

## 7. Riemann'sche Mannigfaltigkeiten als metrische Räume

Sei  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, also insbesondere ein topologischer Raum (nach Definition), der Hausdorff'sch ist, eine abzählbare Basis hat und lokal euklidisch ist. Solche topologischen Räume sind metrisierbar.

Bisher waren die Konzepte „lokal“, etwa die Geodätischen, die Exponentialabbildung, der Krümmungstensor, die Jacobi-Felder. Für globale Aussagen benötigen wir zusätzliche topologische Voraussetzungen.

Ein Prototyp für eine solche Voraussetzung ist der Satz von Gauß-Bounet in der Flächentheorie: Gegeben eine kompakte Fläche  $S$  im  $\mathbb{R}^3$  ohne Rand und die Gauß-Krümmung  $K$ , so ist  $\int_S K dA = 2\pi\chi(S) = 2\pi(2 - 2g)$ , wobei  $\chi$  die Euler-Charakteristik ist. Diese Gleichung verbindet links eine Aussage über die „lokale Geometrie“ mit rechts einer topologischen Invariante.

Die einfachste Globale Frage ist: Gegeben zwei Punkte  $p, q \in M$ , gibt es einen stetigen Weg zwischen  $p$  und  $q$ ? Notwendig dafür ist:  $M$  zusammenhängend<sup>1</sup>. Zusammenhängend ist auch hinreichend:

### Lemma 7.1

Ist  $M$  zusammenhängend, so ist  $M$  auch wegzusammenhängend. Das heißt, dass zu  $p, q \in M$  ein stetiger Weg  $c : [0, 1] \rightarrow M$  mit  $c(0) = p$  und  $c(1) = q$  existiert.

**Bemerkung:** In allgemeinen topologischen Räumen gilt: Aus wegzusammenhängend folgt zusammenhängend, aber aus zusammenhängend folgt nicht zwingend wegzusammenhängend. Ein Beispiel dafür ist  $X := [(0, -1), (0, 1)] \cup \{(x, \sin \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$  mit der von  $\mathbb{R}^2$  induzierten Topologie. (Für einen Beweis siehe: Singer-Therpe, Elementary Topology & Geometry, Seite 53)

### Beweis

Sei  $p \in M$  und  $A := \{q \in M \mid q \text{ ist mit } p \text{ durch einen stetigen Weg verbindbar}\}$ .

- $A \neq \emptyset$ , da  $p \in A$ :  $c : [0, 1] \rightarrow M$ ;  $c(t) := p$ .
- $A$  ist offen: Ist  $q \in A$  und  $r \in B_\varepsilon(q)$  (= normale Umgebung von  $q$ ), dann ist  $r \in A$ .
- $A$  ist abgeschlossen, also  $M \setminus A$  ist offen: Ist  $q \in M \setminus A$ ,  $r \in B_\varepsilon(q)$ , dann ist  $r \in M \setminus A$ . ■

<sup>1</sup>Ein topologischer Raum  $X$  heißt zusammenhängend wenn  $X$  nicht in zwei disjunkte, offene, nichtleere Teilmengen zerlegt werden kann. Dazu äquivalent:  $X$  und  $\emptyset$  sind die einzigen Teilmengen von  $X$  die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Daher sei in diesem Kapitel stets vorausgesetzt, dass  $M$  zusammenhängend ist.

Daraus folgt: Zwei beliebige Punkte  $p, q \in M$  sind durch stückweise differenzierbare (bzw. stückweise geodätische) Wege verbindbar.

### Beweis

Wähle stetigen Weg zwischen  $p$  und  $q$ :  $c : [0, 1] \rightarrow M$ .  $c([0, 1])$  ist kompakt. Diese Menge kann durch endlich viele total normale Umgebungen überdeckt werden. In diesen Umgebungen lässt sich der Weg wie gewünscht abändern. ■

**Bemerkung:** Im Allgemeinen existiert zwischen zwei Punkten  $p$  und  $q$  einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit keine Geodätische! Etwa in  $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \text{kan})$ , wo Geodätische Geradenstücken entsprechen, gibt es keine Geodätische zwischen  $(0, -1)$  und  $(0, 1)$ .

Setze  $\Omega_{pq} := \{\text{stückweise differenzierbare Kurven zwischen } p \text{ und } q\}$ .

### Satz 7.1 (Längenmetrik)

$(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sein eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit.

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (p, q) \mapsto \inf_{c \in \Omega_{pq}} L(c)$$

Dann ist  $(M, d)$  ein metrischer Raum, also es gilt für  $p, q, r \in M$ :

- (1)  $d(p, q) = d(q, p) \geq 0$
- (2)  $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$
- (3)  $d(p, q) = 0 \iff p = q$

### Beweis

- (1) „rückwärts laufen“:  $c[0, l] \rightarrow M$ ,  $t \mapsto c(t)$ , sei Kurve zwischen  $p$  und  $q$ , also  $c \in \Omega_{pq}$ . Dann ist  $\tilde{c}(t) := c(t - l) \in \Omega_{qp}$  und  $L(c) = L(\tilde{c})$ .
- (2) Da  $\Omega_{pq}$  eine Obermenge der Wege von  $p$  nach  $q$  über  $r$  ist, gilt  $\inf_{c \in \Omega_{pq}} L(c) \leq \inf_{c \in \Omega_{pr}} L(c) + \inf_{c \in \Omega_{rq}} L(c)$
- (3) Klar: Ist  $p = q$ , so ist hat der konstante Weg  $c[0, 1] \rightarrow M$ ;  $t \mapsto p$  die Länge 0, also  $d(p, q) = 0$ .

