3 Übung vom 12.05.

5. Aufgabe

(a) Es seien

$$M = \bigcap_{i=1}^{k} \{f_i \leq \alpha_i\} = \bigcap_{i=1}^{m} \{g_i \leq \beta_i\}$$

zwei Darstellungen von M. Es sei weiter $i \in \{1, \dots, k\}$ mit

$$F := M \cap \{f_i = \alpha_i\} \neq \varnothing$$

Behauptung: $\exists J \subset \{1, \dots, m\},\ J \neq \varnothing$ [mit $F = M \cap \bigcap_{j \in J} \{g_j = \beta_j\}$]

$F \neq \varnothing$, also besitzt F relativ innere Punkte, d.h. es existiert ein $\alpha > 0$ mit

$$B := \underbrace{B_\alpha(x)}_{\text{Kugel um x mit Radius } \alpha} \cap \operatorname{aff} F \subset F$$

wobei $x \in \operatorname{rel\ int} F$ sein soll.

Wir definieren

$$J := \{i \in \{1, \dots, k\} |\ g_j(x) = \beta_j\}$$

Weil $x \in F \subset \{f_i = \alpha_i\}$, gilt $x \notin \operatorname{int} M$. Also gilt: $\exists j \in \{1, \dots, k\} :\ g_j(x) = \beta_j$, somit ist $J \neq \varnothing$.
Wir setzen

$$\tilde{F} := M \cap \bigcap_{j \in J} \{g_j = \beta_j\}$$

z.z.: $\tilde{F} = F$
„$\supset$“: Sei $j \in J$ und $z \in \mathbb{R}^n$ so, dass $x + z \in B$. Dann gilt:

$$x + z \in B \subset F \subset \{g_j \leq \beta_j\}$$

$$x - z \in B \subset F \subset \{g_j \leq \beta_j\}$$

Somit:

$$g_j(x + z) = g_j(x) + g_j(z) = \beta_j + g_j(z) \leq \beta_j$$
$$g_j(x - z) = g_j(x) - g_j(z) = \beta_j - g_j(z) \leq \beta_j$$

$\Rightarrow g_j(z) = 0$

Es gilt: $B \subset \{g_j = \beta_j\}$ für alle $j \in J$

$$\left.\begin{array}{lll} F & \subset & \operatorname{aff} F = \operatorname{aff} B \subset \bigcap_{j \in J} \{g_j = \beta_j\} \\ F & \subset & M \end{array}\right\} \Rightarrow F \subset \tilde{F}$$

„$\subset$“: Sei $y \in \tilde{F}$ und x wie zuvor.
Der Strahl $h := \{y + \beta(x-y) | \, \beta \geq 0\}$ erfüllt $h \subset \{g_j = \beta_j\} \; \forall j \in J$.

Weil $g_j(x) < \beta_j \; \forall j \notin J$ liegt $x \in \operatorname{int} \bigcap_{j \notin J} \{g_j = \beta_j\}$.
Damit existiert aber ein $z \in h \cap M$ mit $x \in [y, z]$.

Es gilt $f_i(x) = \alpha_i$ und $f_i(y) \leq \alpha_i$ und $f_i(z) \leq \alpha_i$, sowie $f_i(\alpha y + (1-\alpha)z) = f(x)$ für ein $\alpha \in (0,1)$.

$\alpha_i = f_i(x) = \alpha f_i(y) + (1-\alpha) f_i(z) \Rightarrow f_i(y) = \alpha_i, \; f_i(z) = \alpha_i \Rightarrow y \in F$

(b) Falls $M = \mathbb{R}^n$, so hat M keine Seiten.
Es sei also

$$M = \bigcap_{i=1}^{k} \{f_i \leq \alpha_i\}, \; k \geq 1 \qquad (*)$$

Ist $F = M \cap \{f_{i_0} = \alpha_{i_0}\}$ für ein $i_o \in \{1, \ldots, k\}$, so gilt $F = M \cap \{f_{i_0} \leq \alpha_{i_0}\} \cap \{f_{i_0} \geq \alpha_{i_0}\}$ und F ist polyedrisch nach Definition.

