

Kapitel 5

Hyperbolische Geometrie im 20. Jahrhundert

5.1 δ -hyperbolische Räume nach Gromov

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine *Geodätische* oder ein *geodätisches Segment* von $x \in X$ nach $y \in X$ ist eine Abbildung $c : [0, l] \rightarrow X$, $c(0) = x$, $c(l) = y$, sodass für alle $t_1 \leq t_2 \in [0, l]$ gilt: $d(c(t_1), c(t_2)) = t_2 - t_1$. Für das Segment schreiben wir $[x, y]$. Ein metrischer Raum heißt *geodätisch*, falls es zwischen je 2 Punkten stets ein geodätisches Segment gibt.

Beispiel 5.1.1 Die Standardräume $\mathbb{E}^n, \mathbb{S}^n, \mathbb{H}^n$ sind alle geodätisch. Dabei sind \mathbb{E}^n und \mathbb{H}^n sogar eindeutig geodätisch, die Geodätischen zwischen je zwei Punkten sind also eindeutig. Zwischen antipodalen Punkten auf der Sphäre hingegen gibt es unendlich viele Geodätische.

Sei nun $\delta \geq 0$. Ein geodätischer, metrischer Raum (X, d) heißt *δ -hyperbolisch*, falls alle geodätischen Dreiecke in X δ -dünn sind, d.h. für alle $x_1, x_2, x_3 \in X$ und ein Dreieck Δ beschreibende geodätischen Segmente $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, $[x_1, x_3]$ gilt

$$[x_i, x_j] \subseteq U_\delta(\Delta \setminus [x_i, x_j])$$

Für eine Teilmenge $Y \subseteq X$ ist dabei

$$U_\delta(Y) = \{x \in X \mid d(x, y) \leq \delta \text{ für ein } y \in Y\}$$

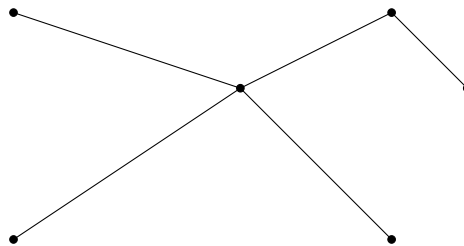
die δ -Umgebung von Y . (X, d) heißt *Gromov-hyperbolisch*, falls (X, d) δ -hyperbolisch ist für ein $\delta \geq 0$.

Beispiel 5.1.2 (i) Sei (X, d) ein beschränkter metrischer Raum, d.h. es gilt

$$\text{diam}(X) = \max_{x, y \in X} d(x, y) < \infty.$$

Dann ist X Gromov-hyperbolisch mit $\delta = \text{diam}(X)$, dem Durchmesser von X . Damit ist δ -hyperbolisch eine Eigenschaft der "Grob-Geometrie" ("large scale").

- (ii) Kombinatorische Räume (als eindimensionale Simplicialkomplexe) mit der induzierten Längenmetrik (d.h. jeder 1-Simplex besitzt die Länge 1): Erinnerung: Ein *kombinatorischer Graph* G besteht aus Ecken $E(G)$ (0-Simplices) und Kanten $K(G)$ (1-Simplices). Ein *Baum* ist ein Graph ohne Kreise, wobei ein Kreis ein geschlossener Weg ist.

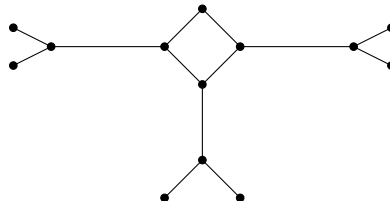


Die Metrik auf einem Graphen ist für $x, y \in E(G)$ definiert wie folgt:

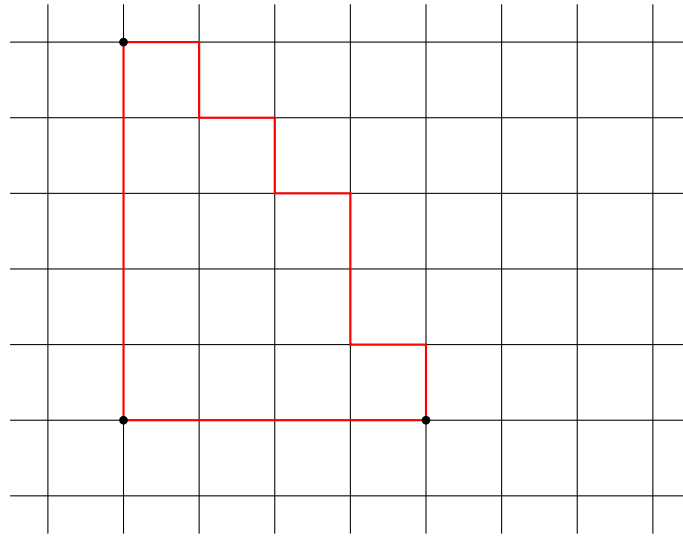
$$d_G(x, y) = \inf_{c \text{ Kantenzug}} L(c)$$

wobei ein Kantenzug zwei Ecken verbindet und jede Kante isometrisch zu $[0, 1]$ ist. Man kann als Verfeinerung auch den Abstand für Punkte auf den Kanten definieren. Man sieht leicht, dass Bäume 0-hyperbolisch sind.

- (iii) Die euklidische Ebene \mathbb{E}^2 ist nicht Gromov-hyperbolisch, da Dreiecke beliebig groß werden können.
- (iv) Ein Graph, der kein Baum ist, kann trotzdem δ -hyperbolisch sein (für $\delta > 0$):



- (v) Es gibt auch Graphen, die nicht δ -hyperbolisch sind:



- (vi) \mathbb{E}^n ist nicht Gromov-hyperbolisch für $n \geq 2$. \mathbb{E}^1 hingegen ist 0-hyperbolisch.
- (vii) Die klassischen hyperbolischen Räume $(\mathbb{H}^n, d_{\mathbb{H}^n})$, $(\mathbb{L}^n, d_{\mathbb{L}^n})$ und $(\mathbb{D}^n, d_{\mathbb{D}^n})$ sind δ -hyperbolisch für $\delta = \ln(1 + \sqrt{2})$ (bereits gezeigt für $n = 2$, $n \geq 3$ als Übung (Aufgabe 13.1)).

