

# 18. Konvergenzsätze

## Definition

Sei  $(f_k)$  eine Folge von Funktionen,  $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$  und  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ .

- (1)  $(f_k)$  heißt  **$L^1$ -konvergent gegen  $f$**  :  $\iff \|f - f_l\|_1 \rightarrow 0 \ (k \rightarrow \infty)$
- (2)  $(f_k)$  heißt eine  **$L^1$ -Cauchyfolge** :  $\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 \in \mathbb{N} : \|f_k - f_l\|_1 < \varepsilon \ \forall k, l \geq k_0$ .

Ist  $(f_k)$   $L^1$ -konvergent gegen  $f$ , so ist  $(f_k)$  eine  $L^1$ -Cauchyfolge:  $\|f_l - f_k\|_1 = \|f_l - f + f - f_k\|_1 \geq \|f - f_l\|_1 + \|f - f_k\|_1$ .

### Satz 18.1 (Satz von Riesz-Fischer)

$(f_k)$  sei eine  $L^1$ -Cauchyfolge in  $L(\mathbb{R}^n)$ , also  $f_k \in L(\mathbb{R}^n) \ \forall k \in \mathbb{N}$ . Dann existiert ein  $f \in L(\mathbb{R}^n)$ :

- (1)  $\|f - f_k\|_1 \rightarrow 0 \ (k \rightarrow \infty)$
- (2)  $\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx$
- (3)  $(f_k)$  enthält eine Teilfolge, die fast überall auf  $\mathbb{R}^n$  punktweise gegen  $f$  konvergiert.

(Ohne Beweis)

### Satz 18.2 (Satz von Beppo Levi)

Sei  $(f_k)$  eine Folge in  $L(\mathbb{R})$  mit  $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots$  auf  $\mathbb{R}^n$  und  $(\int f_k dx)$  beschränkt.

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$  sei definiert durch  $f(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ . Dann:  $f \in L(\mathbb{R}^n)$  und

$$\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx \quad (= \int \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx)$$

## Beweis

Für  $k \geq l$  :  $\|f_k - f_l\|_1 \stackrel{16.5}{=} \underbrace{\int f_k - f_l dx}_{\geq 0} = \int f_k dx - \int f_l dx = |\int f_k dx - \int f_l dx|$ .  $(\int f_k dx)$  ist

beschränkt und monoton, also konvergent  $\implies (\int f_k dx)$  ist eine Cauchyfolge in  $\mathbb{R} \implies (f_k)$  ist eine  $L^1$ -Cauchyfolge in  $L(\mathbb{R}^n)$ . 18.1  $\implies \exists g \in L(\mathbb{R}^n)$  mit:  $\int g dx = \lim \int f_k dx$  und  $(f_k)$  enthält eine Teilfolge, die fast überall auf  $\mathbb{R}^n$  punktweise gegen  $g$  konvergiert  $\implies f = g$  fast überall auf  $\mathbb{R}^n \xrightarrow{17.7} f \in L(\mathbb{R}^n)$  und  $\int f dx = \int g dx = \lim \int f_k dx$ . ■

**Definition**

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $(A_k)$  sei eine Folge von Teilmengen von  $A$ .  $(A_k)$  ist eine **Ausschöpfung von**  
**A**:  $\iff A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \dots$  und  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A$ .

**Satz 18.3**

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $(A_k)$  sei eine Ausschöpfung von  $A$  und es sei  $f \in L(A_k) \forall k \in \mathbb{N}$ .  $f \in L(A) \iff$   
 $(\int_{A_k} |f| dx)$  ist beschränkt. In diesem Fall:

$$\int_A f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k} f dx$$

**Beweis**

„ $\implies$ “:  $A_k \subseteq A \implies |f|_{A_k} \leq |f|_A \implies \underbrace{\int |f|_{A_k} dx}_{= \int |f| dx} \leq \int |f|_A dx$ .

