

15.11.06

Das `latexki`-Team

Stand: 10. Januar 2017

Für $A \in \mathcal{L}_d$ und $f : A^d \rightarrow \mathbb{C}$ $f : A \rightarrow [-\infty, \infty]$ beschränkt betrachtet man

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in A \\ 0 & , x \in \mathbb{R}^d \setminus A \end{cases}$$

f heißt integrierbar über A wenn \tilde{f} integrierbar ist (über \mathbb{R}^d) und wir setzen

$$\int_A f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(x) dx.$$

Beachte: Für integrierbare f auf \mathbb{R}^d gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} \chi_A(x) f(x) dx = \int_A f(x) dx.$$

Bemerkung 1.34

- a) Die obigen Def. sind unabhängig von der Darstellung der einfachen Funktionen und der Wahl der approx. Fkt. φ_k (siehe AA§, X, 2.1, 2.7, 3.2). Obiges Integral und das in Königsberger II stimmen überein.

- b) Sei $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ messbar. Dann ist f int'bar $\iff |f|$ int'bar.

Beweis : „ \Rightarrow “ verwende zu φ_n aus Def. 1.33 die Folge $|\varphi_n|$ (AE, X, 2.8).
 „ \Leftarrow “ Es gilt $f = f_1 - f_2 + if_3 - if_4$ mit $0 \leq f_k \leq |f|$. Verwende c). ■

- c) Für $A \in \mathcal{L}_d$ setzt man $\mathcal{L}^1(A) : \{f : A \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ integrierbar}\}$.
 Dann gilt: $\mathcal{L}^1(A)$ ist VR und $\|f\|_1 = \int_A |f| dx$ ist Halbnorm auf $\mathcal{L}^1(A)$.

(Beachte $\|\chi_N\|_1 = \lambda(N) = 0$ für jede NM N .)

Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(A)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Dann:

i)

$$\int_A (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_A f dx + \beta \int_A g dx$$

ii)

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, f \leq g \implies \int_A f dx \leq \int_A g dx.$$

iii)

$$\left| \int_A f dx \right| \leq \int_A |f| dx \quad (\text{nach b))}$$

iv) h messbar, $|h| \leq |f|$ dann $h \in \mathcal{L}^1(A)$. Analoge Eigenschaften für:
 $f : A \rightarrow [0, \infty]$. (Folgt leicht per Approximation. Siehe AE 2.4, 2.9, 2.11, 3.3)

d) Sei $\varphi : A \rightarrow [0, \infty]$ messbar mit $\int_A \varphi dx < \infty$. Dann ist $\varphi(x) < \infty$ ffa. $x \in A$.

Beweis Anm.: $\varphi(x) = \infty$ für $x \in B$ mit $\lambda(B) > 0$. $B \subseteq A$ messbar. Dann folgt für alle $n \in \mathbb{N}$: $\int_A \varphi dx \geq \int_A n \cdot \chi_B dx = n \cdot \lambda(B) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \infty$ Wid.! ■

Theorem 1.35 (Lemma von Fatou, majorisierte Konvergenz) (Beppo Levi)

Seien $f_n : A \rightarrow [0, \infty]$ messbar ($n \in \mathbb{N}$), $A \in \mathcal{L}_d$.

Dann gelten:

a)

$$\int_A \lim_{n \rightarrow \infty} f_n dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n dx. (AE, X, 3.7)$$

b)

$$f_n \leq f_{n+1} \implies \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} f_n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n dx$$

Theorem 1.36 (majorisierte Konvergenz)

Seien $f_n, g \in \mathcal{L}^1(A)$, $A \in \mathcal{L}_d$ $f_n(x) \rightarrow f(x)$ ($n \rightarrow \infty$) ffa. $x \in A$
und $|f_n(x)| \leq g(x)$ ffa. $x \in A$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$f \in \mathcal{L}^1(A) \text{ und } \|f_n - f\|_1 \rightarrow 0 \text{ (} n \rightarrow \infty \text{) somit } \int_A f_n dx \rightarrow \int_A f dx.$$

Bemerkung Majorante bzw. Monotonie sind oben wesentlich.

