# § 8.

# Extremwerte

**Vereinbarung:** In diesem Paragraphen sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n, f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$

**Definition**

(1) $f$ hat in $x_0$ ein **lokales Maximum** $:\iff \exists \delta > 0 : \; f(x) \leq f(x_0) \; \forall x \in D \cap U_\delta(x_0)$.
$f$ hat in $x_0$ ein **lokales Minimum** $:\iff \exists \delta > 0 : \; f(x) \geq f(x_0) \; \forall x \in D \cap U_\delta(x_0)$.
**lokales Extremum** = lokales Maximum oder lokales Minimum

(2) Ist $D$ offen, $f$ in $x_0$ partiell differenzierbar und $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$, so heißt $x_0$ ein stationärer Punkt.

**Satz 8.1 (Nullstelle des Gradienten)**
Ist $D$ offen und hat $f$ in $x_0$ ein lokales Extremum und ist $f$ in $x_0$ partiell differenzierbar, dann ist $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$.

**Beweis**
$f$ habe in $x_0$ ein lokales Maximum. Also $\exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq D$ und $f(x) \leq f(x_0) \; \forall x \in U_\delta(x_0)$. Sei $j \in \{1, \ldots, n\}$. Dann: $x_0 + te_j \in U_\delta(x_0)$ für $t \in (-\delta, \delta)$. $g(t) := f(x_0 + te_j)$ $(t \in (-\delta, \delta))$. $g$ ist differenzierbar in $t = 0$ und $g'(0) = f_{x_j}(x_0)$. $g(t) = f(x_0 + te_j) \leq f(x_0) = g(0) \; \forall t \in (-\delta, \delta)$. Analysis 1, 21.5 $\implies g'(0) = 0 \implies f_{x_j}(x_0) = 0$ ∎

**Satz 8.2 (Definitheit und Extremwerte)**
Sei $D$ offen, $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ und $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$.

(i) Ist $H_f(x_0)$ positiv definit $\implies f$ hat in $x_0$ ein lokales Minimum.

(ii) Ist $H_f(x_0)$ negativ definit $\implies f$ hat in $x_0$ ein lokales Maximum.

(iii) Ist $H_f(x_0)$ indefinit $\implies f$ hat in $x_0$ kein lokales Extremum.

**Beweis**

(i), (ii) $A := H_f(x_0)$ sei positiv definit oder negativ definit oder indefinit. Sei $\varepsilon > 0$ wie in 7.2. $f \in C^2(D, \mathbb{R}) \implies \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq D$ und $(*)$ $|f_{x_j x_k}(x) - f_{x_j x_k}(x_0)| \leq \varepsilon \; \forall x \in U_\delta(x_0)$ $(j, k = 1, \ldots, n)$. Sei $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}, h := x - x_0 \implies x = x_0 + h, h \neq 0$ und $S[x_0, x_0 + h] \subseteq U_\delta(x_0)$ 6.7 $\implies \exists \eta \in [0,1] : \; f(x) = f(x_0 + h) = f(x_0) +$

$\underbrace{h \cdot \operatorname{grad} f(x_0)}_{=0} + \frac{1}{2}Q_B(h)$, wobei $B = H_f(x_0 + \eta h)$. Also: $(**)$ $f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}Q_B(h)$.

$A$ sei positiv definit (*negativ definit*) $\overset{7.2}{\Longrightarrow}$ $B$ ist positiv definit (*negativ definit*). $\overset{h\neq 0}{\Longrightarrow}$ $Q_B(h) \overset{(<)}{>} 0 \overset{(**)}{\Longrightarrow} f(x) \overset{(<)}{>} f(x_0) \Longrightarrow f$ hat in $x_0$ ein lokales Minimum (*Maximum*).

(iii) $A$ sei indefinit und es seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ wie in 7.2. Wegen 7.1 OBdA: $\|u\| = \|v\| = 1$. Dann: $x_0 + tu, x_0 + tv \in U_\delta(x_0)$ für $t \in (-\delta, \delta)$. Sei $t \in (-\delta, \delta), t \neq 0$. Mit $h := t \overset{(v)}{u}$ folgt aus 7.2 und $(**)$ : $f(x_0 + t \overset{(v)}{u}) = f(x_0) + \frac{1}{2}Q_B(t \overset{(v)}{u}) = f(x_0) + \frac{t^2}{2} \underbrace{Q_B(\overset{(v)}{u})}_{>0/<0\ (7.2)} \overset{(>)}{<} f(x_0) \Longrightarrow f$ hat in $x_0$ kein lokales Extremum. ■

**Beispiele:**

(1) $D = \mathbb{R}^2, f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy - 5$. $f_x = 2x - 2y, f_y = 2y - 2x$; $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0) \iff x = y$. Stationäre Punkte: $(x,x)$ $(x \in \mathbb{R})$.

$$f_{xx} = 2,\ f_{xy} = -2 = f_{yx},\ f_{yy} = 2 \Longrightarrow H_f(x,x) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det H_f(x,x) = 0 \Longrightarrow H_f(x,x)$ ist weder pd, noch nd, noch id.
Es ist $f(x,y) = (x-y)^2 - 5 \geq -5\ \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ und $f(x,x) = -5\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(2) $D = \mathbb{R}^2, f(x,y) = x^3 - 12xy + 8y^3$.
$f_x = 3x^2 - 12y = 3(x^2 - 4y),\ f_y = -12x + 24y^2 = 12(-x + 2y^2)$. $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0) \iff x^2 = 4y, x = 2y^2 \Longrightarrow 4y^4 = 4y \Longrightarrow y = 0$ oder $y = 1 \Longrightarrow (x,y) = (0,0)$ oder $(x,y) = (2,1)$

$$f_{xx} = 6x,\ f_{xy} = -12 = f_{yx},\ f_{yy} = 48y.\ H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det H_f(0,0) = -144 < 0 \Longrightarrow H_f(0,0)$ ist indefinit $\Longrightarrow f$ hat in $(0,0)$ kein lokales Extremum.

$$H_f(2,1) = \begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 48 \end{pmatrix}$$

$12 > 0, \det H_f(2,1) > 0 \Longrightarrow H_f(2,1)$ ist positiv definit $\Longrightarrow f$ hat in $(2,1)$ ein lokales Minimum.

(3) $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, y \leq -x + 3\}, f(x,y) = 3xy - x^2y - xy^2$. Bestimme $\max f(K), \min f(K)$. $f(x,y) = xy(3 - x - y)$. $K = \partial K \cup K^\circ$. $K$ ist beschränkt und abgeschlossen $\overset{3.3}{\Longrightarrow} \exists\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K : \max f(K) = f(x_1, y_1), \min f(K) = f(x_2, y_2)$. $f \geq 0$ auf $K$, $f = 0$ auf $\partial K$, also $\min f(K) = 0$. $f$ ist nicht konstant $\Longrightarrow f(x_2, y_2) > 0 \Longrightarrow (x_2, y_2) \in K^\circ \overset{8.1}{\Longrightarrow} \operatorname{grad} f(x_1, x_2) = 0$. Nachrechnen: $(x_2, y_2) = (1,1); f(1,1) = 1 = \max f(K)$.