

# **Algebra II**

**Sommersemester 2006**

**Prof. Dr. F. Herrlich**

Die Mitarbeiter von <http://lkwiki.nomeata.de/>

10. Januar 2017



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Multilineare Algebra</b>	<b>5</b>
1.1	Moduln	5
1.2	Tensorprodukt	9
1.3	Flache Moduln	12
1.4	Tensoralgebra	13
1.5	Symmetrische und äußere Algebra	15
1.6	Differentiale	16
1.7	Der de Rham-Komplex	21
<b>2</b>	<b>Noethersche Ringe und Moduln</b>	<b>25</b>
2.1	Der Hilbertsche Basissatz	25
2.2	Ganze Ringerweiterungen	27
2.3	Der Hilbert'sche Nullstellensatz	29
2.4	Graduierte Ringe und Moduln	31
2.5	Invarianten endlicher Gruppen	35
2.6	Nakayama, Krull und Artin-Rees	38
2.7	Krull-Dimension	40
2.8	Das Spektrum eines Rings	44
2.9	Diskrete Bewertungsringe	48
2.10	Dedekindringe	52
2.11	Primärzerlegung	57
	<b>Vokabeln</b>	<b>59</b>

## Benannte Sätze

Satz 1	Tensorprodukt	10
Satz 2	Symmetrische und äußere Potenz	15
Satz 4	Hilbert'scher Basissatz	26
Satz 5	Hilbert'scher Nullstellensatz	29
Satz 6	Hilbert-Polynom	33
Satz 7	Endliche Erzeugbarkeit des Invariantenrings	36
Satz 8	Lemma von Nakayama	38
Satz 9	Durchschnittssatz von Krull	39
Proposition 2.23	Artin-Rees	39
Satz 12	Diskrete Bewertungsringe	50
Satz 13	Dedekindringe	53
Satz 15	Reduzierte Primärzerlegung	58



# 1 Multilineare Algebra

## §1 Moduln

Sei  $R$  ein (kommutativer) Ring (mit Eins) (in der ganzen Vorlesung).

### Definition 1.1

- (a) Eine abelsche Gruppe  $(M, +)$  zusammen mit einer Abbildung  $\cdot : R \times M \rightarrow M$  heißt  **$R$ -Modul** (genauer:  $R$ -Linksmodul), wenn gilt:

- (i)  $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$
- (ii)  $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$
- (iii)  $(a \cdot b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$
- (iv)  $1 \cdot x = x$

für alle  $a, b \in R, x, y \in M$ .

- (b) Eine Abbildung  $\varphi : M \rightarrow M'$  zwischen  $R$ -Moduln  $M, M'$  heißt  **$R$ -Modul-Homomorphismus** (kurz  **$R$ -linear**), wenn für alle  $x, y \in M, a, b \in R$  gilt:

$$\varphi(a \cdot x + b \cdot y) = a \cdot \varphi(x) + b \cdot \varphi(y)$$

### Beispiele

- (1)  $R = K$  Körper. Dann ist  $R$ -Modul =  $K$ -Vektorraum und  $R$ -linear = linear
- (2)  $R$  ist  $R$ -Modul. Jedes Ideal  $I \subseteq R$  ist  $R$ -Modul
- (3) Jede abelsche Gruppe ist ein  $\mathbb{Z}$ -Modul.  
(denn:  $n \cdot x = \underbrace{x + x + \dots + x}_{n\text{-mal}}$  definiert die Abbildung  $\cdot : \mathbb{Z} \times M \rightarrow M$  wie in 1.1 gefordert)

### Bemerkung + Definition 1.2

- (a) Sind  $M, M'$   $R$ -Moduln, so ist  $\text{Hom}_R(M, M') = \{\varphi : M \rightarrow M' : \varphi \text{ ist } R\text{-linear}\}$  ein  $R$ -Modul durch  $(\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$  und  $(a \cdot \varphi_1)(x) = a \cdot \varphi_1(x)$ .
- (b)  $M^* = \text{Hom}_R(M, R)$  heißt dualer Modul.

### Beispiele

$$R = \mathbb{Z}$$

$$\text{Hom}_R(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \{0\}, \text{ denn } 0 = \varphi(0) = \varphi(1 + 1) = \varphi(1) + \varphi(1) \Rightarrow \varphi(1) = 0$$

### Bemerkung 1.3 (Ähnlichkeiten von Moduln mit Vektorräumen)

Die  $R$ -Moduln bilden eine **abelsche Kategorie  $R$ -Mod**.

- (a) Eine Untergruppe  $N$  eines  $R$ -Moduls  $M$  heißt  $R$ -Untermodul von  $M$ , falls  $R \cdot N \subseteq N$ .
- (b) Kern und Bild  $R$ -linearer Abbildungen sind  $R$ -Moduln.
- (c) Zu jedem Untermodul  $N \subseteq M$  gibt es einen Faktormodul  $M/N$ .
- (d) Homomorphiesatz:  
Für einen surjektiven Homomorphismus  $\varphi : M \rightarrow N$  gilt:  $M/\text{Kern}(\varphi) \cong N$ .

- (e) *Direktes Produkt*: Sei  $\{M_i\}_{i \in I}$  eine beliebige Familie von Moduln. Dann ist ihr direktes Produkt  $\prod_i M_i = \times_i M_i$  gegeben durch die Menge aller Tupel  $(m_i)_{i \in I}$  mit  $m_i \in M_i$  und die  $R$ -Aktion  $r(m_i)_{i \in I} = (rm_i)_{i \in I}$ .

*Direkte Summe*: Das gleiche wie beim direkten Produkt, jedoch dürfen in den Tupeln nur endlich viele  $m_i \neq 0$  sein.

### Beweis

- (b)  $\text{Kern}(\varphi)$ : Sei  $\varphi : M \rightarrow N$  lineare Abbildung.  $m \in \text{Kern}(\varphi)$ ,  $r \in R$ :  
 $\varphi(rm) = r\varphi(m) = 0 \Rightarrow R \cdot \text{Kern}(\varphi) \subseteq \text{Kern}(\varphi)$ ; Untergruppe klar  
 $\text{Bild}(\varphi)$ :  $n \in \text{Bild}(\varphi)$ , d. h.  $\exists m : n = \varphi(m)$ ,  $m \in M \Rightarrow r \in R : rn = r\varphi(m) = \varphi(rm) \in \text{Bild}(\varphi) \Rightarrow R \cdot \text{Bild}(\varphi) \subseteq \text{Bild}(\varphi)$

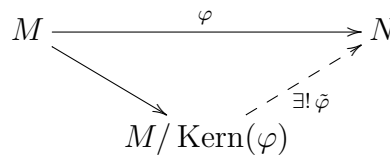
- (c)  $M$  abelsch  $\Rightarrow$  jedes  $N$  Normalteiler  $\Rightarrow M/N$  ist abelsche Gruppe.

Wir definieren  $R$ -Aktion auf  $M/N$  durch  $r(m+N) = rm+N$ . Das ist wohldefiniert, denn  
 $r((m+n)+N) = r(m+n)+N = rm + \underbrace{rn}_{\in N} + N = rm + N$

$$r((m+N) + (m'+N)) = r((m+m') + N) = r(m+m') + N = rm + N + rm' + N = r(m+N) + r(m'+N)$$

Die restlichen drei Eigenschaften gehen ähnlich.

- (d)



Wohldefiniertheit von  $\tilde{\varphi}$ :

Sei  $k \in \text{Kern}(\varphi) : \varphi(m+k) = \varphi(m)$

surjektiv:  $\forall n \in N : n = \varphi(m) = \tilde{\varphi}(m + \text{Kern}(\varphi))$

injektiv:  $m, m' \in M$  mit  $\varphi(m) = \varphi(m') = n \in N \Leftrightarrow \varphi(m-m') = 0 \Rightarrow m + \text{Kern}(\varphi) = m' + \text{Kern}(\varphi)$

$\tilde{\varphi}$  ist  $R$ -linear: Klar, wegen  $\varphi$   $R$ -linear.

### Bemerkung 1.4

- (a) Zu jeder Teilmenge  $X \subseteq M$  eines  $R$ -Moduls  $M$  gibt es den von  $X$  erzeugten Untermodul

$$\langle X \rangle = \bigcap_{\substack{M' \subseteq M \\ X \subseteq M'}} \text{Untermodul } M' = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in R, x_i \in X \right\}$$

- (b)  $B \subset M$  heißt **linear unabhängig**, wenn aus  $\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i = 0$  mit  $n \in \mathbb{N}, b_i \in B, \alpha_i \in R$  folgt  $\alpha_i = 0$  für alle  $i$ .

- (c) Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem heißt **Basis**.

- (d) Nicht jedes  $R$ -Modul besitzt eine Basis.

Beispiel:  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  als  $\mathbb{Z}$ -Modul:  $\{\bar{1}\}$  ist nicht linear unabhängig, da  $\underbrace{42}_{\neq 0 \text{ in } \mathbb{Z}} \cdot \bar{1} = 0$

- (e) Ein  $R$ -Modul heißt **frei**, wenn er eine Basis besitzt.

- (f) Ein freier  $R$ -Modul  $M$  hat die Universelle Abbildungseigenschaft eines Vektorraums. Ist  $B$  eine Basis von  $M$ , und  $f : B \rightarrow M'$  eine Abbildung in einen  $R$ -Modul  $M'$ , so gibt es genau eine  $R$ -lineare Abbildung  $\varphi : M \rightarrow M'$  mit  $\varphi|_B = f$ .
- (g) Sei  $M$  freier, endlich erzeugter Modul. Dann ist  $M^*$  wieder frei und hat dieselbe Dimension wie  $M$ .

