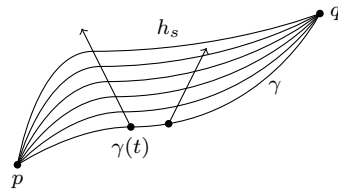


# Kapitel 8.

## Geodätische und die Exponentialabbildung

**Heuristik:** Geodätische sind Minimalstellen des Energiefunktional  $\gamma \mapsto E(\gamma) = \int \|\dot{\gamma}\|^2$ . Was sind kritische Punkte dieser Abbildung? Für  $f \in C^\infty(M)$  ist  $p$  kritischer Punkt, wenn alle Richtungsableitungen verschwinden, das heißt  $0 = X(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f(c(t)))$ .



Eine „Kurve“ durch  $\gamma$  ist eine sogenannte **glatte Variation**  $h: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ ,  $h(s, t) = h_s(t)$  mit  $h_0 = \gamma$  und  $h_s(0) = p$ , sowie  $h_s(1) = q$  für alle  $s \in [0, 1]$ . Dann ist

$$X(t) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} h_s(t)$$

ein glattes Vektorfeld entlang  $\gamma$ . Ferner gilt  $X(0) = 0$  und  $X(1) = 0$ . Nun betrachte

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} E(h_s) = \int_0^1 \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \left\langle \frac{d}{dt} h_s(t), \frac{d}{dt} h_s(t) \right\rangle \\ &= \int_0^1 2 \left\langle \nabla_s \frac{d}{dt} h_s(t), \frac{d}{dt} h_s(t) \right\rangle \\ &= \int_0^1 2 \left\langle \nabla_t \underbrace{\frac{d}{ds} h_s(t)}_{=X(t)}, \frac{d}{dt} h_s(t) \right\rangle \\ &= \int_0^1 2 \left\langle \nabla_t X, \frac{d}{dt} h_s(t) \right\rangle \\ &= 2 \int_0^1 \frac{d}{dt} \left\langle X, \frac{d}{dt} h_s(t) \right\rangle - \left\langle X, \nabla_t \frac{d}{dt} h_s(t) \right\rangle \\ &= \underbrace{2 \int_0^1 \frac{d}{dt} \left\langle X, \frac{d}{dt} h_s(t) \right\rangle}_{=0} - 2 \int_0^1 \left\langle X, \nabla_t \frac{d}{dt} h_s(t) \right\rangle \\ &= -2 \int_0^1 \langle X(t), \nabla_t \dot{\gamma}(t) \rangle dt \end{aligned}$$

**Definition 8.1** Eine glatte Kurve  $c$  in  $M$  heißt **Geodätische**<sup>1</sup>, wenn  $\nabla_t \dot{c} \equiv 0$  gilt.

Ist  $c$  Geodätische, so ist  $c$  proportional zur Bogenlänge parametrisiert, das heißt  $\|\dot{c}\| = \text{const}$ , denn  $\frac{d}{dt} \|\dot{c}(t)\|^2 = \frac{d}{dt} \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle = 2 \langle \nabla_t \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle = 0$ . Mit  $c$  ist auch jede affine Umparametrisierung  $t \mapsto c(at + b)$  eine Geodätische.

**Proposition 8.2** Für jedes  $p \in M$  und  $v \in T_p M$  existiert genau eine Geodätische  $\gamma_{p,v}: [0, \varepsilon] \rightarrow M$  mit  $\gamma_{p,v}(0) = p$  und  $\dot{\gamma}_{p,v}(0) = v$ . Zudem hängt  $\gamma_{p,v}$  glatt von  $p$  und  $v$  ab.

**Beweis** (A) Es sei  $(\varphi, U)$  eine Karte um  $p$ ,  $\gamma^i(t) = \varphi^i(\gamma(t))$ . Dann besitzt das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{cases} 0 = \nabla_t \dot{\gamma}|_t = \sum_k \left( \ddot{\gamma}^k(t) + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t) \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{\gamma(t)} \\ \gamma^i(0) = \varphi^i(p) \\ \dot{\gamma}^i(0) = \xi_p^i, \quad v = \sum \xi_p^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung (lokal), welche glatt von den Startwerten  $p$  und  $v$  abhängt.

