

# Funktionentheorie I

Prof. Dr. Roland Schnaubelt

Sommersemester 2009

Die Mitarbeiter von <http://mitschriebwiki.nomeata.de/>



# Vorwort

## Über dieses Skriptum

Dies ist ein Mitschrieb der Vorlesung „Funktionentheorie I“ von Herrn Prof. Dr. Schnaubelt im Sommersemester 2009 an der Universität Karlsruhe (TH). Die Mitschriebe der Vorlesung werden mit ausdrücklicher Genehmigung von Herrn Schnaubelt hier veröffentlicht, Herr Schnaubelt ist für den Inhalt nicht verantwortlich.

## Wer

Beteiligt am Mitschrieb sind Michael Fütterer und Jonathan Zachhuber.

## Wo

Alle Kapitel inklusive  $\text{\LaTeX}$ -Quellen können unter <http://mitschriebwiki.nomeata.de> abgerufen werden. Dort ist ein *Wiki* eingerichtet und von Joachim Breitner um die  $\text{\LaTeX}$ -Funktionen erweitert. Das heißt, jeder kann Fehler nachbessern und sich an der Entwicklung beteiligen. Auf Wunsch ist auch ein Zugang über *Subversion* möglich.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Komplexe Differenzierbarkeit</b>	<b>7</b>
1.1	Grundlegendes . . . . .	7
1.1.1	Vorbemerkungen zu $\mathbb{C}$ . . . . .	7
1.1.2	Komplexe Differenzierbarkeit . . . . .	9
1.2	Elementare Funktionen . . . . .	14
1.2.1	Möbiustransformationen . . . . .	14
1.2.2	Potenzen und Wurzeln . . . . .	17
1.2.3	Exponentialfunktion und Logarithmus . . . . .	20
1.2.4	Sinus und Kosinus . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Der Integralsatz von Cauchy</b>	<b>25</b>
2.1	Das komplexe Kurvenintegral . . . . .	25
2.2	Integralsatz und -formel von Cauchy für sternförmige Gebiete . . . . .	36
2.3	Weitere Hauptsätze über holomorphe Funktionen . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Isolierte Singularitäten</b>	<b>51</b>
3.1	Klassifikation und Laurentreihe . . . . .	51
3.2	Der Residuensatz und reelle Integrale . . . . .	54
3.3	Das Argumentprinzip . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Ergänzungen</b>	<b>69</b>
4.1	Die homotope Version des Cauchyschen Integralsatzes . . . . .	69
4.2	Laplace Transformationen . . . . .	72



# 1 Komplexe Differenzierbarkeit

## 1.1 Grundlegendes

### 1.1.1 Vorbemerkungen zu $\mathbb{C}$

Wir fassen  $\mathbb{R}^2$  als Körper  $\mathbb{C}$  auf, indem wir  $z = (x, y)$ ,  $w = (u, v) \in \mathbb{R}^2$  wie folgt verknüpfen:

$$z + w = \begin{pmatrix} x + u \\ y + v \end{pmatrix}, \quad z \cdot w = zw = \begin{pmatrix} xu - yv \\ yu + xv \end{pmatrix}.$$

Wir fassen  $\mathbb{R}$  als Teilmenge von  $\mathbb{C}$  auf, indem wir  $x \in \mathbb{R}$  mit  $(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$  identifizieren.

Beachte:  $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$ . Mit  $i := (0, 1)$  folgt also

$$i^2 = -1.$$

Schreibe also

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x + iy,$$

hierbei sei stets  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Sei weiter  $w = u + iv$  ( $u, v \in \mathbb{R}$ ). Dann:

$$zw = (x + iy)(u + iv) = xu + i^2 yv + ixv + iyu = (xu - yv) + i(yu + xv).$$

Setze  $\operatorname{Re} z := x$  (Realteil),  $\operatorname{Im} z := y$  (Imaginärteil), wenn  $z = x + iy$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$ . Real- und Imaginärteil sind eindeutig bestimmt. Das Konjugiert-Komplexe ist  $\bar{z} := x - iy$ . Damit ist

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2}(z - \bar{z}), \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}.$$

Der komplexe Betrag ist

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right|_2,$$

also gilt:  $|z|^2 = x^2 + y^2 = z \cdot \bar{z}$ .

Es gelten:

$$|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z| \leq \sqrt{2} \max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \quad (1.1)$$

sowie:

$$|z| = 0 \iff z = 0, \quad |wz| = |w||z|, \quad |w + z| \leq |w| + |z| \quad (\forall w, z \in \mathbb{C}).$$

**Polarkoordinaten:** Für  $\phi, \psi \in \mathbb{R}$  setze

$$e^{i\phi} := \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} = \cos \phi + i \sin \phi.$$

Es gelten nach Ana 1:

$$e^{i\phi} e^{i\psi} = e^{i(\phi+\psi)}, \quad e^{i0} = 1, \quad |e^{i\phi}| = 1, \quad e^{i(\phi+2k\pi)} = e^{i\phi} \quad (\forall k \in \mathbb{Z}).$$

Sei  $z \in \mathbb{C}$ . Dann gilt (für  $z \neq 0$ ):

$$z = r \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} = r e^{i\phi} \quad (= x + iy),$$

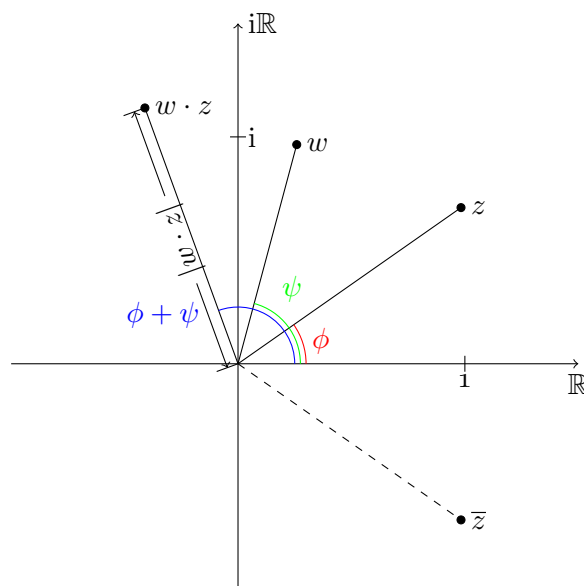
wobei  $r$  der Abstand von  $z$  zum Nullpunkt, also  $|z|$ , ist und

$$\phi = \arg z = \angle \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \in (-\pi, \pi], \quad \phi = \begin{cases} \text{sign}(y) \arccos \frac{x}{r}, & z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \\ \pi, & z \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

Sei weiter  $w = s e^{i\psi}$  ( $s \geq 0$ ). Dann

$$wz = s e^{i\psi} r e^{i\phi} = r s e^{i(\phi+\psi)}.$$

Also entspricht die komplexe Multiplikation der Multiplikation der Beträge und Addition der Winkel (mod  $2\pi$ ). Somit ist  $z \mapsto wz$  für jedes feste  $w$  eine *Drehstreckung*.



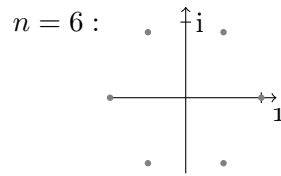
**Einheitswurzeln:** Sei  $n \in \mathbb{N}$  fest. Sei  $z^n = 1$  für  $z = r e^{i\phi} \in \mathbb{C}$ . Dann gilt:  $1 = |1| = |z|^n = r^n$ , also  $r = 1$ . Folglich:

$$1 = \left( e^{i\phi} \right)^n = e^{in\phi} = \cos(n\phi) + i \sin(n\phi).$$

Der Vergleich von Real- und Imaginärteil liefert  $n\phi = 2\pi k$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ . Es gilt also:

$$z^n = 1 \iff z = e^{i \frac{2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$





Ferner: Für  $z_n, z \in \mathbb{C}$  sagen wir, dass  $z_n \rightarrow z$  ( $n \rightarrow \infty$ ), wenn

$$|z - z_n| \rightarrow 0 \stackrel{(1.1)}{\iff} \operatorname{Re} z_n \rightarrow \operatorname{Re} z \text{ und } \operatorname{Im} z_n \rightarrow \operatorname{Im} z \quad (n \rightarrow \infty).$$

Somit haben  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{C}$  den gleichen Konvergenzbegriff und außerdem die gleichen offenen und abgeschlossenen Kugeln:

$$B(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z_0 - z| < r\},$$

$$\overline{B}(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z_0 - z| \leq r\}, \quad (\forall z_0 \in \mathbb{C}, r > 0).$$

Sei  $M \subseteq \mathbb{C}$ . Betrachte  $z = x + iy \in M$  als  $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  mit  $x = \operatorname{Re} z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$ . Sei  $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ . Setze

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x, y), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x, y).$$

Also:

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}.$$

Somit ist  $f: M \rightarrow \mathbb{C}$  genau dann stetig (d.h.  $z_n \rightarrow z$  (in  $M$ )  $\implies f(z_n) \rightarrow f(z)$ ), wenn  $u, v: M \rightarrow \mathbb{R}$  stetig sind.

**Fazit:** Konvergenz, Offenheit, Abgeschlossenheit, Kompaktheit, Stetigkeit, etc. sind in  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{C}$  gleich.

### 1.1.2 Komplexe Differenzierbarkeit

Stets sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen und nichtleer, das heißt:

$$\forall z \in D \exists r = r(z) > 0 \text{ mit } B(z, r) \subseteq D \implies \overline{B}(z, \frac{r}{2}) \subseteq D.$$

**Definition 1.1.** Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  heißt (*komplex*) *differenzierbar* in  $z_0 \in D$ , wenn

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$$

existiert. Dann heißt  $f'(z_0)$  die *Ableitung* von  $f$  bei  $z_0$ . Wenn  $f$  bei allen  $z_0 \in D$  komplex differenzierbar ist, dann heißt  $f$  *holomorph*. Wir schreiben dann  $f \in H(D)$ . Iterativ definiert man höhere Ableitungen.

**Bemerkung 1.2.** (a) Offenbar sind die Funktionen  $f(x) = 1$ ,  $g(z) = z$  auf  $\mathbb{C}$  holomorph mit  $f'(z) = 0$ ,  $g'(z) = 1$ .

(b) Genau wie in Analysis 1 zeigt man: Seien  $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$  in  $z \in D$  differenzierbar und  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Dann sind auch  $\alpha f + \beta g$ ,  $f \cdot g$  und  $\frac{1}{f}$  (wenn  $f(z) \neq 0$ ) in  $z$  differenzierbar und es gelten die bekannten Regeln. Ebenso gilt die Kettenregel.

(c) Polynome  $p$  sind auf  $\mathbb{C}$  und rationale Funktionen  $f = \frac{p}{q}$  mit einem Polynom  $q \neq 0$  sind auf  $\{z \in \mathbb{C} : q(z) \neq 0\}$  holomorph mit den reellen Formeln für  $p'$ ,  $f'$ .

**Erinnerung an Analysis 1:** Gegeben seien  $a_n \in \mathbb{C}$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ) und ein  $c \in \mathbb{C}$ . Die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n$$

konvergiert absolut für alle  $z$  mit

$$|z - c| < \rho := \left( \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1} \in [0, \infty]$$

und divergiert, falls  $z \notin \overline{B}(c, \rho)$ .

Reduktion auf  $c = 0$ : Betrachte

$$h(w) := f(c + w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n,$$

wobei  $w = z - c \in B(0, \rho)$ ,  $z = c + w$ .

**Satz 1.3** (vgl. Analysis 1, Theorem 4.12). *Sei*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n, \quad z \in B(c, \rho),$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $\rho > 0$ . Dann ist  $f \in H(B(c, \rho))$  und

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - c)^{n-1} =: g(z) \quad (\forall z \in B(c, \rho)),$$

wobei die Potenzreihe  $g$  den gleichen Konvergenzradius  $\rho$  hat.

Sei  $m \in \mathbb{N}$ . Iterativ folgt:

$$\exists f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n \cdot \dots \cdot (n - m + 1) a_n (z - c)^{n-m}, \quad \forall z \in B(c, \rho).$$

*Beweis.* Wie in Analysis 1 zeigt man:  $g$  hat Konvergenzradius  $\rho$ . Sei oBdA  $c = 0$ .

Seien  $z \in B(0, \rho)$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $r > 0$  mit  $|z| < r < \rho$ . Sei  $w \in \overline{B}(0, r)$  mit  $w \neq z$ .

Da  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n r^{n-1}$  absolut konvergiert, existiert ein  $N = N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$  mit

$$0 \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} n |a_n| r^{n-1} \leq \varepsilon. \quad (*)$$

Ferner:

$$0 \leq d(w) := \left| \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - g(z) \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\left( \frac{w^n - z^n}{w - z} - n z^{n-1} \right)}_{=: p_n(w)} \right|$$

mit  $p_n(w) = w^{n-1} + zw^{n-2} + \dots + z^{n-1} - n z^{n-1}$ . Dabei gelten:

- $p_n(w) \rightarrow 0$ ,  $w \rightarrow z$  (für jedes feste  $n \in \mathbb{N}$ )
- $|p_n(w)| \leq r^{n-1} + r r^{n-2} + \dots + r^{n-1} + n r^{n-1} = 2n r^{n-1}$  (\*\*)

Damit folgt:

$$0 \leq d(w) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |p_n(w)| \stackrel{(**)}{\leq} \sum_{n=1}^N |a_n| |p_n(w)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2n |a_n| r^{n-1} \\ \stackrel{(*)}{\leq} N \max\{|a_1| |p_1(w)|, \dots, |a_N| |p_N(w)|\} + 2\varepsilon \rightarrow 2\varepsilon \quad (w \rightarrow z) \quad (N = N_\varepsilon \text{ fest!})$$

$\implies \lim_{w \rightarrow z} d(w) \leq 2\varepsilon$ . Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt  $\lim_{w \rightarrow z} d(w) = 0$ .  $\square$

**Beispiele** mit  $\rho = \infty$ .

$$(a) \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \exp'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \exp(z).$$

$$(b) \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad \sin'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = \cos(z).$$

$$(c) \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \\ \cos'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} z^{2n-1} \stackrel{l=n-1}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{(2l+1)!} z^{2l+1} = -\sin(z).$$

Seien  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z_0 \in D$ ,  $z \in D$ . Setze wieder  $u = \operatorname{Re} f$ ,  $v = \operatorname{Im} f$ ,  $x_0 = \operatorname{Re} z_0$ ,  $y_0 = \operatorname{Im} z_0$ , also

$$f(x, y) = u(x, y) + i v(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}.$$

Sei  $z \neq z_0$  und  $f$  bei  $z_0$  komplex differenzierbar. Dann gilt:

$$\frac{1}{|z - z_0|} |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| = \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| \longrightarrow 0, \quad z \rightarrow z_0.$$

Die Zahl  $f'(z_0) \in \mathbb{C}$  kann als  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung  $w \mapsto f'(z_0)w$  aufgefasst werden. Diese ist dann auch  $\mathbb{R}$ -linear auf  $\mathbb{R}^2$ , kann also durch eine reelle  $2 \times 2$ -Matrix dargestellt werden. Nach Analysis 2 ist nun  $f$  in  $z_0 = (x, y)$  reell differenzierbar und somit existieren die partiellen Ableitungen von  $u$  und  $v$  und es gilt

$$f'(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}. \quad (+)$$

**Satz 1.4.** Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ . Dann sind äquivalent:

- (a)  $f$  ist in  $z_0$  komplex differenzierbar.
- (b)  $f$  ist in  $z_0$  reell differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \quad (\text{CR})$$

Insbesondere ist  $f'(z_0)$  schiefsymmetrisch.

*Beweis.* Die letzte Behauptung folgt aus (+) und (CR)<sub>2</sub>.

(a)  $\implies$  (b): Sei  $r > 0$  mit  $B(z_0, r) \subseteq D$ ,  $t \in \mathbb{Q}$  mit  $0 < |t| < r$ . Dann gelten

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(z_0 + t) - f(z_0)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{t} (u(x_0 + t, y_0) - u(x_0, y_0)) + \frac{i}{t} (v(x_0 + t, y_0) - v(x_0, y_0)) \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (1.2)$$

und

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{it} (f(z_0 + it) - f(z_0)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( -i \frac{1}{t} (u(x_0, y_0 + t) - u(x_0, y_0)) + \frac{i}{it} (v(x_0, y_0 + t) - v(x_0, y_0)) \right) \\ &= -i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Vergleichen von Real- und Imaginärteil liefert (CR).

(b)  $\implies$  (a): Setze

$$w = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \stackrel{(\text{CR})}{=} \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \in \mathbb{C}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} w(z - z_0) &= (\operatorname{Re} w)(x - x_0) - (\operatorname{Im} w)(y - y_0) + i((\operatorname{Re} w)(y - y_0) + (\operatorname{Im} w)(x - x_0)) \\ &\stackrel{\text{Def. } w}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) \end{pmatrix} \quad (\text{in } \mathbb{R}^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies |f(z) - f(z_0) - w(z - z_0)| &= \frac{1}{|z - z_0|} \\ &= \left| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right|_2^{-1} \left| \begin{pmatrix} u(x, y) - u(x_0, y_0) - \left( \nabla u(x_0, y_0) \mid \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right) \\ v(x, y) - v(x_0, y_0) - \left( \nabla v(x_0, y_0) \mid \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right) \end{pmatrix} \right|_2 \rightarrow 0, \end{aligned}$$

für  $(x_0, y_0) = z_0 \rightarrow z = (x, y)$ , da  $u, v$  differenzierbar.  $\square$

**Beispiel 1.5.** (a)  $f(z) = \bar{z}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , ist nirgends komplex differenzierbar, obwohl  $f(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$  reell  $C^\infty$  ist. Denn  $u(x, y) = x$ ,  $v(x, y) = -y$ ; also

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y),$$

was (CR)<sub>1</sub> widerspricht.

(b)  $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , ist nur in  $z = 0$  komplex differenzierbar, denn hier ist  $u(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $v(x, y) = 0$  und somit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= 2x \stackrel{!}{=} \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 0 \iff x = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= 2y \stackrel{!}{=} -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 0 \iff y = 0. \end{aligned}$$

$$(c) \quad f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{=u} + i \underbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}_{=v} \text{ ist holomorph f\"ur } z \neq 0 \text{ (Bem. 1.2).}$$

**Bemerkung 1.6.** Sei  $f$  in  $z = x + iy$  komplex differenzierbar. Nach (+) und (CR) gilt:

$$A := f'(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) & -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Also gilt  $\rho := \det A = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)^2 + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)^2 = \frac{\partial v}{\partial x}(x, y)^2 + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)^2 \geq 0$  und  
 $f'(z) \neq 0 \iff \det A > 0$ . Ferner ist  $A^T A = (\det A)I$ . Sei  $f'(z) \neq 0$ . Dann gilt

$$\frac{1}{\sqrt{\rho}} A \text{ orthogonal} \quad (*)$$

$$\implies |Av|_2 = \sqrt{\rho} |v|_2 \quad (\forall v \in \mathbb{R}^2). \quad (**)$$

Sei  $\gamma_j \in C^1((-1, 1), \mathbb{R}^2)$  eine Kurve in  $D$  mit  $\gamma_j(0) = (x, y)$ ,  $\gamma_j'(0) =: v_j \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  ( $j = 1, 2$ ). Dann ist  $Av_j = f'(x, y)\gamma_j'(0) = (f \circ \gamma_j)'(0)$  ein Tangentenvektor der Bildkurve  $f \circ \gamma_j$  bei  $f(x, y)$  ( $j = 1, 2$ ). Weiter gilt:

$$\frac{(v_1 | v_2)}{|v_1|_2 |v_2|_2} \stackrel{(*), (**)}{=} \frac{\frac{1}{\rho}(Av_1 | Av_2)}{\frac{1}{\rho}|Av_1|_2 |Av_2|_2},$$

woraus durch Anwenden des Arcuscosinus folgt:  $\angle(v_1, v_2) = \angle(Av_1, Av_2)$  (Winkel ohne Orientierung).

Also ist der Winkel der Urbildtangente gleich dem Winkel der Bildtangente unter  $f$ . Falls also  $f'(z) \neq 0$ , dann ist  $f$  bei  $z = x + iy$  *winkeltreu* („konform“). Ferner ist  $f$  orientierungstreu, da  $\det A > 0$ .

**Definition 1.7.** Seien  $U, V \subseteq \mathbb{C}$  offen und nichtleer. Sei  $f: U \rightarrow V$  bijektiv und  $f \in H(U)$ ,  $f^{-1} \in H(V)$ . Dann heißt  $f$  *biholomorph*. (Dann heißen  $U$  und  $V$  auch „konform quivalent“.)

**Satz 1.8.** (a) Seien  $U, V \subseteq \mathbb{C}$  offen und nichtleer,  $f: U \rightarrow V$  biholomorph. Dann ist  $f'(z) \neq 0$  fur alle  $z \in U$  und es gilt

$$(f^{-1})'(f(z)) = (f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} = \frac{1}{f'(z)} \quad (\forall z \in U, \forall w = f(z) \in V).$$

(b) Seien  $f \in H(D) \cap C^1(D, \mathbb{R}^2)$ ,  $z_0 \in D$ ,  $f'(z_0) \neq 0$ . Dann existieren offene  $U, V \subseteq \mathbb{C}$  mit  $z_0 \in U$ ,  $f(z_0) \in V$ , sodass  $f: U \rightarrow V$  biholomorph ist. Somit ist a) auf  $f$  fur alle  $z \in U$  und  $w = f(z) \in V$  anwendbar.

*Beweis.* (a) Nach Bem. 1.2 und  $z = f^{-1}(f(z))$  ( $\forall z \in U$ ) folgt  $1 = (f^{-1})'(f(z))f'(z)$ . Durchdividieren ergibt Behauptung a).

(b) Nach Bem. 1.6 ist  $f'(z_0)$  als  $2 \times 2$ -Matrix invertierbar. Der Umkehrsatz aus Analysis 2 liefert Behauptung b).  $\square$

**Definition.** Eine Funktion  $u \in C^2(D, \mathbb{R})$  heißt *harmonisch* auf  $D$ , wenn fur alle  $(x, y) \in D$  gilt:

$$\Delta u(x, y) := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

**Satz 1.9.** (a) Sei  $f \in H(D) \cap C^2(D, \mathbb{R}^2)$ . Dann sind  $u = \operatorname{Re} f$ ,  $v = \operatorname{Im} f$  harmonisch auf  $D$ .  
 (b) Sei  $u \in C^2(D, \mathbb{R})$  auf  $D$  harmonisch,  $B_0 := B((x_0, y_0), r) \subseteq D$  für ein  $r > 0$ ,  $(x_0, y_0) \in D$ . Dann existiert ein  $f \in H(B_0)$  mit  $u = \operatorname{Re} f$ .

*Beweis.* (a) Der Satz von Schwarz aus Analysis 2 (Satz 2.21) liefert

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \stackrel{(\text{CR})}{=} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

(b) Setze für  $(x, y) \in B_0$

$$v(x, y) = - \int_{x_0}^x \frac{\partial u}{\partial y}(s, y_0) \, ds + \int_{y_0}^y \frac{\partial u}{\partial x}(x, s) \, ds.$$

Beachte: die Strecken von  $(x_0, y_0)$  nach  $(x, y_0)$  und von  $(x, y_0)$  nach  $(x, y)$  liegen in  $B_0$ . Analysis 1 und 2 liefern:  $v \in C^1(B_0)$  und

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, s) \, ds && \text{Beachte hier: } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, s) = - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, s) \\ &= - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0) = - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \end{aligned}$$

$\implies (\text{CR})_2$ . Ferner  $\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \implies (\text{CR})$  gilt. Mit Satz 1.4 folgt:  $f = u + iv$  ist auf  $B_0$  holomorph.  $\square$

**Beispiel.** Sei  $f(z) = z^3 = (x + iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3$ . Satz 1.9 liefert:  $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x, y) = x^3 - 3xy^2$  ist harmonisch auf  $\mathbb{C}$ .

## 1.2 Elementare Funktionen

### 1.2.1 Möbiustransformationen

Sei  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{22}(\mathbb{C})$  mit  $\det A = ad - bc \neq 0$  (dann ist  $c \neq 0$  oder  $d \neq 0$ ). Setze

$$m_A(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{für } z \in D_A := \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}, & c \neq 0, \\ \mathbb{C}, & c = 0. \end{cases}$$

$m_A$  heißt *Möbius-Transformation*. Offensichtlich ist  $m_A \in H(D_A)$ .

**Eigenschaften:** Sei  $A$  wie oben und  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} \in M_{22}(\mathbb{C})$  mit  $\det \tilde{A} \neq 0$ .

(a) Es gilt

$$m_A(z) = z \quad (\forall z \in D_A) \iff A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{für ein } a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

*Beweis.* „ $\Leftarrow$ “: einsetzen! „ $\Rightarrow$ “: Für alle  $z \in D$  gilt:

$$m_A(z) = z \implies cz^2 + (d-a)z - b = 0 \quad (\forall z \in D_A)$$

$$\implies c = 0, d = a, b = 0 \implies A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}. \quad \square$$

(b) Für alle  $\alpha \in \mathbb{C}$  gilt  $m_{\alpha A} = m_A$ .

(c) Es gilt  $m_A(m_{\tilde{A}}(z)) = m_{A\tilde{A}}(z)$  (soweit alles definiert).

*Beweis.* Für passende  $z$ :

$$m_A(m_{\tilde{A}}(z)) = \frac{a \frac{\tilde{a}z + \tilde{b}}{\tilde{c}z + \tilde{d}} + b}{c \frac{\tilde{a}z + \tilde{b}}{\tilde{c}z + \tilde{d}} + d} = \frac{(a\tilde{a} + b\tilde{c})z + (a\tilde{b} + b\tilde{d})}{(c\tilde{a} + d\tilde{c})z + (c\tilde{b} + d\tilde{d})} = m_{A\tilde{A}}(z). \quad \square$$

(d) Es gilt:  $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ . Damit folgt:  $D_{A^{-1}} = \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}, & c \neq 0, \\ \mathbb{C}, & c = 0. \end{cases}$

Man zeigt leicht, dass gilt:

$$m_A(D_A) \subseteq D_{A^{-1}}, \quad (*)$$

$$m_{A^{-1}}(D_{A^{-1}}) \subseteq D_A. \quad (**)$$

Also folgt aus c):  $m_A(D_A) = D_{A^{-1}}$  (wende auf (\*\*)  $m_A$  an),  $m_{A^{-1}}(D_{A^{-1}}) = D_A$  (wende auf (\*)  $m_{A^{-1}}$  an) und  $(m_A)^{-1} = m_{A^{-1}}$ .

Insbesondere sind  $m_A: D_A \rightarrow D_{A^{-1}}$ ,  $m_{A^{-1}}: D_{A^{-1}} \rightarrow D_A$  biholomorph.

(e) Sei  $c = 0$  (also  $d \neq 0$ ). Dann ist  $m_A(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$  eine affine Abbildung, also  $m_A = T \circ S$  mit  $Tw = w + \frac{d}{a}$  (Translation) und  $Sw = \frac{a}{d}w$  (Drehstreckung). Sei nun  $c \neq 0$ . Dann gilt  $m_A = A_2 \circ J \circ A_1$ , wobei  $A_1w = cw + d$ ,  $A_2w = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c}w$  (affin) und  $Jw = \frac{1}{w}$  ( $w \neq 0$ ) (Inversion).

*Beweis.* Es gilt  $\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c} \frac{1}{cz+d} = A_2(J(A_1(z)))$ .  $\square$

Fasse jede Gerade in  $\mathbb{C}$  als verallgemeinerten Kreis über  $\infty$  auf. Also ist ein verallgemeinerter Kreis  $K$  entweder eine Gerade oder eine echte Kreislinie. Beachte:  $K$  wird durch die Angabe dreier verschiedener Punkte in  $\mathbb{C}_\infty$  eindeutig bestimmt.

(f) Jede Möbiustransformation bildet einen verallgemeinerten Kreis bijektiv auf einen verallgemeinerten Kreis ab.

*Beweis.* Nach 1.9(e) ist die Behauptung nur für Translationen  $T$ , Drehstreckungen  $S$  und die Inversion  $J$  zu zeigen. Klar:  $T$ ,  $S$  sind „verallgemeinert kreistreu“.

Zu  $J$ : Sei  $r > 0$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Dann:

$$z \in K := \partial B(z_0, r) \iff r^2 = |z - z_0|^2 = (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = |z|^2 - z_0\bar{z} - \bar{z}_0z + |z_0|^2.$$

Damit:

$$K = \{z \in \mathbb{C} : \alpha|z|^2 + c\bar{z} + \bar{c}z + \delta = 0\} \quad (*)$$

für feste  $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$ ,  $c \in \mathbb{C}$  mit  $|c|^2 > \alpha\delta$ , wobei  $z_0 = -\frac{c}{\alpha}$ ,  $r^2 = \frac{|c|^2}{\alpha^2} - \frac{\delta}{\alpha}$ , falls  $\alpha \neq 0$ .

$\rightsquigarrow$  Für  $\alpha \neq 0$  beschreibt  $(*)$  die echte Kreislinie  $\partial B(z_0, r)$ . Für  $\alpha = 0$  beschreibt  $(*)$  die Gerade  $\operatorname{Re}(\bar{c}z) = -\frac{\delta}{2}$  (Beachte:  $c \neq 0$ ). Multipliziere  $(*)$  mit  $\frac{1}{|z|^2}$ . Dann erfüllt  $w = Jz = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$  die Gleichung:

$$0 = \underbrace{\alpha}_{=: \delta'} + \underbrace{c}_{=: -\bar{c}'} w + \underbrace{\bar{c}}_{=: -c'} \bar{w} + \underbrace{\delta}_{=: \alpha'} |w|^2.$$

Weiter gilt:  $|c'|^2 - \alpha'\delta' = |c|^2 - \alpha\delta > 0$ . Wenn  $K$  durch  $(*)$  beschrieben wird, dann folgt also  $J(K) \subseteq K'$ , wobei  $K'$  ein verallgemeinerter Kreis ist. Genauso:  $J(K') \subseteq K$ . Da  $J^2 = \operatorname{id}$  folgt  $K' = J^2(K') \subseteq J(K) \implies J(K) = K'$ .  $\square$

**Definition 1.10.** Setze  $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ,  $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , wobei gelten soll:

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C} : z\infty &= \infty + z = \infty, \quad \frac{z}{\infty} = 0, \\ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : z \cdot \infty &= \infty \cdot z = \infty, \quad \frac{z}{0} = \infty. \end{aligned}$$

**Verboten:**  $0 \cdot \infty, \infty \cdot 0, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ .

Wir schreiben  $z_n \rightarrow \infty$ , wenn  $|z_n| \rightarrow +\infty$  ( $n \rightarrow +\infty$ ).

