Also muß gelten: $\phi(x) = x$

$$A_\phi \cdot \hat{x} = \hat{x} \Leftrightarrow (A_\phi - E_n)\hat{x} = 0$$

Löse LGS:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

also: $\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, also $x = U_1$.

Widerspruch zu $U \oplus [x] = V$.

0.15.2 Aufgabe 4

a) Es gilt: Bild$(\psi \circ \phi) \subset$ Bild ψ
$\psi \circ \phi$ surjektiv $\Leftrightarrow$ Bild $\psi \circ \phi = W \Rightarrow$ Bild $(\psi \circ \phi) =$ Bild $\psi \Rightarrow$ Beh.

b) Ann.: Bild $\phi \cap$ Kern $\psi \neq \{0\}$
$\Rightarrow \exists x \in U, x \neq 0_U$: $\phi(x) \in$ Kern ψ, $\phi(x) \neq O_V$.
$\Rightarrow \exists x \in U, x \neq 0$: $\psi(\phi(x)) = 0_W$
$\Rightarrow$ Kern$(\psi \circ \phi) \neq \{0_W\}$
$\psi \circ \phi$ nicht injektiv.\`

Also gilt: Bild $\phi \oplus$ Kern ψ ist direkt.

z.Z.: Bild $\phi \oplus$ Kern $\psi = V$
Sei $v \in V$. Dann ex. $u \in U$ mit $(\psi \circ \phi)(u) = \psi(v)$.

Sei $v_1 := v - \phi(u)$ und $v_2 := \phi(u)$.
Dann gilt:

(i) $\psi(v_1) = \psi(v - \phi(u)) = \psi(v) - (\psi \circ \phi)(u) = 0 \Rightarrow v_1 \in$ Kern ϕ

(ii) $v_2 = \phi(u) \in$ Bild ϕ

(iii) $v = v_1 + v_2$

$\Rightarrow v \in$ Bild $\phi \oplus$ Kern ψ.

0.16 Übung 16, 18.04.2005

0.16.1 Aufgabe 1

a) $det(A - XE_4) = \begin{vmatrix} 2-x & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3-x & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -x & 1 \\ -3 & -2 & -1 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-x & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3-x & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -x & 1 \\ -1-x & 0 & 0 & -1-x \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 3-x & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3-x & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1-x \end{vmatrix} = (-1-x) \cdot \begin{vmatrix} 3-x & 2 & 1 \\ 2 & 3-x & 1 \\ 2 & 4 & -x \end{vmatrix}$$

$$= (-1-x) \cdot \begin{vmatrix} 3-x & 2 & 1 \\ -1+x & 1-x & 0 \\ 2 & 4 & -x \end{vmatrix} = (-1-x) \cdot \begin{vmatrix} 5-x & 2 & 1 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 4 & -x \end{vmatrix}$$

$$= (-1-x)(1-x) \cdot \begin{vmatrix} 5-x & 1 \\ 6 & -x \end{vmatrix} = (-1-x)(1-x) \cdot \begin{vmatrix} 6-x & 1 \\ 6-x & -x \end{vmatrix}$$

$$= (-1-x)(1-x) \cdot \begin{vmatrix} 0-x & 1 \\ 0 & 1-x \end{vmatrix} = (-1-x)^2(1-x)(6-x)$$

Eigenraum zum EW -1: $0 \neq x \in \mathbb{R}^4$ ist EV zum EW $-1 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} & Ax = -x \\ \Leftrightarrow \quad & Ax + x = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (A + E_4)x = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 \neq x \in \operatorname{Kern}(A) + E_4 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ d.h. } E_{-1} = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]$$

ebenso: $E_1 = [\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}]$, $E_6 = [\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]$.

b) Offensichtlich $B = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]$ ist Basis von $\mathbb{R}^4$.

Definieren wir eine lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ durch $\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, x \mapsto Ax$ so ist die Abbildung von Φ bzgl. der Std.-Basis.

Bzgl. B hat Φ die Abb. $A_\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ dann gilt: $A_\Phi = S^{-1}AS$

Nebenrechnung:

$$\boxed{\Phi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \Phi \widehat{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}} = A_\Phi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ dann gilt: } A_\Phi = S^{-1}AS$$

c) c ist EW von A mit EV $x \neq 0 \Leftrightarrow Ax = cx \Leftrightarrow (A - cE)x = 0$

0.16.2 Aufgabe 2

Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $AB - E_n$ regulär.
Ann.: $BA - E_n$ nicht regulär.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow && \exists x \in \mathbb{K}^n, x \neq 0 : (BA - E_n)x = 0 \\ &\Leftrightarrow && \exists 0 \neq x \in \mathbb{K}^n : BAx = x \\ &\Leftrightarrow && \exists 0 \neq x \in \mathbb{K}^n : (AB)Ax = Ax \end{aligned}$$

$Ax \neq 0$, sonst: $x = B(AX) = B \times 0 = 0$`

Damit gilt $(AB - E_n)(Ax) = 0$. Also ist $AB - E_n$ nicht regulär. Insgesamt $BA - E_n$ ist regulär.

0.16.3 Übungsaufgabe 2

Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element e. Weiter sei $M = x \in G | x \circ x = e$.

a) Zeigen Sie: ist G kommutativ so ist M eine Untergruppe von G.

G: Gruppe: G Menge und $\circ : G \times G \to G$ mit folgendenen Eigeschaften:

(i) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c, a, b \in G$

(ii) $\exists e \in G : \forall a \in G : a \circ e = a = e \circ a$

(iii) $\forall a \in G \exists a^{-1} \in G : a \circ a^{-1} = e = a^{-1} \circ a$

G heisst abelsch falls zusätzlich gilt:

(i) (iv) $\forall a, b \in G a \circ b = b \circ a$

Sei $M \subset G$: M heisst Untergruppe von G, falls:

$$(M, \circ) \text{eine Gruppe ist}$$

Untergruppenkriterium:

$$\begin{aligned} M \subset G \text{ ist Untergruppe} \quad &\Leftrightarrow && \text{(i)} && M \neq \emptyset \\ & && \text{(ii)} && x, y \in M : x^{-1} \circ y \in M \\ &\Leftrightarrow && \text{(i)} && M \neq \emptyset \\ & && \text{(ii)} && x, y \in M : x \circ y \in M \\ & && \text{(iii)} && x \in M : x^{-1} \in M \end{aligned}$$

Beweis: Zu zeigen: