3 Vertiefung der Theorie

Weiterhin sei $\emptyset \neq X \in \mathcal{B}_d$.

3.1 Nullmengen

Problem: $\mathcal{L}^1(X)$ ist Vektorraum, aber $\|f\|_1 = \int |f| dx$ ist keine Norm auf $\mathcal{L}^1(X)$, da $\int \mathbf{1}_N dx = 0$ für alle $N \in \mathcal{B}_d$ mit $\lambda(N) = 0$, z.B. $N = \mathbb{Q}, d = 1$.

Definition 3.1. Eine Menge $N \in \mathcal{B}_d$ mit $\lambda_d(N) = 0$ heißt (d-dimensionale, Borel-) Nullmenge (NM).

Bemerkung 3.2. a) Wir haben bereits die eindimensionalen Nullmengen $\mathbb{Q}$ und die Cantormenge C, sowie Nullmengen in höheren Dimensionen wie Hyperebenen und Graphen stetiger Funktionen gesehen.

b) Wenn $M, N \in \mathcal{B}_d$, $M \subset N$ und N eine Nullmenge ist, dann ist auch M eine Nullmenge.
Wenn $N_j \in \mathcal{B}_d$ Nullmengen sind, dann ist $N = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} N_j$ eine Nullmenge.

Beweis. Dass $N = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} N_j \in \mathcal{B}_d$ liegt, ist klar. Nach Satz 1.14 gilt:

$$0 \leq \lambda_d(N) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_d(N_j) = \sum_{j=1}^{\infty} 0 = 0 \Rightarrow \lambda_d(N) = 0$$

Damit sind abzählbare Mengen Nullmengen. Ferner gilt:

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{R}^{d-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{q_n\} \times \mathbb{R}^{d-1}$$

ist eine d-dimensionale Nullmenge, wobei $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$.
Beachte: $\mathbb{R} := \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}$ ist keine eindimensionale Nullmenge (Vereinigung nicht abzählbar). $\square$

c) Sei $A \in \mathcal{B}_d$. Nach Thm 1.25 gilt, dass A genau dann eine Nullmenge ist, wenn offene Intervalle I_j ($j \in \mathbb{N}$) existieren mit:

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j, \ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(I_j) \leq \epsilon.$$

d) Sei $N \in \mathcal{B}_d$ eine Borel-Nullmenge. Eine Teilmenge $M \subset N$ heißt dann Lebesque-Nullmenge. Es gibt ein $C \subset \mathbb{R}$ (Cantormenge) mit $C \notin \mathcal{B}_1$.
$\Rightarrow$ Dieses M ist <u>keine</u> Borel-Nullmenge (AE 3. kor IX 5.30)
Nach Aufgabe 3.1 ist

$$\mathcal{L}_d = \{A \subset \mathbb{R}^d : A = B \cup N,\ B \in \mathcal{B}_d, N \text{ ist Lebesgue-Nullmenge}\}$$

eine σ-Algebra und $\tilde{\lambda}_d(A) = \lambda_d(B)$ (wobei $A = B \cup N$ für $B \in \mathcal{B}_d$ und eine Nullmenge N) ist Maß auf $\mathcal{L}_d$. Ferner stimmt das Integral bezüglich $\tilde{\lambda}_d$ für Borelfunktionen f mit unserem Integral dem bezüglich λ_d überein.
Es gibt in (1.9) $\mathcal{L}_d = \mathcal{A}(\lambda_d)$ (AE 3: Theorem IX. 5. 7+8)
Ferner: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemannintegrierbar. Man kann zeigen, dass f außerhalb einer Lebesgueschen Nullmenge stetig ist. Da f beschränkt ist, ist es folglich integrierbar bezüglich dem fortgesetzen Lebesguemaß $\tilde{\lambda}_d$ und Riemannintegral und Lebesgueintegral stimmen überein (Elstrodt, Satz IV 6.1).

Definition 3.3. Eine Eigenschaft E besteht für fast alle *(f.a.)* $x \in X$ oder fast überall *(f.ü.)*, wenn es eine Nullmenge N gibt, sodass E für alle $x \in X \backslash N$ gilt.

Beispiel 3.4. Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Nach Korollar 2.24 ist die Menge $N := \{|f| = \infty\}$ eine Nullmenge, also: $f(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in X \backslash N$, also ist f fast überall endlich.

Lemma 3.5.
- *Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und sei $f = g$ (f.ü.). Dann ist g integrierbar und $\int_X f dx = \int_X g dx$.*
  Insbesondere kann man f durch $\tilde{f} := \mathbf{1}_{\{|f|<\infty\}} \cdot f$ ersetzen (vgl. Beispiel 3.4) und es gilt $\int_X f dx = \int_X \tilde{f} dx$).
- *Wenn $f, g : X \to [0, \infty]$ messbar und $f = g$ (f.ü.), dann gilt auch $\int_X f dx = \int_X g dx$.*

Beweis. Nach Voraussetzung: $\exists$ NM N mit $f(x) = g(x)$ $\forall x \in X \backslash N$.
Da g messbar ist, existiert:

$$\int_X |g| dx = \int_X \mathbf{1}_N |g| dx + \int_X \mathbf{1}_{X \backslash N} \underbrace{|g|}_{=|f|} dx = \int_X \mathbf{1}_N |f| dx \overset{\text{Lem 2.18}}{=} 0$$
$$\overset{\text{Bem 2.26}}{=} \int_X |f| dx < \infty$$

Nach Voraussetzung folgt mit Satz 2.23, dass g integrierbar ist.
Ferner liefert Satz 2.25:

$$0 \le \left| \int_N g(x) dx \right| \le \int_N |g(x)| dx \overset{\text{Lem 2.18}}{=} 0$$
$$\Rightarrow \int_X g dx \overset{Bem 2.26}{=} \underbrace{\int_N g dx}_{=0=\int_N f dx} + \int_{X \backslash N} g dx = \int_X f dx$$

Zweite Behauptung folgt genauso. $\square$

Definition 3.6. Funktionen $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar ($\forall n \in \mathbb{N}$) sind fast überall konvergent, wenn $f_n(x)$ für $n \to \infty$ und fast alle $x \in \overline{\mathbb{R}}$ konvergiert. Wenn $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ für fast alle $x \in \overline{\mathbb{R}}$, dann konvergiert f_n fast überall gegen f.

Lemma 3.7. *Seien $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar für alle $n \in \mathbb{N}$ und fast überall konvergent. Dann existiert eine messbare Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, sodass $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ (f.ü.).*
Jede andere messbare Funktion $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ (f.ü.) ist fast überall gleich f.
Bemerkung: Nicht jeder fast überall Limes messbarer Funktionen ist messbar.

Beweis. Nach Voraussetzung existiert eine Nullmenge N, sodass
$\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}},\ \forall x \in X\backslash N$.
Nach Satz 2.8 ist $\mathbf{1}_{X\backslash N} \cdot f_n$ messbar. Ferner konvergiert $\mathbf{1}_{X\backslash N} \cdot f_n$ für $n \to \infty$ punktweise gegen $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mit: $f(x) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(x), & x \in X\backslash N \\ 0, & x \in N \end{cases}$
Mit Satz 2.7 folgt, dass f messbar ist.
Nach der Konstruktion gilt: $f_n \xrightarrow[\text{(f.ü.)}]{n\to\infty} f$. Wenn $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} g(x)$ fast überall für eine messbare Funktion g, dann existiert eine Nullmenge N_1, sodass $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} g(x)$ ($\forall x \in X\backslash N_1$) $\Rightarrow f_n(x) \to f(x)$ und $f_n(x) \to g(x)$ $\forall x \notin N \cup N_1 =: N_2$ (Nullmenge). Mit der Eindeutigkeit des Limes folgt dann:
$f(x) = g(x)\ \forall x \in X\backslash N_2$. □

Beispiel. Sei $M \notin \mathcal{B}_1$ die Lebesgue-Nullmenge aus Bemerkung 3.2d), wobei $M \subset C$. Dann konvergiert $f_n = 0$ *(f.ü.)* gegen $f = \mathbf{1}_M$, da $f_n(x) = f(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash C$. C ist eine Nullmenge.
Aber: $f = \mathbf{1}_M$ ist nicht messbar.

Bemerkung 3.8. Es gibt folgende Variante des Satzes von der Monotonen Konvergenz. Seien $f_n : X \to [0, \infty]$ messbar ($\forall n \in \mathbb{N}$), sodass für jedes $n \in \mathbb{N}$ $f_n \leq f_{n+1}$ *(f.ü.)*.
Dann existiert eine messbare Funktion $f : X \to [0, \infty]$ mit $f_n \xrightarrow[\text{(f.ü.)}]{n\to\infty} f$ und $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n dx = \int_X f dx$.

Beweis. Nach Voraussetzung: $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists$ eine Nullmenge N_n mit $f_n(x) \leq f_{n+1}$, $\forall x \in X\backslash N_n$.
Die Menge $N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$ ist eine Nullmenge. Daraus folgt $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)\ \forall x \notin N,\ n \in \mathbb{N}$.
Setze $\tilde{f}_n = \mathbf{1}_{X\backslash N} \cdot f_n \Rightarrow \tilde{f}_n = f_n$ *(f.ü.)*, $\tilde{f}_n \leq \tilde{f}_{n+1}$, ($\forall n \in \mathbb{N}$).
Setze $f := \sup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{f}_n$ ist messbar.

$$\int f dx \overset{\text{Thm 2.19}}{=} \lim_{n\to\infty} \int \tilde{f}_n dx \overset{\text{Lem 3.5}}{=} \lim_{n\to\infty} \int f_n dx$$

□

3.2 Der Lebesguesche Konvergenzsatz

Theorem 3.9 (Lemma von Fatou)**.** *Seien $f_n : X \to [0,\infty]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ messbar. Dann gilt:*

$$\int_X \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)dx \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x)dx$$

Speziell konvergiere f_n fast überall gegen ein $f : X \to [0,\infty]$. Dann folgt:

$$\int_X f(x)dx \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x)dx$$

(Damit ist f integrierbar, falls $\left(\int f_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.)

Beweis. Setze $g_j := \inf_{n\geq j} f_n$ für jedes $j \in \mathbb{N}$. Dann folgt $g_j \leq g_{j+1}$ und für alle $j \in \mathbb{N}$ ist g_j nach Satz 2.7 messbar. Ferner gilt $\sup_{j\in\mathbb{N}} g_j = \varliminf_{n\to\infty} f_n$ und $g_j \leq f_n$ $(\forall n \geq j)$. Damit gilt:

$$\int_X \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_X \sup_{j\in\mathbb{N}} g_j(x)dx \overset{\text{Def 2.9}}{=} \sup_{j\in\mathbb{N}} \int_X g_j(x)dx$$

<u>Ferner</u>: $g_j \leq f_n$ $\forall n \geq j$. Mit Lem 2.18 folgt dann:

$$\begin{aligned}
&\int g_j(x)dx \leq \int f_n(x)dx \ (\forall n \geq j) \\
&\Rightarrow \int g_j(x)dx \leq \inf_{n\geq j} \int f_n(x)dx \\
&\Rightarrow \int \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)dx \leq \sup_{j\in N} \inf_{n\geq j} \int f_n(x)dx = \varliminf_{n\to\infty} \int f_n(x)dx
\end{aligned}$$

Für die zweite Behauptung: Sei N eine Nullmenge mit $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in X\backslash N$. Dann:

$$\begin{aligned}
\int f(x)dx &\overset{\text{Lem 3.5}}{=} \int \mathbf{1}_{X\backslash N} \cdot f(x)dx = \int \lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{X\backslash N} \cdot f_n(x)dx \\
&\overset{\text{s.o.}}{\leq} \varliminf_{n\to\infty} \int \mathbf{1}_{X\backslash N} \cdot f_n(x)dx \overset{\text{Lem 3.5}}{=} \varliminf_{n\to\infty} \int f_n(x)dx.
\end{aligned}$$

□

Theorem 3.10 (Legesgue, majorisierte Konvergenz)**.** *Seien $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar für alle $n \in \mathbb{N}$ und $g : X \to [0,\infty]$ integrierbar, sodass f_n fast überall konvergiert für $n \to \infty$ und $|f_n| \leq g$ (f.ü.) für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein integrierbares $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, sodass $f_n \xrightarrow[\text{(f.ü.)}]{n\to\infty} f$ und*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)dx = \int_X f(x)dx \ \text{und} \ \int_X |f_n(x) - f(x)|dx \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Diese Aussage gilt auch für jedes $\tilde{f} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ anstelle von f, wenn $\tilde{f} = f$ (f.ü.).

Bemerkung. a) Sei $\lambda(X) < \infty$, $|f_n(x)| \leq M$ $(\forall x, n) \Rightarrow g := M \cdot \mathbf{1}_X$ integrierbar und $|f_n| \leq g$ (einfache Majorante).

b) Sei $\{q_1, q_2, \dots\} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, setze $f_n := \mathbf{1}_{\{q_1,\dots,q_n\}} \Rightarrow |f_n| \leq \mathbf{1}_{[0,1]}$ und $f_n \to \mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} = f$
Damit ist der Satz von Lebesgue anwendbar, aber f ist nicht Riemannintegrierbar, also ist Thm 3.10 für das Riemannintegral sinnlos.

Bemerkung 3.11. Ohne Majorante kann die Aussage von Thm 3.10 falsch sein. Beispiele für $X = \mathbb{R}$:

a) $f_n = n \cdot \mathbf{1}_{(0,\frac{1}{n})} \to f = 0$ (p.w.), aber $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = 1$ und $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 0$.

b) $f_n = \mathbf{1}_{[m,\infty]} \to 0$ (p.w.). Hier gilt sogar $f_n \geq f_{n+1}$. Trotzdem ist:
$\int f dx = 0 < \infty = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int f_n dx}_{=\infty}$.

Ana III, 01.12.2008

Beweis von Thm 3.10. Nach Lem 3.7 existiert ein integrierbares $\hat{f} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $f_n \xrightarrow{n\to\infty} \hat{f}$ *(f.ü.)*.
Wie im Beweis von Bemerkung 3.8. existiert eine Nullmenge N, sodass
$|f(x)| \leq g(x)$ $(\forall x \notin N, n \in \mathbb{N})$ und $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} \hat{f}(x)$ $(\forall x \in N)$
$\Rightarrow |\hat{f}(x)| \leq g(x)$ $(\forall x \notin N)$.
$\overset{\text{Satz 2.23}}{\Rightarrow} \mathbf{1}_{X\setminus N} \cdot f,\ \mathbf{1}_{X\setminus N} \cdot \hat{f}$ sind integrierbar $(\forall n \in \mathbb{N}) \overset{\text{Lem 3.5}}{\Rightarrow} f_n, \hat{f}$ sind integrierbar.
Sei $N_1 = N \cup \{|\hat{f}| = \infty\} \cup \{g = \infty\}$. Nach Korollar 2.24 ist N_1 eine Nullmenge.
Setze $g_n := |f| + \mathbf{1}_{X\setminus N_1} \cdot g - \mathbf{1}_{X\setminus N_1} \cdot |f - f_n|$ und $f = \mathbf{1}_{X\setminus N_1} \cdot \hat{f} : X \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.
$\Rightarrow f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ *(f.ü.)*.
Es gilt: $g_n \xrightarrow{n\to\infty} |f| + g$ *(f.ü.)*. Da $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq g + |f|$ (auf $X\setminus N_1$), ist $g_n \geq 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.
Dann:

$$\begin{aligned}
\int (|f| + g)dx &\overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \int g_n dx \\
&\overset{\text{Satz 2.25}}{=} \liminf_{n\to\infty} \left(\int_{X\setminus N_1} |f| + g dx - \int_{X\setminus N_1} |f - f_n| dx \right) \\
&\overset{\text{Lem 3.5}}{=} \underbrace{\int_X (|f| + g)dx}_{<\infty,\text{ da } f,g \text{ int'bar}} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} \int_X |f - f_n| dx}_{\geq 0}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_X |f - f_n|dx = 0$. Damit folgt die Behauptung.
(Beachte: g_n ist messbar nach Satz 2.8) □

Korollar 3.12. *Sei $f : X \to \overline{R}$ messbar und $A_n \in \mathcal{B}(X)$ mit $A_n \subset A_{n+1}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ und $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.*
Weiter seien alle $f_n = \mathbf{1}_{A_n} \cdot f$ integrierbar und $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} |f| dx < \infty$. Dann ist f integrierbar und es gilt:

$$\int_X f dx = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f dx.$$

Falls zusätzlich $X \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist, sowie f stetig und $|f|$ auf X uneigentlich Riemannintegrierbar sind, dann ist f integrierbar und das Riemann- und Lebesgueintegral stimmen überein.

Beweis. Sei $f_n = \mathbf{1}_{A_n} \cdot f$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Nach Voraussetzung gilt: $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ (pw). Ferner: $|f_n| = \mathbf{1}_{A_n} \cdot |f| \leq \mathbf{1}_{A_{n+1}} | \cdot f = |f_{n+1}|$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Aus Thm 2.19 folgt:

$$\int_X f dx = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X |f_n| dx = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} |f| dx < \infty$$

$\overset{\text{Satz 2.23}}{\Rightarrow}$ f ist integrierbar.
Weiter gilt $|f_n| \leq |f|$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, also ist $|f|$ eine Majorante der f_n.
Nach Thm 3.10 gilt nun:

$$\int_{A_n} f dx = \int_X f_n dx \xrightarrow{n\to\infty} \int f dx$$

Für die letzte Behauptung wähle $a_n + 1 \leq a_n < b_1 \leq b_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ mit $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$. Da $|f|$ uneigentlich riemannintegrierbar ist, konvergiert $\int_{a_n}^{b_n} |f| dx$, ist aber beschränkt. Betrachte $A_n = [a_n, b_n]$. Dann folgt die Behauptung aus dem ersten Beweisteil und $R - \int_{a_n}^{b_n} f dx = \int_{[a_n,b_n]} f dx$. (siehe Bemerkung 2.26) $\square$

Beispiel. Sei $X = [1, \infty)$. Es gilt:
$\int_1^\infty x^{-\frac{3}{2}} dx = \lim_{b\to\infty} \underbrace{\int_1^b x^{-\frac{3}{2}} dx}_{-2\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{b\to\infty} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{b}}\right) = 2$

$\overset{\text{Kor 3.12}}{\Rightarrow} g(x) := x^{-\frac{3}{2}}$ ist integrierbar auf X.
Setze $f_n(X) = x^{-\frac{3}{2}} \cdot \sin(\frac{x}{n})$ für $n \in \mathbb{N}, X \geq 1$. Dann folgt $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ $(\forall x \geq 1)$. $|f_n| \leq g$ $(\forall n \in \mathbb{N}) \overset{\text{Thm 3.10}}{\Rightarrow} \int f_n dx \to 0, \int |f_n| dx \to 0$ $(n \to \infty)$.

Korollar 3.13. *a) Seien $f_j, g : X \to \mathbb{R}$ integrierbar für jedes $j \in \mathbb{N}$. Sei N eine Nullmenge, sodass $g_n(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x)$ in $\overline{\mathbb{R}}$ für $n \to \infty$ und alle $x \in X \backslash N$ konvergiert und sodass $|g_n(x)| \leq g(x)$ $(\forall n \in \mathbb{N},\ x \in X \backslash N)$. Setze $\sum_{j=1}^\infty f_j(x) := 0$ für $x \in N$. Dann ist $\sum_{j=1}^\infty f_j : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und es gilt*

$$\int_X \sum_{j=1}^\infty f_j(x) dx = \sum_{j=1}^\infty \int_X f_j(x) dx.$$

b) Sei $f : X \to R$ integrierbar und $X = \bigcup_{j \in N} A_j$ für disjunkte $A_j \in \mathcal{B}(X)$. Dann gilt:

$$\int_X f(x)dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} f(x)dx.$$

Beweis. a) Da $|g_n| \leq g$ *(f.ü.)*und $g_n \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} f_j$ *((f.ü.)*, ist $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ integrierbar und

$$\exists \int_X \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} f_j}_{=f} dx = \int_X \lim_{n\to\infty} g_n dx \overset{\text{Thm 3.10}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X g_n dx$$

$$\overset{\text{Satz 2.25}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f_j dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f_j dx.$$

b) Setze $f_j := \mathbf{1}_{A_j} \cdot f,\ g := |f|$. Dann gilt $|\sum_{j=1}^{n} f_j| = |\mathbf{1}_{A_1 \cup \cdots \cup A_n} \cdot f| \leq |f|$ und $\sum_{j=1}^{\infty} f_j = f$. Also folgt b) aus a).

□

Theorem 3.14 (Stetigkeitssatz)**.** *Seien $U \subset \mathbb{R}^k$ offen, $t_0 \in U$ und $f : U \times X \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften gegeben.*

a) Für jedes $t \in U$ ist die Funktion $x \mapsto f(t,x)$ von X nach $\mathbb{R}$ messbar.

b) Es gibt ein integrierbares $g : X \to [0,\infty]$ und Nullmengen N_t für jedes $t \in U$, sodass $|f(t,x)| \leq g(x)$ für alle $t \in U$ und alle $x \in X \backslash N_t$.

c) Es gibt eine Nullmenge N, sodass die Funktion $t \mapsto f(t,x)$ von U nach $\mathbb{R}$ für jedes $x \in X \backslash N$ bei t_0 stetig ist.