Beachte: Dieses  $\infty$  ist ein anderes als  $\pm\infty$  in  $\mathbb{R}$  aus Analysis 1.

Setze bezüglich dieser „Konvergenz“  $m_A$  „stetig“ fort durch

$$m_A(\infty) := \begin{cases} \frac{a}{c}, & c \neq 0 \\ \infty, & c = 0 \end{cases}.$$

Beachte:

$$m_A(z) = \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} \quad (z \neq 0), \quad m_A\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$$

(beachte:  $-\frac{ad}{c} + b \neq 0$ , da  $\det A \neq 0$ ).

Mit etwas Rechnung folgt:  $m_A: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  ist bijektiv mit  $(m_A)^{-1} = m_{A^{-1}}: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ .

Sei  $\mathcal{M} := \{m_A: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty \mid \det A \neq 0\}$ . Mit obigen Eigenschaften (und etwas Rechnung bezüglich  $\infty$ ) folgt:

- $\mathcal{M}$  ist eine Gruppe bezüglich der Komposition.
- $\Phi: \operatorname{GL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}$ ,  $A \mapsto m_A$  ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit  $\operatorname{Kern}\Phi = \{\alpha I \mid \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$ .

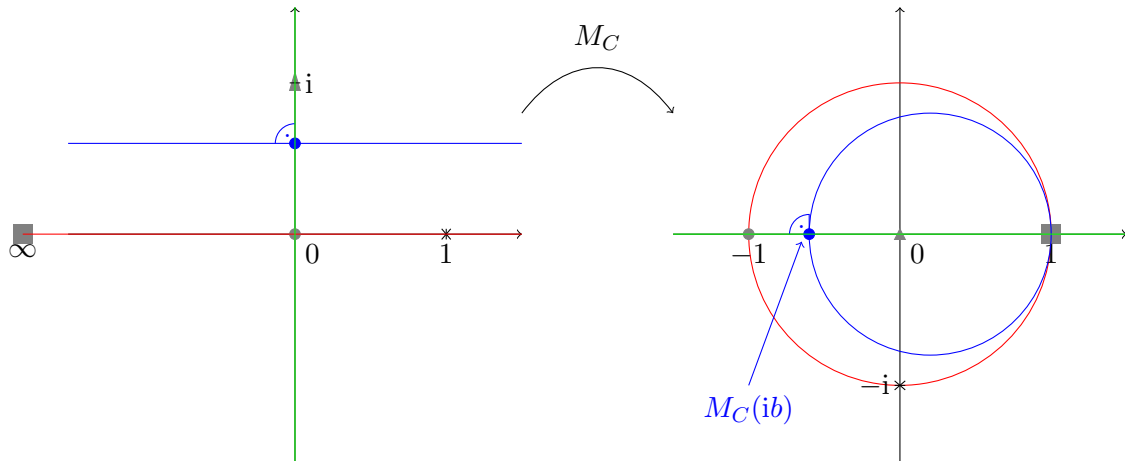
**Beispiel 1.11** (Cayley-Transformation). Sei  $C = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$  ( $\rightsquigarrow \det C = 2i \neq 0$ )  $\rightsquigarrow M_C(z) = \frac{z-i}{z+i}$ .

Dabei:  $M_C(-i) = \frac{-2}{0} = \infty$ ,  $M_C(\infty) = \frac{1 - \frac{i}{\infty}}{1 + \frac{i}{\infty}} = 1$ . Weiter:  $M_C(0) = -1$ ,  $M_C(1) = \frac{1-i}{1+i} = -i$ .

Durch  $\{0, 1, \infty\}$  läuft der verallgemeinerte Kreis  $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Nach verläuft der Bildkreis  $M_C(\mathbb{R}_\infty)$  durch die Bilder  $-1, -i, 1$ . Dies ist  $\mathbb{S} = \partial\mathbb{D}$  mit  $\mathbb{D} = B(0, 1)$ . Also  $M_C(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{S}$ .

Ferner: Für  $b \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  gilt  $M_C(ib) = \frac{b-1}{b+1}$ , insbesondere  $M_C(i) = 0$ .  $i\mathbb{R}_\infty$  verläuft durch  $0, i, \infty$ .  $\mathbb{R}_\infty$  verläuft durch die Bildpunkte  $-1, 0, 1 \implies M_C(i\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty$ . Mit Analysis 1:  $M_C(i\mathbb{R}_+) = [-1, 1)$ .





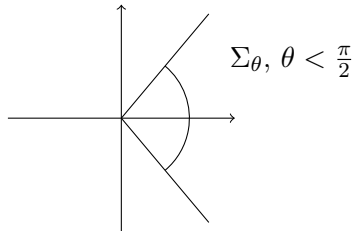
Die Gerade  $K: ib + x, x \in \mathbb{R}, (b > 0 \text{ fest})$  wird auf den verallgemeinerten Kreis  $K'$  durch  $M_C(ib) \in (-1, 1)$  und  $1 = M_C(\infty)$  abgebildet. Nach Bem. 1.6 und da  $K$  die imaginäre Achse im Winkel  $\frac{\pi}{2}$  schneidet, schneidet  $M_C(K)$  die reelle Achse ( $= M_C(i\mathbb{R}_\infty)$ ) auch senkrecht in  $M_C(ib)$ .  $\Rightarrow M_C(K)$  ist symmetrisch zur  $x$ -Achse und liegt in  $\mathbb{D}$ .  $\Rightarrow M_C(\mathbb{H}_+) \subseteq \mathbb{D}$ , mit  $\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ . Sei weiter  $w \in \mathbb{D}$ . Sei  $K$  der Kreis durch  $w$  und 1, der symmetrisch zur  $x$ -Achse ist. Sei  $a \in (-1, 1)$  der zweite Schnittpunkt von  $K$  mit der  $x$ -Achse.  $\Rightarrow$  Es gibt genau ein  $b \in (0, \infty)$  mit  $a = \frac{b-1}{b+1}$ . Also: Ist  $w \in M_C(ib + \mathbb{R}_\infty) \Rightarrow M_C(\mathbb{H}_+) = \mathbb{D} \Rightarrow M_C: \mathbb{H}_+ \rightarrow \mathbb{D}$  ist biholomorph.

### 1.2.2 Potenzen und Wurzeln

Sei  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ . Mit  $\sqrt[n]{x}$  wird stets die reelle Wurzel bezeichnet. Für  $\theta \in (0, \pi]$  definiere den (offenen) Sektor:

$$\Sigma_\theta := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \theta\}$$

Speziell:  $\Sigma_\pi = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  (geschlitzte Ebene),  $\Sigma_{\frac{\pi}{2}} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > 0\} = \mathbb{C}_+$  (rechte Halbebene)



$$z = re^{i\phi} \in \Sigma_\theta \iff r > 0, |\phi| < \theta$$

(wobei  $|\phi| \leq \pi$ )

Betrachte:  $P_n(z) = z^n, z \in \mathbb{C}$ . Dann:  $P_n(re^{i\phi}) = r^n e^{i\phi n}$ . Also bildet  $P_n$  den Halbstrahl  $\{re^{i\phi}, r > 0\}$  mit Winkel  $\phi \in (-\pi, \pi]$  bijektiv auf den Halbstrahl  $\{se^{i\phi n}, s > 0\}$  mit  $n$ -fachem Winkel (modulo  $2\pi$ ) ab.

Setze  $p_n := P_n|_{\Sigma_{\frac{\pi}{n}}}$ . Dann ist  $p_n: \Sigma_{\frac{\pi}{n}} \rightarrow \Sigma_\pi$  bijektiv.

Beachte:  $P_n$  ist schon auf  $\overline{\Sigma_{\frac{\pi}{n}}}$  nicht mehr injektiv. Beispiel für  $n = 2$ :

$$+i, -i \in \overline{\Sigma_{\frac{\pi}{2}}} = \overline{\mathbb{C}_+}, P_2(i) = -1 = P_2(-i).$$

**Definition 1.12.** Der Hauptzweig der  $n$ -ten Wurzel ist die Umkehrabbildung  $r_n = p_n^{-1}: \Sigma_\pi \rightarrow \Sigma_{\frac{\pi}{n}}$ . Man schreibt  $r_n(w) =: w^{\frac{1}{n}}$  für  $w \in \Sigma_\pi$ .

Per Definition haben wir  $r_n(z^n) = z$  ( $\forall z \in \Sigma_{\frac{\pi}{n}}$ ),  $r_n(w)^n = w$  ( $\forall w \in \Sigma_{\pi}$ ). Es gilt:

$$r_n(se^{i\psi}) = \sqrt[n]{s}e^{i\frac{\psi}{n}} \quad (\forall s > 0, |\psi| < \pi) \quad (1.5)$$

(denn:  $z = \sqrt[n]{s}e^{i\frac{\psi}{n}} \in \Sigma_{\frac{\pi}{n}}$  und  $z^n = se^{i\psi}$ )

Insbesondere:  $r_n(x) = \sqrt[n]{x}$  für  $x > 0$ .

Weiter:  $p_n'(z) = nz^{n-1} \neq 0$  ( $\forall z \in \Sigma_{\frac{\pi}{n}}$ ).

Mit Satz 1.8 sind  $r_n \in H(\Sigma_{\pi})$  und

$$\left. \begin{array}{l} p_n: \Sigma_{\frac{\pi}{n}} \rightarrow \Sigma_{\pi} \\ r_n: \Sigma_{\pi} \rightarrow \Sigma_{\frac{\pi}{n}} \end{array} \right\} \text{biholomorph}$$

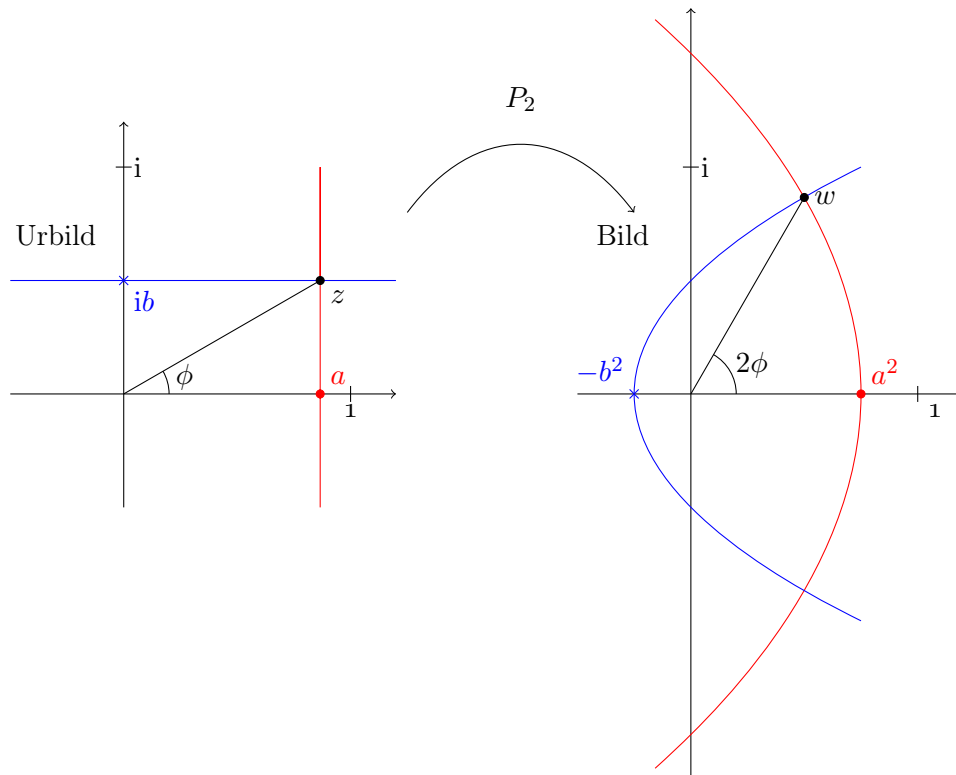
### Abbildungsverhalten der Quadratfunktion

- **Vertikale Gerade**  $\operatorname{Re} z = a$  mit einem festen  $a > 0$ . Also gilt für  $z = x + iy$ , dass  $w := z^2 = a^2 - y^2 + i \cdot 2ay$  (mit  $a = x$ ) ( $y \in \mathbb{R}$  ist Parameter). Also ist  $\operatorname{Im} w = 2ay$ , also  $y = \frac{\operatorname{Im} w}{2a}$ . Damit folgt:

$$\operatorname{Re} w = a^2 - y^2 = a^2 - \frac{(\operatorname{Im} w)^2}{4a^2} \leq a^2.$$

Also ist  $\operatorname{Im} w = \pm 2a\sqrt{a^2 - \operatorname{Re} w}$  eine nach links offene Parabel mit Scheitel  $(a^2, 0)$ .

- **Horizontale Gerade**  $\operatorname{Im} z = b$  mit einem festen  $b > 0$ . Also gilt für  $z = x + iy$ , dass  $w := z^2 = x^2 - b^2 + i \cdot 2bx$  (mit  $y = b$ ) ( $x \in \mathbb{R}$  ist Parameter). Wie oben erhält man  $\operatorname{Im} w = 2bx$ , also  $x = \frac{\operatorname{Im} w}{2b}$  und  $\operatorname{Re} w = x^2 - b^2$ . Also ist  $\operatorname{Im} w = \pm 2b\sqrt{b^2 + \operatorname{Re} w}$  eine nach rechts offene Parabel mit Scheitel  $(-b^2, 0)$ .



### Weitere Zweige der Wurzel

Sei  $\beta \in (-\pi, \pi]$ . Setze

$$E_\beta = \{te^{i\psi} \mid t > 0, \psi \in (\beta, \beta + 2\pi)\} = \mathbb{C} \setminus \{re^{i\beta} \mid r \geq 0\}.$$

Sei nun  $n = 2$ , dann ist

$$W_{\alpha,2} = \{se^{i\phi} \mid s > 0, \phi \in (\alpha, \alpha + \pi)\}$$

eine gedrehte Halbebene.

Da  $\frac{\beta}{2} < \phi < \frac{\beta}{2} + \pi \iff \beta < 2\phi < \beta + 2\pi$ , ist  $p_2^o := P_2|_{W_{\frac{\beta}{2},2}}$  eine Bijektion

$$p_2^o: W_{\frac{\beta}{2},2} \rightarrow E_\beta.$$

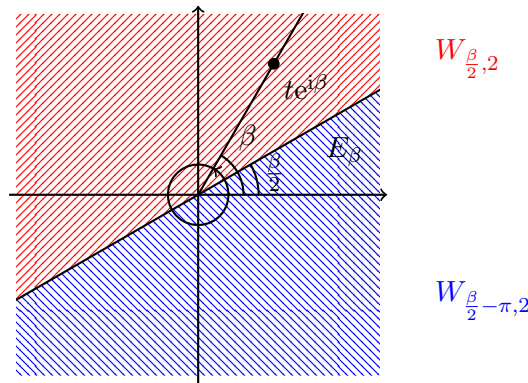
Da  $E_\beta = \{te^{i\psi} \mid t > 0, \psi \in (\beta - 2\pi, \beta)\}$ , ist ebenso  $p_2^u := P_2|_{W_{\frac{\beta}{2}-\pi,2}}$  eine Bijektion

$$p_2^u: W_{\frac{\beta}{2}-\pi,2} \rightarrow E_\beta.$$

Also erhalten wir für jedes  $\beta \in (-\pi, \pi]$  genau zwei Zweige der Wurzel

$$r_2^o = (p_2^o)^{-1}: E_\beta \rightarrow W_{\frac{\beta}{2},2},$$

$$r_2^u = (p_2^u)^{-1}: E_\beta \rightarrow W_{\frac{\beta}{2}-\pi,2}.$$



**Eigenschaften:** Sei  $t > 0$ ,  $\psi \in (\beta, \beta + 2\pi)$ ,  $z = te^{i\psi}$ . Es gilt

- $r_2^o(te^{i\psi}) = \sqrt{t}e^{i\frac{\psi}{2}} =: w^o$

Denn:  $(w^o)^2 = \left(\sqrt{t}e^{i\frac{\psi}{2}}\right)^2 = te^{i\psi} = z$  und  $\frac{\psi}{2} \in (\frac{\beta}{2}, \frac{\beta}{2} + \pi)$ , also  $w^o \in W_{\frac{\beta}{2},2}$ .

- $r_2^u(te^{i\psi}) = \sqrt{t}e^{i\frac{\psi}{2}}e^{-i\pi} =: w^u$

Denn:  $(w^u)^2 = \left(\sqrt{t}e^{i\frac{\psi}{2}}e^{-i\pi}\right)^2 = te^{i\psi}e^{-2\pi i} = z$  und  $\frac{\psi}{2} - \pi \in (\frac{\beta}{2} - \pi, \frac{\beta}{2})$ , also  $w^u \in W_{\frac{\beta}{2}-\pi,2}$ .

**Beispiel.** Sei  $\beta = \frac{\pi}{4}$ . Gefordert ist also im Urbild der Wurzel, dass  $\psi \in (\frac{\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{4})$ , sowie  $t > 0$ .

Sei  $\psi = \pi$ ,  $t = 1$ , also  $z = e^{i\pi} = -1$ . Dann  $r_2^o(-1) = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ ,  $r_2^u(-1) = e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-i\pi} = -i$ .

Sei  $\psi = 2\pi$ ,  $z = t = te^{2\pi i} > 0$ . Dann  $r_2^o(t) = \sqrt{t}e^{i\pi} = -\sqrt{t}$ ,  $r_2^u(t) = \sqrt{t}e^{i\pi}e^{-i\pi} = \sqrt{t}$ .

Entsprechend erhält man für jedes  $\beta \in (-\pi, \pi]$  genau  $n$  Zweige der  $n$ -ten Wurzel (mit jeweils passenden  $\alpha$ !).

### 1.2.3 Exponentialfunktion und Logarithmus

Aus Analysis 1 haben wir: Seien  $z, w \in \mathbb{C}$ ,  $z = x + iy$ . Dann gelten:

$$\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w), \quad \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)} \neq 0 \quad (1.6)$$

$$e^z = \exp(z) = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (x, y \in \mathbb{R}!) \quad (1.7)$$

$$\exp(z) = \exp(z + 2\pi i) \quad (\exp \text{ ist } 2\pi i\text{-periodisch}) \quad (1.8)$$

$$e^z = 1 \iff z = 2\pi i k \text{ f\"ur ein } k \in \mathbb{Z} \quad (1.9)$$

Mit (1.7) folgt:

- **Horizontale Gerade**  $y = \operatorname{Im} z = b$  ( $b \in \mathbb{R}$  fest). Die Exponentialfunktion liefert dann einen Ursprungsstrahl  $e^x(\cos b + i \sin b)$ , wobei  $x \in \mathbb{R}$  ein Parameter ist. Hierbei ist  $\exp$  bijektiv, da das reelle  $\exp$  bijektiv ist.
- **Vertikale Gerade**  $x = \operatorname{Re} z = a$  ( $a \in \mathbb{R}$  fest). Die Exponentialfunktion bildet diese Gerade ab auf den Kreis  $\partial B(0, e^a)$  (lasse in (1.7)  $y \in \mathbb{R}$  laufen). Dies ist surjektiv, aber nicht injektiv.

Definiere den vertikalen Streifen  $S_r(a_1, a_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \in (a_1, a_2)\}$  (mit  $a_1 < a_2$ ,  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ) und den horizontalen Streifen  $S_i(b_1, b_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \in (b_1, b_2)\}$  (wobei  $2\pi k - \pi \leq b_1 < b_2 < 2\pi k + \pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ). Dann ist

$$\exp: S_r(a_1, a_2) \rightarrow B(0, e^{a_2}) \setminus B(0, e^{a_1})$$

surjektiv, aber nicht injektiv, und

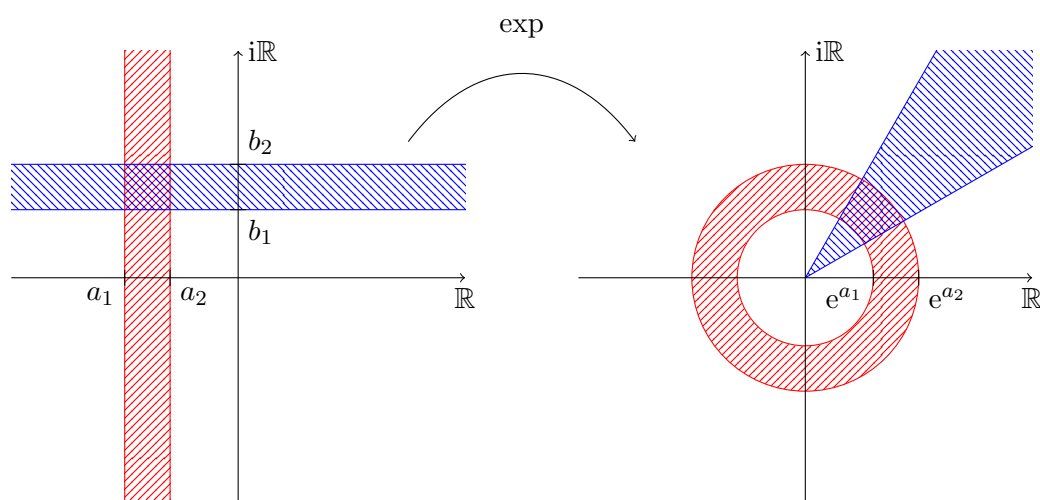
$$\exp: S_i(b_1, b_2) \rightarrow \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \arg z \in (\theta_1, \theta_2)\}$$

bijektiv (wobei  $\theta_j = \arg(\cos b_j + i \sin b_j)$  für  $j = 1, 2$ ).

Sei speziell  $S_i = S_i(-\pi, \pi)$ . Wegen  $\cos b_j + i \sin b_j = 1$ ,  $\theta_1 = -\pi$ ,  $\theta_2 = \pi$ , ist dann

$$\exp|_{S_i}: S_i \rightarrow \Sigma_\pi$$

bijektiv.



**Definition 1.13.** Der *Hauptzweig des Logarithmus* ist

$$\log := (\exp|_{S_i})^{-1} : \Sigma_\pi \rightarrow S_i.$$

**Bemerkung.**  $\ln$  bezeichnet stets den reellen Logarithmus.  $\exp|_{S_i+i\alpha}$  liefert andere Zweige des Logarithmus auf passenden  $E_\alpha$ .

Per Definition gelten

$$\begin{aligned} \log(\exp(z)) &= z \quad (\forall z \in S_i), \\ \exp(\log(z)) &= z \quad (\forall z \in \Sigma_\pi). \end{aligned}$$

Da für alle  $z$  gilt  $\exp'(z) = \exp(z) \neq 0$ , liefert Satz 1.8, dass

$$\exp: S_i \rightarrow \Sigma_\pi, \quad \log: \Sigma_\pi \rightarrow S_i$$

biholomorph sind, und es existiert die Ableitung

$$\log'(w) = \frac{1}{\exp'(z)} = \frac{1}{\exp(z)} = \frac{1}{w}$$

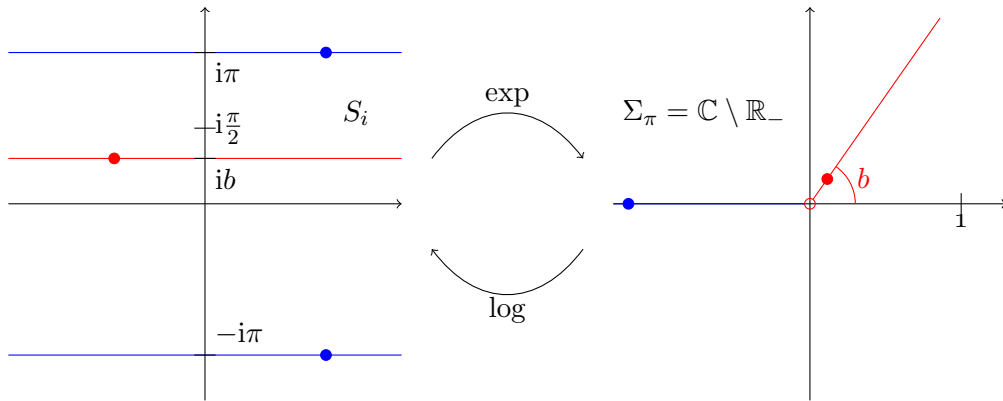
für alle  $w = e^z \in \Sigma_\pi$ , wobei  $z \in S_i$ .

Für  $w = re^{i\phi}$  mit  $r > 0$ ,  $\phi \in (-\pi, \pi)$  gilt

$$\log(re^{i\phi}) = \ln(r) + i\phi, \quad (1.10)$$

denn  $\exp(\ln(r) + i\phi) \stackrel{(1.7)}{=} re^{i\phi}$  und  $\ln(r) + i\phi \in S_i$ .

**Beispiel.**  $\log(r) = \ln(r)$ ,  $\log(i) = \log(e^{i\frac{\pi}{2}}) = i\frac{\pi}{2}$ .



**wobei:**  $e^{x+i\pi} = e^x e^{i\pi} = -e^x$ ,  $e^{x-i\pi} = e^x e^{-i\pi} = -e^x$ ,  $e^{x+ib} = e^x e^{ib}$  für  $x \in \mathbb{R}$ ,  $b \in (-\pi, \pi)$  und es gilt:

$$\log re^{ib} = \ln(r) + ib \quad (1.11)$$

wobei  $r > 0$  und  $b \in (-\pi, \pi)$ , also  $re^{ib} \in \Sigma_\pi$ .

**Vorsicht:** Logarithmusgesetz gilt in  $\mathbb{C}$  nur eingeschränkt. Beispiel: Seien  $\phi, \psi \in (-\pi, \pi)$ ,  $\phi + \psi > \pi \implies \phi + \psi - 2\pi \in (-\pi, \pi)$ . Damit:

$$\log(e^{i\phi}e^{i\psi}) = \log e^{i(\phi+\psi-2\pi)} \stackrel{(1.11)}{=} i(\phi + \psi - 2\pi) \neq i\phi + i\psi \stackrel{(1.11)}{=} \log(e^{i\phi}) + \log(e^{i\psi}).$$

**Definition 1.14.** Seien  $z = re^{i\phi} \in \Sigma_\pi$ ,  $r > 0$ ,  $\phi \in (-\pi, \pi)$ ,  $w = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ . Setze

$$z^w := \exp(w \log z) \stackrel{(1.11)}{=} \exp((x + iy)(\ln(r) + i\phi)) = \underbrace{e^{x \ln r}}_{=|z|^x} e^{-y\phi} e^{i(x\phi + y \ln(r))}.$$

**Beispiel.**  $i^i \rightsquigarrow r = 1$ ,  $\phi = \frac{\pi}{2}$ ,  $x = 0$ ,  $y = 1 \implies i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$ .

**Bemerkung 1.15.** Seien  $z, w$  wie in Definition 1.14,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $w_k = x_k + iy_k$  ( $k = 1, 2$ ),  $x_k, y_k \in \mathbb{R}$ . Dann:

$$(a) \quad z^n \stackrel{1.14}{=} \exp(n \log z) \stackrel{(1.6)}{=} \exp(\log z) \cdots \exp(\log z) \stackrel{1.14}{=} \underbrace{z \cdots z}_{n\text{-fach}} \stackrel{\text{alte Def.}}{=} z^n.$$

$$\bullet \quad z^0 = \exp(0 \log z) = 1.$$

$$\bullet \quad z^{-1} \stackrel{1.14}{=} \exp(-\log z) \stackrel{(1.6)}{=} \frac{1}{\exp(\log z)} = \frac{1}{z}.$$

$\implies$  Def. 1.14 passt zu ganzen Exponenten.

$$(b) \quad z^{w_1+w_2} \stackrel{1.14}{=} \exp((w_1 + w_2) \log z) \stackrel{(1.6)}{=} \exp(w_1 \log z) \cdot \exp(w_2 \log z) \stackrel{1.14}{=} z^{w_1} z^{w_2}$$

$$\implies z = z^{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}} = \underbrace{z^{\frac{1}{n}} \cdots z^{\frac{1}{n}}}_{n\text{-fach}} = (z^{\frac{1}{n}})^n.$$

$\implies$  Für  $w = \frac{1}{n}$  stimmen Definition 1.14 und 1.12 überein.

$$(c) \quad \frac{\partial}{\partial z} z^w = \frac{\partial}{\partial z} \exp(w \log z) = \exp(w \log z) \frac{w}{z} \stackrel{(b)}{=} w z^{w-1},$$

$$\frac{\partial}{\partial w} z^w = \frac{\partial}{\partial w} \exp(w \log z) = \log(z) z^w.$$

$$(d) \quad |z^w| \stackrel{1.14}{=} |z|^{\operatorname{Re} w} e^{-\operatorname{Im}(w) \arg(z)} \leq |z|^{\operatorname{Re} w} e^{\pi |\operatorname{Im} w|}.$$

### 1.2.4 Sinus und Kosinus

Seien  $z, w \in \mathbb{C}$ ,  $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) Aus den Reihendarstellungen folgen (Analysis 1):

$$\sin(-z) = -\sin(z), \quad \cos(-z) = \cos(z) \tag{1.12}$$

$$\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z), \quad \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \tag{1.13}$$

$$\text{mit (1.12):} \quad \cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \tag{1.14}$$

$$\stackrel{(1.7)}{\implies} \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{ix}e^{-y} + e^{ix}e^y) = \frac{1}{2}e^{-y}(\cos x + i \sin x) + \frac{1}{2}e^y(\cos x - i \sin x)$$

$$= \cos(x) \cosh(y) + i \sin(x) \sinh(y) \tag{1.15}$$

$$\text{wobei } \cosh(y) = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}), \quad \sinh(y) = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$$

$$\text{Genauso: } \sin z = \sin(x) \cosh(y) + i \cos(x) \sinh(y) \tag{1.16}$$

$\leadsto$   $\sin, \cos$  sind in imaginärer Richtung unbeschränkt.

Aus (1.14) folgt ferner (Analysis 1):

$$\cos(z) - \cos(w) = -2 \sin\left(\frac{z+w}{2}\right) \sin\left(\frac{z-w}{2}\right) \quad (1.17)$$

Weiter gilt mit (1.14) und (1.6):  $\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \left( e^{iz} \underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}}}_{=i} + e^{-iz} \underbrace{e^{-i\frac{\pi}{2}}}_{=-i} \right) = -\sin(z)$ .

Genauso:  $\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z$ .

$$\implies \cos(z + 2\pi) = \cos(z), \quad \sin(z + 2\pi) = \sin(z).$$

**Nullstellen:**  $\sin(z) = 0 \xLeftrightarrow{(1.14)} e^{iz} = e^{-iz} \xLeftrightarrow{(1.7)} e^{-y}(\cos x + i \sin x) = e^y(\cos x - i \sin x)$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \text{Imaginärteil: } \sin x = 0 \text{ (da } e^y \neq -e^{-y}) \\ \text{Realteil: } \cos x = 0 \text{ oder } e^y = e^{-y} \text{ (} \iff y = 0 \text{)} \end{array} \right\} \iff z = k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}.$$

Damit:  $\cos(z) = 0 \iff z = k\pi + \frac{\pi}{2}$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Zusammengefasst:  $\sin, \cos$  haben auf  $\mathbb{C}$  nur die reellen Nullstellen und Perioden.* (1.18)

*Wenn der reelle  $\sin$  bzw.  $\cos$  auf  $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$  injektiv ist, dann ist der komplexe  $\sin$  bzw.  $\cos$  auf  $S_r(a, b)$  injektiv.* (1.19)

*Beweis.* (für  $\cos$ ): Nach Voraussetzung muss  $\cos$  auf  $(a, b)$  strikt monoton sein.

$\implies (a, b) \subseteq (k\pi, (k+1)\pi)$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ .

Seien also  $z, w \in S_r(a, b)$  (wobei  $z \neq w$ )  $\implies z + w, z - w \neq 2j\pi$  ( $\forall j \in \mathbb{Z}$ )

$$\xRightarrow{(1.11)} \cos z - \cos w \neq 0. \quad \square$$

$\implies \cos$  ist auf  $S_r(0, \pi)$  injektiv,  $\sin$  ist auf  $S_r(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  injektiv.

**Bild von  $\cos$  auf  $S_r(0, \pi)$ :**  $S_r$ : Horizontale Gerade:  $z = x + ib$  mit  $x \in \mathbb{R}$  und festem  $b \in \mathbb{R}$ . Mit (1.15):

$$\cos(t) = \cosh(b) \cos(x) + i \sinh(b) \sin(x)$$

$\implies$  Bild der Geraden ist eine Ellipse  $E(b)$  mit Scheiteln  $(\pm \cosh(b), 0)$  und  $(0, \pm \sinh(b))$ .

Für  $x \in (0, \pi)$  erhalten wir für  $b > 0$  den oberen Bogen von  $E(b)$ , den unteren Bogen für  $b < 0$ . Da  $x \neq 0, \pi$  sind diese Bogen ohne die Endpunkte:

$$(\pm \underbrace{\cosh(b)}_{\geq 1}, 0) \implies \cos(S_r) \subseteq D := \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, \infty)).$$

Klar:  $\cos((0, \pi)) = (-1, 1)$ . Sei  $w \in D \setminus (-1, 1)$ , also  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , da hier  $w = u + iv$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Suche  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  mit

$$w \in E(b) \iff f(b) := \frac{u^2}{\cosh^2(b)} + \frac{v^2}{\sinh^2(b)} \stackrel{!}{=} 1.$$

So ein  $b$  existiert, da  $f$  stetig ist (ZWS):  $f(b) \rightarrow 0$  für  $b \rightarrow \pm\infty$ ,  $f(b) \rightarrow \pm\infty$  für  $b \rightarrow 0$ , da  $v \neq 0$ .

$\implies \cos: S_r \rightarrow D$  bijektiv  $\implies$  haben Hauptzweig des Arcuscosinus:

$$\arccos: D \rightarrow S_r, \quad \arccos = (\cos|_{S_r})^{-1}.$$

Da  $\cos'(z) = -\sin(z) \neq 0 \ \forall z \in S_r$  sind

$$\cos: S_r \rightarrow D, \quad \arccos: D \rightarrow S_r$$

biholomorph. Mit Verschiebung:  $\sin: S_r(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow D$  ist biholomorph mit Inversem  $\arcsin$ .



## 2 Der Integralsatz von Cauchy

### 2.1 Das komplexe Kurvenintegral

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stückweise stetig (d.h. für alle  $t \in [a, b]$  existieren die rechts- und linksseitigen Grenzwerte und diese sind bis auf endlich viele  $t_k \in [a, b]$  ( $k = 1, \dots, m$ ) gleich).

$\leadsto f$  hat endlich viele (oder keine) Sprungstellen.

$\implies \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f$  sind beschränkt und messbar.

$$\implies \exists \int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b f \, dt := \int_a^b \operatorname{Re} f(t) \, dt + i \int_a^b \operatorname{Im} f(t) \, dt.$$

Setze  $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| \, dt$ .

**Eigenschaften:** Es seien  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stückweise stetig,  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Dann gelten die folgenden Aussagen (vgl. Analysis 3):

$$(a) \operatorname{Re} \int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b \operatorname{Re} f(t) \, dt, \operatorname{Im} \int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b \operatorname{Im} f(t) \, dt, \overline{\int_a^b f(t) \, dt} = \int_a^b \overline{f(t)} \, dt$$

(folgt direkt aus der Definition)

$$(b) \left| \int_a^b f(t) \, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| \, dt \leq (b-a) \|f\|_\infty \quad (\text{zum Beweis: setze } h = e^{-i\varphi} f)$$

$$(c) \int_a^b (\alpha f + \beta g)(t) \, dt = \alpha \int_a^b f(t) \, dt + \beta \int_a^b g(t) \, dt, \int_a^c f(t) \, dt + \int_c^b f(t) \, dt = \int_a^b f(t) \, dt$$

*Beweis.* Für  $\alpha = \gamma + i\delta$ ,  $g = 0$ ,  $u = \operatorname{Re} f$ ,  $v = \operatorname{Im} f$  folgt

$$\begin{aligned} \int_a^b \alpha f(t) \, dt &= \int_a^b (\gamma u(t) - \delta v(t)) \, dt + i \int_a^b (\delta u(t) + \gamma v(t)) \, dt \\ &= \gamma \int_a^b u(t) \, dt - \delta \int_a^b v(t) \, dt + i\delta \int_a^b u(t) \, dt + i\gamma \int_a^b v(t) \, dt \\ &= (\gamma + i\delta) \int_a^b (u(t) + iv(t)) \, dt \\ &= \alpha \int_a^b f(t) \, dt. \end{aligned}$$

□

(d) Seien  $f, f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stückweise stetig,  $f_n \rightarrow f$  gleichmäßig ( $n \rightarrow \infty$ ). Dann gilt

$$\left| \int_a^b f(t) \, dt - \int_a^b f_n(t) \, dt \right| \leq (b-a) \|f - f_n\|_\infty \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Eine Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *differenzierbar* in  $t_0 \in [a, b]$ , wenn der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} =: f'(t_0)$$

existiert. Dies ist genau dann der Fall, wenn  $u = \operatorname{Re} f$  und  $v = \operatorname{Im} f$  bei  $t_0$  differenzierbar sind. Dann gilt  $f'(t_0) = u'(t_0) + i v'(t_0)$ . Wenn  $f$  bei allen  $t \in [a, b]$  differenzierbar ist und die Ableitung  $f': [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig ist, so schreiben wir  $f \in C^1([a, b], \mathbb{C})$ . In diesem Fall gilt

$$\int_a^b f'(t) \, dt = \int_a^b u'(t) \, dt + i \int_a^b v'(t) \, dt = u(t)|_a^b + i v(t)|_a^b = f(b) - f(a). \quad (2.1)$$

Genauso zeigt man: Falls  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig ist, so existiert

$$\frac{d}{dt} \int_a^t g(s) \, ds = g(t) \quad (2.2)$$

für jedes  $t \in [a, b]$ .

Seien  $f \in C^1([a, b], \mathbb{C})$  und  $\phi \in C^1([\alpha, \beta])$  mit  $\phi([\alpha, \beta]) \subseteq [a, b]$ . Dann gilt die Substitutionsregel

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t) \, dt = \int_a^b f(\phi(s)) \phi'(s) \, ds \quad (2.3)$$

(Beweis wie im reellen Fall).

**Beispiel 2.1.** Es gilt  $\int_a^b e^{zt} \, dt = \int_a^b \left( \frac{1}{z} e^{zt} \right)' \, dt = \frac{1}{z} e^{zt} \Big|_a^b = \frac{1}{z} (e^{zb} - e^{za})$  für jedes  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

**Definition 2.2.** Sei  $\gamma \in C([a, b], \mathbb{C})$ . Dann heißt  $\Gamma = \gamma([a, b])$  *stetige Kurve* oder *Weg* von  $\gamma(a)$  nach  $\gamma(b)$  mit Parametrisierung  $\gamma$ . Die Kurve heißt *geschlossen*, wenn  $\gamma(a) = \gamma(b)$  und *einfach*, wenn  $\gamma$  auf  $[a, b]$  injektiv ist. Die Kurve  $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$  heißt *stückweise  $C^1$* , wenn  $\gamma \in C([a, b], \mathbb{C})$  und es Zahlen  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$  gibt, sodass die Einschränkung  $\gamma_k$  von  $\gamma$  auf  $[t_{k-1}, t_k]$  stetig differenzierbar für jedes  $k = 1, \dots, m$  ist. Wir setzen dann  $\gamma'(t) = \gamma'_k(t)$  für  $t \in [t_{k-1}, t_k]$  und  $k \in \{1, \dots, m\}$ ,  $\gamma'(b) = \gamma'_m(b)$ . Wenn zusätzlich jedes  $\gamma_k$  eine affine Funktion ist, so heißt  $\Gamma$  *Streckenweg*.

Im Folgenden bezeichnet  $\Gamma$  stets eine Kurve, die stückweise  $C^1$  ist, und  $\gamma$  ist eine Parametrisierung (soweit nichts anderes gesagt wird).

**Beispiel 2.3.** (a) Die einfach im Gegenuhrzeigersinn durchlaufene Kreislinie  $\Gamma = \partial B(c, r)$  hat z.B. die Parametrisierungen  $\gamma = c + re^{it}$  mit  $t \in [0, 2\pi]$  und  $\gamma_1 = c + re^{2it}$  mit  $t \in [0, \pi]$ . Sie ist einfach und geschlossen.

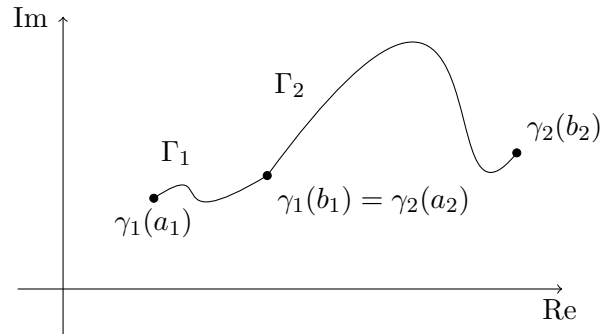
(b) Sei  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$ . Die  $m$ -fach durchlaufene Kreislinie  $\Gamma = \partial B(c, r)$  hat die Parametrisierung  $\gamma = c + re^{it}$  mit  $t \in [0, 2\pi m]$ . Sie ist geschlossen, aber nicht einfach.

(c) Die Strecke  $\overrightarrow{wz}$  von  $w$  nach  $z \neq w$  hat die Parametrisierung  $\gamma(t) = w + t(z - w)$  mit  $t \in [0, 1]$ . Sie ist einfach, aber nicht geschlossen.

(d) Seien  $\Gamma_1, \Gamma_2$  stückweise  $C^1$ -Kurven mit Parametrisierungen  $\gamma_j \in C([a_j, b_j], \mathbb{C})$  ( $j = 1, 2$ ) und  $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$ . Dann hat der Summenweg  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$  die Parametrisierung

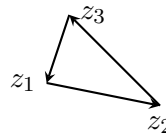
$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & a_1 \leq t \leq b_1, \\ \gamma_2(t - b_1 + a_2), & b_1 \leq t \leq b_1 + b_2 - a_2. \end{cases}$$

Er ist auch stückweise  $C^1$  und verläuft von  $\gamma_1(a_1)$  nach  $\gamma_2(b_2)$ .

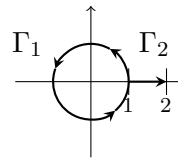


Beispiel:

- Dreiecksweg  $\overrightarrow{z_1 z_2} + \overrightarrow{z_2 z_3} + \overrightarrow{z_3 z_1}$ :



- Kreis mit Griff  $\partial B(c, r) \cup [1, 2]$ :



- (e) Der Rückwärtsweg  $-\Gamma$  wird durch  $\hat{\gamma}(t) = \gamma(b - t + a)$  mit  $t \in [a, b]$  parametrisiert. Dabei sind  $\hat{\gamma}(a) = \gamma(b)$  und  $\hat{\gamma}(b) = \gamma(a)$ . Er ist auch stückweise  $C^1$  und verläuft von  $\gamma(b)$  nach  $\gamma(a)$ .

**Definition 2.4.** Seien  $\Gamma$  eine stückweise  $C^1$ -Kurve mit Parametrisierung  $\gamma \in C([a, b], \mathbb{C})$  und  $f \in C(\Gamma, \mathbb{C})$ . Dann heißt

$$\int_{\Gamma} f \, dz = \int_{\Gamma} f(z) \, dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt$$

komplexes Kurvenintegral.

**Bemerkung 2.5.** Aus den Eigenschaften des komplexen Integrals folgt sofort für  $f, g \in C(\Gamma, \mathbb{C})$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ :

- (a)  $\int_{\Gamma} (\alpha f + \beta g)(z) \, dz = \alpha \int_{\Gamma} f(z) \, dz + \beta \int_{\Gamma} g(z) \, dz.$
- (b)  $\left| \int_{\Gamma} f(z) \, dz \right| \leq l(\gamma) \max_{z \in \Gamma} |f(z)|$ , wobei  $l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt$  die Kurvenlänge von  $\Gamma$  ist (vgl. Analysis 2/3).
- (c) Sei  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$  wie in Bsp. 2.3(d). Dann gilt

$$\int_{\Gamma} f(z) \, dz = \int_{\Gamma_1} f(z) \, dz + \int_{\Gamma_2} f(z) \, dz.$$

Speziell folgt mit den Bezeichnungen aus Def. 2.2

$$\int_{\Gamma} f(z) \, dz = \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt.$$

(d) Für den Rückwärtsweg  $-\Gamma$  aus Bsp. 2.3(e) gilt

$$\begin{aligned}
 \int_{-\Gamma} f(z) \, dz &= \int_a^b f(\hat{\gamma}(t)) \hat{\gamma}'(t) \, dt \\
 &= - \int_a^b f(\gamma(b-t+a)) \gamma'(b-t+a) \, dt \\
 &= \int_b^a f(\gamma(s)) \gamma'(s) \, ds \quad (\text{Substituiere } s = b-t+a) \\
 &= - \int_a^b f(\gamma(s)) \gamma'(s) \, ds \\
 &= - \int_{\Gamma} f(z) \, dz.
 \end{aligned}$$

(e) Das Kurvenintegral ist invariant unter orientierungserhaltenden Transformationen  $\phi$  von  $\Gamma$ . Das heißt: Wenn  $\phi \in C([a, b])$  strikt wachsend und auf jedem der Teilintervalle  $[t_{k-1}, t_k]$  aus Definition 2.2 stetig differenzierbar ist, dann ist  $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \phi^{-1}$  auf  $[\alpha, \beta] := \phi([a, b])$  stückweise  $C^1$ ,  $\tilde{\gamma}([a, b]) = \gamma([a, b]) = \Gamma$  und es gilt:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} f \, dz &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\tilde{\gamma}(s)) \tilde{\gamma}'(s) \, ds = \sum_{k=1}^m \int_{\phi(t_{k-1})}^{\phi(t_k)} f(\gamma(\phi^{-1}(s))) \gamma'(\phi^{-1}(s)) \, d(\phi^{-1}(s)) \\
 &\stackrel{(2.2)}{=} \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt = \int_{\Gamma} f(z) \, dz.
 \end{aligned}$$

(f) Seien  $\gamma = \alpha + i\beta$ ,  $f = u + iv$ ,  $\alpha, \beta, u, v \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} f \, dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt = \int_a^b (u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t))) (\alpha'(t) + i\beta'(t)) \, dt \\
 &= \int_a^b u(\gamma(t)) \alpha'(t) - v(\gamma(t)) \beta'(t) \, dt + i \int_a^b u(\gamma(t)) \beta'(t) + v(\gamma(t)) \alpha'(t) \, dt \\
 &= \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot d(x, y) + i \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot d(x, y).
 \end{aligned}$$

**Beispiel 2.6.** (a) Sei  $\Gamma = \partial B(c, r)$   $m$ -fach durchlaufen,  $c \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$ . Für  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$  gilt mit  $\gamma(t) = c + re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi m]$ :

$$\int_{\Gamma} (z - c)^k \, dz = \int_0^{2\pi m} (c + re^{it} - c)^k (c + re^{it})' \, dt = ir^{k+1} \int_0^{2\pi m} e^{(k+1)it} \, dt.$$

Mit Beispiel 2.1 erhalten wir:

$$\int_{\Gamma} (z - c)^k \, dz = \frac{r^{k+1}}{k+1} (e^{2\pi m(k+1)i} - 1) = 0.$$

Nun sei  $k = -1$ . Dann gilt:

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z - c} = \int_0^{2\pi m} \frac{1}{re^{it}} rie^{it} \, dt = \int_0^{2\pi m} i \, dt = 2\pi im.$$

(b) Seien  $\Gamma = \overrightarrow{0w}$  und  $w \in \Sigma_{\pi}$ . Mit  $\gamma(t) = tw$ ,  $t \in [0, 1]$ , gilt:

$$\int_{\Gamma} z^{\frac{1}{2}} \, dz = \int_0^1 \sqrt{t} w^{\frac{1}{2}} w \, dt = w^{\frac{3}{2}} \int_0^1 \sqrt{t} \, dt = \frac{2}{3} w^{\frac{3}{2}}.$$

**Satz 2.7.** Seien  $\Gamma$  stückweise  $C^1$ ,  $f_n \in C(\Gamma, \mathbb{C})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen.

(a) Wenn  $f_n \rightarrow f$  gleichmäßig für  $n \rightarrow \infty$ , dann folgt

$$\left| \int_{\Gamma} f_n(z) \, dz - \int_{\Gamma} f(z) \, dz \right| \leq l(\gamma) \|f_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0$$

für  $n \rightarrow \infty$ .

(b) Sei  $h \in C(D \times \Gamma, \mathbb{C})$ . Dann ist die Abbildung

$$z \mapsto \int_{\Gamma} h(z, w) \, dw$$

von  $D$  nach  $\mathbb{C}$  stetig.

(c) Wenn  $\sum_{n \geq 1} f_n(z)$  gleichmäßig in  $z \in \Gamma$  konvergiert, dann gilt:

$$\int_{\Gamma} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \, dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma} f_n(z) \, dz.$$

(d) Sei  $h \in C(D \times \Gamma, \mathbb{C})$ , sodass für jedes  $w \in \Gamma$  die Abbildung  $z \mapsto h(z, w)$  von  $D$  nach  $\mathbb{C}$  differenzierbar ist und  $\frac{\partial}{\partial z} h \in C(D \times \Gamma, \mathbb{C})$ . Dann existiert

$$\frac{d}{dz} \int_{\Gamma} h(z, w) \, dw = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial z} h(z, w) \, dw.$$

*Beweis.* (a) 
$$\left| \int_{\Gamma} f_n(z) \, dz - \int_{\Gamma} f(z) \, dz \right| = \left| \int_a^b (f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t))) \gamma'(t) \, dt \right|$$
$$\leq \int_a^b |f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| \, dt \leq \|f - f_n\|_{\infty} \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt = \|f - f_n\|_{\infty} l(\gamma) \rightarrow 0$$

für  $n \rightarrow \infty$ .

(b) Seien  $z_n, z_0 \in D$  mit  $z_n \rightarrow z_0$ . Sei  $r > 0$ , so dass  $B = \overline{B}(z_0, r) \subseteq D$ . Für alle genügend großen  $n \in \mathbb{N}$  gilt dann  $z_n \in B$ . Da  $(z, w) \mapsto h(z, w)$  auf der kompakten Menge  $B \times \Gamma$  gleichmäßig stetig ist, konvergiert  $f_n(w) = h(z_n, w)$  gleichmäßig in  $w \in \Gamma$  gegen  $f(w) := h(z_0, w)$  für  $n \rightarrow \infty$ . Mit (a) folgt die Behauptung.

(c) Folgt aus (a) mit  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$  statt  $f_n$ .

(d) Seien  $z_0 \in D$ ,  $r > 0$ ,  $z_n \in B := \overline{B}(z_0, r) \subseteq D$  mit  $z_n \neq z_0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $z_n \rightarrow z_0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Sei  $w \in \Gamma$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{h(z_n, w) - h(z_0, w)}{z_n - z_0} \right| &\stackrel{(2.1)}{=} \left| \frac{1}{z_n - z_0} \int_0^1 \frac{d}{dt} h(z_0 + t(z_n - z_0), w) \, dt \right| \\ &\stackrel{\text{KR}}{=} \left| \frac{1}{z_n - z_0} \int_0^1 \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right) (z_0 + t(z_n - z_0), w) \cdot (z_n - z_0) \, dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|z_n - z_0|} \int_0^1 \left| \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right) (z_0 + t(z_n - z_0), w) \right| \cdot |z_n - z_0| \, dt \\ &\leq \int_0^1 \left| \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right) (z_0 + t(z_n - z_0), w) \right| \, dt \leq \max_{z \in B, w \in \Gamma} \left| \frac{\partial h}{\partial z} (z, w) \right| =: c_1 < \infty. \end{aligned}$$

Weiter ist für eine Parametrisierung  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  von  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_n - z_0} \left( \int_{\Gamma} h(z_n, w) \, dw - \int_{\Gamma} h(z_0, w) \, dw \right) &= \int_{\Gamma} \frac{h(z_n, w) - h(z_0, w)}{z_n - z_0} \, dw \\ &= \int_0^1 \frac{h(z_n, \gamma(t)) - h(z_0, \gamma(t))}{z_n - z_0} \gamma'(t) \, dt. \end{aligned}$$

Es gilt für  $t \in [0, 1]$ :

$$\left| \frac{h(z_n, \gamma(t)) - h(z_0, \gamma(t))}{z_n - z_0} \cdot \gamma'(t) \right| \leq c_1 \cdot \|\gamma'\|_{\infty} \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$$

und die Funktion  $c_1 \|\gamma'\|_{\infty} \mathbb{1}_{[0,1]}$  ist auf  $[0, 1]$  integrierbar. Außerdem gilt:

$$\frac{h(z_n, \gamma(t)) - h(z_0, \gamma(t))}{z_n - z_0} \rightarrow \frac{\partial h}{\partial z}(z_0, \gamma(t))$$

für  $n \rightarrow \infty$ .

Majorisierte Konvergenz liefert die Existenz von

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n - z_0} \left( \int_{\Gamma} h(z_n, w) \, dw - \int_{\Gamma} h(z_0, w) \, dw \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \int_{\Gamma} h(\cdot, w) \, dw \right) (z_0)$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left( \int_{\Gamma} h(\cdot, w) \, dw \right) (z_0) &= \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h(z_n, \gamma(t)) - h(z_0, \gamma(t))}{z_n - z_0} \gamma'(t) \, dt \\ &= \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial z}(z_0, \gamma(t)) \gamma'(t) \, dt \\ &= \left( \int_{\Gamma} \frac{\partial h}{\partial z}(\cdot, w) \, dw \right) (z_0). \end{aligned} \quad \square$$

**Erinnerung:** Sei  $X$  ein Vektorraum. Eine Teilmenge  $M \subseteq X$  heißt *zusammenhängend*, wenn aus  $M \subseteq O_1 \cup O_2$ ,  $M \cap O_1 \neq \emptyset$ ,  $M \cap O_2 \neq \emptyset$  für alle offenen Teilmenge  $O_1, O_2 \subseteq X$  stets folgt, dass

$$M \cap O_1 \cap O_2 \neq \emptyset.$$

Eine offene und zusammenhängende Menge heißt *Gebiet*.

**Bemerkung.** Aus Analysis 2 wissen wir: Stetige Bilder zusammenhängender Mengen sind zusammenhängend. Alle zusammenhängenden Intervalle in  $\mathbb{R}$  sind zusammenhängend. Also sind stetige Kurven in  $X$  zusammenhängend. (Dabei definieren wir stetige Kurven und Streckenzüge im normierten Vektorraum genau wie in  $\mathbb{C}$ , vgl. Def. 2.2.)

**Satz 2.8.** Sei  $X$  ein normierter Vektorraum und  $M \subseteq X$ . Dann gelten:

- (a) Für alle  $x, y \in M$  gebe es eine stetige Kurve in  $M$  von  $x$  nach  $y$ . Dann ist  $M$  zusammenhängend.
- (b) Wenn  $M = D$  offen und zusammenhängend ist, dann gibt es für alle  $x, y \in D$  einen Streckenzug  $\Gamma \subseteq D$  von  $x$  nach  $y$ .

*Beweis.* (a) Seien  $O_1, O_2 \subseteq X$  offen mit  $M \subseteq O_1 \cup O_2$ ,  $M \cap O_1 \neq \emptyset$ ,  $M \cap O_2 \neq \emptyset$ . ANNAHME:  $M \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$ . Wähle ein  $x \in M \cap O_1$ ,  $y \in M \cap O_2$ . Nach Voraussetzung existiert eine stetige Kurve  $\Gamma \subseteq M$  von  $x$  nach  $y$ . Damit gilt  $\Gamma \subseteq M \subseteq O_1 \cup O_2$ ,  $x \in \Gamma \cap O_1$ , also ist  $\Gamma \cap O_1 \neq \emptyset$ . Ebenso ist  $\Gamma \cap O_2 \neq \emptyset$ . Ferner ist  $\Gamma \cap O_1 \cap O_2 \subseteq M \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset \implies \Gamma$  ist unzusammenhängend: WIDERSPRUCH zur obigen Bemerkung. Also ist  $M$  zusammenhängend.

(b) Sei  $D$  offen und zusammenhängend und  $x \in D$  beliebig. Setze

$$D(x) := O_1 := \{y \in D \mid \exists \text{ Streckenzug } \Gamma(y) \subseteq D \text{ von } x \text{ nach } y\}.$$

Dann ist  $x \in O_1 \subseteq D$ .

- Sei  $y \in O_1$ . Dann existiert ein  $r > 0$  mit  $B(y, r) \subseteq D$  (da  $D$  offen). Sei  $z \in B(y, r)$ . Dann ist  $\overrightarrow{yz} \subseteq B(y, r) \subseteq D$ . Somit ist  $\Gamma(y) + \overrightarrow{yz} \subseteq D$  ein Streckenzug von  $x$  nach  $z \implies z \in O_1 \implies B(y, r) \subseteq O_1 \implies O_1$  ist offen in  $D$ .
- Seien  $y_n \in O_1$  mit  $y_n \rightarrow y \in D$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Dann existiert ein  $r > 0$  mit  $B(y, r) \subseteq D$ . Wähle (großes)  $N$  mit  $y_N \in B(y, r) \subseteq O_1$ . Dann ist  $\Gamma(y_N) + \overrightarrow{y_N y} \subseteq D$  ein Streckenzug von  $x$  nach  $y \implies y \in O_1 \implies O_1$  ist in  $D$  abgeschlossen. Also ist  $D \setminus O_1 =: O_2$  in  $D$  offen, also auch in  $X$  offen (da  $D$  offen).

ANNAHME:  $O_2 \neq \emptyset \iff O_1 \neq D$ . Dann:  $D = O_1 \dot{\cup} O_2$ ,  $D \cap O_1 \neq \emptyset$ ,  $D \cap O_2 = O_2 \neq \emptyset$ ,  $D \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset \implies D$  ist unzusammenhängend WIDERSPRUCH zur Voraussetzung.  $\implies O_2 = \emptyset \implies O_1 = D(x) = D$ .  $\square$

**Bemerkung 2.9.** Sei  $X$  ein normierter Vektorraum,  $D \subseteq X$  offen,  $x, y \in D$ . Die Menge  $D(x)$  aus dem Beweis von Satz 2.8(b) ist in  $D$  offen und abgeschlossen (gleicher Beweis, auch wenn  $D$  nicht zusammenhängend). Satz 2.8(a) angewendet auf  $D(x)$  liefert, dass  $D(x)$  zusammenhängend ist. Ferner gilt entweder

(a)  $D(x) = D(y) \iff$  es existiert ein Streckenzug  $\Gamma \subseteq D$  von  $x$  nach  $y$

oder

(b)  $D(x) \cap D(y) = \emptyset \iff$  es existiert kein Streckenzug  $\Gamma \subseteq D$  von  $x$  nach  $y$ .

Dann heißen  $D(x)$  mit  $x \in D$  *Zusammenhangskomponenten* von  $D$ . Diese sind also entweder gleich oder disjunkt.

*Beweis.* •  $\exists w \in D(x) \cap D(y) \implies$  es gibt einen Streckenzug  $\Gamma \subseteq D$  von  $x$  nach  $y$  über  $w$ . Dies liefert „ $\Rightarrow$ “ in a), „ $\Leftarrow$ “ in b)

- Es gebe einen Streckenzug  $\Gamma \subseteq D$  von  $x$  nach  $y$ . Dann gibt es für alle  $z \in D(x)$  eine Streckenzug in  $D$  von  $y$  nach  $z$  über  $x \implies z \in D(y)$ . Dies liefert schon „ $\Rightarrow$ “ in b). Somit:  $D(x) \subseteq D(y)$ . Genauso zeigt man  $D(y) \subseteq D(x)$ . Dies liefert „ $\Leftarrow$ “ in a).  $\square$

**Satz 2.10.** Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f \in H(D)$  mit  $f' = 0$ . Dann ist  $f$  konstant.

*Beweis.* Wähle  $z_0 \in D$  fest.

(a) Sei  $z \in D$  mit  $\overrightarrow{z_0 z} \subseteq D$  und  $z \neq z_0$ . Dann:

$$0 = \int_{\overrightarrow{z_0 z}} f'(w) \, dw = \int_0^1 f'(\underbrace{z_0 + t(z - z_0)}_{=\gamma(t)})(z - z_0) \, dt = (f(z) - f(z_0))(z - z_0),$$

also ist  $f(z) = f(z_0)$ .

- (b) Sei nun  $w \in D$  beliebig. Nach Satz 2.8 gibt es einen Streckenzug  $\Gamma \subseteq D$  von  $z_0$  nach  $w$ . Aus endlicher Anwendung von (a) folgt  $f(w) = f(z_0)$ .  $\square$

**Bemerkung.** Dieser Satz ist falsch für unzusammenhängendes  $D$ .

**Definition 2.11.** Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f \in C(D, \mathbb{C})$ . Eine Funktion  $F \in H(D)$  mit  $F' = f$  heißt *Stammfunktion* von  $f$  auf  $D$ .

**Beispiel.** Polynome,  $\exp$ ,  $\sin$ ,  $\cos$  haben Stammfunktionen auf  $\mathbb{C}$ .  $f(z) = \frac{1}{z}$  hat die Stammfunktion  $\log$  auf  $\Sigma_\pi$ .

**Bemerkung 2.12.** Sei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  auf einem Gebiet  $D$ . Dann sind alle anderen Stammfunktionen von  $f$  auf  $D$  von der Form  $F + c$  für eine Konstante  $c \in \mathbb{C}$ , denn: Sei  $F_1 \in H(D)$  eine weitere Stammfunktion. Dann:  $(F - F_1)' = f - f = 0$ . Also ist  $F - F_1$  konstant nach Satz 2.8.  $\implies$  es gibt ein  $c \in \mathbb{C}$  mit  $F_1 = F + c$ .

**Satz 2.13** (vgl. Satz 3.12 Analysis 2). Seien  $D \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f \in C(D, \mathbb{C})$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a)  $f$  besitzt eine Stammfunktion  $F$ .  
 (b) Für alle Kurven  $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq D$ , die beide von einem beliebigen  $z \in D$  zu einem beliebigen  $w \in D$  laufen, gilt

$$\int_{\Gamma_1} f(z) \, dz = \int_{\Gamma_2} f(z) \, dz.$$

- (c) Für alle geschlossenen Kurven  $\Gamma \subseteq D$  gilt

$$\int_{\Gamma} f(z) \, dz = 0.$$

In diesem Fall folgt für jede Kurve  $\Gamma \subseteq D$  von  $\gamma(a)$  nach  $\gamma(b)$ , dass

$$\int_{\Gamma} f(z) \, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

*Beweis.* a)  $\implies$  c): Sei  $\Gamma \subseteq D$  eine Kurve von  $\gamma(a)$  nach  $\gamma(b)$ . Dann:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) \, dz &\stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma_k(t)) \gamma'_k(t) \, dt \stackrel{(2.1)}{=} \\ &\sum_{k=1}^m (F(\gamma_k(t_k)) - F(\gamma_k(t_{k+1}))) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \end{aligned}$$

Also gilt die letzte Behauptung im Falle der Existenz einer Stammfunktion. Wenn  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , folgt hiermit c) aus a).

- c)  $\implies$  b): Seien  $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq D$  wie in b). Dann ist  $\Gamma := \Gamma_1 + (-\Gamma_2)$  eine geschlossene Kurve von  $\gamma_1(a)$  nach  $\gamma_1(a)$  (über  $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ ) und es gilt

$$0 \stackrel{\text{c)}}{=} \int_{\Gamma} f \, dz \stackrel{\text{Bem. 2.5}}{=} \int_{\Gamma_1} f \, dz - \int_{\Gamma_2} f \, dz.$$

Daraus folgt b).



b)  $\Rightarrow$  a): Sei  $z_0 \in D$  fest,  $z \in D$  beliebig. Nach Satz 2.8 gibt es einen Streckenzug  $\Gamma(z) \subseteq D$  von  $z_0$  nach  $z$ . Setze

$$F(z) = \int_{\Gamma(z)} f(w) \, dw.$$

Wähle  $r > 0$  mit  $B(z, r) \subseteq D$ . Sei  $0 < |h| < r$ . Dann sind  $-\Gamma(z) + \Gamma(z+h)$  und  $\overrightarrow{z(z+h)}$  Kurven in  $D$  von  $z$  nach  $z+h$ . Damit:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(F(z+h) - F(z)) &\stackrel{\text{Bem. 2.5}}{=} \frac{1}{h} \int_{-\Gamma(z) + \Gamma(z+h)} f(w) \, dw \\ &\stackrel{\text{b)}}{=} \frac{1}{h} \int_{\overrightarrow{z(z+h)}} f(w) \, dw \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{1}{h} \int_0^1 f(z+th)h \, dt \\ &= \int_0^1 f(z+th) \, dt \rightarrow \int_0^1 f(z) \, dt = f(z) \quad (h \rightarrow 0) \quad (\text{nach Satz 2.7}). \quad \square \end{aligned}$$

**Beispiel 2.14.** (a) Sei  $\Gamma$  ein Weg von  $z_1$  nach  $z_2$ . Dann gilt

$$\int_{\Gamma} \cos z \, dz = \sin z_2 - \sin z_1.$$

(b) Sei  $\varepsilon \in (0, \pi)$  und  $\Gamma_\varepsilon$  eine Kurve in  $\Sigma_\pi$  von  $e^{i(-\pi+\varepsilon)}$  nach  $e^{i(\pi-\varepsilon)}$ . Dann gilt

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{dz}{z} = \log e^{i(\pi-\varepsilon)} - \log e^{i(-\pi+\varepsilon)} = i(\pi-\varepsilon) - i(-\pi+\varepsilon) = 2i(\pi-\varepsilon).$$

Ferner gilt

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} \, dt = 2\pi i \neq 0,$$

obwohl  $\mathbb{D}$  eine geschlossene Kurve ist. Also besitzt die Funktion  $f(z) = \frac{1}{z}$  keine Stammfunktion auf dem Gebiet  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

**Definition 2.15.** Sei  $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$  eine geschlossene Kurve und  $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ . Dann heißt

$$n(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w-z}$$

Windungszahl (oder Index) von  $\Gamma$  bei  $z$ .

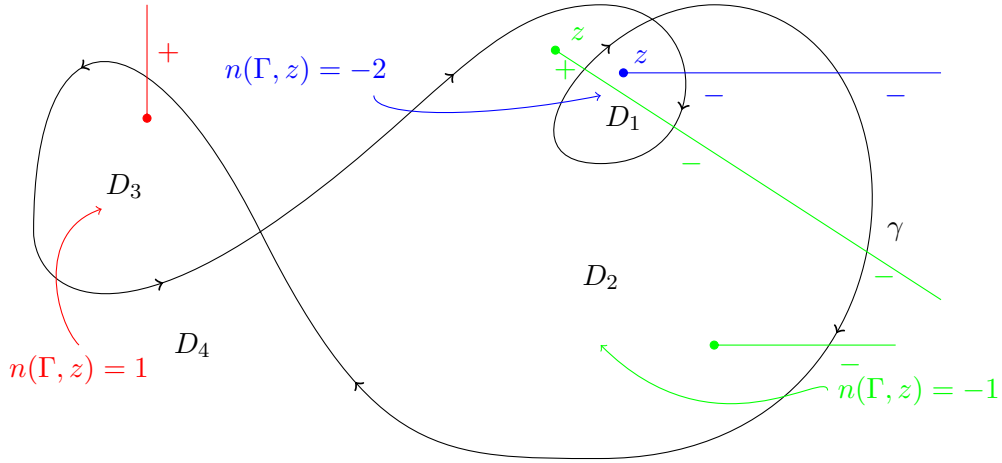
**Bemerkung.** Da  $\Gamma \subseteq B(0, r)$  für ein  $r > 0$  ist, gibt es genau eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente von  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ .

**Satz 2.16.** Seien  $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$  eine geschlossene Kurve und  $z \in D := \mathbb{C} \setminus \Gamma$ . Dann gelten:

- (a)  $n(\Gamma, z) \in \mathbb{Z}$ .
- (b)  $z \mapsto n(\Gamma, z)$  ist konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von  $D$ .
- (c) Es gilt  $n(\Gamma, z) = 0$  für alle  $z$  in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von  $D$ .
- (d)  $n(-\Gamma, z) = -n(\Gamma, z)$
- (e) Seien  $\Gamma_1, \Gamma_2$  geschlossene Kurven mit  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ , dann gilt

$$n(\Gamma, z) = n(\Gamma_1, z) + n(\Gamma_2, z).$$

**Bild:**



$D_k$  sind Zusammenhangskomponenten von  $D = \mathbb{C} \setminus \Gamma$ .

*Beweis.* d), e) folgen aus Bem. 2.5.

b) folgt aus a), denn:  $z \mapsto n(\Gamma, z)$  ist stetig auf  $D$  nach Satz 2.7. Nach Ana II ist dann  $n(\Gamma, D(z)) \subseteq \mathbb{C}$  zusammenhängend für jede Zusammenhangskomponente  $D(z)$  von  $D \ni z$  (vgl. Bem. 2.9).

Da  $n(\Gamma, D(z)) \subseteq \mathbb{Z}$  (nach a)), enthält  $n(\Gamma, D(z))$  genau einen Punkt.

c)  $|n(\Gamma, z)| \leq \frac{l(\Gamma)}{2\pi} \max_{w \in \Gamma} \frac{1}{|w - z|} \rightarrow 0, |z| \rightarrow \infty$ . Mit b) folgt daraus c).

a) Seien  $t_k$  ( $k = 0, \dots, m$ ) wie in Def. 2.2,  $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ . Setze

$$\varphi(t) = \exp \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds \quad \text{für } a = t_0 \leq t \leq t_m = b.$$

Beachte:

$$n(\Gamma, z) \in \mathbb{Z} \xLeftrightarrow{(1.10)} 1 = \exp(2\pi i \cdot n(\Gamma, z)) \stackrel{\text{Def.}}{=} \exp \int_{\Gamma} \frac{dw}{w - z} = \varphi(b).$$

Es gelten:  $\varphi(a) = 1$ ,  $\varphi \in C^1([t_{k-1}, t_k], \mathbb{C})$  und  $\varphi' = \varphi \frac{\gamma'}{\gamma - z}$ . (\*)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\varphi(t)}{\gamma(t) - z} = \frac{\varphi'(t)(\gamma(t) - z) - \varphi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t) - z)^2} \stackrel{(*)}{=} \frac{\varphi\gamma' - \varphi\gamma'}{(\gamma - z)^2} = 0$$

für  $t \in [t_{k-1}, t_k]$ ,  $k = 0, \dots, m$ .

$$\xRightarrow{\int dt} \frac{\varphi(t_k)}{\gamma(t_k) - z} = \frac{\varphi(t_{k-1})}{\gamma(t_{k-1}) - z} \quad (**)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varphi(b) &= \varphi(t_{m-1}) \frac{\gamma(b) - z}{\gamma(t_{m-1}) - z} \stackrel{(**)}{=} \varphi(t_{m-2}) \frac{\gamma(t_{m-1}) - z}{\gamma(t_{m-2}) - z} \frac{\gamma(b) - z}{\gamma(t_{m-1}) - z} \\ &= \dots = \varphi(a) \frac{\gamma(b) - z}{\gamma(a) - z} = 1, \end{aligned}$$

da  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , da  $\Gamma$  geschlossen. □

**Beispiel 2.17.** Sei  $\Gamma = \partial B(c, r)$   $m$ -fach im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen. Dann:

- $$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & n(\Gamma, z) = 0 \text{ für } z \notin \overline{B}(c, r) \text{ (Satz 2.16(c)).} \\ \text{(b)} \quad & n(\Gamma, z) \stackrel{2.16(c)}{=} n(\Gamma, c) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi m} \frac{i r e^{it}}{\underbrace{c + r e^{it}}_{=\gamma(t)} - c} dt = m, \text{ für alle } z \in B(c, r). \end{aligned}$$

**Bemerkung 2.18.** Sei  $\Gamma$  ein geschlossener Weg und  $L$  ein Halbstrahl der Form  $w = z + te^{i\varphi}$  ( $\forall t \geq 0$ ), für feste  $c \in \mathbb{C}$ ,  $\varphi \in (-\pi, \pi]$ , der  $\Gamma$  endlich oft in  $\gamma(\tau_1), \dots, \gamma(\tau_n)$  schneidet.

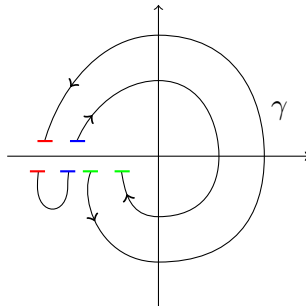
Zähle Berührungspunkte  $\tau_j$  nicht ( $\Gamma$  bleibt auf gleicher Seite von  $L$ ), zähle die anderen  $\tau_j$  mit „+1“ falls  $\Gamma$  den Strahl mit wachsendem Argument schneidet und mit „−1“ falls mit fallendem Argument. Dabei sei  $z \notin \Gamma$ . Dann ist  $n(\Gamma, z)$  die Summe der so mit  $\pm 1$  gewichteten echten Schnittpunkte (wobei „fallen“ und „wachsen“ bzgl.  $L$  gemeint ist).

*Beweis.* Nach Verschieben, Drehen und Umparametrisieren (falls nötig) von  $\Gamma$  können wir annehmen, dass  $z = 0 \notin \Gamma$ ,  $L = \mathbb{R}_-$ ,  $\tau_j \neq a, b$  ( $\forall j = 1, \dots, n$ ) gilt. Weiter sei  $\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{C})$ . Wähle  $\varepsilon > 0$ , so dass alle  $(\tau_j - \varepsilon, \tau_j + \varepsilon) \subseteq (a, b)$  disjunkt sind,  $j = 1, \dots, n$ . Sei

$$I_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^n (\tau_j - \varepsilon, \tau_j + \varepsilon), \quad \Gamma_\varepsilon = \gamma([a, b] \setminus I_\varepsilon),$$

also die disjunkte Vereinigung aller Teilkurven von  $\Gamma$ , die alle in  $\Sigma_\pi$  liegen.

Bild:



Damit:

$$n(\Gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{[a,b] \setminus I_{\varepsilon}} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{[a,b] \setminus I_{\varepsilon}} (\log \gamma(t))' dt$$

(beachte  $\gamma(t) \in \Sigma_\pi$  für  $t \in [a, b] \setminus I_\varepsilon$ )

$$\begin{aligned} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} (\log \gamma(b) - \log \gamma(\tau_n + \varepsilon) + \log \gamma(\tau_n - \varepsilon) \\ &\quad - \log \gamma(\tau_{n-1} + \varepsilon) + \cdots + \log \gamma(\tau_1 - \varepsilon) - \underbrace{\log \gamma(a)}_{=\gamma(b)}) \\ &\stackrel{(1.11)}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^n \left[ \underbrace{\ln |\gamma(\tau_j - \varepsilon)| - \ln |\gamma(\tau_j + \varepsilon)|}_{\rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0} + i(\arg \gamma(\tau_j - \varepsilon) - \arg \gamma(\tau_j + \varepsilon)) \right]. \end{aligned}$$

Dabei gilt für den Imaginärteil:

$$\operatorname{Im} n(\Gamma, 0) \rightarrow \begin{cases} \pm\pi - (\pm\pi) = 0 & \text{— Berührungspunkt,} \\ +\pi - (-\pi) = 2\pi & \text{— arg wächst,} \\ -\pi - \pi = -2\pi & \text{— arg fällt.} \end{cases} \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

$$\Rightarrow n(\Gamma, 0) = \frac{2\pi i}{2\pi i} |\# \text{Schnittstellen mit wachsendem Arg.} - \# \text{Schnittstellen mit fallendem Arg.}|$$

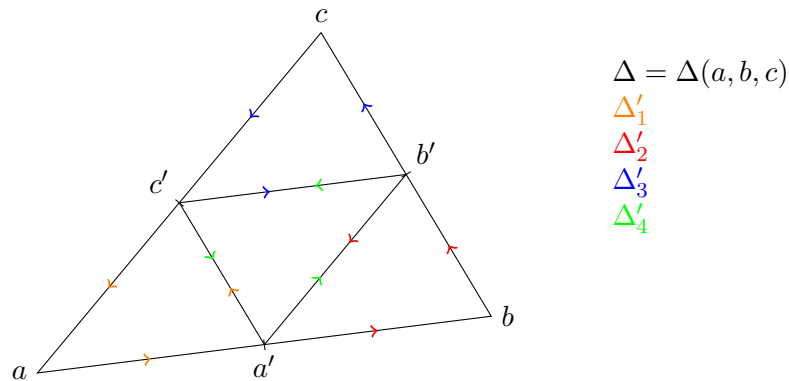
(Falls  $\gamma$  stückweise  $C^1$ : füge  $(t_k - \varepsilon, t_k + \varepsilon)$  (siehe Def. 2.2) zu  $I_\varepsilon$  hinzu).  $\square$

## 2.2 Integralsatz und -formel von Cauchy für sternförmige Gebiete

**Satz 2.19** (Lemma von Goursat). *Seien  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $w_0 \in \mathbb{C}$ ,  $f \in C(D, \mathbb{C}) \cap H(D \setminus \{w_0\})$ . Sei  $\Delta \subseteq D$  eine abgeschlossene Dreiecksfläche. Dann:*

$$\int_{\partial\Delta} f(z) \, dz = 0.$$

*Beweis.* (1) Sei  $w_0 \notin \Delta$ . Dann gibt es ein offenes  $U \subseteq D$  mit  $\Delta \subseteq U$ ,  $f \in H(U)$ .



Seitenhalbierung liefert  $\Delta'_1$  mit Kante  $\overrightarrow{a'c'}$  und Ecke  $a$ ,  $\Delta'_2$  mit Kante  $\overrightarrow{b'a'}$  und Ecke  $b$ ,  $\Delta'_3$  mit Kante  $\overrightarrow{c'b'}$  und Ecke  $c$ , sowie das innere  $\Delta'_4 = \Delta(a', b', c')$ , dessen Rand wir entgegengesetzt mit  $\overrightarrow{a'b'} + \overrightarrow{b'c'} + \overrightarrow{c'a'}$  parametrisieren können. Damit:

$$J = \int_{\partial\Delta} f \, dz = \sum_{k=1}^4 \underbrace{\int_{\partial\Delta'_k} f \, d\tau}_{=: J'_k}$$

Die Integrale über innere Kanten treten doppelt mit verschiedenen Vorzeichen auf, kürzen sich also.

Sei  $J_1$  dasjenige der  $J'_1, \dots, J'_4$  mit größtem Betrag und sei  $\Delta_1$  das zugehörige Dreieck. Damit:

$$|J_1| \geq \frac{1}{4} |J|, \quad l(\partial\Delta_1) = \frac{1}{2} l(\partial\Delta).$$

Iteriere dies. Erhalte Dreiecke  $\Delta_n$  und

$$J_n = \int_{\partial\Delta_n} f dz \quad \text{mit} \quad l(\partial\Delta_n) = 2^{-n}l(\partial\Delta), \quad |J_n| \geq 4^{-n}|J|. \quad (*)$$

Wenn  $z, w \in \Delta_n$ , dann

$$|z - w| \leq l(\partial\Delta_n) = 2^{-n}l(\partial\Delta). \quad (**)$$

Da  $\Delta_{n+1} \subseteq \Delta_n$  ( $\forall n$ ) ist die Folge der Mittelpunkte  $z_n$  der  $\Delta_n$  eine Cauchyfolge (wegen (\*\*)).

$$\implies \exists z_0 := \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n.$$

Wenn  $\hat{z}_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n$ , dann:

$$|z_0 - \hat{z}_0| \stackrel{(**)}{\leq} 2^{-n}l(\partial\Delta) \quad (\forall n)$$

Für  $n \rightarrow \infty$  folgt  $z_0 = \hat{z}_0$ , also  $\{z_0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n \subseteq \Delta \subseteq U$ .

Setze  $g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)$ . Da  $f$  bei  $z_0$  differenzierbar ist (wegen  $f \in H(U)$ ), folgt  $g(z) \rightarrow 0$  für  $z \rightarrow z_0$  ( $z \in \Delta$ ).

Ferner:  $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + g(z)(z - z_0)$ . Mit  $\int_{\partial\Delta_n} \cdots dz$  folgt:

$$J_n = \underbrace{\int_{\partial\Delta_n} f(z_0) dz}_{=0 \text{ nach 2.13}} + \underbrace{\int_{\partial\Delta_n} f'(z_0)(z - z_0) dz}_{=0 \text{ nach Satz 2.13}} + \int_{\partial\Delta_n} g(z)(z - z_0) dz$$

$$\begin{aligned} \implies 4^{-n}|J| &\stackrel{(*)}{\leq} |J_n| = \left| \int_{\partial\Delta_n} g(z)(z - z_0) dz \right| \leq \max_{z \in \partial\Delta_n} |g(z)| |z - z_0| l(\partial\Delta_n) \\ &\stackrel{(*),(**)}{\leq} (2^{-n}l(\partial\Delta_n))^2 \max_{z \in \partial\Delta_n} |g(z)| \\ \implies |J| &\leq l(\partial\Delta_n)^2 \max_{z \in \partial\Delta_n} |g(z)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Daraus folgt  $J = 0$ , also die Behauptung im Fall  $w_0 \notin \Delta$ .

(2) Sei  $w_0 \in \Delta$ .

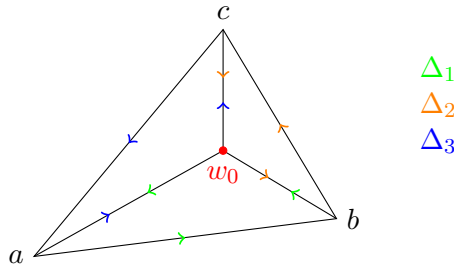
(a) Sei  $w_0$  eine Ecke von  $\Delta$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Zerlege  $\Delta$  wie in (1) per Seitenhalbierung. Wähle dabei stets das Teildreieck mit Ecke  $w_0$ . Erhalte Dreiecke  $\Delta_1^*, \dots, \Delta_m^*$  mit disjunktem Inneren, sodass  $w_0 \in \Delta_1^*$ ,  $l(\partial\Delta_1^*) \leq \varepsilon$ ,  $w_0 \notin \Delta_k^*$  für  $k \geq 2$ . Wie in (1) erhalten wir

$$\left| \int_{\partial\Delta} f dz \right| = \left| \sum_{k=1}^m \int_{\partial\Delta_k^*} f dz \right| = \left| \int_{\partial\Delta_1^*} f dz \right| \leq \varepsilon \underbrace{\sup_{z \in \Delta} |f(z)|}_{< \infty}.$$

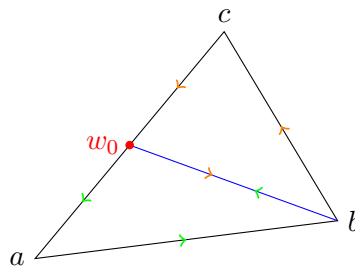
Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt  $\int_{\partial\Delta} f dz = 0$ .

- (b) Sei  $w_0 \in \Delta \setminus \partial\Delta$ . Zerlege  $\Delta$  in  $\Delta_1 = \Delta(a, b, w_0)$ ,  $\Delta_2 = \Delta(b, c, w_0)$  und  $\Delta_3 = \Delta(c, a, w_0)$ . Damit erhalten wir nach (a)

$$\int_{\partial\Delta} f \, dz = \sum_{k=1}^3 \int_{\partial\Delta_k} f \, dz = 0.$$

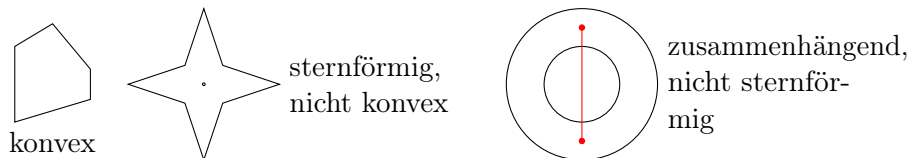


- (c) Sei  $w_0 \in \partial\Delta$ ,  $w_0$  keine Ecke. Wie in (b) zerlegen wir  $\Delta$  in zwei Teildreiecke:

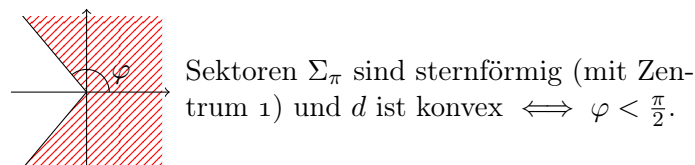


Daraus erhalten wir wieder  $\int_{\partial\Delta} f \, dz = 0$ . □

**Definition 2.20.** Sei  $M \subseteq \mathbb{C}$ . Die Menge  $M$  heißt *konvex*, wenn für alle  $w, z \in M$  auch  $\overline{wz}$  in  $M$  liegt. Die Menge  $M$  heißt *sternförmig* mit Zentrum  $z_0 \in M$ , wenn für alle  $w \in M$  auch  $\overline{z_0 w}$  in  $M$  liegt.



Klar ist:  $M$  konvex  $\implies M$  sternförmig und  $M$  sternförmig  $\implies M$  zusammenhängend (nach Satz 2.8).



**Theorem 2.21** (Cauchys Integralsatz für sternförmige Gebiete). Seien  $D \subseteq \mathbb{C}$  ein sternförmiges Gebiet,  $f \in H(D)$  und  $\Gamma \subseteq D$  eine geschlossene Kurve. Dann gilt

$$\int_{\Gamma} f \, dz = 0.$$

**Bemerkung.** Nach Satz 2.13 ist die Aussage von Theorem 2.21 äquivalent zu: Jedes  $f \in H(D)$  besitzt auf  $D$  eine Stammfunktion, wenn  $D$  sternförmig ist.

*Beweis.* Sei  $z_0$  das Zentrum von  $D$ . Setze für alle  $z \in D$

$$F(z) = \int_{\overrightarrow{z_0 z}} f(w) \, dw = - \int_{\overrightarrow{z z_0}} f(w) \, dw.$$

Sei  $r > 0$  mit  $B(z, r) \subseteq D$ ,  $z \in D$  fest, sowie  $0 < |h| < r$ . Dann:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(F(z+h) - F(z)) &= \frac{1}{h} \left( \int_{\overrightarrow{z_0(z+h)}} f \, dw + \int_{\overrightarrow{z z_0}} f \, dw + \int_{\overrightarrow{(z+h)z}} f \, dw \right) + \frac{1}{h} \int_{\overrightarrow{z(z+h)}} f \, dw \\ &= \underbrace{\frac{1}{h} \int_{\partial \Delta(z_0, z+h, z)} f \, dw}_{=0 \text{ (Satz 2.19)}} + \underbrace{\frac{1}{h} \int_0^1 f(z+th)h \, dt}_{\rightarrow f(z), \, h \rightarrow 0 \text{ nach (2.7)}}. \end{aligned}$$

Also ist  $F'(z) = f(z)$ . □

**Beispiel 2.22.** (a)  $\int_{\partial \mathbb{D}} \frac{dz}{z+2} = 0$ , denn  $f(z) = \frac{1}{z+2}$  liegt in  $H(D)$  für

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > -\frac{3}{2}\}.$$

Beachte:  $D$  ist sternförmig und offen,  $\partial \mathbb{D} \subseteq D$ .

(b) Cauchy ist im Allgemeinen falsch für Gebiete mit Löchern, z.B.  $\mathbb{C} \setminus \{0\} =: D$ . Siehe Bsp. 2.14:  $f(z) = \frac{1}{z}$ ,  $f \in H(D)$ ,  $\Gamma = \partial \mathbb{D}$ . Dann

$$\int_{\partial \mathbb{D}} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0.$$

**Bemerkung.** Theorem 2.21 gilt auch, wenn  $f \in C(D, \mathbb{C}) \cap H(D \setminus \{w_0\})$  für ein  $w_0 \in D$ . Denn Satz 2.19 wurde für solche  $f$  bewiesen.

**Theorem 2.23** (Cauchys Integralformel für sternförmige Gebiete). *Seien  $D \subseteq \mathbb{C}$  ein sternförmiges Gebiet,  $f \in H(D)$ ,  $\Gamma \subseteq D$  eine geschlossene Kurve. Dann gilt*

$$n(\Gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} \, dw, \quad \forall z \in D \setminus \Gamma. \quad (\text{CIF})$$

*Speziell mit  $\Gamma = \partial B(z, r) \subseteq D$  für  $B(z, r) \subseteq D$  und  $z \in B(z, r)$ :*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z, r)} \frac{f(w)}{w-z} \, dw \quad (2.4)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) \, dt. \quad (2.5)$$

*Beweis.* Sei  $z \in D \setminus \Gamma$  fest. Setze  $g(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}, & w \in D \setminus \{z\} \\ f'(z), & w = z. \end{cases}$ .

Dann ist  $g \in C(D, \mathbb{C}) \cap H(D \setminus \{z\})$ . Die Bemerkung nach Bsp. 2.22 liefert dann

$$0 = \int_{\Gamma} g(w) \, dw \stackrel{z \notin \Gamma}{=} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} \, dw - f(z) \underbrace{\int_{\Gamma} \frac{dw}{w-z}}_{=2\pi i n(\Gamma, z)}.$$

Daraus folgt (CIF) und der Spezialfall (2.4). Mit  $c = z$  und der Parametrisierung  $\gamma(t) = z + re^{it}$  folgt aus (2.4)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{it})}{z + re^{it} - z} i r e^{it} \, dt,$$

also (2.5). □

**Beispiel.** Es gilt  $\int_{\partial B(2,1)} \frac{\sqrt{w}}{w - \frac{3}{2}} \, dw = 2\pi i \sqrt{\frac{3}{2}}.$

Wähle hier  $D = B(2, \frac{3}{2})$ ,  $f(w) = \sqrt{w}$ . Dann ist  $D$  konvex,  $f \in H(D)$ ,  $\partial B(2, 1) \subseteq D$ .

**Definition 2.24.** Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *analytisch*, wenn es für jedes  $z \in D$  eine  $r(z) > 0$  gibt, sodass  $B(z, r(z)) \subseteq D$  und  $f$  auf  $B(z, r(z))$  eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt  $z$  und Koeffizienten  $a_n(z)$  besitzt.