Wir wissen nun, dass kombinatorische Bäume 0-hyperbolisch sind. Gilt auch die Umkehrung? Nicht ganz! Die Ebene \mathbb{R}^2 ausgestattet mit der SNCF-Metrik

$$d_{\text{SNCF}}(x, y) = \begin{cases} \|x - y\|_e, & \text{falls } x = \lambda y \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R} \\ \|x\|_e + \|y\|_e, & \text{andernfalls} \end{cases}$$

ist 0-hyperbolisch, aber kein Baum.

- Definition 5.1.3** (i) Sei (X, d) ein geodätischer, metrischer Raum. Ein *topologisches Segment* zwischen $x, y \in X$ ist ein Homöomorphismus $\gamma : [0, 1] = I \longrightarrow \gamma(I) \subseteq X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$.
- (ii) Ein *reeller Baum* (oder \mathbb{R} -Baum) ist ein geodätischer metrischer Raum (X, d) mit der Eigenschaft, dass es für je zwei Punkte $x, y \in X$ genau ein topologisches Segment zwischen x und y gibt.

Satz 5.1.4 Ein geodätischer metrischer Raum ist 0-hyperbolisch genau dann, wenn er ein \mathbb{R} -Baum ist.

Beweis. " \Leftarrow " Sei (X, d) ein \mathbb{R} -Baum, $x, y, z \in X$ und $[x, y] \cup [y, z] \cup [x, z]$ das durch die drei Punkte eindeutig festgelegte geodätische Dreieck. Wir zeigen exemplarisch $[x, y] \subseteq [y, z] \cup [x, z]$. Angenommen es gelte $[x, y] \not\subseteq [y, z] \cup [x, z]$. Wähle dann einen Teilweg $[x', y'] \subseteq [x, y]$ sodass $[x', y'] \cap ([x, z] \cup [y, z]) = \{x', y'\}$. Dann ist der Weg $\overline{x'zy'}$ jedoch ein

von $[x', y']$ verschiedenes topologisches Segment zwischen x' und y' , ein Widerspruch zur Eindeutigkeit.

" \Rightarrow " Sei nun (X, d) 0-hyperbolisch. Da in einem 0-hyperbolischen Raum geodätische Segmente eindeutig sind, ist lediglich zu zeigen, dass jedes topologische Segment auch ein geodätisches Segment ist. Seien $x, y \in X$ und $\gamma : I \rightarrow \gamma(I)$ ein topologisches Segment, das x und y verbindet. Weiter sei $[x, y]$ das eindeutige geodätische Segment zwischen x und y .

Beh. (a) Für jedes $\epsilon > 0$ gilt $[x, y] \subseteq U_\epsilon(\text{Bild } \gamma)$.

Mit der Behauptung folgt: $\text{Bild } \gamma = [x, y]$. Denn als homöomorphes Bild eines Intervalls ist $\text{Bild } (\gamma)$ vollständig. Für alle $z \in [x, y]$ existiert also $t_n \in I$ mit $d(z, \gamma(t_n)) \leq \frac{1}{n}$. Die Dreiecksungleichung liefert dann für $n \leq m$

$$d(\gamma(t_n), \gamma(t_m)) \leq \frac{2}{n},$$

$(\gamma(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ist also eine Cauchyfolge und konvergiert, da $\text{Bild } \gamma$ vollständig ist. Damit gilt $\gamma(t_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma(t^*)$ für ein $t^* \in I$. Es folgt

$$d(z, \gamma(t^*)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(z, \gamma(t_n)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

also $z = \gamma(t^*)$. Insgesamt gilt also $[x, y] \subseteq \text{Bild } \gamma$ und schließlich $\text{Bild } \gamma = [x, y]$, was zu zeigen war. Es bleibt noch die Behauptung zu beweisen.

Bew. (a) Sei $\epsilon > 0$. Da $\text{Bild } \gamma$ als stetiges Bild eines Kompaktums ebenfalls kompakt ist, existieren $N \in \mathbb{N}$ und Punkte $x = x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N = y$ auf $\text{Bild } \gamma$, sodass $d(x_{i-1}, x_i) \leq 2\epsilon$ für alle $i \in \{1, \dots, N\}$. Das eindeutige geodätische Segment $[x_{i-1}, x_i]$ liegt dann in einer ϵ -Umgebung von $\{x_{i-1}, x_i\}$, also auch in einer ϵ -Umgebung von $\text{Bild } \gamma$. Da X nach Voraussetzung 0-hyperbolisch ist, folgt (mit Induktion)

$$[x, y] = [x_0, x_N] \subseteq \bigcup_{i=1}^N [x_{i-1}, x_i] \subseteq U_\epsilon(\text{Bild } \gamma),$$

woraus die Behauptung folgt. □

5.2 Quasi-Isometrien und Quasi-Geodätische

Definition 5.2.1 Sei $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen.

(i) f heißt *topologische Isometrie*, falls

$$d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y))$$

für alle $x, y \in X$.

- (ii) f heißt λ -Bilipschitz-Abbildung, falls eine Konstante $\lambda \geq 1$ existiert, sodass

$$\frac{1}{\lambda}d_X(x, y) \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq \lambda d_X(x, y)$$

für alle $x, y \in X$. Insbesondere sind 1-Bilipschitz-Abbildungen gerade topologische Isometrien.

- (iii) f heißt (λ, ϵ) -quasi-isometrische Einbettung, falls Konstanten $\lambda \geq 1, \epsilon \geq 0$ existieren, sodass

$$\frac{1}{\lambda}d_X(x, y) - \epsilon \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq \lambda d_X(x, y) + \epsilon$$

für alle $x, y \in X$. Insbesondere sind $(\lambda, 0)$ -quasi-isometrische Einbettungen gerade λ -Bilipschitz-Abbildungen.

- (iv) f heißt (λ, ϵ) -Quasi-Isometrie, falls f eine (λ, ϵ) -quasi-isometrische Einbettung ist und zusätzlich eine Konstante $D \geq 0$ existiert, sodass jeder Punkt von Y in einer D -Umgebung von $f(X) \subseteq Y$ liegt, das Bild also " D -dicht" ist. Insbesondere ist f für $D = 0$ surjektiv.
- (v) Zwei metrische Räume (X, d_X) und (Y, d_Y) heißen *quasi-isometrisch*, falls eine Quasi-Isometrie $f : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$ existiert.

Im Folgenden werden wir quasi-isometrische Invarianten bestimmen, um das Klassifikationsproblem lösen zu können.

Beispiel 5.2.2 (i) Ein metrischer Raum (X, d) ist quasi-isometrisch zu einem Punkt genau dann, wenn $\text{diam}X < \infty$.