Annahme  $p \neq q$ . Wähle eine normale Umgebung  $U_\varepsilon(p)$  um  $p$  mit  $q \notin U_\varepsilon(p)$ . Dann gilt für eine beliebiges  $c \in \Omega_{pq}$  nach Satz 4.6:  $L(c) \geq \varepsilon \implies d(p, q) \geq \varepsilon$ . ■

### Korollar

- (1) Die Topologie des metrischen Raumes  $(M, d)$  ist äquivalent zur ursprünglich auf  $M$  gegebenen Topologie (also  $U$  ist offen in  $M \iff U$  ist offen in  $(M, d)$ ). Das heißt: Riemann'sche Mannigfaltigkeiten sind metrisierbar.

- (2) Für  $p_0 \in M$  ist  $d_{p_0} : M \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $d_{p_0}(p) := d(p_0, p)$  ist stetig (gilt für beliebige metrische Räume).
- (3) Ist  $M$  kompakt, so ist der Durchmesser von  $M$  beschränkt:

$$\text{Diam}(M) = \sup_{p, q \in M} d(p, q) < \infty$$

### Beweis

- (1) Nach Satz 4.6 sind normale offene Bälle von genügend kleinem Radius  $r$  identisch mit metrischen Bällen von Radius  $r$  (bezüglich  $d$ ):

$$B_r^{(d)}(p) := \{q \in M \mid d(p, q) < r\} = \exp_p(B_r(0))$$

wobei  $B_r(0) = \{v \in T_p M \mid \|v\| < r\}$ .

$$(2) \quad |d_{p_0}(p) - d_{p_0}(q)| = |d(p_0, p) - d(p_0, q)| \leq d(p, q)$$

- (3) Seien  $p, q$  beliebig aus  $M$  kompakt.

$$d(p, q) \leq d(p, p_0) + d(p_0, q) \leq 2 \max_{r \in M} d(p_0, r) < \infty$$

Das Maximum wird angenommen, da  $M$  kompakt und  $d_{p_0}$  stetig ist. ■

### Definition

$(M, d)$  ist vollständig genau dann, wenn jede Cauchy-Folge konvergiert.

$(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ist geodätisch vollständig genau dann, wenn für jedes  $p \in M$  die Exponentialabbildung  $\exp_p$  auf ganz  $T_p M$  definiert ist, also jede Geodätische  $\gamma(t)$  mit  $\gamma(0) = p$  ist für alle  $t \in \mathbb{R}$  definiert.

### Satz 7.2 (Hopf-Rinow, 1931)

Sei  $M$  eine zusammenhängende Riemann'sche Mannigfaltigkeit und  $p \in M$ . Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (1)  $\exp_p$  ist auf ganz  $T_p M$  definiert.
- (2) Jede abgeschlossene Teilmenge  $A \subset M$  mit beschränktem Durchmesser ist kompakt.
- (3) Der metrische Raum  $(M, d)$  ist vollständig, das heißt, jede Cauchy-Folge konvergiert.
- (4)  $M$  ist geodätisch vollständig.

In diesem Falle gilt: Für jeden Punkt  $q \in M$  existiert mindestens eine Geodätische  $\gamma$ , welche  $p$  und  $q$  verbindet und für die gilt:  $L(\gamma) = d(p, q)$ , das heißt,  $\gamma$  realisiert die kürzeste Verbindung zwischen  $p$  und  $q$ .

### Beweis

Die Vorgehensweise ist:  $1 \implies 2 \implies 3 \implies 4 \implies 1$ .

(1)  $\implies$  (2)  $A$  ist abgeschlossen.

$$\text{Diam}(A) = \sup_{a,b \in A} d(a,b) \leq c < \infty.$$

Für ein festes  $q_0 \in A$  gilt für alle  $q \in A$ :

$$d(p, q) \leq d(p, q_0) + d(q_0, q) \leq d(p, q_0) + c =: R.$$

Das heißt:  $A \subset \overline{B_{2R}(p)} \stackrel{(1)}{=} \exp_p(\overline{B_{2R}(0)})$  ist kompakt, da  $\exp_p$  stetig und  $\overline{B_{2R}(0)} \subset T_p M$  kompakt ist. Also ist  $A$  als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge selbst auch kompakt.

(2)  $\implies$  (3) Eine Cauchy-Folge  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ist beschränkt: Wähle  $\varepsilon > 0$ , so gilt  $d(p_n, p_m) < \varepsilon$  für alle  $m, n \geq n_0(\varepsilon)$ . Also ist nach (2)  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  in einer kompakten Menge enthalten. Insbesondere hat  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge. Da  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge ist, konvergiert  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  selbst.

(3)  $\implies$  (4) Sei  $\gamma : I \rightarrow M$  eine normale Geodätische in  $M$ . Zu zeigen:  $I$  ist offen und abgeschlossen in  $\mathbb{R}$ , also  $I = \mathbb{R}$ .

$I$  ist offen (und nicht leer): Aus der (lokalen) Eindeutigkeit und Existenz von Geodätischen (Satz 4.3) folgt: Ist  $\gamma(t_0)$  definiert, so auch  $\gamma(t_0 + t)$  für genügend kleine  $t$ .

