k \in \mathbb{Z} : z = \log |w| + i\text{Arg}w + 2k\pi i$  ( $\log |w|$  ist der reelle Log)

### Beweis

$$" \Leftarrow " : e^z = \underbrace{e^{\log |w|}}_{|w|} e^{i\text{Arg}w} \underbrace{e^{2k\pi i}}_1 = |w|e^{i\text{Arg}w} = w$$

$$" \Rightarrow " \text{ Sei } z = x + iy (x, y \in \mathbb{R}) \text{ und } e^z = w. \text{ Dann: } |w| = |e^z| = e^x \Rightarrow x = \log |w|$$

$$|w|e^{i\text{Arg}w} = w = e^z = e^x e^{iy} = |w|e^{iy}$$

$$\Rightarrow e^{iy} = e^{i\text{Arg}w} \Rightarrow e^{i(y - \text{Arg}w)} = 1 \xrightarrow{6.3} \exists k \in \mathbb{Z} : iy - i\text{Arg}w = 2k\pi i$$

$$\Rightarrow z = \log |w| + i\text{Arg}w + 2k\pi i$$

■

### Definition

Die Funktion  $\text{Log} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  def. durch  $\text{Log}w := \log |w| + i\text{Arg}w$  heißt der **Hauptzweig des Logarithmus**.

### Beispiele:

(1) Alle Log von  $w = 1$ :  $2k\pi i$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$\text{Log } 1 = 0$$

(2)  $\text{Log}(-1) = i\pi$

(3)  $w = 1 + i$ ,  $|w| = \sqrt{2}$ ,  $\text{Arg}w = \frac{\pi}{4}$

$$\text{Log}(1 + i) = \log \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$$

**Satz 7.2**

Sei  $A = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\}$

$f := \exp|_A$

- (1)  $f$  ist auf  $A$  injektiv.
- (2)  $f(A) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
- (3)  $f^{-1}(w) = \operatorname{Log} w$  ( $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ )
- (4) Die Funktion  $\operatorname{Log}$  ist unstetig in jedem  $w \in \mathbb{R}$  und  $w < 0$

**Beweis**

- (1) 6.3, 7.1
- (2) 6.3, 7.1
- (3) 6.3, 7.1
- (4) §3 Beispiel:  $w \mapsto \operatorname{Arg} w$  ist in  $w < 0$  unstetig. ■

**Definition**

$\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} : t \leq 0\} (\subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\})$

Für  $w \in \mathbb{C}_-$  ist  $\operatorname{Arg} w \in (-\pi, \pi)$ .

**Satz 7.3**

$\operatorname{Log} \in C(\mathbb{C}_-)$

**Beweis**

Sei  $w_0 \in \mathbb{C}_-$ ,  $z_0 := \operatorname{Log} w_0$ ,  $x_0 := \operatorname{Re} z_0$ ,  $y_0 := \operatorname{Im} z_0$ ; also:  $x_0 = \log |w_0|$ ,  $y_0 = \operatorname{Arg} w_0 \in (-\pi, \pi)$ .

$R := \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}, |x - x_0| \leq \log 2, |y| \leq \pi\}$ .

Sei  $\varepsilon > 0$  so klein, dass  $K := R \cap (\mathbb{C} \setminus U_\varepsilon(z_0)) \neq \emptyset$ . Klar:  $K$  ist kompakt,  $z_0 \notin K$ .

Definiere  $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $\varphi(z) := |e^z - w_0| = |e^z - e^{z_0}|$ .

Dann:  $\varphi \in C(K)$ . 3.3  $\Rightarrow \exists \varrho := \min \varphi(K)$ .

Annahme:  $\varrho = 0$ . Also existiert ein  $z \in K : e^z = e^{z_0} \Rightarrow e^{z-z_0} = 1$ . 6.3  $\Rightarrow \exists j \in \mathbb{Z} : z - z_0 = 2j\pi i \Rightarrow 2j\pi = \operatorname{Im}(z - z_0) = \operatorname{Im} z - \operatorname{Im} z_0 \Rightarrow 2|j|\pi = |\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} z_0| \leq \underbrace{|\operatorname{Im} z|}_{\leq \pi} + \underbrace{|\operatorname{Im} z_0|}_{< \pi} < 2\pi \Rightarrow$

$j = 0 \Rightarrow z_0 = z \in K$ . Wid!

Also:  $\varrho > 0$

$\delta := \min\{\varrho, \frac{1}{2}e^{x_0}\}$ . Sei  $w \in \mathbb{C}_-$  und  $|w - w_0| < \delta$ ;  $z := \log w$ . Z.z:  $|z - z_0| < \varepsilon$ .

Sei  $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ );  $y = \operatorname{Arg} w \in (-\pi, \pi)$ , also:  $|y| \leq \pi$ .

Annahme:  $x > x_0 + \log 2$ . Dann:

$\frac{1}{2}e^{x_0} \geq \delta > |w - w_0| = |e^z - e^{z_0}| \geq ||e^z| - |e^{z_0}|| = |e^x - e^{x_0}| \geq e^x - e^{x_0} > e^{x_0 + \log 2} - e^{x_0} = e^{x_0}$  Wid!



Also:  $x \leq x_0 + \log 2$ . Analog:  $x \geq x_0 - \log 2$ .

Fazit:  $z \in R$ .

Annahme:  $|z - z_0| \geq \varepsilon \Rightarrow z \in K \Rightarrow \delta \leq \varrho \leq \varphi(z) = |e^z - e^{z_0}| = |w - w_0| < \delta$ . Wid! ■

#### Satz 7.4

$\text{Log} \in H(\mathbb{C}_-)$  und  $\text{Log}' w = \frac{1}{w} \forall w \in \mathbb{C}_-$

#### Beweis

Sei  $w_0 \in \mathbb{C}_-$ ;  $(w_n)$  eine Folge in  $\mathbb{C}_-$  mit:  $w_n \neq w_0 \forall n \in \mathbb{N}$  und  $w_n \rightarrow w_0$ ,  $z_0 := \text{Log} w_0$ ,  $z_n := \text{Log} w_n$ . 7.3  $\Rightarrow z_n \rightarrow z_0$ . Dann:

$$\frac{\text{Log} w_n - \text{Log} w_0}{w_n - w_0} = \frac{z_n - z_0}{e^{z_n} - e^{z_0}} = \left( \frac{e^{z_n} - e^{z_0}}{z_n - z_0} \right)^{-1} \rightarrow \frac{1}{e^{z_0}} = \frac{1}{w_0}$$

D.h. Log ist in  $w_0$  komplex differenzierbar und  $\text{Log}' w_0 = \frac{1}{w_0}$  ■

**Bezeichnung:**  $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} = U_1(0)$

Beachte: Für  $z \in \mathbb{D}$  ist  $1 - z \in \mathbb{C}_-$

#### Satz 7.5

Für alle  $z \in \mathbb{D}$  gilt:

$$\text{Log}(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$$

#### Beweis

7.4, 5.4  $\Rightarrow f(z) := \text{Log}(1 + z) - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$  ist auf  $\mathbb{D}$  holomorph und  
 $f'(z) = \frac{1}{1+z} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} z^{n-1} = \frac{1}{1+z} - \sum_{n=1}^{\infty} (-z)^{n-1} = \frac{1}{1+z} - \frac{1}{1-(-z)} = 0 \forall z \in \mathbb{D}$

$\mathbb{D}$  ist ein Gebiet  $\stackrel{4.2}{\Rightarrow} f$  ist auf  $\mathbb{D}$  konstant.  $f(0) = 0 \Rightarrow \text{Beh.}$  ■

#### Definition

Sei  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und  $a \in \mathbb{C}$ .

$w^a := e^{a \text{Log} w}$  (**Hauptzweig der allgemeinen Potenz**)

#### Beispiele:

(1) Für  $a = k \in \mathbb{Z}$  ist obige Definition die frühere Potenz von  $w$ . Denn:  $\forall k \in \mathbb{N}$ :

$$e^{k \text{Log} w} = e^{\text{Log} w + \text{Log} w + \dots + \text{Log} w} = (e^{\text{Log} w})^k = w^k$$

$$e^{-k \text{Log} w} = \frac{1}{e^{k \text{Log} w}} \stackrel{s.o.}{=} \frac{1}{w^k} = w^{-k}$$

(2)  $w = a = i$ ,  $\log |w| = 0$ ,  $\text{Arg} w = \frac{\pi}{2}$ ,  $\text{Log} w = i \frac{\pi}{2} \Rightarrow i^i = e^{i \cdot i \frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \in \mathbb{R}$

#### Satz 7.6

Sei  $a \in \mathbb{C}$  und  $f : \mathbb{C}_- \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch  $f(w) := w^a$ . Dann:

$f \in H(\mathbb{C}_-)$  und  $f'(w) = a w^{a-1} \forall w \in \mathbb{C}_-$

## 7. Der komplexe Logarithmus

### Beweis

$$7.4, 4.4 \Rightarrow f \in H(\mathbb{C}_-) \text{ und } f'(w) = e^{a \operatorname{Log} w} (a \operatorname{Log} w)' = a e^{a \operatorname{Log} w} \frac{1}{w} \stackrel{Bsp(1)}{=} a e^{a \operatorname{Log} w} e^{-\operatorname{Log} w} = a e^{(a-1) \operatorname{Log} w} = a w^{a-1} \quad \blacksquare$$

## 8. Komplexe Wegintegrale

Im Folgenden sei  $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$  ( $a < b$ ) und  $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{C}$  Funktionen.

### Definition

- (1) Ist  $\varphi$  auf  $I$  stetig, so setze:  $\int_a^b \varphi(t) dt := \int_a^b \operatorname{Re} \varphi(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} \varphi(t) dt$ ;  $\int_b^a \varphi(t) dt := -\int_a^b \varphi(t) dt$ ;  $\int_a^a \varphi(t) dt := 0$
- (2)  $\varphi$  heißt auf  $I$  **differenzierbar** (db)  $\Leftrightarrow \operatorname{Re} \varphi, \operatorname{Im} \varphi$  sind auf  $I$  differenzierbar. In diesem Fall:  $\varphi' := (\operatorname{Re} \varphi)' + i(\operatorname{Im} \varphi)'$
- (3)  $\varphi$  heißt auf  $I$  **stetig differenzierbar**  $\Leftrightarrow \operatorname{Re} \varphi, \operatorname{Im} \varphi$  sind auf  $I$  stetig differenzierbar.

### Satz 8.1

Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f \in H(D)$ ,  $\varphi(I) \subseteq D$  und  $\varphi$  auf  $I$  differenzierbar.

Dann ist  $f \circ \varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$  differenzierbar auf  $I$  und  $(f \circ \varphi)'(t) = f'(\varphi(t))\varphi'(t) \forall t \in I$ .

### Beweis

Übung! ■

### Satz 8.2

- (1) Sei  $\varphi$  stetig auf  $I$  und  $\Phi : I \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch  $\Phi(s) := \int_a^s \varphi(t) dt$ . Dann ist  $\Phi$  stetig differenzierbar auf  $I$  und  $\Phi' = \varphi$  auf  $I$
- (2) Sei  $\varphi$  auf  $I$  stetig differenzierbar  $\Rightarrow \int_a^b \varphi'(t) dt = \varphi(b) - \varphi(a)$

### Beweis

Übung! ■

### Definition

Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ein Weg (also  $\gamma$  stetig).

- (1)  $\operatorname{Tr}(\gamma) := \gamma([a, b])$  **Träger von  $\gamma$**
- (2)  $\gamma$  heißt **geschlossen**  $\Leftrightarrow \gamma(a) = \gamma(b)$
- (3)  $\gamma$  heißt **glatt**  $\Leftrightarrow \gamma$  ist auf  $[a, b]$  stetig differenzierbar.

**Definition**

Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$ ,  $a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1}$  und  $\gamma_j := [a_j, a_{j+1}] \rightarrow \mathbb{C}$  seien Wege ( $j = 1, \dots, n$ ) mit  $\gamma_j(a_{j+1}) = \gamma_{j+1}(a_{j+1})$  ( $j = 1, \dots, n-1$ ).

Definiere  $\gamma : [a_1, a_{n+1}] \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $\gamma(t) := \gamma_j(t)$ , falls  $t \in [a_j, a_{j+1}]$ .

Dann ist  $\gamma$  ein Weg und man schreibt:  $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \dots \oplus \gamma_n$

$\gamma$  heißt **stückweise glatt**  $:\Leftrightarrow \gamma_1, \dots, \gamma_n$  sind glatt.

**Bemerkungen:**

(1) Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ein Weg.  $\gamma$  ist stückweise glatt  $\Leftrightarrow \exists a_1, \dots, a_{n+1} \in [a, b] : a = a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1} = b$  und  $\gamma|_{[a_j, a_{j+1}]}$  ist glatt ( $j = 1, \dots, n$ )

(2) stückweise glatte Wege sind rektifizierbar.

(3) glatt  $\Rightarrow$  stückweise glatt

**Beispiel**

$\gamma_1(t) := t$  ( $t \in [0, 1]$ ),  $\gamma_2(t) := 1 + i(t-1)$  ( $t \in [1, 2]$ ).

$\gamma := \gamma_1 \oplus \gamma_2$ ,  $\gamma_1, \gamma_2$  sind glatt,  $\gamma'_1(t) = 1 \neq \gamma'_2(1) = i \Rightarrow \gamma$  in 1 nicht differenzierbar.

Wie in  $\mathbb{R}$  zeigt man: Ist  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig, so gilt:  $|\int_a^b \phi(t) dt| \leq \int_a^b |\phi(t)| dt$ .

Für den Rest des Paragraphen sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stets ein Weg (also stetig).

**Definition**

$\gamma^- : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma^-(t) := \gamma(b + a - t)$ ;  $\gamma^-$  heißt der zu  $\gamma$  **inverse Weg**.

Klar:  $\text{Tr}(\gamma) = \text{Tr}(\gamma^-)$

**Definition**

Ist  $\gamma$  glatt, so setze  $L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ .

Ist  $\gamma = \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_n$  stückweise glatt (mit  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  glatt), so setze:

$L(\gamma) := L(\gamma_1) + \dots + L(\gamma_n)$

$L(\gamma)$  heißt **Weglänge** von  $\gamma$ .

**Beispiele:**

(1) Seien  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ,  $\gamma(t) := z_1 + t(z_2 - z_1)$  ( $t \in [0, 1]$ ),  $\gamma$  ist glatt.

$$\gamma'(t) = z_2 - z_1. \implies L(\gamma) = \int_0^1 |z_2 - z_1| dt = |z_2 - z_1|$$

(2) Sei  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$  und  $\gamma(t) := z_0 + re^{it}$  ( $t \in [0, 2\pi]$ )

$$\gamma \text{ ist glatt, } \gamma'(t) = rie^{it}, |\gamma'(t)| = r \implies L(\gamma) = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

**Definition**

Sei  $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$  und  $h : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  stetig differenzierbar, bijektiv und  $h(\alpha) = a, h(\beta) = b$ . Ist  $\gamma$  stückweise glatt, so setze  $\Gamma := \gamma \circ h$ , also  $\Gamma(s) = \gamma(h(s))$  ( $s \in [\alpha, \beta]$ ).

Dann ist  $\Gamma$  ein stückweise glatter Weg mit  $\text{Tr}(\Gamma) = \text{Tr}(\gamma)$ .

$h$  heißt eine **Parametertransformation**. Man schreibt  $\Gamma \sim \gamma$ .

**Definition**

Sei  $f \in C(\text{Tr}(\gamma))$ ;

Ist  $\gamma$  glatt, so setze  $\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$

Ist  $\gamma = \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_n$  stückweise glatt mit  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  glatt, so setze  $\int_{\gamma} f(z) dz := \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z) dz$ .  
 $\int_{\gamma} f(z) dz$  heisst ein (komplexes) **Wegintegral** (von f längs  $\gamma$ )

### Beispiel

$$\gamma(t) := 3e^{it} (t \in [0, 2\pi])$$

$$(1) \int_{\gamma} \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} 3e^{-it} i 3e^{it} dt = 18\pi i.$$

$$(2) \int_{\gamma} z^2 dz = \int_0^{2\pi} 9e^{2it} i 3e^{it} dt = 0.$$

Wie in der Analysis zeigt man:

#### Satz 8.3

$\gamma$  sei stückweise glatt,  $f, g : \text{Tr}(\gamma) \rightarrow \mathbb{C}$  seien stetig,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  und  $\Gamma$  sei ein stückweise glatter Weg mit  $\Gamma \sim \gamma$ .

$$(1) \int_{\gamma} (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_{\gamma} f(z) dz + \beta \int_{\gamma} g(z) dz$$

$$(2) \int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz \text{ (und } L(\Gamma) = L(\gamma))$$

$$(3) \int_{\gamma^-} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$$

#### Satz 8.4

$\gamma$  und  $f$  seien wie in 8.3.  $f_n$  sei eine Folge in  $C(\text{Tr}(\gamma))$  und es sei  $M := \max_{z \in \text{Tr}(\gamma)} |f(z)|$ . Dann:

$$(1) \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq ML(\gamma)$$

(2) Konvergiert die Folge  $(f_n)$  auf  $\text{Tr}(\gamma)$  gleichmässig gegen  $f$ , so gilt:

$$\int_{\gamma} f_n(z) dz \rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz (n \rightarrow \infty)$$

$$(\text{also: } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)) dz)$$

### Beweis

$$(1) \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \leq \int_a^b M |\gamma'(t)| dt = ML(\gamma).$$

## 8. Komplexe Wegintegrale

(2)  $M_n := \max_{z \in \text{Tr}(\gamma)} |f_n(z) - f(z)|$ . Voraussetzung  $\implies M_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ .

$$\left| \int_{\gamma} f_n(z) dz - \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_{\gamma} (f_n(z) - f(z)) dz \right| \stackrel{(1)}{\leq} M_n L(\gamma).$$

### Definition

Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ ,  $D$  offen und  $f \in C(D)$ .  $f$  besitzt auf  $D$  eine **Stammfunktion** (SF) :  $\iff \exists F \in H(D) : F' = f$  auf  $D$ .

### Satz 8.5

Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ ,  $D$  offen und  $f \in C(D)$  besitze auf  $D$  die Stammfunktion  $F$  und  $\gamma$  sei ein stückweiser glatter Weg mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq D$ . Dann:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

### Beweis

O.B.d.A:  $\gamma$  glatt.  $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt \stackrel{8.2}{=} (F \circ \gamma)(b) - (F \circ \gamma)(a)$ . ■

### Folgerung 8.6

$D$ ,  $f$  und  $\gamma$  seien wie in 8.5. Ist  $\gamma$  geschlossen  $\implies \int_{\gamma} f(z) dz = 0$ .

### Beispiel 8.7

Sei  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$ .  $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$  ( $t \in [0, 2\pi]$ );  $\gamma$  ist geschlossen.

Für  $k \in \mathbb{Z}$  sei  $f_k(z) := (z - z_0)^k$  ( $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ )

(1) Sei  $k \neq -1$ .  $f_k$  hat auf  $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$  die Stammfunktion  $z \mapsto \frac{1}{k+1} (z - z_0)^{k+1}$ .

$$8.6 \implies \int_{\gamma} (z - z_0)^k dz = 0$$

(2) Sei  $k = -1$ :  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt = 2\pi i$ .

Also:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = 1$$

Wegen 8.6: Die Funktion  $z \mapsto \frac{1}{z - z_0}$  hat auf  $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$  keine Stammfunktion!

Aber: im Falle  $z_0 = 0$  hat die Funktion  $z \mapsto \frac{1}{z}$  die Stammfunktion  $\text{Log} z$  auf  $\mathbb{C}_-$ .

### Satz 8.8

Sei  $[a_j, b_j] \subseteq \mathbb{R}$  und  $\gamma_j : [a_j, b_j] \rightarrow \mathbb{C}$  glatte Wege mit  $\gamma_j(b_j) = \gamma_{j+1}(a_{j+1})$  ( $j = 1, \dots, n$ )

Dann existiert ein stückweise glatter Weg  $\gamma$  mit:  $\text{Tr}(\gamma) = \bigcup_{j=1}^n \text{Tr}(\gamma_j)$ ,  $L(\gamma) = L(\gamma_1) + \dots +$

$L(\gamma_n)$  und  $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz \quad \forall f \in C(\text{Tr}(\gamma))$

**Beweis**

mit 8.3(2). ■

**Beispiel**

$\gamma_1(t) = t, (t \in [0, 1]); \gamma_2(t) = 1 + it, t \in [0, 1]$

$\tilde{\gamma}_2(t) := 1 + i(t - 1), t \in [1, 2]$ . Dann:  $\tilde{\gamma}_2 \sim \gamma_2; \gamma := \gamma_1 \oplus \tilde{\gamma}_2 : [0, 2] \rightarrow \mathbb{C}$ .

**Satz 8.9**

Sei  $(K_n)$  eine Folge kompakter Mengen in  $\mathbb{C}$  mit:  $K_n \neq \emptyset (\forall n \in \mathbb{N}), K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \dots$   
und  $d(K_n) := \max_{z, w \in K_n} |z - w| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ . Dann:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset.$$

**Beweis**

Wähle in jedem  $K_n$  ein  $z_n$ . Für  $n, k \in \mathbb{N} : z_n, z_{n+k} \in K_n$

Dann:  $|z_n - z_{n+k}| \leq d(K_n) \implies (z_n)$  ist eine Cauchy-Folge  $\implies \exists z_0 \in \mathbb{C} : z_n \rightarrow z_0$ .

Sei  $N \in \mathbb{N}. z_n \in K_N \forall n \geq N. K_N$  abgeschlossen  $\implies z_0 \in K_N$ . ■





## 9. Cauchyscher Integralsatz und Cauchysche Integralformeln

### Definition

Seien  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ .  $\Delta := \Delta_{z_1, z_2, z_3} := \{t_1 z_1 + t_2 z_2 + t_3 z_3 : t_1, t_2, t_3 \geq 0, t_1 + t_2 + t_3 = 1\}$

$\Delta$  heißt ein **Dreieck** ( $\Delta$  ist kompakt)

$$\gamma_1(t) := z_1 + t(z_2 - z_1) (t \in [0, 1])$$

$$\gamma_2(t) := z_2 + (t - 1)(z_3 - z_2) (t \in [1, 2])$$

$$\gamma_3(t) := z_3 + (t - 2)(z_1 - z_3) (t \in [2, 3])$$

$\gamma := \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 : [0, 3] \rightarrow \mathbb{C}$  ist ein stückweise glatter Weg mit  $\text{Tr}(\gamma) = \partial\Delta$ .

Wir setzen (ausnahmsweise):  $L(\partial\Delta) = L(\gamma)$  und  $\int_{\partial\Delta} f(z)dz := \int_{\gamma} f(z)dz$ . ( $f \in C(\partial\Delta)$ )

### Satz 9.1 (Lemma von Goursat)

Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ ,  $D$  offen und  $f \in H(D)$ .

Ist  $\Delta \subseteq D$  ein Dreieck, so gilt:  $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$

### Beweis

Sei  $\Delta = \Delta_{z_1, z_2, z_3}$ ,  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma$  wie oben.

Fall 1:  $z_1 = z_2$

Fall 1.1:  $z_3 = z_1 : \gamma(t) = z_3 \forall t \in [0, 3]$ . Dann:  $\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3 = 0 \Rightarrow \int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\gamma_1} 0 + \int_{\gamma_2} 0 + \int_{\gamma_3} 0 = 0$ .

Fall 1.2:  $z_3 \neq z_1$ .  $\gamma_1(t) = z_1, \gamma'_1 = 0$ , also  $\int_{\gamma_1} = 0$ ,  $\gamma_2^- \sim \gamma_3 \Rightarrow \int_{\gamma_3} = \int_{\gamma_2^-} \stackrel{8.3}{=} -\int_{\gamma_2} \Rightarrow \int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} - \int_{\gamma_2} = 0$ .

Fall 2:  $\Delta$  ist ein echtes Dreieck ( $z_1 \neq z_2 \neq z_3, z_3 \neq z_1$ ). Verbinde die Mittelpunkte der Kanten von  $\Delta$  durch Geraden.

Wir erhalten 4 Dreiecke<sup>1</sup>  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ .

Es existieren stückweise glatte Wege  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  mit  $\text{Tr}(\alpha_j) = \partial\Delta_j$  ( $j = 1, \dots, 4$ ).<sup>2</sup>

Die Summe der Integrale in entgegengesetzten Richtungen längs der Kanten von  $\Delta_4 = 0$ .

Also:

$$\sum_{j=1}^4 \int_{\partial\Delta_j} f(z)dz = \int_{\partial\Delta} f(z)dz$$

<sup>1</sup>Die Skizze taucht hier leider nicht auf, ich versuchs mal zu erklären: Verbindet man alle Seitenhalbierenden miteinander, so entstehen in einem Dreieck vier kleine Dreiecke. Diese nummeriert man nun gegen den Uhrzeigersinn mit 1,2,3, das mittlere aber nennt man 4.

<sup>2</sup>gegen den Uhrzeigersinn

## 9. Cauchyscher Integralsatz und Cauchysche Integralformeln

Somit:

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| \leq \sum_{j=1}^4 \underbrace{\left| \int_{\partial\Delta_j} f(z) dz \right|}_{=: a_j}$$

O.B.d.A:  $a_1 = \max\{a_1, \dots, a_4\} \cdot \Delta^{(1)} := \Delta_1$ . Fazit:  $|\int_{\partial\Delta} f(z) dz| \leq 4 |\int_{\partial\Delta^{(1)}} f(z) dz|$  und  $L(\partial\Delta^{(1)}) = \frac{1}{2} L(\partial\Delta)$  <sup>3</sup>

Verfahre mit  $\Delta^{(1)}$  genauso wie mit  $\Delta$ . Wir erhalten ein Dreieck  $\Delta^{(2)} \subseteq \Delta^{(1)} \subseteq \Delta : |\int_{\partial\Delta^{(1)}} f(z) dz| \leq 4 |\int_{\partial\Delta^{(2)}} f(z) dz|, L(\partial\Delta^{(2)}) = \frac{1}{2} L(\partial\Delta^{(1)})$ .

Also:  $|\int_{\partial\Delta} f(z) dz| \leq 4^2 |\int_{\partial\Delta^{(2)}} f(z) dz|$  und  $L(\partial\Delta^{(2)}) = \frac{1}{2^2} L(\partial\Delta)$ .

Induktiv erhaelt man eine Folge  $(\Delta^{(n)})$  von Dreiecken mit:

$\Delta \supseteq \Delta^{(1)} \supseteq \Delta^{(2)} \supseteq \dots, |\int_{\partial\Delta} f(z) dz| \leq 4^n |\int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z) dz|$  und  $L(\partial\Delta^{(n)}) = \frac{1}{2^n} L(\partial\Delta) (n \in \mathbb{N})$

8.9  $\Rightarrow \exists z_0 \in D : z_0 \in \Delta^{(n)} \forall n \in \mathbb{N}$ .

Definiere:  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & , z \neq z_0 \\ f'(z_0) & , z = z_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f \in H(D) \Rightarrow \varphi \in C(D)$ . Es ist

$$f(z) = f(z_0) + \underbrace{\varphi(z)(z - z_0)}_{=: f_1(z)} = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \underbrace{(\varphi(z) - f'(z_0))(z - z_0)}_{=: f_2(z)} \quad \forall z \in D.$$

Sei  $\varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq D$  und  $|\varphi(z) - f'(z_0)| \leq \varepsilon \forall z \in U_\delta(z_0)$  <sup>4</sup>.  $\exists m \in \mathbb{N} : \Delta^{(m)} \subseteq U_\delta(z_0)$ . Für  $z \in \partial\Delta^{(m)} : |z - z_0| \leq \delta$  <sup>5</sup>  $L(\partial\Delta^{(m)})$  und  $|\varphi(z) - f'(z_0)| \leq \varepsilon$ .

Dann:  $|f_2(z)| \leq \varepsilon L(\partial\Delta^{(m)}) \forall z \in \partial\Delta^{(m)}$ . Also:  $|\int_{\partial\Delta^{(m)}} f_2(z) dz| \stackrel{8.4}{\leq} \varepsilon L(\partial\Delta^{(m)})^2$ .

$f_1$  hat auf  $D$  die Stammfunktion  $f(z_0)z + \frac{1}{2}f'(z_0)(z - z_0)^2 \stackrel{8.6}{\Rightarrow} |\int_{\partial\Delta^{(m)}} f_1(z) dz| = 0$ .

Dann:  $|\int_{\partial\Delta} f(z) dz| \leq 4^m |\int_{\partial\Delta^{(m)}} f(z) dz| = 4^m |\int_{\partial\Delta^{(m)}} f_2(z) dz| \leq 4^m \varepsilon L(\partial\Delta^{(m)})^2 = 4^m \varepsilon (\frac{1}{2^m} L(\partial\Delta))^2 = 4^m \varepsilon \frac{1}{4^m} L(\partial\Delta)^2 = \varepsilon L(\partial\Delta)^2$ .

Fazit:  $\forall \varepsilon > 0$  gilt:  $|\int_{\partial\Delta} f(z) dz| \leq \varepsilon L(\partial\Delta)^2$ . ■

**Hilfssatz 1:**

Sei  $z_0 \in \mathbb{C}, r > 0$  und  $f \in C(U_r(z_0))$ . Für jedes Dreieck  $\Delta \subseteq U_r(z_0)$  gelte:  $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$ . Dann besitzt  $f$  auf  $U_r(z_0)$  eine Stammfunktion.

**Beweis**

Definiere:  $F : U_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  wie folgt: Für  $z \in U_r(z_0)$  sei  $\gamma_z(t) := z_0 + t(z - z_0)$  ( $t \in [0, 1]$ ).  $F(z) := \int_{\gamma_z} f(w) dw$ .

<sup>3</sup>Diese Gleichheit folgt aus geometrischen Überlegungen an Dreiecken.

<sup>4</sup>Folgt aus der Stetigkeit.

<sup>5</sup> $\max_{w, z \in \Delta} |w - z| \leq L(\partial\Delta)$

Sei  $z_1 \in U_r(z_0)$ . Sei  $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  so, dass  $\Delta_{z_0, z_1, z_1+h} \subseteq U_r(z_0)$ .

$$\gamma_0(t) := z_1 + th (t \in [0, 1]).$$

$$\gamma_1 := \gamma_{z_1+h}^-$$

$$\text{Vorraussetzungen} \Rightarrow 0 = \underbrace{\int_{\gamma_{z_1}} f(w)dw}_{=F(z_1)} + \int_{\gamma_0} f(w)dw + \underbrace{\int_{\gamma_1} f(w)dw}_{=-F(z_1+h)} \Rightarrow F(z_1+h) - F(z_1)$$

$$= \int_{\gamma_0} f(w)dw;$$

$$\int_{\gamma_0} f(z_1)dw = \int_0^1 f(z_1)h dt = f(z_1)h.$$

Also:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z_1+h) - F(z_1)}{h} - f(z_1) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_{\gamma_0} (f(w) - f(z_1))dw \right| = \left| \frac{1}{h} \int_0^1 (f(z_1+th) - f(z_1))h dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 (f(z_1+th) - f(z_1)) dt \right| \leq \int_0^1 |f(z_1+th) - f(z_1)| dt \end{aligned}$$

Sei  $\varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |f(z_1+th) - f(z_1)| \leq \varepsilon$  für  $0 < |h| < \delta$  und für  $t \in [0, 1] \Rightarrow$

$\left| \frac{F(z_1+h) - F(z_1)}{h} - f(z_1) \right| \leq \varepsilon$  für  $0 < |h| < \delta$ . D.h.  $F$  ist in  $z_1$  komplex differenzierbar und  $F'(z_1) = f(z_1)$  ■

*Folgerung:*

Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f \in H(D)$ . Ist  $z_0 \in D$ , so existiert ein  $\delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq D$  und  $f$  besitzt auf  $U_\delta(z_0)$  eine Stammfunktion.

## Beweis

9.1 und Hilfssatz 1 ■

## Definition

Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$

- (1)  $G$  heißt **sternförmig** :  $\iff \exists z^* \in G$  mit:  $S[z, z^*] \subseteq G$  I.d. Fall heißt  $z^*$  ein **Sternmittelpunkt** von  $G$ .

Beachte: sternförmig  $\implies$  **Wegzusammenhang**.

- (2) Ist  $G$  offen und sternförmig, so heißt  $G$  ein **Sterngebiet**

## Beispiel

- (1) Konvexe Mengen sind sternförmig
- (2)  $\mathbb{C}, U_\epsilon(z_0)$  sind Sterngebiete.  $\mathbb{C} \setminus \{0\}, \dot{U}_\epsilon(z_0)$  sind Gebiete, aber keine Sterngebiete.
- (3)  $\mathbb{C}_-$  ist ein Sterngebiet. Jedes  $z^* \in (0, \infty)$  ist ein Sternmittelpunkt von  $\mathbb{C}_-$ .

### Satz 9.2 (Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete)

Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Sterngebiet, es sei  $f \in H(G)$  und es sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ein stückweise glatter Weg mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$ . Dann:

- (1)  $f$  besitzt auf  $G$  eine Stammfunktion  $F$ .

$$(2) \int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

$$(3) \text{ Ist } \gamma \text{ geschlossen, so ist } \int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

**Bemerkung:** Für beliebige Gebiete ist 9.2 i.a. falsch.

Beispiel:  $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $f(z) = \frac{1}{z}$  (s. 8.7)

**Beweis**

(1) Sei  $z^*$  ein Sternmittelpunkt von  $G$ . Definiere  $F : G \rightarrow \mathbb{C}$  wie folgt: für  $z \in G$  sei  $\gamma_z(t) := z^* + t(z - z^*)$  ( $t \in [0, 1]$ ).  $\text{Tr}(\gamma_z) = S[z, z^*] \subseteq G$ .  $F(z) := \int_{\gamma_z} f(w) dw$ .  $f \in H(G) \xrightarrow{9.1} \int_{\partial \Delta} f(w) dw = 0$  für jedes Dreieck  $\Delta \subseteq G$ . Fast wörtlich wie in HS 1 zeigt man:  $F \in H(G)$  und  $F' = f$  auf  $G$ .

(2) folgt aus (1) und 8.5

(3) folgt aus (1) und 8.6 ■

**Bezeichnung**

Seien  $G$  und  $f$  wie in 9.2.  $z^* \in G$  sei ein Sternmittelpunkt von  $G$ . Für  $z \in G$  setze:  $F(z) := \int_{z^*}^z f(w) dw := \int_{\gamma} f(w) dw$ , wobei  $\gamma$  **irgendein** stückweise glatter Weg mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$ , Anfangspunkt von  $\gamma = z^*$  und Endpunkt von  $\gamma = z$  ist.

Wegen 9.2(2) ist  $F$  wohldefiniert. Der Beweis von 9.2(1) zeigt:  $F \in H(G)$  und  $F' = f$  auf  $G$ .

**Beispiel**

<sup>6</sup>  $G = \mathbb{C}_-$ ,  $f(z) = \frac{1}{z}$ ,  $z^* = 1$ ,  $F(z) := \int_1^z \frac{1}{w} dw$

Dann:  $F'(z) = \frac{1}{z} = \text{Log}' z \quad \forall z \in G$

Dann existiert  $c \in \mathbb{C} : F(z) = \text{Log} z + c \quad \forall z \in G$ .  $F(1) = 0 = \text{Log} 1 \implies c = 0$

Also:  $\text{Log} z = \int_1^z \frac{1}{w} dw$  ( $z \in \mathbb{C}_-$ )

**Hilfssatz 2**

Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen.  $z_0 \in D$ ,  $r > 0$ ,  $\overline{U_r(z_0)} \subseteq D$  und  $\gamma(t) := z_0 + r \cdot e^{it}$  ( $t \in [0, 2\pi]$ ) Weiter sei  $z_1 \in U_r(z_0)$ ,  $\rho > 0$  so, daß  $\overline{U_\rho(z_1)} \subseteq U_r(z_0)$  und

$\gamma_0(t) := z_1 + \rho \cdot e^{it}$  ( $t \in [0, 2\pi]$ ) Ist  $g \in H(D \setminus \{z_1\})$ , so gilt:

$$\int_{\gamma} g(w) dw = \int_{\gamma_0} g(w) dw$$

**Beweis**

O.B.d.A  $\text{Re } z_0 = \text{Re } z_1$ ,  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  seien stückweise glatte Wege. Wähle  $R > r$  so, dass  $U_R(z_0) \subseteq D$ .

$G_1 := U_R(z_0) \setminus \{z_1 + t : t \leq 0\}$ .  $G_1$  ist ein Sterngebiet,  $\text{Tr}(\gamma_1) \subseteq G_1$ .  $\gamma_1$  ist geschlossen,  $g \in H(G_1)$ . 9.2  $\implies \int_{\gamma_1} g(w) dw = 0$ . Analog:  $\int_{\gamma_2} g(w) dw = 0$ . Also:

$$0 = \int_{\gamma_1} g(w) dw + \int_{\gamma_2} g(w) dw = \int_{\gamma} g(w) dw + \int_{\gamma_0^-} g(w) dw = \int_{\gamma} g(w) dw - \int_{\gamma_0} g(w) dw \quad \blacksquare$$

---

<sup>6</sup>Dieses Beispiel trägt die Nummer 9.3

**Satz 9.4 (Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben)**

$D \subseteq \mathbb{C}$  sei offen,  $z_0 \in D$ ,  $r > 0$  und  $\overline{U_r(z_0)} \subseteq D$ . Weiter sei  $f \in H(D)$  und  $\gamma(t) := z_0 + r \cdot e^{it}$  ( $t \in [0, 2\pi]$ ).

Dann gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw \quad \forall z \in U_r(z_0)$$

**Bemerkungen**

(1) Die Werte von  $f$  in  $U_r(z_0)$  sind festgelegt durch die Werte von  $f$  auf  $\partial U_r(z_0)$

(2) Für  $z = z_0$ :  $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r \cdot e^{it}) dt$  (Mittelwertgleichung)

**Beweis**

Sei  $z_1 \in U_r(z_0)$ . Sei  $\epsilon > 0$ .  $\exists \delta > 0$ :  $U_\delta(z_1) \subseteq U_r(z_0)$  und

$$|f(w) - f(z_1)| \leq \epsilon \quad \forall w \in U_\delta(z_1).$$

Sei  $0 < \rho < \delta$ ;  $\gamma_0(t) := z_1 + \rho \cdot e^{it}$  ( $t \in [0, 2\pi]$ ).

Für  $w \in \text{Tr}(\gamma_0)$ :  $|w - z_1| = \rho < \delta$ , also  $|f(w) - f(z_1)| \leq \epsilon$ .

Also:  $|\frac{f(w) - f(z_1)}{w - z_1}| \leq \frac{\epsilon}{\rho} \quad \forall w \in \text{Tr}(\gamma_0)$ .

$$8.4 \implies \left| \int_{\gamma_0} \frac{f(w) - f(z_1)}{w - z_1} dw \right| \leq \frac{\epsilon}{\rho} L(\gamma_0) = \frac{\epsilon}{\rho} 2\pi\rho = 2\pi\epsilon.$$

Definiere  $g : D \setminus \{z_1\} \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $g(w) := \frac{f(w)}{w - z_1}$ .

Dann:  $g \in H(D \setminus \{z_1\})$ .

Somit:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z_1} dw &= \int_{\gamma} g(w) dw = \int_{\gamma_0} g(w) dw \\ &= \int_{\gamma_0} \frac{f(z_1) + f(w) - f(z_1)}{w - z_1} dw \\ &= f(z_1) \cdot \underbrace{\int_{\gamma_0} \frac{dw}{w - z_1}}_{\substack{8.7 \\ = 2\pi i}} + \underbrace{\int_{\gamma_0} \frac{f(w) - f(z_1)}{w - z_1} dw}_{=: A} \\ &= 2\pi i f(z_1) + A \end{aligned}$$

$$\implies \left| \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z_1} dw - 2\pi i f(z_1) \right| = |A| \stackrel{\text{s.o.}}{\leq} 2\pi\epsilon.$$

$$\epsilon > 0 \text{ beliebig} \implies f(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z_1} dw \quad \blacksquare$$

**Beispiel**

Berechne  $I = \int_{\gamma} \frac{e^{\sin z} + \cos(e^z)z^2}{z} dz$ ,  $\gamma(t) = e^{it}$  ( $t \in [0, 2\pi]$ )

$$f(z) := e^{\sin z} + \cos(e^z)z^2$$

$$9.4 \implies I = 2\pi i f(0) = 2\pi i$$

**Satz 9.5**

$\gamma$  sei ein stückweise glatter Weg in  $\mathbb{C}$ , es sei  $D := \mathbb{C} \setminus \text{Tr}(\gamma)$  ( $D$  offen). Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $F_n : D \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch

$$F_n(z) := \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{(w-z)^n} dw,$$

wobei  $\varphi \in C(\text{Tr}(\gamma))$ .

Dann ist  $F_n \in H(D)$  und  $F'_n = nF_{n+1}$  auf  $D$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

**Beweis**

Sei  $z_0 \in D$ . Wir zeigen :  $F_n$  ist in  $z_0$  komplex differenzierbar und  $F'_n(z_0) = nF_{n+1}(z_0)$ .

o.B.d.A:  $z_0 = 0$ . Dann ist  $0 \in D$ , also  $0 \notin \text{Tr}(\gamma)$ . Sei  $w \in \text{Tr}(\gamma)$  und  $z \in D \setminus \{0\}$ :

Nachrechnen:

$$\frac{1}{(w-z)^n} - \frac{1}{w^n} = \frac{z}{(w-z)^n w^n} \sum_{k=0}^{n-1} w^{n-k-1} (w-z)^k$$

$$h(z, w) := \frac{1}{(w-z)^n} \sum_{k=0}^{n-1} w^{n-k-1} (w-z)^k - \frac{n}{w}$$

Dann folgt (Nachrechnen!):

$$\frac{F_n(z) - F_n(0)}{z} - nF_{n+1}(0) = \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{w^n} h(z, w) dw$$

Weiter gilt  $\exists r > 0 : U_r(z_0) \subseteq D$ . Sei  $\epsilon > 0$ .  $\overline{U_{\frac{r}{2}}(z_0)} \times \text{Tr}(\gamma)$  ist kompakt und  $h$  ist auf  $\overline{U_{\frac{r}{2}}(z_0)} \times \text{Tr}(\gamma)$  gleichmäßig stetig. Dann existiert ein  $\delta > 0 : \delta < \frac{r}{2}$  und  $|h(z_1, w) - h(z_2, w)| \leq \epsilon \forall z_1, z_2 \in U_{\delta}(0) \forall w \in \text{Tr}(\gamma)$ .

Es ist  $h(0, w) = 0 \forall w \in \text{Tr}(\gamma) \Rightarrow |h(z, w)| \leq \epsilon \forall z \in U_{\delta}(0) \forall w \in \text{Tr}(\gamma)$

$M := \max_{w \in \text{Tr}(\gamma)} |\varphi(w)|; w \in \text{Tr}(\gamma) \Rightarrow |w| = |w - 0| \geq \frac{r}{2}$

$\Rightarrow |w|^n \geq \frac{r^n}{2^n} \Rightarrow \frac{1}{|w|^n} \leq \frac{2^n}{r^n}$

$\Rightarrow \frac{|\varphi(w)|}{|w|^n} |h(z, w)| \leq M \frac{2^n}{r^n} \epsilon \forall z \in U_{\delta}(0)$

$\Rightarrow \int_{\gamma} \left| \frac{\varphi(w)}{w^n} h(z, w) dw \right| \leq M \frac{2^n}{r^n} \epsilon L(\gamma) = \epsilon \left( \frac{M 2^n}{r^n} L(\gamma) \right) \forall z \in U_{\delta}(0)$  ■

$$= \underbrace{\left| \frac{F_n(z) - F_n(0)}{z} - nF_{n+1}(0) \right|}$$

**Satz 9.6**

Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ ,  $D$  offen und  $f \in H(D)$ . Dann:

(1)  $f' \in H(D)$

(2)  $f$  ist auf  $D$  beliebig oft komplex differenzierbar

(3) **Cauchysche Integralformeln für Ableitungen**

Ist  $z_0 \in D, r > 0, \overline{U_r(z_0)} \subseteq D$  und  $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$  ( $t \in [0, 2\pi]$ ), so gilt:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw \quad \forall z \in U_r(z_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

### Beweis

Sei  $z_0, r, \gamma$  wie in (3).

$$F_n(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^n} dw \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \text{Tr}(\gamma), n \in \mathbb{N}$$

9.4  $\Rightarrow f = F_1$  auf  $U_r(z_0)$ ;

9.5  $\Rightarrow F_1 \in H(U_r(z_0))$  und  $F_1' = F_2$  auf  $U_r(z_0)$ . Also:  $f' = F_2$  auf  $U_r(z_0)$ . 9.5  $\Rightarrow F_2 \in H(U_r(z_0))$ , also  $f' \in H(U_r(z_0))$ .  $z_0 \in D$  beliebig  $\Rightarrow$  (1).

$f' = F_2$  auf  $U_r(z_0) \Rightarrow$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw \quad \forall z \in U_r(z_0)$$

$f'' = F_2' = 2F_3$  auf  $U_r(z_0) \Rightarrow$

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^3} dw \quad \forall z \in U_r(z_0)$$

Weiter mit Induktion und 9.5 ■

### Satz 9.7 (Satz von Morera)

Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ ,  $D$  offen und  $f \in C(D)$

Dann:

$$f \in H(D) \iff \int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0 \text{ für jedes Dreieck } \Delta \subseteq D$$

### Beweis

"  $\Rightarrow$  " : 9.1

"  $\Leftarrow$  : Sei  $z_0 \in D, r > 0$  und  $U_r(z_0) \subseteq D$ . Dann mit HilStammfunktionsatz 1 und den Voraussetzungen  $\Rightarrow \exists F \in H(U_r(z_0)) : F' = f$  auf  $U_r(z_0)$

9.6  $\Rightarrow f \in H(U_r(z_0))$ . Da  $z_0 \in D$  beliebig  $\Rightarrow f \in H(D)$  ■

**Hilfssatz 3** Seien  $G_1$  und  $G_2$  Gebiete in  $\mathbb{C}$  und es sei  $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ .

Dann ist  $G_1 \cup G_2$  ein Gebiet.

### Beweis

$G_1 \cup G_2$  ist offen. Sei  $\varphi : G_1 \cup G_2 \rightarrow \mathbb{C}$  lokal konstant.  $\varphi_j := \varphi|_{G_j}$  ( $j = 1, 2$ )

$G_j$  Gebiet  $\Rightarrow \varphi_j$  ist auf  $G_j$  konstant.  $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset \Rightarrow \varphi$  ist auf  $G_1 \cup G_2$  konstant. ■

### Definition

Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet.

$G$  heißt ein **Elementargebiet** (EG) :  $\iff \forall f \in H(G) \exists F \in H(G) : F' = f$  auf  $G$ .

### Beispiel

- (1) Aus 9.2: Sterngebiete sind Elementargebiete
- (2)  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  ist kein Elementargebiet, denn die Funktion  $\frac{1}{z}$  hat auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  keine Stammfunktion (siehe 8.7).

### Satz 9.8

Seien  $G_1$  und  $G_2$  Elementargebiete,  $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$  und es sei  $G_1 \cap G_2$  zusammenhängend. Dann ist  $G_1 \cup G_2$  ein Elementargebiet.

**Bemerkung:** (1) Sind  $G_1$  und  $G_2$  Gebiete, so muß  $G_1 \cap G_2$  nicht zusammenhängend sein.

(2) Es gibt Elementargebiete, die keine Sterngebiete sind.

### Beweis

Hilfssatz 3  $\Rightarrow G_1 \cup G_2$  ist ein Gebiet.

Vorraussetzungen  $\Rightarrow G_1 \cap G_2$  ist ein Gebiet.