Eine Funktion  $f \in H(\mathbb{C})$  heißt *ganz*.

**Theorem 2.25** (Entwicklungssatz). *Sei  $f \in H(D)$ . Dann ist  $f$  analytisch auf  $D$ .*

*Sei ferner  $z_0 \in D$  und  $r > 0$  mit  $\overline{B}(z_0, r) \subseteq D$ . Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z \in B(z_0, r)$ . Dann gelten die Cauchyformeln*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} \, dw \quad (2.6)$$

und die Cauchy-Abschätzungen

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|w-z_0|=r} |f(w)|. \quad (2.7)$$

Sei  $R(z_0) = \sup \{s > 0 \mid B(z_0, s) \subseteq D\}$ . Dann gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \, dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad (2.8)$$

für alle  $z \in B(z_0, r)$  mit  $0 < r < R(z_0)$ . Die Reihe in (2.8) konvergiert absolut und gleichmäßig für  $z \in B(z_0, r')$  mit  $0 < r' < r < R(z_0)$ . Wenn  $f$  ganz ist, dann gibt es  $a_n \in \mathbb{C}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), sodass

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad (\forall z \in \mathbb{C}).$$

*Beweis.* Seien  $z_0 \in D$ ,  $r > 0$  mit  $\overline{B}(z_0, r) \subseteq D$ . Seien  $w \in \Gamma := \partial B(z_0, r)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z \in B(z_0, r)$ . Dann existiert

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n} \frac{f(w)}{w - z} = n! \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}}$$



und

$$(w, z) \mapsto \frac{\partial^n f(w)}{\partial z^n w - z}$$

ist stetig für  $w \in T$ ,  $z \in B(z_0, r)$ . Somit folgt aus der (CIF) und Satz 2.7(d) (mit „ $D = B(z_0, r)$ “), dass  $f$  auf  $D$  beliebig oft differenzierbar ist und (2.6) gilt. Da  $l(\Gamma) = 2\pi r$  und  $(w - z_0)^{-n-1} = r^{-n-1}$ , folgt (2.7) aus (2.6) (mit  $z = z_0$ ).

Seien nun  $0 < r' < r$ ,  $z \in \overline{B}(z_0, r')$ . Dann gilt:

$$\frac{|z - z_0|}{|w - z_0|} \leq \frac{r'}{r} =: q < 1.$$

Damit:

$$\frac{f(w)}{w - z} = \frac{f(w)}{w - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} = \frac{f(w)}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n. \quad (*)$$

Diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig für  $w \in \Gamma$  und  $z \in \overline{B}(z_0, r')$ . Dann gilt:

$$f(z) \stackrel{(CIF)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw \stackrel{(*)}{\underset{\text{Satz 2.7(c)}}{=}} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw}_{\stackrel{(2.6)}{=} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)}.$$

Damit folgt (2.8). Wenn  $D = \mathbb{C}$ , wähle  $z = 0$ ,  $r$  beliebig groß und erhalte so letzte Bedingung.  $\square$

**Beispiel 2.26.** (a) Das Theorem ist falsch im Reellen, Beispiel aus Analysis 1:

$$(1) f(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \implies f \text{ ist differenzierbar auf } \mathbb{R} \text{ (mit } f'(0) = 0) \text{ aber } f' \text{ ist unbeschränkt für } x \rightarrow 0_+, \text{ also unstetig und } \nexists f''.$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \rightsquigarrow f \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ aber } f^{(n)}(0) = 0 \ (\forall n \in \mathbb{N}), \text{ als Taylorreihe von } f \text{ in } 0 \text{ ist konstant } 0, \text{ also ungleich } f.$$

- (b) Sei  $f(z) = (1 + z)^\alpha$  (wobei  $\alpha \in \mathbb{R}$  fest,  $z \in D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ )  $\rightsquigarrow f$  ist holomorph auf  $D$ . Aus Theorem 2.25 folgt:  $f$  hat Potenzreihe in  $z_0 = 0$ . Diese ist gleich der Binomialreihe aus Analysis 1. Nach Theorem 2.25 ist der Konvergenzradius  $\rho \geq 1$ . Falls  $\rho < 1$  hätten alle Ableitungen von  $f$  eine stetige Fortsetzung auf  $\partial B(0, 1)$ . Das widerspricht der Definition von  $f \implies \rho = 1$ .

**Korollar 2.27.** Gegeben sei eine Borelmenge  $X \subseteq \mathbb{R}^d$  und eine Funktion  $h: D \times X \rightarrow \mathbb{C}$ , wobei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen, mit:

- (a)  $\forall z \in D$  ist  $x \mapsto h(z, x)$  integrierbar auf  $X$ .
- (b)  $\forall x \in X$  ist  $z \mapsto h(z, x)$  holomorph auf  $D$ .
- (c) Es existiert ein integrierbares  $g: X \rightarrow \mathbb{R}_+$  mit  $|h(z, x)| \leq g(x) \ (\forall z \in D, x \in X)$ .

Dann ist

$$z \mapsto H(z) := \int_X h(z, x) dx$$

holomorph auf  $D$  und es gilt:

$$H^{(k)}(z) = \int_X \frac{\partial^k}{\partial z^k} h(z, x) dx \quad (\forall k \in \mathbb{N}).$$

*Beweis.* Sei  $z_0 \in D$ ,  $r > 0$  fest (aber beliebig) mit  $B(z_0, r) \subseteq D$ . Sei  $z \in B(z_0, r) \implies \overline{B}(z_0, r) \subseteq D$ . (2.7) für  $z$  und  $k \in \mathbb{N}$  liefert

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} h(z, x) \right| \leq \frac{k!}{r^k} \max_{|w-z|=r} |h(w, x)| \stackrel{\text{n.V.}}{\leq} \frac{h!}{r^k} g(x) \quad (\text{für jedes feste } x \in X.) \quad (*)$$

Seien nun  $z_n \rightarrow z_0$ , mit  $z_n \in B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ). Dann:

$$\begin{aligned} D_n &:= \frac{1}{z_n - z_0} (H(z_n) - H(z_0)) = \int_X \frac{1}{z_n - z_0} (h(z_n, x) - h(z_0, x)) \, dx \\ &\stackrel{(2.1)}{=} \int_X \frac{1}{z_n - z_0} \int_0^1 \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial z} h \right) (z_0 + t(z_n - z_0), x)}_{=: \varphi_n(t, x)} \cdot (z_n - z_0) \, dt \, dx \end{aligned}$$

(Vergleiche hierzu das Vorgehen im Beweis zu Satz 2.7(d)).

Es gilt:  $\varphi_n(t, x) \rightarrow \frac{\partial}{\partial z} h(z_0, x)$  ( $n \rightarrow \infty$ ) gleichmäßig in  $t \in [0, 1]$ , für jedes feste  $x \in X$ , da

$$z \mapsto \frac{\partial}{\partial z} h(z, x)$$

stetig ist nach Theorem 2.25. Also:

$$\int_0^1 \varphi_n(t, x) \, dt = \frac{\partial}{\partial z} h(z_0, x) \quad (n \rightarrow \infty, \, x \in X).$$

Ferner:

$$\left| \int_0^1 \varphi_n(t, x) \, dt \right| \stackrel{*}{\underset{(k=1)}{\leq}} \frac{1}{r} g(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \, x \in X),$$

wobei  $g(x)$  integrierbar ist. Majorisierte Konvergenz liefert:

$$D_n \longrightarrow \int_X \frac{\partial}{\partial z} h(z_0, x) \, dx \quad (n \rightarrow \infty).$$

$\implies H$  ist bei  $z_0$  differenzierbar  $\implies H \in H(D)$ . Ferner:

$$H'(z) = \int_X \frac{\partial}{\partial z} h(z, x) \, dx \quad (\forall z \in D).$$

Beachte:  $\frac{\partial}{\partial z} h(z, x)$  ist in  $x$  messbar, also liefern Theorem 2.25 und (\*) eine iterative Formel für  $H^{(k)}$ .  $\square$

**Beispiel 2.28** (Laplacetransformation). Sei  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  messbar, so dass für gewisse  $w \in \mathbb{R}$ ,  $c > 0$  gilt:

$$|f(t)| \leq ce^{wt} \quad (\forall t \geq 0).$$

Dann:

$$\exists \hat{f}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t) \, dt$$

für  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} \lambda > w$  und ist dort holomorph mit

$$\hat{f}(\lambda)^{(n)} = (-1)^n \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^n f(t) \, dt \quad (\forall \lambda \text{ mit } \operatorname{Re} \lambda > w, \, n \in \mathbb{N}).$$

*Beweis.* Setze

$$h(\lambda, t) = e^{-\lambda t} f(t) \quad \text{für } t \geq 0, \operatorname{Re} \lambda > w.$$

Klar:  $h$  ist in  $\lambda$  holomorph ( $\forall t \geq 0$ ).

Sei  $\varepsilon > 0$  fest aber beliebig,  $\operatorname{Re} \lambda \geq w + \varepsilon > w$ . Dann:

$$|h(\lambda, t)| = e^{-\operatorname{Re} \lambda t} |f(t)| \leq e^{-wt} e^{-\varepsilon t} |f(t)| \stackrel{\text{n.V.}}{\leq} c e^{-\varepsilon t} =: g(t),$$

wobei  $g(t)$  integrierbar und unabhängig von  $\lambda$  ist.

Korollar 2.27 liefert Holomorphie von  $\hat{f}(\lambda)$  für  $\operatorname{Re} \lambda \geq w + \varepsilon$ , folglich die Holomorphie für  $\operatorname{Re} \lambda > w$ , da  $\varepsilon > 0$  beliebig. Weiter gilt:

$$\hat{f}(\lambda)^{(n)} = \int_0^\infty \left( \frac{d}{d\lambda} \right)^n e^{-\lambda t} f(t) dt = (-1)^n \int_0^\infty t^n e^{-\lambda t} f(t) dt \quad (\operatorname{Re} \lambda > w). \quad \square$$

**Korollar 2.29** (Morera). Sei  $f \in C(D, \mathbb{C})$  so dass

$$\int_{\partial \Delta} f dz = 0$$

für alle Dreiecke  $\Delta \subseteq D$ . Dann:  $f \in H(D)$ .

*Beweis.* Sei  $z \in D$ . Wähle  $r > 0$  mit  $B(z, r) \subseteq D$ . Nach dem Beweis von Theorem 2.21 impliziert die Voraussetzung, dass  $f$  auf  $B(z, r)$  (sternförmig) eine Stammfunktion  $F \in H(B(z, r))$  besitzt. Nach Theorem 2.25 ist  $F \in C^2$  und somit ist  $f = F'$  differenzierbar auf  $B(z, r)$ . Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

**Theorem 2.30** (Liouville). Eine beschränkte ganze Funktion ist konstant.

*Beweis.* Sei  $f$  eine beschränkte ganze Funktion und  $z \in \mathbb{C}$ . (2.7) mit  $n = 1$  liefert:

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{r} \max_{|z-w|=r} |f(w)| \leq \frac{1}{r} \|f\|_\infty,$$

wobei hier  $r > 0$  beliebig ist, da  $f \in H(\mathbb{C})$ . Mit  $r \rightarrow \infty$  folgt  $f'(z) = 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Nach Satz 2.10 ist  $f$  konstant.  $\square$

**Korollar 2.31** (Fundamentalsatz der Algebra). Ein Polynom  $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$  (mit  $a_k \in \mathbb{C}$  ( $k = 1, \dots, n$ ),  $a_n \neq 0$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ) hat genau  $n$  (eventuell mehrfach gezählte) Nullstellen.

*Beweis.* Sei  $p(z) \neq 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Wir zeigen, dass  $p$  konstant ist. Setze dazu  $f = \frac{1}{p} \in H(\mathbb{C})$ . Wähle  $r > 0$ , sodass

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{|a_j|}{|a_n|} |z|^{j-n} \leq \frac{1}{2} \quad \text{für alle } z \text{ mit } |z| \geq r.$$

Sei  $|z| \geq r$ . Dann gilt

$$|p(z)| \geq |a_n| |z|^n - (|a_{n-1}| |z|^{n-1} + \dots + |a_0|) = |a_n| |z|^n \left( 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|a_j|}{|a_n|} |z|^{j-n} \right) \geq \frac{1}{2} |a_n| r^n.$$

Also ist  $f(z) \leq \frac{2}{|a_n|r^n}$ , wenn  $|z| \geq r$ . Ferner ist  $f$  auf  $\overline{B}(0, r)$  beschränkt als stetige Funktion auf einer kompakten Menge. Damit ist  $f$  beschränkt auf ganz  $\mathbb{C}$ . Mit Liouville (Theorem 2.30) folgt, dass  $f$  und damit auch  $p$  konstant ist.

Damit hat jedes nichtkonstante Polynom, d.h. jedes Polynom vom Grad  $\geq 1$  mindestens eine Nullstelle. Mit Polynomdivision folgt induktiv die Behauptung.  $\square$

**Definition 2.32.** Sei  $U \subseteq \mathbb{K}^l$  offen (wobei  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ) und  $f, f_n: U \rightarrow \mathbb{K}^k$  Funktionen für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Man sagt, dass  $f_n \rightarrow f$  für  $n \rightarrow \infty$  *kompakt konvergiert* (oder „gleichmäßig auf kompakten Mengen“), wenn für jede kompakte Menge  $K \subseteq U$  gilt:

$$\sup_{x \in K} |f(x) - f_n(x)|_2 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

**Bemerkung 2.33.** (a) Sei  $f_n \rightarrow f$  (kompakt) und  $f_n$  stetig für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Nach Analysis 2 ist dann  $f$  stetig auf  $K$  für jedes kompakte  $K$ , z.B.  $K = \overline{B}(x, r) \subseteq U$ . Also ist  $f \in C(U, \mathbb{K}^k)$ . Im Reellen folgt aber selbst aus  $f_n \in C^\infty$  nicht, dass  $f \in C^1$ . Gegenbeispiel aus Analysis 2:  $f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2}$  für  $x \in (-1, 1)$ . Hier ist  $f_n \in C^\infty((-1, 1))$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $f_n \rightarrow f$  ( $n \rightarrow \infty$ ) gleichmäßig auf  $(-1, 1)$  mit  $f(x) = |x|$ . Aber  $f$  ist bei 0 nicht differenzierbar.

(b) Die Partialsummen einer Potenzreihe  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  mit Konvergenzradius  $\rho$  konvergieren kompakt auf  $B(z_0, \rho)$  gegen  $f$ . Im Allgemeinen haben wir aber keine gleichmäßige Konvergenz auf  $B(z_0, \rho)$ .

*Beweis.* Sei  $K \subseteq B(z_0, \rho)$  kompakt. Nach Satz vom Maximum existiert ein  $z_1 \in K$  mit

$$|z_0 - z_1| = \max_{z \in K} |z_0 - z| =: r < \rho,$$

da  $z_1 \in K \subseteq B(z_0, \rho)$ . Also gilt  $K \subseteq \overline{B}(z_0, r) \subseteq B(z_0, \rho)$ . Ferner:

$$\max_{z \in \overline{B}(z_0, r)} |a_n| |z - z_0|^n \leq |a_n| r^n =: b_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} = r \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{r}{\rho} < 1.$$

Nach dem Wurzelkriterium gilt dann  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$ . Satz 1.13 (Weierstraß) aus Analysis 2 impliziert, dass die Potenzreihe gleichmäßig und absolut auf  $\overline{B}(z_0, r)$  konvergiert, und somit auf  $K$ .  $\square$

**Theorem 2.34** (Konvergenzsatz von Weierstraß). Seien  $f_n \in H(D)$  für  $n \in \mathbb{N}$  und  $f_n \rightarrow f$  (kompakt) für ein  $f \in C(D, \mathbb{C})$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Dann gilt  $f \in H(D)$  und  $f_n^{(j)}$  konvergiert kompakt gegen  $f^{(j)}$  für  $n \rightarrow \infty$  und jedes  $j \in \mathbb{N}$ .

*Beweis.* Sei  $\Delta \subseteq D$  ein abgeschlossenes Dreieck. Dann gilt  $f_n \rightarrow f$  (gleichmäßig) auf  $\partial\Delta \subseteq D$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Damit:

$$0 \stackrel{2.19}{=} \int_{\partial\Delta} f_n dz \stackrel{2.7}{\rightarrow} \int_{\partial\Delta} f dz \quad (n \rightarrow \infty) \implies \int_{\partial\Delta} f dz = 0.$$

Nach Morera (Kor. 2.29) gilt dann  $f \in H(D)$ .

Sei  $r > 0$ ,  $z_0 \in D$  mit  $\overline{B}(z_0, 2r) \subseteq D$ . Sei  $z \in \overline{B}(z_0, r)$ . Dann gilt  $\overline{B}(z, r) \subseteq \overline{B}(z_0, 2r)$ . Da  $f - f_n \in H(D)$ , folgt mit (2.7), dass

$$\begin{aligned} \max_{z \in \overline{B}(z_0, r)} |f^{(j)}(z) - f_n^{(j)}(z)| &\leq \max_{z \in \overline{B}(z_0, r)} \max_{|w-z|=r} \frac{j!}{r^j} |f(w) - f_n(w)| \\ &\leq \frac{j!}{r^j} \max_{|w-z| \leq 2r} |f(w) - f_n(w)| \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \text{ nach Voraussetzung,} \end{aligned} \quad (*)$$

also  $f_n^{(j)} \rightarrow f^{(j)}$  auf  $\overline{B}(z_0, r)$  ( $n \rightarrow \infty$ ,  $j \in \mathbb{N}$ ).

Sei  $K \subseteq D$  kompakt. Dann gibt es für jedes  $z_0 \in K$  ein  $r(z_0) > 0$  mit  $B(z_0, 2r(z_0)) \subseteq D$ , da  $D$  offen. Klar:

$$K \subseteq \bigcup_{z_0 \in K} B(z_0, r(z_0)).$$

Da  $K$  kompakt ist, existieren endlich viele  $z_1, \dots, z_m \in K$  und  $r_1, \dots, r_m > 0$  mit  $B(z_k, 2r_k) \subseteq D$  ( $k = 1, \dots, m$ ) und  $K \subseteq B(z_1, r_1) \cup \dots \cup B(z_m, r_m)$ . (\*) angewandt auf  $\overline{B}(z_k, r_k)$  liefert die Behauptung.  $\square$

## 2.3 Weitere Hauptsätze über holomorphe Funktionen

**Theorem 2.35** (Identitätssatz). Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f \in H(D)$ . Dann sind äquivalent:

- (a)  $f = 0$  auf  $D$ .
- (b) Es gibt ein  $z_0 \in D$  mit  $f^{(m)}(z_0) = 0$  für alle  $m \in \mathbb{N}$ .
- (c)  $N = \{z \in D \mid f(z) = 0\}$  hat einen Häufungspunkt  $z_0 \in D$ , d.h. es gibt eine Folge  $z_n \in D \setminus \{z_0\}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) mit  $z_n \rightarrow z_0$  und  $z_n \in N$ .

Somit sind zwei Funktionen  $g, h \in H(D)$  schon gleich, sobald  $g(z_n) = h(z_n)$  auf einer Folge  $z_n \rightarrow z_0$  mit  $z_n, z_0 \in D$  und  $z_n \neq z_0$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) oder sobald für ein  $z_0 \in D$  gilt:  $g^{(m)}(z_0) = h^{(m)}(z_0)$  für alle  $m \in \mathbb{N}_0$ . Insbesondere sind die Koeffizienten einer Potenzreihe eindeutig bestimmt.

**Bemerkung.** Der Satz ist falsch, wenn  $D$  nicht zusammenhängend ist.

*Beweis.* Die letzte Behauptung folgt mit  $f = g - h$  aus „(c) $\Rightarrow$ (a)“ bzw. „(b) $\Rightarrow$ (a)“.

a)  $\Rightarrow$  c): klar.

c)  $\Rightarrow$  b): Seien  $z_n, z_0 \in D$ ,  $z_n \neq z_0$ ,  $f(z_n) = 0$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ),  $z_n \rightarrow z_0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Dann ist  $f(z_0) = 0$ .

ANNAHME: Es gibt ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$  und  $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ . Theorem 2.25 liefert ein  $r > 0$  mit

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}}_{=: a_n} (z - z_0)^k \quad (\forall z \in B(z_0, r) \subseteq D),$$

wobei  $a_m \neq 0$ . Damit:

$$g(z) := (z - z_0)^{-m} f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-m} \stackrel{l=k-m}{=} \sum_{l=0}^{\infty} a_{l+m} (z - z_0)^l \quad (z \in B(z_0, r)).$$

Also ist  $g \in H(B(z_0, r))$  und  $g(z_0) = a_m \neq 0$ . Aber  $g(z_n) = (z_n - z_0)^{-m} f(z_0) = 0$ , wobei  $z_n \neq z_0$ ,  $z_n, z_0 \in B(z_0, r)$  und  $z_n \rightarrow z_0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). WIDERSPRUCH zu c).  $\implies$  b) gilt.

b)  $\implies$  a): Sei  $D_1 := \{z \in D \mid f^{(m)}(z) = 0 \ \forall m \in \mathbb{N}_0\}$ . Nach Voraussetzung ist  $D_1 \neq \emptyset$ .

$D_1$  offen in  $D$ : Sei  $z \in D_1$ . Nach Theorem 2.25 hat  $f$  auf einer Kugel  $B(z, r)$  eine Potenzreihendarstellung mit Koeffizienten

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}_0),$$

wegen  $z \in D_1$ . Daraus folgt  $f = 0$  auf  $B(z, r)$ , also  $B(z, r) \subseteq D_1$ , also ist  $D_1$  offen.

$D_2 := \{D \setminus D_1\}$  offen: Sei  $w \in D_2$ . Dann gibt es  $l \in \mathbb{N}_0$  mit  $f^{(l)}(w) \neq 0$ . Nach Theorem 2.25 ist  $f^{(l)}$  stetig. Also gibt es ein  $r_1 > 0$  mit  $B(w, r_1) \subseteq D$  und  $f^{(l)}(z) \neq 0$  für alle  $z \in B(w, r_1)$ . Also gilt  $B(w, r_1) \subseteq D_2$ , folglich ist  $D_2$  offen.

ANNAHME:  $D_2 \neq \emptyset$ . Dann ist  $D = D_1 \dot{\cup} D_2$ ,  $D_1, D_2$  offen, nichtleer. WIDERSPRUCH zu  $D$  zusammenhängend.

$$\implies D_2 = \emptyset \implies D_1 = D \implies \text{(a)}. \quad \square$$

**Bemerkung.** Bei (c) muss  $z_0 \in D$  vorausgesetzt werden, *Beispiel*:

$$f(z) = \sin \frac{1}{z}, \quad z \in D = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Dann ist  $f(\frac{1}{n\pi}) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und

$$\frac{1}{n\pi} \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

aber  $f \neq 0$ .

**Korollar 2.36** (Nullstellensatz). Seien  $D \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet,  $f \in H(D)$ ,  $f \neq 0$  und  $f(z_0) = 0$  für ein  $z_0 \in D$ . Dann gibt es  $m \in \mathbb{N}$  und  $r > 0$  mit  $B(z_0, r) \subseteq D$ , sowie eine Funktion  $g \in H(B(z_0, r))$ , sodass

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0), \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0, \quad g(z_0) \neq 0$$

und  $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$  für alle  $z \in B(z_0, r)$ . (Dabei heißt  $m \in \mathbb{N}$  die Ordnung oder Vielfachheit der Nullstelle  $z_0$  von  $f$ .)

*Beweis.* Die Behauptung über die Ableitung folgt aus Theorem 2.35. Die Existenz von  $g$  folgt aus dem Beweis von Theorem 2.35 „(c)  $\implies$  (b)“.  $\square$

**Bemerkung.** Im reellen müssen so ein  $m \in \mathbb{N}$  und ein  $g$  nicht existieren, *Beispiel*:

$$f(x) = |x|^{\frac{3}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Hier ist  $f \in C^1(\mathbb{R})$  mit  $f(0) = f'(0) = 0$ , aber  $f \notin C^2$  und

$$|x|^{-k} f(x) \longrightarrow \begin{cases} \infty, & k \geq 2, \\ 0, & k = 0, 1, \end{cases}, \quad (x \rightarrow \infty).$$

Hier ist „ $m = \frac{3}{2}$ “.

**Korollar 2.37.** Seien  $D \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet,  $f \in H(D)$ ,  $f$  nicht konstant und  $c \in \mathbb{R}$ . Dann ist die Menge  $N_c = \{z \in D : f(z) = c\}$  diskret, d.h.: Für alle  $z \in N_c$  gibt es ein  $r(z) > 0$ , sodass  $B(z, r(z)) \cap N_c = \{z\}$ .

*Beweis.* Wenn  $N_c$  nicht diskret ist, dann existiert ein  $z_0 \in D$  mit  $f(z_0) = c$  und  $z_n \in D \setminus \{z_0\}$  mit  $f(z_n) = c$  und  $z_n \rightarrow z_0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Dann liefert Theorem 2.35 „(c)  $\implies$  (a)“ für  $h = f - c$  die Behauptung, da  $f$  nicht konstant ist, also  $h \neq 0$  ist.  $\square$

**Korollar 2.38** (Holomorphe Fortsetzung).

**Beispiel 2.39.**

**Lemma 2.40.**

**Theorem 2.41** (Gebietstreue).

*Beweis.* Sei  $U \subseteq D$  offen,  $z_0 \in U$  fest, aber beliebig. Nach Korollar 2.37 (mit „ $c = f(z_0)$ “) existiert ein  $r > 0$  mit  $f(z) \neq f(z_0)$  für alle  $z \in \overline{B}(z_0, r) =: B \subseteq U$  mit  $z \neq z_0$ . Da  $\partial B$  kompakt, folgt

$$\exists \frac{1}{2} \min_{z \in \partial B} |f(z) - f(z_0)| =: \delta > 0.$$

Sei nun  $w \in B(f(z_0), \delta)$  beliebig, aber fest. Dann ist zu zeigen:  $w \in f(U)$ . Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\exists z_1 \in U : f(z_1) = w.$$

Für  $z \in \partial B$  gilt:

$$\begin{aligned} |f(z) - w| &\geq |f(z) - f(z_0)| - |f(z_0) - w| \geq 2\delta - \delta = \delta \\ \implies \min_{z \in \partial B} |f(z) - w| &\geq \delta. \end{aligned}$$

Lemma 2.40 für  $g := f - w$  liefert  $z_1 \in B(z_0, r) \subseteq U$  mit  $g(z_1) = 0 \iff f(z_1) = w$ . Also ist  $f(U)$  offen. Wenn  $U$  zusammenhängend ist, dann ist  $f(U)$  nach Theorem 1.68 (Ana 2) zusammenhängend.  $\square$

**Bemerkung.** Seien  $X, Y$  normierte Vektorräume und  $D \subseteq X$ . Eine Abbildung  $f: D \rightarrow Y$  heißt *offen*, wenn für jede in  $D$  offene Teilmenge  $U \subseteq D$  die Bildmenge  $f(U)$  in  $Y$  offen ist. Theorem 2.41 zeigt also die Offenheit aller nichtkonstanten, holomorphen Funktionen auf einem Gebiet  $D \subseteq \mathbb{C}$ .

**Theorem 2.42** (Maximumsprinzip). Seien  $D \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f \in H(D)$  nicht konstant.

(a) Dann hat die Funktion  $z \mapsto |f(z)|$  kein lokales Maximum auf  $D$ .

(b) Wenn ferner  $f \in C(\overline{D}, \mathbb{C})$  und  $D$  beschränkt ist, dann gilt:

$$\max_{z \in \overline{D}} |f(z)| = \max_{z \in \partial D} |f(z)|.$$

*Beweis.* (a) ANNAHME:  $\exists z_0 \in D, r > 0$  mit  $|f(z)| \leq |f(z_0)|$  ( $\forall z \in B(z_0, r) \subseteq D$ ).

Wähle  $w_n \in \mathbb{C}$  mit  $|w_n| > |f(z_0)|$  mit  $w_n \rightarrow f(z_0)$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Nach Theorem 2.41 ist  $f(B(z_0, r))$  offen, also

$$\exists \delta > 0 : B(f(z_0), \delta) \subseteq f(B(z_0, r)). \quad (*)$$

Wähle  $N \in \mathbb{N}$  mit  $w_n \in B(f(z_0), \delta)$ . Dann folgt mit (\*):

$$\exists z \in B(z_0, r) \text{ mit } f(z) = w_n \implies |f(z)| = |w_n| > |f(z_0)| \quad \text{WIDERSPRUCH}$$

(b) Nach Voraussetzung gibt es  $z_1 \in \overline{D}$  mit

$$|f(z_1)| = \max_{z \in \overline{D}} |f(z)|.$$

Nach (a) gilt  $z_1 \in \partial D$ . □

**Bemerkung.** Theorem 2.42(b) ist im allgemeinen falsch für unbeschränkte Gebiete. *Beispiel:*

$$D = \{z \in \mathbb{C}: -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}\}, \quad f(z) = \exp(\exp(z)).$$

Dann ist  $f \in H(\mathbb{C})$  und für  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $x \pm i\frac{\pi}{2} \in \partial D$ ,

$$\left| f\left(x \pm i\frac{\pi}{2}\right) \right| = \left| \exp(\underbrace{e^x}_{=\pm i}) \right| = 1.$$

Aber  $\exp(\exp(x))$  ist unbeschränkt!