$I$  abgeschlossen: Sei  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton wachsende Folge in  $I$ , welche gegen  $t_*$  konvergiert. Zu zeigen:  $t_* \in I$ . Zunächst ist für  $m \geq n$

$$d(\gamma(t_n), \gamma(t_m)) \leq L(\gamma|_{[t_n, t_m]}) = |t_n - t_m|.$$

Daher ist  $(\gamma(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $M$  und nach Voraussetzung (3) konvergent.

Sei  $p := \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(t_n)$ . Sei  $W(p)$  eine total normale Umgebung um  $p$ . Satz 4.7 besagt: Es existiert ein  $\delta > 0$ , so dass jede normale Geodätische, welche in  $W(p)$  beginnt, auf  $(-\delta, \delta)$  definiert ist. Wähle  $n$  so groß, dass  $|t_n - t_*| < \frac{\delta}{2}$  und  $\gamma(t_n) \in W(p)$ . Dann ist  $\gamma(t)$  definiert für alle  $t$  mit  $|t_n - t| < \delta$ , also insbesondere für  $t_*$ , das heißt  $t_* \in I$  und  $I$  ist abgeschlossen.

(4)  $\implies$  (1) Klar.

Es gelte nun (1), und wir zeigen die letzte Aussage des Satzes.

1. Schritt: Wir finden einen Kandidaten für die Geodätische  $\gamma$ . Sei  $r := d(p, q)$  und für  $0 < \delta < r$  sei  $B_\delta(p)$  ein normaler Ball um  $p$  mit geodätischer Sphäre  $S_\delta(p) = \partial B_\delta(p)$  als Rand.  $S_\delta(p)$  ist kompakt.

Die Idee ist,  $x_0$  als denjenigen Punktauf dem Rand zu wählen, wo die stetige Funktion  $d_q|_{S_\delta} := d(q, \cdot)|_{S_\delta}$  ein Minimum annimmt. Dann existiert nach Voraussetzung (1) ein  $v \in T_p M$  mit  $\|v\| = 1$  und  $x_0 = \exp_p(\delta v)$ .

Definiere  $\gamma(s) := \exp_p(sv)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , was nach Voraussetzung (1) geht.

2. Schritt: Wir zeigen, dass  $\gamma$  die Punkte  $p$  und  $q$  verbindet. Zu zeigen ist also:  $\gamma(r) = q$  (bzw.  $d(q, \gamma(r)) = 0$ ). Betrachte dazu die Menge

$$A := \{s \in [0, r] \mid d(\gamma(s), q) = r - s \quad (*)\}.$$

Wir zeigen, dass  $A = [0, r]$ .  $A$  ist abgeschlossen.  $A \neq \emptyset$ , da  $0 \in A$ . Sei  $s_0 := \max A$ .

Annahme:  $s_0 < r$ . Betrachte wieder normalen Ball  $B_{\delta'}(\gamma(s_0))$  mit Rand  $S'$  um  $\gamma(s_0)$  mit  $\delta'$  so klein, dass  $q \notin B_{\delta'}(\gamma(s_0))$ .  $x'_0$  sei ein Punkt auf  $S'$  in dem,  $d_q|_{S'}$  ein Minimum annimmt.

**Behauptung:** Es gilt  $x'_0 = \gamma(s_0 + \delta')$  (\*\*).

**Beweis (der Behauptung)**

Zunächst ist

$$d(\gamma(s_0), q) = \delta' + \min_{x \in S'} d(x, q) = \delta' + d(x'_0, q).$$

Nach Voraussetzung (\*) und Definition von  $s_0$  ist  $d(\gamma(s_0), q) = r - s_0$ , also

$$r - s_0 = \delta' + d(x'_0, q). \quad (***)$$

Weiter mit der Dreiecks-Ungleichung:

$$d(p, x'_0) \geq d(p, q) - d(q, x'_0) \stackrel{(***)}{=} r - (r - s_0 - \delta') = s_0 + \delta'$$

Ebenso gilt für die stückweise differenzierbare Kurve  $c$ :

$$d(p, x'_0) \leq d(p, \gamma(s_0)) + d(\gamma(s_0), x'_0) \leq s_0 + \delta'$$

Die Kurve  $c$  ist also minimierend und somit eine Geodätische, hat also keinen „Knick“ bei  $s_0$ . Daher gilt:  $x'_0 = \gamma(s_0 + \delta')$ . ■

Aus (\*\*) und (\*\*\*) folgt:

$$r - (s_0 + \delta') \stackrel{(***)}{=} d(x'_0, q) \stackrel{(**)}{=} d(\gamma(s_0 + \delta'), q)$$

Also gilt (\*) für  $s_0 + \delta' > s_0$  im Widerspruch zur Definition von  $s_0$ . Daher ist die Annahme  $s_0 < r$  falsch und  $s_0 = r$ . ■

### Korollar

Eine zusammenhängende kompakte Riemann'sche Mannigfaltigkeit ist (geodätisch) vollständig.

### Beweis

$(M, d)$  ist vollständig, also nach Hopf-Rinow geodätisch vollständig. ■

### Korollar

$M$  sei eine zusammenhängende und vollständige, aber nicht kompakte, Riemann'sche Mannigfaltigkeit. Dann existiert ein geodätischer Strahl in  $M$ , also eine Geodätische  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$ , welche für alle  $t \in [0, \infty)$  minimierend ist:  $d(\gamma(t), \gamma(0)) = t$ .

### Beweis

Wähle Folge  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $M$ , so dass  $d(q_0, q_n) \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ . Schreibe  $q_n = \exp(t_n v_n)$ ,  $\|v_n\| = 1$ . Die Folge  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \{w \in T_{q_0}M \mid \|w\| = 1\}$  kompakt, also hat  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge, ohne Einschränkung sei diese  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}: v_n \rightarrow v$ .

Nun haben wir die Geodätischen  $\gamma_n(t) := \exp_{q_0}(tv_n)$  und  $\gamma(t) := \exp_{q_0}(tv)$ . Zu zeigen ist  $d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = |t_1 - t_2|$ : Aber  $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp_{q_0}(tv_n) = \exp_{q_0}(\lim_{n \rightarrow \infty} tv_n) = \exp_{q_0}(tv) = \gamma(t) \implies$  Behauptung. ■

## 7.1. Schnittpunkt einer vollständigen Riemann'schen Mannigfaltigkeit

### Lemma 7.2

$M$  sei eine zusammenhängende vollständige Riemann'sche Mannigfaltigkeit und  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  sei eine normale Geodätische.

- (1) Falls keine weitere Geodätische zwischen  $\gamma(a)$  und  $\gamma(b)$  existiert, die kürzer ist als  $\gamma$ , dann ist  $\gamma$  minimierend auf  $[a, b]$ .
- (2) Falls eine Geodätische  $c \neq \gamma$  zwischen  $\gamma(a)$  und  $\gamma(b)$  mit  $L(c) = L(\gamma)$  existiert, so ist  $\gamma$  nicht mehr minimierend auf  $[a, b + \varepsilon]$  für ein  $\varepsilon > 0$ .
- (3) Ist  $\gamma$  minimierend auf einem Intervall  $I$ , so ist sie auch auf  $J \subseteq I$  minimierend.

### Beweis

- (1) Nach Hopf-Rinow existiert eine minimierende Geodätische  $\gamma^*$  zwischen  $\gamma(a)$  und  $\gamma(b)$ . Es ist dann  $L(\gamma^*) \leq L(\gamma)$ , also nach Voraussetzung  $L(\gamma^*) = L(\gamma)$ , also muss  $\gamma$  minimierend sein.
- (2) Sei  $c$  eine Geodätische zwischen  $\gamma(a)$  und  $\gamma(b)$ ,  $c \neq \gamma$ , mit  $L(c) = L(\gamma)$ . Wähle  $\delta > 0$ , so dass  $W = W(\delta)$  eine total normale Umgebung von  $\gamma(b)$  (siehe Satz 4.7). Betrachte die Kurve

$$\alpha(t) := \begin{cases} c(t), & t \in [a, b] \\ \gamma(t), & t \in [b, b + \frac{\delta}{2}] \end{cases}$$

$\alpha$  verbindet  $\gamma(a)$  und  $\gamma(b + \frac{\delta}{4})$ . Da  $W$  total normal ist existiert eine minimale Geodätische zwischen  $\alpha(b - \frac{\delta}{4})$  und  $\alpha(b + \frac{\delta}{4})$ .  $\alpha$  ist keine Geodätische (wegen dem „Knick“ bei  $\gamma(b)$ ), also ist die Länge des minimalen geodätischen Segments zwischen  $\alpha(b - \frac{\delta}{4})$  und  $\alpha(b + \frac{\delta}{4})$  echt kleiner als das entsprechende Stück von  $\alpha$ . Daher existiert eine Kurve von  $\gamma(a)$  nach  $\gamma(b + \frac{\delta}{4})$  die kürzer ist als  $\alpha|_{[a, b + \frac{\delta}{4}]}$ . Konstruktion ist  $L(\gamma|_{[a, b + \frac{\delta}{4}]}) = L(\alpha|_{[a, b + \frac{\delta}{4}]})$  und somit nicht mehr kürzeste nach  $\gamma(b)$ .

- (3) Annahme:  $\gamma$  nicht minimierend auf  $J \subseteq I$ , dann wäre  $\gamma$  nicht minimierend auf  $J$ . ■

Für  $p \in M$ ,  $v \in T_p M$ ,  $\|v\| = 1$  sei  $\gamma_v := \exp_p(tv)$  die eindeutige normale Geodätische mit  $\gamma_v(0) = p$ ,  $\gamma'_v(0) = v$ . Setze  $I_v := \{t \in [0, \infty) \mid d(\gamma_v(t), \gamma_v(0)) = t\}$ , das heißt:  $\gamma$  minimierend

zwischen  $\gamma_v(0)$  und  $\gamma_v(t)$ .  $I_v \neq \emptyset$ , da  $[0, \varepsilon] \subseteq I_v$  für genügend kleines  $\varepsilon$ .  $I_v$  ist abgeschlossen, da  $d(\gamma_v(0), \cdot)$  stetig. Es gilt also entweder  $I_v = [0, \infty)$ , also  $\gamma_v$  ist geodätischer Strahl, oder es existiert  $s(v) > 0$ , so dass  $I_v = [0, s(v)]$ . In diesem Fall heißt  $\gamma_v(s(v))$  Schnittpunkt von  $p$  längs  $\gamma_v$ .

