

## Kapitel 3

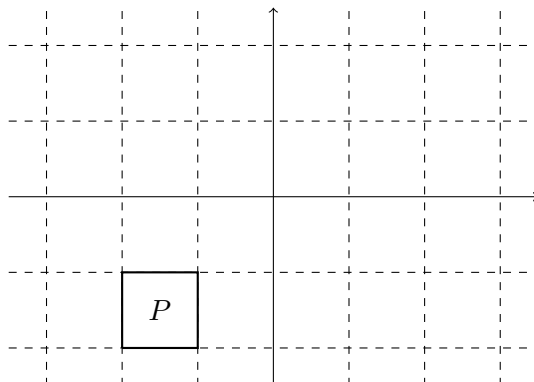
# Hyperbolische Parkettierungen und Fuchssche Gruppen

### 3.1 Parkettierungen und Gruppen

Die allgemeine Situation ist die folgende: Gegeben sei ein metrischer Raum  $(X, d)$  sowie eine abgeschlossene Teilmenge  $P \subseteq X$ . Eine *Parkettierung* bzw. *Pflasterung von  $X$  mit Fundamentalbereich  $P$*  ist eine Überdeckung  $X = \bigcup_{i \in I} P_i$  mit einer abzählbaren Indexmenge  $I$ , sodass gilt:

- (i) Für jedes  $i \in I$  ist  $P_i = T_i(P)$  für eine Isometrie  $T_i \in \text{Isom}(X)$ . Insbesondere sind alle  $P_i$  kongruent zu  $P$ .
- (ii) Für je zwei  $i \neq j$  in  $I$  gilt  $\overset{\circ}{P}_i \cap \overset{\circ}{P}_j = \emptyset$ .

**Beispiel 3.1.1** (i)  $\mathbb{R}^2$  lässt sich beispielsweise durch gleichseitige, kongruente Dreiecke oder Quadrate parkettieren. Auch Variationen sind möglich, haben aber eine geringere Symmetrie zur Folge. Die Symmetriegruppe der Parkettierung

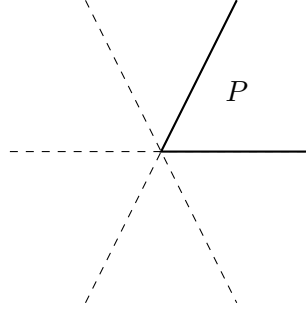


von  $\mathbb{R}^2$  besitzt beispielsweise  $\mathbb{Z}^2$  als Untergruppe, denn sie ist invariant unter Translationen

in  $x$ - und  $y$ -Richtung. Allgemeiner gilt für eine Parkettierung  $\mathcal{P}$

$$G := \langle \{T_i\}_{i \in I} \rangle \subseteq \text{Isom}(X) \cap \text{Sym}(\mathcal{P}).$$

- (ii) Die Sphäre  $X = \mathbb{S}^2$  lässt sich durch die vier Viertelsphären parkettieren.
- (iii) Betrachte Die Parkettierung



Dann ist die Symmetriegruppe gegeben durch die zyklische Gruppe  $G$  der Ordnung 6, erzeugt von den Rotationen  $T_k$  um den Winkel  $\frac{2\pi k}{6}$ .

Operiert nun umgekehrt eine Gruppe  $G$  auf  $X$ , so erhalten wir eine dazugehörige Parkettierung auf  $X$  (Modell für den Bahnenraum). Dies wollen wir im Folgenden explizit beschreiben. Sei  $(X, d)$  ein zusammenhängender, metrischer Raum und  $G \subseteq \text{Isom}(X)$  eine Gruppe von Isometrien von  $X$ . Dann operiert  $G$  diskret auf  $X$ , falls jede Bahn  $G \cdot x := \{g \cdot x \mid g \in G\} \subseteq X$  diskret ist, das heißt für jedes  $x \in X$  ein  $\epsilon_x > 0$  existiert, sodass

$$B_{\epsilon_x}(x) \cap B_{\epsilon_x}(g \cdot x) = B_{\epsilon_x}(x) \cap g \cdot B_{\epsilon_x}(x) = \emptyset$$

für alle  $g \in G \setminus \{e_G\}$ .

**Beispiel 3.1.2** (i)  $\mathbb{Z}$  operiert diskret auf  $\mathbb{R}$  durch Translationen:

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (k, t) \mapsto k \cdot t = k + t.$$

- (ii) Analog operiert  $\mathbb{Z}^2$  diskret auf  $\mathbb{R}^2$  durch

$$\cdot : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad ((k, l), (x, y)) \mapsto (k, l) \cdot (x, y) = (x + k, y + l)$$

- (iii) Betrachte nun die hyperbolische Isometrie

$$T : \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2, \quad z \mapsto 2z.$$

Dann ist  $\langle T \rangle = \{\dots, T^{-2}, T^{-1}, \text{id}, T, T^2, \dots\} \cong \mathbb{Z}$  und erhalten dadurch eine diskrete Operation auf  $\mathbb{H}^2$  (Achtung: Funktioniert im Euklidischen nicht, da  $z \mapsto 2z$  keine euklidische

Isometrie ist).