(B) (Alternativ) Ist  $(\varphi, U)$  eine Karte von  $M$  um  $p$ , dann ist

$$\bar{\varphi}: \begin{cases} TM|_U & \rightarrow \mathbb{R}^{2m} \\ X_p = \sum \xi_p^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p & \mapsto \bar{\varphi}(X_p) = (\varphi^1(p), \dots, \varphi^m(p), \xi_p^1, \dots, \xi_p^m) \\ & =: (y^1, \dots, y^{2m}) \end{cases}$$

eine Karte von  $TM$ . Es sei  $S$  das durch

$$S: \begin{cases} TM & \rightarrow TM \\ X = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} & \mapsto \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial y^i} - \sum_{i,j,k=1}^m \Gamma_{ij}^k \xi^i \xi^j \frac{\partial}{\partial y^{m+k}} \end{cases}$$

definierte glatte Vektorfeld auf  $TM$ .  $g^t$  ist genau dann Integralkurve von  $S$  durch  $X_p = \sum \xi_p^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ , wenn

$$\frac{d}{dt} g^t = \dot{g}^t = S(g^t) \text{ und } g^0 = X_p.$$

Setzt man  $\bar{\varphi}(g^t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^m(t), \eta^1(t), \dots, \eta^m(t))$ , so ist dies genau dann der Fall, wenn gilt:

$$\begin{aligned} (\dot{\gamma}^1, \dots, \dot{\gamma}^m, \dot{\eta}^1, \dots, \dot{\eta}^m) &= \left( \eta^1, \dots, \eta^m, -\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^1 \eta^i \eta^j, \dots, -\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^m \eta^i \eta^j \right) \\ \rightsquigarrow \eta^i &= \dot{\gamma}^i \text{ und } \dot{\eta}^i = -\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^i \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \end{aligned}$$

und

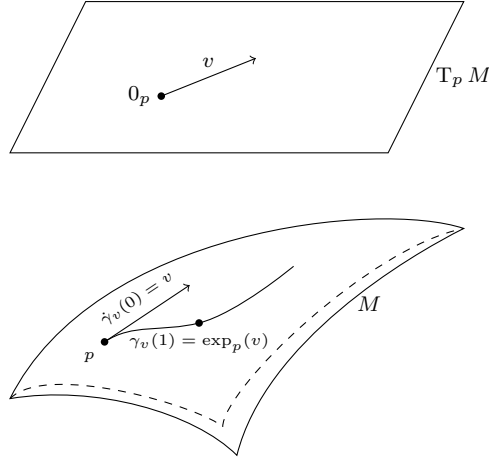
$$(\gamma^1(0), \dots, \gamma^m(0), \eta^1(0), \dots, \eta^m(0)) = \bar{\varphi}(X_p) = (\varphi^1(p), \dots, \varphi^m(p), \xi_p^1, \dots, \xi_p^m)$$

also genau dann, wenn

$$\gamma(t) = \bar{\varphi}^{-1}(\gamma^1(t), \dots, \gamma^m(t))$$

eine Geodätische durch  $p$  mit  $\dot{\gamma}(0) = X_p$  ist. Der maximale Fluss  $g^t$  von  $S$  heißt **geodätischer Fluss**. Mit Satz 4.9 folgt die Aussage der Proposition.  $\square$

<sup>1</sup>Die Äquivalenz zur bereits bekannten Definition wird in Kürze gezeigt.



Für  $v \in T_p M$  sei  $\gamma_v(t) = \pi(g^t(v))$  die eindeutige Geodätische mit  $\gamma_v(0) = p$  und  $\dot{\gamma}_v(0) = v$ . Ist  $\delta \in \mathbb{R}$  und  $c(t) = \gamma_v(\delta t)$ , so ist  $c$  eine Geodätische durch  $p$  mit  $\dot{c}(0) = \delta v$ , das heißt  $c = \gamma_{\delta v}$ , beziehungsweise  $\gamma_{\delta v}(t) = \gamma_v(\delta t)$ .

Der Definitionsbereich  $\mathcal{D}_S$  des geodätischen Flusses ist eine offene Menge in  $\mathbb{R} \times T_p M$  und somit sind sowohl  $\mathcal{D} = \{v \in T M \mid (1, v) \in \mathcal{D}_S\}$ , als auch  $\mathcal{D}_p = \mathcal{D} \cap T_p M$  offen für alle  $p \in M$  (in  $T M$ , beziehungsweise  $T_p M$ ). Weiterhin gilt  $0_p \in \mathcal{D}_p$ .

**Definition 8.3** Die Abbildung  $\exp_p: \mathcal{D}_p \rightarrow M$ ,  $v \mapsto \gamma_v(1)$  heißt **Exponentialabbildung**.