- (ii) \mathbb{Z} mit der von \mathbb{R} induzierten Metrik ist quasi-isometrisch zu \mathbb{R} (mit $f : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}, \lambda = 1, \epsilon = 0$ und $D = 1$). Genau so sind \mathbb{Z}^n und \mathbb{R}^n quasi-isometrisch.

- (iii) die stetigen Funktionen $\mathcal{C}(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ sind quasi-isometrisch zu \mathbb{R} .

- (iv) Aus der geometrischen Gruppentheorie: Jede endlich erzeugte Gruppe $G = \langle S \rangle$ definiert auf natürliche Weise eine Metrik auf G , wodurch G zum metrischen Raum (G, d_S) wird (beachte, dass die Metrik vom Erzeugendensystem abhängt). Ist S' ein weiteres Erzeugendensystem, so sind die resultierenden metrischen Räume (G, d_S) und $(G, d_{S'})$ quasi-isometrisch.

Was passiert nun mit Geodätischen unter Quasi-Isometrien? Erinnerung: Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist eine Geodätische eine isometrische Einbettung $\gamma : I \longrightarrow X$ für ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Analog ist eine (λ, ϵ) -Quasi-Geodätische in einem metrischen Raum (X, d) eine (λ, ϵ) -quasi-isometrische Einbettung $c : I \longrightarrow X$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall in \mathbb{R} oder in $\mathbb{R} \cap \mathbb{Z}$ ist, das heißt

es gilt

$$\frac{1}{\lambda}|t - t'| - \epsilon \leq d(c(t), c(t')) \leq \lambda|t - t'| + \epsilon$$

für alle $t, t' \in I$. Falls $I = [0, \infty) = \mathbb{R}_+^0$, so heißt c *geodätischer Strahl*. Beachte: Für $\epsilon \neq 0$ ist eine (λ, ϵ) -Quasi-Geodätische nicht zwingend stetig! Wir werden sehen: In hyperbolischen Räumen sind Quasi-Geodätische jedoch "nahe" bei Geodätischen (man nennt dies *Trapping* oder *Stabilität* von Geodätischen). Dies wird zeigen, dass Hyperbolizität eine quasi-isometrische Invariante ist.

Bemerkung 5.2.3 *Beachte: Trapping gilt in der euklidischen Ebene \mathbb{E}^2 nicht: Die Spirale*

$$c : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{E}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t \cos(\log 1 + t) \\ t \sin(\log 1 + t) \end{pmatrix}$$

ist ein quasi-geodätischer Strahl, kann aber nicht durch einen geodätischen Strahl "eingefangen" werden.

Sei nun (X, d) ein metrischer Raum und $c : [a, b] \longrightarrow X$ eine stetige Kurve. Wir definieren die *Länge von c* durch

$$l(c) := \sup_{a=t_0 \leq \dots \leq t_n=b} \sum_{i=0}^{n-1} d(c(t_i), c(t_{i+1})).$$

c heißt *rektifizierbar*, falls $l(c) < \infty$.

Bemerkung 5.2.4 (Parametrisierung nach Bogenlänge) *Sei $c : [a, b] \longrightarrow X$ rektifizierbar mit $l := l(c)$. Weiter sei*

$$\lambda : [a, b] \longrightarrow [0, l], \quad t \mapsto \lambda(t) = l(c|_{[a, t]}).$$

Dann ist $\tilde{c} : [0, l] \longrightarrow X$ mit $\tilde{c} \circ \lambda = c$ rektifizierbar und es gilt $l(\tilde{c}|_{[a, t]}) = t$.

Beweis. Siehe Bridson-Haifliger, S.13. □

Satz 5.2.5 *Sei (X, d) ein δ -hyperbolischer, geodätischer metrischer Raum und $c : [a, b] \longrightarrow X$ ein stetiger, rektifizierbarer Weg in X mit Anfangspunkt $p = c(a)$ und Endpunkt $q = c(b)$. Sei Weiter $[p, q]$ ein geodätischer Segment, das p und q verbindet. Dann gilt für alle $x \in [p, q]$:*

$$d(x, \text{Bild } c) \leq \delta |\log_2 l(c)| + 1.$$

Beweis. Ist $l(c) \leq 1$, so gilt

$$d(x, \text{Bild } c) \leq d(x, p) \leq d(p, q) \leq l(c) \leq 1 \leq \delta |\log_2 l(c)| + 1,$$

die Behauptung ist also klar. Sei also $l(c) > 1$. Nach Bemerkung 2.4 können wir ohne Einschränkung annehmen, dass c eine Abbildung $c : [0, 1] \rightarrow X$ ist, die Bild c proportional zur Bogenlänge parametrisiert, das heißt es gilt

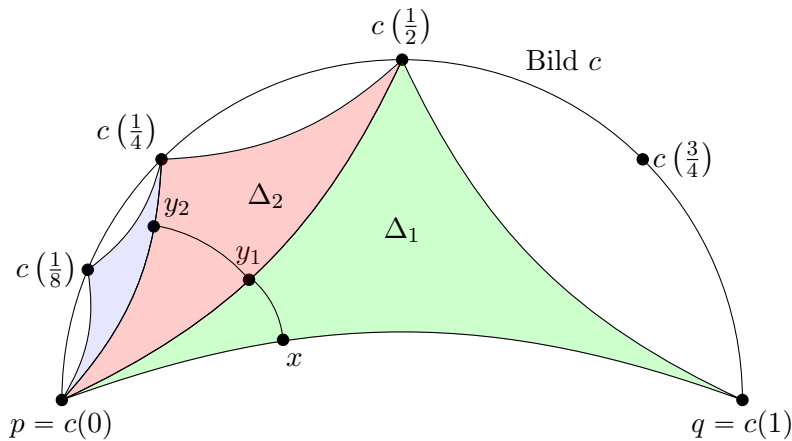
$$d(c(t), c(t')) = l(c)|t - t'|$$

für $t, t' \in [0, 1]$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$\frac{l(c)}{2^{N+1}} < 1 \leq \frac{l(c)}{2^N}.$$

Betrachte nun das Dreieck

$$\Delta_1 := \Delta \left(\left[c(0), c\left(\frac{1}{2}\right) \right], \left[c\left(\frac{1}{2}\right), c(1) \right], [c(0), c(1)] \right)$$



Dann ist Δ_1 ein geodätisches Dreieck, dass die Seite $[p, q]$ enthält. Sei nun $x \in [p, q] = [c(0), c(1)]$. Da X δ -hyperbolisch ist, können wir $y_1 \in [c(0), c(\frac{1}{2})] \cup [c(\frac{1}{2}), c(1)]$ derart wählen, dass $d(x, y_1) \leq \delta$. Falls $y_1 \in [c(0), c(\frac{1}{2})]$, betrachte ein weiteres Dreieck

$$\Delta_2 := \Delta \left(\left[c(0), c\left(\frac{1}{2}\right) \right], \left[c(0), c\left(\frac{1}{4}\right) \right], \left[c\left(\frac{1}{4}\right), c\left(\frac{1}{2}\right) \right] \right).$$

Dann ist Δ_2 ebenfalls ein geodätisches Dreieck und besitzt $[c(0), c(\frac{1}{2})]$ als gemeinsame Seite mit Δ_1 . Ist hingegen y_1 auf der anderen Seite, also $y_1 \in [c(\frac{1}{2}), c(1)]$, so definiere Δ_2 wie folgt:

$$\Delta_2 := \Delta \left(\left[c\left(\frac{1}{2}\right), c(1) \right], \left[c\left(\frac{1}{2}\right), c\left(\frac{3}{4}\right) \right], \left[c\left(\frac{3}{4}\right), c(1) \right] \right).$$

In jedem Fall existiert wieder wegen der Hyperbolizität von X ein $y_2 \in \Delta_2 \setminus \Delta_1$ mit $d(y_1, y_2) \leq \delta$. Diese Konstruktion setzen wir iterativ fort: Im $n+1$ -ten Schritt betrachte das geodätische Dreieck

Δ_{n+1} , das die Seite $[c(t_n), c(t'_n)]$ mit Δ_n gemeinsam hat und y_n enthält. Weiter sei $c(t_{n+1})$ die dritte Ecke des Dreiecks mit $t_{n+1} = \frac{t_n + t'_n}{2}$. Wann wählen wir $y_{n+1} \in \Delta_{n+1} \setminus [c(t_n), c(t'_n)]$ mit $d(y_n, y_{n+1}) \leq \delta$.

Im N -ten Schritt erhalten wir somit einen Punkt y_N mit

$$d(x, y_N) \leq d(x, y_1) + d(y_1, y_2) + \dots + d(y_{N-2}, y_{N-1}) + d(y_{N-1}, y_N) \leq N\delta,$$

der auf einem geodätischen Segment der Länge $\frac{l(c)}{2^N}$ (beachte, dass c nach Bogenlänge parametrisiert ist, also sukzessives Halbieren der Intervallenlänge auch eine Halbierung der Bildkurve herbeiführt) mit Endpunkten in Bild c liegt. Sei y derjenige Endpunkt, der am nächsten bei y_N liegt. Dann gilt

$$d(x, y) \leq d(x, y_N) + d(y_N, y) \leq N\delta + \frac{1}{2} \frac{l(c)}{2^N} = N\delta + \frac{l(c)}{2^{N+1}}.$$

Nach der Wahl von N ist $\frac{l(c)}{2^{N+1}} < 1$ und $2^N \leq l(c)$, also $N \leq \log_2 l(c)$ und damit

$$d(x, \text{Bild } c) \leq d(x, y) \leq N\delta + \frac{l(c)}{2^{N+1}} \leq \delta |\log_2 l(c)| + 1,$$

was gerade zu zeigen war. □

Bemerkung 5.2.6 Eine vergleichbare Aussage in \mathbb{E}^2 gibt es nicht.

Definition 5.2.7 Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A, B \subseteq X$ Teilmengen von X . Dann ist

$$\text{Hd}(A, B) := \inf\{\epsilon \geq 0 \mid A \subseteq U_\epsilon(B), B \subseteq U_\epsilon(A)\}$$

der *Hausdorff-Abstand* von A und B .

Satz 5.2.8 (Stabilität von Quasi-Geodätischen) Sei (X, d) ein δ -hyperbolischer, geodätischer, metrischer Raum, $c : [a, b] \rightarrow X$ eine (λ, ϵ) -Quasi-Geodätische mit Anfangs- und Endpunkten $c(a) = p$, $c(b) = q$ und $[p, q]$ ein geodätisches Segment, dass p und q verbindet. Dann existiert eine Konstante $R = R(\delta, \lambda, \epsilon)$, sodass

$$\text{Hd}([p, q], \text{Bild } c) \leq R.$$

Bevor wir die Aussage beweisen, leiten wir die wichtigste Folgerung her. Ein (λ, ϵ) -quasi-geodätisches Dreieck besteht aus drei (λ, ϵ) -Quasi-Geodätischen $q_i : [0, T_i] \rightarrow X$ ($i \in \{1, 2, 3\}$) mit

$$q_1(T_1) = q_2(0), \quad q_2(T_2) = q_3(0), \quad q_3(T_3) = q_1(0).$$

Das Dreieck heißt K -dünn für eine Konstante $K \geq 0$, falls für jedes $i \in \{1, 2, 3\}$ gilt: Jeder Punkt $x \in \text{Bild } q_i$ ist in einer K -Umgebung von $\Delta \setminus \text{Bild } q_i$ enthalten.

Korollar 5.2.9 *Ein geodätischer, metrischer Raum (X, d) ist Gromov-hyperbolisch genau dann, wenn für jedes $\lambda \geq 1$ und jedes $\epsilon \geq 0$ eine Konstante $M \geq 0$ existiert, sodass jedes (λ, ϵ) -quasi-geodätische Dreieck M -dünn ist.*

Satz 5.2.10 *Seien (X, d_X) , (Y, d_Y) geodätische, metrische Räume und $f : Y \rightarrow X$ eine (λ, ϵ) -quasi-isometrische Einbettung. Dann gilt: Ist X δ -hyperbolisch, so ist Y δ' -hyperbolisch für ein $\delta \geq 0$.*