**Bemerkung:** (a) Es gilt (ohne Beweis): Die Abbildung

$$s : E_p M := \{v \in T_p M \mid \|v\| = 1\} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ v \mapsto s(v)$$

ist stetig.

(b) Für kompakte  $M$  ist  $s(v) < \infty$  für alle  $v \in E_p M$ ,  $p \in M$ .

(c) Ist  $M$  nicht kompakt, so existiert nach dem Korollar ein geodätischer Strahl und somit  $p \in M$  und  $v \in T_p M$ , so dass  $s(v) = \infty$ .

Für ein beliebiges, aber festes  $p \in M$  ist

$$U_p := \{w \in T_p M \setminus \{0\} \mid \|w\| < s(\frac{w}{\|w\|})\} \cup \{0\}$$

eine offene Umgebung von  $0 \in T_p M$ . Der Rand von  $U_p$ ,  $\partial U_p$ , ist die Menge  $\{w \in T_p M \mid \|w\| = s(\frac{w}{\|w\|})\} = \{s(v) \cdot v \in T_p M \mid v \in E_p M\}$ . Der Schnittpunkt von  $p \in M$  ist

$$\text{Cut}(p) := \exp_p(\partial U_p).$$

### Beispiel

In  $(S^n, \text{kan})$  sind die Geodätischen mit Bogenlänge parametrisierte Großkreise der Länge  $2\pi$ . Also sind Geodätische  $\gamma_v(t)$  minimierend für  $t < \pi$ . Also ist für alle  $p \in S_1^n$  ist  $U_p = \{w \in T_p M \mid \|w\| < \pi\}$ , also

$$\exp_p(U_p) = \{q \in S^n \mid d(p, q) < \pi\} = S^n \setminus \{-p\}$$

und

$$\text{Cut}(p) = \{q \in S^n \mid d(p, q) = \pi\} = \{-p\}.$$

Man kann also die Sphäre disjunkt zerlegen in  $\exp_p(U_p)$  und  $\exp_p(\partial U_p) = \text{Cut}(p)$ . Dies gilt allgemein!

**Bemerkung:** Es gilt (ohne Beweis) der Satz: (Berker 1980)

Ist  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  eine zusammenhängende kompakte Riemann'sche Mannigfaltigkeit mit  $\text{Diam}(M) = \pi$  und  $\text{Cut}(p) = \{\text{Punkt}\}$  für alle  $p \in M$ , so ist  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  isometrisch zu  $(S^n, \text{kan})$ . Solche Mannigfaltigkeiten heißen „Wiedersehen-Mannigfaltigkeit“.

### Satz 7.3 (Zerlegungssatz)

Sei  $M$  eine zusammenhängende, vollständige Riemann'sche Mannigfaltigkeit. Dann gilt für jeden Punkt  $p \in M$  die disjunkte Zerlegung

$$M = \exp_p(U_p) \uplus \text{Cut}(p).$$

### Beweis

Nach Hopf-Rinow gibt es für jeden Punkt  $q \in M$  eine minimale Geodätische  $\gamma_v$  zwischen  $p$  und  $q$  mit  $q = \gamma_v(t_0 v)$ ,  $t_0 \leq s(v)$ ,  $\|v\| = 1$ . Insbesondere ist  $t_0 v \in \overline{U_p} = U_p \cup \partial U_p$ . Da  $q$  beliebig ist  $M \subset \exp_p(\overline{U_p}) = \exp_p(U_p) \cup \exp_p(\partial U_p) = \exp_p(U_p) \cup \text{Cut}(p) \subset M$ .

Noch zu zeigen ist:  $\exp_p(U_p) \cap \text{Cut}(p) = \emptyset$ . Wir nehmen an, dass  $q \in \exp_p(U_p) \cap \text{Cut}(p)$ .

Da  $q \in \exp_p(U_p)$  existiert eine minimierende Geodätische  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  mit  $\gamma(a) = p$  und  $\gamma(b) = q$ .  $U_p$  ist offen also  $\gamma$  auch minimierend auf  $[a, b + \varepsilon]$  für  $\varepsilon$  genügend klein.

$q \in \text{Cut}(p)$  heißt:  $q$  ist Schnittpunkt einer von  $p$  ausgehenden Geodätischen, das heißt es existiert eine minimierende Geodätische  $c : [\alpha, \beta] \rightarrow M$  mit  $c(\alpha) = p$ ,  $c(\beta) = q$ , die nach  $c(\beta)$  nicht mehr minimierend ist (insbesondere  $c \neq \gamma$ ), aber mit  $L(c|_{[\alpha, \beta]}) = L(\gamma|_{[a, b]}) = d(p, q)$ . Nach Lemma 2 (2) angewandt auf  $\gamma$  ist die Geodätische  $\gamma$  nicht mehr minimierend nach  $\gamma(b)$ , im Widerspruch zur Annahme! ■

### Weitere Eigenschaften von $\text{Cut}(p)$

(a)  $\text{Cut}(p)$  hat keine inneren Punkte.

#### Beweis

Wir nehmen an es existiert ein  $q$  im Inneren von  $\text{Cut}(p)$  längs  $\gamma$ . Dann existiert ein  $q' \in \gamma \cap \text{Cut}(p)$  „vor“  $q$ . Nach Definition des Schnittortes existiert eine minimierende Geodätische  $c$  zwischen Punkten  $p$  und  $q'$ .

1. Fall:  $c = \gamma$ : nach Definition des Schnittortes ist dann  $\gamma$  nicht minimierend nach  $q'$ , im Widerspruch zur Annahme.

2. Fall:  $c \neq \gamma$ : Nach Lemma 2 (2) ist  $\gamma$  nicht mehr minimierend „nach“  $q'$ , im Widerspruch zur Annahme. ■

(b)  $\exp_p|_{U_p}$  ist injektiv. Es gilt sogar ohne Beschränkung:  $\exp_p|_{U_p}$  ist eine differenzierbare Einbettung. Das heißt: für  $q \in \exp_p(U_p)$  existiert genau eine minimierende Geodätische von  $p$  nach  $q$ .

#### Beweis

Sei  $q \in \exp_p(U_p)$  und  $\exp_p(v_1) = q = \exp_p(v_2)$ . Nehmen wir an, dass  $v_1 \neq v_2$ , so hat man zwei minimierende Geodätische  $\gamma_1 \neq \gamma_2$  zwischen  $p$  und  $q$ , das heißt nach Definition des Schnittortes bzw. Lemma 2(4), dass  $q \in \text{Cut}(p)$ , im Widerspruch zur Annahme. ■

(c) Für ein kompaktes  $M$  nimmt die stetige Funktion  $s : E_p M \rightarrow \mathbb{R}$  ein Maximum bzw. Minimum an und ist somit beschränkt. Also ist  $\overline{U_p} = \{tv \in T_p M \mid v \in E_p M, 0 \leq t \leq s(v)\}$  homöomorph zum Einheitsball  $B_p := \{tv \in T_p M \mid v \in E_p M, 0 \leq t \leq 1\}$ .

(d) Da  $\exp_p : \overline{U_p} \rightarrow M$  surjektiv ist (Satz 7.3) und auf  $U_p$  injektiv ist, erhält man eine kompakte Riemann'sche Mannigfaltigkeit topologisch dadurch, dass man die Randpunkte eines Einheitsballs „geeignet“ identifiziert (beispielsweise werden für  $S^n$  alle Punkte identifiziert). Die topologische Komplexität einer kompakten Mannigfaltigkeit steckt also im Schnittort.



**Definition**

Der Injektivitätsradius von  $p$  ist definiert als

$$\text{Inj}(p) := \text{Dist}(p, \text{Cut}(p)).$$

Der Injektivitätsradius von  $M$  ist dann

$$\text{Inj}(M) := \inf_{p \in M} \text{Inj}(p).$$

**Beispiel**

$\text{Inj}(S^n) = \pi$  und  $\text{Inj}(p) = \pi$  für jeden Punkt  $p \in S^n$ .

**Satz 7.4**

(Ohne Beweis, vergleiche do Carmo, Kapitel 13, Proposition 2.2)

- (1) Sei  $q \in \text{Cut}(p)$  mit  $l := d(p, q) = \text{Dist}(p, \text{Cut}(p)) = \text{Inj}(p)$ . Dann gilt entweder, dass es eine Geodätische  $\gamma$  zwischen  $p$  und  $q$  gibt, so dass  $q$  zu  $p$  längs  $(\gamma)$  konjugiert ist (das heißt, es gibt ein Jacobi-Feld  $J$  längs  $\gamma$ , so dass  $J(p) = 0 = J(q)$ ), oder es existieren genau zwei minimierende Geodätische  $\gamma$  und  $\tau$  zwischen  $p$  und  $q$  mit  $\gamma'(l) = -\tau'(l)$ .
- (2) Falls für  $p \in M$  gilt:  $\text{Inj}(p) = \text{Inj}(M)$ , also  $\text{Dist}(p, \text{Cut}(p))$  minimal in  $M$ , so gilt: Entweder ist  $q$  zu  $p$  konjugiert längs einer minimierenden Geodätischen oder  $q$  ist Mittelpunkt einer geschlossenen Geodätischen (das heißt: differenzierbar in  $p$  und  $q$ ).

Beispiel für konjugierte Punkte: Breitner-Fläche (Vesperdose)

**Beispiel**

- (0)  $(\mathbb{R}^n, \text{kan})$  hat keine Schnittpunkte, da die Geodätischen Geraden sind. Also  $\text{Cut}(p) = \emptyset$  für jeden Punkt  $p \in \mathbb{R}^n$ , und laut Zerlegungssatz gilt  $\mathbb{R}^n = \exp_p(T_p M)$ .
- (1) Hyperbolische Ebene  $(H^2, \frac{1}{y^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$ : Auch hier gilt  $\text{Cut}(p) = \emptyset$  für jeden Punkt  $p \in H^2$ , also  $H^2 = \exp_p(T_p H^2)$ .

**Bemerkung:** Allgemeiner gilt der Satz von Hadamard-Cartan: Für einfach zusammenhängende und zusammenhängende Riemann'sche Mannigfaltigkeit  $M$  mit nicht-positiver Schnittkrümmung. So gilt  $\text{Cut}(p) = \emptyset$  für alle  $p \in M$ .