**Beispiel 2.43** (Potenzreihenentwicklung für gewöhnliche Differentialgleichungen). (allgemeines in Walter: Gewöhnliche DGL) Wir haben Lösungen von

$$\begin{cases} u''(x) + b(x)u'(x) + a(x)u(x) = 0, & x \in \mathbb{R} \\ u(0) = u_0, & u'(0) = u_1. \end{cases} \quad (*)$$

**Frage:** Hat  $u$  eine Potenzreihe? Einfache Antwort mittels Holomorphie!

**Voraussetzung:** Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet mit  $0 \in D$ ,  $a, b \in H(D)$  und  $R > 0$  mit  $\overline{B}(0, R) \subseteq D$ . Setze

$$M := \max_{|z| \leq R} \{|a(z)|, |b(z)|\}. \quad (**)$$

Seien  $u_0, u_1 \in \mathbb{C}$  gegeben, löse:

$$\begin{cases} u''(z) + b(z)u'(z) + a(z)u(z) = 0, & z \in D, \\ u(0) = u_0, & u'(0) = u_1. \end{cases} \quad (2.9)$$

Sei  $f \in H(B(0, R))$ ,  $r \leq R$ . Setze

$$\int_0^z f(w) \, dw = \int_{\overrightarrow{DZ}} f(w) \, dw, \quad |z| < r.$$

Dann

$$\exists \frac{d}{dz} \int_0^z f(w) \, dw = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ (h \neq 0, |z+h| < r)}} \frac{1}{h} \left( \int_0^{z+h} f \, dw - \int_0^z f \, dw \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f \, dw \stackrel{\text{vgl. Bew. von 2.13}}{=} f(z).$$

Damit und mit Satz 2.13 folgt:

$$(2.9) \iff \begin{cases} u(z) = u_0 + \int_0^z u'(w) \, dw \\ u'(z) = u_1 - \int_0^z (a(w)u(w) + b(w)u'(w)) \, dw. \end{cases}$$



Mit „ $v = u''$ “ definiere

$$\left(T(u, v)\right)(z) = \left(u_0 + \int_0^z v(w) \, dw, u_1 - \int_0^z (au + bv) \, dw\right)$$

für  $r < \min\{R, 1, \frac{1}{2M}\}$ ,  $z \in B(0, r)$ ,  $(u, v) \in H(B(0, R))^2 \cap C(\overline{B}(0, R))^2 =: E$ .

Setze  $q = \min\{r, 2m\} < 1$ . Dann:  $T(u, v) \in E$  und  $E$  ist ein Vektorraum mit Norm

$$\|(u, v)\|_\infty = \max_{|z| \leq r} \{|u(z)|, |v(z)|\}.$$

**Beh.:**  $(E, \|\cdot\|)$  ist vollständig.

*Beweis.* Sei  $(u_n, v_n)$  eine Cauchyfolge in  $E$ .  $\implies (u_n), (v_n)$  sind Cauchyfolgen in  $C(\overline{B}(0, r))$  bezüglich der Supremumsnorm. Dies ist ein Banachraum (Ana 2).

$$\implies \exists u, v \in C(\overline{B}(0, r)) \text{ mit } u_n \rightarrow u, v_n \rightarrow v \text{ gleichmäßig auf } \overline{B}(0, r).$$

Aus Theorem 2.34 folgt:  $u, v \in H(B(0, r))$ . Beachte:

$$\|(u_n, v_n) - (u, v)\|_\infty \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad \square$$

Seien  $(u, v), (\tilde{u}, \tilde{v}) \in E$ . Dann:

$$\begin{aligned} \|T(u, v) - T(\tilde{u}, \tilde{v})\|_\infty &= \max_{|z| \leq r} \left\{ \left| \int_0^z (v(w) - \tilde{v}(w)) \, dw \right|, \right. \\ &\quad \left. \left| \int_0^z \left( a(w)(u(w) - \tilde{u}(w)) + b(w)(v(w) - \tilde{v}(w)) \right) \, dw \right| \right\} \\ &\stackrel{(**)}{\leq} \max_{|w| \leq |z| \leq r} \left\{ |z| |v(w) - \tilde{v}(w)|, |z| (M |u(w) - \tilde{u}(w)| + M |v(w) - \tilde{v}(w)|) \right\} \\ &\leq \underbrace{r \max\{r, 2M\}}_{=q < 1} \|(u, \tilde{u}) - (v, \tilde{v})\|_\infty \end{aligned}$$

Banachscher Fixpunktsatz:  $\exists! (u, v) = T(u, v) \implies u$  löst (2.9) auf  $B(0, r)$ .

Aus Theorem 2.25 folgt  $\exists c_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_0$  mit

$$\begin{cases} u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, & \forall z \in B(0, r) \\ c_0 = u_0, & c_1 = u_1. \end{cases} \quad (2.10)$$

Ein Beispiel zur Berechnung von  $c_n$ : **Hermiteische DGL:**

Gegeben:  $\lambda \in \mathbb{R}, u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{cases} u''(x) - 2xu'(x) + \lambda u(x) = 0 \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1. \end{cases} \quad (2.11)$$

Hier ist  $a(z) = \lambda, b(z) = -2z$  ( $z \in \mathbb{C}$ ). Dann folgt nach Satz 1.3

$$\begin{aligned} -2zu'(z) &= -2z \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-2n c_n) z^n, \\ u'' &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n z^{n-2} \stackrel{k=n-2}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} z^k \end{aligned}$$

für ein  $z \in B(0, r)$ ,  $r$  aus (2.10). Dann folgt aus (2.11)

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2)c_{n+2} - 2nc_n + \lambda c_n] z^n = 0, \quad c_0 = u_0, \quad c_1 = u_1. \\ \xRightarrow{2.35} & \begin{cases} (n+1)(n+2)c_{n+2} - 2nc_n + \lambda c_n = 0, & n \in \mathbb{N}_0, \\ c_0 = u_0, \quad c_1 = u_1. \end{cases} \implies c_{n+2} = \frac{2n - \lambda}{(n+1)(n+2)} c_n \\ \implies & c_k = \begin{cases} \frac{1}{k!} (2(k-2) - \lambda)(2(k-4) - \lambda) \cdots (-\lambda) c_0, & k \text{ gerade,} \\ \frac{1}{k!} (2(k-2) - \lambda) \cdots (2 - \lambda) c_1, & k \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Zwei linear unabhängige Lösungen erhält man durch:

1)  $c_0 = u_0 = 1, c_1 = u_1 = 0$ ; Lösung:

$$v_{1,\lambda}(x) = 1 - \frac{\lambda}{2!} x^2 - \frac{4-\lambda}{4!} x^4 - \frac{(8-\lambda)(4-\lambda)}{6!} x^6 - \dots$$

2)  $c_0 = 0, c_1 = 1$ ; Lösung:

$$v_{2,\lambda}(x) = x + \frac{2-\lambda}{3!} x^3 + \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!} x^5 + \dots$$

Wenn  $\lambda = 2m, m \in \mathbb{N}_0$ : Abbruch der Rekursion wenn

**Fall 1:**  $m$  gerade,  $u_0 = 1, u_1 = 0$ ,

**Fall 2:**  $m$  ungerade,  $u_0 = 0, u_1 = 1$ .

$$\lambda = 0, m = 0: u_0(x) = 1$$

$$\lambda = 2, m = 1: u_1(x) = x$$

$$\lambda = 4, m = 2: u_2(x) = 1 - 2x^2$$

$$\lambda = 6, m = 3: u_3(x) = x - \frac{2}{3}x^3$$

Diese Lösungen erfüllen

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} |u_n(x)|^2 dx < \infty \quad (+)$$

Man kann zeigen, dass alle anderen Lösungen von (2.11) (+) verletzen.

## 3 Isolierte Singularitäten

### 3.1 Klassifikation und Laurentreihe

**Definition 3.1.**

**Beispiel 3.2.**

**Theorem 3.3.**

**Beispiel 3.4.**

**Theorem 3.5.**

**Bemerkung.** (a) Man kann in Theorem 3.5 auf die Voraussetzung des Zusammenhangs verzichten.

(b) todo

Zusatz zu Theorem 3.5: Wenn  $f: D \rightarrow f(D)$  biholomorph, dann gilt nach Satz 1.8(a):

$$f'(z) \neq 0 \quad (\forall z \in D), \quad (f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \quad (w \in f(D)).$$

Seien  $a_n \in \mathbb{C}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) und  $z_0 \in \mathbb{C}$  gegeben. Wir sagen, dass die *Laurentreihe*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

für ein  $z \in \mathbb{C}$  konvergiert, wenn ihr *regulärer Anteil*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

und ihr *singulärer Anteil*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

konvergiert. Die Laurentreihe ist dann die Summe der beiden Anteile. Entsprechend definiert man absolute beziehungsweise gleichmäßige Konvergenz auf Kompakta.

**Theorem 3.6** (Laurent). *Seien  $f \in H(D)$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $R > 0$  mit  $D_0 = B(z_0, R) \setminus \{z_0\} \subseteq D$ . Für  $\rho \in (0, R)$ , setze  $K_\rho = \partial B(z_0, \rho)$  und*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_\rho} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (3.1)$$

### 3 Isolierte Singularitäten

Dann gilt:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ für } z \in D_0 \quad (3.2)$$

mit absoluter und gleichmäßiger Konvergenz auf Kompakta in  $D_0$ . Die Koeffizienten  $a_n$  sind dabei eindeutig bestimmt, insbesondere sind sie unabhängig von  $\rho$ .

*Beweis.* 1) *Existenz:* Sei  $K \subseteq D_0$  kompakt. Dann existieren

$$0 < s < s + \delta < r - \delta < r < R \text{ mit } s + \delta \leq |z - z_0| \leq r - \delta, \quad \forall z \in K$$

(vgl. den Beweis von Theorem 2.25). Wähle ein  $z \in K$ . Setze

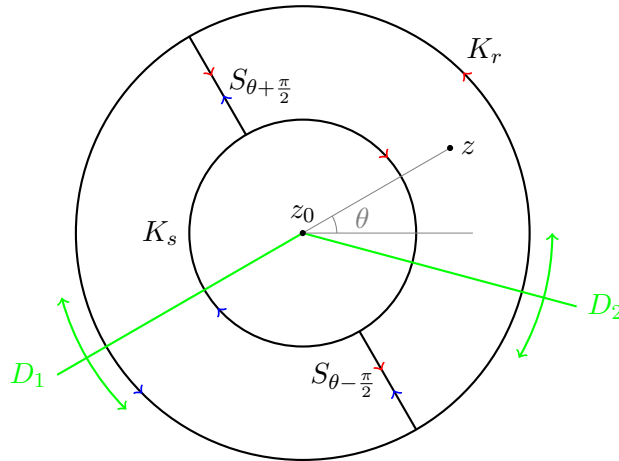
$$\theta = \arg(z - z_0), \quad S_\varphi = \{z_0 + te^{i\varphi}, s \leq t \leq r\}$$

für  $\varphi \in \mathbb{R}$  und

$$K_\sigma^1 = \left\{ z = z_0 + \sigma e^{i\alpha} : \theta - \frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \theta + \frac{\pi}{2} \right\}, \quad K_\sigma^2 = K_\sigma \setminus K_\sigma^1, \quad \sigma = s, r.$$

Setze weiter

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= K_r^1 + (-S_{\theta+\frac{\pi}{2}}) + (-K_s^1) + S_{\theta-\frac{\pi}{2}}, \\ \Gamma_2 &= K_r^2 + (-S_{\theta-\frac{\pi}{2}}) + (-K_s^2) + S_{\theta+\frac{\pi}{2}}. \end{aligned} \quad (*)$$



Beachte: Es gilt:  $n(\Gamma_1, z) = 1$ ,  $n(\Gamma_2, z) = 0$ , sowie

$$\Gamma_1 \subseteq D_1 := D_0 \setminus S_{\theta+\pi}, \quad \Gamma_2 \subseteq D_2 := D_0 \setminus S_{\theta-\frac{\pi}{4}}$$

und  $D_1$  und  $D_2$  sind sternförmig.

Die (CIF) auf  $D_1$  beziehungsweise  $D_2$  liefert:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw}_{=0} \stackrel{(*)}{=} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{K_r} \frac{f(w)}{w - z} dw}_{=: f_1(z)} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{K_s} \frac{f(w)}{w - z} dw}_{=: f_2(z)}.$$

Der obige Ausdruck für  $f_1$  (beziehungsweise für  $f_2$ ) ist für alle  $z \in B(z_0, r)$  (beziehungsweise  $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B(z_0, s)}$ ) definiert und nach Satz 2.7 dort holomorph.

Nach Theorem 2.25 existieren  $a_n \in \mathbb{C}$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ) mit

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw, \quad (n \in \mathbb{N}_0). \quad (+)$$

Diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig für  $z$  mit  $|z - z_0| \leq r - \delta$ . Für  $|z - z_0| \geq s + \delta$  und  $|w - z_0| \leq s$  gilt:

$$\frac{|w - z_0|}{|z - z_0|} \leq \frac{s}{s + \delta} =: q < 1.$$

Somit:

$$\begin{aligned} f_2(z) &= + \frac{1}{2\pi i} \int_{K_s} \frac{f(w)}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{w - z_0}{z - z_0}} dw \stackrel{q < 1}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{K_s} \frac{f(w)}{z - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(w - z_0)^k}{(z - z_0)^k} dw \\ &\stackrel{\text{Satz 2.7}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{K_s} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{-k}} dw}_{=: a_n} (z - z_0)^{-k-1} \end{aligned} \quad (++)$$

mit  $n = -k - 1 \in \{-1, -2, \dots\}$ . Diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig für  $z$  mit  $|z - z_0| \geq s + \delta$ . Damit konvergieren auch (+) und (++) absolut und gleichmäßig auf  $K$ . Somit ist die Existenz einer Laurentreihe gezeigt.

2) *Eindeutigkeit und* (3.1): Seien  $\rho \in (0, R)$  und  $b_n \in \mathbb{C}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) mit

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \text{ für } z \in D_0$$

mit absoluter und gleichmäßiger Konvergenz auf  $K_\rho$  (z.B.  $b_n = a_n$  aus Teil 1 mit  $0 < s < \rho < r < R$ ). Sei  $m \in \mathbb{Z}$ . Dann:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{K_\rho} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \stackrel{\text{Satz 2.7}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \frac{1}{2\pi i} \int_{K_\rho} (w - z_0)^{n-m-1} dw = b_m, \quad (**)$$

wobei nach Beispiel 2.6 gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{K_\rho} (w - z_0)^{n-m-1} dw = \begin{cases} 0, & n - m - 1 \neq -1, \\ 1, & n - m - 1 = -1. \end{cases}$$

Speziell kann man also in Teil 1 die Radien  $s, r$  für  $a_n$  durch jedes  $\rho \in (s, r)$  ersetzen. Da in Teil 1  $s$  beliebig nahe an 0 und  $r$  beliebig nahe an  $R$  gewählt werden kann, folgt (3.1) für jedes  $\rho \in (0, R)$ . Schließlich liefert (\*\*) auch die Eindeutigkeit der Koeffizienten in (3.2).  $\square$

**Korollar 3.7.** Seien  $f \in H(D)$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $R > 0$  mit  $D_0 = B(z_0, R) \setminus \{z_0\} \subseteq D$  und  $a_n$  die Koeffizienten der Laurentreihe ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Dann:

- (a)  $z_0$  hebbar  $\iff a_n = 0, \forall n < 0$ .
- (b)  $z_0$  ist Pol  $m$ -ter Ordnung  $\iff a_n = 0, \forall n < -m$  und  $a_{-m} \neq 0$  für ein  $m \in \mathbb{N}$ .
- (c)  $z_0$  ist wesentlich  $\iff \exists n_j \rightarrow -\infty$  mit  $a_{n_j} \neq 0$  ( $\forall j \in \mathbb{N}$ ).

*Beweis.* c) folgt per Negation aus a) und b).

a) und b): Bezeichne (nur hier) eine hebbare Singularität als „Pol o-ter Ordnung“ (setze dann  $m = 0$ ). Nach Definition ( $m = 0$ ) beziehungsweise nach Theorem 3.3 ( $m > 0$ ) ist  $z_0$  genau dann ein Pol  $m$ -ter Ordnung von  $f$ , wenn

$$g(z) := (z - z_0)^m f(z)$$

bei  $z_0$  holomorph fortgesetzt werden kann, wobei  $g(z_0) \neq 0$ , wenn  $m > 0$ . Nach Theorem 2.25 ist dies genau dann der Fall, wenn  $g$  auf einem Kreis  $B(z_0, r)$ ,  $r \leq R$ , eine Potenzreihe mit Koeffizienten  $b_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , besitzt, wobei  $b_0 \neq 0$  falls  $m > 0$ . Also genau dann, wenn

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^{k-m} \text{ für alle } z \in B(z_0, r) \setminus \{z_0\}.$$

Dies ist eine Laurentreihe mit Koeffizienten  $a_{-m} = b_0 \neq 0$ , wenn  $m > 0$ .

Also liefert die Eindeutigkeit in Theorem 3.6 die Behauptungen a) und b).  $\square$

**Beispiel 3.8.** (a)  $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{z}\right)^k \stackrel{(n=-k)}{=} \sum_{n=-\infty}^0 \frac{1}{(-n)!} z^n$ , ( $z \neq 0$ ), also ist  $z = 0$  wesentlich.

$$\begin{aligned} \text{(b) } z^{-6}(\cos(z) - 1) &= z^{-6} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} - 1 \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k-6} \stackrel{j=k-3}{=} \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+6)!} z^{2j} \\ &= \underbrace{-\frac{z^{-4}}{2} + \frac{z^{-2}}{4!}}_{\text{sing. Teil}} - \underbrace{\frac{1}{6!} + \frac{z^2}{8!} - \dots}_{\text{reg. Teil}} \end{aligned}$$

für ( $z \neq 0$ ). Also ist 0 Pol mit  $m = 4$ .

(c) Sei  $z \in B(0, \frac{1}{2}) \setminus \{0\}$ . Dann:

$$f(z) = \frac{1+z}{z-z^2} = \frac{1+z}{z} \frac{1}{1-z} = \left(1 + \frac{1}{z}\right) \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Also ist 0 Pol 1. Ordnung.

## 3.2 Der Residuensatz und reelle Integrale

**Definition 3.9.** Sei  $z_0$  eine isolierte Singularität von  $f \in H(D)$ . Der Koeffizient  $a_{-1}$  der Laurentreihe von  $f$  bei  $z_0$  heißt *Residuum*  $\text{Res}(f, z_0)$  von  $f$  bei  $z_0$ . Es gilt also

$$\text{Res}(f, z_0) \stackrel{(3.1)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} f(w) dw$$

(wobei  $\overline{B}(z_0, r) \setminus \{z_0\} \subseteq D$ ).

**Bemerkung.**  $f \mapsto \text{Res}(f, z_0)$  ist linear auf  $H(D)$ .

**Theorem 3.10** (Residuensatz). Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  sternförmig,  $A = \{z_1, \dots, z_l\} \subseteq U$ ,  $D = A \setminus U$ ,  $f \in H(D)$  und  $\Gamma \subseteq D$  eine geschlossene Kurve. Dann gilt

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^l n(\Gamma, z_j) \operatorname{Res}(f, z_j). \quad (3.3)$$

**Bemerkung.** Wenn alle  $z_j$  hebbar sind, dann ist  $\operatorname{Res}(f, z_j) = 0$  für alle  $j = 1, \dots, l$  und somit hat  $f$  eine Fortsetzung in  $H(U)$ . Also ist der Cauchy-Integralsatz ein Spezialfall von (3.3).

*Beweis.* Sei  $r_j > 0$  mit  $D_j := B(z_j, r_j) \setminus \{z_j\} \subseteq D$  für  $j = 1, \dots, l$ . Sei weiter

$$g_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z_j)(z - z_j)^{-n} \quad (\forall z \in D_j) \quad (*)$$

der singuläre Anteil der Laurentreihe von  $f$  bei  $z_j$  mit Koeffizienten  $a_{-n}(z_j)$  für  $j = 1, \dots, l$ . Nach dem Beweis von Theorem 3.6 kann man  $g_j$  holomorph auf  $H(\mathbb{C} \setminus \{z_j\})$  fortsetzen (siehe  $f_2$  im dortigen Beweis für beliebig kleine  $s > 0$ ). Wir bezeichnen diese Fortsetzung auch mit  $g_j$ . Setze  $h_0 = f - g_1 - \dots - g_l$  auf  $D$ . Da  $f - g_j$  nach (\*) eine Potenzreihe auf  $D_j$  ist, hat  $f - g_j$  eine holomorphe Fortsetzung in  $z_j$  und damit hat  $h_0$  eine holomorphe Fortsetzung  $h \in H(U)$ .

Mit Theorem 2.21 (Integralsatz) folgt  $\int_{\Gamma} h dz = 0$  (da  $U$  sternförmig). Da alle Funktionen auf  $\Gamma$  stetig sind, folgt

$$\int_{\Gamma} f dz = \sum_{j=1}^l \int_{\Gamma} g_j dz \stackrel{(*), (2.7)}{=} \sum_{j=1}^l \left( a_{-1}(z_j) \underbrace{\int_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_j}}_{=2\pi i \cdot n(\Gamma, z_j)} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{-n}(z_j) \underbrace{\int_{\Gamma} \frac{dz}{(z - z_j)^n}}_{=0 \text{ (Bsp. 2.6)}} \right). \quad \square$$

**Lemma 3.11.** Sei  $z_0$  ein Pol  $m$ -ter Ordnung von  $f \in H(D)$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) und  $g$  die holomorphe Fortsetzung der Funktion  $z \mapsto (z - z_0)^m f(z)$  auf eine Kugel  $B(z_0, r) \subseteq D$  (vgl. Theorem ??). Dann gilt

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z).$$

Speziell für  $m = 1$ :

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

Insbesondere gilt  $\operatorname{Res}(f, z_0) = h(z_0)$ , wenn  $f(z) = \frac{h(z)}{z - z_0}$  für ein  $h \in H(B(z_0, r))$  mit  $B(z_0, r) \subseteq D$ . Somit ist (CIF) ein Spezialfall von (3.3) für solche  $f$  und  $l = 1$ .

*Beweis.* Nach Theorem 3.6 gibt es ein  $r > 0$  mit  $D_0 = B(z_0, r) \setminus \{z_0\} \subseteq D$ ,  $h \in H(B(z_0, r))$  und  $a_{-1}, \dots, a_{-m} \in \mathbb{C}$  mit  $a_{-m} \neq 0$  und

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + h(z), \quad z \in D_0.$$

Daraus erhält man  $g(z) = a_{-m} + \dots + (z - z_0)^{m-1} a_{-1} + (z - z_0)^m h(z)$ ,  $z \in D_0$ , und weiter  $g^{(m-1)}(z) = 0 + a_{-1}(m-1)! + (z - z_0)\varphi(z)$  für ein  $\varphi \in H(B(z_0, r))$ .

$$\implies \lim_{z \rightarrow z_0} g^{(m-1)}(z) = (m-1)! a_{-1}.$$

Damit ist die erste Behauptung gezeigt. Sei nun  $f$  wie in der letzten Behauptung. Wenn  $h(z_0) \neq 0$ , dann ist  $z_0$  ein Pol erster Ordnung von  $f(z) = \frac{h(z)}{z - z_0}$ . Mit der ersten Behauptung mit  $m = 1$  folgt  $\operatorname{Res}(f, z_0) = h(z_0)$ . Falls  $h(z_0) = 0$ , dann hat  $h$  eine Nullstelle  $n$ -ter Ordnung ( $n \in \mathbb{N}$ ) bei  $z_0$ , also ist  $z_0$  eine hebbare Singularität von  $f$  und damit  $\operatorname{Res}(f, z_0) = 0 = h(z_0)$ .  $\square$

**Beispiel 3.12.** (a) Sei  $U$  offen,  $z_1, z_2 \in U$ ,  $z_1 \neq z_2$ ,  $g \in H(U)$ . Betrachte  $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_1)(z-z_2)^2}$  für  $z \in D = U \setminus \{z_1, z_2\}$ . Es sei  $g(z_j) \neq 0$  ( $j = 1, 2$ ). Dann existiert der Grenzwert  $\lim_{z \rightarrow z_j} (z - z_j)^j f(z) \neq 0$ , also ist  $z_j$  ein Pol  $j$ -ter Ordnung ( $j = 1, 2$ ). Mit Lemma 3.11 folgt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{g(z)}{(z - z_2)^2} = \frac{g(z_1)}{(z_1 - z_2)^2} \neq 0, \\ \operatorname{Res}(f, z_2) &= \lim_{z \rightarrow z_2} \left( \frac{d}{dz} (z - z_2)^2 f(z) \right) = \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{d}{dz} \frac{g(z)}{z - z_1} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_2} \left( \frac{g'(z)}{z - z_1} - \frac{g(z)}{(z - z_1)^2} \right) = \frac{g'(z_2)}{z_2 - z_1} - \frac{g(z_2)}{(z_2 - z_1)^2}. \end{aligned}$$

(b) Sei  $f(z) = (\cot z)^2 = \frac{\cos^2 z}{\sin^2 z}$  für  $z \in B(0, \pi) \setminus \{0\} =: D$ . Wie in Bsp. 3.4 sieht man: 0 ist Pol zweiter Ordnung, denn  $z^2 \cot^2 z = \left(\frac{z}{\sin z}\right)^2 \cos^2 z \rightarrow 1$ ,  $z \rightarrow 0$ . Setze  $g(z) = z^2 \cot^2 z$  für  $z \in D$ . Mit Lemma 3.11 folgt:

$$\operatorname{Res}(\cot^2, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} g(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \left( 2z \frac{\cos^2 z}{\sin^2 z} + 2z^2 \cot z \cot' z \right)$$

(Beachte:  $\cot' = \frac{1}{\sin^2}$ )

$$\begin{aligned} &= \lim_{z \rightarrow 0} \left( \underbrace{2 \frac{z}{\sin z} \cos z}_{\rightarrow 2} \frac{\sin z \cos z - z}{\sin^2 z} \right) \\ &= 2 \lim_{z \rightarrow 0} \underbrace{\frac{z^2}{\sin^2 z}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\frac{\frac{1}{2} \sin 2z - z}{z^2}}_{=: Q}. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$Q = \frac{1}{z^2} \left( \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} (2z)^{2n+1} - z \right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (2z)^{2n-1}$$

eine Potenzreihe um 0 mit dem Wert 0 an der Stelle 0. Damit folgt  $\lim_{z \rightarrow 0} Q = 0$  und  $\operatorname{Res}(\cot^2, 0) = 0$ .

## Reelle Integrale

**Beispiel 3.13.** Sei  $a > 1$ . Dann ist

$$J := \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{a + \cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} J &\stackrel{(1.14)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{a + \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})} = \frac{2}{i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ie^{ix}}{2ae^{ix} + (e^{ix})^2 + 1} dx \\ &\stackrel{z=e^{ix}}{=} \frac{2}{i} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} = \frac{4\pi}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{\frac{1}{z-z_2}}{z-z_1} dz, \end{aligned}$$



wobei  $z_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1} \in \mathbb{R}$ ,  $z_1 \in (-1, 1)$ ,  $z_2 < -1$ . Damit und mit (CIF) folgt

$$J = 4\pi \frac{1}{z_1 - z_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}. \quad \square$$

**Beispiel 3.14.** Sei  $t \in \mathbb{R}$ . Dann  $J = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi e^{-|t|}$ .

*Beweis.* Sei  $t > 0$  (falls  $t < 0$ : substituiere  $y = -x$ , setze  $s = -t > 0$  in  $J$ ). Das Integral existiert, da

$$\left| \frac{e^{itx}}{1+x^2} \right| = \frac{1}{1+x^2},$$

was integrierbar ist. Setze  $f(z) = \frac{e^{itz}}{(z-i)(z+i)}$ . Dann ist  $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{\pm i\})$  und  $\pm i$  sind einfache Pole. Es gilt

$$J = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \underbrace{\int_{\Gamma_r} f dz}_{=: J_1} - \underbrace{\int_{K_r} f dz}_{=: J_2} \right).$$

$$\Gamma_r = [-r, r] + K_r, \quad K_r : z = re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi, r > 1$$

$$\text{Es gilt} \quad J_1 \stackrel{\text{Thm. 3.10}}{=} 2\pi i \text{Res}(f, i) \stackrel{\text{Lem. 3.11}}{=} 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} (z-i)f(z) = 2\pi i \frac{e^{i^2 t}}{i+i} = \pi e^{-t}$$

$$\text{und} \quad |J_2| \leq \pi r \max_{z \in K_r} \left| \frac{e^{izt}}{1+z^2} \right| \leq \pi r \max_{z \in K_r} \frac{e^{t \operatorname{Re} z}}{|z|^2 - 1} \stackrel{\substack{iz = \\ r(i \cos \theta - \sin \theta)}}{=} \pi r \max_{0 \leq \theta \leq \pi} \frac{e^{-tr \sin \theta}}{r^2 - 1} \leq \frac{\pi r}{r^2 - 1} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty. \quad \square$$

**Beispiel 3.15.**

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

*Beweis. Existenz:* für

$$|x| \geq 1 : x^2 + x^4 \leq 2 + 2x^4 \iff \frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{2}{1+x^2},$$

was integrierbar ist.

Setze

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4} =: \frac{g(z)}{h(z)}.$$

Dabei hat  $h(z) = 1+z^4$  die 4 Nullstellen

$$w_k = e^{i\frac{\pi}{4}} e^{ik\frac{\pi}{2}}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Dann ist  $f$  holomorph auf

$$D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > -\frac{1}{2}, z \neq w_1, w_2\}.$$

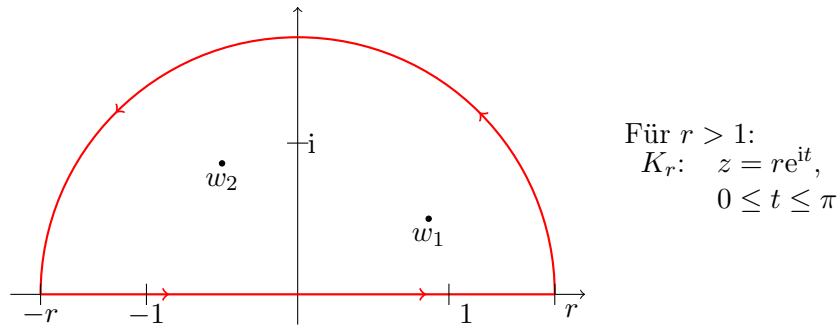
### 3 Isolierte Singularitäten

Weiterhin gilt nach Übungsaufgabe 22b (da  $g(w_k) \neq 0$ ,  $h'(w_k) \neq 0$ ):

$$\operatorname{Res}(f, w_1) = \frac{g(w_1)}{h'(w_1)} = \frac{w_1^2}{4w_1^3} = \frac{1}{4e^{i\frac{\pi}{4}}}.$$

Genauso:  $\operatorname{Res}(f, w_2) = \frac{1}{4e^{i\frac{\pi}{4}}} e^{i\frac{\pi}{2}}$ . Damit gilt:

$$\operatorname{Res}(f, w_1) = \frac{\sqrt{2}}{4(1+i)}, \quad \operatorname{Res}(f, w_2) = \frac{\sqrt{2}}{4(i-1)}$$



Setze  $\Gamma_r = [-r, r] + K_r$ . Damit:

$$\begin{aligned} \int_{-r}^r \frac{x^2}{1+x^4} dx + \int_{K_r} \frac{z^2}{1+z^4} dz &= \int_{\Gamma_r} \frac{z^2}{1+z^4} dz = \int_{\Gamma_r} \frac{z^2}{1+z^4} dz \stackrel{3.10}{=} 2\pi i (\operatorname{Res}(f, w_1) + \operatorname{Res}(f, w_2)) \\ &= \frac{i\pi}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{i+1} + \frac{1}{i-1} \right) = \frac{i\pi}{\sqrt{2}} \frac{i-1+i+1}{i^2-1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Ferner:

$$\left| \int_{K_r} f dz \right| \leq \pi r \max_{z \in K_r} \left| \frac{z^2}{1+z^4} \right| \leq \pi r \max_{|z|=r} \frac{|z|^2}{|z|^4-1} \leq \frac{\pi r^3}{r^4} \rightarrow 0$$

für  $r \rightarrow \infty$ . Damit folgt die Behauptung. □

**Beispiel.** Für  $t \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\sin x}{x} e^{itx} dx = \begin{cases} \pi, & t \in (-1, 1), \\ \frac{\pi}{2}, & t = \pm 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

*Beweis.* Sei  $t \in \mathbb{R}$  fest. Die Funktion

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} e^{itz}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ 1, & z = 0. \end{cases}$$

ist ganz.