Dann ist die Funktion $F : U \to \mathbb{R}, F(t) = \int_X f(t,x)dx$, für alle $t \in U$ definiert und bei t_0 stetig. Das heißt:

$$\lim_{t\to t_0} F(t) = \lim_{t\to t_0} \int_X f(t,x)dx \overset{!}{=} \int_X f(t_0,x) = F(t_0).$$

Beweis. Nach a) und b) ist $x \mapsto f(t,x)$ für jedes $t \in U$ integrierbar.
Seien $t_n \in U$ mit $t_n \xrightarrow{n\to\infty} t_0$. Setze $g_n(x) := f(t_n,x)$ $(x \in X, n \in \mathbb{N})$.
$\tilde{N} := \bigcup_{n=1}^{\infty} N_{t_1} \cup N$ ist eine Nullmenge.
Nach c) gilt: $g_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(t_0,x)$ $(\forall x \notin \tilde{N})$ und nach b):
$|g_n(x)| \leq g(x)$ $(\forall n \in \mathbb{N}, x \notin \tilde{N})$. Mit Thm 3.10 folgt

$$\int_X g_n(x)dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_X f(t_0,x)dx = F(t_0).$$

□

Korollar 3.15. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar, $a = \inf I$. Dann ist $t \mapsto F(t) = \int_a^t f(s)ds$ auf I stetig und $F(t) \xrightarrow{t \to a} 0$.*

Beweis. Es gilt $F(t) = \int_I \underbrace{\mathbf{1}_{(a,t)}(x) \cdot f(x)}_{=h(t,x)} dx \Rightarrow |h(t,x)| \le |f(x)|, \ \forall t, x$ und $|f|$ ist integrierbar. Sei $t_0 \in I$ fest aber beliebig.
Es gilt: $h(t,x) = \begin{cases} f(x), & t > x, \\ 0, & t \le x \end{cases} \xrightarrow{t \to t_0} h(t_0, x)$ für jedes $x \neq t_0$.
Nun liefert Thm 3.14 die Behauptung mit $N = N(t_0) = \{t_0\}$ in c), denn:

$$F(t) = \int_I h(t,x)dx \xrightarrow{t \to t_0} \int_I h(t_0, x) = F(t_0).$$

□

Beispiel. Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ messbar und beschränkt. Sei $t > 0$ fest, aber beliebig. Wähle $\epsilon \in (0, t)$. Für $x > 0$ gilt dann $|e^{-tx} \cdot f(x)| \le \|f\|_\infty \cdot e^{-\epsilon x}$ ist integrierbar auf $\mathbb{R}_+$.
Genauso: Sei $t \ge t_0 > 0, \ \epsilon \in (0, t_0)$. Dann ist $g(x) = e^{-\epsilon x} \cdot \|f\|_\infty$ die Majorante in Thm 3.14 und somit existiert die "Laplacetransformation"
$\hat{f}(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \cdot f(x)dx$ und sie ist stetig für $t \ge 0$. Da t_0 beliebig war, gilt dies für alle $t > 0$.

Ana III, 05.12.2008

Theorem 3.16. *Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen, $f : U \times X \to \mathbb{R}$ erfülle*

a) $\forall t \in U : \ x \mapsto f(t,x), \ X \to \mathbb{R}$ ist integrierbar

b) $\exists$ eine Nullmenge N_1, sodass $t \mapsto f(t,x), \ U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar für alle $x \notin N_1$ und alle $t \in U$

c) $\exists$ eine Nullmenge N_2 und ein integrierbares $g : X \to [0, \infty]$, sodass

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t_j}(t,x) \right| \le g(x), \ \forall x \notin N_2, \ j = 1, \dots, k, \ t \in U$$

Dann ist

$$F(t) := \int_X f(t,x)dx$$

in $t \in U$ partiell differenzierbar und

$$\frac{\partial}{\partial t_j} \int_X f(t,x)dx = \int_X \frac{\partial}{\partial t_j} f(t,x)dx \quad (\forall j \in \mathbb{N}, \ t \in U).$$

Beweis. Sei $j \in \{1, \ldots, k\}$, $t_0 \in U$ fest, aber beliebig. Sei $\tau_n \neq 0$ mit $\tau_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Setze $s_1 := t_0 + \tau_n \cdot e_j$. Da U offen ist, gibt es ein $r > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $s_n \in B(t_0, r) \subset U$. Sei $N = N_1 \cup N_2$ eine Nullmenge.
Setze $g_n(x) := \frac{1}{\tau_n}(f(s_n, x) - f(t_0, x))$ für $n \in N,\ x \in X$. Nach b) gilt dann $g_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\partial}{\partial t_j} f(t_0, x)\ \forall X \notin N$.
Der Mittelwertsatz liefert: Es existieren σ_n mit $|\sigma_n| \leq |\tau_n|$ (abhängig von x, t_0, j), sodass

$$|g_n(x)| = \left|\frac{\partial f}{\partial t_j}(t_0 + \sigma_1 \cdot e_j, x)\right| \overset{c)}{\leq} g(x) \quad (\forall x \notin N,\ n \in \mathbb{N}).$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned}\int_X \frac{\partial f}{\partial t_j}(t_0, x)dx &\underset{\text{Konvergenz}}{\overset{\text{majorisierte}}{=}} \lim_{n\to\infty} \int_X g_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\tau_n}(F(s_1) - F(t_0)) \\ &= \frac{\partial}{\partial t_j} \int_X f(t_0, x)dx.\end{aligned}$$

□

Beispiel. Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ messbar und beschränkt. Wir haben schon gesehen, dass $t \mapsto \hat{f}(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \cdot f(x)dx$ für $t > 0$ existiert und stetig ist. Sei $\epsilon > 0$ beliebig und $t \geq \epsilon$. Dann gilt

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} e^{-tx} \cdot f(x)\right| = \left|-xe^{-tx} \cdot f(x)\right| \leq xe^{-\frac{\epsilon}{2}x} e^{-\frac{\epsilon}{2}x} \cdot \|f\|_\infty \leq \frac{2}{e\epsilon}\|f\|_\infty \cdot e^{-\frac{\epsilon}{2}x}.$$

Und $\frac{2}{e\epsilon}\|f\|_\infty \cdot e^{-\frac{\epsilon}{2}x}$ ist integrierbar. Da $\epsilon > 0$ beliebig war folgt mit Thm 3.16:

$$\exists\ \hat{f}'(t) = \int_0^\infty xe^{-tx} \cdot f(x)dx.$$

3.3 Iterierte Integrale

Schreibe $z \in \mathbb{R}^d$ als $z = (x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ mit $d = k + l$. Sei $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$. Zeige

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(z)dz = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} f(x, y)dy\right) dx = \int_{\mathbb{R}^l} \left(\int_{\mathbb{R}^k} f(x, y)dx\right) dy.$$

Probleme:

1) Sind $y \mapsto f(x, y),\ x \mapsto f(x, y)$ messbar und integrierbar?

2) Sind $x \mapsto \int f(x, y)dy,\ y \mapsto \int f(x, y)dx$ messbar und integrierbar?

3) Gilt die Formel?

Sei $p_1(x, y) = x,\ p_2(x, y) = y$. Dann folgt, dass $p_1 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ und $p_2 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^l$ stetig und damit messbar sind.

Lemma 3.17. *Wenn $A \in \mathcal{B}_k$ und $B \in \mathcal{B}_l$, dann gilt $A \times B \in \mathcal{B}_d$.*

Beweis. Es gilt $A \times \mathbb{R}^l = p_1^{-1}(A) \in \mathcal{B}_d$ und $\mathbb{R}^k \times B = p_2^{-1}(B) \in \mathcal{B}_d$. Damit folgt $A \times B = (A \times \mathbb{R}^l) \cap (\mathbb{R}^k \times B) \in \mathcal{B}_d$. $\square$

Definition. Für $C \in \mathcal{B}_d$ definiere die Schnitte

$$C_y := \{x \in \mathbb{R}^k : (x,y) \in C\} \text{ (für jedes feste } y \in \mathbb{R}^l)$$
$$C^x := \{y \in \mathbb{R}^l : (x,y) \in C\} \text{ (für jedes feste } x \in \mathbb{R}^k)$$

Sei $A \subset \mathbb{R}^k,\ B \in \mathbb{R}^l,\ x \in \mathbb{R}^k$. Dann gilt für $C = A \times B$:

$$C^x = \begin{cases} B, & x \in A \\ \emptyset, & x \notin A \end{cases} \tag{3.1}$$

Setze:

$$\begin{aligned} &j_y : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d,\ j_y(x) = (x,y) \text{ (für jedes feste } y \in \mathbb{R}^l). \\ &j^x : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^d,\ j^x(y) = (x,y) \text{ (für jedes feste } x \in \mathbb{R}^k). \\ &\Rightarrow j_y, j^x \text{ sind stetig und messbar.} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Dann gilt $C_y = j_y^{-1}(C),\ C^x = (j^x)^{-1}(C)$ für alle $x \in \mathbb{R}^k$ und alle $y \in \mathbb{R}^l$.
Für $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ definiere die Schnittfunktionen:

$$\begin{aligned} &f_y = f \circ j_y : \mathbb{R}^k \to \overline{\mathbb{R}},\ f_y(x) = f(x,y) \text{ (für jedes feste } y \in \mathbb{R}^l) \\ &f^x = f \circ j^x : \mathbb{R}^l \to \overline{\mathbb{R}},\ f^x(x) = f(x,y) \text{ (für jedes feste } x \in \mathbb{R}^k). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Lemma 3.18. *Seien $C \int \mathcal{B}_d$, $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar $x \in \mathbb{R}^k$ und $y \in \mathbb{R}^l$. Dann gelten:*

- *$C_y \in \mathcal{B}_k$ und $C^x \in \mathcal{B}_l$*
- *$f_y : \mathbb{R}^k \to \overline{\mathbb{R}}$ und $f^x : \mathbb{R}^l \to \overline{\mathbb{R}}$ sind messbar*

Beweis. Folgt aus (3.2), (3.3) und der Messbarkeit von f_y, f^x. $\square$

Definition. Sei $C \in \mathcal{B}_d$. Dann definiere:

$$\begin{aligned} \varphi_C(x) &= \lambda_l(C^x) = \int_{\mathbb{R}^l} \mathbf{1}_{C^x}(y)dy = \int_{\mathbb{R}^l} \mathbf{1}_C(x,y)dx \ (\forall x \in \mathbb{R}^k) \\ \psi_C(y) &= \lambda_k(C_y) = \int_{\mathbb{R}^k} \mathbf{1}_{C_y}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^k} \mathbf{1}_C(x,y)dx \ (\forall y \in \mathbb{R}^l) \end{aligned} \tag{3.4}$$

(Diese Definition ist sinnvoll wegen Lem 3.18 und weil $\mathbf{1}_C > 0$)
An dieser Stelle wird z.B. verwendet, dass

$$\mathbf{1}_{C^x}(y) = \begin{cases} 1, & y \in C^x \\ 0, & y \notin C^x \end{cases} = \begin{cases} 1, & (x,y) \in C \\ 0, & (x,y) \notin C \end{cases} = \mathbf{1}_C(x,y) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^k, y \in \mathbb{R}^l)$$

gilt.

Lemma 3.19. *Sei $C \in \mathcal{B}_d$. Dann sind $\varphi_C : \mathbb{R}^k \to [0,\infty]$, $\psi_C : \mathbb{R}^l \to [0,\infty]$ messbar.*

Beweis. Es reicht f_c zu betrachten. Sei dafür $I = I' \times I''$ mit $I' \in \mathcal{J}_k$, $I'' \in \mathcal{J}_l$. Dann gilt

$$f_I(x) \overset{\text{Def 3.1}}{=} \begin{cases} \lambda_l(I''), & x \in I' \\ 0, & x \notin I' \end{cases} = \lambda_l(I'') \cdot \mathbf{1}_{I'}(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^k)$$

Damit folgt die Messbarkeit von f_i $(+)$.
Somit $\mathcal{J}_d \subset \mathcal{D} = \{C \in \mathcal{B}_d : \varphi_c \text{ messbar}\}$ $(*)$.
Für $n \in \mathbb{N}$ setze $Q_n := (-n,n]^d$ und $\mathcal{D}_n := \{C \subset Q_n : C \in \mathcal{D}\}$. Wir schreiben $Q_n = Q_n' \times Q_n''$ mit $Q_n' = (-n,n]^k$, $Q_n'' = (-n,n]^l$.
Damit ergeben sich folgenden Eigenschaften für D_n:

(A1) Wegen $(+)$ gilt $Q_n \in \mathcal{D}_n$.

(A2) Da $\lambda_l(C^x) \le \lambda_l(Q_n'') < \infty$, sind für $C \in \mathcal{D}_n$ $\varphi_c, \varphi_{Q_n}, \varphi_{Q_n \setminus C}$ $\mathbb{R}_+$-wertig.
Weiter gilt $\mathbf{1}_{Q_n \setminus C} = \mathbf{1}_{Q_n} - \mathbf{1}_C$. Damit ist $\varphi_{Q_n \setminus C} \overset{(3.4)}{=} \varphi_{Q_n} - \varphi_C$ messbar, da $C \in \mathcal{D}$ und $(+)$ gilt $Q_n \setminus C \in \mathcal{D}_n$.

(A3') Seien $\{C_j,\ j \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{D}_n$ disjunkt. Dann gilt $\biguplus_{j\in\mathbb{N}} C_j \in \mathcal{D}_n$. Denn

$$\begin{aligned}\varphi_{\biguplus_{j\in\mathbb{N}}}(x) &\overset{(3.4)}{=} \int_{\mathbb{R}^l} \mathbf{1}_{\biguplus_{j\in\mathbb{N}} C_j}(x,y)dy \overset{C_j \text{ disjunkt}}{=} \int_{\mathbb{R}^l} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{1}_{C_j}(x,y)dy \\ &\overset{\text{Kor 2.20}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^l} \mathbf{1}_{C_j}(x,y)dy \overset{(3.4)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{C_j}(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^k).\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist φ_{C_i} messbar. Damit folgt, dass $\varphi_{\biguplus_{j\in\mathbb{N}} C_j}$ als Reihe messbarer, positiver Funktionen messbar. Also gilt

$$\biguplus_{j\in\mathbb{N}} C_j \in \mathcal{D}_n.$$

Somit gilt (A3').

Ferner gilt nach $\mathcal{J}_d \cap Q_n \overset{\text{Lem 1.10}}{=} \{F \in \mathcal{J}_d : I \subset Q_n\} \subset \mathcal{D}_n$.
Mit Lem 3.20 folgt dann $\mathcal{D}_n = \sigma(\mathcal{J}_d \cap Q_n) = \mathcal{B}(Q_n)$.

Ana III, 08.12.2008

Sei $C \in \mathcal{B}_d$. Setze

$$\varphi_C(x) := \int_{\mathbb{R}^l} \mathbf{1}_C(x,y)dy \quad (\forall x \in \mathbb{R}^k)$$

Dann ist φ_C messbar für $C \in \mathcal{B}_d$ und $C \subset Q_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Sei $C \in \mathcal{B}_d$ beliebig. Dann gilt $C \cap Q_n \subset Q_n$, $C \cap Q_n \in \mathcal{B}_d$. Somit ist auch $\varphi_{C \cap Q_n}$ messbar und es gilt

$C \cap Q_n \subset C \cap Q_{n+1}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.
Es gilt $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C \cap Q_n$. Daraus folgt

$$\mathbf{1}_{C\cap Q_n} \leq \mathbf{1}_{C\cap Q_{n+1}},\ \mathbf{1}_{C\cap Q_n}(x,y) \xrightarrow{n\to\infty} \mathbf{1}_C(x,y) \quad \forall z=(x,y) \in \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l.$$

Mit Beppo Levi folgt dann

$$\varphi_{C\cap Q_n}(x) \overset{(3.4)}{=} \int_{\mathbb{R}^l} \mathbf{1}_{C\cap Q_n}(x,y)dy \xrightarrow{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^l} \mathbf{1}_C(x,y)dy \overset{(3.4)}{=} \varphi_C \quad (\forall x \in \mathbb{R}^k).$$

Damit ist φ_C messbar als punktweiser Limes messbarer Funktionen. □

Lemma 3.20. *Sei $\emptyset \neq \mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{E} \subset \mathcal{D} \subset \sigma(\mathcal{E})$ und $\mathcal{D}$ erfülle (A1), (A2) und (A3'). Dann gilt $\mathcal{D} = \sigma(\mathcal{E})$.*

Beweis. Siehe Extravorlesung. □

Satz 3.21. *Sei $C \in \mathcal{B}_d$. Dann gilt*

$$\lambda_d(C) = \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_l(C^x)dx = \int_{\mathbb{R}^l} \lambda_k(C_y)dy.$$

Also gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_C(z)dz = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} \mathbf{1}_C(x,y)dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^l} \left(\int_{\mathbb{R}^k} \mathbf{1}_C(x,y)dx \right) dy.$$

(Vergleiche (3.4).)

Beweis. Nach Lem 3.19 und da die Integranden positiv sind, existieren für alle $C \in \mathcal{B}_d$

$$\mu(C) = \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_l(C^x)dx, \qquad \nu(C) = \int_{\mathbb{R}^l} \lambda_k(C_y)dy.$$

Sei $I \in \mathcal{J}_d$ Dann folgt $\exists I' \in \mathcal{J}_k,\ I'' \in \mathcal{J}_l$ mit $I = I' \times I''$. Dann gilt

$$\mu(I) \overset{(3.1)}{=} \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_l(I'') \cdot \mathbf{1}_{I'}(x)dx = \lambda_l(I'') \cdot \lambda_k(I') \overset{(1.2)}{=} \lambda_d(I).$$

Genauso zeigt man, dass $\mu(I) = \lambda_d(I)$ gilt.
Also gilt $\lambda_d = \mu = \nu$ auf $\mathcal{J}_d$.
Es ist klar, dass λ_d ein Maß ist und dass $\mu(\emptyset) = \nu(\emptyset) = 0$.
Seien $C_j \in \mathcal{B}_d$ disjunkt $(j \in \mathbb{N})$. Dann gilt

$$\mu\left(\biguplus_{j\in\mathbb{N}} C_j\right) = \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_l\left(\left(\biguplus_{j\in\mathbb{N}} C_j\right)^x\right) = \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_l\left(\biguplus_{j\in\mathbb{N}} C_j^x\right) dx$$
$$\overset{(M2)}{=} \int_{\mathbb{R}^k} \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\lambda_l(C_j^x)}_{\geq 0} dx \overset{\text{Kor 2.20}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_l(C_j^x)dx = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(C_j^x).$$

Also ist μ ein Maß. Genauso zeigt man die Maßeigenschaft für ν.

Im Beweis von Thm 1.20 haben wir gesehen, dass $\mathcal{J}_d$ die Voraussetzungen A), B) von Thm 1.19 (Eindeutigkeitssatz) erfüllt. Somit impliziert Thm 1.19, dass $\lambda_d = \mu = \nu$ auf $\mathcal{B}_d$ gilt.

$\square$

Korollar 3.22. *Für $N \in \mathcal{B}_d$ sind äquivalent:*

a) $\lambda_d(N) = 0$

b) Für (f.a.) $x \in \mathbb{R}^k$ gilt $\lambda_d(N^x) = 0$

c) Für (f.a.) $x \in \mathbb{R}^l$ gilt $\lambda_k(N^x) = 0$

Beweis. Folgt direkt aus Satz 3.21 und Lem 2.18c). $\square$

Beispiel. Sei $M \subset \mathbb{R}^k$ eine Nullmenge. Setze $N := M \times \mathbb{R}^l$. Dann folgt mit Lem 3.17 $N \in \mathcal{B}_d$. Es gilt $N_y = M$ $(\forall y \in \mathbb{R}^l)$ (vergleiche (3.1)). Schließlich folgt dann mit Kor 3.22, dass N ebenfalls eine Nullmenge ist.

Bemerkung 3.23. Es exisitert ein $M \subset [0,1]^2$, sodass M in keiner Nullmenge aus $\mathcal{B}_2$ liegt (und insbesondere ist M keine zweidimensionale Nullmenge), aber <u>alle</u> M^x, M_y höchstens ein Element haben. Damit folgt $\lambda(M^x) = \lambda(M_y) = 0$ $\forall x, y$.
Also implizieren b) und c) in Kor 3.22 nicht einmal, dass $M \in \mathcal{B}_2$.
(Vergleiche Elstrodt Bsp V. 1.9)

Bemerkung 3.24. Sei $\emptyset \neq D \in \mathcal{B}_d$ und $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Setze

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in D \\ 0, & x \in \mathbb{R}^d \setminus D \end{cases} \qquad \text{(“0-Fortsetzung“)}$$

Dann ist $\tilde{f} : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar.

Beweis. Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\{x \in \mathbb{R}^d : \tilde{f}(x) \leq 0\} = \begin{cases} \{x \in D : f(x) \leq a\} \cup D^c, & a \geq 0 \\ \underbrace{\{x \in D : f(x) \leq a\}}_{\in \mathcal{B}(C) \subset \mathcal{B}_d}, & a < 0 \end{cases} \in \mathcal{B}_d.$$

Also ist $\tilde{f}$ messbar. $\square$

Beispiel 3.25. Sei $B := B(0,r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < r,\ |y| < \sqrt{r^2 - x^2}\} \in \mathcal{B}_2$. Damit folgt

$$B^x = \begin{cases} \emptyset, & |x| \geq r \\ (-\sqrt{r^2 - x^2}, +\sqrt{r^2 - x^2}), & |x| < r. \end{cases}$$

Und damit

$$\lambda_1(B^x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq r \\ w \cdot \sqrt{r^2 - x^2}, & |x| < r. \end{cases}$$

Mit Satz 3.21 folgt dann

$$\lambda_2(B) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_1(B^x)dx = \int_{-r}^{r} 2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2}dx \overset{\text{Ana1}}{\underset{\text{Bsp 6.14}}{=}} \pi \cdot r^2.$$

Genauso zeigt man, dass $\lambda_2(\overline{B}) = \pi \cdot r^2$. Damit folgt für alle $A \in \mathcal{B}_2$ mit $B \subset A \subset \overline{B}$: $\lambda_2(A) = \pi \cdot r^2$.

