

7 Bedingte Erwartungswerte und Bedingte Verteilungen

Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein W'Raum, (Ω', \mathcal{A}') ein Messraum, $Y : \Omega \rightarrow \Omega'$ sei $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ -messbar und nehme die Werte $y_1, \dots, y_n \in \Omega'$ an. $Y^{-1}(y_k) = \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) = y_k\} =: A_k \Rightarrow \Omega = A_1 + \dots + A_n$ und $\sigma(Y) = \{\sum_{k \in I} A_k \mid I \subset \{1, \dots, n\}\}$.

Definition Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine ZV mit $E|X| < \infty$. Dann ist der bedingte Erwartungswert von X unter der Bedingung $Y = y_k$ definiert durch:

$$E[X|Y = y_k] := \frac{1}{P(A_k)} \int_{A_k} X dP, \quad k = 1, \dots, n$$

Falls X diskret mit x_1, \dots, x_m :

$$\begin{aligned} E[X|Y = y_k] &= \frac{1}{P(Y = y_k)} \sum_{j=1}^m x_j \cdot P(X = x_j, Y = y_k) \\ &= \sum_{j=1}^m x_j \cdot P(X = x_j | Y = y_k) \end{aligned}$$

Definition Der *bedingte Erwartungswert von X gegeben Y* ist $E[X|Y] : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$E[X|Y](\omega) := \sum_{k=1}^n E[X|Y = y_k] \cdot \mathbf{1}_{[Y=y_k]}(\omega)$$

Bemerkung a) Offenbar ist $E[X|Y]$ $(\sigma(Y), \mathfrak{B})$ -messbar.

b) Sei $Z := E[X|Y]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{A_k} Z dP &= \int_{\Omega} \mathbf{1}_{A_k} Z dP \\ &= E[X, Y = y_k] \cdot P(A_k) \\ &= \int_{A_k} X dP \end{aligned}$$

Wegen der Struktur von $\sigma(Y)$ folgt auch

$$\int_A Z dP = \int_A X dP \quad \forall A \in \sigma(Y)$$

c) $E[X|Y] = g(Y)$ mit

$$g(y) = \sum_{k=1}^n E[X|Y = y_k] \cdot \mathbf{1}_{\{y_k\}}(y)$$

- d) Offenbar hängt die Definition von $E[X|Y]$ nur davon ab, auf welchen Mengen A_k Y die verschiedenen Werte annimmt, nicht aber welche Werte das genau sind.

Deshalb schreibt man auch:

$$E[X|Y] = E[X|\sigma(Y)]$$

Beispiel 7.1 Sei $([0, 1), \mathfrak{B}_{[0,1)}, \underbrace{\lambda_{[0,1)}}_{=:P}), X(\omega) = \omega$

- Hier fehlt ein Bild -

$$A_k = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right), k = 1, \dots, n, \quad \mathfrak{F} := \left\{ \sum_{k \in I} A_k \mid I \subset \{1, \dots, n\} \right\}$$

$$\begin{aligned} E[X, A_k] &= \frac{1}{P(A_k)} \int_{A_k} \omega P(d\omega) \\ &= n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \omega d\omega \\ &= \frac{1}{2} \frac{2k-1}{n} \end{aligned}$$

$E[X, \mathfrak{F}]$ ist also eine „Approximation“ oder „Vergröberung“ von X . Bezüglich einer beliebigen Sub- σ -Algebra $\mathfrak{F} \subset \mathcal{A}$ wird der bedingte Erwartungswert wie folgt definiert:

Definition Sei X eine Zufallsvariable mit $E|X| < \infty$ und $\mathfrak{F} \subset \mathcal{A}$ eine Sub- σ -Algebra von \mathcal{A} . Dann heißt $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ **eine Version des bedingten Erwartungswertes $E[X|\mathfrak{F}]$ von X unter \mathfrak{F}** , wenn gilt

(i) Z ist \mathfrak{F} -messbar

(ii) $\int_A Z dP = \int_A X dP \quad \forall A \in \mathfrak{F}$

Satz 7.1

Der bedingte Erwartungswert existiert und ist bis auf Nullmengen eindeutig.