Jeder andere Seitentyp ist nicht-leerer Schnit solcher Mengen, also auch polyedrisch.

(c) Es sei M in der Form $(*)$ gegeben und $F = M \cap \bigcap_{i \in I} \{f_i = \alpha_i\} = M \cap \bigcap_{i \in I} \{f_i \leq \alpha_i\} \cap \bigcap_{i \in I} \{f_i \geq \alpha_i\}$ mit $\varnothing \neq I \subset \{1, \ldots, k\}$. $(**)$

Für jede Seite F' von F gilt also

$$F' = F \cap \bigcap_{j \in J} \{f_j = \alpha_j\} = M \cap \bigcap_{i \in I \cup J} \{f_i = \alpha_i\}$$

mit $J \subset \{1, \ldots, k\}$.
Also ist F' Seite von M.

(d) Es seien F',F Seiten von M, $F' \subset F$. Dann existieren $I, I' \subset \{1, \ldots, k\}$ mit

$$F = \underbrace{\bigcap_{i=1}^{k} \{f_i \leq \alpha_i\}}_{=M} \cap \bigcap_{i \in I} \{f_i = \alpha_i\}$$

$$F' = M \cap \bigcap_{i \in I'} \{f_i = \alpha_i\}$$

Es gilt:

$$F' = F \cap F' = M \cap \bigcap_{i \in I} \{f_i = \alpha_i\} \cap \bigcap_{i \in I'} \{f_i = \alpha_i\} = F \cap \bigcap_{i \in I, I'} \{f_i = \alpha_i\}$$

6. Aufgabe

„(i)⇒(ii)“: Es sei s Extremalstrahl, d.h.

$$s = M \cap \bigcap_{i \in I} \{f_i = \alpha_i\} \quad \text{mit} \quad I \subset \{1, \dots, k\}$$

$(M = \bigcap\limits_{i=1}^{k} \{f_i \leq \alpha_i\})$

Weiter sei $x \in s$ und $y, z \in M$ mit $x = \alpha y + (1-\alpha)z$.
Für $i \in I$ gilt: $\alpha_i = f_i(x) = \alpha \underbrace{f_i(y)}_{\leq \alpha_i} + (1-\alpha) \underbrace{f_i(z)}_{\leq \alpha_i} \Rightarrow f_i(y) = \alpha_i,\ f_i(z) = \alpha_i$

$\Rightarrow y, z \in s$

„(ii)⇒(i)“: Wir definieren

$$I := \{i \in \{1, \dots, k\} |\, s \subset \{f_i = \alpha_i\}\}$$

und

$$F := M \cap \bigcap_{i \in I} \{f_i = \alpha_i\}$$

z.z.: $I \neq \varnothing$, $F = s$

Falls $I = \varnothing$, dann existiert $x \in s$ mit $x \in \bigcap_{i=1}^{k} \{f_i < \alpha_i\} = \operatorname{int} M$.
Dann existieren aber $y, z \in M$ mit $y, z \notin s$ und $x \in [y, z]$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

Also $I \neq \varnothing$.
Nach Definition von F ist $s \subset F$ klar.

z.z.: $F \subset s$

Sei $y \in F$ und $x = x^0 + u^0$ (wobei $s = \{x^0 + \beta u^0 |\, \beta \geq 0\}$).
Wir betrachten den Strahl

$$h := \{y + \beta(x - y) |\, \beta \geq 0\}$$

Für $i \in I$ gilt: $h \subset \{f_i = \alpha_i\}$, also $h \subset \bigcap_{i \in I} \{f_i = \alpha_i\}$.
Wie zuvor: $f_i(x) < \alpha_i\ \forall i \notin I$.

Also gilt $x \in \bigcap_{i \notin I} \{f_i < \alpha_i\}$.
Damit existiert aber ein $z \in h$ mit $z \neq x$ und $x \in [y, z]$. Wegen (ii) folgt daraus, dass $y, z \in s$.

Also gilt $F \subset s$.