Betrachte  $S_R = [-R, -1] + \{e^{i\theta} : -\pi \leq \theta \leq 0\} + [1, R]$  (für  $R > 1$ ). Der Cauchy-Integralsatz (Theorem 2.21) liefert mit  $D = \mathbb{C}$ :

$$\int_{-S_R + [-R, R]} f dz = 0.$$

Setze:

$$I(R) = \int_{-R}^R \frac{\sin x}{x} e^{itx} dx \implies I(R) = \int_{S_R} f dz$$

Setze ferner

$$\varphi_R(s) = \frac{1}{2i} \int_{S_R} \frac{e^{isz}}{z} dz, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (+)$$

Mit  $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$  folgt  $I(R) = \varphi_R(t+1) - \varphi_R(t-1)$ . Sei

$$K_R^+ = \{Re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}, \quad K_R^- = \{Re^{i\theta} : -\pi \leq \theta \leq 0\}, \\ \Gamma_R^+ = S_R + K_R^+, \quad \Gamma_R^- = S_R + (-K_R^-).$$

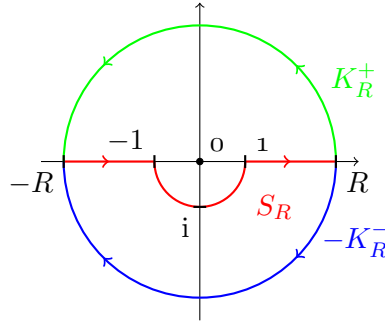
Die (CIF) mit  $D = \mathbb{C}$  liefert:

$$\pi = \pi e^{is0} = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_R^+} \frac{e^{isz}}{z-0} dz, \quad (*)$$

$$0 = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_R^-} \frac{e^{isz}}{z} dz, \quad \text{da } n(\Gamma_R^-, 0) = 0 \quad (**)$$

$$\implies \varphi_R(s) \stackrel{(**)}{=} \frac{1}{2i} \int_{K_R^-} \frac{e^{isz}}{z} dz = \frac{1}{2i} \int_{-\pi}^0 \frac{Re^{i\theta} e^{isRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}} d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^0 \exp(isRe^{i\theta}) d\theta, \quad (++)$$

$$\varphi_R(s) \stackrel{(*)}{=} \pi - \frac{1}{2i} \int_{K_R^+} \frac{e^{isz}}{z} dz = \pi - \frac{1}{2} \int_0^\pi \underbrace{\exp(ise^{i\theta})}_{=: \alpha(R)} d\theta \quad (+++)$$



Beachte:  $|\alpha(R)| = \exp(sR \cdot \operatorname{Re}(i \cos \theta + i^2 \sin \theta)) = e^{-sR \sin \theta}$ .

Falls  $s \cdot \sin \theta > 0$ , ist  $|\alpha(R)| \leq 1$  und es gilt  $\alpha(R) \rightarrow 0$  für alle  $R > 1$  mit  $R \rightarrow \infty$ .

Majorisierte Konvergenz folgt aus  $(++)$ , da  $\varphi_R(s) \rightarrow 0$  ( $R \rightarrow \infty$ ), wenn  $s < 0$  und aus  $(+++)$ , also  $\varphi_R(s) \rightarrow \pi$ , wenn  $s > 0$ . Mit  $(**)$  folgt

$$\varphi_R(0) = \frac{\pi}{2}, \quad (\forall R > 1).$$

Setze in  $(+)$   $s = t + 1$ , bzw.  $s = t - 1$ . Dann:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I(R) = \begin{cases} \pi - \pi = 0, & t > 1, \\ \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}, & t = 1, \\ \pi - 0 = \pi, & -1 < t < 1, \\ \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}, & t = -1, \\ 0 - 0 = 0, & t < -1, \end{cases}$$

wie gewünscht. □

### 3.3 Das Argumentprinzip

Für  $f \in H(D)$  sei  $N(f)$  die Menge der Nullstellen von  $f$  in  $D$  und  $m(z) = m_f(z)$  die Vielfachheit von  $z \in N(f)$ . Ziel: Bestimme  $N(f)$  und  $m(z)$  mit einem Kurvenintegral.

**Theorem 3.16** (Argumentprinzip). Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  ein sternförmiges Gebiet,  $f \in H(D)$  und  $\Gamma \subseteq D$  geschlossene Kurve mit  $\Gamma \cap N(f) = \emptyset$ . Dann:

$$\sum_{z_j \in N(f)} m(z_j) n(\Gamma, z_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n(\Gamma_f, 0), \quad (3.4)$$

wobei  $\Gamma_f$  die Parametrisierung  $f \circ \gamma$  hat und  $\gamma$  die Parametrisierung von  $\Gamma$  ist. Die Summe in (3.4) hat nur endlich viele Summanden, die nicht 0 sind.

*Beweis.* Zur letzten Behauptung: Sei  $z \notin D$ . Dann ist

$$w \mapsto \frac{1}{w - z}$$

auf  $D$  holomorph und somit nach Theorem 2.21

$$n(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{w - z} dw = 0, \quad (*)$$

da  $D$  sternförmig ist.

ANNAHME: Es gibt  $z_n \in N(f)$  mit  $z_n \neq z_m$  und  $n(\Gamma, z_n) \neq 0$  für alle  $n \neq m$  in  $\mathbb{N}$ . Da  $n(\Gamma, z_n) = 0$  in unbeschränkten Zusammenhangskomponenten von  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$  (nach Satz 2.16), ist  $(z_n)$  beschränkt. Also gibt es Teilfolgen  $z_{n_j} \rightarrow z(j \rightarrow \infty)$ .

Da  $f \neq 0$  (da  $N(f) \cap \Gamma = \emptyset$ ), liefert der Nullstellensatz (Korollar 2.36), dass

$$z \in \partial D \xrightarrow{(*)} n(\Gamma, z) = 0,$$

aber

$$n(\Gamma, z) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}} n(\Gamma, z_n) \neq 0 \quad \text{WIDERSPRUCH.}$$

Sei  $z_0 \in N(f)$  und  $m = m(z)$ . Nach Korollar 2.36 existieren  $r > 0$  und  $g \in H(B(z_0, r))$ , mit  $B(z_0, r) \subseteq D$ ,  $g(z) \neq 0$  und

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \quad (\forall z \in B(z_0, r)).$$

Damit:

$$\begin{aligned} f'(z) &= m(z - z_0)^{m-1} g(z) + (z - z_0)^m g'(z) \\ \implies \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)} \quad (\forall z \in B(z_0, r)). \end{aligned}$$

Da  $\frac{g'}{g}$  holomorph auf  $B(z_0, r)$  ist, folgt

$$\text{Res} \left( \frac{f'}{f}, z_0 \right) = m.$$

Theorem 3.10 liefert also die erste Gleichung. Weiter:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'}{f} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \gamma'(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{1}{(f \circ \gamma)(t)} (f \circ \gamma)'(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_f} \frac{1}{w} dw = n(\Gamma_f, 0). \end{aligned} \quad \square$$

**Korollar 3.17** (Rouché). Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  ein sternförmiges Gebiet,  $f, g \in H(D)$ ,  $\Gamma \subseteq D$  eine geschlossene Kurve. Es gelte zusätzlich

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|, \quad \forall z \in \Gamma. \quad (3.5)$$

Dann gilt:

$$\sum_{z_j \in N(f)} n(\Gamma, z_j) m_f(z_j) = \sum_{w_k \in N(g)} n(\Gamma, w_k) m_g(w_k).$$

*Beweis.* Da  $f, g$  stetig sind und  $\Gamma$  kompakt ist, gibt es ein offenes  $U \subseteq D$  mit  $\Gamma \subseteq U$ , so dass (3.5) für  $U$  gilt. Damit:  $f(z) \neq 0, g(z) \neq 0$  für alle  $z \in U$  und

$$\left| 1 - \frac{f(z)}{g(z)} \right| < 1 + \left| \frac{f(z)}{g(z)} \right|, \quad \forall z \in U. \quad (*)$$

ANNAHME:  $\frac{f(z)}{g(z)} =: t \in \mathbb{R}_-$  für ein  $z \in U$ . Dann folgt:

$$1 + |t| = 1 - t \leq |1 - t| \stackrel{(*)}{<} 1 + |t| \quad \text{WIDERSPRUCH}$$

$$\text{Also gilt: } \frac{f(z)}{g(z)} \in \Sigma_{\pi} \quad (\forall z \in U) \implies h := \log \frac{f}{g} \in H(U) \implies h' = \frac{1}{\frac{f}{g}} \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}.$$

Da  $h'$  eine Stammfunktion hat, gilt

$$0 = \int_{\Gamma} h' dz = \int_{\Gamma} \frac{f'}{f} dz - \int_{\Gamma} \frac{g'}{g} dz.$$

Die Behauptung folgt dann aus (3.4).  $\square$

**Beispiel 3.18.** Für festes  $\lambda > 1$  hat die Gleichung  $\lambda = z + e^{-z}$  genau eine Lösung  $z \in \mathbb{C}_+$ .

*Beweis.* Betrachte  $f(z) = \lambda - z - e^{-z}$ ,  $g(z) = \lambda - z$  für  $z \in D := \mathbb{C}_+$ . Dann ist  $N(g) = \{\lambda\}$ ,  $m_g(\lambda) = 1$ . Wähle  $r > \lambda$  und  $\varepsilon \in (0, \lambda - 1)$ . Setze  $\Gamma = \partial B(r, r - \varepsilon) \subseteq D$ . Dann  $\lambda \in B(r, r - \varepsilon)$ . Damit folgt:

$$|f(z) - g(z)| = |e^{-z}| = e^{-\operatorname{Re} z} \stackrel{z \in \mathbb{C}_+}{<} \lambda - \varepsilon \leq |\lambda - z| = |g(z)| \leq |f(z)| + |g(z)| \quad (\forall z \in \Gamma).$$

Rouché (Theorem 3.17) liefert dann

$$m_g(\lambda) n(\Gamma, \lambda) = 1 = \sum_{z_j \in N(f)} \underbrace{m_f(z_j)}_{\geq 1} n(\Gamma, z_j)$$

und  $n(\Gamma, z_j)$  ist 1, wenn  $z_j \in B(r, r - \varepsilon)$ , und 0 sonst. Also existiert genau eine einfache Nullstelle von  $f$  in  $B(r, r - \varepsilon)$ . Das gilt für alle  $r > \lambda$ ,  $\varepsilon \in (0, \lambda - 1)$ . Mit  $r \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt die Behauptung.  $\square$

**Beispiel 3.19.** Sei  $D$  sternförmig mit  $\overline{\mathbb{D}} \subseteq D$ . Weiter sei  $f \in H(D)$  mit  $|f(z)| < 1$  für alle  $z \in \partial\mathbb{D}$ . Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gibt es genau  $n$  (eventuell mehrfach gezählte) Lösungen von  $f(z) = z^n$  mit  $z \in D$ .

*Beweis.* Betrachte  $g(z) = f(z) - z^n$ ,  $h(z) = -z^n$  für  $z \in D$ . Dann sind  $g, h \in H(D)$ . Ferner ist  $N(h) = \{0\}$  und  $m_h(0) = n$ . Wähle  $\Gamma = \partial\mathbb{D}$ . Dann gilt  $|g(z) - h(z)| = |f(z)| < 1 = |h(z)| \leq |g(z)| + |h(z)|$  für alle  $z \in \partial\mathbb{D}$ . Rouché liefert dann

$$n = \sum_{z_j \in N(g)} m_g(z_j) n(\partial\mathbb{D}, z_j) = \sum_{z_j \in N(g) \cap \mathbb{D}} m_g(z_j),$$

da  $n(\partial\mathbb{D}, z_j) = 1$  für  $z_j \in \mathbb{D}$  und 0 sonst.  $\square$

Sei  $p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$  für  $\lambda \in \mathbb{C}$  und gegebene  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Frage: Haben alle Nullstellen von  $p$  strikt negativen Realteil? (Dann heißt  $p$  *stabil*.) Setze  $a_j = 0$  für  $j > n$ ,  $a_0 = 1$  und

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix},$$

und allgemein  $\Delta_n$  die Determinante der  $n \times n$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2n-1} \\ a_0 & a_2 & \dots & \dots & a_{2n-2} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n-2} & a_n \end{pmatrix}.$$

**Theorem 3.20** (Routh-Hurwitz). Seien  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  und  $\Delta_1, \dots, \Delta_n \neq 0$ . Genau dann haben alle Nullstellen von  $p$  strikt negativen Realteil, wenn

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_n > 0. \quad (3.6)$$

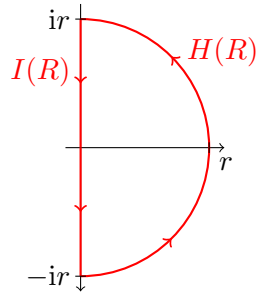
(Gantmacher: *Matrix Theory II*, AMS, 2000, §XV.6)

**Beispiel.** (a)  $n = 2$ :  $p$  stabil  $\iff a_1 > 0, a_2 > 0$

(b)  $n = 3$ :  $p$  stabil  $\iff a_1 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 > a_3$

(c)  $n = 4$ :  $p$  stabil  $\iff a_1 > 0, a_4 > 0, a_1 a_2 > a_3, a_1 a_2 a_3 > a_1^2 a_4 + a_3^2$

*Beweisskizze* (nur „ $\Leftarrow$ “). Behauptung 1:  $p$  hat keine Nullstelle auf  $i\mathbb{R}$ . Sei  $N$  die Anzahl der Nullstellen von  $p$  in  $\mathbb{C}_+$  (mit Vielfachheit gezählt). Sei  $r > r_0 := \max\{|\lambda| \mid \lambda \in N(p)\}$ ,  $I(r) = i[-r, r]$ ,  $H(r) = \{re^{i\theta} \mid -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ ,  $\Gamma(r) = H(r) - I(r)$ .



Also

$$n(\lambda, \Gamma(r)) = 1, \quad \forall \lambda \in N(p) \cap \mathbb{C}_+.$$

Nach Theorem 3.16 gilt:

$$2\pi N = \frac{1}{i} \int_{\Gamma(r)} \frac{p'(\lambda)}{p(\lambda)} d\lambda = \underbrace{\frac{1}{i} \int_{H(r)} \frac{p'}{p} d\lambda}_{=: J_1(r)} - \underbrace{\frac{1}{i} \int_{-ir}^{ir} \frac{p'}{p} d\lambda}_{=: J_2(r)}. \quad (*)$$

Zu  $J_1$ :

$$\begin{aligned} \frac{p'(\lambda)}{p(\lambda)} &= \frac{n\lambda^{n-1} + a_1(n-1)\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}}{\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n} \\ &= \frac{n}{\lambda} \frac{\lambda^{n-1} + a_1(1 - \frac{1}{n})\lambda^{n-2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{n}}{\lambda^{n-1} + a_1\lambda^{n-2} + \dots + \frac{a_n}{\lambda}} \\ &= \frac{n}{\lambda} \left( 1 - \underbrace{\frac{\frac{a_1}{n}\lambda^{n-2} + \dots + \frac{a_n}{\lambda}}{\lambda^{n-1} + a_1\lambda^{n-2} + \dots + \frac{a_n}{\lambda}}}_{=: q(\lambda)} \right). \end{aligned}$$

Weiterhin gibt es  $r_1 \geq r_0$ ,  $\mu > 0$  mit

$$|q(\lambda)| \leq \frac{\mu}{|\lambda|}, \quad \forall \lambda \text{ mit } |\lambda| \geq r_1.$$

Sei  $r > r_1$ . Dann:

$$J_1(r) = \frac{n}{i} \int_{H(r)} \frac{d\lambda}{\lambda} - \underbrace{\frac{n}{i} \int_{H(r)} \frac{q(\lambda)}{\lambda} d\lambda}_{=: J_3(r)} = \underbrace{\frac{n}{i} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{rie^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta}_{=n\pi} - J_3(r).$$

Dabei:

$$\begin{aligned} |J_3| &\leq n\pi r \max_{|\lambda|=r} \frac{|p(\lambda)|}{|\lambda|} \leq \frac{n\pi\mu r}{r^2} \longrightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty. \\ \implies J_1(r) &\longrightarrow n\pi \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Bleibt zu zeigen:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} J_2(r) = n\pi,$$

da dann aus (\*)  $N = 0$  folgt.

### 3 Isolierte Singularitäten

Zu  $J_2$ : Sei  $\varphi(t) = p(it)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Setze

$$K(r) = \varphi([-r, r]) = p([-ir, ir]).$$

Dann ist  $K(r)$  eine  $C^1$ -Kurve von  $p(-ir)$  nach  $p(ir)$  (wobei  $r \geq r_1$ ). Wie im Beweis von 3.10 ist

$$J_2(r) = \frac{1}{i} \int_{K(r)} \frac{dw}{w}.$$

Nach Behauptung 1 ist  $p(ix) \neq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , also  $0 \notin K(r)$ , also ist das Integral wohldefiniert.

Sei nun  $n$  gerade (anderer Fall analog).

*Behauptung 2:*  $K(r)$  schneidet  $i\mathbb{R}$  genau  $n$  mal, und zwar entweder vom ersten Quadranten in den zweiten oder vom dritten in den vierten.

Seien  $iy_j = p(ix_j)$ , ( $j = 1, \dots, n$ ) die  $n$  Schnittstellen aus Behauptung 2,  $K_j(r)$  die Teilkurve von  $K(r)$  von  $iy_{j-1}$  nach  $iy_j$ , für  $j = 2, \dots, n$ ,  $K_1(r)$  die Teilkurve von  $p(-ir)$  nach  $iy_1$ ,  $K_{n+1}(r)$  von  $iy_n$  nach  $p(ir)$ .

Auf  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$  betrachte

$$\text{Log}(re^{i\varphi}) = \ln(r) + i\varphi, \quad (+)$$

wobei  $r > 0$ ,  $0 < \varphi < 2\pi$ . Dann:

$$\exp \text{Log}(w) = w \quad (w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+), \quad \text{Log} \exp(z) = z \quad (\text{Im } z \in (0, 2\pi)).$$

Mit Satz 1.8 sieht man wie für  $\log$ , dass

$$\text{Log}'(w) = \frac{1}{w}, \quad w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+.$$

Da  $n$  gerade ist, gilt

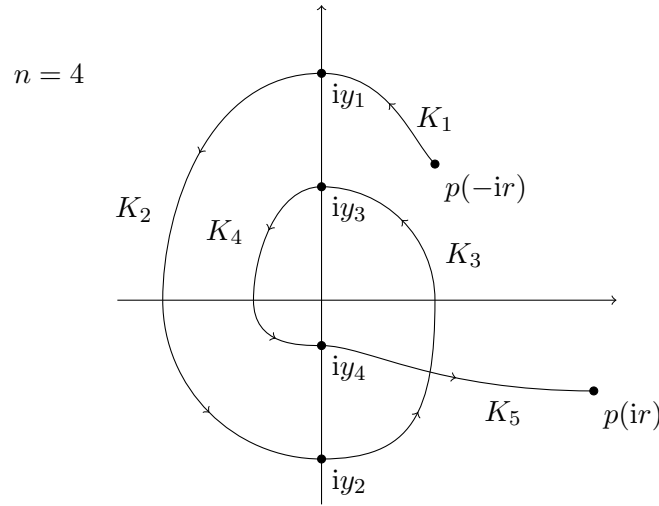
$$p(\pm ir) = ((\pm i)^2)^{\frac{n}{2}} r^n + c_{\pm} r^{n-1} + \dots + a_n = (-1)^{\frac{n}{2}} + c_{\pm} r^{n-1} + \dots + a_n$$

für gewisse  $c_{\pm} \in \mathbb{C}$ . Für  $r \rightarrow \infty$  folgen

$$\begin{aligned} \frac{p(\pm ir)}{r^n} &\longrightarrow (-1)^{\frac{n}{2}}, & \frac{|p(\pm ir)|}{|p(-ir)|} &= \frac{\frac{|p(ir)|}{|r^n|}}{\frac{|p(-ir)|}{|r^n|}} \longrightarrow 1 \quad (r \rightarrow \infty), \\ \arg(p(\pm ir)) &= \arg \frac{p(\pm ir)}{r^n} \longrightarrow \begin{cases} 0, & \frac{n}{2} \text{ gerade,} \\ \pi, & \frac{n}{2} \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned} \quad (**)$$

Also gibt es  $r_2 \geq r_1$ , so dass für alle  $r > r_2$   $p(\pm i)$  beide entweder in  $\mathbb{C}_+$  (wenn  $\frac{n}{2}$  gerade) oder in  $\mathbb{C}_-$  (wenn  $\frac{n}{2}$  ungerade) liegen. Sei im folgenden  $\frac{n}{2}$  gerade.





Sei nun  $r$  so groß, dass  $p(\pm ir) \in \mathbb{C}_+$ . Wegen Behauptungen 1 und 2 gilt:  $K_1(r)$  geht von  $p(-ir)$  nach  $iy_1 \in i(0, \infty)$  durch  $\mathbb{C}_+$ .  $K_{n+1}(r)$  geht von  $iy_n \in -i(0, \infty)$  nach  $p(ir)$  durch  $\mathbb{C}_+$ ,  $K_j(r)$  ( $j = 2, \dots, n$ ) läuft von  $iy_{j-1}$  nach  $iy_j$  entweder von  $i(0, \infty)$  durch  $\mathbb{C}_-$  nach  $-i(0, \infty)$  oder von  $-i(0, \infty)$  durch  $\mathbb{C}_+$  nach  $i(0, \infty)$ . Damit:

$$J_2(r) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{i} \int_{K_j(r)} \frac{dw}{w}.$$

Es gilt: Stammfunktion von  $f(w) = \frac{1}{w}$  ist

$$\text{in } \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- : \log(w) = \ln(w) + i \arg(w) \quad (\text{nach (1.11)})$$

$$\text{in } \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ : \text{Log}(w) = \ln(w) + i\phi, \quad \text{wobei } w = |w| e^{i\phi}, \quad |w| > 0, \quad \phi \in (0, 2\pi) \quad (\text{nach (+)})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow J_2(r) &= \frac{1}{i} (\log(iy_1) - \log p(-ir)) + \frac{1}{i} \sum_{\substack{j=2, \dots, n \\ K_j(r) \subseteq \overline{\mathbb{C}_+}}} (\log(iy_j) - \log(iy_{j-1})) \\ &\quad + \frac{1}{i} \sum_{\substack{j=2, \dots, n \\ K_j(r) \subseteq \overline{\mathbb{C}_-}}} (\text{Log}(iy_j) - \text{Log}(iy_{j-1})) + \frac{1}{i} (\log p(ir) - \log(iy_n)) \\ &\stackrel{(1.11)}{=} \frac{1}{i} \ln |y_1| + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{i} \ln |p(-ir)| - \arg(p(-ir)) + \frac{1}{i} \ln |p(ir)| - \frac{1}{i} \ln |y_n| + \frac{\pi}{2} \\ &\quad + \sum_{K_j(r) \subseteq \overline{\mathbb{C}_+}} \left( \frac{1}{i} \ln |y_j| + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{i} \ln |y_{j-1}| + \frac{\pi}{2} \right) \\ &\quad + \sum_{K_j(r) \subseteq \overline{\mathbb{C}_-}} \left( \frac{1}{i} \ln |y_j| + \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{i} \ln |y_{j-1}| - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= n\pi + \sum_{j=1}^n \frac{1}{i} \ln |y_j| - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{i} \ln |y_{j-1}| + \frac{1}{i} \ln \frac{|p(ir)|}{|p(-ir)|} + \arg(p(ir)) - \arg(p(-ir)) \\ &\longrightarrow n\pi \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Wegen (\*\*) sind wir fertig.

Zum Beweis von Behauptungen 1 und 2: Sei  $n$  gerade,  $x \in \mathbb{R}$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} p(ix) &= (i^2)^{\frac{n}{2}} x^n + a_1 i (i^2)^{\frac{n-2}{2}} x^{n-1} + a_2 (i^2)^{\frac{n-1}{2}} x^{n-2} + \cdots + i a_{n-1} x + a_n \\ &= \underbrace{(-1)^{\frac{n}{2}} + (-1)^{\frac{n}{2}-1} a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n}_{=: f_1(x) = \operatorname{Re}(p(ix))} + i \underbrace{((-1)^{\frac{n}{2}-1} a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x)}_{=: f_2(x) = \operatorname{Im}(p(ix))}. \end{aligned}$$

Gantmacher §XV.6 (33) und §XV.3 besagt, dass aus (3.6) folgt: Im euklidischen Algorithmus

$$f_{k-1} = q_k f_k - f_{k+1} \quad (***)$$

treten Polynome  $f_k$ ,  $k = 1, \dots, n+1$  mit Grad  $n+1-k$ , also  $f_{n+1} \neq 0$  ist konstant, auf.

Weiter haben die  $f_k$  führende Koeffizienten ungleich 0 mit wechselndem Vorzeichen. (++)

Damit:

$$f_{k-1}, f_k \ (k = 2, \dots, n+1) \text{ haben keine gemeinsamen Nullstellen,} \quad (+++)$$

da sonst  $f_{k+1}(x_0) = 0$  aus (\*\*\*) folgen würde. Iterativ folgt dann  $f_{n+1}(x_0) = 0$ : WIDERSPRUCH. Also haben  $f_1$  und  $f_2$  keine gemeinsame Nullstelle, das heißt

$$p(ix) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

womit Behauptung 1 gezeigt ist.

Sei  $V(x)$  die Anzahl der Vorzeichenwechsel in  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{n+1}(x)$  (wobei  $f_k(x) = 0$  ignoriert wird). Dann folgt nach (++)

$$\exists \alpha < \beta : V(x) = 0 \quad \forall x \leq \alpha, \quad V(x) = n \quad \forall x \geq \beta. \quad (\times)$$

$V(x)$  kann sich nur beim Durchgang eines  $f_k$  durch eine Nullstelle ändern. Nach (+++) behalten dabei  $f_{k-1}, f_{k+1}$  ihr Vorzeichen. Falls  $f_k(x_0) = 0$  für ein  $k \geq 2$ , liefern (\*\*\*) und (+++), dass

$$f_{k-1}(x_0) - f_{k+1}(x_0) < 0.$$

Wegen Stetigkeit gilt dies auch für  $x \approx x_0$ , zum Beispiel haben  $f_{k-1}(x), f_k(x), f_{k+1}(x)$  die Vorzeichen  $+, +, -$  für  $x' < x_0$ ,  $+, 0, -$  für  $x' = x_0$ ,  $+, -, -$  für  $x' > x_0$ , also ist  $V(x) = V(x')$ . Das gilt auch für die anderen Fälle, das heißt  $V(x)$  ändert sich nicht bei Nullstellen von  $f_2, \dots, f_{n+1}$ . Wenn  $f_1$  das Vorzeichen wechselt, ändert sich  $V$  um  $\pm 1$  (da nach (+++) das Vorzeichen von  $f_2$  gleich bleibt). Nach ( $\times$ ) muss  $V(x)$  bei  $x = x_k$  um  $+1$  ansteigen. Dazu: Für  $x < x_k$ ,  $x \approx x_k$  gilt für die Vorzeichen von  $f_1(x), f_2(x)$ :  $++, +-, -+, --$  und für  $x > x_k$ ,  $x \approx x_k$ :  $-+, --, ++, +-.$  Nur bei Übergängen von  $++$  zu  $-+$  und  $--$  zu  $+-$  steigt  $V(x)$  an, also können nur solche auftreten. Das entspricht Übergängen von dem 1. in den 2. Quadranten, beziehungsweise von dem 3. in den 4. Quadranten. Damit ist Behauptung 2 gezeigt.  $\square$

**Beispiel 3.21** (Grundmodell der Virendynamik, Nowak, May 2000). Sei

$$V(t) = \text{Anzahl der Viren zur Zeit } t \geq 0$$

$$Z(t) = \text{Anzahl der gesunden Zellen zur Zeit } t \geq 0$$

$$I(t) = \text{Anzahl der infizierten Zellen zur Zeit } t \geq 0$$

und es seien Konstanten  $\lambda, m, \mu, \nu, k, r > 0$  und Anfangswerte  $V_0, Z_0, I_0 \geq 0$  gegeben. Betrachte

$$\begin{cases} V'(t) = kI(t) - \nu V(t), & t \geq 0 \\ Z'(t) = \lambda - mZ(t) - rV(t)Z(t), & t \geq 0 \\ I'(t) = rV(t)Z(t) - \mu I(t), & t \geq 0 \\ V(0) = V_0, Z(0) = Z_0, I(0) = I_0. \end{cases}$$

Setze  $u = (V, Z, I)$ , rechte Seite  $=: f(u)$ . Klar:  $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ . Nach Picard-Lindelöf existiert genau eine Lösung. Weiter kann man zeigen, dass diese für alle  $t \geq 0$  existiert und positiv ist. Wir suchen eine positive stationäre Lösung  $u(t) = u_0 = (V_0, Z_0, I_0)$  für alle  $t \geq 0$ , d.h.  $u'(t) = 0$  für alle  $t \geq 0$ , also  $f(u_0) = 0$ . Dies gilt entweder für  $(\bar{V}, \bar{Z}, \bar{I}) = (0, \frac{\lambda}{m}, 0)$  („krankheitsfrei“) oder für

$$u_* = (V_*, Z_*, I_*) = \left( (R-1)\frac{m}{r}, \frac{\lambda}{mR}, (R-1)\frac{m\nu}{rk} \right)$$

(„endemisch“) mit Reproduktionsrate  $R = \frac{kr\lambda}{m\mu\nu} > 1$ .

