

# 16. Lineare Systeme

**Vereinbarung:**  $I \subseteq \mathbb{R}$  sei ein Intervall,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $x_0 \in I$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^m$ .  $D := I \times \mathbb{R}^m$ ,  $a_{jk}, b_j : I \rightarrow \mathbb{R}$  seien auf  $I$  stetig.

Das Dgl.-System

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + \dots + a_{1m}(x)y_m + b_1(x) \\ &\vdots \\ y_m' &= a_{m1}(x)y_1 + \dots + a_{mm}(x)y_m + b_m(x) \end{aligned}$$

heißt ein **lineares System**. Mit  $A(x) := (a_{jk}(x))$ ,  $b(x) := (b_1(x), \dots, b_m(x))$  und  $y := (y_1, \dots, y_m)$  schreibt sich obiges System in der Form

$$(S) \quad y' = A(x)y + b(x)$$

Ist  $b \equiv 0$ , so heißt  $(S)$  **homogen**, anderenfalls **inhomogen**. (Der Fall  $m = 1$ : §7). Wir betrachten noch das AWP

$$(A) \quad \begin{cases} y' = A(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

und die zu  $(S)$  gehörende homogene Gleichung

$$(H) \quad y' = A(x)y$$

## Satz 16.1 (Lösungen linearer Systeme)

- (1)  $(A)$  hat auf  $I$  genau eine Lösung.
- (2)  $(S)$  hat eine Lösung auf  $I$ .
- (3) Ist  $J \subseteq I$  ein Intervall und  $\hat{y} : J \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Lösung von  $(S)$  auf  $J$ , dann existiert eine Lösung  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  von  $(S)$  auf  $I$  mit:  $\hat{y} = y|_J$
- (4) Sei  $y_s$  eine spezielle Lösung von  $(S)$  auf  $I$  und ist  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Funktion, so gilt:  $y$  ist eine Lösung von  $(S)$  auf  $I \iff \exists y_h : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit:  $y_h$  löst  $(H)$  auf  $I$  und  $y = y_h + y_s$ .

## Bemerkung 16.2

Wegen 16.1(3) können wir immer annehmen, daß Lösungen von  $(S)$  auf ganz  $I$  definiert sind.

## Beweis (von 16.1)

- (2) folgt aus (1)

(4) wie in §7

- (1) Fall 1:  $I = [a, b]$ .  $f(x, y) := A(x)y + b(x)$ ,  $\gamma := \max\{\|A(x)\| : x \in I\}$ .  
 Für  $(x, y), (x, \tilde{y}) \in D$ :  $\|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\| = \|A(x)(y - \tilde{y})\| \leq \|A(x)\| \|y - \tilde{y}\| \leq \gamma \|y - \tilde{y}\|$ .  
 15.2  $\implies$  Beh.

Fall 2:  $I$  beliebig.

$$\mathcal{M} := \{K : K \text{ ist ein kompaktes Intervall, } K \subseteq I, x_0 \in K\}$$

$$\implies I = \bigcup_{K \in \mathcal{M}} K.$$

Fall 1  $\implies \forall K \in \mathcal{M}$  existiert genau eine Lösung  $y_K : K \rightarrow \mathbb{R}^m$  von (A) auf  $K$ . Def:  
 $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  durch  $y(x) := y_K(x)$ , falls  $x \in K \in \mathcal{M}$ .

$y$  ist wohldefiniert. Sei  $x \in K_1 \cap K_2$  ( $K_1, K_2 \in \mathcal{M}$ ). z.z:  $y_{K_1}(x) = y_{K_2}(x)$ .

O.B.d.A:  $x \neq x_0$ , etwa  $x > x_0$ ,  $K_3 := [x_0, x] \subseteq K_1 \cap K_2$ .  $K_3 \in \mathcal{M}$ .

Fall 1  $\implies$  (A) hat auf  $K_3$  genau eine Lösung.  $y_{K_1}$  und  $y_{K_2}$  sind Lösungen von (A) auf  $K_3 \implies y_{K_1} = y_{K_2}$  auf  $K_3 \implies y_{K_1}(x) = y_{K_2}(x)$ . Klar:  $y$  löst (A) auf  $I$ . Sei  $\tilde{y}$  eine weitere Lösung von (A) auf  $I \xrightarrow{\text{Fall 1}} y = \tilde{y}$  auf  $K \forall K \in \mathcal{M} \implies y = \hat{y}$  auf  $I$ .