Beweis Sei $X \geq 0$. Durch

$$Q(A) := \int_A X(\omega) P(d\omega) \quad \forall A \in \mathfrak{F}$$

wird ein Maß auf (Ω, \mathfrak{F}) definiert (Satz 2.7).

Sei $P_{\mathfrak{F}}$ die Einschränkung von P auf \mathfrak{F} . Offenbar $Q \ll P_{\mathfrak{F}}$. Satz von Radon-Nikodym $\implies Q$ besitzt eine Dichte Z bzgl. $P_{\mathfrak{F}}$ und Z ist nach Definition \mathfrak{F} -messbar.

Falls X beliebig: $X = X^+ - X^-$

P-f.s. Eindeutigkeit: Seien Z, \tilde{Z} Versionen von $E[X, \mathfrak{F}]$.

$$\implies \int_A (Z - \tilde{Z}) dP = 0 \quad \forall A \in \mathfrak{F}$$

Wegen $\{Z > \tilde{Z}\} \in \mathfrak{F}, \{Z < \tilde{Z}\} \in \mathfrak{F}$ folgt:

$$E|Z - \tilde{Z}| = \int_{\{Z > \tilde{Z}\}} (Z - \tilde{Z}) dP - \int_{\{Z < \tilde{Z}\}} (Z - \tilde{Z}) dP = 0$$

$\implies Z = \tilde{Z}$ P-f.s. ■

Bemerkung Der bedingte Erwartungswert ist also eigentlich die Äquivalenzklasse

$$E[X|\mathfrak{F}] = \left\{ Z \in L^1(\Omega, \mathfrak{F}, P) \mid \int_A Z dP = \int_A X dP \ \forall A \in \mathfrak{F} \right\}$$

Ein Element davon nennt man „Version“. Oft wird $E[X|\mathfrak{F}]$ mit einer Version identifiziert.

Definition Sei $A \in \mathfrak{F}$. Eine Version von $E[\mathbf{1}_A|\mathfrak{F}]$ bezeichnet man als **Version der bedingten Wahrscheinlichkeit** $P(A|\mathfrak{F})$.

Bemerkung Es gilt für $B \in \mathfrak{F}$:

$$\int_B P(A|\mathfrak{F}) dP \stackrel{(ii)}{=} \int_B \mathbf{1}_A dP = P(A \cap B)$$

Satz 7.2

Sei $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $\|X\|^2 = EX^2$. Dann gilt:

$$\|X - E[X|\mathfrak{F}]\|^2 = \inf \{ \|X - Y\|^2 \mid Y \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}, P) \}$$

Beweis siehe Henze Stochastik II, S.214 ■

Satz 7.3 (Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte)

Es seien $X, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ Sub- σ -Algebren von \mathcal{A} . Dann gilt:

a) $E[aX + bY|\mathfrak{F}] = aE[X|\mathfrak{F}] + bE[Y|\mathfrak{F}]$ P-f.s. $a, b \in \mathbb{R}$

b) $E[E[X|Y]] = EX$

c) $X \leq Y \implies E[X|\mathfrak{F}] \leq E[Y|\mathfrak{F}]$ P-f.s.

d) Für $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$ gilt $E[E[X|\mathfrak{F}_2]|\mathfrak{F}_1] = E[X|\mathfrak{F}_1]$

Für $\mathfrak{F}_1 \supset \mathfrak{F}_2$ gilt $E[E[X|\mathfrak{F}_2]|\mathfrak{F}_1] = E[X|\mathfrak{F}_2]$

e) Falls Y \mathfrak{F} -messbar und $EXY < \infty$ gilt:

$$E[XY|\mathfrak{F}] = YE[X|\mathfrak{F}]$$

f) Falls X von \mathfrak{F} unabhängig ist (d.h. falls die X und $\mathbf{1}_A \ \forall A \in \mathfrak{F}$ unabhängig sind), dann gilt:

$$E[X|\mathfrak{F}] = EX$$

Bemerkung Aus Satz 7.3 bekommt man:

1. $X \equiv c \in \mathbb{R} \xrightarrow{f)} E[c|\mathfrak{F}] = c$
2. $\mathfrak{F} = \{\emptyset, \Omega\} \xrightarrow{f)} E[X|\mathfrak{F}] = EX$
3. $X \text{ } \mathfrak{F}\text{-messbar} \xrightarrow{e)} E[X|\mathfrak{F}] = X$
4. $X \geq 0 \xrightarrow{c)} E[X|\mathfrak{F}] \geq 0 \text{ P-f.s.}$

Beweis von Satz 7.3:

a)

$$\begin{aligned}
 \int_A E[aX + bY|\mathfrak{F}]dP &= \int_A aX + bYdP \\
 &\stackrel{\text{Linearität}}{=} a \int_A XdP + b \int_A YdP \\
 &= a \int_A E[X|\mathfrak{F}]dP + b \int_A E[Y|\mathfrak{F}]dP \\
 &= \int_A (aE[X|\mathfrak{F}] + bE[Y|\mathfrak{F}])dP \quad \forall A \in \mathfrak{F}
 \end{aligned}$$

\implies Behauptung, da $aE[X|\mathfrak{F}] + bE[Y|\mathfrak{F}]$ \mathfrak{F} -messbar und Radon-Nikodym-Dichte P -f.s. eindeutig.

b)

$$E[E[X|\mathfrak{F}]] = \int_{\Omega} E[X|\mathfrak{F}]dP = \int_{\Omega} XdP = EX$$

c)

$$\begin{aligned}
 A &:= \{\omega \in \Omega \mid E[X|\mathfrak{F}](\omega) > E[Y|\mathfrak{F}](\omega)\} \in \mathfrak{F} \\
 &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left\{ \omega \in \Omega \mid E[X|\mathfrak{F}](\omega) > E[Y|\mathfrak{F}](\omega) + \frac{1}{n} \right\}}_{A_n}
 \end{aligned}$$

Annahme: $P(A) > 0 \implies \exists n \in \mathbb{N}$ mit $P(A_n) > 0$

$$\begin{aligned}
 \implies 0 &\leq \int_{A_n} (Y - X)dP \\
 &= \int_{A_n} E[Y|\mathfrak{F}]dP - \int_{A_n} E[X|\mathfrak{F}]dP \\
 &= \int_{A_n} (E[Y|\mathfrak{F}] - E[X|\mathfrak{F}])dP \\
 &\leq -\frac{1}{n} \cdot P(A_n) \\
 &< 0 \quad \text{Widerspruch!}
 \end{aligned}$$

d) Z.z. Für $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$ gilt: $E[E[X|\mathfrak{F}_2]|\mathfrak{F}_1] = E[X|\mathfrak{F}_1]$. Sei $A \in \mathfrak{F}_1 \implies A \in \mathfrak{F}_2$ und

$$\int_A E[X|\mathfrak{F}_1]dP = \int_A XdP = \int_A E[X|\mathfrak{F}_2]dP = \int_A E[E[X|\mathfrak{F}_2]|\mathfrak{F}_1]dP$$

\implies Behauptung, da Radon-Nikodym-Dichte eindeutig.

Für $\mathfrak{F}_1 \supset \mathfrak{F}_2$ ähnlich.

e) Mit algebraischer Induktion:

– Sei $Y = \mathbf{1}_B$, $B \in \mathfrak{F}$ und $A \in \mathfrak{F}$ beliebig.

$$\int_A Y \cdot E[X|\mathfrak{F}]dP = \int_{A \cap B} E[X|\mathfrak{F}]dP = \int_{A \cap B} XdP = \int_A YXdP$$

Außerdem ist $Y \cdot E[X|\mathfrak{F}]$ \mathfrak{F} -messbar \implies Behauptung, da Radon-Nikodym-Dichte P -f.s. eindeutig.