Es wurde bereits gezeigt, dass  $\nabla_t \dot{\gamma}_v \equiv 0$  ist (Geodätische Differentialgleichung). Die Exponentialabbildung ist nach Satz 4.6 glatt. Es gilt  $\exp_p(0_p) = p$ . Zur Berechnung des Differentials von  $\exp_p$  in  $0_p$

$$\exp_{p*0_p}: T_{0_p} T_p M \rightarrow T_p M$$

identifiziert man  $T_{0_p} T_p M$  mit  $T_p M$ . Es gilt

$$\exp_{p*0_p}(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp_p(tv) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_{tv}(1) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_v(t) = \dot{\gamma}_v(0) = v,$$

also  $\exp_{p*0_p} = \text{id}_{T_p M}$ . Es existiert für alle  $p \in M$  eine Umgebung  $V$  von  $0_p \in T_p M$  und  $U$  von  $p$ , so dass  $\exp_p: V \rightarrow U$  ein Diffeomorphismus ist. Wählt man eine Orthonormalbasis  $e_1, \dots, e_m$  von  $T_p M$  und setzt

$$\psi: T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m, v = \sum_i b^i e_i \mapsto (b^1, \dots, b^m),$$

so ist  $(\psi \circ \exp_p|_U^{-1}, U)$  eine Karte von  $M$  um  $p$ . Im Allgemeinen ist dies keine Isometrie!

**Definition 8.4** Diese Karte bezeichnet man als **Riemannsche Normalkoordinaten**.

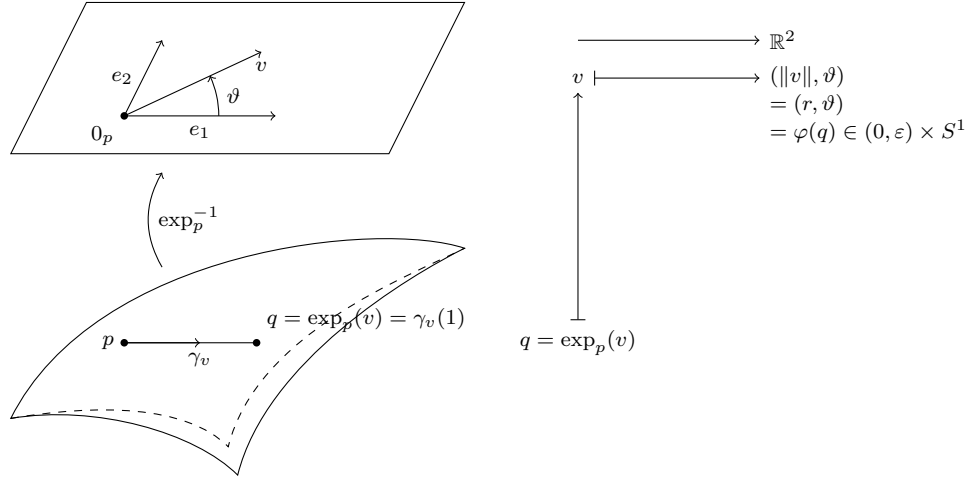
**Proposition 8.5** In Riemannschen Normalkoordinaten gilt für alle  $i, j, k \leq m$ :

- (i)  $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$
- (ii)  $\Gamma_{ij}^k(0) = 0$
- (iii)  $\partial_k g_{ij}(0) = \left. \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right|_0 = 0$

Der Beweis sei zur Übung überlassen.

## 1. Polarkoordinaten

Es ist  $\varphi = (r, \vartheta^1, \dots, \vartheta^{m-1})$  die Hintereinanderausführung von Riemannschen Normalkoordinaten des  $\mathbb{R}^m$ .



Die Umkehrabbildung ist ein Diffeomorphismus

$$f: (0, \varepsilon) \times S^{m-1} \rightarrow U \subseteq M, (t, v) \mapsto \exp_p(tv) = \gamma_v(t).$$

Für jedes  $v \in S^{m-1}$  ist  $t \mapsto f(t, v) = \gamma_v(t)$  eine Geodätische in  $M$ . Wir bezeichnen solche Geodätischen im Folgenden als **radiale Geodätische**.

**Lemma 8.6 (Gauß-Lemma)** *Jede radiale Geodätische  $\gamma_v$  ist orthogonal zu der geodätischen Sphäre*

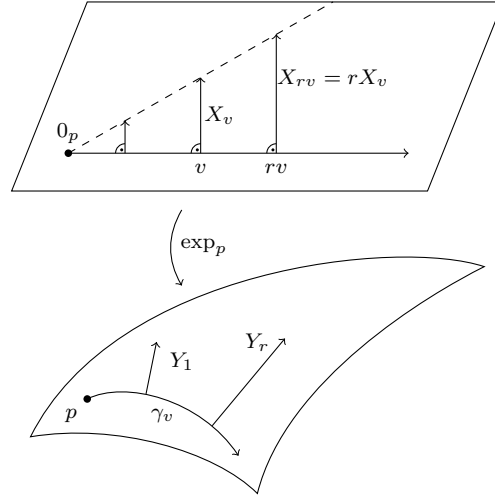
$$S_r = \{q \in M \mid \exists v \in T_p M : \|v\| = r \text{ und } q = \exp_p(v)\}.$$