- (2)  $(\mathbb{P}^n, \text{kan}) = (S^n / \sim, \text{die von } S^n \text{ indizierte Metrik})$ , wobei  $p \sim q$  genau dann, wenn  $p$  und  $q$  Antipoden sind. Hier sind Geodätische minimierend für  $d(p, \cdot) < \frac{\pi}{2}$ . Sei  $pr : S^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ ;  $pr(p) := [p] = \{p, -p\}$  die Projektion von  $S^n$  auf  $\mathbb{P}^n$ . Dann ist

$$\text{Cut}(p) = pr(\text{„Äquator“}) = pr(q \in S^n \mid d(p, q) = \frac{\pi}{2}) = S^{n-1} / \sim = \mathbb{P}^{n-1}.$$

Weiter ist  $\exp_p(U_p)$  die offene „obere Hemisphäre“ und damit diffeomorph zu  $\mathbb{R}^n$ , etwa durch die Zentralprojektion  $Z : S_-^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  oder die Orthogonalprojektion  $O : S_-^n \rightarrow D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ .

Nach dem Zerlegungssatz gilt also topologisch betrachtet:

$$\mathbb{P}^n = \exp_p(U_p) \uplus \text{Cut}(p) \cong \mathbb{R}^n \uplus \mathbb{P}^{n-1}$$

Mit Induktion nach  $n = \dim \mathbb{P}^n$  folgt mit  $\mathbb{R}^0 := \{0\}$ :

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{R}^n \uplus \mathbb{R}^{n-1} \uplus \dots \uplus \mathbb{R}^1 \uplus \mathbb{R}^0$$

Beispielsweise ist  $\mathbb{P}^2 = \mathbb{R}^2 \uplus \mathbb{P}^1 = \mathbb{R}^2 \uplus \mathbb{R}^1 \uplus \mathbb{R}^0$ . Dies nennt man auch eine Zellenzerlegung des projektiven Raumes.

(3) Rotationszylinder.

(4) Flacher Torus  $T^2 = S^1 \times S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

**Bemerkungen:** (1) Der Schnittort ist im allgemeinen nicht differenzierbar, sondern in zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten ein Graph, also ein simplizialer 1-Komplex.

(2) Für obige Beispiele  $M$  gilt immer, dass die Schnittorte eines jeden Punktes gleich aussehen. Dies liegt daran, dass  $M$  jeweils homogen war, also für beliebige Punkte  $p, q \in M$  existiert eine Isometrie  $\varphi$  mit  $\varphi(p) = q$ .

### Beispiel

für einen Raum mit  $\text{Cut}(p) \neq \text{Cut}(q)$ : Rotationsellipsoid mit Rotationsachse  $z$ -Achse.

## 7.2. Volumenberechnung mit dem Zerlegungs-Satz

Sei zuerst  $G \subset M$  ein Gebiet, also offen, zusammenhängend und relativ kompakt, das ganz in einer Karte  $(U, \varphi)$  liegt (mit  $\varphi(p) = (x^1, \dots, x^n)$  als Koordinaten).

In der linearen Algebra bezeichnen wir das Volumen des von  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$  aufgespannten Parallelepipeds als  $V = \sqrt{\det(\langle a_i, a_j \rangle)}$  (Gramsche Determinante).

### Definition

Das Volumen des Gebietes bezeichnen wir als

$$\text{vol}(G) := \int_{\varphi(G)} \sqrt{\det(g_{ij}(\varphi^{-1}(x)))} dx^1 \dots dx^n =: \int_{\varphi(G)} d\text{vol}$$

mit  $g_{ij}(p) = \langle \frac{\partial}{\partial x^i}|_p, \frac{\partial}{\partial x^j}|_p \rangle_p$ .

Nach der Substitutionsregel für Integrale gilt:  $\text{vol}(G)$  ist unabhängig von der gewählten Karten und invariant unter Isometrien.

**Bemerkung:** Um das Volumen eines kompakten Gebietes  $G$ , das nicht ganz in einem Kartengebiet liegt, zu definieren benutzt man eine Überdeckung von  $G$  durch (endlich viele) Karten  $(U_i, \varphi_i)$  und eine zugehörige Zerlegung der Eins  $(f_i)_{i \in I}$ . Dann setzt man:

$$\text{vol}(G) := \sum_{i \in I} \int_{\varphi_i(G \cap U_i)} f_i d\text{vol}_i$$

wobei  $d\text{vol}_i := \sqrt{\det(g_{ij}(\varphi_i^{-1}(p)))} dx_i^1 \dots dx_i^n$ .

Man kann zeigen, dass  $\text{vol}(G)$  nicht von der Wahl der Karten und der entsprechenden Zerlegung der Eins abhängt.

### Beispiele

(1) In der Flächentheorie ist  $d \text{ vol} = dA = \sqrt{EG - F^2} du dv$ .

(2)  $(\mathbb{R}^n, \text{id})$ . Hier ist  $d \text{ vol} = dx^1 \dots dx^n$  bezüglich cartesischen Koordinaten.

Bezüglich Polarkoordinaten  $(t, u)$ ,  $u \in S^{n-1}$ , ist  $d \text{ vol} = t^{n-1} dt d\sigma$ , wobei  $d\sigma$  das Volumenelement auf der Einheitssphäre  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  ist.

Wir wissen:

- $M = \exp_p(U_p) \uplus \text{Cut}(p)$ .
- $\text{Cut}(p)$  hat keine inneren Punkte, also ist  $\text{vol}(M) = \text{vol}(\exp_p(U_p))$ .
- $\exp_p|_{U_p}$  ist ein Diffeomorphismus auf das Bild in  $M$ .