**Beweis**

- (f) Sei  $\{y_i\}_{i \in I}$  Familie von Elementen von  $M'$ .

Sei  $x \in M$ . Durch  $x = \sum_i a_i x_i$  ist  $\{a_i\}_{i \in I}$  eindeutig bestimmt.

Wir setzen:  $\varphi(x) := \sum_i a_i y_i = \sum_i a_i \varphi(x_i)$

**Beh. 1:** Falls  $\{y_i\}_{i \in I}$  ( $y_i \neq y_j$  für  $i \neq j$ ) Basis von  $M'$  ist, dann ist  $\varphi$  ein Isomorphismus.

**Bew. 1:** Wir können den Beweis des Satzes rückwärts anwenden

$\Rightarrow \exists \psi : M' \rightarrow M$  mit  $\psi(y_i) = x_i \forall i \in I$

$\Rightarrow \varphi \circ \psi = id_{M'}, \psi \circ \varphi = id_M$

**Beh. 2:** Zwei freie Moduln mit gleicher Basis sind isomorph.

**Bew. 2:** klar

**Proposition + Definition 1.5**

Sei  $0 \rightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \rightarrow 0$  kurze exakte Sequenz von  $R$ -Moduln (d.h.  $M' \subseteq M$  Untermodul,  $M'' = M/M'$ ). Dann gilt für jeden  $R$ -Modul  $N$ :

- (a)  $0 \rightarrow \text{Hom}_R(N, M') \xrightarrow{\alpha_*} \text{Hom}_R(N, M) \xrightarrow{\beta_*} \text{Hom}_R(N, M'') \rightarrow 0$  ist exakt.
- (b)  $0 \rightarrow \text{Hom}_R(M'', N) \xrightarrow{\beta^*} \text{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{\alpha^*} \text{Hom}_R(M', N) \rightarrow 0$  ist exakt.
- (c) Im Allgemeinen sind  $\beta_*$  bzw.  $\alpha^*$  nicht surjektiv.
- (d) Ein Modul  $N$  heißt **projektiv** (bzw. **injektiv**), wenn  $\beta_*$  (bzw.  $\alpha^*$ ) **für sämtliche Wahlen der kurzen exakten Sequenz**  $0 \rightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \rightarrow 0$  surjektiv ist.
- (e) Freie Moduln sind projektiv.
- (f) Jeder  $R$ -Modul  $M$  ist Faktormodul eines projektiven  $R$ -Moduls.
- (g) Jeder  $R$ -Modul  $M$  ist Untermodul eines injektiven  $R$ -Moduls.

**Beweis**

- (a)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & N & & & & \\
 & \swarrow \varphi & \downarrow \psi & \searrow & & & \\
 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{\alpha} & M & \xrightarrow{\beta} & M'' \longrightarrow 0
 \end{array}$$

$\alpha_*$  ist injektiv: Sei  $\varphi \in \text{Hom}_R(N, M')$ , ist  $\alpha_*(\varphi) = \alpha \circ \varphi = 0 \xrightarrow{\alpha \text{ inj.}} \varphi = 0$ .

$\text{Bild}(\alpha_*) \subseteq \text{Kern}(\beta_*)$ :  $\beta_*(\alpha_*(\varphi)) = \underbrace{\beta \circ \alpha \circ \varphi}_{=0} = 0$

$\text{Kern}(\beta_*) \subseteq \text{Bild}(\alpha_*)$ :

Sei  $\beta \circ \psi = 0$  ( $\psi \in \text{Kern}(\beta_*)$ ). Für jedes  $x \in N$  ist  $\psi(x) \in \text{Kern}(\beta) = \text{Bild}(\alpha) \Rightarrow$  zu  $x \in N \exists y \in M'$  mit  $\psi(x) = \alpha(y)$ ;  $y$  ist eindeutig, da  $\alpha$  injektiv.

Definiere  $\varphi' : N \rightarrow M'$  durch  $x \mapsto y$ .

Zu zeigen:  $\varphi'$  ist  $R$ -linear

Seien  $x, x' \in N \Rightarrow \varphi'(x + x') = z$  mit  $\alpha(z) = \varphi(x + x') = \varphi(x) + \varphi(x') = \alpha(y) + \alpha(y') = \alpha(y + y')$  mit  $\varphi'(x) = y, \varphi'(x') = y' \xrightarrow{\alpha \text{ inj.}} z = y + y'$

Genauso:  $\varphi'(a \cdot x) = a \cdot \varphi'(x)$

(b)

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\beta} & M'' \longrightarrow 0 \\
 & & & & \searrow & & \swarrow \\
 & & & & & & N
 \end{array}$$

$\beta^*(\varphi)$        $\varphi$

$\beta^*$  injektiv, denn für  $\varphi \in \text{Hom}(M'', N)$  ist  $\beta^*(\varphi) = \varphi \circ \beta$

Sei  $\beta^*(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi \circ \beta = 0 \xRightarrow{\beta \text{ surj.}} \varphi = 0$ .

$\text{Bild}(\beta^*) \subseteq \text{Kern}(\alpha^*)$ :  $(\alpha^* \circ \beta^*)(\varphi) = \alpha^*(\varphi \circ \beta) = \varphi \circ \underbrace{\beta \circ \alpha}_{=0} = 0$

$\text{Kern}(\alpha^*) \subseteq \text{Bild}(\beta^*)$ : Sei  $\psi \in \text{Kern}(\alpha^*)$ . Aber  $\psi \in \text{Hom}_R(M, N)$  mit  $\psi \circ \alpha = 0$   
Weil  $\psi$  auf  $\text{Bild}(\alpha)$  verschwindet, kommutiert

$$\begin{array}{ccc}
 & M'' & \\
 \beta \nearrow & & \nwarrow \cong \\
 M & \longrightarrow & M / \text{Bild}(\alpha) \\
 \psi \searrow & & \swarrow \sigma \\
 & N &
 \end{array}$$

$\Rightarrow \beta^*(\sigma) = \psi \Rightarrow \text{Beh.}$

(c) Im Allgemeinen sind  $\beta_*$  und  $\alpha^*$  nicht surjektiv

z.B.:

1.  $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$  mit  $N := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Es gilt:  $\text{Hom}(N, \mathbb{Z}) = \{0\}$

$\text{Hom}(N, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \{0, id\} \Rightarrow \beta_*$  nicht surjektiv  $\Rightarrow N$  nicht projektiv!

2.  $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 4} \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow 0$  mit  $N := 2 \cdot \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

$\text{Hom}(\mathbb{Z}, N) = \{0, \psi\}$ , wobei  $\psi(1) = 2$ .

Dann:  $\alpha^*(\psi) = \psi \circ \alpha = 0 \Rightarrow \alpha^*$  nicht surjektiv  $\Rightarrow N$  nicht injektiv!

(e) Sei  $N$  frei mit Basis  $\{e_i, i \in I\}$ . Sei  $\beta : M \rightarrow M''$  surjektive  $R$ -lineare Abbildung und  $\varphi : N \rightarrow M''$   $R$ -linear. Für jedes  $i \in I$  sei  $x_i \in M$  mit  $\beta(x_i) = \varphi(e_i)$  (so ein  $x_i$  gibt es, da  $\beta$  surjektiv). Dann gibt es genau eine  $R$ -lineare Abbildung  $\psi : N \rightarrow M$  mit  $\psi(e_i) = x_i$ . Damit  $\beta(\psi(e_i)) = \beta(x_i) = \varphi(e_i)$  für alle  $i \in I \Rightarrow \beta \circ \psi = \varphi$

(f) Sei  $M$  ein  $R$ -Modul. Sei  $X$  ein Erzeugendensystem von  $M$  als  $R$ -Modul (notfalls  $X = M$ ). Sei  $F$  der freie  $R$ -Modul mit Basis  $X$ ,  $\varphi : F \rightarrow M$  die  $R$ -lineare Abbildung, die durch  $x \mapsto x$  für alle  $x \in X$  bestimmt ist.  $\varphi$  ist surjektiv, da  $X \subseteq \text{Bild}(\varphi)$  und  $\langle X \rangle = M$ . Nach Homomorphiesatz ist  $M \cong F / \text{Kern}(\varphi)$ .

### Proposition 1.6

Ein  $R$ -Modul  $N$  ist genau dann projektiv, wenn es einen  $R$ -Modul  $N'$  gibt, so dass  $F := N \oplus N'$  freier Modul ist.

### Beweis

„ $\Rightarrow$ “:

Sei  $F$  freier  $R$ -Modul und  $\beta : F \rightarrow N$  surjektiv (wie in Beweis von 1.5 (f)). Dann gibt es  $\tilde{\varphi} : N \rightarrow F$  mit  $\beta \circ \tilde{\varphi} = id_N$  (weil  $N$  projektiv ist).

### Behauptung:



$$1.) F = \text{Kern}(\beta) \oplus \text{Bild}(\tilde{\varphi}) \cong N' \oplus N$$

2.)  $\tilde{\varphi}$  injektiv

**Beweis:**

$$1.) \text{Kern}(\beta) \cap \text{Bild}(\tilde{\varphi}) = (0), \text{ denn: } \beta(\tilde{\varphi}(x)) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \tilde{\varphi}(x) = 0.$$

Sei  $x \in F$ ,  $y := \tilde{\varphi}(\beta(x)) \in \text{Bild}(\tilde{\varphi})$ . Für  $z = x - y$  ist  $\beta(z) = \beta(x) - \underbrace{\beta(\tilde{\varphi}(\beta(x)))}_{= \text{id}} = 0 \Rightarrow$

$$x = \underbrace{z}_{\in \text{Kern}(\beta)} + \underbrace{y}_{\in \text{Bild}(\tilde{\varphi})}$$

$$2.) \tilde{\varphi}(x) = 0 \Rightarrow \underbrace{\beta(\tilde{\varphi}(x))}_{=x} = 0$$

„ $\Leftarrow$ “:

Sei  $F = N \oplus N'$  frei,  $\beta : M \rightarrow M''$  surjektiv,  $\varphi : N \rightarrow M''$   $R$ -linear.