Frage: Gilt  $u(t) \rightarrow u_*$  für  $t \rightarrow \infty$  ( $R > 1$ )?

Analysis 2: einfache Antwort: Theorem von Lyapunov: Sei  $R > 1$ ,  $A = f'(u_*)$ . Wenn  $S(A) = \max \{ \operatorname{Re} \lambda \mid \lambda \text{ Eigenwert von } A \} < 0$ , dann existieren  $c, \delta, \varepsilon > 0$ , sodass für alle  $u_0 > 0$  mit  $|u_0 - u_*| \leq \delta$  gilt:  $|u(t) - u_*| \leq ce^{-\varepsilon t}$  ( $\forall t \geq 0$ ) (Aulbach: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Theorem 7.6.3 und Beweis). Hier ist

$$A = f'(V_*, Z_*, I_*) = \begin{pmatrix} -\nu & 0 & k \\ -rZ_* & -m - rV_* & 0 \\ rZ_* & rV_* & -\mu \end{pmatrix}$$

und das charakteristische Polynom ist

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^3 + \underbrace{(\nu + m + rV_* + \mu)}_{=a_1} \lambda^2 + \underbrace{(\mu + \nu)(m + rV_*)}_{=a_2} \lambda + \underbrace{\mu\nu rV_*}_{=a_0}.$$

Da  $V_* > 0$ , gilt  $a_1 > 0$ ,  $a_3 > 0$ ,  $a_1 a_2 > a_3$ . Nach Theorem 3.20 ist dann  $S(A) < 0$ . Also: wenn  $u_0 \approx u_*$ , dann  $u(t) \rightarrow u_*$  exponentiell. Mehr Infos: Prüss, Schnaubelt, Zacher: Mathematische Biologie, §13.



## 4 Ergänzungen

### 4.1 Die homotope Version des Cauchyschen Integralsatzes

**Definition 4.1.** Seien  $X$  ein normierter Vektorraum,  $D \subseteq X$  offen und  $\Gamma_0, \Gamma_1 \subseteq D$  stetige geschlossene Wege mit Parametrisierungen  $\gamma_0, \gamma_1 \in C([a, b], X)$ . Die Wege  $\Gamma_0$  und  $\Gamma_1$  heißen homotop über  $D$ , wenn es eine Funktion  $h \in C([0, 1] \times [a, b], X)$  gibt, so dass

$$h(s, t) \in D, \quad h(0, t) = \gamma_0(t), \quad h(1, t) = \gamma_1(t) \\ \text{und } h(s, a) = h(s, b) \quad \forall (s, t) \in [0, 1] \times [a, b].$$

Die Funktion  $h$  heißt dann Homotopie und man schreibt

$$\Gamma_0 \underset{D}{\sim} \Gamma_1 \text{ oder } \gamma_0 \underset{D}{\sim} \gamma_1.$$

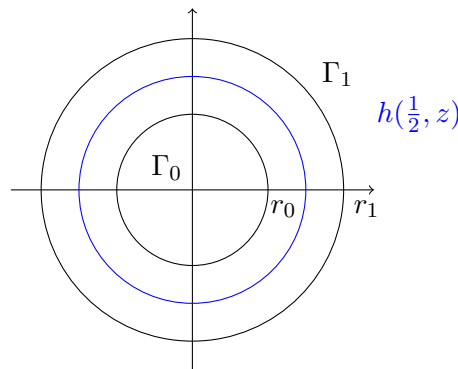
Falls dabei  $\Gamma_1 = \{x_0\}$ , also  $\gamma_1(t) = x_0$  für alle  $t \in [a, b]$  und ein  $x_0 \in D$ , so heißt  $\Gamma_0$  nullhomotop, und man schreibt  $\Gamma_0 \sim 0$ . Wenn alle geschlossenen Wege nullhomotop sind, dann heißt  $D$  einfach zusammenhängend.

**Beispiel 4.2.** (a) Seien  $\Gamma_j = \partial B(0, r_j)$  mit

$$\gamma_j(t) = r_j e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad j = 0, 1, \quad 0 < r_0 < r_1, \quad D = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Dann sind die Kreislinien  $\Gamma_0$  und  $\Gamma_1$  über  $D$  homotop mit

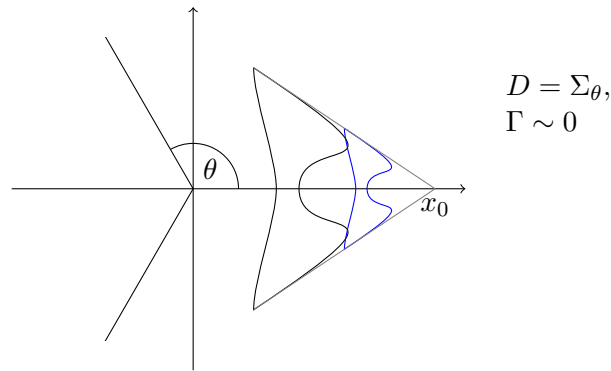
$$h(s, t) = (sr_1 + (1-s)r_0)e^{it} \text{ für } s \in [0, 1], \quad t \in [0, 2\pi].$$



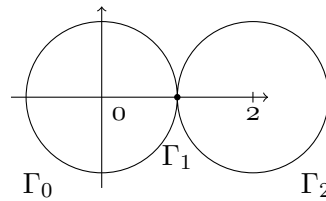
(b) Jedes sternförmige Gebiet  $D$  mit Zentrum  $x_0$  ist einfach zusammenhängend. Eine geschlossene Kurve  $\Gamma$  kann dabei mittels der Homotopie

$$h(s, t) = (1-s)\gamma(t) + sx_0 \in \overrightarrow{\gamma(t)x_0} \subseteq D$$

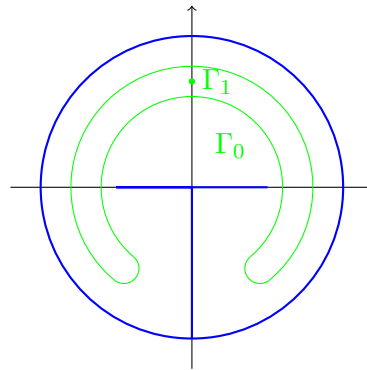
auf dem konstanten Weg  $\{x_0\}$  zusammengezogen werden.



- (c) Das Gebiet  $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ist einfach zusammenhängend. Dabei ist der Weg  $\Gamma_0 = \partial\mathbb{D}$  über  $D$  weder zu  $\Gamma_1 = \{1\}$  noch zu  $\Gamma_2 = \partial B(2, 1)$  homotop. Es gilt aber  $\Gamma_1 \underset{D}{\sim} \Gamma_2$ .



- (d) Das Gebiet  $D = \mathbb{D} \setminus (i(-1, 0) \cup [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$  ist einfach zusammenhängend, aber nicht sternförmig.



**Theorem 4.3** (Homotope Version des Cauchyschen Integralsatzes). Seien  $D \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet,  $f \in H(D)$  und  $\Gamma_0, \Gamma_1 \subseteq D$  geschlossene Kurven mit  $\Gamma_0 \underset{D}{\sim} \Gamma_1$ . Dann gilt:

$$\int_{\Gamma_0} f(z) \, dz = \int_{\Gamma_1} f(z) \, dz.$$

Inbesondere gilt

$$\int_{\Gamma_0} f(z) \, dz = 0$$

für jede nullhomotope Kurve  $\Gamma_0 \subseteq D$ . Wenn  $D$  einfach zusammenhängend ist, folgt also

$$\int_{\Gamma} f(z) \, dz = 0$$

für jede geschlossene Kurve  $\Gamma$ .

**Bemerkung 4.4.** (a) Theorem 2.23, 3.10, 3.16 und Korollar 3.17 gelten für alle nullhomotopen Kurven  $\Gamma$  in beliebigen Gebieten  $G \subseteq \mathbb{C}$ .

(b) Beispiel 4.2(c) folgt aus Theorem 4.3 für  $f(z) = \frac{1}{z}$ ,  $z \in D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Denn

$$\int_{\partial D} \frac{1}{z} dz = 2\pi \neq 0 = \int_{\{1\}} \frac{1}{z} dz = \int_{\partial B(2,1)} \frac{1}{z} dz.$$

*Beweis von 4.3.* Seien  $\gamma_0, \gamma_1: [0, 1] \rightarrow D$  Parametrisierungen von  $\Gamma_0$  und  $\Gamma_1$  (OBdA  $a = 0$  und  $b = 1$ ),  $h \in C([0, 1]^2, \mathbb{C})$  mit

$$h(s, t) \in D, \quad h(j, t) = \gamma_j(t), \quad h(s, 0) = h(s, 1) \quad \forall 0 \leq s, t \leq 1, \quad j = 0, 1.$$

Da  $[0, 1]^2$  kompakt ist, ist  $h([0, 1]^2) \subset D$  kompakt und  $h$  gleichmäßig stetig. Somit existiert ein  $\varepsilon > 0$  mit  $B(z, \varepsilon) \subseteq D$  für alle  $z \in h([0, 1]^2)$  und es existiert  $\delta > 0$  mit

$$|h(s, t) - h(s', t')| < \varepsilon,$$

falls  $(t, s), (t', s') \in [0, 1]^2$  mit

$$|t - t'|^2 + |s - s'|^2 < \delta^2. \quad (*)$$

Wähle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{\sqrt{2}}{n} < \delta$  und setze

$$z_{jk} = h\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right) \in D, \quad j, k = 0, 1, \dots, n.$$

Beachte:  $z_{jn} = h(\frac{j}{n}, 1) = h(\frac{j}{n}, 0) = z_{j0}$ ,  $z_{0k} = h(0, \frac{k}{n}) = \gamma_0(\frac{k}{n})$  und  $z_{nk} = h(1, \frac{k}{n}) = \gamma_1(\frac{k}{n})$ . Weiter setzen wir

$$I_{jk} := \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right] \times \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], \quad j, k = 0, \dots, n-1.$$

Mit (\*) folgt  $h(I_{jk}) \subseteq B(z_{jk}, \varepsilon) \subseteq D$ , da der Durchmesser von  $I_{jk}$   $\frac{\sqrt{2}}{n}$  ist. Ferner, da jede Kugel konvex ist, liegt das Viereck  $V_{jk}$  mit den Ecken

$$z_{jk}, z_{jk+1}, z_{j+1k+1}, z_{j+1k} \in h(I_{jk})$$

in  $B(z_{jk}, \varepsilon)$ . Der Integralsatz liefert für  $D = B(z_{jk}, \varepsilon)$

$$\int_{\partial V_{jk}} f(z) dz. \quad (**)$$

Betrachte Polygonzüge  $P_j$  mit den Ecken

$$z_{j0} = z_{jn}, z_{j1}, z_{j2}, \dots, z_{jn-1}, \quad j = 0, \dots, n.$$

*Behauptung 1:* Für  $j = 0, 1, \dots, n-1$  gilt  $\int_{P_j} f(z) dz = \int_{P_{j+1}} f(z) dz$ .

*Behauptung 2:*  $\int_{\Gamma_0} f(z) dz = \int_{P_0} f(z) dz$ ,  $\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{P_n} f(z) dz$ .

Aus den Behauptungen 1 und 2 folgt das Theorem.  $\square$

## 4.2 Laplace Transformationen

Sei  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  lokal integrierbar, das heißt  $f$  ist messbar und  $|f|$  ist integrierbar auf allen Intervallen  $[0, b]$ ,  $b > 0$ . Weiter sei  $f$  auf einem Intervall  $[t_0, \infty)$  exponentiell beschränkt, das heißt es gibt  $M \geq 0$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ ,  $t_0 \geq 0$ , so dass

$$|f(t)| \leq M e^{\omega t} \quad (\forall t \geq t_0).$$

Es sei  $\omega(f)$  das Infimum der obigen  $\omega$ ;  $\omega(f)$  heißt exponentielle Wachstumsschranke.

**Bemerkung.** Für  $f(t) = e^{-t^2}$  gilt  $\omega(f) = -\infty$ ; für  $g(t) = t$  ist  $\omega(g) = 0$  und das Infimum wird nicht angenommen; für  $h(t) = e^{t^2}$  gilt  $\omega(h) = \infty$  (stets  $\forall t \geq 0$ ).

*Beweis.* Es gilt:

$$e^{-t^2} \leq e^{\frac{\omega^2}{4}} e^{\omega t} \quad (\forall \omega \in \mathbb{R}, t \geq 0) \implies \omega(f) = -\infty.$$

Ferner:

$$t \leq \frac{1}{e^\omega} \quad (\forall \omega > 0, t \geq 0) \implies \omega(g) \leq 0.$$

Aber es gibt kein  $M > 0$  mit  $t \leq M$ , für alle  $t \geq 0$ . Folglich ist  $\omega(g) = 0$ .

Die letzte Behauptung beweist man ähnlich. □

Nach Beispiel 2.28 existiert die *Laplace transformation*

$$(\mathcal{L}f)(\lambda) = \hat{f}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t) dt$$

für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} \lambda > \omega(f)$  und  $\hat{f}$  ist auf

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > \omega(f)\}$$

holomorph. Weiter gilt:

$$\hat{f}^{(n)}(\lambda) = (-1)^n \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^n f(t) dt = (-1)^n \mathcal{L}(q_n f)(\lambda) \quad (\forall n \in \mathbb{N}), \quad (4.1)$$

wobei  $q_n(t) = t^n$ ,  $\operatorname{Re} \lambda > \omega(f)$ . Sei ferner  $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  lokal integrierbar mit  $\omega(g) < \infty$ . Seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Dann gilt:

$$\omega(\alpha f + \beta g) \leq \max\{\omega(f), \omega(g)\} < \infty$$

und

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{L}(f) + \beta \mathcal{L}(g) \quad (4.2)$$

auf  $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > \max\{\omega(f), \omega(g)\}\}$ . Sei nun  $f \in C^k(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$  mit

$$w := \max_{0 \leq j \leq k} \omega(f^{(j)}) \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Dann gilt

$$\mathcal{L}(f^{(k)})(\lambda) = \lambda^k \hat{f}(\lambda) - \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^j f^{(k-j-1)}(0), \quad \forall \operatorname{Re} \lambda > w. \quad (4.3)$$



*Beweis.* Für  $k = 1$ : Sei  $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ . Dann ist

$$\lambda \hat{f}(\lambda) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \underbrace{\lambda e^{-\lambda t}}_{=-\frac{d}{dt} e^{-\lambda t}} f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( + \int_0^b e^{-\lambda t} f'(t) dt + f(0) - e^{-\lambda b} f(b) \right) \stackrel{\operatorname{Re} \lambda > \omega}{=} \mathcal{L}(f')(\lambda) + f(0),$$

wobei die partielle Integration mit (2.1) wie in Ana 1 gerechtfertigt werden kann. Der Rest der Behauptung folgt per Induktion.  $\square$

Betrachte nun das Polynom  $p(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + 1_0$  mit  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ,  $a_n \neq 0$  und die Differentialgleichung

$$\begin{cases} p\left(\frac{d}{dt}\right)(u) = a_n u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = f, & t \geq 0, \\ u(0) = u_0, & u'(0) = u_1, \dots, u^{(n-1)}(0) = u_{n-1}. \end{cases} \quad (4.4)$$

Dabei sind  $u_0, \dots, u_{n-1} \in \mathbb{R}$  und ein stetiges  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\omega(f) < \infty$  gegeben.

Aus Analysis II wissen wir es gibt eine Lösung  $u \in C^n(\mathbb{R}_+)$ . Setze weiterhin

$$v(t) = (u(t), \dots, u^{(n-1)}(t)), \quad v_0 = (u_0, \dots, u_{n-1}), \quad g = (0, \dots, 0, f).$$

Dann existiert eine Hauptfundamentallösung  $e^{tA}$  mit

$$v(t) = e^{tA} v_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds, \quad (t \geq 0).$$

Ferner existieren  $M_1, M_2 \geq 0$  und  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$  mit

$$\|e^{tA}\| \leq M_1 e^{\omega_1 t}, \quad |g(t)|_2 \leq M_2 e^{\omega_2 t}, \quad t \geq 0.$$

Sei  $\omega = \max\{\omega_1, \omega_2\}$ . Dann:

$$\begin{aligned} |u^{(k)}(t)| &\leq |v(t)|_2 \leq M_1 e^{\omega_1 t} |v_0|_2 + \int_0^t M_2 e^{\omega_2(t-s)} M_1 e^{\omega_1 s} ds \\ &\leq M_1 |v_0|_2 e^{\omega t} + M_1 M_2 t e^{\omega t} \quad (k \in \{0, \dots, n-1\}, t \geq 0). \end{aligned}$$

Mit (4.4) folgt die entsprechende Abschätzung für  $u^{(n)}$ . Also ist  $\omega(u^{(k)}) \leq \omega$  für alle  $k = 0, \dots, n$ , also sind alle Ableitungen exponentiell beschränkt.

Wende nun  $\mathcal{L}$  auf (4.4) für  $\operatorname{Re} \lambda > \omega$  an. Dann gilt:

$$\hat{f}(\lambda) = \mathcal{L}\left(p\left(\frac{d}{dt}\right)(u)\right)(\lambda) \stackrel{(4.2)}{=} \sum_{k=0}^n a_k \mathcal{L}(u^{(k)})(\lambda) \stackrel{(4.3)}{=} \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \hat{u}(\lambda) - \underbrace{\sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{k-1} a_k \lambda^j \underbrace{u^{(k-j-1)}(0)}_{\stackrel{(4.4)}{=} u_{k-j-1}}}_{=: q(\lambda)}$$

. Also gilt  $\hat{f} = p\hat{u} - q$  und somit

$$\hat{u}(\lambda) = \frac{1}{p(\lambda)} \hat{f}(\lambda) + \frac{q(\lambda)}{p(\lambda)} \quad (4.5)$$

für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ ,  $p(\lambda) \neq 0$ . Hierbei sind  $f$ ,  $p$  und  $q$  gegeben! Es stellen sich noch folgende Fragen:

- 1) Wie kann man  $\hat{f}$  berechnen?
- 2) Existiert  $\mathcal{L}^{-1}$ ? Gibt es eine Formel?

**Beispiel 4.5.** (a)  $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$  wobei  $0 \leq a < b \leq \infty$ . Für  $b = \infty$  gilt

$$|f(t)| \leq 1 \leq e^{\omega t}, \quad \forall \omega > 0, \quad t \geq 0$$

und

$$\nexists \omega \leq 0, \quad M \geq 0 \text{ mit } |f(t)| \leq M e^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Folglich ist  $\omega(f) = 0$ . Für  $b < \infty$  gilt

$$|f(t)| \leq \begin{cases} 1, & t < b \\ 0, & t \leq b \end{cases} \leq e^{\omega b} e^{-\omega t} \quad (\forall t \geq 0, \quad \omega \in \mathbb{R}).$$

Folglich ist  $\omega(f) = -\infty$ . Sei  $\operatorname{Re} \lambda > \omega(f)$ . Dann:

$$\hat{f}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t) dt = \int_a^b e^{-\lambda t} dt = \begin{cases} b - a, & \text{falls } b < \infty, \\ \frac{1}{\lambda}(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}), & b < \infty, \lambda \neq 0, \\ \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda a}, & b = \infty. \end{cases}$$

Für  $b = \infty$  hat  $\hat{f}$  also eine eindeutige holomorphe Fortsetzung auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

- (b)  $f(t) = t^m$  für festes  $n \in \mathbb{N}$ . Wie oben gilt  $\omega(f) = 0$ . Sei  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ . Dann:

$$\hat{f}(\lambda) = \mathcal{L}(q_n \mathbb{1}) \stackrel{(4.1)}{=} (-1)^n \hat{\mathbb{1}}(\lambda)^{(n)} \stackrel{(a)}{=} (-1)^n \left( \frac{d}{d\lambda} \right)^n \frac{1}{\lambda} = n! \lambda^{-(n+1)}$$

Folglich existiert keine holomorphe Fortsetzung auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit Pol  $(n+1)$ ter Ordnung in 0.

- (c)  $f(t) = e^{at} =: e_a(t)$  für festes  $a \in \mathbb{C}$ . Es gilt  $\omega(f) = \operatorname{Re} a$ . Für  $\operatorname{Re} \lambda > \operatorname{Re} a$  gilt:

$$\hat{f}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{at} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{(a-\lambda)t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^{(a-\lambda)t}}{a-\lambda} \Big|_0^b = \frac{1}{\lambda - a}.$$

Also gibt es keine holomorphe Fortsetzung auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Vergemeinerung: Verschiebungsregel: Sei  $a \in \mathbb{C}$ ,  $f$  mit  $\omega(f) < \infty$ ,  $f$  lokal integrierbar. Sei  $\operatorname{Re} \lambda > \operatorname{Re} a + \operatorname{Re} \omega(f)$ . Dann gilt:

$$\mathcal{L}(e_a f)(\lambda) = \int_0^\infty \underbrace{e^{-\lambda t} e^{at}}_{e^{-(\lambda-a)t}} f(t) dt = \hat{f}(\lambda - a). \quad (4.6)$$

- (d)  $f(t) = \cos(\alpha t)$  für festes  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann ist

$$f = \frac{1}{2}(e_{i\alpha} + e_{-i\alpha})$$

und damit

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{2}(\hat{e}_{i\alpha} + \hat{e}_{-i\alpha}) \stackrel{(c)}{=} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda - i\alpha} + \frac{1}{\lambda + i\alpha} \right) = \frac{1}{\lambda^2 + \alpha^2}.$$

Hierbei ist  $\omega(f) = 0$  und  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ . Weiter hat  $\hat{f}$  eine holomorphe Fortsetzung auf  $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\alpha\}$ .

- (e)  $f(t) = t^{\alpha-1}$ ,  $t > 0$ ,  $f(0) = 0$ , wobei  $\alpha > 0$  fest. Dann ist  $f$  integrierbar auf  $[0, b]$  für alle  $b > 0$  und

$$|f(t)| \leq 1, \quad \forall t \geq 1 \implies \omega(f) \leq 0.$$

Es gilt ferner:  $\omega(f) = 0$ . Sei  $\lambda > 0$ . Dann gilt:

$$\hat{f}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{\alpha-1} dt \stackrel{s=\lambda t}{=} \int_0^\infty e^{-s} \left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{\lambda} ds = \lambda^{-\alpha} \Gamma(\alpha)$$

nach Beispiel 2.39. Die Formel gilt auf  $\mathbb{C}_+$  (mit  $\lambda^{-\alpha} = e^{-\alpha \log \lambda}$ ). Weiter hat  $\hat{f}$  eine holomorphe Fortsetzung auf  $\Sigma_\pi = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ .

- (f) Sei  $f(t) = n$  für  $t \in [n^2, (n+1)^2)$ . Dann ist  $\omega(f) = 0$ . Sei  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ . Dann:

$$\hat{f}(\lambda) = \sum_{n=0}^\infty \int_{n^2}^{(n+1)^2} n e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \left( \sum_{n=1}^\infty n e^{-n^2 \lambda} - \sum_{n=0}^\infty n e^{-(n+1)^2 \lambda} \right) \stackrel{j=n+1}{=} \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^\infty e^{-j^2 \lambda}.$$

Remmert II, §11.2.4 liefert: Es gibt kein  $iz \in i\mathbb{R}$ , so dass  $\hat{f}$  eine holomorphe Fortsetzung auf eine Umgebung von  $iz$  hat (Kronecker).

Seien  $f, g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  messbar mit

$$|f(t)| \leq M_1 e^{\omega_1 t}, \quad |g(t)| \leq M_2 e^{\omega_2 t}$$

für alle  $t \geq 0$  und Konstanten  $M_1, M_2 \geq 0$  und  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ . Dann definieren wir die Faltung  $f * g$  durch:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s) ds, \quad t \geq 0.$$

Diese ist integrierbar.

*Beweis.* Sei  $\omega = \max\{\omega_1, \omega_2\}$ ,  $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ . Setze  $D = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s \leq t\}$ . Dann:

$$\left| e^{-\lambda t} \mathbb{1}_D(s, t) f(t-s)g(s) \right| \leq e^{-\operatorname{Re} \lambda t} \mathbb{1}_D(s, t) M_1 e^{\omega(t-s)} M_2 e^{\omega s} = e^{-t \operatorname{Re} \lambda} \mathbb{1}_D(s, t) M_1 M_2 e^{\omega t} =: \varphi(s, t).$$

Damit:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(s, t) ds dt = \int_0^\infty t M_1 M_2 e^{(\omega - \operatorname{Re} \lambda)t} dt < \infty \quad (\operatorname{Re} \lambda > \omega).$$

Also ist  $\varphi$  integrierbar auf  $\mathbb{R}^2$  und somit auch die Faltung. □

Für die Laplacetransformation der Faltung gilt dann:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f * g)(t) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^t f(t-s)g(s) ds dt \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^\infty \int_s^\infty e^{-\lambda(t-s)} f(t-s) e^{-\lambda s} g(s) dt ds \\ &\stackrel{\substack{t=r+s \\ r=t-s}}{=} \int_0^\infty e^{-\lambda r} \int_0^\infty e^{-\lambda r} f(r) dr ds = \hat{f}(\lambda) \hat{g}(\lambda) \end{aligned} \quad (4.7)$$

für alle  $\lambda$  mit  $\operatorname{Re} \lambda > \max\{\omega_1, \omega_2\}$ .

**Erinnerung:** Sei  $J \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall. Eine Nullmenge  $N \subseteq J$  ist eine Borelmenge mit

$$\int_N dx = \int_J \mathbb{1}_N(x) dx = 0.$$

Man sagt, dass  $f, g: J \rightarrow \mathbb{C}$  *fast überall* gleich sind, wenn es eine Nullmenge  $N \subseteq J$  gibt mit  $f(t) = g(t)$  für alle  $t \in J \setminus N$ . Eine Nullmenge kann kein Intervall mit Länge  $> 0$  enthalten (\*). Wenn  $\varphi \in C^1(J)$ , dann ist auch  $\varphi(N)$  eine Nullmenge (vgl. Analysis 3, Lem. 3.33 oder Übung 3.2).

**Theorem 4.6** (Eindeutigkeitssatz für die Laplacetransformation). *Seien  $f, g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  messbar und es gebe Konstanten  $M \geq 0$  und  $\omega \in \mathbb{R}$  mit  $|f(t)|, |g(t)| \leq Me^{\omega t}$  für alle  $t \geq 0$ . Weiter gebe es Zahlen  $l > 0$  und  $\lambda_0 \geq \omega + l$ , sodass  $\hat{f}(\lambda_n) = \hat{g}(\lambda_n)$  für alle  $\lambda_n = \lambda_0 + nl$  gilt,  $n \in \mathbb{N}_0$ . Dann ist  $f = g$  fast überall und  $f(t) = g(t)$  für alle gemeinsamen Stetigkeitsstellen  $t \geq 0$  von  $f$  und  $g$ .*

*Beweis.* Setze  $h = f - g$  (das ist messbar). Es gilt  $|h(t)| \leq 2Me^{\omega t}$  für alle  $t \geq 0$  und  $\hat{h}(\lambda_n) = \hat{f}(\lambda_n) - \hat{g}(\lambda_n) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ . Damit folgt

$$0 = \int_0^\infty e^{-nlt} e^{-\lambda_0 t} h(t) dt.$$

Nun machen wir eine Transformation  $\tau = e^{-lt} \iff t = -\frac{\ln \tau}{l}, \frac{d\tau}{dt} = -le^{-lt} = -l\tau$ :

$$0 = \int_0^1 \underbrace{\tau^n e^{\frac{\lambda_0}{l} \ln \tau} h\left(-\frac{\ln \tau}{l}\right) \frac{1}{l\tau}}_{=: \varphi(\tau), 0 < \tau \leq 1} d\tau.$$

Beachte:  $\varphi$  ist messbar,  $\varphi \leq \frac{1}{l\tau} e^{\frac{\lambda_0}{l} \ln \tau} 2Me^{-\omega \frac{\ln \tau}{l}} = \frac{M}{l} \tau^{\frac{\lambda_0}{l} - \frac{\omega}{l} - 1} \leq \frac{M}{l}$ , da  $0 < \tau \leq 1$  und  $\lambda_0 - \omega \geq l$ . Lemma 4.7 zeigt dann, dass  $\varphi = 0$  fast überall  $\implies h = 0$  fast überall  $\implies f = g$  fast überall.

Sei  $t$  eine gemeinsame Stetigkeitsstelle von  $f$  und  $g$  und  $N \subseteq \mathbb{R}_+$  eine Nullmenge mit  $f(s) = g(s)$  für alle  $s \in \mathbb{R}_+ \setminus N$ . Nach (\*) existiert eine Folge  $t_n \rightarrow t$  mit  $t_n \in \mathbb{R}_+ \setminus N \implies f(t_n) = g(t_n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Mit  $n \rightarrow \infty$  folgt  $f(t) = g(t)$ .  $\square$

**Lemma 4.7.** *Sei  $\varphi \in L^2((0, 1))$  mit  $\int_0^1 t^n \varphi(t) dt = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ . Dann ist  $\varphi = 0$  fast überall.*

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$ . Nach dem Approximationssatz von Weierstrass (Analysis 3) existieren Polynome  $p_1, p_2$  mit  $\|\operatorname{Re} \varphi - p_1\|_\infty \leq \varepsilon, \|\operatorname{Im} \varphi - p_2\|_\infty \leq \varepsilon$ . Setze  $p = p_1 + ip_2$ . Dann ist  $\|\varphi - p\|_\infty = \|\operatorname{Re} \varphi - p_1 + i(\operatorname{Im} \varphi - p_2)\|_\infty \leq 2\varepsilon$ . Sei etwa  $p(t) = \sum_{k=0}^m b_k t^k$ . Dann:  $\square$