Das heißt: Wir können  $\exp_p^{-1} : \exp_p(U_p) \rightarrow T_p M \cong \mathbb{R}^n$  als Karte benutzen.

Sei  $c(t) := \exp_p(tu)$  eine normale Geodätische und  $\{u, e_2, \dots, e_n\}$  eine Orthonormalbasis von  $T_p M$ . Weiter seien  $Y_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , die eindeutigen Jacobifelder längs  $c(t)$  mit  $Y_i(0) = 0$  und  $Y_i'(0) = e_i$ . Es gilt (siehe 7.1):  $d \exp_p|_{tu}(u) = c'(t)$  und  $d \exp_p|_{tu}(te_i) = Y_i(t)$ ,  $i = 2, \dots, n$ .

$(t = x^1, \dots, x^n)$  seien die Koordinaten in  $T_p M$  bezüglich der Orthonormalbasis  $\{u, e_2, \dots, e_n\}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}|_{c(t)} &= c'(t) \text{ und } c'(0) = u \\ \frac{\partial}{\partial x^i}|_{c(t)} &= \frac{\partial}{\partial s}|_0 \exp_p(tu + se_i) = d \exp_p|_{tu}(e_i) = \frac{1}{t} Y_i(t) \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} g_{11}(c(t)) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle_{c(t)} = 1 \\ g_{1k}(c(t)) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle_{c(t)} = 0 \\ g_{ij}(c(t)) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle_{c(t)} = \frac{1}{t^2} \langle Y_i(t), Y_j(t) \rangle_{c(t)} \end{aligned}$$

und

$$\sqrt{\det(g_{ij}(c(t)))} = \frac{1}{t^{n-1}} \sqrt{\det \underbrace{\langle Y_i, Y_j \rangle_{c(t)}}_{(n-1) \times (n-1)\text{-Matrix}}} =: J(u, t)$$

Also:

$$\begin{aligned} d \text{ vol} &= \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \dots dx^n \\ &= J(u, t) x^1 \dots dx^n = J(u, t) t^{n-1} dt du \end{aligned}$$

wobei  $du$  das euklidische Volumen-Element auf der Einheitssphäre  $S^{n-1} \subset T_p M$  ist.

Daraus können wir folgende Volumenformel ableiten:

## 7. Riemann'sche Mannigfaltigkeiten als metrische Räume

Ist  $s(u) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  der Abstand von  $p$  zum Schnittpunkt von  $p$  in Richtung  $u \in T_p M$ ,  $\|u\| = 1$ , so gilt:

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(M) &= \operatorname{vol}(\exp_p(U_p)) \\ &= \int_{S^{n-1}} \int_0^{s(u)} J(u, t) t^{n-1} dt du\end{aligned}$$

Allerdings kann man im allgemeinen  $J(u, t)$  nicht explizit berechnen, nur abschätzen.

Einfache Beispiele sind Mannigfaltigkeiten mit konstanter Krümmung.

- (1)  $(\mathbb{R}^n, \text{kan})$  mit Schnittkrümmung konstant 0. Hier ist  $Y_i(t) = tE_i(t)$ , wobei  $E_i(t) = \|_{c(t)} e_i$  ein Parallelfeld längs  $c$  ist. Hier ist  $J(t, u) = 1$ .
- (2)  $(S^n, \text{kan})$ . Hier ist  $Y_i(t) = \sin(t)E_i(t)$ . Also

$$\operatorname{vol}(S^n) = \int_{S^{n-1}} \int_0^\pi \left( \frac{\sin(t)}{t} \right)^{n-1} t^{n-1} dt du = \operatorname{vol}(S^{n-1}) \int_0^\pi (\sin t)^{n-1} dt$$

Diese Rekursionsformel führt zu:

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(S^{2n}) &= \frac{2(2\pi)^n}{(2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1} \\ \operatorname{vol}(S^{2n+1}) &= 2 \frac{\pi^{n+1}}{n!}\end{aligned}$$

Das heißt auch:  $\operatorname{vol}(S^n) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

- (3) Hyperbolische Räume  $H^n$ . Hier ist  $s(u) = \infty$  für alle  $u \in S^{n-1} \subset T_p M$ .  $Y_i(t) = \sinh(t)E_i(t)$ .  $J(u, t) = \left( \frac{\sinh(t)}{t} \right)^{n-1}$ . Daraus ergibt sich  $\operatorname{vol}(H^n) = \infty$ . Betrachten wir also einen Ball von Radius  $R$  (das heißt  $B_R(p) := \{q \in H^n, d(p, q) \leq R\}$ ):

$$\operatorname{vol}(B_R(p)) = \int_{S^{n-1}} \int_0^R (\sinh t)^{n-1} dt du = \operatorname{vol}(S^{n-1}) \int_0^R (\sinh t)^{n-1} dt$$

Für sehr große  $R$  wächst  $\operatorname{vol}(B_R(p))$  wie  $e^{(n-1)R}$ . Das Volumenwachstum von Bällen vom Radius  $R$  in hyperbolischen Räumen ist exponentiell in  $R$ . Vergleiche das mit dem Volumenwachstum von Bällen von Radius  $R$  in  $\mathbb{R}^n$ , welches polynomial ist.

Diese Beobachtungen waren Ausgangspunkt um den Krümmungsbegriff in allgemeinen metrischen Räumen einzuführen.