(iv) Die Gruppe  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \subseteq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  operiert diskret auf  $\mathbb{H}^2$  (siehe später).

**Satz 3.1.3 (Dirichlet-Parkettierung)** *Sei  $G$  eine abzählbare Gruppe, welche diskret auf einem metrischen Raum  $(X, d)$  operiere und  $p \in X$  ein Punkt in  $X$ , der durch kein Element aus  $G \setminus \{e_G\}$  fixiert werde. Dann ist der Dirichlet-Bereich von  $G$  zentriert in  $p$*

$$\begin{aligned} D_p(G) &:= \{x \in X \mid d(x, p) \leq d(x, g \cdot p) \text{ für alle } g \in G\} \\ &= \{x \in X \mid d(x, p) \leq d(g \cdot x, p) \text{ für alle } g \in G\} \end{aligned}$$

ein Fundamentalbereich  $P$  für eine Parkettierung  $\mathcal{P}$  von  $X$ . Dabei gilt die Mengengleichheit wegen der Invarianz von  $d$  unter Isometrien.

*Bemerkung:* Jede Bahn von  $G$  trifft jeden Punkt von  $\overset{\circ}{D}_p(G)$  genau einmal.

*Beweis.* Sei  $D := D_p(G)$  und  $y \in X$  beliebig. Wir müssen zeigen, dass  $y$  in einer Bahn  $g \cdot D$  für ein  $g \in G$  enthalten ist. Betrachte nun die Bahn  $G \cdot y$  von  $y$ . Nach Voraussetzung ist  $G \cdot y$  diskret, es existiert also  $y_0 \in G \cdot y$  mit  $d(y_0, p) = \min_{g \in G} d(g \cdot y, p)$ . Dann ist aber  $d(y_0, p) \leq d(g \cdot y_0, p)$  für alle  $h \in G$ , also gerade  $y_0 \in D$ . Wegen  $G \cdot y = G \cdot y_0$  folgt der erste Teil der Behauptung. Es bleibt noch zu zeigen, dass die Inneren der Translate disjunkt sind. Hierfür genügt es zu zeigen, dass falls  $x_1, x_2 \in \overset{\circ}{D}$  für  $x_1 \neq x_2$ , dass dann  $x_1$  und  $x_2$  nicht zu derselben Bahn gehören. Wir überlegen uns hierfür zunächst, dass falls  $d(x, p) = d(g \cdot x, p)$  für  $g \in G \setminus \{e_G\}$  gilt, dass dann  $d(x, p) = d(x, g^{-1} \cdot p)$  und  $x$  damit in der Mittelebene von  $p$  und  $g^{-1} \cdot p$

$$M(p, g^{-1}) := \{x \in X \mid d(x, p) = d(x, g^{-1} \cdot p)\}$$

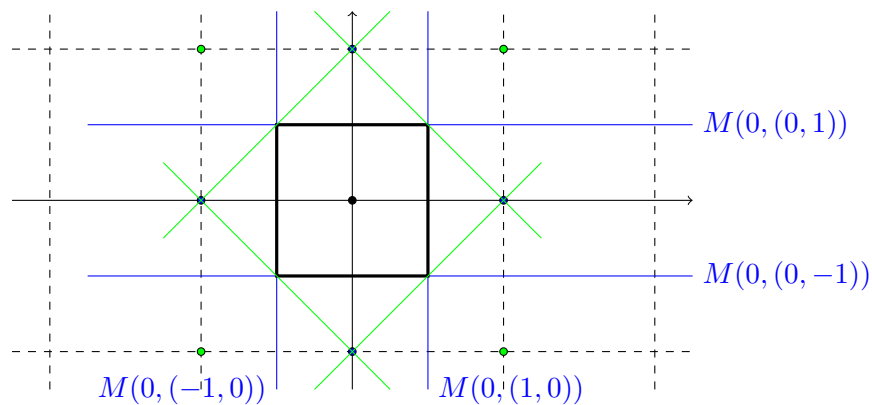
liegt. Dann gilt entweder  $x \notin D$  oder  $x \in \partial D$ . Insbesondere gilt dann für  $x \in \overset{\circ}{D}$  also  $d(x, p) < d(g \cdot x, p)$  für alle  $g \in G \setminus \{e_G\}$ . Sind nun also  $x_1 \neq x_2$  in derselben Bahn, also  $x_2 = g_0 \cdot x_1$ , so folgt

$$d(x_1, p) < d(g_0 \cdot x_1, p) = d(x_2, p) < d(g_0^{-1} \cdot x_2, p) = d(x_1, p),$$

