

# Stochastische Prozesse

## Stoffzusammenfassung

Joachim Breitner

10. Januar 2017

Diese Zusammenfassung ist natürlich alles andere als vollständig und zu knapp, um immer alle Aussagen mit Voraussetzungen korrekt wiederzugeben. Man verwende sie mit Vorsicht.

## 1 Vokabeln, Definitionen und äquivalente Charakterisierungen

### 1.1 Markov-Ketten in diskreter Zeit

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, X_n : \Omega \rightarrow S$	Markov-Kette mit Zustandsraum $S$
$P = (p_{ij})_{i,j \in S}$	$P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = p_{i_n i_{n+1}}$
$P^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})_{i,j \in S}$	Übergangsmatrix mit Übergangswahrscheinlichkeiten
$i \rightsquigarrow j$	$n$ -Schritt-Übergangsmatrix mit $n$ -Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten
$i \leftrightarrow j$	$\exists n \in \mathbb{N} p_{ij}^{(n)} > 0$ , „ $i$ führt nach $j$ “
$J \subseteq S$ abgeschlossen	$i \rightsquigarrow j \wedge j \rightsquigarrow i$ , „ $i$ kommuniziert mit $j$ “
$(X_n)$ irreduzibel	$\nexists j \in J, i \in S \setminus J : i \rightsquigarrow j$
$T_i$	$(p_{ij}, i, j \in S)$ ist stochastische Matrix
$f_{ij}^{(n)}$	$(X_n)$ hat nur eine Äquivalenzklasse bzgl. „ $\leftrightarrow \vee =$ “
$f_{ij}^*$	$\inf\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = i\}$ , „Ersteintrittszeit“
$i$ rekurrent	$P(T_j = n \mid X_0 = i)$ , insbesondere $f_{ij}^{(1)} = p_{ij}$
$i$ transient	$\sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = P_i(T_j < \infty)$
$\nu : S \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$	$f_{ii}^* = 1$
$\nu$ invariant	$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \infty = E_i(\sum_{n=0}^{\infty} 1_{X_n=i})$ , die erwartete Zahl der Besuche.
$\gamma_k : S \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$	$i$ nicht rekurrent
$m_i$	Maß
$i$ positiv rekurrent	Verteilung, wenn gilt: $\sum_{a \in S} \nu(a) = 1$
	$\sum_{i \in S} \nu(i) p_{ij} = \nu(j)$ , also $\nu = \nu P$
	$E_k(\sum_{n=1}^{T_k} 1_{(X_n=i)})$ , Besucher pro Zyklus
	invariant, $0 < \gamma_k < \infty$ , eindeutig mit $\gamma_k(k) = 1$ , wenn $(X_n)$ irreduzibel, rekurrent.
	$(X_n)$ irreduzibel, transient: stationäre Verteilung existiert nicht.
	$E_i(T_i) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{ii}^{(n)} + \infty \cdot (1 - f_{ii}^*)$
	$i$ transient $\implies m_i = \infty$ .
	$m_i < \infty$
	$(X_n)$ irreduzibel: Stationäre Verteilung existiert $\iff$ ein/alle Zustände positive rekurrent. Dann: $\pi(i) = \frac{1}{m_i}$

$$\begin{aligned}
(Ph)(i) & \quad \sum_{j \in S} p_{ij} h(j), \text{ vergleiche Matrix-Vektor-Multiplikation.} \\
Ph \geq h & \implies h(X_n) \text{ Sub-Martingal} \\
Ph = h & \implies h(X_n) \text{ Martingal} \\
Ph \leq h & \implies h(X_n) \text{ Super-Martingal}
\end{aligned}$$

## 1.2 Markov-Ketten in stetiger Zeit

### 1.2.1 Poisson-Prozess

(A1)  $t \mapsto N(t, \omega) \in \{f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{N}_0 \mid f(0) = 0, f \text{ monoton wachsend, } f \text{ stetig von rechts}\}$

(A2) Unabhängige Zuwächse

(A3) Identisch verteilte Zuwächse

(A4) Ereignisse einzeln:  $P(N_h \geq 2) = o(h)$  für  $h \rightarrow 0$

Dann gilt:

- $\forall s, t \geq 0 : N_{s+t} - N_s \sim \mathcal{P}o(\lambda t)$
- Zeit zwischen Sprüngen  $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilt.