Sei  $f \in H(G_1 \cup G_2)$ ,  $f_j := f|_{G_j}$  ( $j = 1, 2$ ),

$\exists F_j \in H(G_j) : F_j' = f_j = f$  auf  $G_j$  ( $j = 1, 2$ )

Für  $z \in G_1 \cap G_2 : (F_1 - F_2)'(z) = f(z) - f(z) = 0$

4.2  $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{C} : F_1(z) = F_2(z) + c \quad \forall z \in G_1 \cap G_2$

$$F(z) := \begin{cases} F_1(z) & , z \in G_1 \\ F_2(z) + c & , z \in G_2 \end{cases}$$

Dann ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  auf  $G_1 \cup G_2$  ■

### Definition

Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$  und  $g : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion.  $g$  ist auf  $D$  **beschränkt** :  $\iff \exists c \geq 0 : |g(z)| \leq c \quad \forall z \in D$

### Definition

Eine Funktion  $f \in H(\mathbb{C})$  heißt eine **ganze Funktion**. (entire function)



## 10. Folgerungen aus den Integralformeln

### Satz 10.1 (Cauchysche Abschätzungen)

Sei  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$ ,  $f \in H(U_r(z_0))$  und  $f$  sei auf  $U_r(z_0)$  beschränkt mit  $M := \sup_{U_r(z_0)} |f(z)|$ .

Dann:  $|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{Mn!}{r^n} \forall n \in \mathbb{N}_0$ .

### Beweis

Sei  $0 < \rho < r$ ,  $\gamma(t) := z_0 + \rho e^{it}$  ( $t \in [0, 2\pi]$ ). 9.6  $\implies f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$ .

Für  $w \in \text{Tr}(\gamma) : |w - z_0| = \rho$ , also  $\frac{|f(w)|}{|w-z_0|^{n+1}} \leq \frac{M}{\rho^{n+1}}$

$\xrightarrow{8.4} |f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M}{\rho^{n+1}} 2\pi\rho = \frac{Mn!}{\rho^n} \xrightarrow{\rho \rightarrow r} \text{Beh.}$  ■

### Satz 10.2 (Satz von Liouville)

Ist  $f \in H(\mathbb{C})$  auf  $\mathbb{C}$  beschränkt, so ist  $f$  konstant.

### Beweis

Sei  $z_0 \in \mathbb{C}$  und  $r > 0$ . 10.1  $\implies |f'(z_0)| \leq \frac{M}{r}$ ;  $r > 0$  beliebig.

$\xrightarrow{r \rightarrow \infty} f'(z_0) = 0, z_0 \in \mathbb{C}$  beliebig  $\implies f' = 0$  auf  $\mathbb{C}$ . 4.2  $\implies$  Beh. ■

**Bemerkung:** 10.2 ist in  $\mathbb{R}$  falsch. Z.B. ist  $x \mapsto \cos x$  auf  $\mathbb{R}$  beschränkt aber nicht konstant. Für  $t \in \mathbb{R} : \cos(it) = \frac{1}{2}(e^{i(it)} + e^{i(-it)}) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) = \cosh t \rightarrow \infty (t \rightarrow \pm\infty)$

### Hilfssatz

Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ ,  $a_n \neq 0$  und  $p(z) := a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ .

Dann ex. ein  $R > 0 : |p(z)| \geq 1 \forall z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| > R$ .

### Beweis

Für  $z \neq 0 : \varphi(z) := \frac{|a_0|}{|z|^n} + \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} + \dots + \frac{|a_{n-1}|}{|z|} + |a_n|$ .

$\implies \varphi(z) \rightarrow \underbrace{|a_n|}_{\neq 0} (|z| \rightarrow \infty) \implies |p(z)| = |z|^n |\varphi(z)| \rightarrow \infty (|z| \rightarrow \infty) \implies \text{Beh.}$  ■

### Satz 10.3 (Fundamentalsatz der Algebra)

Sei  $p$  wie in obigem Hilfssatz. Dann ex. ein  $z_0 \in \mathbb{C} : p(z_0) = 0$

**Beweis**

Hilfssatz  $\implies \exists R > 0 : |p(z)| \geq 1 \forall z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| > R$ .

Annahme:  $p(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$ . Dann  $q := \frac{1}{p} \in H(\mathbb{C})$  und  $|q(z)| \leq 1$  für  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| > R$ .

$q$  ist stetig  $\implies q$  ist beschränkt auf  $\overline{U_R(0)} \implies q$  ist auf  $\mathbb{C}$  beschränkt.

10.2  $\implies q$  ist konstant  $\implies p$  ist konstant, Wid! ■

**Satz 10.4 (Potenzreihenentwicklung)**

Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f \in H(D)$ ,  $z_0 \in D$  und  $r > 0$  so, dass  $U_r(z_0) \subseteq D$ . Dann:

$$(*)f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \forall z \in U_r(z_0)$$

wobei

$$(**)a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

mit  $\gamma(t) = z_0 + \rho e^{it}, t \in [0, 2\pi], 0 < \rho < r$

**Beweis**

(\*\*) folgt aus (\*), 5.4 und 9.6. O.B.d.A.:  $z_0 = 0$ .

Sei  $z \in U_r(0)$  und sei  $R > 0$  so, dass  $|z| < R < r$ ;

$\gamma_0(t) := z_0 + R \cdot e^{it} \ (t \in [0, 2\pi])$ .

Sei  $w \in \text{Tr}(\gamma_0)$ . Dann  $\frac{|z|}{|w|} = \frac{|z|}{R} < 1$ , also  $\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{w} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{w}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{w^{n+1}} z^n$ .

$$\begin{aligned} \text{Also } \underbrace{\int_{\gamma_0} \frac{f(w)}{w-z} dw}_{\stackrel{9.4}{=} 2\pi i f(z)} &= \int_{\gamma_0} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{w^{n+1}} z^n \right) dw \\ &\stackrel{8.4}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \underbrace{\int_{\gamma_0} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw}_{\stackrel{9.6}{=} 2\pi i \cdot \frac{f^{(n)}(0)}{n!}} \right) z^n \implies f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right) z^n \end{aligned}$$

**Bemerkungen:**

(1) 10.4 ist in  $\mathbb{R}$  falsch.

Bekannt aus der Analysis: Die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & , x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

ist auf  $\mathbb{R}$  bel. oft db und  $f^{(n)}(0) = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$ .

Also:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \equiv 0$  auf  $\mathbb{R}$ .

(2) Die Entwicklung (\*) gilt in der größten offenen Kreisscheibe um  $z_0$ , die noch ganz in  $D$  liegt. Sei  $r_0$  der Radius dieser Kreisscheibe (ist  $D = \mathbb{C}$ , so ist  $r = \infty$ ). Sei  $R$  der KR der PR in (\*). Also:  $R \geq r_0$ .

**Satz 10.5 (Konvergenzsatz von Weierstraß)**

$D \subseteq \mathbb{C}$  sei offen,  $(f_n)$  sei eine Folge in  $H(D)$  und  $(f_n)$  konvergiere auf  $D$  lokal gleichmäßig gegen eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ .

- (1)  $f \in H(D)$
- (2)  $(f'_n)$  konvergiere auf  $D$  lokal gleichmäßig gegen  $f'$ .

**Beweis**

- (1) 5.1  $\Rightarrow f \in C(D)$ . Sei  $\Delta \subseteq D$  ein Dreieck.  $(f_n)$  konvergiere auf  $\partial\Delta$

gleichmäßig  $\Rightarrow \int_{\partial\Delta} f(z)dz \stackrel{8.4}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Delta} f_n(z)dz \stackrel{9.1}{=} 0$ .  
 9.7  $\Rightarrow f \in H(D)$ .

- (2) O.B.d.A.  $f = 0$  auf  $D$  (ansonsten betrachte  $f_n - f$ ). Sei  $z_0 \in D$  und  $r > 0$

so, daß  $\overline{U_r(z_0)} \subseteq D$ . Es genügt zu zeigen:

$(f'_n)$  konvergiert auf  $\overline{U_{\frac{r}{2}}(z_0)}$  gleichmäßig gegen 0.

$\gamma(t) := z_0 + r \cdot e^{it} (t \in [0, 2\pi])$ .  $M_n := \max_{w \in \text{Tr}(\gamma)} |f_n(w)|$

Vor  $\Rightarrow M_n \rightarrow 0$ .

Sei  $z \in \overline{U_{\frac{r}{2}}(z_0)}$ .  $f'_n(z) \stackrel{9.6}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(w)}{(w-z)^2} dw$

$w \in \text{Tr}(\gamma) : |w - z| \geq \frac{r}{2} \Rightarrow \frac{|f_n(w)|}{|w-z|^2} \leq \frac{4M_n}{r^2}$

$\Rightarrow |f'_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{4M_n}{r^2} 2\pi r = \frac{4M_n}{r}$

Also:  $|f'_n(z)| \leq \frac{4M_n}{r} \forall z \in \overline{U_{\frac{r}{2}}(z_0)} \forall n \in \mathbb{N}$  und  $M_n \rightarrow 0$ . ■



# 11. Weitere Eigenschaften holomorpher Funktionen

In diesem Paragraphen sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  stets ein **Gebiet**. Fast wörtlich wie in Analysis I zeigt man:

## Satz 11.1 (Identitätssatz für Potenzreihen)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  sei eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r > 0$ ,

es sei  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  für  $z \in U_r(z_0)$ , es sei  $(z_k)$  eine

Folge in  $\dot{U}_r(z_0)$  mit  $z_k \rightarrow z_0$  und es gelte  $f(z_k) = 0 \forall k \in \mathbb{N}$ .

Dann:  $a_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$ .

## Satz 11.2 (Identitätssatz für holomorphe Funktionen)

Es sei  $f \in H(G)$ ,  $z_0 \in G$ ,  $(z_k)$  eine Folge in  $G \setminus \{z_0\}$  mit  $f(z_k) = 0 \forall k \in \mathbb{N}$  und  $z_k \rightarrow z_0$ .

Dann:  $f = 0$  auf  $G$ .

## Beweis

$\exists r > 0: U_r(z_0) \subseteq G$ . 10.4  $\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \forall z \in U_r(z_0)$

$\exists k_0 \in \mathbb{N}: z_k \in U_r(z_0) \forall k \geq k_0$ . 11.1  $\Rightarrow f^{(n)}(z_0) = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow z_0 \in A := \{z \in G : f^{(n)}(z) = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0\}$ .  $B := G \setminus A$ ,  $A \cap B = \emptyset$

Sei  $a \in A$ .  $\exists \delta > 0 : U_\delta(a) \subseteq G$ . 10.4  $\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n \forall z \in U_\delta(a)$

$a \in A \Rightarrow f^{(n)}(a) = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow f \equiv 0$  auf  $U_\delta(a)$

$\Rightarrow f^{(n)} \equiv 0$  auf  $U_\delta(a) \forall n \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow U_{(\delta)}(a) \subseteq A$ .  $A$  ist also offen. Sei  $b \in B$ .  $\exists k \in \mathbb{N}_0 : f^{(k)}(b) \neq 0$ ;

$f^{(k)}$  stetig  $\Rightarrow \exists \epsilon > 0 : U_\epsilon(b) \subseteq G$  und  $f^{(k)}(z) \neq 0 \forall z \in U_\epsilon(b)$

$\Rightarrow U_\epsilon(b) \subseteq B$ ; d.h.  $B$  ist offen.  $G$  ist ein Gebiet  $\Rightarrow B = \emptyset \Rightarrow G = A \Rightarrow \text{Beh.}$  ■

## Bezeichnung

für  $f \in H(G)$ :  $Z(f) := \{z \in G : f(z) = 0\}$ .

## Folgerung 11.3

(1) Ist  $f \in H(G)$ ,  $f \neq 0$  auf  $G$  und  $z_0 \in Z(f)$ , so existiert ein  $\epsilon > 0$ :

$U_\epsilon(z_0) \subseteq G$ ,  $f(z) \neq 0 \forall z \in \dot{U}_\epsilon(z_0)$

## 11. Weitere Eigenschaften holomorpher Funktionen

(2) Ist  $f \in H(G)$ ,  $z_0 \in G$  und gilt:  $f^{(n)}(z_0) = 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N}_0$ , so ist  $f = 0$  auf  $G$ .

### Beweis

(1) folgt aus 11.2

(2) Verfahre wie im Beweis von 11.2 ■

### Satz 11.4

Sei  $G$  ein EG und  $f \in H(G)$  mit  $Z(f) = \emptyset$

(1)  $\exists h \in H(G): e^h = f$  auf  $G$

(2) Ist  $n \in \mathbb{N}$ , so existiert ein  $g \in H(G): g^n = f$  auf  $G$

### Beweis

(1) Es ist  $\frac{f'}{f} \in H(G)$ .  $G$  ist ein EG  $\Rightarrow \exists F \in H(G): F' = \frac{f'}{f}$  auf  $G$ .  $\phi := \frac{e^F}{f}$ .

Dann:  $\phi \in H(G)$  und  $\phi' = 0$  auf  $G$ . (nachrechnen!)

$\exists c \in \mathbb{C}: e^F = c \cdot f$  auf  $G$ .

Klar:  $c \neq 0$ . 7.1  $\Rightarrow \exists a \in \mathbb{C}: c = e^a \Rightarrow f = e^{F-a}$  auf  $G$ .

(2) Sei  $h$  wie in (1),  $g := e^{\frac{1}{n}h}$ . Dann:  $g^n = e^h = f$  auf  $G$ . ■

### Satz 11.5

Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen.

(1) Ist  $F \in H(D)$ ,  $0 \in D$ ,  $F(0) = 0$  und  $F'(0) \neq 0$ , so gilt:  $0 \in (F(D))^o$

(2) Ist  $f \in H(G)$  **nicht** konstant, so ist  $f(G)$  offen.

(3) **Satz von der Gebietstreue:**

Ist  $f \in H(G)$  **nicht** konstant, so ist  $f(G)$  ein Gebiet.

### Beweis

(1)  $u := \operatorname{Re} F$ ,  $v := \operatorname{Im} F$ . 4.1  $\Rightarrow u_x(0) = v_y(0), u_y(0) = -v_x(0)$   
und  $F'(0) = u_x(0) + iv_x(0)$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} u_x(0) & u_y(0) \\ v_x(0) & v_y(0) \end{pmatrix} = u_x(0)^2 + v_x(0)^2 = |F'(0)|^2 \neq 0$$

Umkehrsatz (Analysis II)  $\Rightarrow \exists U \subseteq D: 0 \in U$ ,  $U$  ist offen und  $F(U)$  ist offen.  $F(0) = 0 \Rightarrow 0 \in F(U) \Rightarrow \exists \delta > 0: U_\delta(0) \subseteq F(U) \subseteq F(D)$ .

(2) Sei  $w_0 \in f(D)$ . z.z.  $\exists \delta > 0: U_\delta(w_0) \subseteq f(D)$ .

O.B.d.A.  $w_0 = 0$ .  $\exists z_0 \in D: f(z_0) = w_0 = 0$ . O.B.d.A.  $z_0 = 0$ .

Also:  $f(0) = 0$ .  $\exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon(z_0) \subseteq D$ .

10.4  $\Rightarrow f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \ \forall z \in U_\varepsilon(0)$ ;

$f(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$ . 11.3  $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: a_n \neq 0$

$m := \min\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0\} (\geq 1)$   
 Dann:  $f(z) = z^m(a_m + a_{m+1}z + a_{m+2}z^2 + \dots) = z^m \cdot g(z) \forall z \in U_\varepsilon(0)$ ,  
 wobei  $g \in H(U_\varepsilon(0))$  und  $g(0) = a_m \neq 0$ .  
 $g$  stetig  $\Rightarrow \exists r \in (0, \varepsilon) : g(z) \neq 0 \forall z \in U_r(0)$   
 $U_r(0)$  ist ein EG  $\stackrel{11.4}{\Rightarrow} \exists h \in H(U_r(0)) : h^m = g$  auf  $U_r(0)$   
 Def.  $F \in H(U_r(0))$  durch  $F(z) := zh(z)$ .  
 Dann:  $F(0) = 0, F'(z) = h(z) + zh'(z)$   
 also  $F'(0)^m = h(0)^m = g(0) \neq 0$ , also  $F'(0) \neq 0$ .  
 Weiter:  $F^m = f$  auf  $U_r(0)$ . (1)  $\Rightarrow \exists R > 0 : U_R(0) \subseteq F(U_r(0))$ .  
 $\delta := R^m$ . Sei  $w \in U_\delta(0)$ . 1.5  $\Rightarrow \exists v \in \mathbb{C} : v^m = w$   
 Dann:  $|v|^m = |w| < \delta = R^m \Rightarrow |v| < R \Rightarrow v \in U_R(0) \subseteq F(U_r(0))$   
 $\Rightarrow \exists z \in U_r(0) \subseteq D$  mit:  $F(z) = v$ .  
 $\Rightarrow w = v^m = F(z)^m = f(z) \in f(D)$   
 Also:  $U_\delta(0) \subseteq f(D)$

(3) 3.6  $\Rightarrow f(G)$  ist zusammenhängend  $\stackrel{(2)}{\Rightarrow} f(G)$  ist ein Gebiet.

### Satz 11.6 (Maximum-, Minimumsprinzip (I))

$f \in H(G)$  sei nicht konstant.

- (1)  $|f|$  hat auf  $G$  kein lokales Maximum
- (2) Ist  $Z(f) = \emptyset$ , so hat  $|f|$  auf  $G$  kein lokales Minimum.

#### Beweis

- (1) Sei  $z_0 \in G$  und  $\epsilon > 0$  so, dass  $U_\epsilon(z_0) \subseteq G$ .  $w_0 := f(z_0)$ . 11.5  $\Rightarrow f(U_\epsilon(z_0))$  ist offen.  
 $w_0 \in f(U_\epsilon(z_0)) \Rightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(w_0) \subseteq f(U_\epsilon(z_0))$ .  
 $\exists w \in U_\delta(w_0) : |w| > |w_0|$ .  $\exists z \in U_\epsilon(z_0) : w = f(z)$ .  
 Dann:  $|f(z)| = |w| > |w_0| = |f(z_0)|$
- (2) Wende (1) auf  $\frac{1}{f}$  an. ■

### Satz 11.7 (Maximum-, Minimumsprinzip (II))

$G$  sei beschränkt,  $f \in C(\overline{G})$  und es sei  $f \in H(G)$ .

- (1)  $|f(z)| \leq \max_{w \in \partial G} |f(w)| \forall z \in \overline{G}$
- (2) Ist  $f(z) \neq 0 \forall z \in G$ , so gilt  $|f(z)| \geq \min_{w \in \partial G} |f(w)| \forall z \in \overline{G}$

#### Beweis

- (1)  $\overline{G}$  ist kompakt, 3.3  $\Rightarrow \exists w_0 \in \overline{G} : |f(z)| \leq |f(w_0)| \forall z \in \overline{G}$   
 Fall 1:  $w_0 \in \partial G$ : fertig  
 Fall 2:  $w_0 \in G$ . Dann:  $|f(z)| \leq |f(w_0)| \forall z \in G$ . 11.6  $\Rightarrow f$  ist konstant auf  $G$ .  $f$  stetig  $\Rightarrow f$  konstant auf  $\overline{G} \Rightarrow$  Beh.

## 11. Weitere Eigenschaften holomorpher Funktionen

(2) Fall 1:  $f(z) \neq 0 \forall z \in \overline{G}$ . Wende (1) auf  $\frac{1}{f}$  an.

Fall 2:  $\exists z_0 \in \overline{G} : f(z_0) = 0$  Vor.  $\Rightarrow z_0 \in \partial G \Rightarrow \min_{w \in \partial G} |f(w)| = 0 \Rightarrow$  Behauptung. ■

### Definition

Sei  $A \subseteq G$ .  $A$  heißt **diskret in  $G$**  :  $\iff A$  hat in  $G$  keinen Häufungspunkt. ( $\iff \forall z_0 \in G \exists r = r(z_0) > 0 : A \cap \dot{U}_r(z_0) = \emptyset$ )

*Aufgabe:* Ist  $A$  diskret in  $G$ , so ist  $A$  höchstens abzählbar.

### Satz 11.8

Sei  $f \in H(G)$  und  $f$  nicht identisch 0 auf  $G$ .

Dann ist  $Z(f)$  diskret in  $G$ .

Ist  $z_0 \in Z(f)$ , so existiert ein  $m \in \mathbb{N}$  und ein  $g \in H(G)$ :

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \quad \forall z \in G \text{ und } g(z_0) \neq 0$$

$m$  und  $g$  sind eindeutig bestimmt.  $m$  heißt **Ordnung** (oder **Vielfachheit**) der Nullstelle  $z_0$  von  $f$ . ("  $f$  hat eine  $m$ -fache Nullstelle")

### Beweis

11.3  $\Rightarrow Z(f)$  ist diskret in  $G$ . O.B.d.A:  $z_0 = 0$ .  $\exists r > 0 : U_r(0) \subseteq G$ .

10.4  $\Rightarrow f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \quad \forall z \in U_r(0)$ .  $f(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$

11.2  $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0$ ,  $m := \min\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0\}$

Dann:  $f(z) = z^m \underbrace{(a_m + a_{m+1}z + \dots)}_{:=\varphi(z)} = z^m \varphi(z) \quad \forall z \in U_r(0)$

Es ist  $\varphi \in H(U_r(0))$  und  $\varphi(0) = a_m \neq 0$

Definiere  $g : G \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z^m} & , z \neq 0 \\ a_m & , z = 0 \end{cases}$$

Dann:  $f(z) = z^m g(z) \quad \forall z \in G$ ,  $g(0) = a_m \neq 0$ ,  $g = \varphi$  auf  $U_r(0)$ , also  $g \in H(G)$  ■

*Aufgabe:* Sei  $f$  wie in 11.8,  $z_0 \in G$  und  $m \in \mathbb{N}$ . Dann:

$f$  hat in  $z_0$  eine  $m$ -fache Nullstelle  $\iff f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$  und  $f^{(m)}(z_0) \neq 0$

### Satz 11.9

Sei  $f \in H(G)$ .

(1) Sei  $g : G \times G \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch

$$g(z, w) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} & , z \neq w \\ f'(z) & , z = w \end{cases}$$

Dann ist  $g$  stetig.



(2) Ist  $z_0 \in G$ , so existiert ein  $\epsilon > 0$ :

$$U_\epsilon(z_0) \subseteq G \text{ und } (*) |f(z) - f(w)| \geq \frac{1}{2}|f'(z_0)||z - w| \quad \forall z, w \in U_\epsilon(z_0)$$

Ist  $f'(z_0) \neq 0$ , so ist  $f$  auf  $U_\epsilon(z_0)$  injektiv und  $f^{-1}$  ist auf  $f(U_\epsilon(z_0))$  stetig.