– Linearität des Integrals + Teil a) \implies Aussage für $Y \in \mathcal{E}$, $Y \geq 0$:
Bedingte Version des Satzes von der monotonen Konvergenz (\rightarrow Übung).

– Dann $Y = Y^+ - Y^-$

f)

$$\begin{aligned} \int_A E[X|\mathfrak{F}]dP &= \int_A XdP \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{1}_A XdP \\ &\stackrel{\text{unabh.}}{=} \int \mathbf{1}_A dP \cdot \underbrace{\int XdP}_{=EX} \\ &= \int_A EXdP \end{aligned}$$

\implies Behauptung, da EX \mathfrak{F} -messbar. ■

Satz 7.4 (Faktorisierungssatz)

Es seien (Ω, \mathcal{A}) , (Ω', \mathcal{A}') Messräume und $Y : \Omega \rightarrow \Omega'$ ein Zufallsgröße. Ist $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine $(\sigma(Y), \mathfrak{B})$ -messbare Zufallsvariable. Dann gibt es eine \mathfrak{B} -messbare Funktion $g : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$X = g \circ Y.$$

Beweis Algebraische Induktion:

- (i) Sei $X = \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{1}_{A_j} \in \mathcal{E}$ mit $a_j \geq 0$, $A_j \in \sigma(Y)$.
 $\implies A_j = Y^{-1}(A'_j)$, $A'_j \in \mathcal{A}'$. Wähle $g = \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{1}_{A'_j}$
 $\implies X = g \circ Y$
 \implies Behauptung

- (ii) Sei $X \geq 0$ und $(\sigma(Y), \mathfrak{B})$ -messbar. $\implies \exists (X_n) \subset \mathcal{E}, 0 \leq X_n \uparrow X$ und wegen
 (i) $\exists (\mathcal{A}', \mathfrak{B})$ -messbare Funktion g_n mit $X_n = g_n \circ Y, n \in \mathbb{N}$.

$$\implies X = \sup_{n \in \mathbb{N}} X_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} (g_n \circ Y) = (\sup_{n \in \mathbb{N}} g_n) \circ Y$$

Wähle also $g = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n$

- (iii) $X = X^+ - X^- \xrightarrow{(ii)} X = g_1 \circ Y - g_2 \circ Y$. Wähle $g = g_1 - g_2$. ■

Bemerkung Statt $E[X|\sigma(Y)]$ schreiben wir auch $E[X|Y]$ und wegen Satz 7.4 $\exists g : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ $(\mathcal{A}', \mathfrak{B})$ -messbar mit $E[X|Y] = g \circ Y$ P -f.s.. Die Funktion g ist P^Y -f.s. eindeutig.

Definition Ist $E[X|Y] = g \circ Y$ wie oben, so heißt $E[X|Y = y] = g(y)$ (ein) **bedingter Erwartungswert von X unter der Bedingung $Y = y$** .

Satz 7.5

Für alle $A' \in \mathcal{A}'$ gilt:

$$\int_{A'} E[X|Y = y] P^Y(dy) = \int_{Y^{-1}(A')} X dP$$

Beweis

$$\int_{A'} E[X|Y = y] P^Y(dy) = \int_{A'} g dP^Y \stackrel{\text{Sa. 2.4}}{=} \int_{Y^{-1}(A')} g \circ Y dP = \int_{Y^{-1}(A')} X dP.$$

Bemerkung Für $A \in \mathcal{A}$ heißt $P(A|Y = y) := E[\mathbf{1}_A|Y = y]$ (eine) **bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung $Y = y$** . Bedingte Wahrscheinlichkeiten treten oft bei gekoppelten Zufallsexperimenten auf. Die folgende Sichtweise ist konstruktiver:

Definition Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ messbare Räume. Eine Abbildung $Q : \Omega_1 \times \mathcal{A}_2 \rightarrow [0, 1]$ mit

(i) $\omega_1 \mapsto Q(\omega_1, A_2)$ ist \mathcal{A}_1 -messbar $\forall A_2 \in \mathcal{A}_2$.