**Beweis** Man zeigt das Folgende: Ist  $X$  ein Vektorfeld auf  $S^{m-1}$  und bezeichnet man seine Fortsetzung auf  $(0, \varepsilon) \times S^{m-1}$  „ $\subseteq \mathbb{B}_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$  bzw.  $\mathbb{B}_\varepsilon(0_p) \setminus \{0_p\} \subseteq T_p M$  mit  $X_{rv} = X_v$ , so ist

$$Y_q = Y_{f(r,v)} = f_{*(r,v)}(0, X_v) = \exp_{p*}(rX_v)$$

orthogonal zu

$$\frac{\partial}{\partial r} \Big|_q = \frac{d}{dt} \Big|_{t=r} \exp_p(tv) = \dot{\gamma}_v(r)$$



$Y(t) = Y_{\gamma_v(t)}$  als Vektorfeld entlang  $\gamma_v$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=r} \left\langle Y, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle_{\gamma_v(t)} &= \langle \nabla_t Y|_r, \dot{\gamma}_v(r) \rangle + \langle Y(r), \underbrace{\nabla_t \dot{\gamma}_v|_r}_{=0} \rangle \\ &= \langle \nabla_{Y(r)} \dot{\gamma}_v(r), \dot{\gamma}_v(r) \rangle + \langle \underbrace{[\dot{\gamma}_v(r), Y(r)]}_{=[f_* (\frac{\partial}{\partial r}), f_*(0, X_v)]} , \dot{\gamma}_v(r) \rangle \\ &= \frac{1}{2} Y(t) \|\dot{\gamma}_v\|^2 = 0. \end{aligned}$$

$= f_* [\frac{\partial}{\partial r}, X] = 0$

Ferner gilt

$$\left\langle Y(r), \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle_{\gamma_v(r)} = \left\langle \exp_{p*}(r X_v), \dot{\gamma}_v(r) \right\rangle \xrightarrow{r \rightarrow 0} \left\langle \exp_{p*}(0_p), v \right\rangle = 0,$$

also  $\left\langle Y, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle \equiv 0$ . □

**Bemerkung** Insbesondere gilt für alle  $i \leq m - 1$ :

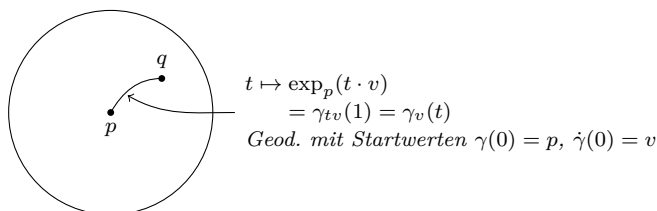
$$\left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \vartheta^i} \right\rangle = 0.$$

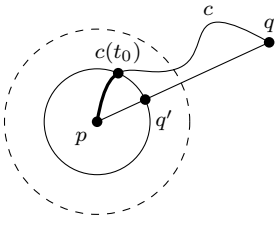
**Satz 8.7** Für jedes  $p \in M$  existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so dass für alle  $q \in \mathbb{B}_\varepsilon(p)$  genau eine minimierende Geodätische von  $p$  nach  $q$  existiert, das heißt eine Geodätische  $\gamma$  im Sinne der Definition 8.1 mit  $\mathcal{L}(\gamma) = d(p, q)$ . Ist  $q \notin \exp_p(\mathbb{B}_\varepsilon(0_p)) = \mathbb{B}_\varepsilon(p)$ , so existiert ein  $q' \in \partial \mathbb{B}_\varepsilon(p)$  mit

$$d(p, q) = \varepsilon + d(q', q).$$

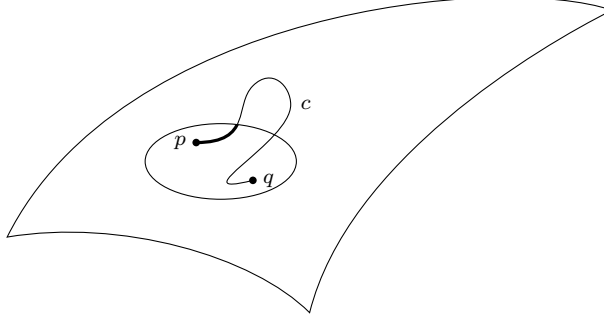
Ferner, ist  $\delta < \varepsilon$  und  $q \notin \mathbb{B}_\delta(p)$ , so existiert ein  $q' \in \mathbb{B}_\delta(q)$  mit