Gesucht:  $\psi : N \rightarrow M$  mit  $\beta \circ \psi = \varphi$ .

Definiere  $\tilde{\varphi} : F \rightarrow M''$  durch  $\tilde{\varphi}(x + y) = \varphi(x)$  wobei jedes  $z \in F$  eindeutig als  $z = x + y$  mit  $x \in N$ ,  $y \in N'$  geschrieben werden kann.

$F$  ist frei also projektiv  $\Rightarrow \exists \tilde{\psi} : F \rightarrow M$  mit  $\beta \circ \tilde{\psi} = \tilde{\varphi}$ . Sei  $\psi := \tilde{\psi}|_N$ . Dann ist  $\beta \circ \psi = \beta \circ \tilde{\psi}|_N = \tilde{\varphi}|_N = \varphi$

## §2 Tensorprodukt

### Definition 1.7

Seien  $M, N, P$   $R$ -Moduln.

- (a) Eine Abbildung  $\Phi : M \times N \rightarrow P$  heißt  **$R$ -bilinear**, wenn für jedes  $x_0 \in M$  und jedes  $y_0 \in N$  die Abbildungen

$$\Phi_{x_0} : N \rightarrow P, y \mapsto \Phi(x_0, y)$$

$$\Phi_{y_0} : M \rightarrow P, x \mapsto \Phi(x, y_0)$$

$R$ -linear sind.

- (b) Ein **Tensorprodukt** von  $M$  und  $N$  (über  $R$ ) ist ein  $R$ -Modul  $T$  zusammen mit einer bilinearen Abbildung  $\tau : M \times N \rightarrow T$ , sodass  
(UAE) Für jede bilineare Abbildung  $\Phi : M \times N \rightarrow P$  gibt es genau eine lineare Abbildung  $\varphi : T \rightarrow P$  mit  $\Phi = \varphi \circ \tau$

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\tau} & T \\ & \searrow \Phi & \swarrow \exists! \varphi \\ & & P \end{array}$$

( $\tau$  ist die „universelle“ bilineare Abbildung)

### Beispiele

- 1.)  $M, N$  freie  $R$ -Moduln mit Basis  $\{e_i, i \in I\}$  bzw.  $\{f_j, j \in J\}$ . Dann ist  $M \otimes N$  freier  $R$ -Modul mit Basis  $\{e_i f_j, i \in I, j \in J\}$  ein Tensorprodukt mit  $\tau(e_i, f_j) = e_i f_j$ .

Denn: Sei  $\Phi : M \times N \rightarrow P$  bilinear. Setze  $\varphi(e_i \cdot f_j) := \Phi(e_i, f_j)$ , das bestimmt eindeutig  $\varphi : M \otimes N \rightarrow P$  ( $R$ -linear) mit  $\Phi(e_i, f_j) = \varphi(\tau(e_i, f_j))$  für alle  $i, j$ .

Sind  $I, J$  endlich, so ist  $\text{rg}(M \otimes N) = \text{rg}(M) \cdot \text{rg}(N)$ , dagegen ist  $\text{rg}(M \times N) = \text{rg}(M) + \text{rg}(N)$ .  $\tau$  ist also höchstens in Trivialfällen surjektiv.  $\tau$  ist nicht injektiv:  $\tau(x, 0) = \tau(x, 0 \cdot 1) = 0$ .

$y) = 0 \cdot \tau(x, y) = 0$  (da linear im 2. Argument), genauso  $\tau(0, y) = 0$ .  $\text{Bild}(\tau)$  ist kein Untermodul, aber  $\langle \text{Bild}(\tau) \rangle = M \otimes N$ .

2.) 0 ist ein Tensorprodukt der  $\mathbb{Z}$ -Moduln  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ .

Denn: jede bilineare Abbildung  $\Phi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow P$  ist die Nullabbildung.  $\Phi(\bar{1}, \bar{1}) = \Phi(3 \cdot \bar{1}, \bar{1}) = 3 \cdot \Phi(\bar{1}, \bar{1}) = \Phi(\bar{1}, 3 \cdot \bar{1}) = \Phi(\bar{1}, \bar{0}) = 0$ , genauso  $\Phi(\bar{1}, -\bar{1}) = 0$ .

### Satz 1 (Tensorprodukt)

Zu je zwei  $R$ -Moduln  $M, N$  gibt es ein Tensorprodukt. Dieses ist eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus.

#### Beweis 1.8

Sei  $F$  der freie  $R$ -Modul mit Basis  $M \times N$ . Sei  $Q$  Untermodul, der erzeugt wird von den

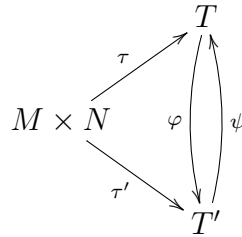
$$\begin{aligned} (x + x', y) - (x, y) - (x', y), & \quad (\alpha x, y) - \alpha(x, y) \\ (x, y + y') - (x, y) - (x, y'), & \quad (x, \alpha y) - \alpha(x, y) \end{aligned}$$

für alle  $x, x' \in M, y, y' \in N, \alpha \in R$

Setze  $T := F/Q, \tau : M \times N \rightarrow T, (x, y) \mapsto [(x, y)] \bmod Q$ .  $\tau$  ist bilinear nach Konstruktion. Ist  $\Phi : M \times N \rightarrow P$  bilinear, so setze  $\tilde{\varphi}((x, y)) := \Phi(x, y)$ ,  $\tilde{\varphi} : F \rightarrow P$  ist linear.  $Q \subseteq \text{Kern}(\tilde{\varphi})$ , weil  $\Phi$  bilinear  $\xRightarrow{\text{Hom., Satz}} \tilde{\varphi}$  induziert  $\varphi : T \rightarrow P$  mit  $\Phi = \varphi \circ \tau$ .

Noch zu zeigen: Eindeutigkeit

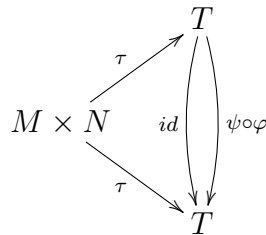
Seien  $(T, \tau), (T', \tau')$  Tensorprodukte von  $M$  und  $N$ . Dann gibt es eine  $R$ -lineare Abbildung  $\varphi : T \rightarrow T'$  mit  $\tau' = \varphi \circ \tau$  und eine  $R$ -lineare Abbildung  $\psi : T' \rightarrow T$  mit  $\tau = \psi \circ \tau'$ . Noch wissen wir nicht, ob folgendes Diagramm kommutativ ist:



aber für die beiden Dreiecke ist dies bereits bekannt.

Behauptung:  $\psi \circ \varphi = id_T$  und  $\varphi \circ \psi = id_{T'}$ .

Beweis: Das Diagramm



ist kommutativ, d. h.

$(\psi \circ \varphi) \circ \tau = \psi \circ (\varphi \circ \tau) = \psi \circ \tau' = \tau$  mit  $id : T \rightarrow T$  ist das Diagramm auch kommutativ. Wegen der Eindeutigkeit in der Definition des Tensorprodukts muss gelten:  $\psi \circ \varphi = id_T$ . (Der Beweis von  $\varphi \circ \psi = id_{T'}$  ist analog.) Also ist  $T \cong T'$ .

#### Bemerkung 1.9

Für alle  $R$ -Moduln  $M, N, M_1, M_2, M_3$  gilt:

- (a)  $M \otimes_R R \cong M$
- (b)  $M \otimes_R N \cong N \otimes_R M$
- (c)  $(M_1 \otimes_R M_2) \otimes_R M_3 \cong M_1 \otimes_R (M_2 \otimes_R M_3)$

**Beweis**

- a) Zeige:  $M$  ist Tensorprodukt der  $R$ -Moduln  $M$  und  $R$ .  
 $\tau : M \times R \rightarrow M, (x, a) \rightarrow a \cdot x$  ist bilinear (wegen Moduleigenschaften). Sei  $\Phi : M \times R \rightarrow P$  bilinear.  
 Gesucht:  $\varphi : M \rightarrow P$  linear mit  $\Phi = \varphi \circ \tau$ , d. h.  $\Phi(x, a) = \varphi(a \cdot x)$   
 Setze  $\varphi(x) := \Phi(x, 1)$ .  $\varphi$  ist  $R$ -linear, da  $\Phi(\cdot, 1)$  linear ist,  $\Phi(x, a) = a\Phi(x, 1) = a\varphi(x) = \varphi(a \cdot x) = \varphi(\tau(x, a))$   
 $\varphi$  ist eindeutig: es muss gelten:  $\varphi(\tau(x, 1)) = \Phi(x, 1) =: \varphi(x)$ , damit ist  $\varphi$  eindeutig bestimmt (wegen  $\varphi \circ \tau = \Phi$ ).
- b)  $M \times N \cong N \times M$
- c) Finde lineare Abbildung:  $(M_1 \otimes_R M_2) \otimes_R M_3 \rightarrow M_1 \otimes_R (M_2 \otimes_R M_3)$
1. Für festes  $z \in M_3$  sei  $\Phi_z : M_1 \times M_2 \rightarrow M_1 \otimes_R (M_2 \otimes_R M_3)$ ,  
 $(x, y) \rightarrow x \otimes (y \otimes z) := \tau(y, z)$   
 $\Phi_z$  bilinear: klar  
 $\Phi_z$  induziert eine lineare Abbildung:  $\varphi_z : M_1 \otimes_R M_2 \rightarrow M_1 \otimes_R (M_2 \otimes_R M_3)$   
 Weiter ist  $\Psi : (M_1 \otimes_R M_2) \times M_3 \rightarrow M_1 \otimes_R (M_2 \otimes_R M_3), (w, z) \rightarrow \varphi_z(w)$   
 bilinear: linear in  $w$ , weil  $\varphi_z$  linear; linear in  $z$  weil  $\Phi_z$  linear in  $z$ .  
 Induziert also lineare Abbildung  $\psi : (M_1 \otimes_R M_2) \otimes_R M_3 \rightarrow M_1 \otimes_R (M_2 \otimes_R M_3)$
  2. Umkehrabbildung genauso!

