13. Isolierte Singularitäten

Vereinbarung: In diesem Paragraphen sei stets $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$, $\dot{D} := D \backslash \{z_0\}$ und $f \in H(\dot{D})$.
z_0 heißt dann eine **isolierte Singularität** von f.

Definition
z_0 heißt eine **hebbare Singularität** von f $:\Leftrightarrow$ $\exists h \in H(D) : h = f$ auf $\dot{D}$. I.d. Fall ist h eindeutig bestimmt und wir sagen kurz: $f \in H(D)$.

Beispiel
$D = \mathbb{C}, z_0 = 0$

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + \dots\right) = \underbrace{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots + \dots}_{=:h(z)}$$

Dann: $h \in H(\mathbb{C})$. $h = f$ auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. f hat also in 0 eine hebbare Singularität.

Satz 13.1 (Riemannscher Hebbarkeitssatz)
f hat in z_0 eine hebbare Singularität $\Leftrightarrow$ $\exists \delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq D$ und f ist auf $\dot{U}_\delta(z_0)$ beschränkt.

Beweis

$\Rightarrow$: klar

$\Leftarrow$: $M := sup_{z \in U_\delta(z_0)} |f(z)|$. Def: $g : D \to \mathbb{C}$ durch:

$$g(z) := \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z) & , z \in \dot{D} \\ 0 & , z = z_0 \end{cases}$$

Für $z \in \dot{U}_\delta(z_0)$: $\left|\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}\right| = \left|\frac{g(z)}{z-z_0}\right| = |f(z)(z - z_0)| \leq M|z - z_0|$
$\Rightarrow g$ ist komplex db in z_0, also $g \in H(D)$ und $g'(z_0) = 0$.
Fall 1: $g = 0$ auf D. Dann: $f = 0$ auf $\dot{D}$
Fall 2: $g \neq 0$ auf D. Es ist $g(z_0) = g'(z_0) = 0$. 11.8 $\Rightarrow$ $\exists h \in H(D) : g(z) = (z - z_0)^2 h(z) \, \forall z \in D$.
Dann: $h = f$ auf $\dot{D}$. ■

Satz 13.2
z_0 ist ein **Pol** von $f :\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}, \exists g \in H(D)$ mit:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m} \, \forall z \in \dot{D} \text{ und } g(z_0) \neq 0.$$

I. d. Fall ist m eindeutig bestimmt und heißt die **Ordnung des Pols** z_0 von f

Beweis
Seien $m, l \in \mathbb{N}$, $g, h \in H(D)$, $g(z_0) \neq 0 \neq h(z_0)$ und $\frac{g(z)}{(z-z_0)^m} = f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^l} \, \forall z \in \dot{D}$.
Annahme: $m > l$, also $m - l \geq 1$. $h(z_0) \neq 0$. $\exists \delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq D$ und $h(z) \neq 0 \, \forall z \in U_\delta(z_0)$.
Für $z \in \dot{U}_\delta(z_0) : \frac{g(z)}{h(z)} = (z-z_0)^{m-l} \overset{z \to z_0}{\Rightarrow} g(z_0) = 0$. Wid! Also: $m \leq l$. Analog: $l \leq m$. ■

Satz 13.3
Hat f in z_0 einen Pol, so gilt: $|f(z)| \to \infty \, (z \to z_0)$

Beweis
Folgt aus 13.2 ■

Beispiele:
(1) $f(z) = \frac{1}{z}$. f hat im Nullpunkt einen einfachen Pol.
(2) $f(z) = \frac{e^z}{z^{17}}$. f hat in 0 einen Pol der Ordnung 17.

Definition
z_0 heißt eine **wesentliche Singularität** von $f :\Leftrightarrow z_0$ ist nicht hebbar und kein Pol von f.

Beispiel
$f(z) = e^{\frac{1}{z}} \quad (D = \mathbb{C}, z_0 = 0)$
$z_n := \frac{1}{n}$, $f(z_n) = e^n \to \infty (n \to \infty)$, $z_n \to 0$. 13.1 $\Rightarrow$ 0 ist nicht hebbar.
$w_n := \frac{i}{n} = -\frac{1}{in}$. $|f(w_n)| = |e^{-in}| = 1 \, \forall n \in \mathbb{N}$, $w_n \to 0$. 13.3 $\Rightarrow z_0 = 0$ ist kein Pol von f. f hat also in $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität.

