

## 2. Topologische Begriffe

### Definition

$(a_n)$  sei eine Folge in  $\mathbb{C}$ .

- (1)  $(a_n)$  heißt **beschränkt**  $\iff \exists c \geq 0 : |a_n| \leq c \ \forall n \in \mathbb{N}$
- (2)  $(a_n)$  heißt eine **Cauchy-Folge** (CF) :  $\iff \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \epsilon \ \forall n, m \geq n_0$
- (3)  $(a_n)$  heißt **konvergent** :  $\iff \exists a \in \mathbb{C} : |a_n - a| \rightarrow 0$  (  $\iff \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \epsilon \ \forall n \geq n_0$  )  
In diesem Fall ist  $a$  eindeutig bestimmt (Übung) und heißt der **Grenzwert** (GW) oder **Limes** von  $(a_n)$ . Man schreibt :  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  oder  $a_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$
- (4)  $(a_n)$  heißt **divergent** :  $\iff (a_n)$  konvergiert nicht.

### Beispiel

$$a_n = \frac{1}{n} + i\left(1 + \frac{1}{n}\right); |a_n - i| = \left|\frac{1}{n} - i\frac{1}{n}\right| = \frac{|1-i|}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \Rightarrow a_n \rightarrow i$$

Wie in  $\mathbb{R}$  bzw. mit 1.3, zeigt man:

### Satz 2.1

$(a_n), (b_n)$  seien Folgen in  $\mathbb{C}$ ;  $a, b \in \mathbb{C}$

- (1)  $(a_n)$  konvergent  $\Rightarrow a_n$  ist beschränkt.
- (2)  $(a_n)$  konvergent :  $\iff (\operatorname{Re} a_n), (\operatorname{Im} a_n)$  sind konvergent. In diesem Fall gilt  $\lim a_n = \lim \operatorname{Re} a_n + i \lim \operatorname{Im} a_n$
- (3) Es gelte  $(a_n) \rightarrow a, (b_n) \rightarrow b$ . Dann:  
 $a_n + b_n \rightarrow a + b, a_n b_n \rightarrow ab, \bar{a}_n \rightarrow \bar{a}, |a_n| \rightarrow |a|$   
Ist  $a \neq 0 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : a_n \neq 0 \ \forall n \geq m$  und  $\frac{1}{a_n} \rightarrow \frac{1}{a}$   
Ist  $a_{n_k}$  eine Teilfolge (TF) von  $(a_n) \Rightarrow a_{n_k} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$
- (4) Ist  $(a_n)$  beschränkt  $\Rightarrow (a_n)$  enthält eine konvergente TF (**Bolzano-Weierstraß**)
- (5)  $(a_n)$  ist eine CF  $\iff (a_n)$  ist konvergent (**Cauchy Kriterium**)

### Definition

$(a_n)$  sei eine Folge in  $\mathbb{C}$  und  $s_n := \sum_{i=1}^n a_i \ n \in \mathbb{N}$ .  $(s_n)$  heißt eine **unendliche Reihe** und wird mit  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  bezeichnet.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  heißt konvergent/divergent  $\iff (s_n)$  konvergent/divergent. Ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergent, so schreibt man  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$

### Beispiel (Geometrische Reihe)

$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + \dots$  ( $z \in \mathbb{C}$ ). Wie in  $\mathbb{R}$  zeigt man:

## 2. Topologische Begriffe

- (1)  $1 + z + \dots + z^n = \begin{cases} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} & , \text{ falls } z \neq 1 \\ n+1 & , \text{ falls } z = 1 \end{cases}$
- (2)  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  konvergent  $\iff |z| < 1$ . In diesem Fall  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

### Definition

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  heißt **absolut konvergent** :  $\iff \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  konvergent.

Wörtlich wie in  $\mathbb{R}$  beweist, bzw. formuliert man:

### Satz 2.2

$(a_n)$  sei eine Folge in  $\mathbb{C}$

- (1) Ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergent  $\Rightarrow a_n \rightarrow 0$
- (2) Ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolut konvergent  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergent und  $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$
- (3) Es gelten Cauchy Kriterium, Majorantenkriterium, Minorantenkriterium, Wurzelkriterium, Quotientenkriterium und der Satz über das Cauchyprodukt.

### Definition

Sei  $A \subseteq \mathbb{C}$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$  und  $\epsilon > 0$

- (1)  $U_{\epsilon}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \epsilon\}$   $\epsilon$ -Umgebung von  $z_0$  oder **offene Kreisscheibe** von  $z_0$  mit Radius  $\epsilon$   
 $\overline{U_{\epsilon}(z_0)} := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \epsilon\}$  (**abgeschlossene Kreisscheibe** von  $z_0$  mit Radius  $\epsilon$ )  
 $\dot{U}_{\epsilon}(z_0) := U_{\epsilon}(z_0) \setminus \{z_0\}$  (**punktierte Kreisscheibe**)
- (2)  $z_0 \in A$  heißt **innerer Punkt von A** :  $\iff \exists \epsilon > 0 : U_{\epsilon}(z_0) \subseteq A$   
 $A^{\circ} := \{z \in A | z \text{ innerer Punkt von } A\}$  heißt das **Innere von A**. Klar ist:  $A^{\circ} \subseteq A$   
 $A$  heißt **offen** :  $\iff A = A^{\circ}$
- (3)  $A$  heißt **abgeschlossen** :  $\iff \mathbb{C} \setminus A$  ist offen.
- (4)  $A$  heißt **beschränkt** :  $\iff \exists c \geq 0 : |a| \leq c \forall a \in A$
- (5)  $A$  heißt **kompakt** :  $\iff A$  ist beschränkt und abgeschlossen.
- (6)  $z_0$  heißt ein **Häufungspunkt** von  $A$  :  $\iff \forall \epsilon > 0 : \dot{U}_{\epsilon}(z_0) \cap A \neq \emptyset$ .  
 $\bar{A} := \{z \in \mathbb{C} | z \text{ ist HP von } A\} \cup A$  heißt die **Abschließung** von  $A$
- (7)  $z_0$  heißt ein **Randpunkt** von  $A$   
:  $\iff \forall \epsilon > 0 : U_{\epsilon}(z_0) \cap A \neq \emptyset$  und  $U_{\epsilon}(z_0) \cap (\mathbb{C} \setminus A) \neq \emptyset$   
 $\partial A := \{z \in \mathbb{C} | z \text{ ist Randpunkt von } A\}$  wird als **Rand von A** bezeichnet

Wie in  $\mathbb{R}$  zeigt man:

**Satz 2.3**

- (1)  $A$  heißt abgeschlossen  $\iff A = \bar{A} \iff$  der Grenzwert jeder konvergenten Folge aus  $A$  gehört zu  $A$ .
- (2)  $z_0$  ist HP von  $A \iff \exists$  Folge  $(z_n)$  in  $A \setminus \{z_0\} : z_n \rightarrow z_0$
- (3)  $A$  ist kompakt :  $\iff$  jede Folge in  $A$  enthält eine konvergente Teilfolge deren Limes zu  $A$  gehört  
 $\iff$  jede offene Überdeckung von  $A$  enthält eine endliche Überdeckung von  $A$ .

