

## § 25.

# Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

In diesem Paragraphen sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $b : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

Wir betrachten zunächst die **homogene Gleichung**

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0 \quad (\text{H})$$

und geben **ohne** Beweis ein „Kochrezept“ an, wie man zu einem FS von (H) kommt.

$$p(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

heißt das **charakteristische Polynom** von (H).

### Übung:

Ist

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

so ist  $\det(\lambda I - A) = p(\lambda)$ .

### Kochrezept:

- (1) Bestimme die verschiedenen Nullstellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  ( $r \leq n$ ) von  $p$  und deren Vielfachheiten  $k_1, \dots, k_r$ , also:

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{k_r}$$

Es seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  und  $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .

$$M := \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} \cup \{\lambda_j \mid m+1 \leq j \leq r, \operatorname{Im}(\lambda_j) > 0\}$$

- (2) Sei  $\lambda_j \in M$ .

**Fall 1:**  $\lambda_j \in \mathbb{R}$

Dann sind

$$e^{\lambda_j x}, x e^{\lambda_j x}, \dots, x^{k_j-1} e^{\lambda_j x}$$

$k_j$  linear unabhängige Lösungen von (H).

**Fall 2:**  $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , etwa  $\lambda_j = \alpha + i\beta$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0$ )

Dann sind

$$\begin{aligned} e^{\alpha x} \cos(\beta x), x e^{\alpha x} \cos(\beta x), \dots, x^{k_j-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x) \\ e^{\alpha x} \sin(\beta x), x e^{\alpha x} \sin(\beta x), \dots, x^{k_j-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x) \end{aligned}$$

$2k_j$  linear unabhängige Lösungen von (H).

(3) Führt man (2) für jedes  $\lambda_j \in M$  durch, so erhält man ein FS von (H).

**Beispiele:**

(1) Bestimme die allg. Lösung der Gleichung

$$y^{(6)} - 6y^{(5)} + 9y^{(4)} = 0 \quad (*)$$

Es gilt:

$$p(\lambda) = \lambda^6 - 6\lambda^5 + 9\lambda^4 = \lambda^4(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = \lambda^4(\lambda - 3)^2$$

Sei also:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &:= 0 & \lambda_2 &:= 3 \\ k_1 &:= 4 & k_2 &:= 2 \end{aligned}$$

Ein FS von (\*) lautet:  $1, x, x^2, x^3, e^{3x}, xe^{3x}$ . Das bedeutet für die allgemeine Lösung von (\*):

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5e^{3x} + c_6xe^{3x} \quad (c_1, \dots, c_6 \in \mathbb{R})$$

(2) Bestimme die allgemeine Lösung der Gleichung:

$$y''' - 2y'' + y' - 2y = 0 \quad (*)$$

Es gilt:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda^2 + 1)(\lambda - 2) = (\lambda - 2)(\lambda + i)(\lambda - i)$$

Sei also:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &:= 2 & \lambda_2 &:= i & \lambda_3 &:= -i \\ k_1 &:= 1 & k_2 &:= 1 & k_3 &:= 1 \end{aligned}$$

Dann ist  $M := \{2, i\}$  und ein FS von (\*) lautet:  $e^{2x}, \cos(x), \sin(x)$ . Das bedeutet für die allgemeine Lösung von (\*):

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2\cos(x) + c_3\sin(x) \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

(3) Löse das AwP:

$$\begin{cases} y''' - 2y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0 \end{cases}$$

Die allgemeine Lösung der Dgl lautet:

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2\cos(x) + c_3\sin(x)$$

Es ist:

$$\begin{aligned}y'(x) &= 2c_1 e^{2x} - c_2 \sin(x) + c_3 \cos(x) \\y''(x) &= 4c_1 e^{2x} - c_2 \cos(x) - c_3 \sin(x)\end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$0 \stackrel{!}{=} y(0) = c_1 + c_2 \qquad 1 \stackrel{!}{=} y'(0) = 2c_1 + c_3 \qquad 0 \stackrel{!}{=} 4c_1 - c_2$$

Daraus folgt:

$$c_1 = 0 \qquad c_2 = 0 \qquad c_3 = 1$$

Also lautet die Lösung des AwPs:

$$y(x) = \sin(x)$$

Wir betrachten auch noch die **inhomogene Gleichung**

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = b(x) \tag{IH}$$

### Definition

$\mu \in \mathbb{C}$  heißt eine **nullfache Nullstelle** von  $p$ , genau dann wenn  $p(\mu) \neq 0$  ist.

**Regel** (ohne Beweis):

Seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, m, q \in \mathbb{N}_0$  und  $b$  von der Form:

$$\begin{aligned}b(x) &= (b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m)e^{\alpha x} \cos(\beta x) \quad , \text{ oder} \\b(x) &= (b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m)e^{\alpha x} \sin(\beta x)\end{aligned}$$

Ist  $\alpha + \beta i$  eine  $q$ -fache Nullstelle von  $p$ , so gibt es eine spezielle Lösung  $y_s$  von (IH) der Form:

$$y_s(x) = x^q e^{\alpha x} [(A_0 + A_1x + \dots + A_mx^m) \cos(\beta x) + (B_0 + B_1x + \dots + B_mx^m) \sin(\beta x)]$$

### Beispiel

Bestimme die allgemeine Lösung der Gleichung

$$y''' - y' = x + 1 \tag{*}$$

(1) Bestimme die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y''' - y' = 0 \tag{**}$$

Es gilt:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda^2 - 1) = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 1)$$

Also ist ein FS von (\*\*):  $1, e^x, e^{-x}$ . Damit lautet die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung:

$$y_h(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

- (2) Bestimme eine allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (\*).

Es ist  $m = 1, \alpha = \beta = 0, q = 1$ . Ansatz:

$$y_s(x) = x(A_0 + A_1x) = A_0x + A_1x^2$$

$$y'_s(x) = A_0 + 2A_1x$$

$$y''_s(x) = 2A_1$$

$$y'''_s(x) = 0$$

Mit Einsetzen in (\*) folgt:

$$0 - (A_1 + 2A_1x) = x + 1$$

Also ist:

$$A_0 = -1 \qquad A_1 = -\frac{1}{2}$$

D.h. eine spezielle Lösung von (IH) lautet:

$$y_s(x) = -x - \frac{1}{2}x^2$$

Damit lautet die allgemeine Lösung von (IH):

$$y(x) = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x} - x - \frac{1}{2}x^2 \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$