### Beweis

(1) Es genügt zu zeigen: ist  $z_0 \in G$ , so ist  $g$  stetig in  $(z_0, z_0) \in G \times G$ ,  $\epsilon > 0$ :  $|g(z, w) - f'(z_0)| < \epsilon$

Sei  $\epsilon > 0$ .  $\exists \delta > 0$ :  $U_\delta(z_0) \subseteq G$  und  $|f'(w) - f'(z_0)| \leq \epsilon \quad \forall w \in U_\delta(z_0)$

Seien  $z, w \in U_\delta(z_0)$ .  $\gamma(t) := z + t(w - z)$  ( $t \in [0, 1]$ ), dann :

$$Tr(\gamma) \subseteq U_\delta(z_0).$$

$U_\delta(z_0)$  ist ein Sterngebiet und  $f'$  hat auf  $U_\delta(z_0)$  die Stammfunktion  $f$ .

$$9.2 \Rightarrow \int_{\gamma} f'(\xi) d\xi = f(w) - f(z) \Rightarrow f(w) - f(z) = \int_0^1 f'(\gamma(t))(w - z) dt$$

$$\text{Ist } z \neq w \Rightarrow g(z, w) = \int_0^1 f'(\gamma(t)) dt$$

$$\text{Ist } z = w \Rightarrow \gamma(t) = z \quad \forall t \in [0, 1]$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f'(\gamma(t)) dt = \int_0^1 f'(z) dt = f'(z) = g(z, z)$$

$$\text{Also: } g(z, w) = \int_0^1 f'(\gamma(t)) dt$$

Dann:

$$|g(z, w) - f'(z_0)| = \left| \int_0^1 f'(\gamma(t)) - f'(z_0) dt \right| \leq \int_0^1 \underbrace{|f'(\gamma(t)) - f'(z_0)|}_{\leq \epsilon} dt \leq \epsilon$$

(2) Aus (1):  $|g(z, w)| \rightarrow |f'(z_0)|$  ( $(z, w) \rightarrow (z_0, z_0)$ )  $\Rightarrow \exists \epsilon > 0$ :  $U_\epsilon(z_0) \subseteq G$  und  $|g(z, w)| \geq \frac{1}{2}|f'(z_0)| \quad \forall z, w \in U_\epsilon(z_0) \Rightarrow (*)$

Sei  $f'(z_0) \neq 0$ .  $(*) \Rightarrow f$  ist injektiv auf  $U_\epsilon(z_0)$

Seien  $\lambda, \mu \in f(U_\epsilon(z_0))$ ;  $z := f^{-1}(\lambda)$ ,  $w := f^{-1}(\mu)$

$$|f^{-1}(\lambda) - f^{-1}(\mu)| = |z - w| \leq \frac{2}{|f'(z_0)|} |\lambda - \mu|$$

■

### Satz 11.10

Sei  $f \in H(G)$ ,  $z_0 \in G$  und  $f'(z_0) \neq 0$

Dann existiert ein  $r > 0$ :  $U_r(z_0) \subseteq G$ ,

(1)  $f$  ist auf  $U_r(z_0)$  injektiv und  $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in U_r(z_0)$

(2)  $f(U_r(z_0))$  ist ein Gebiet

(3)  $f^{-1} \in H(f(U_r(z_0)))$  und  $(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \quad \forall w \in f(U_r(z_0))$

### Beweis

(1) Sei  $\epsilon > 0$  wie in 11.9(2),  $f'$  ist stetig  $\Rightarrow \exists r \in (0, \epsilon)$ :  $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in U_r(z_0)$

(2) folgt aus 11.5

## 11. Weitere Eigenschaften holomorpher Funktionen

- (3) Sei  $w_0 \in f(U_r(z_0))$  und  $(w_n)$  eine Folge in  $f(U_r(z_0)) \setminus \{w_0\}$  mit:  $w_n \rightarrow w_0$ .  
 $z_n := f^{-1}(w_n)$ ,  $\tilde{z} := f^{-1}(w_0)$ . 11.4  $\Rightarrow f^{-1}$  stetig in  $w_0 \Rightarrow z_n \rightarrow \tilde{z}$   
 $\Rightarrow \frac{f^{-1}(w_n) - f^{-1}(w_0)}{w_n - w_0} = \frac{z_n - \tilde{z}}{f(z_n) - f(\tilde{z})} \rightarrow \frac{1}{f'(\tilde{z})} = \frac{1}{f'(f^{-1}(w_0))}$   
 Also ist  $f^{-1}$  in  $w_0$  komplex differenzierbar und  $(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w_0))}$  ■

### Satz 11.11

Sei  $f \in H(G)$  auf  $G$  injektiv. Dann:

- (1)  $Z(f') = \emptyset$
- (2)  $f^{-1} \in H(f(G))$  und  $(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$  für  $\forall w \in f(G)$

### Beweis

- (1) Annahme: Sei  $z_0 \in G$  mit  $f'(z_0) = 0$ ,  $w_0 := f(z_0)$ . O.B.d.A.  $w_0 = 0 = z_0$ . Also  $f(0) = f'(0) = 0$   
 11.8  $\Rightarrow \exists m \geq 2; \exists g \in H(G)$  mit  $f(z) = z^m g(z) \forall z \in G$  und  $g(0) \neq 0$ .  
 11.3  $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : f(z) \neq 0 \forall z \in U_\varepsilon(0)$  und  $U_\varepsilon(0) \subseteq G$ . Also  $g(z) \neq 0 \forall z \in U_\varepsilon(0)$ . 11.4  $\Rightarrow \exists \psi \in H(U_\varepsilon(0))$  mit  $\psi^m = g$  auf  $U_\varepsilon(0)$ . Def.  $\varphi \in H(U_\varepsilon(0))$  durch  $\varphi(z) := z\psi(z)$  ( $z \in U_\varepsilon(0)$ ).  
 Dann:  $\varphi^m = f$  auf  $U_\varepsilon(0)$ ;  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi'(z) = \psi(z) + z\psi'(z)$ ,  $\varphi'(0)^m = \psi(0)^m = g(0) \neq 0$   
 also  $\varphi'(0) \neq 0$ . O.B.d.A.  $\varphi'(z) \neq 0 \forall z \in U_\varepsilon(0)$ . Klar:  $\varphi$  ist auf  $U_\varepsilon(0)$  injektiv.  
 $0 = \varphi(0) \in \varphi(U_\varepsilon(0))$ . 11.5  $\Rightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(0) \subseteq \varphi(U_\varepsilon(0))$  11.10  $\Rightarrow \varphi^{-1} \in H(\varphi(U_\varepsilon(0)))$ , 11.5  $\Rightarrow U := \varphi^{-1}(U_\delta(0))$  ist offen. Klar:  $0 \in U$ ,  $U \subseteq U_\varepsilon(0)$  und  $(*)\varphi(U) = U_\delta(0)$ .  
 Sei  $z_1 \in U \setminus \{0\}$ ;  $a_1 := \varphi(z_1)$ ;  $w_1 := f(z_1) \neq 0$ .  $a_1^m = \varphi(z_1)^m = f(z_1) = w_1 \Rightarrow a_1 \neq 0$ . 1.5  $\Rightarrow a_1$  ist eine  $m$ -te Wurzel von  $w_1$ ;  $m \geq 2 \Rightarrow \exists a_2 : a_2^m = a_1^m = w_1$  mit  $a_1 \neq a_2$ .  
 $a_2^m = w_1 = \varphi(z_1)^m$ ;  $|a_2| = |\varphi(z_1)| \stackrel{(*)}{<} \delta \Rightarrow a_2 \in \varphi(U) \Rightarrow \exists z_2 \in U : a_2 = \varphi(z_2) \Rightarrow f(z_2) = \varphi(z_2)^m = a_2^m = w_1 = a_1^m = f(z_1) \Rightarrow f(z_1) = f(z_2)$  Widerspruch zu  $f$  injektiv!
- (2) folgt aus (1) und 11.10 ■

### Definition

Sei  $z_0 \in G$ ;  $a > 0$ ;  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, a] \rightarrow \mathbb{C}$  seien glatte Wege und

$\gamma_j'(t) \neq 0 \forall t \in [0, a], j = 1, 2$  und  $\gamma_1(0) = z_0 = \gamma_2(0)$ .  $\angle(\gamma_1, \gamma_2, z_0) := \arg \gamma_2'(0) - \arg \gamma_1'(0) = \arg \frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)}$  Orientierter Winkel von  $\gamma_1$  nach  $\gamma_2$  in  $z_0$ .

### Satz 11.12 (Winkeltreue)

Sei  $f \in H(G)$ ,  $z_0 \in G$  und  $f'(z_0) \neq 0$ . Dann:

$$\angle(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2, f(z_0)) = \angle(\gamma_1, \gamma_2, z_0)$$

### Beweis

$\Gamma_j := f \circ \gamma_j$  ( $j = 1, 2$ ).  $\Gamma_j'(t) = f'(\gamma_j(t))\gamma_j'(t)$   $\Gamma_j'(0) = f'(z_0)\gamma_j'(0) \neq 0$ .

$\exists b \in (0, a)$  mit  $\Gamma_j'(t) \neq 0 \forall t \in [0, b]$ .

$$\angle(\Gamma_1, \Gamma_2, f(z_0)) = \arg \frac{\Gamma_2'(0)}{\Gamma_1'(0)} = \arg \frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)} = \angle(\gamma_1, \gamma_2, z_0)$$
 ■

**Definition**

- (1)  $G_1$  und  $G_2$  seien Gebiete in  $\mathbb{C}$ . Ist  $f \in H(G_1)$  injektiv auf  $G_1$  und gilt  $f(G_1) = G_2$ , so heißt  $f$  eine **konforme Abbildung** von  $G_1$  auf  $G_2$ .
- (2) Ist  $f : G \rightarrow G$  eine konforme Abbildung von  $G$  auf  $G$ , so heißt  $f$  ein **Automorphismus** von  $G$ :  
 $f \in \text{Aut}(G)$ .

**Satz 11.13**

$G_1, G_2$  seien Gebiete,  $f : G_1 \rightarrow G_2$  sei eine konforme Abbildung von  $G_1$  auf  $G_2$  und  $G_1$  sei ein Elementargebiet. Dann ist  $G_2$  ebenfalls ein Elementargebiet.

**Beweis**

Sei  $g \in H(G_2)$ ,  $h := (g \circ f)f'$ . Dann  $h \in H(G_1)$ ,  $G_1$  EG  $\Rightarrow \exists$  eine Stammfunktion  $\Phi$  von  $h$ ,  $F := \Phi \circ f^{-1}$  ist dann SF von  $g$ ,  $g$  war beliebig  $\Rightarrow G_2$  ebenfalls EG. ■



## 12. Das Schwarzsche Lemma

$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ .

### Satz 12.1 (Schwarzsches Lemma)

Es sei  $f \in H(\mathbb{D})$ ,  $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$  und  $f(0) = 0$ .

Dann:

$$|f(z)| \leq |z| \forall z \in \mathbb{D} \text{ und } |f'(0)| \leq 1 (*).$$

Ist  $|f'(0)| = 1$  oder  $|f(z_0)| = |z_0|$  für ein  $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ , so ex. ein  $\lambda \in \partial\mathbb{D}$  mit:  
 $f(z) = \lambda z$ .

### Beweis

O.b.d.A.:  $f \not\equiv 0$ . 11.8  $\Rightarrow \exists g \in H(\mathbb{D}) : f(z) = zg(z)$ . Sei  $z \in \mathbb{D}$ . Wähle  $r > 0$  so, dass  $r < 1$  und  $|z| < r$ . Dann:  $|g(z)| \stackrel{11.7}{\leq} \max_{|w|=r} |g(w)| = \max_{|w|=r} \frac{|f(w)|}{|w|} \leq \frac{1}{r} \stackrel{r \rightarrow 1}{\Rightarrow} |g(z)| \leq 1$ . Also  $|g(z)| \leq 1 \forall z \in \mathbb{D}$ .  
 $f'(z) = g(z) + zg'(z) \Rightarrow f'(0) = g(0)$  Also gilt (\*). Es sei  $|f'(0)| = 1$  oder  $|f(z_0)| = |z_0|$  für ein  $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\} \Rightarrow |g(0)| = 1$  oder  $|g(z_0)| = 1 \Rightarrow |g|$  hat ein Maximum in  $\mathbb{D}$ . 11.6  $\Rightarrow$   $g$  konstant  $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} : g(z) = \lambda \forall z \in \mathbb{D}$ . Dann:  $f(z) = \lambda z$ . Es ist  $|\lambda| = |g(0)| = 1$  oder  $|\lambda| = |g(z_0)| = 1 \Rightarrow \lambda \in \partial\mathbb{D}$ . ■

### Definition

Sei  $a \in \mathbb{D}$  und  $S_a \in H(\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{a}\})$  def. durch  $S_a(z) := \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$

### Beachte 1

$|\frac{1}{a}| = \frac{1}{|a|} > 1$ , also  $\frac{1}{a} \notin \overline{\mathbb{D}}$ .  $S_a(a) = 0$ ,  $S_a(0) = -a$ .

### Satz 12.2

Sei  $a \in \mathbb{D}$ . Dann:

- (1)  $S_a$  ist auf  $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{a}\}$  injektiv.
- (2)  $S_a^{-1} = S_{-a}$  auf  $\overline{\mathbb{D}}$
- (3)  $S_a(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$
- (4)  $S_a(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$
- (5) Ist  $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ , so ist  $\lambda S_a \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ .

**Beweis**

(1) Nachrechnen.

$$(2) \quad w = S_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \iff z - a = w - \bar{a}zw \iff z(1 + \bar{a}w) = w + a \iff z = \frac{w+a}{1+\bar{a}w} = S_{-a}(w)$$

$$(3) \quad \text{Sei } |z| = 1, \text{ also } z = e^{it} (t \in \mathbb{R}). |S_a(z)| = \left| \frac{e^{it}-a}{1-\bar{a}e^{it}} \right| = \left| \frac{e^{it}-a}{e^{it}(e^{-it}-\bar{a})} \right| = \frac{|e^{it}-a|}{|e^{it}||e^{-it}-\bar{a}|} = 1. \text{ Also:}$$

$$S_a(\partial\mathbb{D}) \subseteq \partial\mathbb{D}, \partial\mathbb{D} \stackrel{(2)}{=} S_a(\underbrace{S_{-a}(\partial\mathbb{D})}_{\substack{\text{wie oben} \\ \subseteq \partial\mathbb{D}}}) \subseteq S_a(\partial\mathbb{D}).$$

$$(4) \quad \text{Sei } z \in \mathbb{D}. |S_a(z)| \stackrel{11.7}{\leq} \max_{|w|=1} |S_a(w)| \stackrel{(3)}{=} 1 \Rightarrow S_a(\mathbb{D}) \subseteq \bar{\mathbb{D}} \text{ Sei } z \in \mathbb{D}, w := S_a(z). \text{ Annahme:}$$

$$|w| = 1 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} |z| = |S_{-a}(w)| = 1 \text{ Wid. Also } S_a(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}. \text{ Genauso } S_{-a}(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}. \text{ Dann}$$

$$\mathbb{D} \stackrel{(2)}{=} S_a(S_{-a}(\mathbb{D})) \subseteq S_a(\mathbb{D})$$

(5) folgt aus (1) und (4). ■

**Satz 12.3**

Sei  $f \in H(\mathbb{D})$

$f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  und  $f(0) = 0 \iff \exists \lambda \in \partial\mathbb{D} : f(z) = \lambda z.$

**Beweis**

" $\Leftarrow$ ": Klar

" $\Rightarrow$ ": Dann  $f^{-1} \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ ,  $f^{-1}(0) = 0$ . Sei  $z \in \mathbb{D}$ ,  $w := f(z)$ ; dann:

$$z = f^{-1}(w), |z| = |f^{-1}(w)| \stackrel{12.1}{\leq} |w| = |f(z)| \stackrel{12.1}{\leq} |z| \text{ Also } |f(z)| = |z| \quad \forall z \in \mathbb{D}. \quad 12.1 \Rightarrow \exists \lambda \in \partial\mathbb{D} : f(z) = \lambda z \quad \forall z \in \partial\mathbb{D} \quad \blacksquare$$

**Satz 12.4**

$\text{Aut}(\mathbb{D}) = \{\lambda S_a : \lambda \in \partial\mathbb{D}, a \in \mathbb{D}\}$

**Beweis**

" $\supseteq$ ": 12.2 (5)

" $\subseteq$ ": Sei  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ ,  $a := f^{-1}(0) \in \mathbb{D}$ .  $g := f \circ S_a$ ;  $g \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  und  $g(0) = f(S_a(0)) = f(a) = 0$ .

12.3  $\Rightarrow \exists \lambda \in \partial\mathbb{D} : g(z) = \lambda z$ . Es ist  $f = g \circ S_a = \lambda S_a$  ■

# 13. Isolierte Singularitäten

Vereinbarung: In diesem Paragraphen sei stets  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $z_0 \in D$ ,  $\dot{D} := D \setminus \{z_0\}$  und  $f \in H(\dot{D})$ .

$z_0$  heißt dann eine **isolierte Singularität** von  $f$ .

## Definition

$z_0$  heißt eine **hebbare Singularität** von  $f : \Leftrightarrow \exists h \in H(D) : h = f$  auf  $\dot{D}$ . I.d. Fall ist  $h$  eindeutig bestimmt und wir sagen kurz:  $f \in H(D)$ .

## Beispiel

$D = \mathbb{C}, z_0 = 0$

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \left( z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + \dots \right) = \underbrace{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots + \dots}_{=: h(z)}$$

Dann:  $h \in H(\mathbb{C})$ .  $h = f$  auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .  $f$  hat also in 0 eine hebbare Singularität.

## Satz 13.1 (Riemannscher Hebbarkeitssatz)

$f$  hat in  $z_0$  eine hebbare Singularität  $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq D$  und  $f$  ist auf  $\dot{U}_\delta(z_0)$  beschränkt.

## Beweis

$\Rightarrow$ : klar

$\Leftarrow$ :  $M := \sup_{z \in U_\delta(z_0)} |f(z)|$ . Def:  $g : D \rightarrow \mathbb{C}$  durch:

$$g(z) := \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z) & , z \in \dot{D} \\ 0 & , z = z_0 \end{cases}$$

Für  $z \in \dot{U}_\delta(z_0) : \left| \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \right| = \left| \frac{g(z)}{z - z_0} \right| = |f(z)(z - z_0)| \leq M|z - z_0|$

$\Rightarrow g$  ist komplex db in  $z_0$ , also  $g \in H(D)$  und  $g'(z_0) = 0$ .

Fall 1:  $g = 0$  auf  $D$ . Dann:  $f = 0$  auf  $\dot{D}$

Fall 2:  $g \neq 0$  auf  $D$ . Es ist  $g(z_0) = g'(z_0) = 0$ . 11.8  $\Rightarrow \exists h \in H(D) : g(z) = (z - z_0)^2 h(z) \forall z \in D$ .

Dann:  $h = f$  auf  $\dot{D}$ . ■

**Satz 13.2**

$z_0$  ist ein **Pol** von  $f : \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}, \exists g \in H(D)$  mit:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} \quad \forall z \in \dot{D} \text{ und } g(z_0) \neq 0.$$

I. d. Fall ist  $m$  eindeutig bestimmt und heißt die **Ordnung des Pols**  $z_0$  von  $f$

**Beweis**

Seien  $m, l \in \mathbb{N}$ ,  $g, h \in H(D)$ ,  $g(z_0) \neq 0 \neq h(z_0)$  und  $\frac{g(z)}{(z - z_0)^m} = f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^l} \quad \forall z \in \dot{D}$ .

Annahme:  $m > l$ , also  $m - l \geq 1$ .  $h(z_0) \neq 0$ .  $\exists \delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq D$  und  $h(z) \neq 0 \quad \forall z \in U_\delta(z_0)$ .

Für  $z \in \dot{U}_\delta(z_0) : \frac{g(z)}{h(z)} = (z - z_0)^{m-l} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} g(z_0) = 0$ . Wid! Also:  $m \leq l$ . Analog:  $l \leq m$ . ■

**Satz 13.3**

Hat  $f$  in  $z_0$  einen Pol, so gilt:  $|f(z)| \rightarrow \infty \quad (z \rightarrow z_0)$

**Beweis**

Folgt aus 13.2

■

**Beispiele:**

(1)  $f(z) = \frac{1}{z}$ .  $f$  hat im Nullpunkt einen einfachen Pol.

(2)  $f(z) = \frac{e^z}{z^{17}}$ .  $f$  hat in 0 einen Pol der Ordnung 17.

**Definition**

$z_0$  heißt eine **wesentliche Singularität** von  $f : \Leftrightarrow z_0$  ist nicht hebbar und kein Pol von  $f$ .

**Beispiel**

$f(z) = e^{\frac{1}{z}} \quad (D = \mathbb{C}, z_0 = 0)$

$z_n := \frac{1}{n}$ ,  $f(z_n) = e^n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$ ,  $z_n \rightarrow 0$ . 13.1  $\Rightarrow 0$  ist nicht hebbar.

$w_n := \frac{i}{n} = -\frac{1}{in}$ .  $|f(w_n)| = |e^{-in}| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ,  $w_n \rightarrow 0$ . 13.3  $\Rightarrow z_0 = 0$  ist kein Pol von  $f$ .  $f$  hat also in  $z_0 = 0$  eine wesentliche Singularität.

**Satz 13.4 (Satz von Casorati-Weierstraß)**

$f$  habe in  $z_0$  eine wesentliche Singularität und es sei  $\delta > 0$  so, dass  $U_\delta(z_0) \subseteq D$ . Dann:

$$\overline{f(\dot{U}_\delta(z_0))} = \mathbb{C}$$

d.h. ist  $b \in \mathbb{C}$  und  $\varepsilon > 0$ , so existiert ein  $z \in \dot{U}_\delta(z_0) : |f(z) - b| < \varepsilon$ .



### Beweis

Sei  $b \in \mathbb{C}$  und  $\varepsilon > 0$ . Ann:  $|f(z) - b| \geq \varepsilon \forall z \in \dot{U}_\delta(z_0)$ .  $g := \frac{1}{f-b}$ . Dann:  $g \in H(\dot{U}_\delta(z_0))$  und  $|g| \leq \frac{1}{\varepsilon}$  auf  $\dot{U}_\delta(z_0)$ . 13.1  $\Rightarrow g$  hat in  $z_0$  eine hebbare Singularität. Kurz:  $g \in H(U_\delta(z_0))$

Fall 1:  $g(z_0) \neq 0$ . O.B.d.A:  $g(z) \neq 0 \forall z \in U_\delta(z_0)$ .  $f = \frac{1}{g} + b$  auf  $\dot{U}_\delta(z_0) \Rightarrow f$  hat in  $z_0$  eine hebbare Singularität.

Fall 2:  $g(z_0) = 0$ . 11.8  $\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}, \varphi \in H(U_\delta(z_0)) : g(z) = (z - z_0)^m \varphi(z) \forall z \in U_\delta(z_0)$  und  $\varphi(z_0) \neq 0$ . O.B.d.A:  $\varphi(z) \neq 0 \forall z \in U_\delta(z_0)$ . Def:  $\Psi : D \rightarrow \mathbb{C}$  durch:

$$\Psi(z) = \begin{cases} \frac{1}{\varphi(z)} & , z \in U_\delta(z_0) \\ (z - z_0)^m (f(z) - b) & , z \in \dot{D} \end{cases}$$

$\Psi$  ist wohldefiniert: Für  $z \in \dot{U}_\delta(z_0) : \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{(z - z_0)^m}{g(z)} = (z - z_0)^m (f(z) - b)$ . Dann:  $\Psi \in H(D)$  und  $\Psi(z_0) = \frac{1}{\varphi(z_0)} \neq 0$ .

$h(z) := \Psi(z) + b(z - z_0)^m (z \in D)$ . Klar:  $h \in H(D)$

$h(z_0) = \Psi(z_0) \neq 0$ . Weiter:  $\frac{h(z)}{(z - z_0)^m} = \frac{\Psi(z)}{(z - z_0)^m} + b = f(z) - b + b = f(z) \forall z \in \dot{D} \xrightarrow{13.2} f$  hat in  $z_0$  einen Pol. Wid! ■

### Satz 13.5 (Klassifikation)

Die isolierte Singularität  $z_0$  von  $f$  ist

- (1) hebbbar  $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq D$  und  $f$  ist auf  $U_\delta(z_0)$  beschränkt.
- (2) ein Pol von  $f \Leftrightarrow |f(z)| \rightarrow \infty (z \rightarrow z_0)$
- (3) wesentlich  $\Leftrightarrow \forall \delta > 0$  mit  $U_\delta(z_0) \subseteq D$  gilt:  $\overline{f(\dot{U}_\delta(z_0))} = \mathbb{C}$

### Beweis

(1) 13.1

(2)  $\Rightarrow$ : 13.3

$\Leftarrow$ : Vorr. und 13.1  $\Rightarrow z_0$  nicht hebbbar. Vorr. und 13.4  $\Rightarrow z_0$  nicht wesentlich

(3)  $\Rightarrow$ : 13.4

$\Leftarrow$ : Vorr. und 13.1  $\Rightarrow z_0$  ist nicht hebbbar. Vorr. und 13.3  $\Rightarrow z_0$  ist kein Pol! ■

### Beispiele:

(i)  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ . Übung:  $f(\dot{U}_\delta(0)) = \mathbb{C} \setminus \{0\} \forall \delta > 0$ .

(ii)  $f(z) = \sin \frac{1}{z}$ . Übung:  $f(\dot{U}_\delta(0)) = \mathbb{C} \forall \delta > 0$ .



# 14. Laurententwicklung

Für  $z_0 \in \mathbb{C}$ :  $U_\infty(z_0) := \mathbb{C}$ ,  $\dot{U}_\infty(z_0) = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ ,  $\frac{1}{0} := \infty$ . Erinnerung: Satz 9.5: Sei  $\gamma$  ein stückweise glatter Weg in  $\mathbb{C}$ ,  $\varphi \in C(\text{Tr}(\gamma))$  und  $g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w-z} dw$  ( $z \in \mathbb{C} \setminus \text{Tr}(\gamma)$ ). Dann:  $g \in H(\mathbb{C} \setminus \text{Tr}(\gamma))$ .