(ii) $A_2 \mapsto Q(\omega_1, A_2)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega_2, \mathcal{A}_2) \forall \omega_1 \in \Omega_1$

nennt man **Übergangskern** oder **Kern** von $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ nach $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$.

Satz 7.6

Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ ein Messraum und Q ein Übergangskern von $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ nach $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$. Dann wird durch

$$P(A) := \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} \mathbf{1}_A(\omega_1, \omega_2) Q(\omega_1, d\omega_2) \right) P_1(d\omega_1)$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P =: P_1 \otimes Q$ auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ definiert. P heißt **Koppelung** und ist das einzige Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ mit der Eigenschaft

$$P(A_1 \times A_2) = \int_{A_1} Q(\omega_1, A_2) P_1(d\omega_1) \quad (*)$$

Beweis

1. Ähnlich wie in §3 zeigt man: für $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}_+$, f $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ -messbar ist $\omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) Q(\omega_1, d\omega_2)$ \mathcal{A}_1 -messbar.
2. Für $A = A_1 \times A_2$ ist $\mathbf{1}_A(\omega_1, \omega_2) = \mathbf{1}_{A_1}(\omega_1) \mathbf{1}_{A_2}(\omega_2) \implies (*)$.
3. $P(\Omega_1 \times \Omega_2) = 1$ wegen $(*)$. $P \geq 0$ ist klar.

$$\begin{aligned}
 P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} \underbrace{\mathbf{1}_{\sum_{n=1}^{\infty} A_n}(\omega_1, \omega_2)}_{=\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n}(\omega_1, \omega_2)} Q(\omega_1, d\omega_2) \right) P_1(d\omega_1) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} \mathbf{1}_{A_n}(\omega_1, \omega_2) Q(\omega_1, d\omega_2) \right) P_1(d\omega_1) \right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).
 \end{aligned}$$

4. Eindeutigkeitssatz für Maße. ■

Satz 7.7 Es seien (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ ein messbarer Raum, $Y : \Omega \rightarrow \Omega_1$ $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_1)$ -messbar und X ein d -dimensionaler Zufallsvektor. Dann existiert ein Kern Q von $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ nach $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$ derart, dass

$$P^{X,Y} = P^Y \otimes Q.$$

Q ist eine Version der bedingten Verteilung von X unter Y . Schreibweise:

$$Q(y, \cdot) = P^X(\cdot | Y = y).$$

Beweis - ohne Beweis - ■

Bemerkung Für $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathfrak{B}^d$ gilt:

$$P(X \in B, Y \in A) = \int_A Q(y, B) P^Y dy = \int_A P^X(B | Y = y) P^Y(dy)$$

Satz 7.8

Es seien μ und ν σ -endliche Maße auf \mathcal{A}_1 bzw. \mathfrak{B}^d . $P^{(Y,X)}$ besitze eine Dichte f bezüglich $\mu \otimes \nu$. Es sei $f_Y(y) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) \nu(dx)$ die (Rand-)Dichte von P^Y bzgl. μ . Weiterhin sei

$$f(x|y) := \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \quad \text{und} \quad \frac{0}{0} := 0.$$

So wird durch

$$P^X(B | Y = y) := \int_B f(x|y) \nu(dx) \quad \forall B \in \mathfrak{B}^d, y \in \Omega_1$$

eine bedingte Verteilung von X unter der Bedingung $Y = y$ definiert.

$f(\cdot | y)$ heißt **bedingte ν -Dichte von X unter der Bedingung $Y = y$** .

Beweis

$y \mapsto \int_B f(x|y)\nu(dx)$ ist messbar $\forall B \in \mathfrak{B}^d$ (Satz von Tonelli),

$B \mapsto \int_B f(x|y)\nu(dx)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\forall y \in \Omega_1$.