ein Widerspruch. □

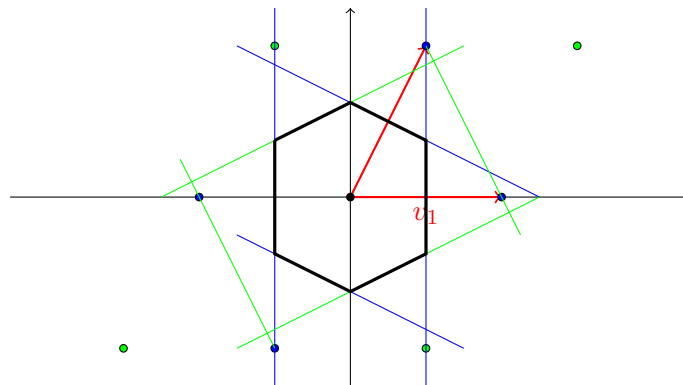
**Beispiel 3.1.4** (i) Betrachte die Gruppenoperation von  $\mathbb{Z}$  auf  $\mathbb{R}$  von oben. Dann wird  $p = 0$  in  $\mathbb{R}$  von keinem  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  fix gelassen und Anwenden von Satz 1.3 liefert den Fundamentalbereich  $D_0(\mathbb{Z}) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . Die relevanten Mitteleben sind dabei  $M(0, 1) : x = \frac{1}{2}$  sowie  $M(0, -1) : x = -\frac{1}{2}$ .

(ii) Analog lässt sich dies für die Gruppenaktion von  $\mathbb{Z}^2$  auf  $\mathbb{R}^2$  anwenden.

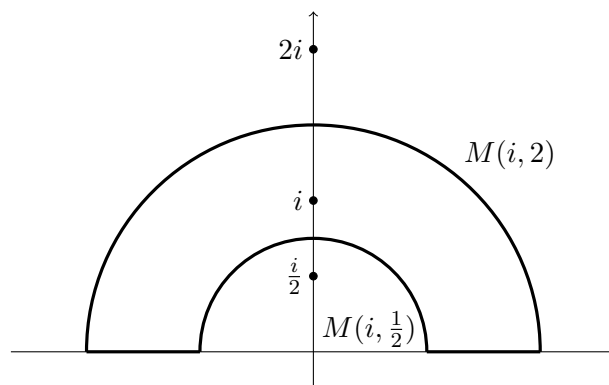


Als Fundamentalbereich er gibt sich nun  $D_{(0,0)}(\mathbb{Z}^2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < \frac{1}{2}, |y| < \frac{1}{2}\}$ .

- (iii) Das Beispiel aus (ii) lässt sich verallgemeinern. Für zwei linear unabhängige Vektoren  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$  ist  $G := \{mv_1 + nv_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}^2$  und wir erhalten durch die Mittelebenenkonstruktion ein Hexagon als Fundamentalbereich.



- (iv) Betrachte  $T : \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2, z \mapsto 2z$ . Dann ist  $i$  nicht fixiert und  $G = \langle T \rangle \cong \mathbb{Z}$  operiert auf  $\mathbb{H}^2$ . Die Mittelebenen sind diesmal hyperbolische Geodätische, also Halbkreise und wir erhalten folgenden Fundamentalbereich:



**Satz 3.1.5** *Die Gruppe*

$$\mathrm{SL}_2\mathbb{Z} := \left\{ T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2\mathbb{R} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$$

*operiert durch Möbiustransformationen diskret auf  $\mathbb{H}^2$ , d.h. alle Bahnen sind diskret.*

**Bemerkung 3.1.6** *Die Gruppe  $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$  wird mit der von  $\mathbb{R}^4$  induzierten Teilraumtopologie versehen.*

**Lemma 3.1.7** *Sei  $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{H}^2$  und  $K \subseteq \mathbb{H}^2$  kompakt. Dann ist die Menge*

$$E_{z_0} := E = \left\{ T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2\mathbb{R} \mid T \cdot z_0 = \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} \in K \right\}$$

*kompakt in  $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ .*

*Beweis.* Wir müssen zeigen, dass  $E$  abgeschlossen und beschränkt bezüglich der von  $\mathbb{R}^4$  induzierten Teilraumtopologie ist. Die Abbildung

$$\Psi : \mathrm{SL}_2\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}^2, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{az_0 + b}{cz_0 + d}$$

ist stetig, also ist  $E = \Psi^{-1}(K)$  als stetiges Urbild einer kompakten Menge abgeschlossen. Es bleibt also noch die Beschränktheit zu zeigen. Dabei ist  $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2\mathbb{R}$  bezüglich der Teilraumtopologie beschränkt genau dann, wenn die Koeffizienten  $a, b, c, d$  beschränkt in  $\mathbb{R}$  sind. Nun ist  $K$  beschränkt in  $\mathbb{H}^2$ , das heißt es existiert eine Konstante  $M_1 > 0$ , sodass

$$|\Psi(T)| = \left| \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} \right| \leq M_1$$

für alle  $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ , denn eine bezüglich  $d_h$  beschränkte Menge ist auch euklidisch beschränkt. Weiter ist  $K$  kompakt in  $\mathbb{H}^2$ , es gibt also  $M_2 > 0$ , sodass

$$\mathrm{Im} \Psi(z_0) = \mathrm{Im} \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} = \mathrm{Im} \frac{(az_0 + b)(c\bar{z}_0 + d)}{|cz_0 + d|^2} = \mathrm{Im} \frac{adz_0 + bc\bar{z}_0}{|cz_0 + d|^2} = \frac{\mathrm{Im} z_0}{|cz_0 + d|^2} \geq M_2.$$