Beweis. Sei $\Delta \subseteq Y$ ein geodätisches Dreieck in Y . Wir müssen zeigen, dass Δ mit einer uniformen Konstante dünn ist. Es bezeichnen $c_1([0, 1])$, $c_2([0, 1])$, $c_3([0, 1])$ die Seiten von Δ . Dann ist $f(\Delta)$ ein (λ, ϵ) -quasi-isometrisches Dreieck mit Seiten $(f \circ c_1)([0, 1])$, $(f \circ c_2)([0, 1])$ und $(f \circ c_3)([0, 1])$. Nach Korollar 2.9 ist $f(\Delta)$ M -dünn für eine Konstante $M := M(\lambda, \epsilon) \geq 0$, das heißt es gibt (beispielsweise) für $x \in \text{Bild } c_1$ ein $y \in \text{Bild } c_2 \cup \text{Bild } c_3$, sodass $d_X(f(x), f(y)) \leq M$. Da f eine (λ, ϵ) -quasi-isometrische Einbettung ist, gilt weiter

$$d_Y(x, y) \leq \lambda d_X(f(x), f(y)) + \epsilon \leq \lambda M + \epsilon =: \delta'$$

und analog für die anderen Seiten. Damit Δ δ' -dünn, was zu zeigen war. \square

Lemma 5.2.11 *Sei (X, d) ein geodätischer, metrischer Raum und $c : [a, b] \rightarrow X$ eine (λ, ϵ) -Quasi-Geodätische. Dann existiert eine stetige (λ, ϵ') -Quasi-Geodätische $c' : [a, b] \rightarrow X$ mit*

- (i) c und c' haben dieselben Anfangs- und Endpunkte, das heißt es gilt $c(a) = c'(a)$ sowie $c(b) = c'(b)$.
- (ii) $\epsilon' = 2(\lambda + \epsilon)$.
- (iii) Für alle $t, t' \in [a, b]$ gilt

$$l(c'|_{[t, t']}) \leq k_1 d(c'(t), c'(t')) + k_2,$$

wobei $k_1 = \lambda(\lambda + \epsilon)$ und $k_2 = (\lambda\epsilon' + 3)(\lambda + \epsilon)$.

- (iv) Für den Hausdorff-Abstand der beiden Quasi-Geodätischen gilt

$$\text{Hd}(\text{Bild } c, \text{Bild } c') \leq \lambda + \epsilon.$$

Beweis. Es sei $\Sigma := \mathbb{Z} \cap (a, b) \cup \{a, b\} = \{a = s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, s_n = b\}$. Für $s \in \Sigma$ setze $c'(s) := c(s)$. zwischen aufeinanderfolgenden Punkten $c(s_i)$ und $c(s_{i+1})$ wähle ein linear, proportional zur Bogenlänge parametrisiertes geodätisches Segment. Definiere anschließend c' als die Verkettung dieser Segmente. Zu den einzelnen Eigenschaften:

- (i) Nach Definition von c' gilt $c'(a) = c(a)$ sowie $c'(b) = c(b)$.
 (iv) Für die Länge jedes Teilsegments gilt

$$l(c'|_{[s_i, s_{i+1}]}) = d(c'(s_i), c'(s_{i+1})) = d(c(s_i), c(s_{i+1})) \leq \lambda d(s_i, s_{i+1}) + \epsilon \leq \lambda + \epsilon.$$

Da jeder Punkt von Bild $c \cup \text{Bild } c'$ in einer $\frac{\lambda+\epsilon}{2}$ -Umgebung von $c(\Sigma) = c'(\Sigma)$ liegt, folgt bereits die Behauptung.

- (ii) Für beliebiges $t \in [a, b]$ sei $[t]$ derjenige Punkt von Σ , welcher am nächsten zu t ist. Da c eine (λ, ϵ) -Quasi-Geodätische ist und $c([t]) = c'([t])$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} d(c'(t), c'(t')) &\leq d(c'(t), c'([t])) + d(c'([t]), c'([t'])) + d(c'([t']), c'(t')) \\ &\leq \frac{\lambda + \epsilon}{2} + d(c'([t]), c'([t'])) + \frac{\lambda + \epsilon}{2} \\ &= d(c([t]), c([t'])) + \lambda + \epsilon \\ &\leq \lambda d_{\mathbb{R}}([t], [t']) + \epsilon + \lambda + \epsilon \\ &= \lambda |[t] - [t']| + \lambda + 2\epsilon \\ &\leq \lambda (|[t] - t| + |t - t'| + |t' - [t']|) + \lambda + 2\epsilon \\ &\leq \lambda (|t - t'| + 1) + \lambda + 2\epsilon \\ &= \lambda |t - t'| + 2(\lambda + \epsilon). \end{aligned}$$

Wir erhalten außerdem

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} |t - t'| - 2(\lambda + \epsilon) &\leq \frac{1}{\lambda} (|t - t'| - 1) - (\lambda + 2\epsilon) \\ &\leq \frac{1}{\lambda} (|t - [t]| + |[t] - [t']| + |[t'] - t'| - 1) - (\lambda + 2\epsilon) \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{2} + |[t] - [t']| + \frac{1}{2} - 1 \right) - (\lambda + 2\epsilon) \\ &= \frac{1}{\lambda} |[t] - [t']| - \epsilon - (\lambda + \epsilon) \\ &\leq d(c([t]), c([t'])) - (\lambda + \epsilon) \\ &= d(c'([t]), c'([t'])) - (\lambda + \epsilon) \\ &\leq d(c'([t]), c'(t)) + d(c'(t), c'(t')) + d(c'(t'), c'([t'])) - (\lambda + \epsilon) \\ &\leq \frac{\lambda + \epsilon}{2} + d(c'(t), c'(t')) + \frac{\lambda + \epsilon}{2} - (\lambda + \epsilon) \\ &= d(c'(t), c'(t')), \end{aligned}$$

wobei die erste Ungleichung wegen

$$\frac{1}{\lambda} (|t - t'| - 1) - (\lambda + 2\epsilon) = \frac{1}{\lambda} |t - t'| - \frac{1}{\lambda} - (\lambda + 2\epsilon) \geq \frac{1}{\lambda} |t - t'| - \lambda - (\lambda + 2\epsilon) = \frac{1}{\lambda} |t - t'| - 2(\lambda + \epsilon)$$

gilt. Für $\epsilon' := 2(\lambda + \epsilon)$ gilt also

$$\frac{1}{\lambda} |t - t'| - \epsilon' \leq d(c(t), c(t')) \leq \lambda |t - t'| + \epsilon'$$

für alle $t, t' \in [a, b]$, $c' : [a, b] \rightarrow X$ ist also eine (λ, ϵ') -quasi-isometrische Einbettung und damit (λ, ϵ') -quasi-geodätisch.