Intensitätsmatrix:

$$\begin{pmatrix}
-\lambda & \lambda & 0 & \dots & \\
0 & -\lambda & \lambda & 0 & \\
\vdots & 0 & -\lambda & \lambda & \\
& & & \ddots & \ddots
\end{pmatrix}$$

### 1.2.2 Der allgemeine Fall

Markov-Eigenschaft  $P(X_{t_n+h} = i_{n+1} \mid X_{t_k} = i_k, k = 1, \dots, n) = P(X_{t_n+h} = i_{n+1} \mid X_{t_n} = i_n) = P(X_{t+h} = i_{n+1} \mid X_t = i_n)$

$P(t) = (p_{ij}(t))$   $p_{ij}(t) := P(X_t = j \mid X_0 = i)$ , Übergangsmatrizenfunktion

$P_{ij}$  SÜMF  $\lim_{t \rightarrow 0} p_{ij}(t) = \delta_{ij}$ , „Standardübergangsmatrizenfunktion“

$Q = (q_{ij})$  Intensitätsmatrix

$$q_{ij} := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t) - \delta_{ij}}{t} = p'_{ij}(0)$$

Anschaulich: Kehrwert der Diagonalelemente sagt, wie lange die Kette in dem Zustand bleibt, die anderen Elemente geben die Wahrscheinlichkeit des nächsten Zustands an.

$$\begin{aligned}
q_i & \quad -q_{ii} \\
P \text{ konservativ} & \quad \sum_{i \in S} q_{ij} = 0
\end{aligned}$$

## 1.3 Brownsche Bewegung

Gauss-Prozess alle Fidis normalverteilt

Brownsche Bew.  $P(B_0 = 0) = 1$ ,  $P$ -f.a. Pfade stetig,  $B_t - B_s$  unabhängig von  $\mathcal{F}_s$ ,  $\mathcal{N}(0, t - s)$ -verteilt.

	$\iff EB_t = 0, \text{Cov}(B_s, B_t) = s \wedge t, \text{Gauss-Prozess mit } F\text{-f.s. stetigen Pfaden.}$
$P : \mathbb{R} \times \mathfrak{B} \rightarrow [0, 1]$	Stochastischer Kern
	$A \mapsto P(x, A)$ Wahrscheinlichkeitsmaß und $x \mapsto P(x, A)$ messbar
$\mathcal{G}$ Generator	$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(P_t - P_0)$
	Bei BB: $\mathcal{G}f = \frac{1}{2}f''$
Markov-Eigenschaft	$P(X_t \in A \mid \mathcal{F}_s) = P_{t-s}(X_s, A)$
$\mathcal{F}_\tau$	$\{A \in \mathcal{F} \mid \forall t \geq 0 : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$
Progressiv messbar	$\forall t \geq 0 : (s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ ist $\mathfrak{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ -messbar.

## 2 Formeln

Methode des ersten Besuchs:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^n f_{ij}^{(n)} p_{jj}^{(n-k)}$$

Übergangswahrscheinlichsgrenzwert bei Periode  $d_j$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{n \cdot d_j + r} = \frac{d_j}{m_j} \sum_{k=0}^{\infty} f_{ij}^{k \cdot d_j + r}$$

insbesondere ist  $p_{ij}^{(n)} \rightarrow 0$  für  $m_j = \infty$ , d.h.  $i$  transient oder null-rekurrent.

Chapman-Kolmogorov-Gleichungen

- diskret

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$$

- stetig

$$p_{ij}(t+s) = \sum_{k \in S} p_{ik}(t) p_{kj}(s)$$

- allgemein (eigentlich die Definition von stochastischem Kern)

$$P_{t+s}(x, A) = \int P_s(y, A) P_t(x, dy)$$

Kolmogorovsche Rückwärts-DGL:

$$P'(t) = QP(t) \text{ d.h. } p'_{ij}(t) = -q_i p_{ij}(t) + \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}(t)$$

Kolmogorovsch Vorwärts-DGL: *Wann genau gilt die?*

$$P'(t) = P(t)Q$$

Ist  $S$  endlich, kann man  $P(t) = e^{tQ}$  schreiben.