Damit folgt

$$|cz_0 + d| \leq \sqrt{\frac{\mathrm{Im} z_0}{M_2}}$$

sowie

$$|az_0 + b| \leq M_1 |cz_0 + d| \leq M_1 \sqrt{\frac{\mathrm{Im} z_0}{M_2}}.$$

Wegen

$$|az_0 + b| = |a(x_0 + iy_0) + b| = \sqrt{(ay_0)^2 + (ax_0 + b)^2} \geq |ay_0|$$

folgt damit

$$|a| \leq \frac{M_1}{|y_0|} \sqrt{\frac{\operatorname{Im} z_0}{M_2}}$$

und

$$|b| = |az_0 + b - az_0| \leq |az_0 + b| + |az_0| \leq M_1 \sqrt{\frac{\operatorname{Im} z_0}{M_2}} \left(1 + \frac{|z_0|}{|y_0|}\right).$$

Analog zeigt man die Beschränktheit von  $c$  und  $d$  und erhält die Behauptung.  $\square$

*Beweis von Satz 3.1.5.* Sicherlich ist  $\operatorname{SL}_2\mathbb{Z}$  diskret in  $\operatorname{SL}_2\mathbb{R}$ . Sei nun  $z_0 \in \mathbb{H}^2$  und  $\epsilon > 0$ . Die Menge

$$\begin{aligned} S &= \left\{ T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2\mathbb{Z} \mid T \cdot z_0 = \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} \in B_\epsilon(z_0) \right\} \\ &= \left\{ T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2\mathbb{R} \mid T \cdot z_0 = \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} \in B_\epsilon(z_0) \right\} \cap \operatorname{SL}_2\mathbb{Z} \end{aligned}$$

ist als Durchschnitt einer kompakten mit einer diskreten Menge endlich. Durch verkleinern von  $\epsilon$  erreicht man

$$B_\epsilon(z_0) \cap B_\epsilon(T \cdot z_0) = B_\epsilon(z_0) \cap T \cdot B_\epsilon(z_0) = \emptyset$$

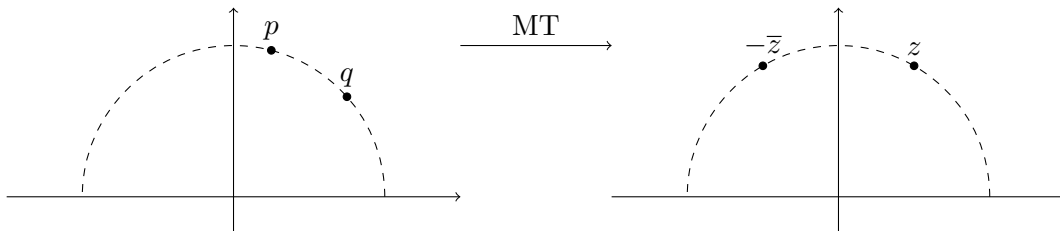
für alle  $T \in \operatorname{SL}_2\mathbb{Z} \setminus \{\operatorname{id}\}$ , was den Satz beweist.  $\square$

Im Folgenden wollen wir nun den Dirichlet-Bereich für  $\operatorname{SL}_2\mathbb{Z}$  konstruieren.

**Bemerkung 3.1.8** Ist  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $p, q \in X$ , so ist die Mittelgerade gegeben durch

$$M_{pq} = \{x \in X \mid d(p, x) = d(q, x)\}.$$

Diese entspricht im Euklidischen der Mittelsenkrechten. Sind nun  $p, q \in \mathbb{H}^2$  beliebige Punkte, so lassen sich wegen der 2-Punkt-Homogenität der hyperbolischen Ebene  $p, q$  in die spezielle Lage  $p = z$  und  $q = -\bar{z}$  überführen:



Durch die expliziten Abstandsformeln rechnet man nach, dass in der speziellen Lage die Mittelgerade gerade durch die imaginäre Achse gegeben ist.

Für die Konstruktion des Dirichlet-Bereichs benötigen wir einen Punkt, der nicht fixiert wird.

**Lemma 3.1.9** Für  $\lambda > 1$  gilt  $T(\lambda i) \neq \lambda i$  für alle Möbiustransformationen  $T \in \mathrm{SL}_2\mathbb{Z} \setminus \{\pm \mathrm{id}\}$ .