**Proposition 1.10**

Sei  $M$  ein  $R$ -Modul,  $I \subseteq R$  ein Ideal. Dann ist  $I \cdot M = \{a \cdot x \in M : x \in M, a \in I\}$  Untermodul von  $M$  und es gilt:

$$M/I \cdot M \cong M \otimes_R R/I$$

**Beweis**

Sei  $\tilde{\varphi} : M \rightarrow M \otimes_R R/I, x \rightarrow x \otimes \bar{1}$

$\tilde{\varphi}$  ist  $R$ -linear.

$$I \cdot M \subseteq \text{Kern}(\tilde{\varphi}) : \forall a \in I, x \in M \text{ ist } \tilde{\varphi}(ax) = ax \otimes \bar{1} = x \otimes \underbrace{a \cdot \bar{1}}_{\bar{a}} = 0$$

$\tilde{\varphi}$  induziert also lineare Abbildung

$$\varphi : M/(I \cdot M) \rightarrow M \otimes_R R/I$$

Umgekehrt:  $\Psi : M \times R/I \rightarrow M/(I \cdot M), (x, \bar{a}) \rightarrow \overline{ax}$

$$\Psi \text{ ist wohldefiniert: ist } \bar{b} = \bar{a}, \text{ so ist } \overline{b \cdot x} - \overline{a \cdot x} = \underbrace{\overline{(b-a) \cdot x}}_{\substack{\in I \\ \in I \cdot M}} = 0$$

$\Psi$  ist bilinear, induziert also  $\psi : M \otimes_R R/I \rightarrow M/(I \cdot M)$  (linear). Es ist  $(\psi \circ \varphi)(\bar{x}) = \psi(x \otimes \bar{1}) = \overline{1x} = \bar{x}$  und  $(\varphi \circ \psi)(x \otimes \bar{a}) = \varphi(\overline{a \cdot x}) = ax \otimes \bar{1} = x \otimes a \cdot \bar{1} = x \otimes \bar{a}$

### §3 Flache Moduln

#### Bemerkung 1.11

Für jeden  $R$ -Modul  $M$  ist die Zuordnung  $M \mapsto M \otimes_R N$  ein Funktor

$$\otimes_R N : \underline{R\text{-Mod}} \rightarrow \underline{R\text{-Mod}}$$

#### Beweis

Ist  $\varphi : M \rightarrow M'$   $R$ -linear, so setze  $\varphi_N : M \otimes_R N \rightarrow M' \otimes_R N, x \otimes y \mapsto \varphi(x) \otimes y$  und linear fortgesetzt:  $\sum_{i=0}^n a_i(x_i \otimes y_i) \mapsto \sum_{i=0}^n a_i(\varphi(x_i) \otimes y_i)$

#### Proposition 1.12

Der Funktor  $\otimes_R N$  ist rechtsexakt, d.h. ist  $0 \rightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \rightarrow 0$  exakt,

so ist  $M' \otimes_R N \xrightarrow{\varphi_N} M \otimes_R N \xrightarrow{\psi_N} M'' \otimes_R N \rightarrow 0$  exakt.

#### Beispiele

Seien  $R = \mathbb{Z}$  und  $N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

Die Sequenz  $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$  ist exakt, und nach Prop. 1.12 ist somit auch die Sequenz  $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$  exakt, doch der erste Pfeil in dieser Sequenz ist die Nullabbildung  $\varphi_N : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} (\cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ nach 1.9a})$  und somit nicht injektiv, d. h. die Sequenz läßt sich nicht zu einer exakten Sequenz  $0 \rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$  verlängern.

#### Beweis

**1. Schritt:**  $\text{Bild}(\varphi_N) \subseteq \text{Kern}(\psi_N)$ , denn:  $\psi_N(\varphi_N(x \otimes y)) = \psi_N(\varphi(x) \otimes y) = \underbrace{\psi(\varphi(x))}_{=0} \otimes y = 0$ .

Der Homomorphiesatz liefert ein  $\Psi : M \otimes_R N / \text{Bild}(\varphi_N) \rightarrow M'' \otimes_R N$  mit der Eigenschaft, dass  $\Psi(\bar{x}) = \psi_N(x)$  für jedes  $x \in M \otimes_R N$  gilt.

**2. Schritt:**  $\Psi$  ist Isomorphismus.

Wenn dies gezeigt ist, ist klar, daß  $\Psi$  und damit  $\psi_N$  surjektiv ist und  $\text{Kern}(\psi_N) = \text{Bild}(\varphi_N)$  gilt.

Zeige also, dass  $\Psi$  Isomorphismus ist.

Konstruiere Umkehrabbildung  $\sigma : M'' \otimes_R N \rightarrow \bar{M} := M \otimes_R N / \text{Bild}(\varphi_N)$  folgendermaßen:

Wähle zu jedem  $x'' \in M''$  ein Urbild  $\chi(x'') \in \psi^{-1}(x'') \subset M$ .

Definiere eine Abbildung  $\tilde{\sigma} : M'' \times N \rightarrow \bar{M}$  durch  $(x'', y) \mapsto \overline{\chi(x'') \otimes y}$ .

Beweis, dass  $\tilde{\sigma}$  wohldefiniert ist: Sind  $x_1, x_2 \in M$  mit  $\psi(x_1) = \psi(x_2) = x''$ , so ist  $x_1 - x_2 \in \text{Kern}(\psi) = \text{Bild}(\varphi)$ , also  $x_1 - x_2 = \varphi(x')$  für ein  $x' \in M'$ , daher  $\overline{x_1 \otimes y - x_2 \otimes y} = \underbrace{\overline{\varphi(x') \otimes y}}_{\in \text{Bild}(\varphi_N)} = 0$ .

Rest klar!!

#### Definition + Proposition 1.13

Sei  $N$  ein  $R$ -Modul.

- (a)  $N$  heißt **flach**, wenn, wenn der Funktor  $\otimes_R N$  exakt ist, d.h. für jede kurze exakte Sequenz von  $R$ -Moduln  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  auch  $0 \rightarrow M' \otimes_R N \rightarrow M \otimes_R N \rightarrow M'' \otimes_R N \rightarrow 0$  exakt ist.
- (b)  $N$  ist genau dann flach, wenn für jeden  $R$ -Modul  $M$  und jeden Untermodul  $M'$  von  $M$  die Abbildung  $i : M' \otimes_R N \rightarrow M \otimes_R N$  injektiv ist.

- (c) Jeder projektive  $R$ -Modul ist flach.
- (d) Ist  $R = K$  ein Körper, so ist jeder  $R$ -Modul flach.
- (e) Für jedes multiplikative Monoid  $S$  ist  $R_S$  flacher  $R$ -Modul.

**Beweis**

- (b) folgt aus Prop 1.12.
- (e) Sei  $M$  ein  $R$ -Modul, und sei  $M' \subseteq M$  ein  $R$ -Untermodule. Nach 1.12 ist  $M \otimes_R R_S \cong M_S$ .  
Zu zeigen: Die Abbildung  $M'_S \rightarrow M_S, \frac{a}{s} \mapsto \frac{a}{s}$  ist injektiv.  
Sei also  $a \in M'$  und  $\frac{a}{s} = 0$  in  $M_S$ , d.h. in  $M$  gilt:  $t \cdot a = 0$  für ein  $t \in S$ .  $\Rightarrow t \cdot a = 0$  in  $M' \Rightarrow \frac{a}{s} = 0$  in  $M'_S$ .
- (d) folgt aus (c), weil jeder  $K$ -Modul frei ist, also projektiv.
- (c) Sei  $N$  projektiv. Nach Prop. 1.6 gibt es einen  $R$ -Modul  $N'$ , sodass  $N \oplus N' =: F$  frei ist.