Erfüllt  $Q$  die Bedingungen

$$\sum_{j \in S} q_{ij} = 0 \text{ und } 0 < \sup_{i \in S} |q_i| =: \lambda < \infty \quad ((*))$$

so gilt:

- Ist  $N$  Poissonprozess und  $Y_n$  Markov-Kette mit  $P = E + \frac{1}{\lambda}Q$ , dann ist  $X_t = Y_{N_t}$  Markov-Kette mit Intensitätsmatrix  $Q$ .
- $\mu$  ist invariantes Maß  $\iff \mu Q = 0$
- Ist  $X_n$  rekurrent, irreduzibel, dann gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = \frac{1}{m_j q_j}$

Ist  $(B_t)$  eine Brownsche Bewegung, dann auch:

- $(-B_t), (B_{a+t} - B_a), (cB_{\frac{t}{c^2}})$
- Zeitumkehr:  $(tB_{\frac{1}{t}})$
- Spiegelungsprinzip: Der nach  $\tau$  gespiegelte Prozess.

Eigenschaften der Brownschen Bewegung:

- $\sup B_t = \infty, \inf B_t = -\infty$ , also unendlich oft weit hoch und runter.
- $P$ -fast-sicher nie Lipschitzs-Stetig
- Totalvariation  $\infty$ , quadratische Variation  $\xrightarrow{P} t$ .
- Stochastischer Kern  $P_t(x, \cdot) = \mathcal{N}(x, t)$
- $\mathcal{G}f = \frac{1}{2}f''$
- Ist  $\tau$  endliche Stoppzeit, dann ist  $(B_{\tau+t} - B_\tau)$  verteilt wie  $(B_t)$  und unabhängig von  $\mathcal{F}_\tau$ .
- Identisch verteilt sind:  $M_t := \sup_{0 \leq s \leq t} B_s, M_t - B_t, |B_t|$
- $P$ -fast-sicher Nullstellenmenge perfekt

Invarianzprinzip von Dansker: Ist  $E\xi_i = 0, 0 < \text{Var}(\xi_i) =: \sigma^2 < \infty, S_k = \sum_{j=1}^k \xi_j, Y_t = S_{[t]} + (t - [t])\xi_{[t]+1}, (X_t^{(n)}) := \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}Y_{nt}$ , dann konvergieren die Wahrscheinlichkeitsmaße  $P_n$  schwach gegen  $P$ , wobei  $P$  so ist, dass die Projektionen  $\pi_t$  eine Brownsche Bewegung sind.

## 3 Wichtige Beweismethoden

### 3.1 Konvergenz gegen stationäre Verteilung

Voraussetzungen:  $(X_n)$  irreduzibel, aperiodisch, positiv rekurrent. „Kopplungs-Argument“:  $(Y_n)$  Kette mit gleicher Übergangsmatrix,  $Y_n \sim \pi, T := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = Y_n\}$ .

- Zeige  $P(T < \infty) = 1$
- Definiere

$$Z_n := \begin{cases} X_n, n \leq T \\ Y_n, n > T \end{cases}$$

- Schätze ab

$$|p_{ij}^{(n)} - \pi(j)| \leq 2 \cdot P_\nu(T > n) \rightarrow P(T = \infty) = 0$$

### 3.2 $\mu Q = 0 \iff \mu$ stationäre Verteilung

- $P'(t) = P(t)Q = QP(t)$
- $\implies P(t) = E + Q \int_0^t P(s)ds = E + \int_0^t P(s)dsQ$
- $\implies \mu = \mu P(t) = \mu + \int_0^t \mu P(s)dsQ = \mu + t \cdot (\mu Q) = \mu$

### 3.3 Solidaritätsprinzip

$i$  rekurrent,  $j \in K(i)$ , also  $\exists m, n \in \mathbb{N} : p_{ij}^{(m)} p_{ji}^{(n)} > 0$ . Dann

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{jj}^{(k)} \geq \sum_{k=0}^{\infty} p_{jj}^{(n+m+k)} \geq \sum_{k=0}^{\infty} p_{ji}^{(n)} p_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(m)} = p_{ij}^{(m)} p_{ji}^{(n)} \sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}^{(k)} = \infty$$

## 4 Verteilungen

- $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ :  $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sigma})^2)$
- $\text{Exp}(\lambda)$ :  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ,  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ,  $EX = \frac{1}{\lambda}$ ,  $\text{Var } X = \frac{1}{\lambda^2}$ .
- $\mathcal{Po}(\lambda)$ :  $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ ,  $EX = \text{Var } X = \lambda$ .