Für $A \in \mathcal{A}_1, B \in \mathfrak{B}^d$ gilt:

$$\begin{aligned} P^{(Y,X)}(A \times B) &= \int_{A \times B} f d(\mu \otimes \nu) \\ &= \int_A \left(\int_B f(x, y) \nu(dx) \right) \mu(dy) \\ &= \int_A \left(\int_B f(x|y) \nu(dx) \right) f_Y(y) \mu(dy) \\ &\stackrel{!}{=} \int_A P^X(B|Y=y) \underbrace{P^Y(dy)}_{=f_Y(y)\mu(dy)} \end{aligned}$$

■

Satz 7.9

Es seien (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein Zufallsvektor und X eine Zufallsvariable mit $E|X| < \infty$. Dann ist

$$h(y) := \int_{\mathbb{R}} x P^X(dx|Y=y)$$

ein bedingter Erwartungswert von X unter der Bedingung $Y = y$.

Beweis Nach 7.5:

$$\int_B E[X|Y=y] P^Y(dy) = \int_{Y^{-1}(B)} X dP.$$

Für $B \in \mathfrak{B}^d$ und $T(Y, X) := X \cdot (\mathbf{1}_B \circ Y)$ gilt:

$$\begin{aligned} \int_{Y^{-1}(B)} X dP &= \int T(Y, X) dP \\ &\stackrel{2.4}{=} \int T(y, x) P^{(Y,X)}(dy, dx) \\ &= \int x \mathbf{1}_B(y) P^{(Y,X)}(dy, dx) \\ &= \int_B \left(\int_{\mathbb{R}} x P^X(dx|Y=y) \right) P^Y(dy) \end{aligned}$$

$\stackrel{7.5}{\implies}$ Beh.

■

Beispiel 7.2

U und V seien unabhängig und $U(0, 1)$ -verteilt und entsprechen den zufälligen Seitenlängen eines Rechtecks. Es sei $X = \text{Flächeninhalt des Rechtecks}$ und $Y = \text{Umfang des Rechtecks}$. Klar: X und Y sind nicht unabhängig.

Weiter ist $f_{U,V}(u, v) = \begin{cases} 1 & 0 < u < 1 \text{ und } 0 < v < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ die gemeinsame Dichte von U

und V .

\implies (Transformationssatz für Dichten) $f_{X,Y}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{y^2 - 16x}}$ für $0 < x < 1$ und

$4\sqrt{x} < y < 2 + 2x$; $f_X(x) = -\log x$ für $0 < x < 1$.

$\implies f(y|x) = -\frac{2}{\log x \sqrt{y^2 - 16x}}$ für $4\sqrt{x} < y < 2 + 2x$.

$\implies E[Y|X = x] = \int y \cdot f(y|x) dy = -\frac{4(1-x)}{\log x}$.

Beispiel 7.3 (Buffonsches Nadelproblem)

Wir werfen eine Nadel der Länge 1 zufällig auf einen unendlich langen Streifen der Breite 1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel mindestens eine Wand des Korridors schneidet?

X = Abstand der Nadelmitte von der linken Wand

Y = Winkel der Nadel zum Lot

Annahme: $X \sim U(0, 1)$, $Y \sim U(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und X, Y unabhängig.

A = Nadel schneidet die Wand = $\{\omega \mid (X, Y)(\omega) \in B\}$ mit

$B = \{(x, y) \mid |y| < \frac{\pi}{2}, x \in [0, \frac{1}{2} \cos y] \cup [1 - \frac{1}{2} \cos y, 1]\}$

- hier fehlt eine Skizze -

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} P(A) &= P^{X,Y}(B) \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \mathbf{1}_B(x, y) P^X(dx|Y=y) P^Y(dy) \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P^X\left([0, \frac{\cos y}{2}] \cup [1 - \frac{\cos y}{2}, 1] \mid Y=y\right) P^Y(dy) \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos y \cdot \frac{1}{\pi} dy \\ &= \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

So lässt sich zum Beispiel auch π näherungsweise bestimmen.