Bsp: hier steht eine Zeichnung!

$$\implies f_n(x) \rightarrow 0 \quad \forall x \geq 0, n \rightarrow \infty \text{ aber } \|f_n\|_1 = n \rightarrow \infty$$

Für $A \in \mathcal{L}_d$, $p \in [1, \infty]$ messbare $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ definiert man

$$\|f\|_p = \left(\int_A |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad p < \infty \text{ (betrachte } |f|^p \text{ ist messbar.)}$$

$$\|f\|_\infty = \inf \{c \geq 0 : |f(x)| \leq c, \text{ für } x \notin N = N(c)\} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in A} |f(x)| \quad (\text{wobei } \inf \emptyset = \infty)$$

$$\mathcal{L}^p(A) = \{f : A \rightarrow \mathbb{C} : \text{messbar und } \|f\|_p < \infty\}$$

Schon gesehen $\mathcal{L}^1(A)$ ist VR, $\|\cdot\|_1$ ist Halbnorm.

Satz 1.37 $\mathcal{L}^\infty(A)$ ist VR mit Halbnorm $\|\cdot\|_\infty$

Beweis

Seien $f_j \in \mathcal{L}^\infty(A)$, $|f_j(x)| \leq c_j \quad x \notin N_j, j = 1, 2, \dots, N_j = NM$

Dann: $|f_1(x) + f_2(x)| \leq c_1 + c_2 \quad \forall x \notin N_1 \cup N_2$, wobei $N = N_1 \cup N_2 = NM$.

$\implies f_1 + f_2 \in \mathcal{L}^\infty(A)$, $\|f_1 + f_2\|_\infty \leq \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty$ " $\|\alpha f_1\| = |\alpha| \|f_1\|_\infty$ " zeigt man genau so. ■

Satz 1.38 Seien $p \in [1, \infty]$, $A \in \mathcal{L}_d$, $f, g \in \mathcal{L}^p(A)$, $h \in \mathcal{L}^p(A)$. Dann:

- a) $fh \in \mathcal{L}^1(A)$. $\int_A |fh| dx = \|fh\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|h\|_p$
- b) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$
und $\mathcal{L}^p(A)$ ist VR mit Halbnorm $\|\cdot\|_p$ (Minkowski).
- c) $f_n \in \mathcal{L}^p(A)$, $f_n \rightarrow \varphi$ f.ä. $f \tilde{A}_{\frac{1}{4}}^1 r$ ($n \rightarrow \infty$). $|f_n| \leq g$ fast überall, $g \in \mathcal{L}^p(A)$.
Dann $\varphi \in \mathcal{L}^p(A)$, $f_n \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{L}^p(A)$ ($n \rightarrow \infty$).

Beweis Für Fall $p = 1$ ist klar, verwende für Hölder (Bem 1.40)

Sei also $p \in (1, \infty)$ und $p' = \frac{p}{p-1}$.

- a) Da f, g messbar sind, nur Abschätzung zu zeigen. Wie in (1.26) liefert (1.4)

$$\int_A |f(x)| |h(x)| dx \leq \underbrace{\frac{t^p}{p} \int_A |f(x)|^p dx + \frac{t^{-p'}}{p'} \int_A |h(x)|^{p'} dx}_{= \|f\|_p^p} \quad \forall t > 0$$

$\inf_{t>0}$ liefert Behauptung mit (1.4)

- b) $|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p) \implies f + g \in \mathcal{L}^p(A)$
 $\underbrace{\|f + g\|_p^p}_{\text{endlich}} = \int_A |f + g|^p dx \leq \int_A |f| + |f + g|^{p-1} dx + \int_A |g| |f + g|^{p-1} dx \leq$
 $\|f\|_p \left(\int_A |f + g|^{(p-1) \frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \leq \|f\|_p \left(\int_A |f + g|^{p-1} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} + \|g\|_p \left(\int_A |f + g|^{p-1} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} = (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p-1} \implies \text{Behauptung (b)}.$

- c) Haben $|f_n|^p \leq g^p$ fast überall ($n \in \mathbb{N}$)
 und $|f_n|^p \rightarrow |f|^p$ fast überall ($n \rightarrow \infty$)
 major.konv. $\implies |f|^p \in \mathcal{L}^1(A) \implies f \in \mathcal{L}^p(A)$
 Setze $h_n = |f_n - f|^p \in \mathcal{L}^1(A) \implies h_n \rightarrow 0$ f.ü. ($n \rightarrow \infty$).
 $0 \leq h_n \leq 2^p(|f_n|^p + |f|^p) \leq 2^p(g^p + |f|^p) \in \mathcal{L}^1$. majorisierte Konvergenz:
 $\|f - f_n\|_p = \|h_n\|_1 \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) ■