1. Topologie Übung

Ferdinand Szekeresch

24. Oktober 2007

Faserprodukt von Mengen

Definition

Seien A, B, S Mengen, $f_A : A \to S, f_B : B \to S$ Weiter sei F eine Menge mit Abb $\pi_A : F \to B$ mit $f_A \circ \pi_A = f_B \circ \pi_B$

F heißt Faserprodukt, von A und B über S (Symbol: $F = A \times_s B$), wenn für jede Menge M und jedes Paar von Abbildungen g_a, g_b von M nach A bzw. B genau eine Abbildung $h : M \to F$, so dass $g_a = \pi_A \circ h, g_b = \pi_B \circ h$.

Behauptung

Zwischen zwei Faserprodukten von A und B über S gibt es genau eine "sinnvolle" Bijektion.

Beweis

Seien F, F' Faserprodukte. Nach Definition des Faserprodukts:

$\exists! h : F' \to F \pi'_A = \pi_A \circ h, \pi'_B = \pi_B \circ h$

$\exists! h' : F \to F' \pi_A = \pi'_A \circ h, \pi_B = \pi'_B \circ h$

$\Rightarrow h \circ h'$ ist Abbildung von F nach F mit $\pi_A = \pi_A \circ (h \circ h'), \pi_B = \pi_B \circ (h \circ h')$

id_F ist aber auch eine Abbildung mit dieser Eigenschaft.

$\overset{Def.Faserprodukt}{\Rightarrow} h \circ h' = id_F$. Genauso: $h' \circ h = id_F$.

Bemerkung

Zu A, B, S, f_A, f_B wie oben existiert immer ein Faserprodukt.

Denn

Definiere $F := \{(a, b) \in A \times B | f_A(a) = f_B(b)\}$.

Zu M wie oben definiere $h : M \to F$, $m \mapsto \big(g_A(m), g_B(m)\big)$.

Bemerkung

Es gilt: $F = \bigcup\limits_{s \in S} \left(f_A^{-1}(s) \times f_B^{-1}(s)\right)$

Beispiel eines metrischen Raums: Die Hasudorff - Metrik

$M = \mathbb{R}^2, d$ sei der euklidische Abstand.

Ziel

Messe den Abstand zwischen Teilmengen von M.

Definition

Sei $x \in M, S \subseteq M$. Definiere $d(x, S) := \inf\{d(x, y) | y \in S\}$.

Seien $S, S' \subseteq M$. Definiere $d(S', S) := \sup\{d(x, S) | x \in S'\}$.

Das definiert keine Metrik auf $\mathscr{P}(m)$, denn im Allgemeinen ist $d(S, S') \neq d(S', S)$!

Definiere $H(M) := \{S \subseteq M | S \text{ beschränkt und abgeschlossen}\}$.

Definiere nun $h : H(M) \times H(M) \to \mathbb{R}_{\geq 0}, h(S, S') := \max\{d(S, S'), d(S', S)\}$.
Satz
h ist eine Metrik auf $H(M)$.
Beweis
Sei $S \in H(M).h(S, S) = 0$ (da $d(S; S) = 0$). Seien nun $S, S' \in H(M)$ mit $h(S, S') = 0 \Rightarrow d(S, S') = 0, d(S', S) = 0$.
$\Rightarrow S \subseteq S'$ und $S' \subseteq S$. Denn: $d(x, S) = 0 \Rightarrow x \in S$ oder x ist Häufungspunkt von S.
$\left(x \notin S \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in S : d(x, x_n) < \frac{1}{n}\right)$
$\Rightarrow S = S'$.
Symmetrie: klar. Dreiecksungleichung gilt auch, denn:

1. $\forall S \in H(M), x, y \in M : d(x, S) \leq d(x, y) + d(y; S) + \epsilon$
   $\Rightarrow d(x, S) \leq d(x, y') \leq d(x, y) + d(y, S) + \epsilon$.
2. $\forall S, S' \in H(M), x \in M : d(x, S) \leq d(x, S') + d(S', S)$.
   Denn: Sei $y' \in S'$ mit $d(x, y') \leq d(x, S') + \epsilon + d(S', S)$.

$\Rightarrow \forall x \in S_1 : d(x, S_3) \leq d(x, S_2) + d(S_2, S_3) \Rightarrow$ Beh.
Über wenig weitere Umformungen erhält man das Gewünschte, leider geht mir jetzt der Akku aus.