## Satz 14.1

Seien  $0 \leq r < R \leq \infty$ ;  $A := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$  und  $f \in H(A)$ . Für  $s \in (r, R)$  sei  $\gamma_s(t) := se^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  und  $J(s) := \int_{\gamma_s} f(z) dz$ . Dann ist  $J$  konstant auf  $(r, R)$ .

## Beweis

$g(z) := zf(z)$  ( $z \in A$ ). Dann:  $f(z) = \frac{g(z)}{z}$  und  $g \in H(A)$ .

$$J(s) = \int_{\gamma_s} \frac{g(z)}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{g(se^{it})}{se^{it}} se^{it} dt = \int_0^{2\pi} ig(se^{it}) dt$$

$$J \text{ ist auf } (r, R) \text{ db und } J'(s) = \int_0^{2\pi} i \frac{d}{ds} g(se^{it}) dt = \int_0^{2\pi} ig'(se^{it}) e^{it} dt = \frac{1}{s} \int_0^{2\pi} g'(se^{it}) se^{it} dt = \frac{1}{s} \int_0^{2\pi} g'(\gamma_s(t)) \gamma_s'(t) dt = \frac{1}{s} \int_{\gamma_s} g'(z) dz \stackrel{8.5}{=} 0 \Rightarrow J(s) \text{ konstant.} \quad \blacksquare$$

## Satz 14.2 (Laurententwicklung)

Sei  $A$  wie in 14.1 und  $f \in H(A)$ . Dann existieren eindeutig bestimmte Funktionen  $g \in H(U_R(0))$  und  $h \in H(U_{\frac{1}{r}}(0))$  mit:

(\*)  $f(z) = g(z) + h(\frac{1}{z}) \quad \forall z \in A$  und  $h(0) = 0$

(\*) heißt die Laurentzerlegung von  $f$ ,  $g$  heißt Nebenteil von  $f$  und die Funktion  $z \rightarrow h(\frac{1}{z})$  ist der Hauptteil von  $f$ .

## Beispiel

$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$   $A = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ( $r = 0, R = \infty$ ). Es gilt:

$f(z) = 1 + (e^{\frac{1}{z}} - 1)$ , also  $g(z) = 1$ ,  $h(z) = e^z - 1$

## Beweis

1. Eindeutigkeit: es sei  $g, g_1 \in H(U_R(0))$ ,  $h, h_1 \in H(U_{\frac{1}{r}}(0))$ ;  $h_1(0) = 0 = h(0)$  und  $g(z) + h(\frac{1}{z}) = f(z) = g_1(z) + h_1(\frac{1}{z}) \quad \forall z \in A$ .

$$G := g - g_1 \in H(U_R(0)), \quad H := h_1 - h \in H(U_{\frac{1}{r}}(0))$$

$\Rightarrow G(z) = H(\frac{1}{z}) \quad \forall z \in A$  Dann ist  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , definiert durch

$$F(z) = \begin{cases} G(z) & (|z| < R) \\ H(\frac{1}{z}) & (|z| > r) \end{cases} \quad \text{auf } \mathbb{C} \text{ wohldefiniert. } F \in H(\mathbb{C}).$$

Sei  $(z_n)$  eine Folge in  $\mathbb{C}$  und  $|z_n| \rightarrow \infty$ . Dann  $(\frac{1}{z_n}) \rightarrow 0$  und  $z_n > r \quad \forall n \geq n_0$ .  $F(z_n) =$

## 14. Laurententwicklung

$$H\left(\frac{1}{z_n}\right) = h_1\left(\frac{1}{z_n}\right) - h\left(\frac{1}{z_n}\right) \rightarrow h_1(0) - h(0) = 0$$

Also  $F(z) \rightarrow 0$  ( $|z| \rightarrow \infty$ ) Somit:

$\exists \varrho > 0 : |F(z)| \leq 1 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus U_\varrho(0)$ .  $F$  stetig auf  $\overline{U_\varrho(0)}$   $\Rightarrow F$  ist auf  $\mathbb{C}$  beschränkt. 10.2  $\Rightarrow F$  ist auf  $\mathbb{C}$  konstant; wegen  $F(z) \rightarrow 0$  ( $z \rightarrow \infty$ ) folgt:  $F \equiv 0$

2. Existenz: fehlt hier nicht was ? Doch! ■

### Definition

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  eine Folge in  $\mathbb{C}$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$  und  $A \subseteq \mathbb{C}$ . Eine Reihe der Form  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  heißt eine **Laurentreihe**.

Diese Reihe heißt in  $z \in \mathbb{C}$  (absolut) konvergent :  $\iff \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$  konvergieren (absolut).

In diesem Fall:  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$ . Die Laurentreihe heißt auf  $A$  (lokal) gleichmäßig konvergent :  $\iff \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$  konvergieren auf  $A$  (lokal) gleichmäßig.

### Satz 14.3

Sei  $0 \leq r < R \leq \infty$ ,  $A := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$  und  $f \in H(A)$ .

Dann hat  $f$  auf  $A$  die **Laurententwicklung**  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ . Die Laurentreihe konvergiert auf  $A$  absolut und lokal gleichmäßig. Die Koeffizienten  $a_n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) sind eindeutig bestimmt. Ist  $r < \rho < R$  und  $\gamma(t) := z_0 + \rho e^{it}$   $t \in [0, 2\pi]$ , so gilt:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  heißt **Nebenteil** von  $f$ ,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n} = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots$  heißt der **Hauptteil** von  $f$ .

### Beweis

O.B.d.A:  $z_0 = 0$ . 14.2  $\Rightarrow \exists g \in H(U_R(0)), \exists h \in H(U_{\frac{1}{r}}(0)) : f(z) = g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right) \quad \forall z \in A$  und  $h(0) = 0$ . 10.4  $\Rightarrow g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \forall z \in U_R(0)$  und  $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad \forall z \in U_{\frac{1}{r}}$ . Setze  $a_{-n} := b_n$  für  $n \geq 1$ . Dann:  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ . 5.4  $\Rightarrow$  die Laurentreihe konvergiert auf  $A$  absolut und lokal gleichmäßig.

14.2  $\Rightarrow g$  und  $h$  sind eindeutig bestimmt

5.4  $\Rightarrow a_n$  eindeutig bestimmt für  $n \in \mathbb{Z}$ . Sei  $n \in \mathbb{Z}$ ;  $\gamma(t) := \rho e^{it}$  ( $t \in [0, 2\pi]$ )  $r < \rho < R$ . Sei  $w \in \text{Tr}(\gamma)$ :

$$\frac{f(w)}{w^{n+1}} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu w^{\nu-n-1}.$$

Die letzte Reihe konvergiert auf  $\text{Tr}(\gamma)$  gleichmäßig.

$$8.4 \Rightarrow \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w^{n+1}} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu} \underbrace{\int_{\gamma} w^{\nu-n-1}}_{= \begin{cases} 0 & , \nu \neq n \\ 2\pi i & , \nu = n \end{cases}}$$

#### Satz 14.4

$D \subseteq \mathbb{C}$  sei offen,  $z_0 \in D$ ,  $\dot{D} := D \setminus \{z_0\}$  und  $f \in H(\dot{D})$  ( $z_0$  ist also eine isolierte Singularität). Sei  $R > 0$  so, daß  $U_R(z_0) \subseteq D$ .  $f$  hat also, nach 14.3, auf  $\dot{U}_R(z_0)$  die Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (z \in \dot{U}_R(z_0))$$

- (1)  $f$  hat in  $z_0$  eine hebbare Singularität  $\iff a_{-n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (2)  $f$  hat in  $z_0$  einen Pol der Ordnung  $m \in \mathbb{N}$   $\iff a_{-m} \neq 0, a_{-n} = 0 \quad \forall n > m$
- (3)  $f$  hat in  $z_0$  eine wesentliche Singularität  $\iff a_{-n} \neq 0$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$

#### Definition

Vorraussetzung wie in 14.4.  $\text{Res}(f, z_0) := a_{-1}$  heißt das **Residuum** von  $f$  in  $z_0$ .

Ist  $0 < \rho < R$  und  $\gamma(t) = z_0 + \rho e^{it}$  ( $t \in [0, 2\pi]$ ), so folgt aus 14.3:

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$$

#### Beweis

(1) Klar.

(2) O.B.d.A:  $z_0 = 0$ .

“ $\Rightarrow$ “: 13.2  $\Rightarrow \exists g \in H(D) : f(z) = \frac{g(z)}{z^m} \quad \forall z \in \dot{D}$  und  $g(z_0) \neq 0$

$$10.4 \Rightarrow g(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \quad \forall z \in U_R(0) \Rightarrow f(z) = \frac{c_0}{z^m} + \frac{c_1}{z^{m-1}} + \dots + \frac{c_{m-1}}{z} + \sum_{n=m}^{\infty} c_n z^{n-m}$$

$\forall z \in \dot{U}_R(0)$ . Eindeutigkeit der Laurententwicklung  $\Rightarrow c_0 = a_{-m}$ , also  $a_{-m} = g(0) \neq 0$ ; weiter:  $a_{-n} = 0 \quad \forall n > m$

“ $\Leftarrow$ “:  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \frac{a_{-1}}{z} + \dots + \frac{a_{-m}}{z^m} \quad \forall z \in \dot{U}_R(0)$

$$\Rightarrow z^m f(z) = \underbrace{a_{-m} + \dots + a_{-1} z^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+m}}_{=: g(z)} \quad \forall z \in \dot{U}_R(0)$$

Es ist  $g \in H(U_R(0))$ ,  $g(0) = a_{-m} \neq 0$  und  $f(z) = \frac{g(z)}{z^m} \quad \forall z \in \dot{U}_R(0)$ . 13.2  $\Rightarrow f$  hat einen Pol der Ordnung  $m$ .

(3) folgt aus (1) und (2). ■

#### Beispiele:

(i)  $f(z) = \frac{1}{z-1}$  Laurententwicklung in  $\mathbb{C} \setminus \{1\} : f(z) = \frac{1}{z-1}$ ,  $\text{Res}(f, 1) = 1$

(ii)  $f(z) = \frac{1}{z-1}$  Laurententwicklung in  $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < \infty\}$ .

$$\text{Für } |z| > 1 : \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}$$

#### 14. Laurententwicklung

$$\begin{aligned}
 \text{(iii) } f(z) &= \frac{\cos(z)}{z^3}. \text{ Laurententwicklung in } \mathbb{C} \setminus \{0\}. f(z) = \frac{1}{z^3} \left( 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \dots \right) = \\
 &\underbrace{\frac{1}{z^3} - \frac{1}{2z}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\frac{z}{4!} - \frac{z^3}{6!} + - \dots}_{\text{Nebenteil}, \text{ Res}(f, 0) = -\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

# 15. meromorphe Funktionen, Moebiustransformationen

## Definition

Es sei  $\infty$  irgendein Element  $\notin \mathbb{C}$ .  $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  heißt die **Vollebene**.  $\infty$  heißt “**der Punkt**  $\infty$ “. Wir definieren:

$$\begin{aligned} z + \infty &:= \infty + z := \infty - z := z - \infty := \infty \quad \forall z \in \mathbb{C}; \\ \infty z &:= z \infty := \infty \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; \quad \frac{z}{\infty} := 0 \quad (z \in \mathbb{C}), \quad \frac{\infty}{0} := \infty \quad (z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}) \end{aligned}$$

$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\}$  heißt **Riemannsche Zahlenkugel**.  $N := (0, 0, 1)$  wird als **Nordpol** bezeichnet.

## Definition

$\sigma : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  durch

$$\begin{aligned} \sigma(N) &:= \infty \\ \sigma(x_1, x_2, x_3) &:= \frac{x_1}{1-x_3} + i \frac{x_2}{1-x_3} \quad \text{für } (x_1, x_2, x_3) \in S \setminus \{N\} \end{aligned}$$

$\sigma$  heißt **stereographische Projektion**. Anschaulich (nachrechnen!): Ist  $P \in S \setminus \{N\}$ , so trifft die Gerade durch  $N$  und  $P$  die komplexe Ebene im Punkt  $\sigma(P)$ .

### Satz 15.1

$\sigma$  ist injektiv auf  $S$  und  $\sigma(S) = \hat{\mathbb{C}}$ .  $\sigma^{-1} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow S$  ist gegeben durch  $\sigma^{-1}(\infty) = N$ ,  $\sigma^{-1}(z) = \frac{1}{1+|z|^2}(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, |z|^2)$ , falls  $z \in \mathbb{C}$ .

### Satz 15.2 (Der chordale Abstand)

Seien  $z, w \in \hat{\mathbb{C}}$ .  $d(z, w) := \|\sigma^{-1}(z) - \sigma^{-1}(w)\|$  heißt der **chordale Abstand** von  $z$  und  $w$  (wobei  $\|\cdot\|$  = eukl. Norm im  $\mathbb{R}^3$ ).

Für  $z, w, u \in \hat{\mathbb{C}} : d(z, w) \geq 0$ ;  $d(z, w) = 0 \Leftrightarrow z = w$ ;  $d(z, w) = d(w, z)$ ;  $d(z, w) \leq d(z, u) + d(u, w)$  ( $\Delta$ -Ungl.)

$(\hat{\mathbb{C}}, d)$  ist also ein metrischer Raum.

Für  $z, w \in \mathbb{C} : d(z, \infty) = (1 + |z|^2)^{-\frac{1}{2}}$ ;  $d(z, w) = |z - w|(1 + |z|^2)^{-\frac{1}{2}}(1 + |w|^2)^{-\frac{1}{2}}$

## Beweis

Übung! ■

**Definition**

Sei  $(z_n)$  eine Folge in  $\hat{\mathbb{C}}$  und  $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ .  $(z_n)$  **konvergiert in  $\hat{\mathbb{C}}$  gegen  $z_0$**  : $\Leftrightarrow d(z_n, z_0) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$

Aus 15.2 folgt:

**Satz 15.3**

Sei  $(z_n)$  eine Folge in  $\hat{\mathbb{C}}$ ,  $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$

$$(1) \quad d(z_n, z_0) \rightarrow 0 \Leftrightarrow |z_n - z_0| \rightarrow 0$$

$$(2) \quad d(z_n, \infty) \rightarrow 0 \Leftrightarrow |z_n| \rightarrow \infty$$

Ersetzt man  $|z - w|$  ( $z, w \in \mathbb{C}$ ) durch  $d(z, w)$  ( $z, w \in \hat{\mathbb{C}}$ ), so lassen sich die topologischen Begriffe der §en 2,3 auch in  $\hat{\mathbb{C}}$  definieren.

**Beispiele:**

(1) Sei  $A \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ . Eine Funktion  $f : A \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  heißt stetig in  $z_0 \in A$  : $\Leftrightarrow$  für jede Folge  $(z_n)$  in  $A$  mit  $d(z_n, z_0) \rightarrow 0$  gilt:  $d(f(z_n), f(z_0)) \rightarrow 0$ .

(2)  $A \subseteq \hat{\mathbb{C}}$  heißt offen : $\Leftrightarrow \forall a \in A \exists \delta = \delta(a) > 0 : \{z \in \hat{\mathbb{C}} : d(z, a) < \delta\} \subseteq A$ .

**Konvention**

Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen.  $z_0 \in D$ .  $f \in H(D \setminus \{z_0\})$  und  $z_0$  sei ein Pol von  $f$ . Wegen 13.5 und 15.3 setzt man  $f(z_0) := \infty$ . Dann ist  $f$  auf ganz  $D$  definiert, also  $f : D \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  und in jedem  $z \in D$  stetig.

**Definition**

Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  und  $f : D \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  und  $P(f) := \{z \in D : f(z) = \infty\}$ .  $f$  heißt auf  $D$  **meromorph** : $\Leftrightarrow$

(i)  $P(f)$  ist in  $D$  diskret

(ii)  $f|_{D \setminus P(f)} \in H(D \setminus P(f))$

(iii) jedes  $z_0 \in P(f)$  ist ein Pol von  $f$ .

$$M(D) := \{f : D \rightarrow \hat{\mathbb{C}} : f \text{ ist auf } D \text{ meromorph}\}$$

**Beispiele:**

(1)  $P(f) = \emptyset$  zugelassen. Dann:  $H(D) \subseteq M(D)$ .

(2) Seien  $f, g \in H(D)$ ,  $g \neq 0$  auf  $D$ . Dann  $\frac{f}{g} \in M(D)$ .  $P(\frac{f}{g}) \subseteq Z(g)$ .

(3)  $f(z) = \frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$ ,  $P(f) = \{\frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ . 0 ist kein Pol von  $f$ , 0 ist HP der Pole  $\frac{1}{k\pi}$ . Also:  $f \notin M(\mathbb{C})$ , aber  $f \in M(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ .

**Moebustransformationen:**

Seien  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  und es gelte  $ad - bc \neq 0$ . Eine Abbildung der Form  $T(z) := \frac{az+b}{cz+d}$  heißt eine

**Moebustransformation (MB)** ( $z \in \hat{\mathbb{C}}$ ). Also:  $T : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ . Die Matrix  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \Phi_T$  heißt die zu  $T$  gehörende **Koeffizientenmatrix**.



**Bemerkungen:**

- (1) Die Bedingung  $ad - bc \neq 0$  sichert, dass  $T$  nicht konstant ist.
- (2) Sei  $c = 0 \Rightarrow d \neq 0 \Rightarrow T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ .  $T(\infty) = \infty$ ,  $T|_{\mathbb{C}} \in H(\mathbb{C})$ .
- (3)  $c \neq 0$ .  $T(\infty) = \frac{a}{c}$ ;  $T(-\frac{d}{c}) = \infty$ .  $-\frac{d}{c}$  ist ein Pol der Ordnung 1 von  $T$ ;  $T \in M(\mathbb{C})$ .

$\mathcal{M}$  := Menge aller Möbiustransformationen.

**Satz 15.4**

Seien  $T, S \in \mathcal{M}$ .

- (1)  $T(\hat{\mathbb{C}}) = \hat{\mathbb{C}}$ ;  $T$  ist stetig und injektiv auf  $\hat{\mathbb{C}}$ ;  $T^{-1} \in \mathcal{M}$ ;  $T^{-1}(w) = \frac{-dw+b}{cw-a}$
- (2)  $T \circ S \in \mathcal{M}$ .  $\Phi_{T \circ S} = \Phi_T \cdot \Phi_S$

$\mathcal{M}$  ist also eine Gruppe.

**Beweis**

Übung! ■

**spezielle Möbiustransformationen:**

$T(z) := az$  (Drehstreckung)

$T(z) := z + a$  (Translation)

$T(z) := \frac{1}{z}$  (Inversion)

**Satz 15.5**

$T \in \mathcal{M}$  lässt sich darstellen als Hintereinanderausführung von Drehstreckung, Translation und Inversion.

**Beweis**

Sei  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ .

Fall 1:  $c = 0$ . Dann  $d \neq 0$  und  $T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ . Setze  $T_1 = \frac{a}{d}z$  und  $T_2 = z + \frac{b}{d} \Rightarrow T = T_2 \circ T_1$ .

Fall 2:  $c \neq 0$ .  $T(z) = \frac{a}{c} + \frac{\frac{b}{c} - \frac{ad}{c^2}}{z + \frac{d}{c}} = \alpha + \frac{\beta}{z + \gamma}$ .  $T_1(z) := z + \gamma$ ;  $T_2(z) := \frac{1}{z}$ ;  $T_3(z) := \beta z$ ;  $T_4(z) := z + \alpha \Rightarrow T = T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$ . ■

**Satz 15.6**

Sei  $T \in \mathcal{M}$ . Dann hat  $T$  einen oder zwei Fixpunkte oder es ist  $T(z) = z$ .

**Beweis**

Sei  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

Fall 1:  $T(\infty) = \infty$ . Dann ist  $c = 0, d \neq 0 \Rightarrow T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = \alpha z + \beta$ . Sei  $z_1$  ein Fixpunkt von  $T, z_1 \neq \infty$ . Also  $z_1 = \alpha z_1 + \beta \Leftrightarrow (1 - \alpha)z_1 = \beta$ .

Fall 1.1:  $\alpha = 1 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow T(z) = z$ .

Fall 1.2:  $\alpha \neq 1 \Rightarrow z_1 = \frac{\beta}{1-\alpha}$ .

Fall 2:  $T(\infty) \neq \infty$ . Sei  $z_0 \in \mathbb{C}$ .  $T(z_0) = z_0 \Leftrightarrow az_0 + b = z_0(cz_0 + d)$  quadratische Gleichung  $\Rightarrow$  ein oder zwei Lösungen. ■

**Definition**

Seien  $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$  paarweise verschieden. Für  $z \in \hat{\mathbb{C}}$  heißt

$$DV(z, z_1, z_2, z_3) := \begin{cases} \frac{z-z_1}{z-z_3} : \frac{z_2-z_1}{z_2-z_3} & , \text{ falls } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \\ \frac{z_2-z_3}{z-z_3} & , \text{ falls } z_1 = \infty \\ \frac{z-z_1}{z-z_3} & , \text{ falls } z_2 = \infty \\ \frac{z-z_1}{z_2-z_1} & , \text{ falls } z_3 = \infty \end{cases}$$

das **Doppelverhältnis** von  $z, z_1, z_2, z_3$ .

**Satz 15.7**

Seien  $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$  wie oben.

- (1) Sind  $T_1, T_2 \in \mathcal{M}$  und gilt  $T_1(z_j) = T_2(z_j)$  ( $j = 1, 2, 3$ )  $\Rightarrow T_1 = T_2$ .
- (2) Es ist  $T(z) := DV(z, z_1, z_2, z_3)$  ( $z \in \hat{\mathbb{C}}$ ) eine Moebiustransformation.  $T$  ist die einzige Moebiustransformation mit  $T(z_1) = 0$ ;  $T(z_2) = 1$ ;  $T(z_3) = \infty$ .
- (3) Sind  $w_1, w_2, w_3 \in \hat{\mathbb{C}}$  paarweise verschieden, so existiert genau ein  $S \in \mathcal{M} : S(z_j) = w_j$  ( $j = 1, 2, 3$ )
- (4)  $DV(z, z_1, z_2, z_3) = DV(S(z), S(z_1), S(z_2), S(z_3)) \quad \forall z \in \hat{\mathbb{C}} \quad \forall S \in \mathcal{M}$  (Invarianz des Doppelverhältnisses)

**Beweis**

(1)  $T := T_2^{-1} \circ T_1$ . 15.4  $\Rightarrow T \in \mathcal{M}$ .  $T(z_j) = T_2^{-1}(T_1(z_j)) = T_2^{-1}(T_2(z_j)) = z_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ).  
15.6  $\Rightarrow T(z) = z \quad \forall z \in \hat{\mathbb{C}} \Rightarrow T_1 = T_2$ .

(2) Klar:  $T \in \mathcal{M}$ . Nachrechnen:  $T(z_1) = 0$ ;  $T(z_2) = 1$ ;  $T(z_3) = \infty$ . Eindeutigkeit folgt aus (1).

(3) Eindeutigkeit: (1). Existenz:  $T_1(z) := DV(z, z_1, z_2, z_3)$ ;  $T_2(z) := DV(z, w_1, w_2, w_3)$ .  $S := T_2^{-1} \circ T_1$ .  $S(z_1) = T_2^{-1}(T_1(z_1)) \stackrel{(2)}{=} T_2^{-1}(0) \stackrel{(1)}{=} w_1$ . Analog:  $S(z_2) = w_2$ ;  $S(z_3) = w_3$ .

(4) Übung. ■

**Kreisgleichung:**

Sei  $z_0 \in \mathbb{C}, r > 0. |z - z_0| = r \Leftrightarrow (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2 \Leftrightarrow |z|^2 - \bar{z}_0 z - z_0 \bar{z} + |z_0|^2 - r^2 = 0 \Leftrightarrow |z|^2 + \bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + \beta = 0$ , wobei  $\alpha = -z_0 \in \mathbb{C}, \beta = |z_0|^2 - r^2 \in \mathbb{R}$  und  $|\alpha|^2 - \beta = |z_0|^2 - |z_0|^2 + r^2 > 0$ , also  $\beta < |\alpha|$ .