$$d(p, q) = \delta + d(q', q)$$





**Beweis** Es sei  $\varepsilon > 0$  so, dass auf  $\mathbb{B}_\varepsilon(p)$  Polarkoordinaten  $\varphi = (r, \vartheta^1, \dots, \vartheta^{m-1})$  existieren. Sei weiter  $c: [0, 1] \rightarrow M$  eine beliebige glatte Kurve von  $p$  nach  $q$  mit Koordinaten  $\varphi(c(t)) = (r(t), \vartheta^1(t), \dots, \vartheta^{m-1}(t))$ .



Das Bild von  $c$  ist nicht notwendig in  $\mathbb{B}_\varepsilon(0)$  enthalten

Für  $t_0 = \inf\{t \in [0, 1] \mid c(t) \notin \mathbb{B}_\varepsilon(p)\}$  ist  $c|_{[0, t_0]}$  eine Kurve zu  $\mathbb{B}_\varepsilon(p)$ . Es gilt

$$\left\| \frac{\partial}{\partial r} \Big|_t \right\| = \|\dot{\gamma}_w(t)\| = \|w\| = 1.$$

Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} \|\dot{c}(t)\| &= \|\dot{c}(t)\| \left\| \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{c(t)} \right\| \\ &\geq \left| \left\langle \dot{c}(t), \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{c(t)} \right\rangle \right| \\ &= \left| \left\langle \dot{r}(t) \frac{\partial}{\partial r} + \sum_{i=1}^{m-1} \dot{\vartheta}^i(t) \frac{\partial}{\partial \vartheta^i}, \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{c(t)} \right\rangle \right| \\ &= \left| \left\langle \dot{r}(t) \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{c(t)}, \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{c(t)} \right\rangle \right| \\ &= |\dot{r}(t)|, \end{aligned}$$

wobei die Gleichheit genau dann gilt, wenn  $\dot{c}(t)$  und  $\frac{\partial}{\partial r} \Big|_{c(t)}$  linear abhängig sind.

$$\mathcal{L}(c) = \int_0^{t_0} \|\dot{c}\| + \int_{t_0}^T \|\dot{c}\| \geq \int_0^{t_0} \left| \left\langle \dot{c}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle \right| = \int_0^{t_0} |\dot{r}| = r(t_0)$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn  $\vartheta^1(t), \dots, \vartheta^{m-1}(t)$  konstant sind und  $\dot{r}(t) \geq 0$  gilt, also genau dann, wenn  $c$  eine monotone Umparametrisierung von  $t \mapsto \exp_p(tv)$  für  $v \in S^{m-1}$  ist.

Für den zweiten Teil sei  $\varepsilon$  so, dass Polarkoordinaten  $\varphi = (r, \vartheta^1, \dots, \vartheta^{m-1})$  um  $p$  existieren. Es sei  $q \in \mathbb{B}_\delta(p)$  und  $c$  sei eine glatte Kurve von  $p$  nach  $q$ . Für  $t_0 = \inf\{t \in [0, 1] \mid c(t) \notin \mathbb{B}_\delta(p)\}$  gilt dann:

$$\mathcal{L}(c) \geq \delta + d(c(t_0), q) \geq \delta + d(\partial \mathbb{B}_\delta(p), q),$$

also  $d(p, q) = \inf_c \mathcal{L}(c) \geq \delta + d(\partial \mathbb{B}_\delta(p), q)$ . Da  $\partial \mathbb{B}_\delta(p)$  kompakt ist, die Abstandsfunktion  $d(\cdot, q)$  auf  $\partial \mathbb{B}_\delta(p)$  ihr Minimum in  $q'$  an. Damit gilt

$$\begin{aligned} d(q', q) &= d(\partial \mathbb{B}_\delta(p), q) \quad \text{und} \\ d(p, q) &= d(p, q') + d(q', q) = \delta + d(q', q) \end{aligned}$$

somit gilt dann die Behauptung.  $\square$

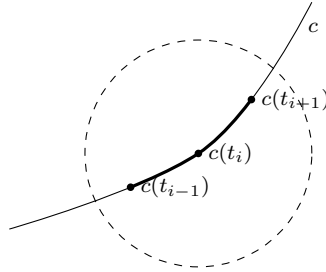
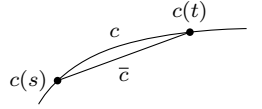
**Korollar 8.8** Für alle  $p \in M$  existiert ein  $\varrho > 0$ , so dass für alle  $q, q' \in \mathbb{B}_\varrho(p)$  genau eine minimierende Geodätische von  $q$  nach  $q'$  existiert.

**Beweis** Für  $q \in M$  existiert ein  $\varrho = \varrho(q) > 0$ , so dass  $\exp$  auf  $\mathbb{B}_\varrho(q)$  ein Diffeomorphismus ist. Da  $\exp : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  glatt und  $\mathcal{D}$  offen ist, existiert eine Umgebung  $U_q$  von  $q$ , so dass  $\exp_p : \mathbb{B}_{\frac{\varrho}{2}}(0_q) \rightarrow \mathbb{B}_{\frac{\varrho}{2}}(q')$  ein Diffeomorphismus ist für alle  $q' \in U_q$ . Für  $p \in M$  existiert nach Satz 8.7 ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $\overline{\mathbb{B}_\varepsilon(p)}$  kompakt ist. Die Überdeckung  $\bigcup_{q \in \overline{\mathbb{B}_\varepsilon(p)}} \mathbb{B}_{\frac{\varrho(q)}{2}}(q)$  besitzt eine endliche Teilüberdeckung. Für  $\varrho = \min_{i \leq k} \{\frac{\varrho(q_i)}{4}\}$  existieren auf jedem  $\mathbb{B}_{2\varrho}(q)$ ,  $q \in \overline{\mathbb{B}_\varepsilon(p)}$ , Polarkoordinaten; insbesondere existiert für  $q, q' \in \mathbb{B}_\varrho(p)$  eine eindeutige minimierende Geodätische von  $q$  nach  $q'$ .  $\square$

**Bemerkung** Die Geodätischen im obigen Korollar hängen stetig von ihren Endpunkten ab.

**Korollar 8.9** Es seien  $p, q \in M$  und  $c : [0, 1] \rightarrow M$  stückweise glatte Kurven von  $p$  nach  $q$ , so dass  $\mathcal{L}(c) = d(p, q)$ . Damit ist  $c$  eine umparametrisierte Geodätische im Sinne von Definition 8.1.

**Beweis** Die Kurve ist lokal längenminimierend, denn ist  $\bar{c}$  eine Kurve von  $c(s)$  nach  $c(t)$  mit  $\mathcal{L}(\bar{c}) < \mathcal{L}(c|_{[s,t]})$ , so wäre  $c|_{[0,s]} \cup \bar{c} \cup c|_{[t,1]}$  eine Kurve kürzer als  $c$ . Da  $c$  kompaktes Bild hat, existiert ein minimales  $\varrho > 0$  für alle  $c(t)$  wie in Korollar 8.8. Dann findet man eine Partition  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$  mit  $d(c(t_{i-1}), c(t_i)) < \frac{\varrho}{2}$ , so dass  $c|_{[t_{i-1}, t_{i+1}]}$  glatt ist.



Dann stimmt  $c|_{[t_{i-1}, t_{i+1}]}$  für jedes  $i < k$  mit der nach Korollar 8.8 eindeutigen Geodätischen (bis auf Umparametrisierung) überein.  $\square$

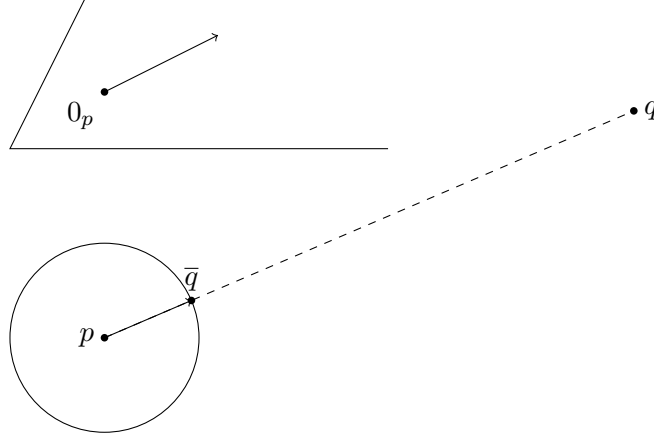
**Definition 8.10** Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit heißt **geodätisch vollständig**, wenn jede Geodätische auf ganz  $\mathbb{R}$  fortgesetzt werden kann.

**Satz 8.11 (Satz von Hopf-Rinow)** Für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i)  $M$  ist geodätisch vollständig, das heißt jede Geodätische existiert für alle Zeiten.
- (ii) Für alle  $p \in M$  gilt  $\mathcal{D}_p = T_p M$ , also  $\exp$  ist auf ganz  $M$  definiert.
- (iii) Es existiert ein  $p \in M$  mit  $\mathcal{D}_p = T_p M$ , also  $\exp_p$  ist auf  $T_p M$  für ein  $p \in M$  definiert.
- (iv) Abgeschlossene und beschränkte Teilmengen sind kompakt.
- (v)  $M$  ist vollständig (als metrischer Raum).

