17. Stetigkeit

Vereinbarung: In diesem Paragraphen seien stets: $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Definition

(1) f heißt stetig in $x_0 :\iff$ für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to x_0$ gilt: $f(x_n) \to f(x_0)$.

(2) f heißt stetig auf $D :\iff$ f ist in jedem $x \in D$ stetig.

(3) $C(D) := \{g : D \to \mathbb{R} : g \text{ ist stetig auf } D\}$.

Beispiele:

(1) $D := [0,1] \cup 2$. $f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{für } x \in [0,1) \\ 0 & \text{für } x = 1 \\ 1 & \text{für } x = 2 \end{cases}$

Klar: f ist stetig in jedem $x \in [0,1)$.
$x_0 = 1$: $x_n = 1 - \frac{1}{n} \implies x_n \to 1$. $f(x_n) = (1 - \frac{1}{n})^2 \to 1 \neq 0 = f(1) \implies f$ ist in $x_0 = 1$ nicht stetig.
$x_0 = 2$: Sei (x_n) eine Folge in D mit $x_n \to 2 \implies x_n = 2$ ffa $n \in \mathbb{N} \implies f(x_n) = 1$ ffa $n \in \mathbb{N} \implies f(x_n) \to 1 = f(2)$. Das heißt: f ist stetig in $x_0 = 2$.

(2) $D := [0,\infty)$, $p \in \mathbb{N}$, $f(x) := \sqrt[p]{x}$, §16 $\implies f \in C[0,\infty)$.

Satz 17.1 (Stetigkeitssätze)

(1) f ist stetig in $x_0 \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\ \forall x \in D_\delta(x_0)$.

(2) Ist x_0 Häufungspunkt von D, so gilt: f ist stetig in $x_0 \iff \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert und ist gleich $f(x_0)$.

(3) Ist $g : D \to \mathbb{R}$ eine weitere Funktion und sind f, g stetig in x_0, dann sind $f + g$, fg und $|f|$ stetig in x_0.

(4) Sei $\tilde{D} := \{x \in D : f(x) \neq 0\}$ und $x_0 \in \tilde{D}$ und f sei stetig in x_0. Dann ist $\frac{1}{f} : \tilde{D} \to \mathbb{R}$ stetig in x_0.

Beweis

(1) Wie bei 16.1

(2) Als Übung

(3) und

(4) wie bei 16.2 ∎

Satz 17.2 (Stetigkeit der Potenzreihen)
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sei Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $r > 0$. Es sei $D = (-r, r)$ und $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(x \in D)$. Dann: $f \in C(D)$. Insbesondere gilt für $x_0 \in D$:

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{x \to x_0} f(x) \overset{17.1(2)}{=} f(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \to x_0} a_n x^n$$

Beweis
Später in §19 ∎

Beispiel 17.3
(1) $e^x, \sin x, \cos x$ sind auf $\mathbb{R}$ stetig.

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1.$

(4) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^{x_0 + h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0}.$

Beweis
(1) Folgt aus 17.2

(2) Für $x \neq 0$:

$$\frac{1}{x} \sin x = \frac{1}{x} \cdot \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) = \underbrace{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots}_{\text{Potenzreihe mit KR } \infty \text{, also stetig (in } x=0)} \xrightarrow{17.2} 1 \ (x \to 0)$$

(3) Für $x \neq 0$:

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{x} \cdot \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots - 1\right) = \underbrace{1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots}_{\text{Potenzreihe mit KR } \infty \text{, also stetig (in } x=0)} \xrightarrow{17.2} 1 \ (x \to 0)$$

(4) $$\frac{e^{x_0 + h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \frac{e^h - 1}{h} \xrightarrow{(3)} e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0} \ (h \to 0)$$ ∎

Satz 17.4 (Stetigkeit von verketteten stetigen Funktionen)
Sei $E \subseteq \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $f(D) \subseteq E$. f sei stetig in $x_0 \in D$ und g sei setig in $y_0 := f(x_0)$. Dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ stetig in x_0.

Beweis
Sei (x_n) eine Folge in D mit $x_n \to x_0$. f ist stetig in $x_0 \implies \underbrace{f(x_n)}_{=:y_n} \to f(x_0) = y_0$. g stetig in $y_0 \implies \underbrace{g(y_n)}_{=g(f(x_n))=(g\circ f)(x_n)} \to g(y_0) = g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0)$. ∎