**Geradengleichung:**

$mx + ny + d = 0$  ( $m, n, d, x, y \in \mathbb{R}$ ).  $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z; \alpha = \frac{m}{2} + i \frac{n}{2} \in \mathbb{C}, \beta := d \in \mathbb{R}. mx + ny + d = 0 \Leftrightarrow \bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + \beta = 0$ .

**Fazit:**

Sind  $\alpha \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{R}$ , so ist  $\varepsilon |z|^2 + \bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + \beta = 0$

- Die Gleichung eines Kreises, falls  $\varepsilon = 1$  und  $\beta < |\alpha|^2$
- Die Gleichung einer Geraden, falls  $\varepsilon = 0$ .

**Satz 15.8**

Sei  $T \in \mathcal{M}$ .  $T$  bildet eine Gerade (einen Kreis) auf eine Gerade oder einen Kreis ab.

**Beweis**

Die Behauptung ist klar für Drehstreckungen und Translationen. Wegen 15.5 genügt es die Behauptung für Inversionen ( $T(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ ) zu zeigen. Sei  $\varepsilon |z|^2 + \bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + \beta = 0$  die Gleichung einer Geraden oder eines Kreises und  $w = \frac{1}{\bar{z}}$ . Dann:  $\varepsilon \frac{1}{|w|^2} + \bar{\alpha} \frac{1}{w} + \alpha \frac{1}{\bar{w}} + \beta = 0 \Rightarrow \varepsilon + \bar{\alpha} \bar{w} + \alpha w + \beta |w|^2 = 0$ .

Fall 1:  $\beta = 0 \rightarrow$  Gerade.

Fall 2:  $\beta \neq 0$ . Dann:  $\frac{\varepsilon}{\beta} + \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} \bar{w} + \frac{\alpha}{\beta} w + |w|^2 = 0 \rightarrow$  Kreis. ■

**Beispiel**

Bestimme ein  $T \in \mathcal{M}$  mit:  $T(\partial \mathbb{D}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}. z_1 = 1; z_2 = i; z_3 = -1. T(z) := DV(z, 1, i, -1) = -i \frac{z-1}{z+1}$ . 15.7  $\Rightarrow T(1) = 0; T(i) = 1; T(-1) = \infty$ . 15.8  $\Rightarrow T(\partial \mathbb{D}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .



# 16. Die Umlaufzahl

## Hilfssatz:

Sei  $\sigma$  eine Menge von zsh. Teilmengen von  $\mathbb{C}$  mit  $\bigcap_{A \in \sigma} A \neq \emptyset$ . Dann ist  $\bigcup_{A \in \sigma} A$  zsh.

## Beweis

Fast wörtlich wie Hilfssatz 3 in §9. ■

## Definition

Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen.  $C \subseteq D$  heißt eine (Zusammenhang-) **Komponente** von  $D : \Leftrightarrow C$  ist zsh. und aus  $C \subseteq C_1 \subseteq D$ ,  $C_1$  zsh. folgt stets  $C = C_1$ .

## Beispiel

$D = U_1(0) \cup U_1(3)$  Dann nennt man  $U_1(0)$  und  $U_1(3)$  die Komponenten von  $D$ .

### Satz 16.1

Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $K \subseteq \mathbb{C}$  kompakt.

- (1) Ist  $C \subseteq D$  eine Komponente von  $D$ , so ist  $C$  ein Gebiet.
- (2) Sind  $C_1, C_2$  Komponenten von  $D$ , so gilt:  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$  oder  $C_1 = C_2$ .
- (3) Ist  $z_0 \in D$ , so existiert genau eine Komponente  $C$  von  $D : z_0 \in C$ .
- (4)  $\mathbb{C} \setminus K$  hat genau eine unbeschränkte Komponente.

## Beweis

- (1) Sei  $z_0 \in C$ .  $\exists \delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq D$ .  $C_1 := C \cup U_\delta(z_0) \subseteq D$ . Klar:  $C \subseteq C_1$ . HS  $\Rightarrow C_1$  zsh.  $C_1$  Komponente von  $D \Rightarrow C = C_1 \Rightarrow U_\delta(z_0) \subseteq C \Rightarrow C$  offen  $\Rightarrow C$  Gebiet.
- (2) Sei  $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ .  $C := C_1 \cup C_2$ . HS  $\Rightarrow C$  zsh. Klar:  $C_1 \subseteq C \subseteq D$ .  
 $C_1$  Komponente von  $D \Rightarrow C = C_1 \Rightarrow C_2 \subseteq C_1 \subseteq D$ .  
 $C_2$  Komponente von  $D \Rightarrow C_1 = C_2$ .
- (3)  $\sigma := \{A \subseteq D : A \text{ ist zsh., } z_0 \in A\}$ .  $z_0 \in \bigcap_{A \in \sigma} A \xrightarrow{\text{HS}} C := \bigcup_{A \in \sigma} A$  zsh. Sei  $C \subseteq C_1 \subseteq D$  und  $C_1$  zsh. Dann:  $C_1 \in \sigma \Rightarrow C_1 \subseteq C \Rightarrow C_1 = C$ .
- (4) Übung. ■

## Definition

Sei  $\gamma$  ein stückweise glatter und geschlossener Weg in  $\mathbb{C}$  und es sei  $z \notin \text{Tr}(\gamma)$ .  $n(\gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w-z}$

heißt die **Umlaufzahl** von  $\gamma$  bezüglich  $z$ .  $n(\gamma^-, z) = -n(\gamma, z)$ .

**Satz 16.2**

Sei  $\gamma$  wie oben und  $D := \mathbb{C} \setminus \text{Tr}(\gamma)$ .

- (1)  $n(\gamma, z) \in \mathbb{Z} \forall z \in D$ .
- (2) Ist  $C$  eine Komponente von  $D$ , so ist  $z \mapsto n(\gamma, z)$  auf  $C$  konstant.
- (3) Ist  $C$  die unbeschränkte Komponente von  $D$ , so gilt:  $n(\gamma, z) = 0 \forall z \in C$ .

**Beispiele:**

- (1) Sei  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, r > 0, z_0 \in \mathbb{C}$  und  $\gamma(t) := z_0 + re^{ikt} \ (t \in [0, 2\pi])$ .  $C_1 = U_r(z_0); C_2 = \mathbb{C} \setminus \overline{U_r(z_0)}$  und die Komponente von  $\mathbb{C} \setminus \text{Tr}(\gamma)$ . Sei  $z \in C_2$ . 16.2(3)  $\Rightarrow n(\gamma, z) = 0$ . Sei  $z \in C_1$ .  $n(\gamma, z) \stackrel{16.2(2)}{=} n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{ikt}} ikr e^{ikt} dt = k$ .

- (2) Sei

$$\gamma(t) := \begin{cases} t & , -2 \leq t \leq 2 \\ 2e^{i(t-2)} & , 2 < t \leq 2 + \pi \end{cases}$$

Berechne  $n(\gamma, i)$ . Sei  $\gamma_1$  wie im Bild<sup>1</sup> und  $\gamma_0(t) := 2e^{it} \ (t \in [0, 2\pi])$ .

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w-i}}_{=n(\gamma, i)} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{dw}{w-i}}_{\stackrel{16.2(3)}{=} 0} = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{dw}{w-i}}_{\stackrel{Bsp.1}{=} 1} \Rightarrow n(\gamma, i) = 1.$$

**Beweis**

- (1) O.B.d.A  $\gamma$  glatt.  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, z \in D$  und  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch  $h(t) := \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z} ds$

$\stackrel{8.2}{\Rightarrow} h$  ist auf  $[a, b]$  differenzierbar und  $h'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}$ .

Sei  $H(t) := e^{-h(t)}(\gamma(t) - z)$ . Nachrechnen:  $H' = 0$  auf  $[a, b]$ . Also existiert ein  $c \in \mathbb{C}$  mit  $H(t) = c \ \forall t \in [a, b]$ .

$$\stackrel{t=a}{\Rightarrow} c = e^{-h(a)}(\gamma(a) - z) = \gamma(a) - z$$

$$\Rightarrow e^{h(t)} = \frac{\gamma(t)-z}{\gamma(a)-z} \ \forall t \in [a, b]$$

$$\stackrel{t=b}{\Rightarrow} e^{h(b)} = \frac{\gamma(b)-z}{\gamma(a)-z} \stackrel{\gamma \text{ geschlossen}}{=} 1$$

$$\stackrel{6.3}{\Rightarrow} \exists k \in \mathbb{Z} : h(b) = 2k\pi i$$

$$\Rightarrow 2k\pi i = h(b) = \int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z} ds = \int_{\gamma} \frac{1}{w-z} dw = 2\pi i n(\gamma, z) \Rightarrow k = n(\gamma, z)$$

- (2) Definiere  $f : C \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $f(z) = n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w-z} \stackrel{9.5}{\Rightarrow} f \in H(C)$ .  $C$  ist ein Gebiet.

$\stackrel{11.5}{\Rightarrow} f(C)$  ist ein Gebiet oder  $f$  ist auf  $C$  konstant.  $\stackrel{(1)}{\Rightarrow} f(C) \subseteq \mathbb{Z}$ . Also ist  $f$  auf  $C$  konstant.

- (3) Sei  $f$  wie im Beweis von (2). Wähle  $R > 0$ , so daß  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq U_R(0)$ .  $\stackrel{(2)}{\Rightarrow} \exists c \in \mathbb{C} : f(z) = c \ \forall z \in C$ . Sei  $z \in C$ , so daß  $|z| > 2R$  (geht, da  $C$  unbeschränkt).

Für  $w \in \text{Tr}(\gamma)$  gilt:  $|w - z| \geq |z| - |w| > |z| - R > R > 0$ .

<sup>1</sup> $\gamma_1$  läuft von  $(2, 0)$  aus nach  $(-2, 0)$  und dann den Halbkreis mit Radius 2 und Mittelpunkt  $(0, 0)$  wieder zurück nach  $(2, 0)$

Damit:  $|c| = |f(z)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{dw}{w-z} \right| \leq \frac{L(\gamma)}{2\pi(|z|-R)}.$

Also:  $|c| \leq \frac{L(\gamma)}{2\pi(|z|-R)} \quad \forall z \in C \text{ mit } |z| > 2R. \quad C \text{ unbeschränkt} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \text{Behauptung.}$  ■





# 17. Der Residuensatz und Folgerungen

## Satz 17.1 (Residuensatz)

$G$  sei ein Elementargebiet, es seien  $z_1, \dots, z_k \in G$  ( $z_j \neq z_l$  für  $j \neq l$ ) und es sei  $f \in H(G \setminus \{z_1, \dots, z_k\})$ . Jedes  $z_j$  ist also eine isolierte Singularität von  $f$ . Weiter sei  $\gamma$  ein geschlossener, stückweise glatter Weg mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$ .

Dann:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^k n(\gamma, z_j) \text{Res}(f, z_j)$$

## Beweis

$\forall j \in \{1 \dots k\}$  existiert ein  $R_j > 0$ :  $\overline{U_{R_j}(z_j)} \subseteq G$  und  $\overline{U_{R_j}(z_j)} \cap \overline{U_{R_l}(z_l)} = \emptyset$  ( $j \neq l$ ). Sei  $j \in \{1 \dots k\}$ .

$\xRightarrow{14.4}$   $f$  hat auf  $U_{R_j}(z_j)$  die Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)} (z - z_j)^n + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}^{(j)} (z - z_j)^{-n}}_{\varphi_j(z)},$$

wobei  $\varphi_j \in H(\mathbb{C} \setminus \{z_j\})$

Definiere  $g \in H(G \setminus \{z_1, \dots, z_k\})$  durch  $g(z) = f(z) - \sum_{j=1}^k \varphi_j(z)$ .

Dann hat  $g$  in  $z_j$  eine hebbare Singularität ( $j = 1 \dots k$ ). Also  $g \in H(G)$ .  $G$  ist ein Elementargebiet  $\Rightarrow g$  hat eine Stammfunktion auf  $G \xrightarrow{8.6} \int_{\gamma} g(z) dz = 0 \Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^k \int_{\gamma} \varphi_j(z) dz$ .

Noch zu zeigen:  $\int_{\gamma} \varphi_j(z) dz = 2\pi i n(\gamma, z_j) a_{-1}^{(j)}$  ( $j = 1 \dots k$ ).

Die Reihe für  $\varphi_j$  konvergiert lokal gleichmäßig (14.3).

$\xRightarrow{8.4} \int_{\gamma} \varphi_j(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}^{(j)} \int_{\gamma} (z - z_j)^{-n} dz$ . Sei  $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$ . Die Funktion  $\frac{1}{(z - z_j)^n}$  hat auf  $G \setminus \{z_j\}$

die Stammfunktion  $\frac{(z - z_j)^{-n+1}}{-n+1}$

$\xRightarrow{8.6} \int_{\gamma} (z - z_j)^{-n} dz = 0 \quad \forall n \in \{2, 3, 4, \dots\}$

$\Rightarrow \int_{\gamma} \varphi_j dz = a_{-1}^{(j)} \int_{\gamma} \frac{1}{(z - z_j)} dz = a_{-1}^{(j)} n(\gamma, z_j) 2\pi i$  ■

## Folgerung 17.2

$G \subseteq \mathbb{C}$  sei ein Elementargebiet, es sei  $f \in H(G)$  und  $\gamma$  sei ein geschlossener, stückweise glatter Weg mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$ .

Dann:

## (1) Cauchyscher Integralsatz für Elementargebiete

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

## (2) Cauchysche Integralformel

$$n(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \forall z \in G \setminus \text{Tr}(\gamma)$$

**Beweis**

(1) Alle  $z_j$  in 17.1 sind hebbare Singularitäten.  $\stackrel{14.4}{\Rightarrow} \text{Res}(f(z_j)) = 0 \Rightarrow \text{Behauptung.}$

(2) Sei  $z_0 \in G \setminus \text{Tr}(\gamma)$ .  $g \in H(G \setminus \{z_0\})$  sei definiert durch  $g(w) := \frac{f(w)}{w-z_0}$ . Sei  $r > 0$ , so dass

$$U_r(z_0) \subseteq G$$

$$\stackrel{10.4}{\Rightarrow} f(w) = a_0 + a_1(w - z_0) + \dots \quad \forall w \in U_r(z_0)$$

$$\Rightarrow g(w) = \frac{a_0}{w-z_0} + a_1 + a_2(w - z_0) + \dots \quad \forall w \in \dot{U}_r(z_0)$$

$$\Rightarrow \text{Res}(g, z_0) = a_0 = f(z_0)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(w) dw \stackrel{17.1}{=} n(\gamma, z_0)f(z_0) \quad \blacksquare$$

Für die Berechnung von Residuen an Polstellen

**Satz 17.3**

Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $z_0 \in D$ ,  $f \in H(D \setminus \{z_0\})$  und  $f$  habe in  $z_0$  einen Pol der Ordnung  $m \geq 1$ . Es existiert also (siehe 13.2) ein  $g \in H(D)$  mit:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m} \quad \forall z \in D \setminus \{z_0\}$$

und  $g(z_0) \neq 0$ . Dann:

$$(1) \text{Res}(f, z_0) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

$$(2) \text{ Ist } m = 1, \text{ so ist } \text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$$

**Beweis**

(1) Sei  $r > 0$  so, dass  $U_r(z_0) \subseteq D$ .

$$\stackrel{10.4}{\Rightarrow} g(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + \dots + b_m(z - z_0)^m + \dots \quad \forall z \in U_r(z_0)$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{b_0}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{b_{m-1}}{(z-z_0)} + b_m + b_{m+1}(z - z_0) + \dots \quad \forall z \in \dot{U}_r(z_0) \Rightarrow \text{Res}(f, z_0) =$$

$$b_{m-1} \stackrel{10.4}{=} \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

(2) Aus (1) folgt:  $\text{Res}(f, z_0) = g(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) \quad \blacksquare$

**Beispiel**

(1)  $f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+1)}$  hat in  $z = i$  und in  $z = -1$  jeweils einen Pol der Ordnung 1. Also:

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i)f(z) = \frac{1}{i+1} = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}; \quad \text{Res}(f, -1) = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$$

- (2)  $f(z) = \frac{1}{(z-i)^3 z}$  hat in  $z = i$  einen Pol der Ordnung 3 und in  $z = 0$  einen Pol der Ordnung 1. Hier ist  $g(z) = \frac{1}{z}$ .  $g'(z) = -\frac{1}{z^2}$ ,  $g''(z) = \frac{2}{z^3} \Rightarrow \text{Res}(f, i) = \frac{2}{i^3 2!} = i$

#### Satz 17.4 (Das Argumentenprinzip)

$G \subseteq \mathbb{C}$  sei ein Elementargebiet, es sei  $f \in M(G)$ ,  $f$  habe in  $G$  genau die Pole  $b_1, \dots, b_m$  (jeder Pol sei so oft aufgeführt, wie seine Ordnung angibt),  $f$  habe in  $G$  genau die Nullstellen  $a_1, \dots, a_n$  (jede Nullstelle sei so oft aufgeführt, wie ihre Ordnung angibt) und  $\gamma$  sei ein stückweise glatter und geschlossener Weg mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G \setminus \{b_1, \dots, b_m, a_1, \dots, a_n\}$ . Dann:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^n n(\gamma, a_j) - \sum_{j=1}^m n(\gamma, b_j)$$

**Bemerkung:** (1) in 17.4 ist  $\{b_1, \dots, b_m\} = \emptyset$  oder  $\{a_1, \dots, a_n\} = \emptyset$  zugelassen. I.d.Fall:

$$\sum_{j=1}^m n(\gamma, b_j) = 0 \text{ oder } \sum_{j=1}^n n(\gamma, a_j) = 0$$

- (2)  $n(\gamma, a_j) = n(\gamma, b_k)$  ( $j = 1, \dots, n$ ,  $k = 1, \dots, m$ ). Dann:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \text{Anzahl der Nullstellen von } f - \text{Anzahl der Polstellen von } f \text{ (jeweils gezählt mit Vielfachheiten!)}$$

#### Beispiel

$$f(z) = \frac{z}{(z-i)^2} \quad n = 1, a_n = 0, m = 2, b_1 = b_2 = i; \gamma(t) = 2e^{it} \quad t \in [0, 2\pi]. \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 1 - 2 = -1$$

#### Beweis

(von 17.4) Sei  $\beta_1, \dots, \beta_p$  die paarweise verschiedenen Pole von  $f$  ( $p \leq m$ ) und  $\alpha_1, \dots, \alpha_q$  die paarweise verschiedenen Nullstellen ( $q \leq n$ ).

$$h := \frac{f'}{f}.$$

Dann:  $h \in H(G \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_p\})$ .

Dann:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} h(z) dz \stackrel{17.1}{=} \sum_{j=1}^q n(\gamma, \alpha_j) \text{Res}(h, \alpha_j) + \sum_{j=1}^p n(\gamma, \beta_j) \text{Res}(h, \beta_j).$$

Sei  $\alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_q\}$ ,  $\beta \in \{\beta_1, \dots, \beta_p\}$ ,  $\nu$  = Ordnung der Nullstelle von  $f$  an  $\alpha$  und  $\mu$  = Ordnung der Polstelle  $\beta$  von  $f$ .

Zu zeigen:  $\text{Res}(h, \alpha) = \nu$  und  $\text{Res}(h, \beta) = -\mu$ .

$\stackrel{11.8}{=} \exists \delta > 0 : U_{\delta}(\alpha) \subseteq G$ ,  $\exists \varphi \in H(U_{\delta}(\alpha))$  und  $f(z) = (z - \alpha)^{\nu} \varphi(z) \quad \forall z \in U_{\delta}(\alpha)$  und  $\varphi(z) \neq 0 \quad \forall z \in U_{\delta}(\alpha)$ .

Dann:  $f'(z) = \nu(z - \alpha)^{\nu-1} \varphi(z) + (z - \alpha)^{\nu} \varphi'(z) \quad \forall z \in U_{\delta}(\alpha)$

$$\Rightarrow h(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\nu}{z - \alpha} + \underbrace{\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}}_{\text{holomorph auf } U_{\delta}(\alpha)} \quad \forall z \in U_{\delta}(\alpha) \Rightarrow \text{Res}(h, \alpha) = \nu.$$

Analog:  $\text{Res}(h, \beta) = -\mu$  (statt 11.8 nimmt man 13.2)

#### Folgerungen 17.5

Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet,  $z_0 \in G$ ,  $r > 0$ ,  $\overline{U_r(z_0)} \subseteq G$ ,  $\gamma(t) = z_0 + re^{it} \quad (t \in [0, 2\pi])$  und  $f, g \in H(G)$ .

Sei  $N_f :=$  Anzahl der Nullstellen von  $f$  in  $U_r(z_0)$  (gezählt mit Vielfachheiten!).

$$(1) \text{ Ist } f(z) \neq 0 \forall z \in \text{Tr}(\gamma) \Rightarrow N_f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

(2) **Satz von Rouché**

Gilt (\*)  $|g(z) - f(z)| < |f(z)| \forall z \in \text{Tr}(\gamma)$ , so gilt  $N_f = N_g$

**Beweis**

(1)  $\exists R > r : \overline{U_r(z_0)} \subseteq \overline{U_R(z_0)} \subseteq G$ . Also:  $\overline{U_r(z_0)} \subseteq U_R(z_0)$ .  $U_R(z_0)$  ist ein Elementargebiet. Seien  $a_1, \dots, a_n$  die Nullstellen von  $f$  in  $U_R(z_0)$ . (gezählt mit Vielfachheiten).

$$\stackrel{17.4}{\Rightarrow} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^n \underbrace{n(\gamma, a_j)}_{\stackrel{16.2}{=} \begin{cases} 1 & , a_j \in U_r(z_0) \\ 0 & , a_j \notin U_r(z_0) \end{cases}}$$

(2) Für  $s \in [0, 1] : h_s := f + s(g - f) \in H(G)$ ;  $N(s) := N_{h_s}$ . Aus (\*) folgt  $h_s(z) \neq 0 \forall s \in [0, 1] \forall z \in \text{Tr}(\gamma)$ .

$$\text{Aus (1): } N(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h'_s(z)}{h_s(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z) + s(g'(z) - f'(z))}{f(z) + s(g(z) - f(z))} dz$$

$\Rightarrow$  die Funktion  $s \mapsto N(s)$  ist stetig. Wegen  $N(s) \in \mathbb{N}_0 \forall s \in [0, 1]$ :  $N(s)$  ist konstant. Also  $N_f = N(0) = N(1) = N_g$  ■

**Satz 17.6 (Satz von Hurwitz)**

$G \subseteq \mathbb{C}$  sei ein Gebiet.  $(f_n)$  sei eine Folge in  $H(G)$  und  $(f_n)$  konvergiert auf  $G$  lokal gleichmäßig gegen eine Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ . ( $\stackrel{10.5}{\Rightarrow} f \in H(G)$ ).

Dann:

- (1) Ist  $Z(f_n) = \emptyset \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow Z(f) = \emptyset$  oder  $f \equiv 0$
- (2) Sind alle  $f_n$  auf  $G$  injektiv  $\Rightarrow f$  ist auf  $G$  injektiv oder  $f$  ist auf  $G$  konstant.

**Beweis**

(1) Sei  $f \not\equiv 0$  auf  $G$ ;  $z_0 \in G$ ,  $r > 0$  so, dass  $\overline{U_r(z_0)} \subseteq G$  und  $f(z) \neq 0 \forall z \in \overline{U_r(z_0)} \setminus \{z_0\}$ .

$\gamma(t) = z_0 + re^{it}$  ( $t \in [0, 2\pi]$ ).  $(f_n)$  konvergiert auf  $\text{Tr}(\gamma)$  gleichmäßig gegen  $f$ .  $\stackrel{10.5}{\Rightarrow} (f'_n)$  konvergiert auf  $\text{Tr}(\gamma)$  gleichmäßig gegen  $f'$ .

Übung:  $(\frac{1}{f_n})$  konvergiert auf  $\text{Tr}(\gamma)$  gleichmäßig gegen  $\frac{1}{f}$ .

Fazit:  $(\frac{f'_n}{f_n})$  konvergiert auf  $\text{Tr}(\gamma)$  gleichmäßig gegen  $(\frac{f'}{f})$ .