(iii) Für ganze Zahlen $m \leq n \in [a, b]$ gilt

$$l(c'|_{[m, n]}) = \sum_{i=m}^{n-1} d(c'(i), c'(i+1)) = \sum_{i=m}^{n-1} d(c(i), c(i+1)) \leq (\lambda + \epsilon)|n - m|$$

sowie

$$l(c'|_{[a, n]}) \leq (\lambda + \epsilon)(n - a + 1), \quad l(c'|_{[n, b]}) \leq (\lambda + \epsilon)(b - n + 1).$$

Für $t, t' \in [a, b]$ folgt also

$$\begin{aligned} l(c'|_{[t, t']}) &\leq l(c'|_{[t, [t]]}) + l(c'|_{[[t], [t']]}) + l(c'|_{[[t'], t']}) \\ &\leq (\lambda + \epsilon)([t] - [t'] + 2) \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$d(c'(t), c'(t')) \geq \frac{1}{\lambda} |t - t'| - \epsilon' \geq \frac{1}{\lambda} ([t] - [t'] - 1) - \epsilon'$$

und damit

$$\begin{aligned} l(c'|_{[t, t']}) &\leq (\lambda + \epsilon)([t] - [t'] + 2) \\ &= \lambda(\lambda + \epsilon) \left(\frac{1}{\lambda} ([t] - [t'] - 1) + \frac{3}{\lambda} \right) \\ &= \lambda(\lambda + \epsilon) \left(\frac{1}{\lambda} ([t] - [t'] - 1) - \epsilon' \right) + (\lambda + \epsilon)(3 + \lambda\epsilon') \\ &\leq \lambda(\lambda + \epsilon)d(c'(t), c'(t')) + (\lambda + \epsilon)(3 + \lambda\epsilon') \\ &= k_1 d(c'(t), c'(t')) + k_2, \end{aligned}$$

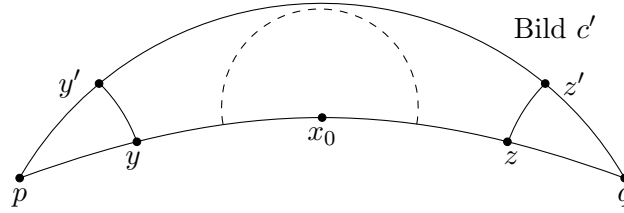
was zu zeigen war. □

Beweis von Satz 2.8 Zunächst ersetzen wir die Quasi-Geodätische c durch eine stetige Quasi-

Geodätische c' wie in Lemma 2.11. Sei $[p, q]$ das geodätische Segment zwischen den Endpunkten von c bzw. c' . Weiter sei

$$D := \max_{x \in [p, q]} \{d(x, \text{Bild } c')\}$$

und $x_0 \in [p, q]$ ein Punkt, in dem das Maximum angenommen wird.



Der offene Ball mit Radius D und Zentrum x_0 trifft dann Bild c' nicht. Idee: Benutze Satz 5.2.5, um eine Schranke für D zu finden, die nicht von der Kurve abhängt (sondern nur von λ, ϵ und δ). Wähle hierzu $y \in [p, x_0] \subseteq [p, q]$, sodass $d(y, x_0) = 2D$. Ist $d(p, x_0) < 2D$, so wähle stattdessen $y = p$. Analog finden wir einen Punkt $z \in [x_0, q]$. Wähle weiter $y', z' \in \text{Bild } c'$ mit $d(y, y') \leq D$ und $d(z, z') \leq D$ sowie geodätische Segmente $[y, y']$ und $[z, z']$. Sei nun γ der parametrisierte Weg, welcher zunächst entlang $[y, y']$, dann c' und anschließend $[z', z]$ läuft. Dann liegt Bild γ nach Konstruktion außerhalb des D -Balls um x_0 . Es gilt

$$d(y', z') \leq d(y', y) + d(y, z) + d(z, z') \leq D + 4D + D = 6D.$$

Aus Lemma 2.11 (iii) folgt nun

$$l(\gamma) \leq d(y, y') + k_1 d(y', z') + k_2 + d(z, z') \leq k_1 6D + k_2 + 2D$$

und Satz 2.5 liefert wegen $D = d(x_0, \text{Bild } c')$

$$D - 1 \leq \delta |\log_2 l(\gamma)| \leq \delta |\log_2 (k_1 6D + k_2 + 2D)|$$

Diese Ungleichung zwischen einem linearen Term in D und einem logarithmischen Term in D kann nur erfüllt sein, falls D beschränkt ist, das heißt Satz 5.2.5 liefert implizit eine obere Schranke für D , welche nur von λ, ϵ und δ abhängt. Sei D_0 eine solche Schranke.

Beh. (a) Es gilt $\text{Bild } c' \subseteq U_{R'}([p, q])$ mit $R' = D_0(1 + k_1) + \frac{k_2}{2}$.

Bew. (a) Betrachte ein maximales Teilintervall $[a', b'] \subseteq [a, b]$, sodass $c'|_{[a', b']}$ außerhalb der D_0 -Umgebung $U_{D_0}([p, q])$ liegt (existiert kein solches, so folgt die Behauptung mit $R' = D_0$).

Jeder Punkt von $[p, q]$ liegt per Definition von D_0 in $U_{D_0}(\text{Bild } c')$, das heißt es gilt

$$[p, q] \subseteq U_{D_0} (\text{Bild } c'|_{[a, a']} \cup \text{Bild } c'|_{[b', b]}).$$

Da Intervalle zusammenhängend sind, existieren $w \in [p, q]$, $t \in [a, a']$ und $t' \in [b', b]$, sodass

$$d(w, c'(t)) \leq D_0, \quad d(w, c'(t')) \leq D_0.$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt insbesondere

$$d(c'(t), c'(t')) \leq d(c'(t), w) + d(w, c'(t')) \leq 2D_0$$

und nach Lemma 2.11 (iii) gilt damit

$$l(c'|_{[t, t']}) \leq k_1 d(c'(t), c'(t')) + k_2 \leq k_1 2D_0 + k_2.$$

Für beliebiges $z = c'(t) \in \text{Bild } c'$ gibt es also $t' \in [a, a'] \cup [b', b]$ mit

$$d(c'(t), c'(t')) \leq \frac{1}{2} (k_1 2D_0 + k_2) = k_1 D_0 + \frac{k_2}{2}$$

und es folgt

$$d(z, [p, q]) \leq d(z, x_0) \leq d(z, c'(t')) + d(c'(t')) \leq k_1 D_0 + \frac{k_2}{2} + D_0 \leq D_0(1 + k_1) + \frac{k_2}{2} = R',$$

also $z \in U_{R'}([p, q])$ und damit $\text{Bild } c' \subseteq U_{R'}([p, q])$.