Beispiel 3.26 (Rotationskörper)**.** Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to [0, \infty]$ messbar. Setze f wie in Bem 3.24 messbar auf $\mathbb{R}$ fort. Definiere dann

$$V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in I,\ x^2 + y^2 < f(z)^2\} = \{(\tilde{f} \circ p_z)^2 - p_x^2 - p_y^2 > 0\} \in \mathcal{B}_3.$$

Setze weiter für $z \in I$ $V_2 := B(0, f(z))$ und für $z \notin I$ $V_2 := \emptyset$. Dann folgt mit Satz 3.21

$$\lambda_3(V) = \int_I \lambda_2(B(0, f(z)))dz \overset{\text{Bsp 3.25}}{=} \pi \cdot \int_I f(z)^2 dz.$$

<u>Beispiel</u>:
Sei $I = [1, \infty),\ f(z) = \frac{1}{z},\ V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 1,\ x^2 + y^2 < \frac{1}{z^2}\}$. Dann folgt

$$\lambda_3(V) = \pi \cdot \int_1^\infty \frac{dz}{z^2} = \pi \cdot \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dz}{z^2} = \pi \cdot \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{z}\right]_1^b = \pi \cdot \lim_{b\to\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = \pi.$$

Sei $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ messbar. Nach Lem 3.18 existieren dann

$$\begin{aligned} F(x) &:= \int_{\mathbb{R}^l} f(x, y)dy = \int_{\mathbb{R}^l} f^x(y)dy \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^k) \\ G(x) &:= \int_{\mathbb{R}^k} f(x, y)dx = \int_{\mathbb{R}^k} f_y(x)dx \qquad (\forall y \in \mathbb{R}^l). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Theorem 3.27 (Fubini)**.** *Sei $d = k + l,\ \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$.*

a) Sei $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ messbar. Dann sind $F : \mathbb{R}^k \to [0, \infty]$ und $G : \mathbb{R}^l \to [0, \infty]$ messbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(z)dz = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} f(x, y)dy\right) dx = \int_{\mathbb{R}^l} \left(\int_{\mathbb{R}^k} f(x, y)dx\right) dy. \tag{3.6}$$

b) Sei $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Dann gibt es Nullmengen $M \in \mathbb{R}^k$, $N \in \mathbb{R}^k$, sodass $f^x : \mathbb{R}^l \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar ist für alle $x \in \mathbb{R}^k \backslash M$ und $f_y : \mathbb{R}^k \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar ist für alle $y \in \mathbb{R}^l \backslash N$.
Definiere $F(x)$ für $x \in \mathbb{R}^k \backslash M$ und $G(x)$ für $y \in \mathbb{R}^l \backslash N$ wie in (3.5) und setze

$F(x) = 0$ für alle $x \in M$ und $G(y) = 0$ für alle $y \in N$.
Dann sind $F : R^k \to \overline{\mathbb{R}}$ und $G : \mathbb{R}^l \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(z)dz = \int_{\mathbb{R}^k} F(x)dx = \int_{\mathbb{R}^l} G(y)dy.$$

Meist schreibt man dafür wieder (3.6).

Beweis. (Der Beweis erfolgt in den vier Schritten der Integraldefinition.)

a) 0) Für $f = \mathbf{1}_C,\ C \in \mathcal{B}_d$ wurde a) schon in Lem 3.19 und Satz 3.21 gezeigt.

1) Sei $f := \sum_{k=1}^m a_k \cdot \mathbf{1}_{C_k} \geq 0$ messbar. Dann ist $F \overset{(3.4)}{=} \sum_{k=1}^m a_k \cdot \varphi_{C_k}$ nach Satz 2.8 messbar (verwende Lem 3.19). Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} f(z)dz &= \sum_{k=1}^m a_k \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{C_k}(z)dz \\
&\overset{0)}{=} \sum_{k=1}^m a_k \cdot \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} \mathbf{1}_{C_k}(x,y)dy \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} \sum_{k=1}^m a_k \cdot \mathbf{1}_{C_k}(x,y)dy \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} f(x,y) \right) dx.
\end{aligned}$$

(Die andere Gleichheit in (3.6) zeigt man genauso.)

Ana III, 12.12.2008

2) Sei $f : \mathbb{R}^d \to [0.\infty]$ messbar. Dann gibt es einfache $f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ mit $f_n(z) \leq f_{n+1}(z)$, $f(z) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(z)$ $(\forall n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{R}^d)$.
Setze $F_n(x) := \int_{\mathbb{R}^l} f_n(x,y)dy \leq F_{n+1}(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R}^k, n \in \mathbb{N})$. Mit 1) folgt dann die Messbarkeit von F_n $(\forall n \in \mathbb{N})$. Mit Beppo Levi für $(f_n)^x$ folgt

$$F_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^l} f(x,y)dy =: F(x) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^k).$$

Damit ist $f : \mathbb{R}^k \to [0,\infty]$ als Grenzwert messbarer Funktionen messbar. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} f(z)dz &\underset{\text{für } f_n}{\overset{\text{Beppo Levi}}{=}} \lim_{n\to\infty} \int_{R^d} f_n(z)dz \\
&\overset{1)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^k} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^l} f_n(x,y)dy \right)}_{=F_n(x)} dx \\
&\underset{\text{für } F_n}{\overset{\text{Beppo Levi}}{=}} \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} f(x,y)dy \right) dx.
\end{aligned}$$

Die Andere Gleichheit in (3.6) folgt genauso. Damit ist a) gezeigt.

b) Sei $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Dann folgt, dass $|f| : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ integrierbar ist und dass $f^x : \mathbb{R}^l \to \overline{\mathbb{R}}$ nach Lem 3.18 messbar ist. Dann gilt

$$\infty > \int_{\mathbb{R}^d} |f(z)| dz = \int_{\mathbb{R}^k} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^l} |f(x,y)| dy \right)}_{=:\Phi(x) = \int_{\mathbb{R}^l} |f^x| dy} dx. \tag{+}$$

Dann folgt die Integrierbarkeit von $\Phi : \mathbb{R}^k \to [0, \infty]$ (Φ ist messbar nach Lem 3.19). Kor 2.24 impliziert, dass $M := \{\Phi = \infty\} \subset \mathbb{R}^k$ eine Nullmenge ist. Damit ist nach Kor 3.22 auch $M \times \mathbb{R}^l$ eine d-dimensionale Nullmenge. Mit (+) folgt nun, dass $f^x : \mathbb{R}^l \to \overline{\mathbb{R}}$ für alle $x \in \mathbb{R}^k \backslash M$ integrierbar ist. Setze

$$F(x) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^l} f(x,y) dy, & x \in M \\ 0, & x \in M \end{cases} = \int_{\mathbb{R}^l} \tilde{f}(x,y) dy, \tag{$*$}$$

wobei $\tilde{f} = \mathbf{1}_{M^x \times \mathbb{R}^l} \cdot f$ ist. Also ist $\tilde{f}$ messbar ist.
Da $|\tilde{f}| = \mathbf{1}_{M^c \times \mathbb{R}^l} \cdot |f^x|$ gilt, folgt, dass $\tilde{f} : \mathbb{R}^l \to \overline{\mathbb{R}}$ ist für alle $x \in \mathbb{R}^k$ integrierbar ist.
Ferner gilt

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^l} \tilde{f}_+(x,y) dy - \int_{\mathbb{R}^l} \tilde{f}_(x,y) dy =: F^+(x) - F^-(x) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^k),$$

wobei $F^{\pm}(x) \in \mathbb{R}_+$ $(\forall x \in \mathbb{R}^k)$. Nach a) sind damit $F^{\pm}$ messbar und somit ist auch F messbar. Außerdem gilt $|F| \leq \Phi$, welches integrierbar ist. Mit Satz 2.23 ist dann F integrierbar. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\underbrace{\int_{\mathbb{R}^l \backslash M} \left(\int_{\mathbb{R}^l} f(x,y) dy \right) dx}_{(**)} &= \int_{\mathbb{R}^k} F(x) dx \\
&\overset{\text{Satz 2.23}}{=} \int_{\mathbb{R}^k} F^+(x) dx - \int_{\mathbb{R}^k} F^-(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} \tilde{f}_+(x,y) dy \right) dx - \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} \tilde{f}_-(x,y) \right) dx \\
&\overset{a)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}_+ dz - \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}_-(z) dz \overset{\substack{\text{Def. des} \\ \text{Integrals}}}{=} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(z) dz}_{(++)} \\
&\overset{f = \tilde{f}\ (f.ü.)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(z) dz.
\end{aligned}$$

Die andere Gleichheit in (3.6) folgt analog.

□

Bemerkung. In Thm 3.27b) gilt (3.6), wenn man die iterierten Integrale wie in $(**)$ und $(++)$ modifiziert.

Bemerkung 3.28. a) Man kann Fubini auf endlich oft iterierte Integrale verallgemeinern. Es existiert also eine Variante für $f(z) = f(x_1, \dots, x_m)$.

b) Nach Bem 3.23 existiert $f = \mathbf{1}_M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, sodass die iterierten Integrale existieren und gleich sind (es gilt $F = 0,\ G = 0$), aber f ist nicht in $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ messbar. Also muss man die Messbarkeit in Fubini vorausgesetzt werden.

c) Wenn f weder integrierbar noch positiv ist, kann es passieren, dass die iterierten Integrale in (3.6) existieren und ungleich sind.

