

## Kapitel 3

# Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeiten

Wie können wir Teilinformationen über den Ausgang eines Zufallsexperimentes nutzen?

**Beispiel 3.1** Es werden zwei Würfel geworfen. Wir erhalten die Information, dass die Augensumme mindestens 10 ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mind. einer der Würfel 6 zeigt?

Aufgrund der Vorinformation wissen wir, dass das Ergebnis des Experiments in der Menge

$$B = \{(4, 6), (6, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$$

liegt. In nur einem Fall (5,5) ist keine 6 dabei.

Wir definieren die folgenden Ereignisse:

A = mindestens einer der Würfel zeigt 6

B = die Augensumme ist mindestens 10

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit sollte also wie folgt sein:

$$\frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{5}{6} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

**Definition 3.1** Seien  $A, B \in \mathcal{A}$  Ereignisse mit  $P(B) > 0$ . Dann heißt

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

die *bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter Bedingung B*.

**Bemerkung 3.1** Bezeichnen wir  $P_B(A) := P(A|B)$ , so ist  $(B, \mathcal{A}_B, P_B)$  wieder ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Oft ist die bedingte Wahrscheinlichkeit  $P(A|B)$  gegeben und man muss  $P(A \cap B)$  bestimmen. Also  $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$

Durch vollständige Induktion nach  $n$  erhält man:

**Satz 3.1 (Multiplikationssatz)**

Seien  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  Ereignisse mit  $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$ . Dann gilt  
 $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \prod_{k=1}^n P(A_k | A_1 \cap \dots \cap A_{k-1})$  mit  $A_0 = \Omega$   
 also  $P(A_1 | A_0) = P(A_1)$ .

**Beispiel 3.2** Von einem Kartenspiel mit 32 Blatt, wovon 4 Asse sind, bekommt jeder von 3 Spielern 10 Karten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jeder der 3 Spieler genau ein As erhält?

Es sei  $A_i$  das Ereignis, dass Spieler  $i$  genau ein As erhält.  $i = 1, 2, 3$

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit  $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ . Es gilt:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_2 \cdot A_1)$$

$$P(A_1) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{28}{9}}{\binom{32}{10}}, P(A_2 | A_1) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{19}{9}}{\binom{22}{10}}, P(A_3 | A_2 \cdot A_1) = \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{10}{9}}{\binom{12}{10}}$$

$$\text{Satz 3.1} \Rightarrow P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = 0,0556$$

**Satz 3.2** Es seien  $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{A}$  eine **Ereignispartition** von  $\Omega$ , d.h.

$$(i) B_i \cap B_j = \emptyset \text{ für } i \neq j$$

$$(ii)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$$

$$(iii) P(B_i) > 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots$$

Dann folgt:

a) **Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit**

Für jedes Ereignis  $A \in \mathcal{A}$  gilt:

$$P(A) = \sum_{j=1}^{\infty} P(B_j) \cdot P(A | B_j)$$

b) **Formel von Bayes**

Für jedes Ereignis  $A \in \mathcal{A}$  mit  $P(A) > 0$  gilt:

$$P(B_k | A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A | B_k)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(B_j) \cdot P(A | B_j)}$$

**Beweis** a)

$$P(A) = P(A \cap \Omega) \cdot P(A \cap \sum_{j=1}^{\infty} B_j) = P(\sum_{j=1}^{\infty} A \cap B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A \cap B_j)$$

$$\stackrel{\text{Def. bed. W'keit}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} P(A | B_j) \cdot P(B_j)$$

b)

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{P(A)}$$

Einsetzen von a) liefert die Behauptung ■

**Beispiel 3.3** Bei einer binären Übertragung von Nachrichten werden durch Störung 5% der gesendeten Nullen zu Einsen und 3% der gesendeten Einsen zu Nullen verfälscht. Das Verhältnis der gesendeten Nullen zu den gesendeten Einsen betrage 3:5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine empfangene Null richtig ist?

Es sei  $\Omega = \{(i, j) | i, j \in \{0, 1\}\}$ 

1. Komponente = gesendetes Signal; 2. Komponente = empfangenes Signal

Wir betrachten die folgenden Ereignisse:

 $S_0$  = "eine Null wird gesendet" $S_1$  = "eine Eins wird gesendet" $E_0$  = "eine Null wird empfangen"Bekannt sind:  $P(E_0|S_0) = 0.95$   $P(E_0|S_1) = 0.03$   $P(S_0) = \frac{3}{8}$   $P(S_1) = \frac{5}{8}$ Außerdem ist  $\Omega = S_0 + S_1$ . Damit folgt:

$$P(S_0|E_0) = \frac{P(S_0) \cdot P(E_0|S_0)}{P(S_0) \cdot P(E_0|S_0) + P(S_1) \cdot P(E_0|S_1)} = 0.95$$

Falls  $P(A|B) = P(A)$ , so heißt das, dass "das Eintreten des Ereignisses  $B$  keinen Einfluss auf das Eintreten von  $A$  hat". Wegen der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit ist dies äquivalent zu  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

### Definition 3.2

- a) Zwei Ereignisse  $A, B \in \mathcal{A}$  heißen **unabhängig**, falls  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- b) Die Ereignisse  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  heißen **unabhängig**, falls für alle  $k = 1, \dots, n$  und für alle  $k$ -Tupel,  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  stets gilt:

$$P\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^k P(A_{i_j})$$

### Bemerkung 3.2

- a) Teilsysteme von unabhängigen Ereignissen sind unabhängig
- b) Der Begriff der Unabhängigkeit wird auch für unendliche Folgen von Ereignissen benötigt. Man sagt  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$  sind unabhängige Ereignisse, falls für jede endliche Teilfolge  $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots\}$  die Ereignisse  $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$  unabhängig sind im Sinne von Teil b).

**Beispiel 3.4** Eine faire Münze wird  $2\times$  geworfen

$$\Omega = \{KK, KZ, ZK, ZZ\}$$

Es sei  $A_1 = \{KK, KZ\}$  “Kopf im ersten Wurf“

$A_2 = \{KK, ZK\}$  “Kopf im zweiten Wurf“

$A_3 = \{KZ, ZK\}$  “Resultate verschieden“

Es gilt:  $P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A_1) \cdot P(A_2)$

$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_3), P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) \cdot P(A_3)$

Aber:  $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$

Damit sind  $A_1, A_2, A_3$  nicht unabhängig.