**Beh. 1:**  $F$  ist flach.Dann sei  $M$  ein  $R$ -Modul, und  $M' \subseteq M$  ein Untermodul; dann ist  $F \otimes_R M' \rightarrow F \otimes_R M$  injektiv.**Beh. 2:** Tensorprodukt vertauscht mit direkter Summe.

$$\begin{array}{ccc} M' \otimes_R F & \cong & M' \otimes_R (N \oplus N') \cong (M' \otimes_R N) \oplus (M' \otimes_R N') \\ \downarrow & & \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ \text{und } M \otimes_R F & & \cong (M \otimes_R N) \oplus (M \otimes_R N') \end{array}$$

Die Abbildung  $M' \otimes_R F \rightarrow M \otimes_R F$  bildet  $M' \otimes_R N$  auf  $M \otimes_R N$  ab,  $M' \otimes_R N \rightarrow M \otimes_R N$  ist also als Einschränkung einer injektiven Abbildung selbst injektiv.**Bew. 1:** Sei  $\{e_i : i \in I\}$  Basis von  $F$ , also  $F = \bigoplus_{i \in I} R e_i \cong \bigoplus_{i \in I} R$ . Wegen Beh. 2 ist

$$M \otimes_R F \cong M \otimes_R \bigoplus_{i \in I} R \cong \bigoplus_{i \in I} (M \otimes_R R) = \bigoplus_{i \in I} M$$

Genauso:  $M' \otimes_R F \cong \bigoplus_{i \in I} M'$ .Die Abbildung  $M' \otimes_R F \rightarrow M \otimes_R F$  ist in jeder Komponente die Einbettung  $M' \hookrightarrow M$ , also injektiv.**Bew. 2:** Sei  $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ , zu zeigen:  $M \otimes_R N \cong \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_R N)$ .Die Abbildung  $M \times N \rightarrow \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_R N), ((x_i)_{i \in I}, y) \mapsto (x_i \otimes y)_{i \in I}$  ist bilinear, induziert also eine  $R$ -lineare Abbildung  $\varphi : M \otimes_R N \rightarrow \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_R N)$ .Umgekehrt: Für jedes  $i \in I$  induziert die Inklusion  $M_i \hookrightarrow M$  eine  $R$ -lineare Abbildung  $\psi_i : M_i \otimes_R N \rightarrow M \otimes_R N$ ; die  $\psi_i$  induzieren  $\psi : \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_R N) \rightarrow M \otimes_R N$  (UAE der direkten Summe).„Nachrechnen“:  $\varphi$  und  $\psi$  sind zueinander invers.

## §4 Tensoralgebra

**Definition 1.14**Eine  **$R$ -Algebra** ist ein (kommutativer) Ring (mit Eins)  $R'$  zusammen mit einem Ringhomomorphismus  $\alpha : R \rightarrow R'$ . Ist  $\alpha$  injektiv, so heißt  $R'/R$  auch **Ringweiterung**.**Bemerkung 1.15**Sei  $R'$  eine  $R$ -Algebra.

- (a) Die Zuordnung  $M \rightarrow M \otimes_R R'$  ist ein kovarianter rechtsexakter Funktor  $\otimes_R R' : \underline{R\text{-Mod}} \rightarrow \underline{R'\text{-Mod}}$ ; dabei wird  $M \otimes_R R'$  zum  $R'$ -Modul durch  $b \cdot (x \otimes a) := x \otimes b \cdot a$ .
- (b) Sei  $V : \underline{R'\text{-Mod}} \rightarrow \underline{R\text{-Mod}}$  der „Vergiss-Funktor“, der jeden  $R'$ -Modul als  $R$ -Modul auffasst, mit der Skalarmultiplikation  $a \cdot x := \alpha(a) \cdot x$  für  $a \in R, x \in M$ .

Dann ist  $\otimes_R R'$  „links adjungiert“ zu  $V$ , d.h. für alle  $R$ -Moduln  $M$  und  $R'$ -Moduln  $M'$  sind  $\text{Hom}_R(M, V(M'))$  und  $\text{Hom}_{R'}(M \otimes_R R', M')$  isomorph (als  $R$ -Moduln).

### Beweis

- (b) Die Zuordnungen

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(M, V(M')) &\rightarrow \text{Hom}_{R'}(M \otimes_R R', M') \\ \varphi &\mapsto (x \otimes a \mapsto a \cdot \varphi(x)) \\ (x \mapsto \psi(x \otimes 1)) &\leftarrow \psi \end{aligned}$$

sind zueinander invers.

### Beispiele

Sei  $R'$  eine  $R$ -Algebra, und sei  $F$  ein freier  $R$ -Modul mit Basis  $\{e_i : i \in I\}$ . Dann ist  $F \otimes_R R'$  ein freier  $R'$ -Modul mit Basis  $\{e_i \otimes 1 : i \in I\}$ .

**denn:** Sei  $M$  ein beliebiger  $R'$ -Modul, und  $f : \{e_i \otimes 1 : i \in I\} \rightarrow M$  eine Abbildung. Dann gibt es genau eine  $R$ -lineare Abbildung  $\varphi : F \rightarrow V(M)$  mit  $\varphi(e_i) = f(e_i \otimes 1)$  (UAE für  $F$ ). Mit 1.15 (b) folgt: dazu gehört eine eindeutige  $R'$ -lineare Abbildung  $\tilde{\varphi} : F \otimes_R R' \rightarrow M$  mit  $\tilde{\varphi}(e_i \otimes 1) = \varphi(e_i)$ .

### Proposition 1.16

Seien  $R', R''$   $R$ -Algebren.

- (a)  $R' \otimes_R R''$  wird zur  $R$ -Algebra durch  $(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) := a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$
- (b)  $\sigma' : R' \rightarrow R' \otimes_R R'', a \mapsto a \otimes 1$  und  $\sigma'' : R'' \rightarrow R' \otimes_R R'', b \mapsto 1 \otimes b$  sind  $R$ -Algebrenhomomorphismen.
- (c) UAE: Sei  $A$  eine beliebige  $R$ -Algebra. In der Kategorie der  $R$ -Algebren gilt:

$$\begin{array}{ccc} R' & & \\ \sigma' \downarrow & \searrow \varphi' & \\ R' \otimes_R R'' & \xrightarrow{\exists! \varphi} & A \\ \sigma'' \uparrow & \nearrow \varphi'' & \\ R'' & & \end{array}$$

### Beweis

- (c) Definiere eine lineare Abbildung  $\varphi : R' \otimes_R R'' \rightarrow A$  durch  $\varphi(a \otimes b) = \varphi'(a) \cdot \varphi''(b)$ .

$\varphi$  ist die lineare Abbildung, die von der bilinearen Abbildung  $\tilde{\Phi} : R' \times R'' \rightarrow A, (a, b) \mapsto \varphi'(a) \cdot \varphi''(b)$  induziert wird.

Nachrechnen:  $\varphi$  ist Ringhomomorphismus und eindeutig bestimmt.

Beobachte:  $a \otimes b = (a \otimes 1)(1 \otimes b) = \sigma'(a)\sigma''(b)$ .

Also muss gelten:  $\varphi(a \otimes b) = \underbrace{(\varphi \circ \sigma')(a)}_{\varphi'(a)} \cdot \underbrace{(\varphi \circ \sigma'')(b)}_{\varphi''(b)}$ .

**Beispiele**

$R'$  sei eine  $R$ -Algebra. Dann ist  $R'[X] \cong R[X] \otimes_R R'$  (als  $R'$ -Algebren), denn:

Zeige, dass  $R[X] \otimes_R R'$  die UAE des Polynomrings  $R'[X]$  erfüllt.

Sei  $A$  eine  $R'$ -Algebra und  $a \in A$ . Zu zeigen:  $\exists!$   $R'$ -Algebrahomomorphismus  $\varphi : R[X] \otimes_R R' \rightarrow A$  mit  $\varphi(X \otimes 1) = a$ . Ein solcher wird als  $R$ -Algebra-Homomorphismus induziert von  $\varphi' : R[X] \rightarrow A$ ,  $X \mapsto a$  und  $\varphi'' : R' \rightarrow A$  (der Strukturhomomorphismus  $\alpha$  aus der Definition)

Noch zu zeigen:  $\varphi$  ist  $R'$ -linear (richtig, weil  $\varphi''$  Ringhomomorphismus)

**Definition + Bemerkung 1.17**

Sei  $M$  ein  $R$ -Modul

- $T^0(M) := R$ ,  $T^n(M) = M \otimes_R T^{n-1}(M)$ ,  $n \geq 1$
- $T(M) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n(M)$  wird zur  $R$ -Algebra durch  
 $(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \cdot (y_1 \otimes \cdots \otimes y_m) := x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_m \in T^{n+m}(M)$  (wenn auch nicht zu einer  $R$ -Algebra im Sinne von Definition Def. 1.14, da die Multiplikation in  $T(M)$  nicht immer kommutativ ist).
- $T(M)$  ist nicht kommutativ (im Allgemeinen), denn  $x \otimes y \neq y \otimes x$ .
- $T(M)$  erfüllt UAE: Ist  $R'$  eine  $R$ -Algebra (nicht notwendig kommutativ), und ist  $\varphi : M \rightarrow R'$   $R$ -linear, so  $\exists!$   $R$ -Algebra-Homomorphismus  $\tilde{\varphi} : T(M) \rightarrow R'$  mit  $\tilde{\varphi}|_{\underbrace{T^1(M)}_{=M}} = \varphi$

**§5 Symmetrische und äußere Algebra****Definition 1.18**

Seien  $M, N$   $R$ -Moduln,  $n \geq 0$ , und sei  $\Phi : M^n \rightarrow N$   $R$ -multilinear.

- $\Phi$  heißt **symmetrisch**, wenn für alle  $(x_1, \dots, x_n) \in M^n$  und alle  $\sigma \in S_n$  gilt:  
 $\Phi(x_1, \dots, x_n) = \Phi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ . (Wenn  $n = 0$  oder  $n = 1$  ist, ist also jedes  $\Phi$  symmetrisch.)
- $\Phi$  heißt **alternierend**, wenn für alle  $(x_1, \dots, x_n) \in M^n$  gilt:  
 Ist  $x_i = x_j$  für ein Paar  $(x_i, x_j)$  mit  $i \neq j$ , so ist  $\Phi(x_1, \dots, x_n) = 0$   
 Wenn 2 in  $R$  invertierbar ist (z. B. also wannimmer  $R$  ein Körper von Charakteristik  $\neq 2$  ist), ist dies äquivalent zu  $\Phi(x_1, \dots, x_n) = -\Phi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$  für alle  $(x_1, \dots, x_n) \in M^n$ . (Wenn  $n = 0$  oder  $n = 1$  ist, ist also jedes  $\Phi$  alternierend.)
- $\text{Sym}_M^n(N) := \{\Phi : M^n \rightarrow N : \Phi \text{ multilinear, symmetrisch}\}$   
 $\text{Alt}_M^n(N) := \{\Phi : M^n \rightarrow N : \Phi \text{ multilinear, alternierend}\}$   
 $\text{Sym}_M^n(N)$  und  $\text{Alt}_M^n(N)$  sind  $R$ -Moduln.

**Satz 2 (Symmetrische und äußere Potenz)**

Zu jedem  $R$ -Modul  $M$  und jedem  $n \geq 0$  gibt es  $R$ -Moduln  $S^n(M)$  und  $\Lambda^n(M)$  (genannt die  $n$ -te **symmetrische** bzw. **äußere Potenz** von  $M$ ) und eine symmetrische bzw. alternierende multilineare Abbildung  $M^n \rightarrow S^n(M)$  bzw.  $M^n \rightarrow \Lambda^n(M)$  mit folgender UAE:

$$\begin{array}{ccc}
 M^n & \xrightarrow{\quad} & S^n(M) \\
 \searrow \Phi \in \text{Sym}_M^n(N) & & \swarrow \exists! \varphi \text{ linear} \\
 & N &
 \end{array}
 \quad \text{bzw.} \quad
 \begin{array}{ccc}
 M^n & \xrightarrow{\quad} & \Lambda^n(M) \\
 \searrow \Psi \in \text{Alt}_M^n(N) & & \swarrow \exists! \psi \text{ linear} \\
 & N &
 \end{array}$$

Mit  $S^0(M) := R =: \Lambda^0(M)$  heißt  $S(M) := \bigoplus_{n \geq 0} S^n(M)$  die **symmetrische Algebra** über  $M$   
 $\Lambda(M) := \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda^n(M)$  die **äußere Algebra** über  $M$  (oder **Graßmann-Algebra**)

### Beweis

Sei  $\mathbb{J}^n(M)$  der Untermodul von  $T^n(M)$ , der erzeugt wird von allen

$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n - x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}$ ,  $x_i \in M$ ,  $\sigma \in S_n$  und

$\mathbb{I}^n(M)$  der Untermodul von  $T^n(M)$ , der erzeugt wird von allen

$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$  für die  $x_i = x_j$  für ein Paar  $(i, j)$  mit  $i \neq j$ .

Setze  $S^n(M) := T^n(M) / \mathbb{J}^n(M)$  und  $\Lambda^n(M) := T^n(M) / \mathbb{I}^n(M)$

Sei  $\Phi : M^n \rightarrow N$  multilinear und symmetrisch.  $\Phi$  induziert  $\tilde{\varphi} : T^n(M) \rightarrow N$   $R$ -linear (weil  $\Phi$  multilinear), da  $\Phi$  symmetrisch ist, ist  $\mathbb{J}(M) \subseteq \text{Kern}(\tilde{\varphi})$ .  $\tilde{\varphi}$  induziert also  $\varphi : S^n(M) \rightarrow N$   $R$ -linear; genauso falls  $\Psi : M^n \rightarrow N$  alternierend.

### Proposition 1.19

Sei  $M$  freier  $R$ -Modul mit Basis  $e_1, \dots, e_r$ . Dann gilt für jedes  $n \geq 0$ :

- a)  $S^n(M)$  ist freier Modul mit Basis  $\{e_1^{\nu_1} \cdots e_r^{\nu_r} : \sum_{i=1}^r \nu_i = n\}$
- b)  $S(M) \cong R[X_1, \dots, X_r]$
- c)  $\Lambda^n(M)$  ist freier  $R$ -Modul mit Basis  
 $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} : 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leq r\}$
- d)  $\Lambda^n(M) = 0$  für  $n > r$

### Beweis

b) folgt aus a)

d) folgt aus c)

c)  $\Lambda^r(M)$  wird erzeugt von  $e_1 \wedge \cdots \wedge e_r$ : klar.

$\Lambda^r(M)$  ist frei (vom Rang 1), denn aus  $a \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_r = 0$  folgt  $a = 0$  (weil die Determinantenabbildung  $M^r \rightarrow R$  multilinear und alternierend ist, und daher gemäß der UAE eine lineare Abbildung  $\Lambda^r(M) \rightarrow R$  induziert, welche  $a \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_r = 0$  auf  $a$  sendet).

Für jedes  $n$  bilden  $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} : 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leq r\}$  ein Erzeugendensystem von  $\Lambda^n(M)$ .

Zu zeigen:  $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} : 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leq r\}$  ist linear unabhängig.

Sei dazu  $\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq r} a_{\underline{i}} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} = 0$ , wobei  $\underline{i}$  kurz für  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  steht.

Für jedes  $\underline{j} = (j_1, j_2, \dots, j_n)$  mit  $1 \leq j_1 < \cdots < j_n \leq r$  existiert nun ein  $\sigma_{\underline{j}} \in S_r$  mit  $\sigma_{\underline{j}}(\nu) = j_\nu$  für alle  $\nu = 1, \dots, n$ . Mit diesem  $\sigma$  gilt  $0 = (\sum a_{\underline{i}} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}) \wedge e_{\sigma_{\underline{j}}(n+1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma_{\underline{j}}(r)} = a_{\underline{j}} (e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_n}) \wedge e_{\sigma_{\underline{j}}(n+1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma_{\underline{j}}(r)} = a_{\underline{j}} (e_{\sigma_{\underline{j}}(1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma_{\underline{j}}(n)}) \wedge e_{\sigma_{\underline{j}}(n+1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma_{\underline{j}}(r)} = (-1)^{\sigma_{\underline{j}}} a_{\underline{j}} e_1 \wedge \cdots \wedge e_r$ , also  $a_{\underline{j}} = 0 \Rightarrow$  l.u.

## §6 Differentiale

### Definition + Bemerkung 1.20

Sei  $A$  eine kommutative  $R$ -Algebra,  $M$  ein  $A$ -Modul.

(a) Eine  $R$ -lineare Abbildung  $\delta : A \rightarrow M$  heißt **Derivation**, wenn für alle  $f, g \in A$  gilt:

$$\delta(f \cdot g) = f \cdot \delta(g) + g \cdot \delta(f)$$

(b)  $\text{Der}_R(A, M) := \{\delta : A \rightarrow M : \delta \text{ } R\text{-lineare Derivation}\}$  ist ein  $A$ -Modul.



(c)  $M \mapsto \text{Der}_R(A, M)$  ist ein Funktor (Unterfunktor von  $\text{Hom}_R(A, \cdot)$ ).

Wie man an dieser Definition sieht, hängt der Begriff einer "Derivation" nicht nur von  $A$ , sondern auch vom Grundring  $R$  ab. Wenn der Grundring nicht aus dem Kontext heraus klar ist (z. B. wenn zwei verschiedene Grundringe möglich sind), werden wir diese Abhängigkeit explizit machen, indem wir von  $R$ -linearen Derivationen statt einfach nur von Derivationen sprechen.

### Beispiele

1.)  $A = R[X], d = \frac{d}{dX}$  ist eine  $R$ -Derivation  $d : A \rightarrow A$ , definiert durch  $d(\sum_{i=0}^n a_i X^i) := \sum_{i=1}^n a_i i X^{i-1}$

**Beh.:** In dieser Situation gilt  $\text{Der}_R(A, A) = A \cdot d$

**Bew.:** Dass  $A \cdot d \subseteq \text{Der}_R(A, A)$  gilt, ist klar. Wir müssen also die umgekehrte Inklusion nachweisen.

Sei  $\delta : A \rightarrow A$  eine  $R$ -lineare Derivation. Sei  $f := \delta(X)$ .

Dann ist  $\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = 1 \cdot \delta(1) + 1 \cdot \delta(1) \Rightarrow \delta(1) = 0 \Rightarrow \forall r \in R : \delta(r) = 0$  (denn  $\delta$  ist  $R$ -linear).

Ferner ist  $\delta(X^2) = 2 \cdot X \cdot \delta(X) = 2 \cdot X \cdot f$ . Allgemeiner gilt  $\delta(X^n) = n \cdot X^{n-1} \cdot f$  für jedes  $n \geq 1$  (Beweis durch Induktion nach  $n$ , mit Induktionsschritt  $\delta(X^n) = \delta(X X^{n-1}) = X \cdot \delta(X^{n-1}) + X^{n-1} \cdot \delta(X) = n \cdot X^{n-1} \cdot f$ ). Da  $\delta$  eine  $R$ -lineare Abbildung ist, folgt hieraus  $\delta(\sum a_i X^i) = \sum a_i i X^{i-1} \cdot f$  für jede endliche Summe  $\sum a_i X^i$  mit  $a_i \in R$ . Daher ist  $\delta = f \cdot d$ , was zu zeigen war.

2.)  $A = R[[X]], d = \frac{d}{dX}$  wie in 1.) mit  $\infty$  statt  $n$ .

**Beh.:** Auch hier gilt  $\text{Der}_R(A, A) = A \cdot d$

**Bew.:** Wie in 1.) ist  $A \cdot d \subseteq \text{Der}_R(A, A)$  offensichtlich. Sei also  $\delta : A \rightarrow A$  eine  $R$ -lineare Derivation. Sei  $f := \delta(X)$ .

Wie in 1.) können wir zeigen, dass  $\delta(X^n) = n \cdot X^{n-1} \cdot f$  für jedes  $n \geq 1$  gilt. Für jede Potenzreihe  $P \in A$  und jedes  $n \geq 1$  ist also  $\delta(X^n P) = X^n \delta(P) + P \underbrace{\delta(X^n)}_{=n \cdot X^{n-1} \cdot f} =$

$X^n \delta(P) + P n \cdot X^{n-1} \cdot f = X^{n-1} (\delta(P) + P n f)$  durch  $X^{n-1}$  teilbar.

Wie in 1.) können wir zeigen, dass  $\delta(\sum a_i X^i) = \sum a_i i X^{i-1} \cdot f$  für jede endliche Summe  $\sum a_i X^i$  mit  $a_i \in R$  gilt. Das heißt,  $\delta(S) = f \cdot d(S)$  für jedes Polynom  $S \in R[X]$ .

Sei nun  $Q \in A = R[[X]]$  eine Potenzreihe. Für jedes  $n \geq 1$  läßt sich  $Q$  schreiben als Summe  $Q = S + X^n P$ , wobei  $S \in R[X]$  ein Polynom und  $P \in A$  eine Potenzreihe ist. Damit ist  $\delta(Q) = \delta(S + X^n P) = \delta(S) + \delta(X^n P) \equiv \delta(S) \pmod{X^{n-1}}$  (denn  $\delta(X^n P)$  ist durch  $X^{n-1}$  teilbar). Andererseits ist  $d(Q) = d(S + X^n P) = d(S) + d(X^n P) \equiv d(S) \pmod{X^{n-1}}$  (denn  $d(X^n P)$  ist durch  $X^{n-1}$  teilbar). Somit ist  $\delta(Q) \equiv \delta(S) = f \cdot \underbrace{d(S)}_{\equiv d(Q) \pmod{X^{n-1}}} \equiv f \cdot d(Q) \pmod{X^{n-1}}$ . Da dies für alle  $n \geq 1$  gilt, muß folglich  $\delta(Q) =$

$f \cdot d(Q)$  sein. Da dies für alle Potenzreihen  $Q$  gilt, ist also  $\delta = f \cdot d$ , und wieder ist der Beweis vollendet.

3.)  $A = R[X_1, \dots, X_n], \partial_i = \frac{\partial}{\partial X_i}$  ist Derivation genauso wie für 1.)

$\text{Der}_R(A, A)$  ist freier  $A$ -Modul mit Basis  $\partial_1, \dots, \partial_n$ .

Die in Beispiel 1.) observierte Tatsache, dass  $\delta(r) = 0$  für jedes  $r \in R$  ist, gilt allgemein für jede Derivation  $\delta : A \rightarrow M$  aus jeder kommutativen  $R$ -Algebra  $A$  in jeden  $A$ -Modul  $M$ . Insbesondere gilt also stets  $\delta(1) = 0$ .

**Proposition + Definition 1.21**

Der Funktor  $M \mapsto \text{Der}_R(A, M)$  ist „darstellbar“, d.h. es gibt einen  $A$ -Modul  $\Omega_{A/R}$  und eine ( $R$ -lineare) Derivation  $d : A \rightarrow \Omega_{A/R}$  mit folgender UAE:

Zu jedem  $A$ -Modul  $M$  und jeder ( $R$ -linearen) Derivation  $\delta : A \rightarrow M$  existiert genau eine  $A$ -lineare Abbildung  $\varphi : \Omega_{A/R} \rightarrow M$  mit  $\delta = \varphi \circ d$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{d} & \Omega_{A/R} \\ & \searrow \delta & \swarrow \exists! \varphi \\ & M & \end{array}$$

**Beweis**

Sei  $F$  der freie  $A$ -Modul mit Basis  $A$ , dabei sei  $X_f$  das zu  $f \in A$  gehörige Basiselement von  $F$ . Sei  $U$  der Untermodul von  $F$ , der erzeugt wird von allen

$$\left. \begin{array}{l} X_{f+g} - X_f - X_g \\ X_{\lambda f} - \lambda X_f \\ X_{f \cdot g} - f \cdot X_g - g \cdot X_f \end{array} \right\} \text{ für alle } f, g \in A, \lambda \in R$$

Sei  $\Omega_{A/R} := F/U$ , und definiere eine Abbildung  $d : A \rightarrow \Omega_{A/R}$ ,  $f \mapsto [X_f] =: df$ . Diese Abbildung  $d$  ist eine Derivation nach Konstruktion („universelle Derivation“).

**UAE:** Sei  $M$   $A$ -Modul,  $\delta : A \rightarrow M$  Derivation. Sei  $\Phi : F \rightarrow M$  die  $A$ -lineare Abbildung mit  $\Phi(X_f) = \delta(f)$ . Dann ist  $U \subseteq \text{Kern}(\Phi)$ , weil  $\delta$  Derivation, d.h.  $\Phi$  induziert  $\varphi : F/U \rightarrow M$ .

**Beispiele**

Sei  $A = R[X_1, \dots, X_n]$ . Dann ist  $\Omega_{A/R}$  ein freier  $A$ -Modul mit Basis  $dX_1, \dots, dX_n$ .

*Beweis:* Für  $f = \sum_{\nu=(\nu_1, \dots, \nu_n)} a_\nu X_1^{\nu_1} \cdots X_n^{\nu_n} \in A$  ( $a_\nu \in R$ ) ist  $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i} dX_i$   
 $\Rightarrow$  die  $dX_i$  erzeugen  $\Omega_{A/R}$ .

Nach [Prop. 1.21](#) ist  $\boxed{\text{Der}_R(A, A) = \text{Hom}_A(\Omega_{A/R}, A)}$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{d} & \Omega_{A/R} \\ & \searrow \delta & \swarrow \exists! \varphi \\ & A & \end{array}$$

Zu zeigen: die  $dX_i$  sind linear unabhängig.

Sei also  $\sum_{i=1}^n a_i dX_i = 0$  mit  $a_i \in A$ . Für jedes  $j$  ist  $\frac{\partial}{\partial X_j} : A \rightarrow A$  eine Derivation, und somit existiert genau eine lineare  $A$ -lineare Abbildung  $\varphi_j : \Omega_{A/R} \rightarrow A$  mit  $\frac{\partial}{\partial X_j} = \varphi_j \circ d$  (gemäß der UAE von  $d$ ). Aus  $\sum_{i=1}^n a_i dX_i = 0$  folgt (durch Anwendung ebendieser Abbildung  $\varphi_j$ ) nun

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial X_j} X_i = 0. \text{ Wegen } \sum_{i=1}^n a_i \underbrace{\frac{\partial}{\partial X_j} X_i}_{=1 \text{ wenn } i=j \text{ und } 0 \text{ sonst}} = a_j \text{ ist also } a_j = 0. \text{ Da dies für jedes}$$

$j$  gezeigt ist, folgt hieraus die lineare Unabhängigkeit der  $dX_i$ .

**Beispiele**

Sei  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  offen (für ein  $n \geq 1$ ),  $A := \mathcal{C}^\infty(X)$  die  $\mathbb{R}$ -Algebra der beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf  $X$ .

**Beh.:**  $\text{Der}_{\mathbb{R}}(A, A)$  ist ein freier  $A$ -Modul mit Basis  $\partial_1, \dots, \partial_n$  (mit  $\partial_i := \frac{\partial}{\partial X_i}$  partielle Ableitung

nach  $X_i$ ).

Dann ist auch  $\Omega_{A/\mathbb{R}}$  freier  $A$ -Modul mit Basis  $dX_1, \dots, dX_n$ .

**Beh.1:** Für jedes  $x \in X$  wird das Ideal  $I_x = \{f \in A : f(x) = 0\}$  erzeugt von  $X_i - x_i$   $i = 1, \dots, n$  (Taylor-Entwicklung), wobei  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

Sei nun  $\partial : A \rightarrow A$  Derivation. Zu zeigen:  $\partial = \sum_{i=1}^n \partial(X_i) \partial_i$ .

Setze  $\partial' := \partial - \sum_{i=1}^n \partial(X_i) \partial_i$ .

**Beh.2:** Für jedes  $x \in X$  ist  $\partial'(I_x) \subseteq I_x$ .

**Bew.2:** Sei  $f \in I_x$ . Also  $f = \sum_{i=1}^n g_i (X_i - x_i)$  (siehe Beh. 1) mit  $g_i \in A$ . Also ist  $\partial'(f) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\partial'(g_i)(X_i - x_i)}_{\in I_x} + \sum_{i=1}^n g_i \underbrace{\partial'(X_i - x_i)}_{=0, \text{ da } \partial_j(X_i - x_i) = \delta_{ij}} \in I_x$ . Also ist  $\partial'(I_x) \subseteq I_x$  gezeigt.

Sei nun  $g \in A, x \in X$ . Schreibe  $g = \underbrace{g - g(x)}_{\in I_x} + g(x) \Rightarrow \partial'(g) = \partial'(g - g(x)) \in I_x$

d.h.  $\partial'(g)(x) = 0 \Rightarrow \partial'(g) = 0 \Rightarrow \partial' = 0$ . Daher ist  $\partial = \sum_{i=1}^n \partial(X_i) \partial_i$ .

### Proposition 1.22

a)  $\Omega_{./R}$  ist ein Funktor  $R\text{-Alg} \rightarrow R\text{-Mod}$ .