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'_n}{f_n} dz}_{\stackrel{17.5}{N_{f_n}=0}} \rightarrow \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} dz}_{\stackrel{17.5}{N_f}}$$

Also:  $N_f = 0$ . Somit:  $f(z_0) \neq 0$

(2) Sei  $z_0 \in G$ .  $g_n = f_n - f_n(z_0)$ ,  $g := f - f(z_0)$ .  $\tilde{G} := G \setminus \{z_0\}$ . Dann:

$(g_n)$  konvergiert auf  $\tilde{G}$  lokal gleichmäßig gegen  $g$ .  $g_n(z) \neq 0 \forall z \in \tilde{G}$

(1)  $\Rightarrow g \equiv 0$  oder  $g(z) \neq 0 \forall z \in \tilde{G} \Rightarrow f$  ist auf  $G$  konstant oder  $f(z) \neq f(z_0) \forall z \in G \setminus \{z_0\}$  ■

**Satz 17.7**

Sei  $R(x, y) = R(x + iy) = R(z)$  eine rationale Funktion ohne Pole auf  $\partial\mathbb{D}$ . Weiter sei  $R_1(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)$  und  $M := \{z \in \mathbb{D} : z \text{ ist ein Pol von } R_1\}$  (endlich)

Dann:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = 2\pi i \sum_{z \in M} \text{Res}(R_1, z)$$

**Beweis**

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{ie^{it}} R\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}, \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right) ie^{it} dt$$

$$= \int_{\gamma} R_1(z) dz, \text{ wobei } \gamma(t) = ie^{it} \ (t \in [0, 2\pi]).$$

$$\text{Also: } \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \int_{\gamma} R_1(z) dz \stackrel{17.1}{=} 2\pi i \sum_{z \text{ Pol von } R_1} \underbrace{n(\gamma, z)}_{= \begin{cases} 1 & , z \in M \\ 0 & , z \notin M \end{cases}} \text{Res}(R_1, z). \quad \blacksquare$$

**Satz 17.8**

$Z$  und  $N$  seien Polynome.  $R := \frac{Z}{N}$  habe auf  $\mathbb{R}$  keine Pole und es gelte (\*)  $\text{grad } N \geq \text{grad } Z + 2$  ( $\implies \int_{\mathbb{R}} R(x) dx$  konvergiert absolut). Weiter sei  $M := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0, z \text{ ist Pol von } R\}$ .

Dann:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{z \in M} \text{Res}(R, z)$$

**Beweis**

(\*)  $\implies \exists m \geq 0 \exists c > 0 : |R(z)| \leq \frac{m}{|z|^2} \forall z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| > c. \quad (**)$

Sei  $\delta > c$  so gross, dass alle Pole von  $R$  in  $U_{\delta}(0)$  liegen.

$\gamma_1(t) := t \ (t \in [-\delta, \delta]); \ \gamma_2(t) := \delta e^{it} \ (t \in [0, \pi]) \ \gamma := \gamma_1 \oplus \gamma_2.$

$$\int_{\gamma} R(z) dz = \int_{\gamma_1} R(z) dz + \int_{\gamma_2} R(z) dz.$$

$$\int_{\gamma_1} R(z) dz = \int_{-\delta}^{\delta} R(t) dt \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} R(t) dt \ (\delta \rightarrow \infty).$$

Sei  $z \in \text{Tr}(\gamma_2)$ . Dann:  $|z| = \delta > 0$ , also nach (\*\*):  $|R(z)| \leq \frac{m}{|z|^2} = \frac{m}{\delta^2} \implies \left| \int_{\gamma_2} R(z) dz \right| \leq$

$$\frac{m}{|\delta|^2} L(\gamma_2) \leq \frac{m\pi\delta}{\delta^2} = \frac{m\pi}{\delta}$$

$$\implies \int_{\gamma_2} R(z) dz \rightarrow 0 \ (\delta \rightarrow \infty). \text{ Dann: } \int_{\gamma} R(z) dz \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx \ (\delta \rightarrow \infty). \quad 17.1 \implies \int_{\gamma} R(z) dz =$$

$$2\pi i \sum_{z \text{ Pol von } R} \underbrace{n(\gamma, z)}_{= \begin{cases} 1 & , z \in M \\ 0 & , z \notin M \end{cases}} \text{Res}(R, z). \quad \blacksquare$$



## 18. Der Satz von Montel

### Satz 18.1 (Satz von Montel)

Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $(f_n)$  eine Folge in  $H(D)$  und es gelte mit einem  $c \geq 0$ :  $|f_n(z)| \leq c \forall z \in D \forall n \in \mathbb{N}$ . (\*)

Dann enthält  $(f_n)$  eine auf  $D$  lokal gleichmäßig konvergierende Teilfolge.

### Beweis

Wegen (\*) und des Satzes von Arzelà-Ascoli (Ana3) genügt es zu zeigen:

Zu  $\epsilon > 0$  und  $z_0 \in D$  existiert ein  $\delta > 0$ :  $|f_n(z) - f_n(w)| < \epsilon \forall n \in \mathbb{N} \forall z, w \in U_\delta(z_0)$

Sei  $\epsilon > 0$  und  $z_0 \in D$ .  $\exists r > 0 : \overline{U_{2r}(z_0)} \subseteq D$

$\gamma(t) := z_0 + 2re^{it} \ (t \in [0, 2\pi])$

$\delta := \frac{1}{2} \min\{\frac{\epsilon r}{2c}, 2r\}$ .

Sei  $n \in \mathbb{N}, z, w \in U_\delta(z_0)$ . Für  $\lambda \in \text{Tr}(\gamma)$ :  $|\lambda - z|, |\lambda - w| \geq r$

$$\implies \frac{|f_n(\lambda)|}{|\lambda - z||\lambda - w|} \leq \frac{c}{r^2}$$

$$\text{Dann: } |f_n(z) - f_n(w)| \stackrel{9.4}{=} \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{f_n(\lambda)}{\lambda - z} - \frac{f_n(\lambda)}{\lambda - w} d\lambda \right|$$

$$= \frac{|z-w|}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{f_n(\lambda)}{(\lambda-z)(\lambda-w)} d\lambda \right| \leq \frac{|z-w|}{2\pi} \frac{c}{r^2} 2\pi 2r = \frac{2c}{r} |z-w|$$

$$= \frac{2c}{r} |z - z_0 + z_0 - w| \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \frac{2c}{r} (|z - z_0| + |w - z_0|) < \frac{2c}{r} 2\delta$$

$$\leq \frac{2c}{r} \frac{\epsilon r}{2c} = \epsilon.$$





# 19. Der Riemannsche Abbildungssatz

## Definition

Zwei Gebiete  $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{C}$  heissen **konform äquivalent** ( $G_1 \sim G_2$ ) :  $\iff \exists f \in H(G_1)$ :  $f(G_1) = G_2$ ,  $f$  ist auf  $G_1$  injektiv.

„ $\sim$ “ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Gebiete in  $\mathbb{C}$ .

### Satz 19.1 (Riemannscher Abbildungssatz)

Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet.

Dann:  $G \sim \mathbb{D} \iff G \neq \mathbb{C}$  und  $G$  ist ein Elementargebiet.

## Beweis

„ $\implies$ “:

10.2 (Satz von Liouville)  $\implies G \neq \mathbb{C}$

11.13  $\implies G$  ist ein Elementargebiet.

„ $\impliedby$ “: nach 19.5.

## Definition

Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet.  $G$  hat die Eigenschaft (W) :  $\iff \forall f \in H(G)$  mit  $Z(f) = \emptyset \exists g \in H(G)$  :  $g^2 = f$  auf  $G$ .

**Beachte:** Elementargebiete haben die Eigenschaft (W) (siehe 11.4)

### Lemma 19.2

$G_1, G_2 \subseteq \mathbb{C}$  seien Gebiete, es gelte  $G_1 \sim G_2$  und  $G_1$  habe die Eigenschaft (W). Dann:  $G_2$  hat die Eigenschaft (W).

## Beweis

Übung. ■

### Lemma 19.3

$G \subseteq \mathbb{C}$  sei ein Gebiet mit der Eigenschaft (W) und es sei  $G \neq \mathbb{C}$ . Dann existiert ein Gebiet  $G^*$ :

$$0 \in G^* \subseteq \mathbb{D} \text{ und } G \sim G^* \text{ (} G^* \text{ hat also die Eigenschaft (W))}$$

**Beweis**

$G \neq \mathbb{C} \implies \exists c \in \mathbb{C} : c \notin G$ . Dann:  $f(z) = z - c$  hat keine Nullstelle in  $G$ . ( $f \in H(G)$ )

(W)  $\implies \exists g \in H(G) : g^2 = f$  auf  $G$ . Für  $z_1, z_2 \in G$ :

(+) aus  $g(z_1) = \pm g(z_2)$  folgt  $f(z_1) = f(z_2)$ , also  $z_1 = z_2$ .

Insbesondere:  $g$  ist injektiv auf  $G$ .  $G_1 := g(G)$ . Also  $G_1 \sim G$ .

Sei  $a \in G_1$ .  $\exists r > 0 : U_r(a) \in G_1$ .

Sei  $\omega \in G_1$ .

Annahme:  $-\omega \in G_1$ .

$\exists z_1, z_2 \in G : g(z_1) = \omega = -g(z_2)$ . (+)  $\implies z_1 = z_2 \implies \omega = 0 \implies g(z_1)^2 = 0 \implies f(z_1) = 0$ . Widerspruch.

Also:  $-\omega \notin G_1$

Insbesondere:  $0 \notin G_1, -a \notin G_1$ .

Definiere  $\varphi \in H(G_1)$  durch  $\varphi(w) = \frac{1}{w+a}$ . (Wohl definiert und holomorph)

Übung:  $\varphi$  injektiv.

$G_2 := \varphi(G_1) \implies G_2 \sim G_1$ , also:  $G \sim G_2$ .

Sei  $\nu \in G_2 \implies \exists \omega \in G_1 : \nu = \varphi(\omega) = \frac{1}{\omega+a}$ .

Annahme:  $|\omega + a| < r$ . Dann:  $|\omega - a| < r \implies -\omega \in U_r(a) \subseteq G_1$ . Widerspruch.

Also:  $|\omega + a| \geq r$ .

$\implies |r| \leq \frac{1}{r}$ .  $G_2$  also beschränkt.

Mit einer Abbildung  $z \mapsto z + \alpha$ : (Translation)

$\exists$  Gebiet  $G_3 : G_2 \sim G_3, 0 \in G_3, G_3$  beschränkt. Somit:  $G \sim G_3$ .

Mit einer geeigneten Abbildung  $z \mapsto \delta z$  ( $\delta > 0$ ):  $\exists$  Gebiet  $G^* : G^* \sim G_3, 0 \in G^*, G^* \subseteq \mathbb{D}$ .

Somit  $G \sim G^*$ . ■

**Lemma 19.4**

Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet mit der Eigenschaft (W). Es gelte  $0 \in G \subseteq \mathbb{D}$  und es sei  $G \neq \mathbb{D}$ .

Dann existiert  $\varphi \in H(G) : \varphi(0) = 0$ ,  $\varphi$  ist auf  $G$  injektiv.  $\varphi(G) \subseteq \mathbb{D}^1$  und  $|\varphi'(0)| > 1$ .

**Beweis**

$G \neq \mathbb{D} \implies \exists a \in \mathbb{D} : a \notin G$ .  $f(z) := \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$ .

$f \in H(G)$ , 12.4  $\implies f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ .  $a \notin G$ .  $f(a) = 0$  (einzige Nullstelle).  $f$  hat in  $G$  keine Nullstelle.

(W)  $\implies \exists g \in H(G) : g^2 = f$  auf  $G$ .  $|g|^2 = |f| \stackrel{12.4}{<} 1$ , also  $|g| < 1$  auf  $G$ . D.h.:  $g(G) \subseteq \mathbb{D}$ . Dann:  $c = g(0) \in \mathbb{D}$ .  $h(z) := \frac{z-c}{\bar{c}z-1}$ ,  $\varphi := h \circ g$ . Klar:  $\varphi \in H(G)$ ,  $\varphi(0) = h(g(0)) = h(c) = 0$ ,  $\varphi$  ist injektiv auf  $G$ ,  $\varphi(G) = h(\underbrace{g(G)}_{\subseteq \mathbb{D}}) \subseteq h(\mathbb{D}) \stackrel{12.4}{=} \mathbb{D}$ . Nachrechnen:  $|\varphi'(0)| = \frac{|a|+1}{2\sqrt{|a|}} > 1$ . ■

**Lemma 19.5**

Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet mit der Eigenschaft (W). Es gelte  $0 \in G \subseteq \mathbb{D}$  und  $\mathcal{F} := \{\varphi \in H(G) : \varphi(0) = 0, \varphi \text{ ist injektiv auf } G \text{ und } \varphi(G) \subseteq \mathbb{D}\}$ .

Weiter sei  $\Psi \in \mathcal{F}$  und es gelte (\*)  $|\varphi'(0)| \leq |\Psi'(0)| \forall \varphi \in \mathcal{F}$ . Dann:  $\varphi(G) = \mathbb{D}$ . Insbesondere  $G \sim \mathbb{D}$ .

**Beweis**

$\tilde{G} := \Psi(G)$ . 19.2  $\implies \tilde{G}$  hat die Eigenschaft (W). Weiter:  $0 = \Psi(0) \in \tilde{G} \subseteq \mathbb{D}$ .

Annahme:  $G \not\sim \mathbb{D}$ . Wende 19.4 auf  $G$  an:  $\exists \tilde{\varphi} \in H(\tilde{G})$ :  $\tilde{\varphi}(0) = 0$ ,  $\tilde{\varphi}$  ist injektiv,  $\tilde{\varphi}(\tilde{G}) \subseteq \mathbb{D}$  und  $|\tilde{\varphi}'(0)| > 1$ .  $\varphi := \tilde{\varphi} \circ \Psi$ . Dann:  $\varphi \in H(G)$ ,  $\varphi(0) = \tilde{\varphi}(\Psi(0)) = \tilde{\varphi}(0) = 0$ .  $\varphi$  ist auf  $G$  injektiv,  $\varphi(G) = \tilde{\varphi}(\Psi(G)) = \tilde{\varphi}(\tilde{G}) \subseteq \mathbb{D}$ . Also  $\varphi \in \mathcal{F}$ . Aber:  
 $|\varphi'(0)| = |\tilde{\varphi}'(\Psi(0))\Psi'(0)| = \underbrace{|\tilde{\varphi}'(0)|}_{>1} \underbrace{|\Psi'(0)|}_{\substack{11.11 \\ \neq 0}} > |\Psi'(0)|$ , Widerspruch zu (\*). ■

**Beweis**

Beweis „ $\Leftarrow$ “ von 19.1:

Sei  $G$  ein Elementargebiet und  $G \neq \mathbb{C}$ . 11.4  $\implies G$  hat die Eigenschaft (W).

ObdA:  $0 \in G \subseteq \mathbb{D}$  (wg 19.3). Sei  $\mathcal{F}$  wie in 19.5.  $\phi_0(z) := z$ . Dann:  $\phi_0 \in \mathcal{F}$ . Wegen 19.5 genügt es zu zeigen:

$$\exists \Psi \in \mathcal{F} : |\varphi(0)| \leq |\Psi(0)| \forall \varphi \in \mathcal{F}$$

$s := \exists$  Folge  $(\varphi_n)$  in  $\mathcal{F}$ :  $|\varphi_n'(0)| \rightarrow s$ .  $\varphi_n(G) \subseteq \mathbb{D} \forall n \in \mathbb{N}$

$\implies |\varphi_n(z)| \leq 1 \forall n \in \mathbb{N} \forall z \in G$ . Satz von Montel  $\implies (\varphi_n)$  enthält eine auf  $G$  lokal gleichmäßig konvergierende Teilfolge.

ObdA:  $(\varphi_n)$  konvergiert auf  $G$  lokal gleichmäßig.  $\Psi(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(z)$  ( $z \in G$ ). 10.5  $\implies$

$\Psi \in H(G)$  und  $\varphi_n'(0) \rightarrow \Psi'(0)$ . Also:  $|\Psi'(0)| = s$ .  $\Psi(0) = \lim \varphi_n(0) = 0$ . Es ist  $|\varphi'(0)| =$

$1 \leq |\Psi'(0)|$ . Insbesondere ist  $\Psi$  auf  $G$  nicht konstant.  $\varphi_n$  injektiv  $\forall n \in \mathbb{N} \xrightarrow{17.6} \Psi$  ist injektiv.

$\varphi_n(G) \subseteq \mathbb{D} \forall n \in \mathbb{N} \implies |\Psi(z)| \leq 1 \forall z \in G$  Annahme:  $\exists z_0 \in G$ :  $|\Psi(z_0)| = 1$ . 11.6  $\implies \Psi$  konstant. Widerspruch! Also  $\Psi(G) \subseteq \mathbb{D}$

Fazit:  $\Psi \in \mathcal{F}$  und  $|\varphi'(0)| \leq |\Psi'(0)| \forall \varphi \in \mathcal{F}$ . ■

**Satz 19.6 (Charakterisierung von Elementargebieten, I)**

Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet.

$$G \text{ ist Elementargebiet} \iff G \text{ hat die Eigenschaft (W)}$$

**Beweis**

„ $\implies$ “: 11.4.

„ $\Leftarrow$ “:

Fall 1:  $G = \mathbb{C}$ . ✓

Fall 2:  $G \neq \mathbb{C}$ . Im Beweisteil „ $\Leftarrow$ “ von 19.1 wurde nur die Eigenschaft (W) benutzt. Also  $G \sim \mathbb{D}$ .  $\mathbb{D}$  ist ein Elementargebiet  $\xrightarrow{11.13} G$  ist ein Elementargebiet. ■



## 20. Homotopie und einfacher Zusammenhang

### Lemma 20.1

Sei  $\emptyset \neq K \subseteq D \subseteq \mathbb{C}$ ,  $D$  offen und  $K$  kompakt. Dann existiert ein  $r > 0$ :  $U_r(a) \subseteq D \forall a \in K$ .

### Beweis

$\forall a \in K \exists r_a > 0: U_{2r_a}(a) \subseteq D$ . Dann:  $K \subseteq \bigcup_{a \in K} U_{r_a}(a)$ .

2.3  $\implies \exists a_1, \dots, a_n \in K: K \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{r_{a_j}}(a_j)$ .

$r := \min\{r_{a_1}, \dots, r_{a_n}\}$ . Sei  $a \in K$  und  $z \in U_r(a)$ .

Zu zeigen:  $z \in D$ .

$\exists j \in \{1, \dots, n\}: a \in U_{r_{a_j}}(a_j)$ .

Dann:  $|z - a_j| = |z - a + a - a_j| \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |z - a| + |a - a_j| < r + r_{a_j} \leq 2r_{a_j} \implies z \in U_{2r_{a_j}}(a_j) \subseteq D$  ■

### Lemma 20.2

Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ein Weg mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq D$ . ( $\gamma$  also „nur“ stetig)

Dann existiert ein  $r > 0$  und eine Zerlegung  $Z = \{a_0, \dots, a_n\}$  von  $[a, b]$  mit:

- (1) für  $z_j := \gamma(a_j)$  gilt:  $U_r(z_j) \subseteq D$  ( $j = 0, \dots, n$ )
- (2)  $\gamma([a_j, a_{j+1}]) \subseteq U_r(z_j) \cap U_r(z_{j+1})$  ( $j = 0, \dots, n$ )

### Beweis

20.1  $\implies \exists r > 0: U_r(z) \subseteq D \forall z \in K := \text{Tr}(\gamma) \implies$  (1).

OBdA:  $[a, b] = [0, 1]$ .  $\gamma$  ist auf  $[0, 1]$  gleichmäßig stetig  $\implies \exists \delta > 0: |\gamma(s) - \gamma(t)| < r \forall s, t \in [0, 1]$  mit  $|s - t| < \delta$ .

Sei  $n \in \mathbb{N}$  so, daß  $\frac{1}{n} < \delta$ .  $a_j := \frac{j}{n}$  ( $j = 0, \dots, n$ ) und  $Z := \{a_0, \dots, a_n\}$ . Sei  $t \in [a_j, a_{j+1}]$ .  
 $\implies |t - a_j| < \delta, |t - a_{j+1}| < \delta. \implies |\gamma(t) - \underbrace{\gamma(a_j)}_{=z_j}| < r, |\gamma(t) - \underbrace{\gamma(a_{j+1})}_{=z_{j+1}}| < r \implies \gamma(t) \in$

$U_r(z_j) \cap U_r(z_{j+1})$ . ■

In §8 haben wir  $\int_{\gamma} f(z) dz$  definiert für  $\gamma$  stückweise glatt und  $f \in C(\text{Tr}(\gamma))$ . Jetzt definieren wir

$\int_{\gamma} f(z) dz$  für  $\gamma$  „nur“ stetig und  $f$  holomorph.

**Definition**

Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f \in H(D)$  und  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ein Weg mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq D$ . Seien  $r, z_j, Z$  wie in 20.2.  
 $z_0 = \gamma(a_0) = \gamma(a)$ ,  $z_n = \gamma(a_n) = \gamma(b)$   
 $\gamma_j(t) := z_j + t(z_{j+1} - z_j)$  ( $t \in [0, 1]$ ) ( $j = 0, \dots, n-1$ ).  
 $\Gamma := \gamma_0 \oplus \dots \oplus \gamma_{n-1}$  ist stückweise glatt. 20.2  $\implies \text{Tr}(\Gamma) \subseteq D$ . Setze

$$(+)\quad \int_{\gamma} f(z)dz := \int_{\Gamma} f(z)dz$$

**Lemma 20.3**

Bezeichnungen wie in obiger Definition.

- (1) Ist  $\gamma$  stückweise glatt, so stimmt obige Definition (+) mit der Definition von  $\int_{\gamma} f(z)dz$  aus §8 überein.
- (2) Die Definition (+) ist unabhängig von der Zerlegung  $Z$ , solange  $Z$  die Eigenschaft aus 20.2 hat.
- (3)  $|\int_{\gamma} f(z)dz| \leq (\max_{z \in \text{Tr}(\Gamma)} |f(z)|)L(\Gamma)$ .

**Beweis**

- (1)  $\tilde{\gamma}_j := \gamma|_{[a_j, a_{j+1}]}$ . Dann:  $\gamma = \tilde{\gamma}_0 \oplus \tilde{\gamma}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{\gamma}_{n-1}$   
 Sei  $j \in \{0, \dots, n-1\}$ :  $\tilde{\gamma}_j \oplus \gamma_j^-$  ist ein geschlossener, stückweise glatter Weg im Sterngebiet  $U_r(z_j)$  (siehe 20.2).  
 $\xrightarrow{9.2} \int_{\tilde{\gamma}_j \oplus \gamma_j^-} f(z)dz = 0 \implies \int_{\tilde{\gamma}_j} f(z)dz = \int_{\gamma_j} f(z)dz$ .  
 $\xRightarrow{\text{Summation}} \int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} f(z)dz$ .
- (2) Übung. (Ist  $\tilde{Z}$  eine weitere Zerlegung von  $[a, b]$  mit den Eigenschaften aus 20.2, so betrachte die gemeinsame Verfeinerung  $Z \cup \tilde{Z}$ . Verfahre ähnlich wie in (1).)
- (3) folgt aus 8.4 ■

**Definition**

$D \subseteq \mathbb{C}$  sei offen.

- (1) Seien  $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  Wege mit  $\text{Tr}(\gamma_0), \text{Tr}(\gamma_1) \subseteq D$ ,  $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$  und  $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ .  
 $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  heißen **in D homotop**  $\Leftrightarrow \exists H : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{C}$ :  $H$  ist stetig,  $H([0, 1]^2) \subseteq D$  und

$$H(t, 0) = \gamma_0(t), \quad H(t, 1) = \gamma_1(t) \quad \forall t \in [0, 1]$$

$$H(0, s) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0), \quad H(1, s) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1) \quad \forall s \in [0, 1]$$

In diesem Fall heißt  $H$  eine **Homotopie von  $\gamma_0$  nach  $\gamma_1$  in D**.