*Beweis.* Sei  $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$ , das heißt es gilt  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  sowie  $ad - bc = 1$ . Fixiert  $T$  nun  $\lambda i$ , so erhalten wir

$$\lambda i = T(\lambda i) = \frac{\lambda ai + b}{\lambda ci + d} = \frac{(a\lambda i + b)(d - c\lambda i)}{c^2\lambda^2 + d^2} = \frac{bd + ac\lambda^2}{c^2\lambda^2 + d^2} + \frac{\lambda i}{c^2\lambda^2 + d^2}.$$

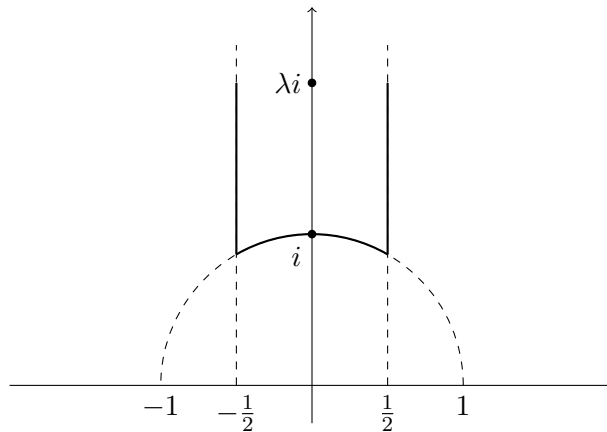
Koeffizientenvergleich liefert zum einen  $c^2\lambda^2 + d^2 = 1$ , woraus wegen  $\lambda > 1$  bereits  $c = 0$  und damit  $d = \pm 1$  folgt. Weiter ist  $bd + ac\lambda^2 = \pm b = 0$ , also auch  $b = 0$ . Die Normiertheit impliziert schließlich  $a = d$ , also  $T = \pm I_2$ , womit die zu  $T$  assoziierte Möbiustransformation also bereits die Identität ist.  $\square$

Wir können nun also  $p = \lambda i$  als Zentrum für den Dirichlet-Bereich wählen.

**Satz 3.1.10** Das geodätische Dreieck

$$\Delta = \left\{ z \in \mathbb{H}^2 \mid |z| \geq 1, |\operatorname{Re} z| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

ist der Dirichletbereich  $D_{\lambda i}(\mathrm{SL}_2\mathbb{Z})$  von  $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$  zentriert in  $\lambda i$ .



*Beweis.* Die Isometrien

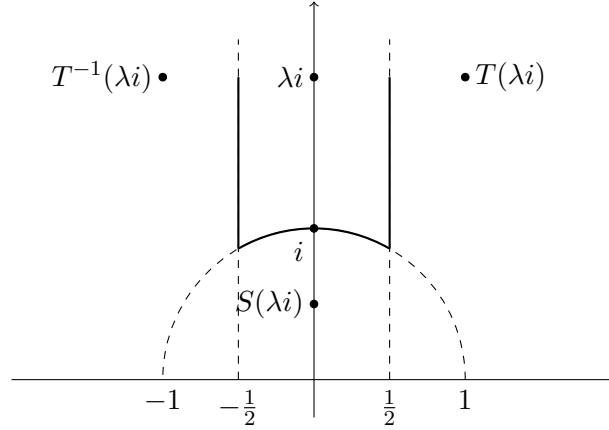
$$T(z) = z + 1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z$$

$$S(z) = -\frac{1}{z} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot z$$

sind in  $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$  (und erzeugen die Gruppe sogar) und es gilt

$$S(\infty) = 0, \quad S(0) = \infty, \quad S(i) = i, \quad S(\lambda i) = \frac{1}{\lambda}i.$$

Die drei Mittelgeraden von  $T(\lambda i)$ ,  $T^{-1}(\lambda i)$ ,  $\lambda i$  und  $S(\lambda i)$  sind gerade die Seiten von  $\Delta$ .



Dies zeigt bereits  $D_{\lambda i}(\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}) \subseteq \Delta$ . Angenommen es gelte keine Gleichheit. Dann ist  $\Delta$  kein Fundamentalbereich, also überlappen sich die Translate von  $\Delta$ , das heißt es gibt  $z \in \overset{\circ}{\Delta}$  und  $R \in \mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$  sodass  $R(z) \in \overset{\circ}{\Delta}$ . Sei  $R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} |cz + d|^2 &= c^2|z|^2 + 2|cd|\operatorname{Re} z + d^2 \\ &> c^2 + d^2 - |cd| \\ &= (|c| - |d|)^2 + |cd| \\ &\geq 1, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit gilt, da der Term ganzzahlig, nichtnegativ und verschieden von Null ist, denn andernfalls wäre  $|c| = |d|$  und  $0 = |cd| = |c|^2$  und damit  $c = d = 0$ , ein Widerspruch zu  $ad - bc = 1$ . Damit erhalten wir die strikte Ungleichung

$$\operatorname{Im} R(z) = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz + d|^2} < \operatorname{Im} z.$$

Dasselbe Argument mit  $z$  und  $h$  ersetzt durch  $R(z)$  und  $R^{-1}$  liefert aber auch

$$\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} R^{-1}(R(z)) < \operatorname{Im} R(z),$$

ein Widerspruch. Somit folgt  $\Delta = D_{\lambda i}(\mathrm{SL}_2\mathbb{Z})$ . □

**Bemerkung 3.1.11** Analog wie im Beweis von Satz 3.1.5 zeigt man: Eine diskrete Untergruppe



von  $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$  oder  $\mathrm{PSL}_2\mathbb{R}$  operiert diskret auf  $\mathbb{H}^2$  und liefert einen Dirichletbereich für eine Parkettierung von  $\mathbb{H}^2$ . Solche Gruppen heißen Fuchssche Gruppen.