7. Aufgabe

$M \subset \mathbb{R}^n$ mit M nichtleer, geradenfrei, polyedrisch

„$\Rightarrow$“: (Sei M ein Kegel.)
$M \neq \varnothing$, M polyedrisch, M geradenfrei $\Rightarrow$ vert $M \neq \varnothing$

Sei $x \in$ vert M.
Falls $x \neq 0$, so gilt $0 \in M$, $2x \in M$ und es gilt $x \in [0, 2x]$. **Widerspruch zu x Ecke!**
Also muss $x = 0$ sein. [*Also:* vert $M = \{0\}$]

„$\Rightarrow$“: Sei vert $M = \{0\}$.
Nach Vorlesung: $(*)$ $M = \text{conv}\,\{\{0\} \cup \text{exth}\, M\}$
[exth ist die Vereinigung aller Extremalstrahlen]

Ist $M = \{0\}$, so ist M Kegel. Also gelte nun exth $M \neq \varnothing$.
Es sei $s \in$ exth M, also $s = \{x^0 + \beta u^0 |\, \beta \geq 0\}$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $u^0 \in S^{n-1}$.
[$S^{n-1} = \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\| = 1\}$ Einheitssphäre]

$$\begin{array}{rcl} x^0 \in \text{vert } s & \Rightarrow & x^0 \text{ ist 0-Seite von s} \\ & \overset{\text{Aufgabe 5}}{\Rightarrow} & x^0 \text{ ist 0-Seite von M} \\ & \Rightarrow & x^0 \in \text{vert } M \\ & \Rightarrow & x^0 = 0 \end{array}$$

D.h. jeder Extremalstrahl ist von der Form $\{\beta u^0 |\, \beta \geq 0\}$ für ein $u^0 \in S^{n-1}$.

Seien $u^1, \ldots, u^k \in S^{n-1}$ die Richtungen der Extremalstrahlen. Dann gilt:

$$M = \text{conv} \left\{ \{0\} \cup \bigcup_{i=1}^{k} \{\beta u^i |\, \beta \geq 0\} \right\}$$

und man rechnet einfach nach, dass M Kegel ist.

8. Aufgabe

O.E. $y^i \neq 0$ für $i = 1, \ldots, m$.

Wir definieren $M := \text{conv}\,\{y^1, \ldots, y^m\}$.
Dann gilt: $0 \notin M$. Denn andernfalls:

$$0 = \beta_1 y^1 + \ldots + \beta_m y^m \quad \text{mit } \beta_i \geq 0 \text{ und } \sum_{i=1}^{m} \beta_i = 1$$

$$\overset{\text{O.E. } \beta_1 > 0}{\Rightarrow} y^1 = -(\underbrace{\alpha_2}_{=\frac{\beta_2}{\beta_1}} y^2 + \ldots + \underbrace{\alpha_m}_{=\frac{\beta_m}{\beta_1}} y^m) \quad \text{mit } \alpha_i \geq 0$$

Also gilt $-y^1 \in V \Rightarrow$ Gerade, die von y^1 und $-y^1$ aufgespannt wird, liegt auch in V. **Widerspruch!**

Es sei $x_0 \in M$ mit $\|x_0\| = \min_{x \in M} \|x\|$.
Wir definieren $f := \langle \cdot, x_0 \rangle$.
Dann gilt: $f(z) \geq 0 \; \forall z \in M$. Ansonsten Widerspruch zur Wahl von x_0!$^{(1)}$

$V = \bigcup_{\alpha \geq 0} \alpha M \subset \{f \geq 0\}$ und $V \setminus \{0\} \subset \{f > 0\}$ und wir haben die Behauptung.

`Anmerkung (1):` Man kann sich das anschaulich klar machen. Im zweidimensionalen zeichne die Gerade $\{f = 0\}$. Sei $z \in M$ in der Halbebene, in der x_0 nicht liegt, z.B. $z \in \{f < 0\}$ (dann $f(z) < 0$). $[z, x_0] \subset M$ und schon findet man einen Punkt der näher am Nullpunkt ist als x_0. [...]

Zusatzaufgabe

Musterlösung online.