„ $\impliedby$ “: OBdA:  $f \geq 0$  auf  $A$  ( $f = f^+ - f^-$ ). Dann:  $0 \leq \int_{A_1} f dx \leq \int_{A_2} f dx \leq \int_{A_3} f dx \leq \dots$ .  $|\int f_{A_k} dx| \leq \int |f|_{A_k} dx = \int_{A_k} |f| dx \implies (\int f_{A_k} dx)$  beschränkt. Es gilt:  $f_{A_k}(x) \rightarrow f_A(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$ . 18.2  $\implies f_A \in L(\mathbb{R}^n)$  und  $\int f_A dx = \lim \int f_{A_k} dx \implies f \in L(A)$  und  $\int_A f dx = \lim \int_{A_k} f dx$ . ■

**Satz 18.4 (Uneigentliche Lebesgue- und Riemann-Integrale)**

Es sei  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion ( $a \in \mathbb{R}$ ) und es gelte  $f \in R[a, t] \forall t > a$ . Dann:  
 $f \in L([a, \infty)) \iff \int_a^{\infty} f dx$  ist **absolut** konvergent. In diesem Fall:

$$\underbrace{\int_{[a, \infty)} f dx}_{\text{L-Int.}} = \underbrace{\int_a^{\infty} f dx}_{\text{uneigentl. R-Int.}}$$

**Beweis**

Sei  $(t_k)$  eine Folge in  $[a, \infty)$  mit:  $a < t_1 < t_2 < t_3 < \dots$  und  $t_k \rightarrow \infty$  ( $k \rightarrow \infty$ ).  $A_k := [a, t_k]$  ( $k \in \mathbb{N}$ ),  $A := [a, \infty)$ . Für  $k \in \mathbb{N}$ :  $I_k := \int_a^{t_k} f dx$ ,  $J_k := \int_a^{t_k} |f| dx$  (R-Integrale). 16.9  $\implies f, |f| \in L([a, t_k])$  und  $I_k = \int_{A_k} f dx$ ,  $J_k = \int_{A_k} |f| dx$ .  $f \in L(A) \xLeftrightarrow{18.3} (\int |f| dx)$  ist beschränkt  $\iff (J_k)$  ist beschränkt  $\xLeftrightarrow{J_1 \subseteq J_2 \subseteq \dots} (J_k)$  konvergent  $\iff \int_a^{\infty} |f| dx$  konv. In diesem Fall:  $\int_A f dx \stackrel{16.3}{=} \lim \int_{A_k} f dx = \lim I_k = \int_a^{\infty} f dx$ . ■

**Beispiele:**

(1)  $f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}$ ; Analysis 1  $\implies \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  abs. konv.  $\xrightarrow{18.4} f \in L([0, 1])$ . Analysis 1  
 $\implies \int_0^1 \frac{1}{x} dx$  div.  $\xrightarrow{18.4} f^2 \notin L([0, 1])$ .

$$(2) f(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , x > 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

Analysis 1  $\implies \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}$  konv., aber nicht abs. konv. 18.4  $\implies f \notin L([0, \infty))$ , aber  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  existiert im uneigentlichen R-Sinne.

### Satz 18.5

$(A_k), (B_k)$  seien Folgen qber Mengen im  $\mathbb{R}^n$ .

(1) Ist  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$  und  $A := \bigcup_{k=1}^\infty A_k$ . Dann gilt:  $A$  ist qb  $\iff (v_n(A_k))$  ist beschränkt ( $\iff (v_n(A_k))$  konvergiert).

I. d. Fall:  $v_n(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} v_n(A_k)$ .

(2) Für  $j \neq k$  sei  $B_j \cap B_k$  jeweils eine Nullmenge und  $B := \bigcup_{k=1}^\infty B_k$ .  $B$  ist qb  $\iff \sum_{j=1}^\infty v_n(B_j)$  konvergiert.

I. d. Fall:  $v_n(B) = \sum_{j=1}^\infty v_n(B_j)$ .

### Beweis

(1) Folgt aus 18.3 mit  $f \equiv 1$

(2)  $\tilde{A}_k := B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). Dann:  $\tilde{A}_1 \subseteq \tilde{A}_2 \subseteq \dots$  und  $B = \bigcup_{k=1}^\infty \tilde{A}_k$ . 17.2  $\implies \tilde{A}_k$  ist qb und  $v_n(\tilde{A}_k) = v_n(B_1) + \dots + v_n(B_k)$ .  $B$  ist qb  $\stackrel{(1)}{\iff} (v_n(\tilde{A}_k))$  konvergiert  $\iff \sum_{j=1}^\infty v_n(B_j)$  konvergiert.