- (3) Sei  $\xi \in J$ ,  $\eta := \hat{y}(\xi)$ . (1)  $\implies$  das AWP

$$(+)\quad \begin{cases} y' = A(x)y + b(x) \\ y(\xi) = \eta \end{cases}$$

hat auf  $I$  genau eine Lösung  $y$ . Sei  $x \in J$ . Z.z:  $\hat{y}(x) = y(x)$ . O.B.d.A:  $x \neq \xi$ , etwa  $x > \xi$ . (+) hat auf  $[\xi, x]$  genau eine Lösung (wegen (1)),  $\hat{y}, y$  sind Lösungen von (+) auf  $[\xi, x] \implies y(x) = \hat{y}(x)$  ■

Wir betrachten jetzt die homogene Gleichung (H)  $y' = A(x)y$ .

$$\mathbb{L} := \{y : I \rightarrow \mathbb{R}^m : y \text{ löst (H) auf } I\}$$

### Satz 16.3 (Vektorraum der Lösungen)

(1)  $\mathbb{L}$  ist ein reeller Vektorraum.

(2) Seien  $y^{(1)}, \dots, y^{(k)} \in \mathbb{L}$ . Dann sind äquivalent:

(i)  $y^{(1)}, \dots, y^{(k)}$  sind linear unabhängig in  $\mathbb{L}$ .

(ii)  $\forall x \in I: y^{(1)}(x), \dots, y^{(k)}(x)$  sind linear unabhängig im  $\mathbb{R}^m$ .

(iii)  $\exists \xi \in I: y^{(1)}(\xi), \dots, y^{(k)}(\xi)$  sind linear unabhängig im  $\mathbb{R}^m$ .

(3)  $\dim \mathbb{L} = m$ .

## Beweis

(1) Nachrechnen!

(2) (i)  $\implies$  (ii): Sei  $x_1 \in I$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$  und  $0 = \alpha_1 y^{(1)}(x_1) + \dots + \alpha_k y^{(k)}(x_1)$ .  $y := \alpha_1 y^{(1)} + \dots + \alpha_k y^{(k)} \implies y \in \mathbb{L}$  und  $y$  löst das AWP

$$\begin{cases} y' = A(x)y \\ y(x_1) = 0 \end{cases}$$

Die Funktion 0 löst dieses AWP ebenfalls  $\xrightarrow{16.1} y \equiv 0 \xrightarrow{\text{Vor.}} \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ .

(ii)  $\implies$  (iii): Klar

(iii)  $\implies$  (i): Seien  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$  und  $0 = \alpha_1 y^{(1)} + \dots + \alpha_k y^{(k)} \implies 0 = \alpha_1 y^{(1)}(\xi) + \dots + \alpha_k y^{(k)}(\xi) \xrightarrow{\text{Vor.}} \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ .

(3) Aus (2):  $\dim \mathbb{L} \leq m$ . Für  $j = 1, \dots, m$  sei  $y^{(j)}$  die Lösung des AWP

$$\begin{cases} y' = A(x)y \\ y(x_0) = e_j \end{cases}$$

(2)  $\implies y^{(1)}, \dots, y^{(m)}$  sind linear unabhängig in  $\mathbb{L} \implies \dim \mathbb{L} \geq m$ . ■

Ist also  $y^{(1)}, \dots, y^{(m)}$  eine Basis von  $\mathbb{L}$ , so lautet die allgemeine Lösung von (H):  $y = c_1 y^{(1)} + \dots + c_m y^{(m)}$  ( $c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ ).

**Ein Spezialfall:** Es sei  $m = 2$  und  $A(x)$  habe die Gestalt

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_1(x) & -a_2(x) \\ a_2(x) & a_1(x) \end{pmatrix}$$

$a_1, a_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Sei  $y = (y_1, y_2)$  eine Lösung von

$$(\mathbb{R}) \quad y' = A(x)y$$

$z := y_1 + iy_2$ ,  $a := a_1 + ia_2$ ;  $\int a(x)dx := \int a_1(x)dx + i \int a_2(x)dx$ . Nachrechnen:  $z$  ist eine Lösung der komplexen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$(\mathbb{C}) \quad z' = a(x)z$$

Ist umgekehrt  $z$  eine Lösung von (C), so setze  $y_1 := \operatorname{Re} z$ ,  $y_2 := \operatorname{Im} z$ ,  $y := (y_1, y_2)$ . Nachrechnen:  $y$  löst (R). Wie in §7: die allgemeine Lösung von (C) lautet:

$$z(x) = ce^{\int a(x)dx} \quad (c \in \mathbb{C})$$

$z_0 := e^{\int a(x)dx}$ ;  $y_1 := \operatorname{Re} z_0$ ,  $y_2 := \operatorname{Im} z_0$ ,  $y^{(1)} := (y_1, y_2)$ .  $y^{(1)}$  ist eine Lösung von (R).