Jede dieser Eigenschaften impliziert, dass je zwei Punkte  $p, q$  in  $M$  durch eine minimierende Geodätische von  $p$  nach  $q$  verbunden werden können.

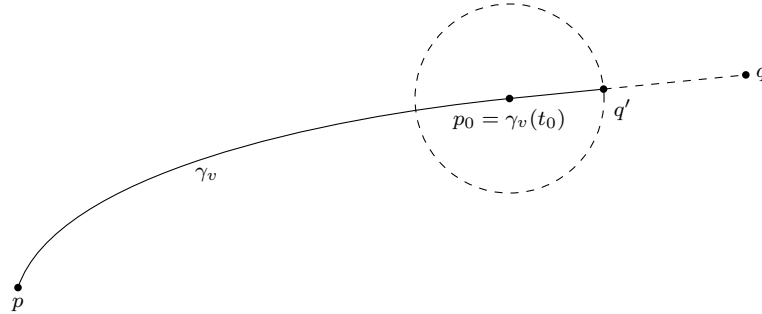
**Beweis** Man zeigt zunächst, dass es, falls (iii) für  $p \in M$  gilt, zu jedem  $q \in M$  eine minimierende Geodätische von  $p$  nach  $q$  gibt. Es gelte  $\mathcal{D}_p = T_p M$  und es sei  $q \in M$ .



Für  $\varepsilon > 0$  wie in Satz 8.7 ist  $\partial \mathbb{B}_{\frac{\varepsilon}{2}}(p)$  kompakt; es sei  $\bar{q} \in \partial \mathbb{B}_{\frac{\varepsilon}{2}}(p)$  ein Punkt minimalen Abstandes zu  $q$ . Dann gilt  $\bar{q} = \exp_p(\frac{\varepsilon}{2}v)$  für ein  $v \in T_p M$  mit  $\|v\| = 1$ .

*Behauptung:* Dann ist  $\gamma_v|_{[0, R]} : t \mapsto \exp_p(tv)$  minimierende Geodätische nach  $q$  für  $R = d(p, q)$ .

Es sei  $\mathcal{I} = \{t \in [0, R] \mid d(\gamma_v(t), q) = R - t\}$ . Dann ist  $\mathcal{I}$  nichtleer und abgeschlossen, denn  $t \mapsto d(\gamma_v(t), q) + t$  ist stetig.



Für  $t_0 \in \mathcal{I}$  und  $0 < \varrho < \varepsilon_0$  sei  $q' \in \partial \mathbb{B}_{\varrho}(\gamma_v(t_0))$  wie in Satz 8.7 angewandt auf  $p_0 = \gamma_v(t_0)$ . Dann gilt  $d(p_0, q) = \varrho + d(q', q)$  und es folgt:

$$\begin{aligned} d(p, q') &\geq d(p, q) - d(q', q) \\ &= d(p, q) - d(p_0, q) + \varrho \\ &= R - (R - t) + \varrho = t_0 + \varrho \end{aligned}$$

Damit ist die Verkettung von  $\gamma_v|_{[0, t_v]}$  und der minimalen Geodätischen von  $p_0$  nach  $q'$  nach Korollar 8.9 eine Geodätische. Aus der Eindeutigkeit von kurzen Geodätischen folgt, dass diese Zusammensetzung mit  $\gamma_v$  übereinstimmt. Es gilt also  $q' = \gamma_v(t_0 + \varrho)$  und mit  $d(\gamma_v(t_0 + \varrho), q) = d(p_0, q) - \varrho = R - (t_0 + \varrho)$  gilt  $t_0 + \varrho \in \mathcal{I}$ .

Wir können nun die einzelnen Implikationen zeigen. Dabei gelten (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (iii) offensichtlich.



(iii)  $\Rightarrow$  (iv): Es gelte  $\mathcal{D}_p = T_p M$  und es sei  $K \subseteq M$  abgeschlossen und beschränkt.

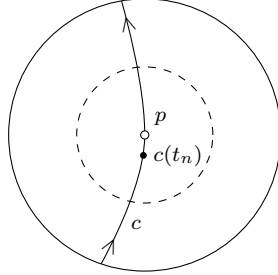
Dann existiert  $R$  mit  $K \subseteq \overline{\mathbb{B}}_R(p)$ . Da  $\overline{\mathbb{B}}_R(0_p)$  kompakt ist, ist auch  $K$  kompakt.