## 3.2 Dreiecksgruppen und zugehörige Parkettierungen

Sie betrachten zunächst die Spiegelung an Geodätischen in den uns drei bekannten Modellen der Geometrie. In der euklidischen Ebene  $\mathbb{E}^2$  ist die Spiegelung an der euklidischen Geodätischen  $g_0 : x = 0$  (der  $y$ -Achse) gegeben durch

$$\sigma_{g_0} : \mathbb{E}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^2, \quad (x, y) \mapsto (-x, y).$$

Ist  $g$  nun beliebig, so wähle eine euklidische Isometrie  $\phi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{E}^2)$  mit  $\phi(g_0) = g$  und setze  $\sigma_g := \phi \circ \sigma_{g_0} \circ \phi^{-1}$ . Dann ist  $\sigma_g$  die Spiegelung an der Geraden  $g$ . Man sieht leicht ein, dass diese Definition unabhängig von der Wahl von  $\phi$  ist.

Auf der Sphäre  $\mathbb{S}^2$  verfahren wir analog. Die sphärischen Geodätischen sind gerade die Großkreise, also speziellen Großkreis wählen wir  $g_0$  in der  $x$ - $z$ -Ebene. Dann ist durch

$$\sigma_{g_0} : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (x, -y, z)$$

die Spiegelung an  $g_0$  gegeben. Für einen beliebigen Großkreis  $g$  wähle eine sphärische Isometrie  $\phi$  mit  $\phi(g_0) = g$  und setze  $\sigma_g := \phi \circ \sigma_{g_0} \circ \phi^{-1}$ . In der hyperbolischen Halbebene funktioniert das genau so: Als spezielle hyperbolische Geodätische wählen wir die imaginäre Achse  $i\mathbb{R}$ . Die Formel

$$\sinh^2 \left( \frac{1}{2} d_h(z, w) \right) = \frac{|z - w|^2}{4 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w}$$

zeigt, dass die Abbildung

$$\sigma_{g_0} : \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2, \quad z \mapsto -\bar{z}$$

eine hyperbolische Isometrie ist, die  $g_0$  punktweise festhält und  $\sigma_{g_0}^2 = \operatorname{id}_{\mathbb{H}^2}$  erfüllt, also eine Spiegelung an  $g_0$  ist. Ist  $g$  nun eine beliebige hyperbolische Geodätische, so wähle eine hyperbolische Isometrie  $\phi$  mit  $\phi(g_0) = g$  und setze  $\sigma_g := \phi \circ \sigma_{g_0} \circ \phi^{-1}$ .

**Proposition 3.2.1** *Seien  $g_1, g_2$  zwei sich in einem Punkt  $p$  schneidene Geodätische in  $\mathbb{E}^2$  (bzw. in  $\mathbb{S}^2$  oder  $\mathbb{H}^2$ ) sowie  $\sigma_1, \sigma_2$  die Spiegelungen an  $g_1, g_2$ . Dann ist  $\sigma_1 \circ \sigma_2$  eine Drehung um  $p$  um den Winkel  $2\angle(g_1, g_2)$ .*

*Beweis.* Wir zeigen die Behauptung für den euklidischen Fall; der sphärische und hyperbolische verbleiben als Übung. Es sei ohne Einschränkung  $p = 0$  und  $g_1, g_2$  seien euklidische Geodätische

gegeben durch

$$g_1 = \{(x, \tan \theta) \mid x \in \mathbb{R}\}, \quad g_2 = \{(x, \tan \psi) \mid x \in \mathbb{R}\},$$

mit  $\mu, \lambda \in [0, \frac{\pi}{2})$  und ohne Einschränkung gelte  $\psi > \theta$ . Es ist dann  $\angle_p(g_1, g_2) = \psi - \theta$ . Wir wollen die Spiegelungen an  $g_1$  und  $g_2$  nun wie oben beschreiben. Wir suchen also Isometrien  $A$  und  $B$ , welche  $g_0$  auf  $g_1$  und  $g_2$  abbilden. Diese sind aber gerade gegeben durch Drehungen um die Winkel  $\theta - \frac{\pi}{2}$  bzw.  $\psi - \frac{\pi}{2}$ , also durch die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) & -\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) & \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos(\psi - \frac{\pi}{2}) & -\sin(\psi - \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\psi - \frac{\pi}{2}) & \cos(\psi - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}.$$