**Anschaulich:** Sei  $s \in [0, 1]$ .

$\Gamma_s(t) := H(t, s)$  ( $t \in [0, 1]$ ),  $\Gamma_s$  ist ein Weg mit  $\text{Tr}(\Gamma_s) \subseteq D$ .  $\Gamma_s(0) = H(0, s) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ ,  $\Gamma_s(1) = H(1, s) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ ,  $\Gamma_0 = \gamma_0$ ,  $\Gamma_1 = \gamma_1$   
 „ $\gamma_0$  kann in  $D$  stetig nach  $\gamma_1$  deformiert werden.“

- (2)  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  sei ein geschlossener Weg mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq D$ .  $z_0 : 0\gamma(0) = \gamma(1)$ .  
 $\gamma_{z_0}(t) := z_0$  ( $t \in [0, 1]$ ) heißt ein **Punktweg**.

$\gamma$  heißt **nullhomotop in  $D$**   $:\Leftrightarrow \gamma$  und  $\gamma_{z_0}$  sind in  $D$  homotop.  
 „ $\gamma$  lässt sich in  $D$  stetig auf einen Punkt zusammenziehen.“

- (3)  $G \subseteq \mathbb{C}$  sei ein Gebiet.  $G$  heißt **einfach zusammenhängend**  $:\Leftrightarrow$  jeder geschlossene Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$  ist in  $G$  nullhomotop.  
 „ $G$  hat keine Löcher.“

#### **Satz 20.4**

Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein konvexes Gebiet.

- (1) Sind  $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  Wege mit  $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$  und  $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$  und  $\text{Tr}(\gamma_0), \text{Tr}(\gamma_1) \subseteq G$ , so sind  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  homotop in  $G$ .  
 (2)  $G$  ist einfach zusammenhängend

#### **Beweis**

- (1)  $H(s, t) := \gamma_0(t) + s(\gamma_1(t) - \gamma_0(t))$ , ( $s, t \in [0, 1]$ ).  $H$  ist eine Homotopie von  $\gamma_0$  nach  $\gamma_1$  in  $G$   
 (2) folgt aus (1) ■





## 21. Cauchyscher Integralsatz (Homotopieversionen)

### **Satz 21.1 (CIS, Version I)**

Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f \in H(D)$  und  $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  seien Wege mit  $\text{Tr}(\gamma_0), \text{Tr}(\gamma_1) \subseteq D$ ,  $\gamma_0(0) = \gamma_1(0), \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ .

Sind  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  in  $D$  homotop, so gilt:

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$$

### **Beweis**

Ohne Beweis

### **Satz 21.2 (CIS, Version II)**

Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f \in H(D)$  und  $\gamma$  sei ein geschlossener Weg mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq D$ .

Ist  $\gamma$  nullhomotop in  $D$ , so gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

### **Beweis**

21.1

### **Satz 21.3 (CIS, Version III)**

$G \subseteq \mathbb{C}$  sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet, es sei  $f \in H(G)$  und  $\gamma$  ein geschlossener Weg mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$ . Dann

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

### **Beweis**

21.2

**Satz 21.4 (Charakterisierung von Elementargebieten, II)**

Sei  $G$  ein Gebiet in  $\mathbb{C}$ .

$G$  ist ein Elementargebiet  $\Leftrightarrow G$  ist einfach zusammenhängend

**Beweis**

„ $\Rightarrow$ “ Fall 1:  $G = \mathbb{C} \Rightarrow G$  konvex, also einfach zusammenhängend (siehe 20.4)

Fall 2:  $G \neq \mathbb{C} \stackrel{19,1}{\Rightarrow} \exists f \in H(G) : f(G) = \mathbb{D}$  und  $f$  ist auf  $G$  injektiv.

Sei  $\gamma$  ein geschlossener Weg mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$ .  $z_0 :=$  Anfangspunkt von  $\gamma$ .

Zu zeigen:  $\gamma$  und  $\gamma_{z_0}$  sind in  $G$  homotop

$\Gamma := f \circ \gamma$ .  $\Gamma$  ist ein geschlossener Weg in  $\mathbb{D}$ .  $\mathbb{D}$  ist konvex  $\stackrel{10,4}{\Rightarrow} \mathbb{D}$  ist einfach zusammenhängend.

Also existiert eine Homotopie  $\tilde{H}$  von  $\Gamma$  nach  $\gamma_{f(z_0)}$  in  $\mathbb{D}$ .  $H := f^{-1} \circ \tilde{H}$  ist eine Homotopie von  $\gamma$  nach  $\gamma_{z_0}$  in  $G$

„ $\Leftarrow$ “ Zu zeigen:  $\forall f \in H(G) \exists F \in H(G) : F' = f$  auf  $G$

Sei  $f \in H(G)$ . Sei  $z_0 \in G$  (fest).

Für  $z \in G$  sei  $\gamma^{(z)}$  ein Weg mit  $\text{Tr}(\gamma^{(z)}) \subseteq G$ ,  $\gamma^{(z)}(0) = z_0, \gamma^{(z)}(1) = z$ . (Parameterintervall von  $\gamma^{(z)}$  sei  $[0,1]$ )

$$F(z) := \int_{\gamma^{(z)}} f(w) dw \quad (z \in G)$$

Voraussetzung + 21.1, 21.3  $\Rightarrow$  diese Definition ist unabhängig von der Wahl von  $\gamma^{(z)}$ .

Fast wörtlich wie im Beweis von 9.2.:  $F \in H(G), F' = f$  auf  $G$ . ■

**Satz 21.5 (Charakterisierung von Elementargebieten, III)**

Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (1)  $G$  ist ein Elementargebiet
- (2)  $G$  ist einfach zusammenhängend
- (3)  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad \forall f \in H(G)$  und für jeden geschlossenen Weg  $\gamma$  mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$
- (4)  $\forall f \in H(G)$  mit  $Z(f) = \emptyset \exists g \in H(G) : g' = f$  auf  $G$
- (5)  $\forall f \in H(G)$  mit  $Z(f) = \emptyset \exists g \in H(G) : g^2 = f$  auf  $G$
- (6)  $G = \mathbb{C}$  oder  $G \sim \mathbb{D}$

**Beweis**

(1)  $\Leftrightarrow$  (2): 21.4

(3)  $\Rightarrow$  (1): wie im Beweisteil „ $\Leftarrow$ “ von 21.4

(3)  $\Rightarrow$  (4), (5): 11.4

(4)  $\Rightarrow$  (5): siehe Beweis von 11.4

(5) $\Rightarrow$ (6): 19.6

(6) $\Rightarrow$ (1): wie im Beweisteil „ $\Rightarrow$ “ von 21.4

(2) $\Rightarrow$ (3): 21.2

■

### Definition

Sei  $A \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ .  $A$  heißt in  $\widehat{\mathbb{C}}$  zusammenhängend  $:\Leftrightarrow$  jede lokal konstante Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  ist auf  $A$  konstant.

### Satz 21.6 (Charakterisierung von Elementargebieten, IV)

Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet. Dann sind äquivalent:

(1)  $G$  ist einfach zusammenhängend

(2)  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus G$  ist zusammenhängend in  $\widehat{\mathbb{C}}$

(3) Aus  $\mathbb{C} \setminus G = A \cup K$ ,  $A \subseteq \mathbb{C}$  abgeschlossen,  $K \subseteq \mathbb{C}$  kompakt und  $A \cap K = \emptyset$  folgt:  
 $K = \emptyset$

### Beweis

Ohne Beweis.



## 22. Cauchyscher Integralsatz (Homologieversionen)

In diesem Paragraphen sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  stets ein Gebiet.

### Definition

Sei  $\gamma$  ein geschlossener Weg in  $\mathbb{C}$ .

- (1)  $\text{Int}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \text{Tr}(\gamma) : n(\gamma, z) \neq 0\}$  ("Inneres" von  $\gamma$ )  
 $\text{Ext}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \text{Tr}(\gamma) : n(\gamma, z) = 0\}$  ("Äußeres" von  $\gamma$ )
- (2) Sei  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$ .  $\gamma$  heißt in  $G$  **nullhomolog** :  $\iff n(\gamma, z) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus G$   
 $(\iff \text{Int}(\gamma) \subseteq G)$

### Beispiele:

- (i) Jeder geschlossene Weg in  $\mathbb{C}$  ist in  $\mathbb{C}$  nullhomolog.
- (ii)  $G := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $\gamma(t) = e^{it}$  ( $t \in [0, 2\pi]$ ),  $n(\gamma, 0) = 1 \neq 0$ ;  $\gamma$  ist in  $G$  nicht nullhomolog.

### Satz 22.1

Sei  $\gamma$  ein geschlossener Weg mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$ .

- (1) Ist  $\gamma$  nullhomotop in  $G \Rightarrow \gamma$  ist nullhomolog in  $G$ .
- (2) Ist  $G$  einfach zusammenhängend, so ist  $\gamma$  in  $G$  nullhomolog.

### Beweis

- (1) Sei  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$ . Dann ist  $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$  holomorph auf  $G$ .

$$\stackrel{21.2}{\Rightarrow} \underbrace{\int_{\gamma} f(z) dz}_{=2\pi i \ n(\gamma, z_0)} = 0 \Rightarrow n(\gamma, z_0) = 0$$

- (2) folgt aus (1) ■

### Satz 22.2

Sei  $f \in H(G)$  und  $\gamma$  sei ein geschlossener Weg mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$ .

$\varphi : G \times G \rightarrow \mathbb{C}$  sei definiert durch:

$$\varphi(w, z) := \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & , w \neq z \\ f'(z) & , w = z \end{cases}$$

- (1)  $\varphi$  ist stetig.
- (2) Für  $z \in G$  (fest) hat  $w \mapsto \varphi(w, z)$  in  $z$  eine hebbare Singularität;  $w \mapsto \varphi(w, z)$  ist also holomorph auf  $G$   
 Für  $w \in G$  (fest) hat  $z \mapsto \varphi(w, z)$  in  $w$  eine hebbare Singularität;  $z \mapsto \varphi(w, z)$  ist also holomorph auf  $G$
- (3)  $h(z) := \int_{\gamma} \varphi(w, z) dw$  ( $z \in G$ ). Ist  $\gamma$  nullhomolog in  $G$ , so ist  $h \equiv 0$  auf  $G$ .

**Beweis**

(1) 11.9

(2) 13.1

- (3) (A) Es ist  $h \in C(G)$ . Sei  $z_0 \in G$  und  $(z_n)$  eine Folge in  $G$  mit  $z_n \rightarrow z_0$ .  $g_n(w) := \varphi(w, z_n)$ ,  $g(w) := \varphi(w, z_0)$  ( $w \in G$ ). Sei  $\Gamma$  der stückweise glatte Ersatzweg für  $\gamma$  (wie in §20).  
 Übung:  $(g_n)$  konvergiert auf  $\Gamma$  gleichmäßig gegen  $g$ .

$$\stackrel{8.4}{\Rightarrow} \int_{\Gamma} g_n(w) dw \rightarrow \int_{\Gamma} g(w) dw = \int_{\Gamma} \varphi(w, z_0) dw = \int_{\gamma} \varphi(w, z_0) dw = h(z_0)$$

 Also:  $h(z_n) \rightarrow h(z_0)$ 

(B) Es ist  $h \in H(G)$ . Sei  $\Delta \subseteq G$  ein Dreieck. Wegen 9.7 genügt es zu zeigen:  $\int_{\partial\Delta} h(z) dz = 0$   
 9.1 und (2)  $\Rightarrow \int_{\partial\Delta} \varphi(w, z) dz = 0 \quad \forall w \in G$

$$\Rightarrow \int_{\partial\Delta} h(z) dz = \int_{\partial\Delta} \left( \int_{\gamma} \varphi(w, z) dw \right) dz \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\gamma} \underbrace{\left( \int_{\partial\Delta} \varphi(w, z) dz \right)}_{=0} dw = 0$$

$$(C) \quad \mathbb{C} = \underbrace{\text{Int}(\gamma)}_{\subseteq G} \cup \text{Ext}(\gamma) \cup \underbrace{\text{Tr}(\gamma)}_{\subseteq G} = G \cup \text{Ext}(\gamma)$$

 Sei  $z_0 \in \text{Ext}(\gamma)$ . Sei  $C$  die Komponente von  $\mathbb{C} \setminus \text{Tr}(\gamma)$ :  $z_0 \in C$ .

$$\stackrel{16.2}{\Rightarrow} n(\gamma, z) = n(\gamma, z_0) = 0 \quad \forall z \in C$$

$$\Rightarrow C \subseteq \text{Ext}(\gamma). \quad \stackrel{16.1/2}{\Rightarrow} C \text{ ist offen.} \Rightarrow \exists \delta > 0 : U_{\delta}(z_0) \subseteq C \subseteq \text{Ext}(\gamma).$$

 Also ist  $\text{Ext}(\gamma)$  offen. [Analog:  $\text{Int}(\gamma)$  offen]

$$g(z) := \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad (z \notin \text{Tr}(\gamma)) \stackrel{9.5}{\Rightarrow} g \in H(\mathbb{C} \setminus \text{Tr}(\gamma)), \text{ insbesondere gilt } g \in H(\text{Ext}(\gamma)).$$

$$\text{Sei } z \in G \cap \text{Ext}(\gamma): h(z) = \int_{\gamma} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} dw = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \int_{\gamma} \frac{1}{w-z} dw = g(z) - f(z) 2\pi i$$

$$\underbrace{n(\gamma, z)}_{=0} = g(z). \text{ Also: } h = g \text{ auf } G \cap \text{Ext}(\gamma). \text{ Dann ist}$$

$$F(z) = \begin{cases} h(z) & , z \in G \\ g(z) & , z \in \text{Ext}(\gamma) \end{cases} \text{ eine ganze Funktion.}$$

 Übung:  $F(z) \rightarrow 0$  ( $|z| \rightarrow \infty$ ). 10.2  $\Rightarrow F \equiv 0 \Rightarrow h \equiv 0$ 

■

**Satz 22.3 (Allgemeine Cauchysche Integralformel)**

 Sei  $\gamma$  ein geschlossener Weg mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$  und  $\gamma$  sei nullhomolog in  $G$ . Dann:

$$n(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \forall f \in H(G) \quad \forall z \in G \setminus \text{Tr}(\gamma)$$

**Beweis**

Sei  $f \in H(G)$  und  $z \in G \setminus \text{Tr}(\gamma)$ .  $\stackrel{22.2(3)}{\Rightarrow} 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w-z}}_{=n(\gamma,z)} \blacksquare$

**Satz 22.4 (CIS, Homologieversion I)**

Sei  $\gamma$  ein geschlossener Weg mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$ .

Dann:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad \forall f \in H(G) \iff \gamma \text{ ist in } G \text{ nullhomolog}$$

**Beweis**

" $\Rightarrow$ ": Sei  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$ ;  $f(z) := \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z-z_0} \Rightarrow f \in H(G) \stackrel{\text{Vor.}}{\Rightarrow} \underbrace{\int_{\gamma} f(z) dz}_{=n(\gamma,z_0)} = 0$

" $\Leftarrow$ ": Sei  $f \in H(G)$  und  $z_0 \in G \setminus \text{Tr}(\gamma)$ ;  $g(z) = (z - z_0)f(z)$ ;  $g \in H(G)$ .

Wende 22.3 auf  $g$  an :

$$n(\gamma, z_0) \underbrace{g(z_0)}_{=0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \underbrace{\frac{g(w)}{w-z_0}}_{=f(w)} dw \Rightarrow \int_{\gamma} f(w) dw = 0. \quad \blacksquare$$

**Satz 22.5**

$G$  ist einfach zusammenhängend  $\iff$  jeder geschlossene Weg  $\gamma$  mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$  ist in  $G$  nullhomolog.

**Beweis**

" $\Rightarrow$ " 22.1(2)

" $\Leftarrow$ " Sei  $\gamma$  ein geschlossener Weg mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$  und  $f \in H(G)$

Vorraussetzungen  $\Rightarrow \gamma$  ist in  $G$  nullhomolog. 22.4  $\Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = 0$ . 21.5  $\Rightarrow G$  ist einfach zusammenhängend.  $\blacksquare$

**Definition**

Seien  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  geschlossene Wege mit  $\text{Tr}(\gamma_1), \text{Tr}(\gamma_2) \subseteq G$ .  $\gamma_1, \gamma_2$  heißen in  $G$  homolog :  $\iff n(\gamma_1, z) = n(\gamma_2, z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus G$ .

**Satz 22.6 (CIS, Homologieversion II)**

$\gamma_1, \gamma_2$  seien wie in obiger Definition und in  $G$  homolog.

Dann:

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz \quad \forall f \in H(G)$$

**Beweis**

Sei  $f \in H(G)$  und  $z_j := \text{Anfangspunkt von } \gamma_j \text{ (} j = 1, 2 \text{)}$ .

$\stackrel{3.4}{\Rightarrow} \exists \text{ Weg } \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} : \text{Tr}(\gamma) \subseteq G, \gamma(0) = z_1, \gamma(1) = z_2$

$\Gamma := \gamma_1 \oplus \gamma \oplus \gamma_2^- \oplus \gamma^-$ .  $\Gamma$  ist ein geschlossener Weg mit  $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$

Sei  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$ :  $n(\Gamma, z_0) = n(\gamma_1, z_0) + n(\gamma, z_0) - n(\gamma_2, z_0) - n(\gamma, z_0) = 0$

D.h.:  $\Gamma$  ist in  $G$  nullhomolog. 22.4  $\Rightarrow 0 = \int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma} - \int_{\gamma_2} - \int_{\gamma} = \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2}$  ■



## A. Satz um Satz (hüpft der Has)

1.1.	7
1.2.	7
1.3.	8
1.4. Formel von de Moivre	9
1.5.	9
2.1.	11
2.2.	12
2.3.	13
3.1.	15
3.2.	16
3.3.	16
3.4.	17
3.6.	17
4.1.	19
4.3.	21
5.1.	23
5.2.	24
5.3.	25
5.4.	25
5.5.	26
6.1.	27
6.2.	28
7.1.	31
7.2.	32
7.3.	32

7.4.	33
7.5.	33
7.6.	33
8.1.	35
8.2.	35
8.3.	37
8.4.	37
8.5.	38
8.8.	38
8.9.	39
9.1. Lemma von Goursat	41
9.2. Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete	43
9.4. Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben	45
9.5.	46
9.6.	46
9.7. Satz von Morera	47
9.8.	48
10.1. Cauchysche Abschätzungen	49
10.2. Satz von Liouville	49
10.3. Fundamentalsatz der Algebra	49
10.4. Potenzreihenentwicklung	50
10.5. Konvergenzsatz von Weierstraß	51
11.1. Identitätssatz für Potenzreihen	53
11.2. Identitätssatz für holomorphe Funktionen	53
11.4.	54
11.5.	54
11.6. Maximum-, Minimumsprinzip (I)	55
11.7. Maximum-, Minimumsprinzip (II)	55
11.8.	56

11.9. . . . .	56
11.10.. . . . .	57
11.11.. . . . .	58
11.12Winkeltreue . . . . .	58
11.13.. . . . .	59
12.1. Schwarzsches Lemma . . . . .	61
12.2. . . . .	61
12.3. . . . .	62
12.4. . . . .	62
13.1. Riemannscher Hebbbarkeitssatz . . . . .	63
13.2. . . . .	64
13.3. . . . .	64
13.4. Satz von Casorati-Weierstraß . . . . .	64
13.5. Klassifikation . . . . .	65
14.1. . . . .	67
14.2. Laurententwicklung . . . . .	67
14.3. . . . .	68
14.4. . . . .	69
15.1. . . . .	71
15.2. Der chordale Abstand . . . . .	71
15.3. . . . .	72
15.4. . . . .	73
15.5. . . . .	73
15.6. . . . .	73
15.7. . . . .	74
15.8. . . . .	75
16.1. . . . .	77
16.2. . . . .	78
17.1. Residuensatz . . . . .	81

17.3.	82
17.4. Das Argumentenprinzip	83
17.6. Satz von Hurwitz	84
17.7.	85
17.8.	85
18.1. Satz von Montel	87
19.1. Riemannscher Abbildungssatz	89
19.6. Charakterisierung von Elementargebieten, I	91
20.4.	95
21.1. CIS, Version I	97
21.2. CIS, Version II	97
21.3. CIS, Version III	97
21.4. Charakterisierung von Elementargebieten, II	98
21.5. Charakterisierung von Elementargebieten, III	98
21.6. Charakterisierung von Elementargebieten, IV	99
22.1.	101
22.2.	101
22.3. Allgemeine Cauchysche Integralformel	102
22.4. CIS, Homologieversion I	103
22.5.	103
22.6. CIS, Homologieversion II	103

# Stichwortverzeichnis

- $\epsilon$ -Umgebung von  $z_0$ , 12
- $\operatorname{Im} z := b$  (Imaginärteil von  $z$ ), 7
- $n$ -te Wurzel aus  $a$ ., 9
- (Realteil von  $z$ ), 7
- (imaginäre Einheit), 7
  
- abgeschlossen, 12
- abgeschlossene Kreisscheibe, 12
- Abschließung, 12
- absolut konvergent, 12
- Additionstheorem, 27
- Anfangspunkt, 16
- Automorphismus, 59
  
- beschränkt, 11, 12, 48
- Betrag von  $z$ , 8
- Bolzano-Weierstraß, 11
  
- Cauchy-Folge, 11
- Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, 19
- Cauchy Kriterium, 11, 23
- Cauchysche Integralformel, 82
- Cauchysche Integralformeln für Ableitungen, 46
- Cauchyscher Integralsatz für Elementargebiete, 82
- chordale Abstand, 71
- Cosinus, 28
- Cotangens, 29
  
- der Punkt  $\infty$ , 71
- differenzierbar, 35
- diskret in  $G$ , 56
- divergent, 11
- Doppelverhältnis, 74
- Dreieck, 41
  
- ein Logarithmus von  $w$ , 31
- Elementargebiet, 47
- Endpunkt, 16
- entire function, 48
  
- ganze Funktion, 48
- Gebiet, 17, 20, 53
- geschlossen, 35
- glatt, 35
- gleichmäßig (glm) konvergent, 23
- Grenzfunktion, 23
- Grenzwert, 11
  
- Häufungspunkt, 12
- Hauptteil, 68
- Hauptwert des Arguments, 8
- Hauptzweig der allgemeinen Potenz, 33
- Hauptzweig des Logarithmus, 31
- hebbare Singularität, 63
- holomorph, 19
  
- in  $G$  homolog, 103
- Innere von  $A$ , 12
- innerer Punkt von  $A$ , 12
- inverse Weg, 36
- irgendein, 44
- isolierte Singularität, 63
  
- Körper der Komplexen Zahlen, 7
- Koeffizientenmatrix, 72
- kompakt, 12, 16
- komplex differenzierbar, 19
- Komponente, 77
- konform äquivalent, 89
- konforme Abbildung, 59
- konjugiert komplexe Zahl, 7
- konvergent, 11
- Konvergenzradius (KR), 24
- konvergiert in, 72
- konvex, 16
- Kriterium von Weierstrass, 23
  
- Lange, 16
- Laurententwicklung, 68
- Laurentreihe, 68
- Limes, 11
- lokal gleichmäßig, 51

- lokal gleichmaessig konvergent, 23
- lokalkonstant, 16
- meromorph, 72
- Moebiustransformation, 72
- Nebenteil, 68
- nicht, 54
- Nordpol, 71
- nullhomolog, 101
- offene Kreisscheibe, 12
- Ordnung, 56
- Ordnung des Pols, 64
- Parametertransformation, 36
- Pol, 64
- Potenzreihe (PR), 24
- punktierte Kreisschreibe, 12
- punktweise konvergent, 23
- Rand von  $A$ , 12
- Randpunkt, 12
- Rektifizierbarkeit, 16
- Residuum, 69
- Riemannsche Zahlenkugel, 71
- Satz von der Gebietstreue, 54
- Sinus, 28
- Stammfunktion, 38
- stereographische Projektion, 71
- sternförmig, 43
- Sterngebiet, 43
- Sternmittelpunkt, 43
- stetig, 15
- stetig differenzierbar, 35
- stuckweise glatt, 36
- Tangens, 29
- Trager, 16
- Trager von  $\gamma$ , 35
- Umlaufzahl, 77
- unendliche Reihe, 11
- Verbindungsstrecke, 16
- Vielfachheit, 56
- Vollebene, 71
- Weg, 16
- Wegintegral, 37
- Weglänge, 36
- Wegzusammenhang, 43
- wegzusammenhangend, 16
- wesentliche Singularität, 64
- zusammenhangend, 16
- zweimal komplex differenzierbar, 21