I. d. Fall:  $v_n(B) \stackrel{(1)}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} v_n(\tilde{A}_k) = \sum_{j=1}^\infty v_n(B_j)$ . ■

### Satz 18.6 (Satz von Lebesgue (Majorisierte Konvergenz))

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $(f_k)$  eine Folge in  $L(A)$  und  $(f_k)$  konv. fast überall auf  $A$  punktweise gegen  $f : A \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$

(1) Ist  $F \in L(A)$  und gilt  $|f_k| \leq F$  auf  $A \ \forall k \in \mathbb{N}$ , so ist  $f \in L(A)$  und  $\int_A f dx = \lim \int_A f_k dx$ .

(2) Ist  $A$  qb und ex. ein  $M \geq 0$  mit  $(f_k) \leq M$  auf  $A \ \forall k \in \mathbb{N}$ , so ist  $f \in L(A)$  und  $\int_A f dx = \lim \int_A f_k dx$ .

### Beweis

(1) O.B.d.A:  $A = \mathbb{R}^n$  (Übergang  $f \rightarrow f_A$ ).  $\exists$  Nullmenge  $N$  mit  $F(x) \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus N$  (17.8) und  $f_k(x) \rightarrow f(x) \ (k \rightarrow \infty) \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus N$ . Dann:  $f_k(x) \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus N \ \forall k \in \mathbb{N}$ . Wegen 17.7 ändern wir ab:  $f(x) := f_k(x) := F(x) := 0 \ \forall x \in N \ \forall k \in \mathbb{N}$ . Dann:  $f_k(x) \rightarrow f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ . Für  $k, \nu \in \mathbb{N} : g_k(x) := \sup\{f_j(x) : j \geq k\}; \ g_{k,\nu}(x) := \max\{f_k(x), f_{k+1}(x), \dots, f_{k+\nu}(x)\}$ . Dann:  $|g_k|, |g_{k,\nu}| \leq F$  auf  $\mathbb{R}^n$ . 16.6  $\implies g_{k,\nu} \in L(\mathbb{R}^n)$ .

Sei  $k \in \mathbb{N}$  (fest).  $g_{k,1} \leq g_{k,2} \leq g_{k,3} \leq \dots$  auf  $\mathbb{R}^n$ ,  $|\int g_{k,\nu} dx| \leq \int |g_{k,\nu}| dx \leq \int F dx \implies (\int g_{k,\nu} dx)_{\nu=1}^{\infty}$  ist beschränkt. Es gilt:  $g_{k,\nu}(x) \rightarrow g_k(x)$  ( $\nu \rightarrow \infty$ )  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ . 18.2  $\implies g_k \in L(\mathbb{R}^n)$ . Es ist:  $g_1 \geq g_2 \geq g_3 \geq \dots$  auf  $\mathbb{R}^n$ ; wie oben:  $(\int g_k dx)$  beschränkt. Weiter gilt:  $g_k(x) \rightarrow f(x)$  ( $k \rightarrow \infty$ )  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .

18.2  $\implies f \in L(\mathbb{R}^n)$  und  $\int f dx = \lim \int g_k dx$ .  $h_k(x) := \inf\{f_j(x) : j \geq k\}$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ). Analog:  $h_k \in L(\mathbb{R}^n)$  und  $\int f dx = \lim \int h_k dx$ . Es ist:  $h_k \leq f_k \leq g_k$  auf  $\mathbb{R}^n \implies \int h_k dx \leq \int f_k dx \leq \int g_k dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int f dx = \lim \int f_k dx$ .

(2) folgt aus (1):  $A \text{ qb} \implies 1 \in L(A) \implies M \in L(A)$ ,  $F := M$ . ■

### Beispiel

Für  $k \in \mathbb{N}$  sei  $f_k : [1, k] \rightarrow \mathbb{R}$  def. durch

$$f_k(x) := \frac{k^3 \sin(\frac{x}{k})}{(1 + kx^2)^2}$$

Bestimme:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_1^k f_k(x) dx$ .

$$g_k(x) := \begin{cases} f_k(x), & x \in [1, k] \\ 0, & x > k \end{cases} \quad (x \in [1, \infty))$$

Sei  $x \in [1, \infty) \implies \exists k_0 \in \mathbb{N} : x \in [1, k] \forall k \geq k_0$ . Für  $k \geq k_0 : g_k(x) = f_k(x) = \frac{\sin(\frac{x}{k})}{\frac{x}{k}} \cdot \frac{k^2 x^2}{(1 + kx^2)^2} = \frac{\sin(\frac{x}{k})}{\frac{x}{k}} \cdot \frac{1}{(\frac{1}{kx} + x)^2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} =: f(x)$ .

$$|g_k(x)| = \underbrace{\frac{|\sin \frac{x}{k}|}{\frac{x}{k}}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{(\frac{1}{kx} + x)^2}}_{\leq \frac{1}{x^2}} \leq \frac{1}{x^2} = f(x). \quad f_k \in R[1, k] \xrightarrow{16.9} f_k \in L([1, k]) \xrightarrow{17.7} g_k \in L([1, \infty))$$

$$\text{und } \int_{[1, \infty)} f dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1. \quad 18.6 \implies \underbrace{\int_{[1, \infty)} g_k dx}_{\int_1^k f_k dx} \rightarrow \int_{[1, \infty)} f dx = 1.$$

**Erinnerung:** (Ana I, 23.5):  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei auf  $[a, b]$  db und  $f' \in R[a, b]$ . Dann:  $\int_a^b f' dx = f(b) - f(a)$ .

#### Satz 18.7

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei db auf  $[a, b]$  und  $f'$  sei auf  $[a, b]$  beschränkt. Dann:  $f' \in L([a, b])$  und  $\int_{[a, b]} f' dx = f(b) - f(a)$ .

#### Beweis

$M := \sup\{|f'(x)| : x \in [a, b]\}$ .  $f_k(x) := \begin{cases} \frac{f(x + \frac{1}{k}) - f(x)}{\frac{1}{k}}, & x \in [a, b - \frac{1}{k}] \\ 0, & x \in (b - \frac{1}{k}, b] \end{cases}$ . Ana I  $\implies f_k \in R[a, b] \xrightarrow{16.9} f \in L([a, b]) : |f(x + \frac{1}{k}) - f(x)| \xrightarrow{\text{MWS}} |f'(\xi)| \frac{1}{k} \leq M \frac{1}{k} \quad (x \in [a, b - \frac{1}{k}]) \implies$

$|f_k(x)| \leq M \forall x \in [a, b]$ . Sei  $x \in [a, b) \implies \exists k_0 \in \mathbb{N} : x \in [a, b - \frac{1}{k}] \forall k \geq k_0$ . Für  $k \geq k_0$  :  
 $f_k(x) = \frac{f(x+\frac{1}{k})-f(x)}{\frac{1}{k}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f'(x)$ . Also:  $f_k(x) \rightarrow g(x) := \begin{cases} f'(x), & x \in [a, b) \\ 0, & x = b \end{cases} \forall x \in [a, b]$ .

18.6  $\implies g \in L([a, b]) \xrightarrow{17.7} f' \in L([a, b])$  und  $\int_{[a,b]} f' dx = \int_{[a,b]} g dx \stackrel{18.6}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} f_k dx \stackrel{16.9}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f_k dx$ .

$f \in C[a, b] \xrightarrow{\text{Ana I}} f$  besitzt auf  $[a, b]$  eine Stammfunktion  $F$ .  $\int_a^b f_k(x) dx = k \int_a^{b-\frac{1}{k}} (f(x + \frac{1}{k}) - f(x)) dx = k \int_1^{b-\frac{1}{k}} f(x + \frac{1}{k}) dx - k \int_a^{b-\frac{1}{k}} f(x) dx \stackrel{z:=x+\frac{1}{k}}{=} \int_{a+\frac{1}{k}}^b f(z) dz - k \int_a^{b-\frac{1}{k}} f(x) dx = k(F(b) - F(a + \frac{1}{k})) - k(F(b - \frac{1}{k}) - F(a)) = \frac{F(b) - F(b - \frac{1}{k})}{\frac{1}{k}} - \frac{F(a + \frac{1}{k}) - F(a)}{\frac{1}{k}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} F'(b) - F'(a) = f(b) - f(a). \blacksquare$