Beispiel (Cauchy):
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \in (0,1)^2 \\ 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash (0,1)^2. \end{cases}$$

Dann gilt für $(x, y) \in (0, 1)^2$

$$f(x,y) = \frac{\partial\partial}{\partial y \partial x} \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\partial\partial}{\partial x \partial y} \arctan\left(\frac{x}{y}\right).$$

Sei $x > 0$. Dann existiert

$$\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \arctan\left(\frac{x}{y}\right)}_{=\frac{y}{x^2+y^2}} = \left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Dann folgt die Existenz von

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy\right) dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Entsprechend exsitiert auch

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dx\right) dy = [\arctan(x)]_0^1 = -\frac{\pi}{4},$$

aber es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy\right) dx = \frac{\pi}{4} \neq -\frac{\pi}{4} = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dx\right) dy.$$

d) Selbst wenn f messbar (und nicht positiv) ist, folgt im Allgemeinen aus der Existenz und Gleichheit der iterierten Integrale in (3.6) nicht die Integrierbarkeit von $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

Beispiel:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \in [-1,1] \backslash \{0,0\} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Gebrauchsanweisung für Fubini. Seien $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ und $D \in \mathcal{B}_d$.

a) Prüfe, ob f in (x,y) messbar ist.

b) Setze f messbar fort zu $\tilde{f} : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ (etwa mit 0, vergleiche Bem 3.24). Dann folgt die messbarMessbarkeit von $\mathbf{1}_D \cdot \tilde{f}$.

c) Falls nötig, zeige mit a)

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_D \cdot |\tilde{f}| dz = \int \int |\mathbf{1}_D \cdot \tilde{f}| dx dy = \int \int |\mathbf{1}_D \cdot \tilde{f}| dy dx < \infty.$$

Dann folgt $\mathbf{1}_D \cdot \tilde{f}$ ist integrierbar.

d) Fubini b)liefert dann

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_D \cdot \tilde{f}(z) dz &= \int_{\mathbb{R}^k} \int_{\mathbb{R}^l} \mathbf{1}_D(x,y) \cdot \tilde{f}(x,y) dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^l} \int_{\mathbb{R}^k} \mathbf{1}_D(x,y) \cdot \tilde{f}(x,y) dx dy. \end{aligned}$$

Bemerkung 3.29. Sei $Q = X \times Y$ für $\emptyset \neq X \in \mathcal{B}_k$, $\emptyset \neq Y \in \mathcal{B}_l$. Sei $f : Q \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar oder messbar und positiv. Sei $\tilde{f}(x,y) = \mathbf{1}_X(x) \cdot \mathbf{1}_Y(y) \cdot \tilde{f}(x,y)$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \int_Q f(z) dz = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(z) dz &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_X(x) \cdot \mathbf{1}_Y(y) \cdot \tilde{f}(x,y) dy dx \\ &= \int_X \int_Y f(x,y) dy dx \overset{\text{genauso}}{=} \int_Y \int_X f(x,y) dx dy. \end{aligned}$$

Beispiel. a) Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$. Da D abgeschlossen ist, gilt $D \in \mathcal{B}_2$. Seien $f(x,y) = \frac{1}{x}\cos(xy)$ für $(x,y) \in D$ und $\tilde{f}(x,y) = \frac{1}{x}\cos(xy)$, $(x,y) \in Q := (0,0) \times \mathbb{R}_+$. Dann sind f und $\tilde{f}$ stetig und damit messbar und es gilt $\tilde{f}|_D = f$ (in (x,y)).
Ferner gilt

$$\begin{aligned} \int_D |f| d(x,y) &= \int_Q \mathbf{1}_D |\tilde{f}| d(x,y) \\ &\overset{\text{Fub}}{=} \int_0^\infty \int_0^\infty \underbrace{\mathbf{1}_D(x,y)}_{=1 \Leftrightarrow x \geq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x} \cdot \underbrace{|\cos(xy)|}_{\leq 1} dy dx \\ &\leq \int_1^\infty \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x} dy dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1. \end{aligned}$$

Somit ist f integrierbar. Nun folgt

$$\begin{aligned}\int_D f(x,y)d(x,y) &\overset{\text{Fub}}{=} \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbf{1}_D(x,y)\cdot\frac{\cos(xy)}{x}dydx\\ &\overset{\text{s.o.}}{=} \int_1^\infty \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x}dydx = \int_1^\infty \frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\cdot\sin(xy)\right]_{y=0}^{y=\frac{1}{x}} dx\\ &= \int_1^\infty \frac{\sin(1)}{x}dx = \sin(x).\end{aligned}$$

Ana III, 15.12.2008

b) Sei $\alpha\in(0,1)$, $g:(0,1)\to\overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und $D:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le x\le 1\}$. Setze $f: D\to\overline{\mathbb{R}},\ f(x,y)=(x-y)^{-\alpha}\cdot g(x)$. $\tilde f$ sei die Nullfortsetzung von f. Sei $G(x,y):=g(y)\ \forall(x,y)\in D$. Dann ist $G=g\circ p_2$ messbar auf D. Damit ist auch f in (x,y) als Produkt messbarer Funktionen messbar. Weiter gilt

$$\begin{aligned}\int_D |f|dz &\overset{\text{Fub a)}}{=} \int_0^1\left(\int_0^1 \underbrace{\mathbf{1}_D(x,y)}_{=1\Leftrightarrow y\le x\le 1\Leftrightarrow x\in D_y}\cdot\tilde f(x,y)dx\right)dy\\ &= \int_0^1\left(\int_0^1 (x-y)^{-\alpha}\cdot|g(y)|dx\right)dy\\ &\overset{\substack{t=x-y\\ dt=dx}}{=} \int_0^1 \underbrace{\int_0^{1-y} t^{-\alpha}dt}_{\left[\frac{1}{1-\alpha}t^{1-\alpha}\right]_0^{1-y}=\frac{1}{1-\alpha}(1-y)^{1-\alpha}}\cdot|g(y)|dy\\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_0^1 \underbrace{(1-y)^{1-\alpha}}_{\le 1}\cdot|g(y)|dy = \frac{1}{1-\alpha}\int_0^1 |g(y)|dy<\infty.\end{aligned}$$

Also ist f integierbar, also existiert das Integral und es gilt

$$\begin{aligned}\int_D f(x)dz &\overset{\text{Fub b)}}{=} \int_0^1\left(\underbrace{\mathbf{1}_D(x,y)}_{=1\Leftrightarrow 0\le y\le x\Leftrightarrow yD^x}\cdot\tilde f(x,y)dy\right)dx\\ &= \int_0^1 \underbrace{\left(\int_0^x (x-y)^{-\alpha}\cdot g(y)dy\right)}_{=:F(x)}dx.\end{aligned}$$

<u>Beachte</u>: für $g(y):=|\frac{1}{2}-y|^{\alpha-1},\ y\in(0,1)$ (integrierbar) gilt aber

$$F(0.5)=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-y\right)^{-\alpha}\cdot\left(\frac{1}{2}-y\right)^{\alpha-1}dy=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-y\right)^{-1}dy=\infty.$$

c) In Ana1 haben wir bereits die Existenz von folgendem Limes gezeigt

$$\lim_{R\to\infty} \underbrace{\int_0^R \frac{\sin(x)}{x} dx}_{=:I_R,\ R>0}.$$

Für $x > 0$ gilt

$$\int_0^\infty e^{-xy} dy = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-xy} dy = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x} \cdot e^{-xy} \right]_0^b = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{x} \cdot (1 - e^{-bx}).$$

Somit folgt

$$I_R = \int_0^R \int_0^\infty \underbrace{\sin(x) \cdot e^{-xy}}_{=:f(x,y)} dydx$$

und $f : [0, R] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ist stetig. Ferner gilt

$$\int_D |f| dz \overset{\text{Fub a)}}{=} \int_0^R \int_0^\infty |\sin(x)| \cdot e^{-xy} dydx = \int_0^R \frac{|\sin(x)|}{x} dx < \infty.$$

Da der Integrand stetig ist, folgt, dass $f : D \to \mathbb{R}$ integrierbar ist. Somit gilt

$$\begin{aligned} I_R &\overset{\text{Fub b)}}{=} \int_D f dz = \int_0^\infty \int_0^R \sin(x) \cdot e^{-xy} dxdy \\ &\overset{\text{2x PI}}{=} \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2} \cdot \big(1 - e^{-yR} \cdot (y \cdot \sin(R) + \cos(R))\big)\, dy \\ &= \underbrace{\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2}}_{[\arctan(y)]_0^\infty = \frac{\pi}{2}} - \underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{1+y^2} \cdot e^{-yR} \cdot (y \cdot \sin(R) + \cos(R) dy}_{\leq \int_0^\infty \frac{1+y}{1+y^2} \cdot e^{-yR} dy \overset{(*)}{\leq} 2 \cdot \int_0^\infty e^{-yR} dy = \frac{2}{R} \xrightarrow{R\to\infty} 0}. \end{aligned}$$

Dabei gilt $(*)$: $\frac{1+y}{1+y^2} \leq 2$. Also folgt $\lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

3.4 Transformationssatz

Wir kennen aus Ana1 bereits die Substitutionsregel:
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $\varphi \in C([a, b])$ mit $\varphi([a, b]) = [a, b]$. Dann gilt

$$\int_a^b f(y) dy = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx.$$

Unser Ziel ist es nun, dies auf Funktionen $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ zu verallgemeinern.

Definition. Schon in Ana2 haben wir folgendes definiert. Seien $X, Y \subset \mathbb{R}^d$ offen und nichtleer. Sei $\phi : X \to Y$ bijektiv mit $\phi \in C^1(X, \mathbb{R}^d)$ und $\phi^{-1} \in C^1(Y, \mathbb{R}^d)$. Dann heißt ϕ ein Diffeomorphismus.

TODO: Wie schreibe ich das schön auf...?

Bemerkung. Sei ϕ diffeomorph. Dann $x \in \phi'(\phi(x)) \Rightarrow I = (\phi)'(\phi(x))\phi'(x)$. Also ist $\phi'(x)$ invertierbar für alle x.

Satz (Grundversion des Transformationssatzes)**.** *Seien $\emptyset \neq X, Y \subset \mathbb{R}^d$ offen und $\phi : X \to Y$ diffeomorph. Sei $f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar oder messbar und positiv. Dann ist $g(x) := f(\phi(x)) \cdot |\det \phi'(x)|$ integrierbar oder messbar und positiv und es gilt*

$$\int_Y f(y)dy = \int_X f(\phi(x)) \cdot |\det \phi'(x)|dx.$$

Beispiel (Polarkoordinaten für $d = 2$)**.** Sei $\phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}$. Dann ist $\phi \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Aus Ana2 wissen wir, dass $\det \phi'(r, \varphi) = r > 0$ $(\forall r > 0,\ \varphi \in \mathbb{R})$ gilt und dass $\phi : (0, R) \times (0, 2\pi) \to B(0, R)\backslash(\mathbb{R}_+ \times \{0\})$ für alle $R > 0$ bijektiv ist.

TODO: Blödes Bild... :-P

Für $\alpha \in (0, 2\pi)$ und $R > 0$ setze $V_\alpha := \phi((0, R) \times (0, \alpha))$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\lambda_2(V_\alpha) &= \int_{V_\alpha} 1d(x, y) \overset{\text{Trafo}}{=} \int_{(0,R)\times(0,\alpha)} 1 \cdot rd(r, \varphi) \overset{\text{Fub}}{=} \int_0^\alpha \int_0^R rdrd\varphi \\ &= \int_0^\alpha d\varphi \cdot \int_0^R rdr = \frac{\alpha R^2}{2}.\end{aligned}$$

<u>Problem</u>: $B(0, R) = \phi(\underbrace{[0, R) \times [0, 2\pi)}_{=:Q})$. Dann ist Q nicht offen und $\det \phi'(0, \varphi)$. Außerdem gilt $\phi(0, \alpha) = \phi(0, \beta)$ $\forall \alpha, \beta \in [0, 2\pi]$, also ist ϕ nicht injektiv.

Definition. Wir nennen weiter für eine beliebige Menge $A \subset \mathbb{R}^d$

$$A^0 = \{x \in A : \exists r > 0 : B(x, r) \subset A\}$$

das Innere von A.