Satz 13.4 (Satz von Casorati-Weierstraß)
f habe in z_0 eine wesentliche Singularität und es sei $\delta > 0$ so, dass $U_\delta(z_0) \subseteq D$. Dann:

$$\overline{f(\dot{U}_\delta(z_0))} = \mathbb{C}$$

d.h. ist $b \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$, so existiert ein $z \in \dot{U}_\delta(z_0) : |f(z) - b| < \varepsilon$.

Beweis
Sei $b \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$. Ann: $|f(z) - b| \geq \varepsilon \forall z \in \dot{U}_\delta(z_0)$. $g := \frac{1}{f-b}$. Dann: $g \in H(\dot{U}_\delta(z_0))$ und $|g| \leq \frac{1}{\varepsilon}$ auf $\dot{U}_\delta(z_0)$. 13.1 $\Rightarrow g$ hat in z_0 eine hebbare Singularität. Kurz: $g \in H(U_\delta(z_0))$
Fall 1: $g(z_0) \neq 0$. O.B.d.A: $g(z) \neq 0 \forall z \in U_\delta(z_0)$. $f = \frac{1}{g} + b$ auf $\dot{U}_\delta(z_0) \Rightarrow f$ hat in z_0 eine hebbare Singularität.
Fall 2: $g(z_0) = 0$. 11.8 $\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}, \varphi \in H(U_\delta(z_0)) : g(z) = (z - z_0)^m \varphi(z) \forall z \in U_\delta(z_0)$ und $\varphi(z_0) \neq 0$. O.B.d.A: $\varphi(z) \neq 0 \forall z \in U_\delta(z_0)$. Def: $\Psi : D \to \mathbb{C}$ durch:

$$\Psi(z) = \begin{cases} \frac{1}{\varphi(z)} & , z \in U_\delta(z_0) \\ (z - z_0)^m (f(z) - b) & , z \in \dot{D} \end{cases}$$

Ψ ist wohldefiniert: Für $z \in \dot{U}_\delta(z_0) : \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{(z-z_0)^m}{g(z)} = (z - z_0)^m (f(z) - b)$. Dann: $\Psi \in H(D)$ und $\Psi(z_0) = \frac{1}{\varphi(z_0)} \neq 0$.
$h(z) := \Psi(z) + b(z - z_0)^m$ $(z \in D)$. Klar: $h \in H(D)$
$h(z_0) = \Psi(z_0) \neq 0$. Weiter: $\frac{h(z)}{(z-z_0)^m} = \frac{\Psi(z)}{(z-z_0)^m} + b = f(z) - b + b = f(z) \forall z \in \dot{D} \overset{13.2}{\Rightarrow} f$ hat in z_0 einen Pol. Wid! ■

Satz 13.5 (Klassifikation)
Die isolierte Singularität z_0 von f ist

(1) hebbar $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq D$ und f ist auf $U_\delta(z_0)$ beschränkt.

(2) ein Pol von $f \Leftrightarrow |f(z)| \to \infty$ $(z \to z_0)$

(3) wesentlich $\Leftrightarrow \forall \delta > 0$ mit $U_\delta(z_0) \subseteq D$ gilt: $\overline{f(\dot{U}_\delta(z_0))} = \mathbb{C}$

Beweis
(1) 13.1

(2) $\Rightarrow$: 13.3
$\Leftarrow$: Vorr. und 13.1 $\Rightarrow z_0$ nicht hebbar. Vorr. und 13.4 $\Rightarrow z_0$ nicht wesentlich

(3) $\Rightarrow$: 13.4
$\Leftarrow$: Vorr. und 13.1 $\Rightarrow z_0$ ist nicht hebbar. Vorr. und 13.3 $\Rightarrow z_0$ ist kein Pol! ■

Beispiele:
(i) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. Übung: $f(\dot{U}_\delta(0)) = \mathbb{C} \backslash \{0\}$ $\forall \delta > 0$.

(ii) $f(z) = \sin \frac{1}{z}$. Übung: $f(\dot{U}_\delta(0)) = \mathbb{C}$ $\forall \delta > 0$.