$z_1(x) = ie^{\int a(x)dx} = iz_0(x) = i(y_1 + iy_2) = -y_2 + iy_1 \implies y^{(2)} := (-y_2, y_1)$  ist eine Lösung von (R).

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} y_1(x) & -y_2(x) \\ y_2(x) & y_1(x) \end{pmatrix} &= y_1(x)^2 + y_2(x)^2 \\ &= |z_0(x)|^2 = |e^{\int a(x)dx}|^2 \\ &= \left( e^{\int a_1(x)dx} \right)^2 \neq 0 \quad \forall x \in I \end{aligned}$$

16.3  $y^{(1)}, y^{(2)}$  sind in  $\mathbb{L}$  linear unabhängig ( $\dim \mathbb{L} = 2$ ).

**Beispiele:**

- (1) Beh.:  $\exists$  genau ein Paar von Funktionen  $(y_1, y_2)$  mit:  $y_1, y_2 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $y_1' = y_2$ ,  $y_2' = -y_1$ ,  $y_1(0) = 0$ ,  $y_2(0) = 1$  nämlich  $y_1(x) = \sin x$ ,  $y_2(x) = \cos x$

**Beweis:**  $I = \mathbb{R}$ ;  $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , mit  $y = (y_1, y_2)$ :

$$y' = Ay \iff y_1' = y_2, y_2' = -y_1$$

$$\text{AWP: } \begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = (0, 1) \end{cases}$$

16.1  $\implies$  Beh.

$$a_1(x) \equiv 0, a_2(x) \equiv -1, a(x) = -i, z_0(x) = e^{-ix} = (\cos x, -\sin x),$$

$y^{(1)}(x) = (\cos x, -\sin x)$ ,  $y^{(2)}(x) = (\sin x, \cos x)$ . Die allgemeine Lösung von  $y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y$ :

$$y(x) = c_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

$$(2) I = (0, \infty), A(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -2x \\ 2x & \frac{1}{x} \end{pmatrix}. a_1(x) = \frac{1}{x}, a_2(x) = 2x$$

$$\implies a(x) = \frac{1}{x} + i2x \implies \int a(x)dx = \log x + ix^2 \implies z_0(x) = e^{\log x + ix^2} = e^{\log x} e^{ix^2} = x(\cos x^2 + i \sin x^2). \implies$$

$$\begin{aligned} y^{(1)}(x) &= (x \cos x^2, x \sin x^2) \\ y^{(2)}(x) &= (-x \sin x^2, x \cos x^2) \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung von  $y' = A(x)y$ :

$$y(x) = c_1 \begin{pmatrix} x \cos x^2 \\ x \sin x^2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -x \sin x^2 \\ +x \cos x^2 \end{pmatrix}$$

**Definition**

- (1) Seien  $y^{(1)}, \dots, y^{(m)} \in \mathbb{L}$ . Dann heißt  $y^{(1)}, \dots, y^{(m)}$  ein **Lösungssystem**
- (2)  $Y(x) := (y^{(1)}(x), \dots, y^{(m)}(x)) \in \mathbb{M}_m$  heißt dann eine **Lösungsmatrix** (LM) von (H)
- (3)  $W(x) := \det Y(x)$  ( $x \in I$ ) heißt **Wronskideterminante**.
- (4) Sind  $y^{(1)}, \dots, y^{(m)}$  linear unabhängig in  $\mathbb{L}$ , so heißt  $y^{(1)}, \dots, y^{(m)}$  ein **Fundamentalsystem** (FS) von (H) und  $Y$  heißt eine **Fundamentalmatrix** (FM) von (H).

**Satz 16.4 (Lösungssysteme und -matrizen)**

Seien  $y^{(1)}, \dots, y^{(m)}, Y$  und  $W$  wie oben.

- (1)  $Y'(x) = A(x)Y(x) \forall x \in I$ .