Theorem 3.30 (Transformationssatz)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\phi \in C^1(U, \mathbb{R}^d)$, $A \in \mathcal{B}_d$, $A \subset U$, sodass $X := A^0 \neq \emptyset$ gilt und $A\backslash A^0$ eine Nullmenge ist. Ferner sei $B := \phi(A) \in \mathcal{B}_d$, ϕ sei auf X inkjektiv $\det \phi'(x) \neq 0$ $\forall x \in X$.*
Dann ist $Y = \phi(X)$ offen, $\phi : X \to Y$ diffeomorph, $B\backslash Y$ ist eine Nullmenge. Weiter gelten

a) Sei $f : B \to [0, \infty]$ messbar. Dann gilt

$$\int_B f(y)dy = \int_A \underbrace{f(\phi(x)) \cdot |\det \phi'(x)|}_{:=g(x)} dx. \tag{3.7}$$

b) Sei $f : B \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann ist f integrierbar auf B äquivalent dazu, dass g integrierbar auf A ist. In diesem Fall gilt (3.7).

Beweis. Extra Vorlesung am 16.12.2008. $\square$

Bemerkung. a) Grundversion folgt aus Thm 3.30, falls $A = X = U$ offen, nach der Vorbemerkung über Ana2.

b) Die Funktion g in Thm 3.30 ist messbar, da f messbar ist und $\phi \in C^1$ nach Kapitel 2.

c) $A = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \in \mathcal{B}_d$, $\lambda_1(A) = \infty$, aber $A^0 = \emptyset$.

d) Sei $A = [0, R)\times[0, 2\pi)$. Dann ist $A^0 = (0, R)\times(0, 2\pi)$, also ist $A\backslash A^0$ eine zweidimensionale Nullmenge. Sei ϕ die Polarkoordinatenabbildung. Dann gilt $\phi(A) = B(0, R)$ und $\phi : A^0 \to B(0, R)\backslash(\mathbb{R}_+ \times \{0\})$ diffeomorph. Mit dem Trafo folgt

$$\begin{aligned}\lambda(B(0,R)) &= \int_{B(0,R)} 1 dy = \int_A 1 \cdot r d(r\varphi) \overset{\text{Fub}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^R r dr d\varphi \\ &= \frac{2\pi R^2}{2} = \pi R^2.\end{aligned}$$

Lemma 3.31. *Sei $T \in L(\mathbb{R}^d)$ invertierbar, $v \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathcal{B}_d$. Dann gelten $B = TA + v = \{y \in \mathbb{R}^d : \exists x \in A : y = Tx + v\} \in \mathcal{B}_d$ und $\lambda_d(TA + v) = |\det T|\lambda_d(A)$.*
Also gilt für jede Bewegung T (d.h., $\det T = \pm 1$) $\lambda(TA + v) = \lambda(A)$. Somit ist λ bewegungsinvariant.

Ana III, 19.12.2008

Beweis. Sei $\phi(x) = Tx + v$. Dann gilt $B := \phi(A) = (\phi^{-1})^{-1}(A) \in \mathcal{B}_d$, da ϕ^{-1} stetig und damit messbar. Satz 1.24 sagt dann $\lambda(TA + v) = \lambda(TA)$. Für $A \in \mathcal{B}_d$ setze $\mu(A) := \lambda(TA)$. Dann gilt sofort $\mu(\emptyset) = \lambda(\emptyset) = 0$.
Seien $A_j \in \mathcal{B}_d$ ($j \in \mathbb{N}$) disjunkt. Da T injektiv ist, sind auch die TA_j ($j \in \mathbb{N}$) disjunkt. Ferner gilt $T \biguplus_{j\in\mathbb{N}} A_j = \{y \in \mathbb{R}^d : \exists! x \in A_j \text{ mit } y = Tx\} = \biguplus_{j\in\mathbb{N}} TA_j$. Damit gilt

$$\mu\left(\biguplus_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \lambda\left(T\biguplus_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \lambda\left(\biguplus_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda(TA_j) = \sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_j).$$

Also ist μ ein Maß.
Sei $x \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt $\mu(A + x) = \lambda(TA + Tx) \overset{\text{Satz 1.24}}{=} \lambda(TA) = \mu(A)$, womit μ Translationsinvariant ist. Mit Satz 1.24 folgt dann

$$\mu(A) = c(T) \cdot \lambda(A), \tag{$*$}$$

wobei $c(T) = \mu([q_1]^d) = \lambda(T[q_1]^d)$ gilt. Demnach müssen wir $c(T) = |\det T|$ zeigen. Dies erledigen wir in drei Schritten:

1) Sei speziell $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{pmatrix}$ mit $\lambda_j \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Dann ist $T[0,1)^d$ ein Würfel mit 0^d als Ecke und den Kantenlängen $|\lambda_1|, \dots, |\lambda_d|$. Also gilt für sein Volumen $\lambda(T[0,1)^d) = |\lambda_1| \cdots |\lambda_d| = |\det T|$.

2) Sei speziell T orthogonal (d.h. $\exists T^{-1} = T^T$). Dann gilt

$$|Tx|_2^2 = (Tx|Tx) = (T^T T|x) = |x|_2^2.$$

Genauso gilt

$$|T^{-1}x| = |x|_2 \;\Rightarrow\; TB(0,1) = B(0,1). \tag{+}$$

Damit folgt

$$c(T) \cdot \lambda(B(0,1)) \overset{(*)}{=} \mu(B(0,1)) = \lambda(TB(0,1)) \overset{(+)}{=} \lambda(B(0,1)).$$

Also gilt $c(T) = 1 = |\det T|$, da $T^{-1} = T^T$.

3) Sei nun T beliebig invertierbar.

Beh: $\exists$ orthogonale Matrizen Q, S und eine Matrix $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{pmatrix}$, $\lambda_j \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, mit $T^{-1} = Q^{-1}DS$.

Ist Beh gezeigt, dann folgt $|\det T| = |\det Q^{-1}| \cdot |\det D| \cdot |\det S| = |\det D|$. Weiter gilt dann

$$\begin{aligned} c(T) &= \lambda\left(T[0,1)^d\right) = \lambda\left(Q^{-1}DS[0,1)^d\right) \underset{(*)}{\overset{2)}{=}} \lambda\left(DS[0,1)^d\right) \underset{(*)}{\overset{1)}{=}} |\det D| \\ &= \lambda\left(S[0,1)^d\right) \overset{2)}{=} |\det D| = \lambda\left([0,1)^d\right) = 1. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass wir den Beweis erbracht haben, sobald Beh gezeigt ist.

Beweis von Beh. Die Matrix $T^T T$ ist symmetrisch, da $\left(T^T T\right)^T = T^T \left(T^T\right)^T = T^T T$, und positiv definit nach (+). Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass $Q^{-1} = Q^T$ und D^2 wie oben exisitieren, sodass

$$T^T T = Q^T D^2 Q \tag{++}$$

gilt. Setze $S := D^{-1}QT$. Dann gelten $Q^{-1}DS = T$ und

$$SS^T = D^{-1}QTT^TQ^TD^{-1} \overset{(++)}{=} D^{-1} \underbrace{QQ^T}_{=I} D^2 \underbrace{QQ^T}_{=I} D^{-1} = I.$$

□

Damit ist das Lemma gezeigt.

$\square$

Lemma 3.32. *Seien $\emptyset \neq X, Y \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\phi : X \to Y$ diffeomorph, $A \in \mathcal{B}(X)$. Dann ist $\phi(A) \in \mathcal{B}_d$ und es gilt*

$$\lambda_d(\phi(A)) = \int_A |\det \phi'(x)| dx.$$

Beweis. Extra Vorlesung. $\square$

Lemma 3.33. *Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $F \in C^1(U, \mathbb{R}^d)$ und $N \subset U$ eine d-dim. Nullmenge. Dann ist $F(N)$ auch eine d-dimensionale Nullmenge.*

Beweis von Thm 3.30. Vorberkung: Nach Voraussetzung gilt $B \backslash Y \in \mathcal{B}_d$ und $A \backslash X$ ist eine Nullmenge. Ferner gilt $B \backslash Y = \phi(A) \backslash \phi(X) \subset \phi(A \backslash X) \overset{\text{Lem 3.33}}{\subset}$ Nullmenge. Damit ist $B \backslash Y$ eine Nullmenge.

a) Sei $f \geq 0$. Dann gilt $\int_{B\backslash Y} f dx = 0 = \int_{A \backslash X} g dx$. Daraus folgt

$$\int_B f dy = \int_Y f dy, \qquad \int_A g dx = \int_X g dx.$$

b) $f = \mathbf{1}_Y \cdot f$ *(f.ü.)*, $g = \mathbf{1}_X \cdot g$ *(f.ü.)*. Lem 3.5 zeigt

f integrierbar auf B $\Leftrightarrow$ f integrierbar auf Y und dann gilt

$$\int_Y f dx = \int_B f dy.$$

Entsprechendes gilt für g. Fazit: Das Theorem muss nur für $A = X$ und $B = Y$ gezeigt werden.

Nach Ana2 ist $\phi : X \to Y$ diffeomorph und Y ist offen.

a) 1) Sei $f \geq 0$ einfach mit $f = \sum_{k=1}^m z_k \cdot \mathbf{1}_{B_k}$, $B_k \in \mathcal{B}(Y)$. Da ϕ stetig ist, folgt $\phi^{-1}(B_k) =: A_k \in \mathcal{B}(X)$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Weiter ist $B_k = \phi(A_k)$ und es gilt für alle $x \in X, k = 1, \ldots, m$

$$\mathbf{1}_{A_k}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_k \\ 0, & x \notin A_k \end{cases} = \begin{cases} 1, & \phi(x) \in \mathcal{B}_k \\ 0, & \phi(x) \notin \mathcal{B}_k \end{cases} = \mathbf{1}_{B_k}(\phi(x)).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\int_Y f dy &= \sum_{k=1}^m z_k \cdot \int_Y \mathbf{1}_{B_k} dy \overset{\text{s.o.}}{=} \sum_{k=1}^m z_k \cdot \lambda(\phi(A_k)) \\
&\overset{\text{Lem 3.32}}{=} \sum_{k=1}^m z_k \cdot \int_{A_k} |\det \phi'(x)| dx \\
&= \int_X \sum_{k=1}^m z_k \cdot \underbrace{\mathbf{1}_{A_k}(x)}_{=\mathbf{1}_{B_k}(\phi(x))} \cdot |\det \phi'(x)| dx \\
&= \int_X f(\phi(x)) \cdot |\det \phi(x)| dx.
\end{aligned}$$

2) Sei $f : Y \to [0,\infty]$ messbar. Dann existieren einfache $f_n : Y \to \mathbb{R}_+$ mit $f_n \leq f_{n+1}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) und $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$. Dann gilt

$$\int_Y f dy \overset{\text{BL}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_Y f_n dy \overset{1)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X \underbrace{f_n(\phi(x)) \cdot |\det \phi'(x)|}_{=:g_n(x) \leq g_{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} g(x)} dx$$
$$\overset{\text{BL}}{=} \int_X f(\phi(x)) \cdot |\det \phi'(x)| dx.$$

Damit ist a) gezeigt.

b) 3) Sei $f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann ist $g_\pm(x) = f_\pm(\phi(x)) \cdot |\det \phi'(x)|$ für alle $x \in X$. Aus 2) folgt, dass (3.7) für $f_\pm$ und $g_\pm$ gilt. Damit gelten

$$f \text{ integrierbar} \Leftrightarrow f_\pm \text{ integrierbar} \overset{a)}{\Leftrightarrow} g_\pm \text{ integrierbar} \Leftrightarrow g \text{ integrierbar}$$

und

$$\int_Y f dy = \int_Y f_+ dy - \int_Y f_- dy \overset{(3.7)}{=} \int_X g_+ dx - \int_X g_- dx = \int_X g dx.$$

Damit ist b) gezeigt.

$\square$

Beispiel 3.34 (Affiner Transformationssatz)**.** Sei $\phi(x) = Tx + v$ für festes $v \in \mathbb{R}^d$ und $T \in L(\mathbb{R}^d)$ mit $\det T \neq 0$. Sei $A \in \mathcal{B}_d$, sodass $A \backslash A^0$ eine Nullmenge ist, $A^0 \neq \emptyset$. Daraus folgt $B = TA + v \in \mathcal{B}_d$. Für $f : B \to \overline{\mathbb{R}}$ (integrierbar oder messbar und positiv) gilt

$$\int_B f(y) dy = |\det T| \cdot \int_A f(Tx + v) dx.$$

Beispiel 3.35 (d-dimensionale Polarkoordinaten)**.** Sei $(r, \varphi, \Theta_1, \dots \Theta_{d-2}) =: (r, \varphi, \Theta) \in \mathbb{R}^d,\ d \geq 2$. Setze

$$\phi_d(r,\varphi,\Theta) := \begin{pmatrix} r\cdot\cos(\varphi) & \cos(\Theta_1) & \cos(\Theta_2) & \cdots & \cos(\Theta_{d-2}) \\ r\cdot\sin(\varphi) & \cos(\Theta_1) & \cos(\Theta_2) & \cdots & \cos(\Theta_{d-2}) \\ & r\cdot\sin(\Theta_1) & \cos(\Theta_2) & \cdots & \cos(\Theta_{d-2}) \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & & r\cdot\sin(\Theta_{d-2}) \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Klar: $\phi_d \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$.
Sei $H_d = \mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R}^{d-2}$, wobei $H_2 = \mathbb{R}_+ \times \{0\}$. $W_d = (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{d-2}$, wobei $H_2 = (0, 2\pi)$.
Beh: Seien $R > 0,\ (r, \varphi, \Theta) \in \mathbb{R}^d$. Dann gelten $|\phi_d(r, \varphi, \Theta)| = r$ und

$$\det \phi'(r,\varphi,\Theta) = r^{d-1} \cdot \cos(\Theta_1) \cdot \cos^2(\Theta_2) \cdots \cos^{d-2}(\Theta_{d-2}) = r^{d-1} \cdot TODO.$$

$\phi_d : (0,\infty) \times W_d \to \mathbb{R}^d$ ist injektiv, $\phi_d((0,\infty) \times W_d) = \mathbb{R}^d \backslash H_d$,
$\phi_d(\mathbb{R}_+ \times \overline{W}_d) = \mathbb{R}^d$, $\phi_d((0,R) \times W_d) = B(0,R)$, $\phi_d([0,R) \times \overline{W}_d) = B(0,R) \backslash H_d$.

Zum Beweis siehe. Aman/Escher III, Lemma X.8.8. □

Sei $A = [0,R) \times \overline{W}_d$ Dann folgt $A^0 = (0,R) \times \overline{W}_d \Leftarrow \lambda_d(A \backslash A^0) = 0$. Ferner ist $B(0,R) = \phi(A)$. Damit gilt

$$\lambda(B(0,R)) = \int_{B(0,R)} 1 dy \overset{\text{Trafo}}{=} \int_{(0,R)} |\det \phi| dx$$
$$\underset{\text{Fub}}{\overset{(3.8)}{=}} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdots \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^{d-1} \cos(\Theta_1) \cdots \cos^{d-1}(\Theta_{d-2}) d\Theta_{d-2} \cdots d\Theta_1 d\varphi dr$$
$$= \underbrace{\int_0^R r^{d-1} dr}_{\frac{1}{d}R^d} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} \cdot \prod_{k=1}^{d-2} 2 \cdot \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^k(t) dt}_{=:I_k} = \frac{2^{d-1}}{d} \cdots \pi \cdot I_1 \cdot I_2 \cdots I_{d-2}.$$

<u>Dabei</u>: $I_k \overset{\text{PI}}{=} \frac{k-1}{k} \cdot I_{k-2}$ mit $I_1 = 1,\ I_2 = \pi$. Per Induktion folgt

$$\lambda(B(0,R)) = \begin{cases} \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\frac{d}{2}!} \cdot R^d, & d \text{ gerade} \\ \frac{2 \cdot (2\pi)^{\frac{d-1}{2}}}{d \cdot (d-2) \cdots 3 \cdot 1} \cdot R^d, & d \text{ ungerade} \end{cases} \overset{!}{=} \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{d \cdot \Gamma(\frac{d}{2})} \cdot R^d.$$

Setze

$$\kappa_d := \lambda_d(B(0,1)) = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{d\Gamma(\frac{d}{2})}, \text{ wobei } \kappa_1 = 2,\ \kappa_2 = \pi,\ \kappa_3 = \frac{4}{3}\pi \text{ gilt.} \tag{3.9}$$

Dabei ist $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$. Es gelten

$$\Gamma(1) = 1,\ x \cdot \Gamma(x) = \Gamma(x+1). \tag{3.10}$$

Also $\Gamma(n) = n!$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Und es gilt $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, siehe Ana1.

Ana III, 22.12.2008

Beispiel 3.36 (rotationssymmetrische Funktion)**.** Sei $I \subset \mathbb{R}_+$ ein Intervall, $a = \inf I_+$, $b = \sup I$, $\phi : I \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Setze $f(y) := \phi(|y|_2)$ für $y \in R = \{y \in \mathbb{R}^d : |y|_2 \in I\}$ in $\mathbb{R}^2$.

TODO: Bild

Mit Bsp 3.35: $\phi_d : A := I \times \overline{W}_d \to R$ surjektiv. $\phi_d : A^0 \to R^0$ ist diffeomorph, $A^0 = I^0 \times W_d$. Damit ist $A \backslash A^0$ eine Nullmenge. Mit Thm 3.30 folgt:

$$f \text{ auf } \mathbb{R} \text{ integrierbar} \Leftrightarrow g = f \circ \phi_d(\det \phi_d') \text{ integrierbar auf } A,$$

wobei $g(r, \varphi, \Theta) = \phi(r) \cdot r^{d-1} \cdot \underbrace{\cos(\Theta) \cdots \cos^{d-2}(\Theta_{d-2})}_{=:w(\Theta)}$ und $w > 0$ stetig und beschränkt auf W_d ist.
Fubinisagt:

$$f \text{ integrierbar} \Leftrightarrow g \text{ integrierbar} \Leftrightarrow r \mapsto r^{d-1}\phi(r) \text{ integrierbar auf } I$$

und

$$\begin{aligned}\int_R f(y)dy &\overset{\text{Trafo}}{\underset{\text{Fub}}{=}} \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdots \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \phi(r)\cdot r^{d-1}\cdot w(\Theta)d\Theta d\varphi dr \\ &= \int_a^b r^{d-1}\phi(r)dr \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} \cdot \underbrace{\int_{W_d} w(\Theta)d\Theta}_{\overset{(3.9)}{=}\kappa_d \frac{d}{2\pi}} \\ &= d\cdot\kappa_d\cdot\int_a^b r^{d-1}\phi(r)dr = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{r(\frac{d}{2})}\cdot\int_a^b r^{d-1}\phi(r)dr.\end{aligned} \tag{3.11}$$

(3.11) gilt stets für $\phi \geq 0$. Wir setzen

$$w_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{r(\frac{d}{2})} = d\cdot\kappa_d. \tag{3.12}$$

Speziell $w_2 = 2\pi,\ w_3 = 4\pi$.

Beispiel. $d = 3,\ \phi(r) = \frac{1}{r},\ I = (0, R)$. Dann gilt

$$\int_{B(0,R)} \frac{dx}{|x|_2} \overset{(3.11)}{=} w_B \cdot \int_0^R r^2 \cdot \frac{1}{r} dr = 4\pi \cdot \int_0^R r dr = 2\pi \cdot R^2.$$

Hier gilt $f(y) = \frac{1}{|y|_2}$.

Satz 3.37. *Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ messbar, es gebe Konstanten $c, \epsilon > 0$ mit*

$$|f(x)| = \begin{cases} c\cdot|x|_2^{-d+\epsilon}, & 0 \leq |x|_2 \leq 1 \\ c\cdot|x|_2^{-d-\epsilon}, & |x|_2 \geq 1 \end{cases}.$$

Dann ist f integrierbar.

Beweis. Sei $\phi(r) = c\cdot r^{-d+\epsilon}$ für $0 < r \leq 1,\ \phi(r) = c\cdot r^{-d-\epsilon}$ für $r \geq 1$. Sei $g(x) = \phi(|x|_2)$ für $x \in \mathbb{R}^d\backslash\{0\}$ und $g(0) = 0$. Dann ist $g \geq 0$ und messbar. Mit Bsp 3.36 folgt nun

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} g(x)dx &= w_d \cdot \int_0^\infty r^{d-1}\phi(r)dr \\ &= c\cdot\underbrace{\int_0^1 r^{d-r} r^{-d+\epsilon}}_{=r^{-1+\epsilon}} dr + c\cdot\int_1^\infty \underbrace{r^{d-1}r^{-d-\epsilon}}_{=r^{-1-\epsilon}} dr < \infty.\end{aligned}$$

Somit ist g integrierbar. Da $|f| \leq g$, folgt mit Satz 2.23, dass auch f integrierbar ist. $\square$

Beispiel 3.38.

$$J := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|_2^2} dx = \pi^{\frac{d}{2}}.$$

Beweis.

$$J \overset{\text{Fub}}{=} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}}}_{d \text{ mal}} e^{-x_1^2} \cdots e^{-x_d^2} dx_d \dots dx_1 = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt \right)^d .$$

Im Falle $d = 2$ gilt

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt \right)^2 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy \overset{\text{Fub}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y) \\
&\underset{r^2=x^2+y^2}{\overset{\text{Trafo}}{=}} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty e^{-r^2} \cdot r dr \\
&\underset{\frac{ds}{dr}=\phi'(r)=2r}{\overset{s=r^2=\phi(r)}{=}} 2\pi \tfrac{1}{2} \cdot \int_0^\infty e^{-s} ds = \pi .
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi},$$

woraus die Behauptung folgt. $\square$

<u>Folgerung</u>:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot e^{-t} dt \underset{\frac{dt}{ds}=\phi'(s)=2s}{\overset{t=s^2=\phi(s)}{=}} \int_0^\infty \frac{1}{s} c^{-s^2} 2s \overset{\text{s.o.}}{=} \sqrt{\pi} = 2 \cdot \int_0^\infty e^{-s^2} ds.$$