Mit

$$\sigma_{g_0} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

folgt

$$\begin{aligned} \sigma_{g_1} = A \circ \sigma_{g_0} \circ A^{-1} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) & -\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) & \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) & -\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) & \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cos^2(\theta - \frac{\pi}{2}) + \sin^2(\theta - \frac{\pi}{2}) & -2\sin(\theta - \frac{\pi}{2})\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) \\ -2\sin(\theta - \frac{\pi}{2})\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) & -\sin^2(\theta - \frac{\pi}{2}) + \cos^2(\theta - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cos(2\theta - \pi) & -\sin(2\theta - \pi) \\ -\sin(2\theta - \pi) & \cos(2\theta - \pi) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und genau so

$$\sigma_{g_2} = \begin{pmatrix} -\cos(2\psi - \pi) & -\sin(2\psi - \pi) \\ -\sin(2\psi - \pi) & \cos(2\psi - \pi) \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Hintereinanderausführung der beiden Spiegelungen gerade

$$\begin{aligned} \sigma_1 \circ \sigma_2 &= \begin{pmatrix} -\cos(2\theta - \pi) & -\sin(2\theta - \pi) \\ -\sin(2\theta - \pi) & \cos(2\theta - \pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos(2\psi - \pi) & -\sin(2\psi - \pi) \\ -\sin(2\psi - \pi) & \cos(2\psi - \pi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2(\psi - \theta)) & \sin(2(\psi - \theta)) \\ -\sin(2(\psi - \theta)) & \cos(2(\psi - \theta)) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

was also der Drehung um den doppelten Schnittwinkel entspricht.  $\square$

Sei nun  $\Delta = ABC$  ein euklidisches (bzw. sphärisches oder hyperbolisches) Dreieck mit Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  und Schenkeln  $a, b, c$ . Wir spiegeln nun das Dreieck an den Seiten von  $\Delta$ . Als eine notwendige Bedingung dafür, dass sich dadurch eine Parkettierung des zugrundeliegenden Raumes

ergibt, müssen sich die Innenwinkel  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  jeweils zu  $2\pi$  vervielfachen, d.h.  $l\alpha = 2\pi$  für ein  $l \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$  und ebenso für  $\beta$  und  $\gamma$ . Weiter fordert man, dass sich die von 2 Spiegelungen erzeugten Drehungen ebenfalls zu  $2\pi$  vervielfachen, also  $2k\alpha = 2\pi$  für  $k \geq 2$  und analog für  $\beta$  und  $\gamma$ . Dies führt zu folgender Definition:

**Definition 3.2.2** Sei  $\Delta = ABC$  ein euklidisches (bzw. sphärisches oder hyperbolisches Dreieck) mit Schenkeln  $a, b, c$  und Winkeln  $\alpha = \frac{\pi}{l}, \beta = \frac{\pi}{m}, \gamma = \frac{\pi}{n}$  für  $l, m, n \geq 2$ . Dann heißt die von den Spiegelungen  $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$  erzeugte Gruppe *Dreiecksgruppe* und wird notiert als  $\Delta(l, m, n) := \langle \sigma_a, \sigma_b, \sigma_c \rangle \subseteq \text{Isom}(X)$ , wobei  $X = \mathbb{E}^2$  (bzw.  $X = \mathbb{S}^2$  oder  $X = \mathbb{H}^2$ ). Es gelten folgende Relationen in  $\Delta(l, m, n)$ :

$$\sigma_a^2 = \sigma_b^2 = \sigma_c^2 = \text{id}_X, \quad (\sigma_c \circ \sigma_b)^l = \text{id}_X, \quad (\sigma_c \circ \sigma_a)^m = \text{id}_X, \quad (\sigma_a \circ \sigma_b)^n = \text{id}_X$$

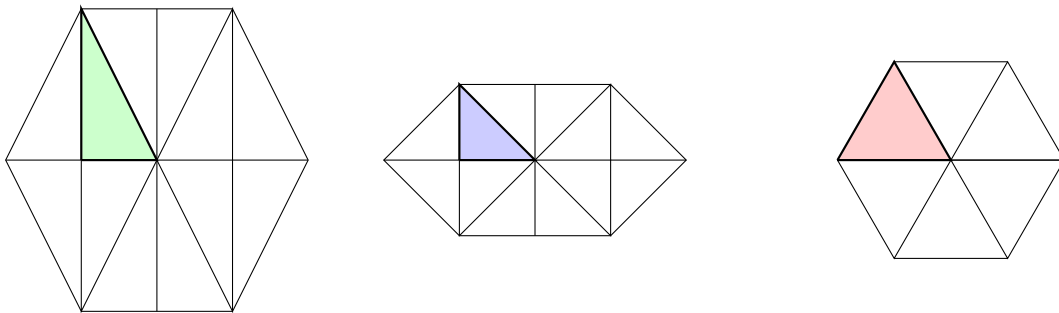
Im Folgende wollen wir die Möglichkeiten für  $l, m, n$  untersuchen. Dies müssen wir für jede Geometrie separat tun.

**Satz 3.2.3 (Satz von Gauß-Bonnet für euklidische Dreiecke)** Ist  $\Delta \subseteq \mathbb{E}^2$  ein euklidisches Dreieck mit Innenwinkeln  $\alpha, \beta, \gamma$ , so ist  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ .

Eine euklidische Dreiecksgruppe erfüllt also

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$$

mit  $l, m, n \geq 2$ . Es ergeben sich durch sukzessives Steigern der Konstanten die 3 Lösungen  $\Delta_1 = \Delta(2, 3, 6)$ ,  $\Delta_2 = \Delta(2, 4, 4)$  sowie  $\Delta_3 = \Delta(3, 3, 3)$ . Diese liefern folgende Parkettierungen:



Für den sphärischen Fall betrachte zunächst folgende Proposition:

**Proposition 3.2.4 (Satz von Gauß-Bonnet für sphärische Dreiecke)** Ist  $\Delta \subseteq \mathbb{S}^2$  ein sphärisches Dreieck mit Innenwinkeln  $\alpha, \beta, \gamma$ , so ist  $\alpha + \beta + \gamma > \pi$ .

*Beweis.* Für zwei Großkreise auf der Sphäre, die sich im Winkel  $\alpha \leq \pi$  schneiden bezeichne  $M(\alpha)$  die eingeschlossene Fläche. Für diese gilt  $M(\alpha) = M(\mathbb{S}_R^2) \cdot \frac{\alpha}{2\pi}$ . Weiter ist

$$\mathbb{S}_R^2 = 2(M(\alpha) + M(\beta) + M(\gamma)) - 2\Delta,$$

also

$$4\pi R^2 = A(\mathbb{S}_R^2) = 4R^2(\alpha + \beta + \gamma) - 2A(\Delta),$$

und folglich

$$0 < A(\Delta) = 2R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi),$$

woraus  $\alpha + \beta + \gamma > \pi$  folgt. □

Für die Sphäre erhalten wir also als Bedingung für eine Dreiecksgruppe

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} > 1$$

mit  $l, m, n \geq 2$ . Durch sukzessives Steigern der Konstanten erhalten wir die Lösungen  $\Delta_{1n} = \Delta(2, 2, n)$ ,  $\Delta_2 = \Delta(2, 3, 3)$ ,  $\Delta_3 = \Delta(2, 3, 4)$  und  $\Delta_4 = \Delta(2, 3, 5)$  für  $n \geq 2$  beliebig.

Für  $\mathbb{H}^2$  wissen wir bereits, dass gilt  $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ , die Bedingung für Dreiecksgruppen ergibt sich hier also zu

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$$

für  $l, m, n \geq 2$ . Hierfür gibt es unendlich viele Lösungen. Beachte:  $l = m = n = \infty$  ist erlaubt.

**Bemerkung 3.2.5** *Wir haben nun für die euklidische, sphärische und hyperbolische Geometrie jeweils eine Version des Satzes von Gauß-Bonnet gesehen. Doch was haben diese mit dem Satz aus der Topologie zu tun? Für eine zweidimensionale, kompakte, orientierbare Mannigfaltigkeit  $M$  mit Rand  $\partial M$ , Gaußkrümmung  $\kappa$  und geodätische Randkrümmung  $k_g$  auf  $\partial M$  gilt:*

$$2\pi\chi(M) = \int_M \kappa \, dA + \int_{\partial M} k_g \, ds.$$

*Betrachte  $M = \Delta = \Delta(\alpha, \beta, \gamma) \subseteq X$  mit  $X \in \{\mathbb{E}^2, \mathbb{S}^2, \mathbb{H}^2\}$ . Aus der Differentialgeometrie wissen wir, dass diese drei Räume von konstanter Krümmung 0, 1 bzw.  $-1$  sind. Weiter ist die Eulercharakteristik eines Dreiecks sicherlich 1 und die geodätische Krümmung des Randes verschwindet überall außer in den Ecken. Damit ergibt sich das Integral zu*

$$2\pi = \int_{\Delta} \kappa \, dA + \int_{\partial\Delta} k_g \, ds = \mu(\Delta)\kappa + k_g(A) + k_g(B) + k_g(C) = \mu(\Delta)\kappa + (\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma).$$

*Wir erhalten damit*

- (i) Im Euklidischen  $2\pi = \pi - \alpha + \pi - \beta + \pi - \gamma$ , also  $\pi = \alpha + \beta + \gamma$ ,*
  - (ii) Im Sphärischen  $2\pi = \mu(A) + \pi - \alpha + \pi - \beta + \pi - \gamma$ , also  $\mu(A) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$  und*
  - (iii) Im Hyperbolischen  $2\pi = -\mu(A) + \pi - \alpha + \pi - \beta + \pi - \gamma$ , also  $\mu(A) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$ ,*
- also gerade die drei vorgestellten Versionen.*

**Bemerkung 3.2.6** *Man kann zeigen: Hyperbolische Dreiecksgruppen operieren diskret auf  $\mathbb{H}^2$  und induzieren also hyperbolische Parkettierungen (Siehe z.B. [Caratheodory, Funktionentheorie II, S: 159 ff]).*