- (2)  $\{Yc : c \in \mathbb{R}^m\} \subseteq \mathbb{L}$
- (3)  $y^{(1)}, \dots, y^{(m)}$  ist eine FS von (H)  $\iff Y(x)$  ist invertierbar  $\forall x \in I \iff W(x) \neq 0 \forall x \in I \iff W(\xi) \neq 0$  für ein  $\xi \in I$ .
- (4) Sei  $Y$  eine FM von (H) und  $Z : I \rightarrow \mathbb{M}_m$  eine Funktion.  $Z$  eine FM von (H)  $\iff \exists C \in \mathbb{M}_m : C$  ist invertierbar,  $C = \overline{C}$  und  $Z(x) = Y(x)C \forall x \in I$ .
- (5) Für  $\xi \in I : W(x) = W(\xi)e^{\int_{\xi}^x \text{Spur } A(t)dt} \forall x \in I$ .

### Beweis

(1) klar.

(2) Sei  $c = (c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{R}^m : Yc = c_1 y^{(1)} + \dots + c_m y^{(m)}$

(3) folgt aus 16.3

(4) „ $\implies$ “: Sei  $Z(x) = (z^{(1)}(x), \dots, z^{(m)}(x))$  (2)  $\Rightarrow \forall j \in \{1, \dots, m\} \exists c^{(j)} \in \mathbb{R}^m : z^{(j)} = Yc^{(j)}C := (c^{(1)}, \dots, c^{(m)}) \in \mathbb{M}_m \Rightarrow C = \overline{C}$  und  $Z = YC, 0 \neq \det Z(x) = \det Y(x) \det C \Rightarrow \det C \neq 0$ .  
 „ $\impliedby$ “:  $Z'(x) = Y'(x)C \stackrel{1}{=} A(x)Y(x)C = A(x)Z(x) \Rightarrow Z$  ist eine LM von (H).  $\det Z(x) = \det Y(x) \det C \neq 0 \Rightarrow Z$  ist eine FM von (H).

(5) Wegen (3): O.B.d.A.:  $W(x) \neq 0 \forall x \in I \stackrel{(3)}{\Rightarrow} Y$  ist eine FM von (H). Sei  $x_0 \in I, z^{(j)}$  die Lösung des AWP

$$\begin{cases} y' = A(x)y \\ y(x_0) = e_j \quad (j = 1, \dots, m) \end{cases}$$

16.3  $\Rightarrow Z(x) = (z^{(1)}(x), \dots, z^{(m)}(x))$  ist eine FM von (H) (4)  $\Rightarrow \exists C \in M : C = \overline{C}, C$  ist invertierbar und  $Y(x) = Z(x)C \Rightarrow Y(x_0) = \underbrace{Z(x_0)}_E C = C \Rightarrow Y(x) = Z(x)Y(x_0) \Rightarrow$

$$W(x) = \underbrace{\det Z(x)}_{=: \varphi(x)} W(x_0) \Rightarrow W'(x) = \varphi'(x)W(x_0) \forall x \in E (*)$$

$$\varphi(x) \stackrel{14}{=} \sum_{k=1}^m \det(z^{(1)}(x), \dots, z^{(k-1)}(x), (z^{(k)}(x))', z^{(k+1)}(x), \dots, z^{(m)}(x)) (z^{(k)}(x))' = A(x)z^{(k)}(x) = (z^{(k)}(x))'|_{x=x_0} = A(x_0)z^{(k)}(x_0) = A(x_0)e_k = k\text{-te Spalte von } A(x_0).$$

$$\varphi'(x_0) = \sum_{k=1}^m \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1k}(x_0) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & a_{kk}(x_0) & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{mk}(x_0) & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{a_{kk}(x_0)} = \text{Spur } A(x_0)$$

$(*) \xRightarrow{x=x_0} W'(x_0) = (\text{Spur } A(x_0)W(x_0)) \xRightarrow{x_0 \text{ bel.}} W' = (\text{Spur } A(x))W \text{ auf } I.$  Sei  $\xi \in I$ . Dann ist  $\int_{\xi}^x \text{Spur } A(t)dt$  eine Stammfunktion von  $\text{Spur } A \xRightarrow{7} \exists c \in \mathbb{R} : W(x) = ce^{\int_{\xi}^x \text{Spur } A(t)dt} \xRightarrow{x=\xi} c = W(\xi) \Rightarrow \text{Beh.}$  ■

Wir betrachten jetzt die inhomogene GL (IH)  $y' = A(x)y + b(x)$

Motivation: Sei  $m = 1$ . I.d.Fall ist  $y(x) = e^{\int A(x)dx}$  ein FS von (H). Für eine spezielle Lösung von (IH) machten wir den Ansatz:  $y_s(x) = y(x)c(x)$  und erhielten  $c(x) = \int \underbrace{e^{-\int A(x)dx}}_{\frac{1}{y(x)}} b(x)dx$

also  $y_s(x) = y(x) \int \frac{1}{y(x)} b(x)dx$ .

### Satz 16.5 (Spezielle Lösung per Cramerscher Regel)

Sei  $Y = (y^{(1)}, \dots, y^{(m)})$  eine FM von (H) und  $y_s(x) := Y(x) \int (Y(x))^{-1} b(x)dx$  ( $x \in I$ ). Dann ist  $y_s$  eine spezielle Lösung des (IH). Für  $k = 1, \dots, m$  sei  $W_k(x) := \det(y^{(1)}(x), \dots, y^{(k-1)}(x), b(x), y^{(k+1)}(x), \dots, y^{(m)}(x))$ . Dann:

$$y_s(x) = \sum_{k=1}^m \left( \int \frac{W_k(x)}{W(x)} dx \right) \cdot y^{(k)}(x)$$

### Beweis

$$y_s'(x) = Y'(x) \cdot \int (Y(x))^{-1} b(x)dx + y(x)Y(x)^{-1}b(x) = A(x)Y(x) \underbrace{\int (Y(x))^{-1} b(x)dx}_{y_s(x)} + b(x) =$$

$$A(x)y_s(x) + b(x)$$

Für  $x \in I$  betrachte das LGS  $Y(x)v = b(x)$ , dann  $v = (v_1, \dots, v_m) = Y(x)^{-1}b(x)$ . Cramersche Regel  $\Rightarrow v_j = \frac{W_j(x)}{W(x)} \Rightarrow Y(x)^{-1}b(x) = \left( \frac{W_1(x)}{W(x)}, \dots, \frac{W_m(x)}{W(x)} \right) \Rightarrow \text{Beh.}$  ■

### Beispiel

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ; Bestimme die allgemeine Lösung von  $y' = Ay + \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$  ( $m = 2$ )

Bekannt: FS von  $y' = Ay : y^{(1)}(x) = (\sin x, \cos x), y^{(2)}(x) = (\cos x, -\sin x). W(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1 = W_1(x), W_2(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \sin x \\ \cos x & \cos x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y_s(x) = x \cdot \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung:  $y(x) = c_1 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, c_1, c_2 \in$

$\mathbb{R}, Y(x) = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix}$  FM von  $y' = Ay$ . Dann  $Y(x)^T Y(x) = E$ . Sei  $y = (y_1, y_2)$  eine Lösung von  $y' = Ay \Rightarrow y_1 = c_1 \sin x + c_2 \cos x, y_2 = c_1 \cos x - c_2 \sin x$ . Nachrechnen:  $y_1^2 + y_2^2 = c_1^2 + c_2^2$

### Satz 16.6 (Schiefsymmetrische Systeme)

Sei  $A(x)^T = -A(x) \forall x \in I, Y$  sei eine FM von (H)  $y' = A(x)y$ .

(1)  $Y(x)^T Y(x)$  ist auf  $I$  konstant.

(2) Ist  $y = (y_1, \dots, y_m)$  eine Lösung von (H)  $\Rightarrow y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_m^2$  ist konstant auf  $I$ .

**Beweis**

$$(1) \quad (Y^T Y)' = (Y^T)' Y + Y^T Y' = (Y')^T Y + Y^T Y' = (AY)^T Y + Y^T AY = Y^T \underbrace{A^T}_{-A} Y + Y^T AY =$$

0 auf  $I \Rightarrow$  Beh.

- (2) O.B.d.A:  $y \neq 0, y^{(1)} := y$ . Dann ist  $y^{(1)}$  l.u. in  $\mathbb{L}$ . Dann existieren  $y^{(2)}, \dots, y^{(m)} \in \mathbb{L}$  mit:  $y^{(1)}, \dots, y^{(m)}$  ist ein FS von (H).  $Y := (y^{(1)}, \dots, y^{(m)})$ ,  $Z(x) := Y(x)^T Y(x) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} Z$  ist auf  $I$  konstant. Sei  $Z(x) = (z_{jk})$ . Dann  $y_1^2 + \dots + y_m^2 = z_{11}$  ■