Wir können den Beweis nun abschließen. Nach Lemma 2.11 (iv) gilt

$$\text{Hd}(\text{Bild } c, \text{Bild } c') \leq \lambda + \epsilon$$

und da Hd eine Metrik auf der Menge der abgeschlossenen Teilmengen von X bildet folgt

$$\text{Hd}([p, q], \text{Bild } c) \leq \text{Hd}([p, q], \text{Bild } c') + \text{Hd}(\text{Bild } c', \text{Bild } c) \leq R' + \lambda + \epsilon =: R = R(\lambda, \epsilon, \delta),$$

die Behauptung des Satzes. □

5.3 Hyperbolische Gruppen

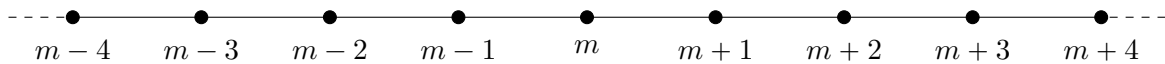
In diesem Abschnitt soll auf Verbindungen zwischen Geometrie und Gruppentheorie eingegangen werden. Sei G eine endlich erzeugte Gruppe mit $G = \langle S \rangle$ für ein Erzeugendensystem $S = \{s_i | i \in$

$I\}$ mit endlicher Indexmenge I und $S^{-1} = S$, das heißt für alle $g \in G$ gibt es $s_1, \dots, s_k \in S$ mit $g = s_1 \cdots s_k$ (Beachte, dass S keineswegs eindeutig ist).

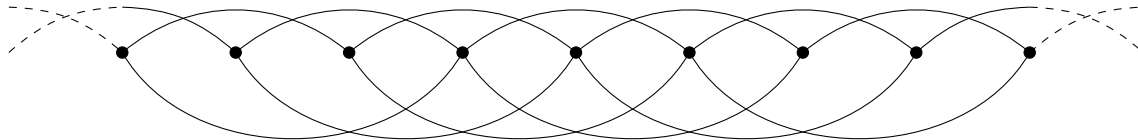
Beispiel 5.3.1 Für $G = (\mathbb{Z}, +)$ wähle $S = \{-1, 1\}$ oder $\tilde{S} = \{-3, -2, 2, 3\}$. Wegen $\text{ggT}(2, 3) = 1$ gilt $\langle \tilde{S} \rangle = \mathbb{Z}$.

Dies wollen wir nun geometrisieren (nach A. Cayley, 1878): Zu $G = \langle S \rangle$ assoziiere einen Graphen, einen *Cayley-Graphen* $\text{Cay}(G, S)$ zu (G, S) mit G als Menge der Eckpunkte sowie Kanten zwischen $g, h \in G$ genau dann, wenn es $s \in S$ gibt, sodass $h = gs$.

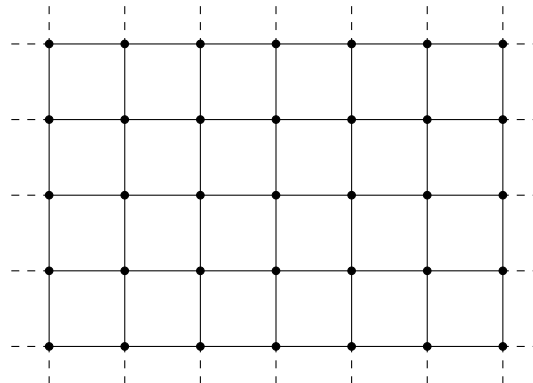
Beispiel 5.3.2 Betrachte zu nächst $(\mathbb{Z}, +) = \langle \{-1, 1\} \rangle =: \langle S \rangle$. Dann existiert zwischen zwei ganzen Zahlen $m, n \in \mathbb{Z}$ eine (nicht orientierte) Kante genau dann, wenn sie sich um ein Element in S unterscheiden, also genau dann, wenn $|m - n| = 1$. Der zugehörig Cayley-Graph $\text{Cay}(\mathbb{Z}, S)$ sieht dann wie folgt aus:



Beispiel 5.3.3 Betrachte nun $(\mathbb{Z}, +) = \langle \{-3, -2, 2, 3\} \rangle =: \langle \tilde{S} \rangle$. Wir erhalten dann ein den Cayley-Graphen $\text{Cay}(\mathbb{Z}, \tilde{S})$

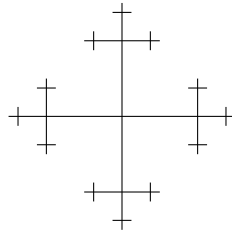


Beispiel 5.3.4 Sei $G = (\mathbb{Z}^2, +)$ mit $S = \{\pm e_1, \pm e_2\}$. Der zugehörige Cayley-Graph hat dann die Gestalt



Beispiel 5.3.5 Für die freie Gruppe $F_2 = F(a, b)$ in zwei Erzeugern mit $S = \{a, b\}$ erhalten wir

einen Cayley-Graphen



Nun wollen wir auf einem Cayley-Graphen eine topologische Struktur definieren. Definiere hierfür die *Wortmetrik* auf G bzw. auf $\text{Cay}(G, S)$

$$d_S(g, h) := \min \{m \in \mathbb{N}_0 \mid \text{es existieren } s_1, \dots, s_m \in S \text{ mit } g^{-1}h = s_1 \cdots s_m\} = d_S(e, g^{-1}h).$$

Dann ist d_S eine linksinvariante Metrik auf $\text{Cay}(G, S)$ und entspricht der kombinatorischen Graphenmetrik. Eine Gruppe $G = \langle S \rangle$ wird so zu einem geometrischen Objekt. Allerdings hängt die geometrische Struktur von der Wahl des Erzeugendensystems S von G ab. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den entstehenden metrischen Räumen? Wir haben einen entscheidenden Satz:

Satz 5.3.6 *Sei G eine Gruppe sowie S, \tilde{S} Erzeugendensysteme für G . Dann induziert die Identitätsabbildung id_G eine $(\lambda, 0)$ -Quasi-Isometrie zwischen den metrischen Räumen $(\text{Cay}(G, S), d_S)$ und $(\text{Cay}(G, \tilde{S}), d_{\tilde{S}})$.*

Beweis. Vorlesung über Geometrische Gruppentheorie oder Übung. □

Eine geometrische Eigenschaft einer endlich erzeugten Gruppe entspricht also einer Eigenschaft eines Cayley-Graphen, welche invariant unter Quasi-Isometrien ist (Gromov, 1987). Wir führen nun die Definition einer hyperbolischen Gruppe ein:

Definition 5.3.7 Eine endlich erzeugte Gruppe $G = \langle S \rangle$ heißt *hyperbolisch*, falls der Cayley-Graph $\text{Cay}(G, S)$ als metrischer Raum δ -hyperbolisch ist für ein $\delta = \delta(S) \geq 0$.