(iv)  $\Rightarrow$  (v): gilt offensichtlich

(v)  $\Rightarrow$  (i): Es sei  $c$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische mit maximalem Definitionsintervall  $\mathcal{I}$ .  $\mathcal{I}$  ist nichtleer und offen. Ist  $(t_n)$  eine Folge in  $\mathcal{I}$  mit Grenzwert  $t$ . Dann ist  $q_n = c(t_n)$  wegen

$$d(c(t_n), c(t_m)) \leq |t_m - t_n|$$

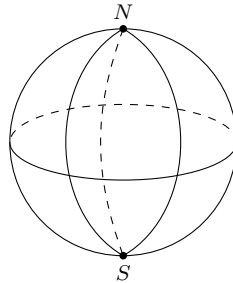
eine Cauchy-Folge und konvergiert somit gegen ein  $p \in M$ .



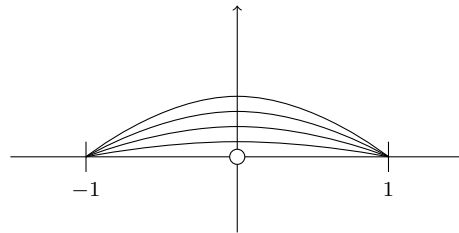
Es sei  $\rho > 0$  wie in Korollar 8.8. Für hinreichend großes  $n$  gilt dann  $|t_n - t| < \frac{\rho}{2}$ . Die nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische von  $q_n = c(t_n)$  mit Startvektor  $\dot{c}(t_n)$  existiert auf  $(-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2})$ , setzt also  $c$  bis zum Zeitpunkt  $|t_n| + \frac{\rho}{2} > |t|$  fort.  $\square$

**Bemerkungen/Beispiele** (1) Geodätische sind im Allgemeinen nicht eindeutig.

Betrachte die Einheitssphäre mit Geodätischen vom Nord- zum Südpol:



(2)  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$



(3)  $\mathbb{B}_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2$  ist geodätisch konvex aber nicht vollständig.

**Korollar 8.12** Es seien  $M$  eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $c$  eine Geodätische. Dann gilt:

(i)  $c$  ist lokal längenminimierend.

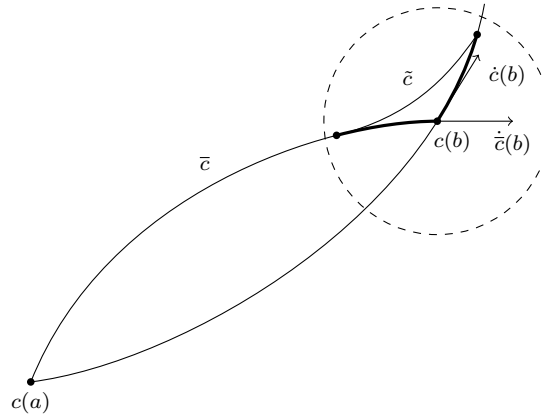
(ii) Falls es keine kürzere Geodätische von  $c(a)$  nach  $c(b)$  gibt, so ist  $c|_{[a,b]}$  minimal.

(iii) Falls es eine weitere Geodätische  $\bar{c}$  von  $c(a)$  nach  $c(b)$  mit  $\mathcal{L}(\bar{c}) = \mathcal{L}(c|_{[a,b]})$  gibt, so ist  $c|_{[a,b+\varepsilon]}$  für kein  $\varepsilon$  minimierend.

**Beweis** (i) Siehe Korollar 8.9.

(ii) Nach dem Satz von Hopf-Rinow existiert eine minimale Geodätische von  $c(a)$  nach  $c(b)$ . Ist  $c$  also die Kürzeste von  $c(a)$  nach  $c(b)$ , so ist  $c$  auch minimierend.

(iii) Ist  $\bar{c}$  eine weitere Geodätische von  $c(a)$  nach  $c(b)$ , so gilt  $\dot{c}(b) \neq \dot{\bar{c}}(b)$ .



Die zusammengesetzte Kurve kann keine Geodätische sein, da die Tangentialvektoren nicht übereinstimmen.

Für hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$  existiert dann nach Satz 8.7 eine minimierende Geodätische  $\tilde{c}$  von  $\bar{c}(b - \varepsilon)$  nach  $c(b + \varepsilon)$ . Die Länge von  $\bar{c}|_{[a, b - \varepsilon]} \cup \tilde{c}$  ist strikt kleiner als die Länge von  $c|_{[a, b + \varepsilon]}$ . Damit ist  $c|_{[a, b + \varepsilon]}$  nicht minimierend.  $\square$