Nach Satz 5.4 ist Hyperbolizität eines geodätischen, metrischen Raums eine Quasi-Isometrie-Invariante, Hyperbolizität einer endlich erzeugten Gruppe ist also eine geometrische Eigenschaft.

Beispiel 5.3.8 (i) $F_2 = F(a, b)$ ist δ -hyperbolisch, da sein Graph ein Baum und damit 0-hyperbolisch ist.

(ii) \mathbb{Z}^2 ist nicht hyperbolisch, wie wir in Beispiel 5.1.2 bereits gesehen haben.

Eine wichtige Beobachtung: Jeder metrische Raum (X, d) , der quasi-isometrisch zu $(\text{Cay}(G, S), d_S)$ ist, ist auch quasi-isometrisch zu $(\text{Cay}(G, \tilde{S}), d_{\tilde{S}})$ ist. Die Frage ist nun: Wie findet man zu einer gegebenen Gruppe $G = \langle S \rangle$ einen zu $(\text{Cay}(G, S), d_S)$ quasi-isometrischen metrischen Raum (X, d) ? Eine Antwort bietet der folgende Satz:

Satz 5.3.9 (Satz von Schwarz-Milnor) Sei G eine endlich erzeugte Gruppe, welche auf einem geodätischen, metrischen Raum (X, d) durch Isometrien operiere. Weiter existiere eine Teilmenge $B \subseteq X$ mit $\text{diam} B < \infty$ und

- (i) $X = \bigcup_{g \in G} g \cdot B$
- (ii) Die Menge $S = \{g \in G \mid g \cdot B \cap B \neq \emptyset\}$ ist endlich.

Dann gilt: Für alle $x \in X$ ist die Bahn-Abbildung

$$\phi_x : G \longrightarrow G \cdot x \subseteq X, \quad g \mapsto g \cdot x$$

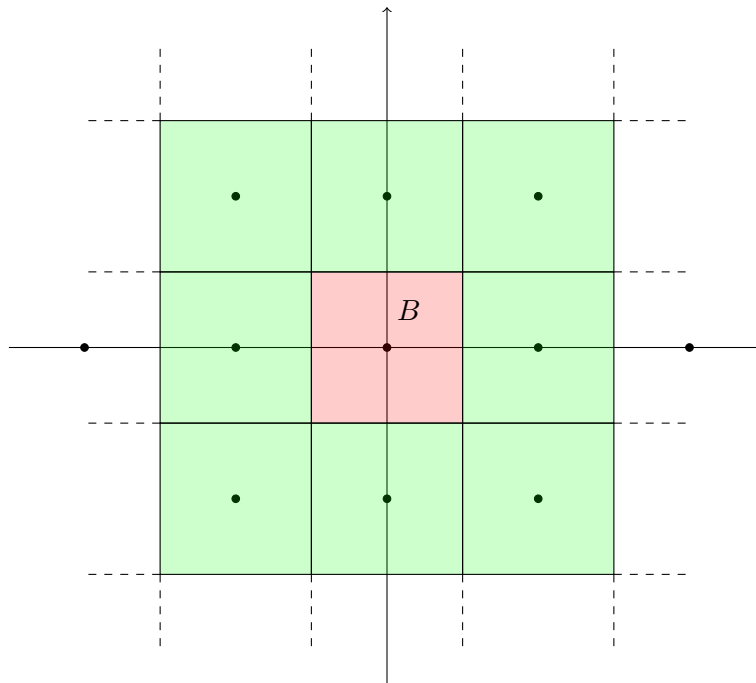
eine Quasi-Isometrie.

Beweis. Siehe Vorlesung über Geometrische Gruppentheorie oder Übung. □

Beispiel 5.3.10 Die Gruppe $(\mathbb{Z}^2, +)$ operiert auf \mathbb{R}^2 durch Isometrien via

$$\cdot : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (m, n) \cdot (x, y) \mapsto (x + m, y + n).$$

Wähle $B = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$:



Offenbar gilt

$$\bigcup_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} g \cdot B = \mathbb{R}^2$$

sowie

$$\begin{aligned} S &= \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid (m, n) \cdot B \neq \emptyset\} \\ &= \{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 1), (-1, -1), (1, -1), (-1, 1)\} \end{aligned}$$

Satz 3.9 liefert also eine Quasi-Isometrie.

Beispiel 5.3.11 Mit Dreiecksgruppen können ähnliche Konstruktionen durchgeführt werden.

Welche Quasi-Isometrie-Invarianten gibt es noch?

- z.B. Wachstumsfunktionen (quadratisch, exponentiell,...)
- isoperimetrische Ungleichungen

Aus der Topologie betrachten wir nun die Klassifikation von kompakten, orientierbaren, 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten ("Flächen"): Hier für bezeichne das Geschlecht g eine Fläche die Anzahl der "Henkel" der Mannigfaltigkeit. Dann gibt es zu jedem g bis auf Homöomorphie genau eine solche Fläche F_g : Für $g = 0$ erhalten wir die Sphäre, $g = 1$ entspricht dem Torus (welcher durch das Anbringen eines Henkels an die Sphäre hervorgeht), für $g = 2$ die Sphäre mit zwei Henkeln usw.

- Für $g = 0$ ist F_0 die 2-Sphäre. Sie hat konstante Krümmung 1.
- F_1 ist der flache Torus $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$. Er ist lokal euklidisch (als Quotient der euklidischen Ebene), hat also konstante Krümmung 0.
- Für $g \geq 2$ gilt wegen des Satzes von Gauß-Bonnet, welcher

$$\int_{F_g} \kappa dA = 2\pi\chi(F_g) = 2\pi(2 - 2g)$$

besagt, dass F_g negativ gekrümmt ist. Man kann zeigen, dass F_g als Quotient von \mathbb{H}^2 nach einer direkten Gruppe realisiert wird.