#### Beweis

Sei  $\varphi : A \rightarrow B$  ein  $R$ -Algebra-Homomorphismus. Wir suchen einen natürlichen  $R$ -Modulhomomorphismus  $d\varphi : \Omega_{A/R} \rightarrow \Omega_{B/R}$ . Wir wollen, daß  $d\varphi$  folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{d_A} & \Omega_{A/R} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \exists! d\varphi \text{ } A\text{-linear} \\ B & \xrightarrow{d_B} & \Omega_{B/R} \end{array}$$

Die Abbildung  $d_B \circ \varphi : A \rightarrow \Omega_{B/R}$  erfüllt:

$$d_B \circ \varphi(\lambda \cdot a) = d_B(\lambda \varphi(a)) = \lambda d_B(\varphi(a)) \quad \forall \lambda \in R, a \in A.$$

$$d_B \circ \varphi(a_1 \cdot a_2) = d_B(\varphi(a_1) \cdot \varphi(a_2)) = \varphi(a_1) \cdot d_B(\varphi(a_2)) + \varphi(a_2) \cdot d_B(\varphi(a_1)).$$

Die Abbildung  $d_B \circ \varphi$  ist also eine Derivation, wenn  $\Omega_{B/R}$  vermöge  $\varphi$  als  $A$ -Modul aufgefasst wird. Gemäß der UAE gibt es also genau einen  $R$ -Modulhomomorphismus  $d\varphi : \Omega_{A/R} \rightarrow \Omega_{B/R}$ , für den obiges Diagramm kommutativ wird. Dadurch wird  $\Omega_{./R}$  zu einem Funktor.

b) Sei  $\varphi : A \rightarrow B$  ein  $R$ -Algebra-Homomorphismus. Man kann den  $A$ -Modul  $\Omega_{A/R}$  aufwerten zum  $B$ -Modul durch  $\otimes_A B$ :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{d_A} & \Omega_{A/R} \otimes_A B \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \exists! \alpha \text{ } B\text{-linear} \\ B & \xrightarrow{d_B} & \Omega_{B/R} \end{array}$$

(wobei die oberen horizontale Abbildung strenggenommen nicht  $d_A$ , sondern  $a \mapsto d_A(a) \otimes 1$  ist). Die Abbildung  $\alpha$  ist dabei durch  $\alpha(\omega \otimes b) = b \cdot d\varphi(\omega)$  definiert.

Betrachten wir  $B$  als  $A$ -Modul (statt als  $R$ -Modul), so liefert Proposition [Prop. 1.21](#) einen  $B$ -Modul  $\Omega_{B/A}$  und eine  $A$ -lineare Derivation  $d_{B/A} : B \rightarrow \Omega_{B/A}$  mit folgender UAE:

Zu jedem  $B$ -Modul  $M$  und jeder  $A$ -linearen Derivation  $\delta : B \rightarrow M$  existiert genau eine  $B$ -lineare Abbildung  $\eta : \Omega_{B/A} \rightarrow M$  mit  $\delta = \eta \circ d_{B/A}$ .

Nun können wir aber die UAE von  $d_B$  (nicht die von  $d_{B/A}$ ) auf den  $B$ -Modul  $\Omega_{B/A}$  und die  $R$ -lineare Derivation  $d_{B/A} : B \rightarrow \Omega_{B/A}$  anwenden. Dadurch erfahren wir, dass genau eine  $B$ -lineare Abbildung  $\beta : \Omega_{B/R} \rightarrow \Omega_{B/A}$  mit  $d_{B/A} = \beta \circ d_B$  existiert.

Für dieses  $\beta$  ist

$$\Omega_{A/R} \otimes_A B \xrightarrow{\alpha} \Omega_{B/R} \xrightarrow{\beta} \Omega_{B/A} \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von  $B$ -Moduln.

### Beweis

Dass  $\beta$  surjektiv ist, folgt leicht aus der Konstruktion von  $\Omega_{./..}$ .

Als nächstes zeigen wir  $\beta \circ \alpha = 0$  (d.h.  $\text{Bild}(\alpha) \subseteq \text{Kern}(\beta)$ ):

Wir haben  $d_{B/A}\varphi(a) = 0$  für jedes  $a \in A$ .

(Denn da  $d_{B/A}$  eine  $A$ -lineare Derivation ist, sendet sie alle „konstanten  $A$ -Funktionen“ auf 0.) Wegen  $d_{B/A} = \beta \circ d_B$  ist also  $(\beta \circ d_B \circ \varphi)(a) = 0$  für jedes  $a \in A$ . Da  $d_B \circ \varphi = \alpha \circ d_A$ , wird dies zu  $(\beta \circ \alpha \circ d_A)(a) = 0$ . Das heißt,  $\beta \circ \alpha = 0$  auf der Menge  $d_A(A)$ . Da der  $B$ -Modul  $\Omega_{A/R} \otimes_A B$  aber von  $d_A(A)$  erzeugt ist, und  $\beta \circ \alpha$  eine  $B$ -lineare Abbildung ist, folgt hieraus, dass  $\beta \circ \alpha = 0$  auf ganz  $\Omega_{A/R} \otimes_A B$  ist. Damit ist  $\text{Bild}(\alpha) \subseteq \text{Kern}(\beta)$  gezeigt.

Es bleibt nur noch,  $\text{Kern}(\beta) \subseteq \text{Bild}(\alpha)$  zu verifizieren.

Wir bezeichnen  $d_B$  mit  $d_{B/R}$ , um Verwechslungen mit  $d_{B/A}$  zu vermeiden.

Sei  $\omega = \sum_{i=1}^n b_i d_{B/R}(c_i) \in \text{Kern}(\beta)$  mit  $b_i, c_i \in B$ .

Aufgrund von  $d_{B/A} = \beta \circ d_{B/R}$  ist dann  $\beta(\omega) = \sum_{i=1}^n b_i d_{B/A}(c_i)$ . Da  $\omega \in \text{Kern}(\beta)$  ist, ist also  $\sum_{i=1}^n b_i d_{B/A}(c_i) = 0$ .

Nun sei an die Moduln  $F$  und  $U$  aus dem Beweis von [Prop. 1.21](#) erinnert, die dort in Abhängigkeit von einem Ring  $R$  und einem  $R$ -Modul  $A$  definiert wurden. Wir bezeichnen diese Moduln mit  $F_A$  und  $U_{A/R}$ , um die Abhängigkeit von  $A$  bzw. von  $A$  und  $R$  zu verdeutlichen. Indem wir die gleiche Konstruktion für  $B$  statt  $A$  durchführen, erhalten wir Moduln  $F_B$  und  $U_{B/R}$ , und wenn wir auch  $R$  durch  $A$  ersetzen, erhalten wir einen Modul  $U_{B/A}$ . So ist beispielsweise  $F_B$  der freie  $B$ -Modul mit Basis  $\{X_b : b \in B\}$ .

Aus  $\sum_{i=1}^n b_i d_{B/A}(c_i) = 0$  in  $\Omega_{B/A} = F_B/U_{B/A}$  folgt nun  $\sum_{i=1}^n b_i X_{c_i} \in U_{B/A}$ . Nach Definition von  $U_{B/A}$  folgt hieraus  $\sum_i b_i X_{c_i} = \sum_j b_j \underbrace{(X_{f_j+g_j} - X_{f_j} - X_{g_j})}_{\in U_{B/R}} + \sum_k b'_k (X_{\varphi(\lambda_k)g_k} -$

$\varphi(\lambda_k)X_{g_k}) + \sum_l b''_l \underbrace{(X_{f_l g_l} - f_l X_{g_l} - g_l X_{f_l})}_{\in U_{B/R}}$  für gewisse  $b_j, b'_k, b''_l \in B$ ,  $f_j, f_l, g_k, g_j, g_l \in B$ ,

$\lambda_k \in A$ .

Projizieren wir diese Gleichung nach  $F_B/U_{B/R} = \Omega_{B/R}$ , so erhalten wir

$$\sum_{i=1}^n b_i d_{B/R}(c_i) = \sum_k b'_k (d_{B/R}(\varphi(\lambda_k)g_k) - \varphi(\lambda_k)d_{B/R}(g_k)).$$

Wegen  $\sum_{i=1}^n b_i d_{B/R}(c_i) = \omega$  wird dies zu

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_k b'_k (d_{B/R}(\varphi(\lambda_k)g_k) - \varphi(\lambda_k)d_{B/R}(g_k)) \\ &= \sum_k b'_k (\varphi(\lambda_k)d_{B/R}(g_k) + g_k d_{B/R}(\varphi(\lambda_k)) - \varphi(\lambda_k)d_{B/R}(g_k)) \\ &= \sum_k b'_k g_k d_{B/R}(\varphi(\lambda_k)) = \alpha(\sum_k d\lambda_k \otimes b'_k g_k) \in \text{Bild}(\alpha). \end{aligned}$$

Damit ist  $\text{Kern}(\beta) \subseteq \text{Bild}(\alpha)$  nachgewiesen.

## §7 Der de Rham-Komplex

Sei  $A$  eine (kommutative)  $R$ -Algebra.

Setze  $\Omega_A := \Omega_{A/R}$  (definiert nach [Definition 1.21](#)). Dies ist ein  $A$ -Modul. Für jedes  $i \geq 0$  setze  $\Omega_A^i := \Lambda^i \Omega_A$  (wobei  $\Lambda^i \Omega_A$  die  $i$ -te äußere Potenz des  $A$ -Moduls – nicht des  $R$ -Moduls –  $\Omega_A$  bedeutet). Sei auch die Derivation  $d : A \rightarrow \Omega_A$  definiert wie in [Definition 1.21](#).

### Satz + Definition 3

- a) Es gibt eine eindeutig bestimmte Folge  $(d_i)_{i \geq 0}$  von  $R$ -linearen Abbildungen  $d_i : \Omega_A^i \rightarrow \Omega_A^{i+1}$  für alle  $i \geq 0$ , welche folgende Eigenschaften erfüllt:

- (i)  $d_i(f \cdot \omega) = df \wedge \omega + f d_i(\omega)$  für alle  $f \in A, \omega \in \Omega_A^i$ .
- (ii)  $d_{i+1} \circ d_i = 0$ .
- (iii)  $d_0 = d$ .

- b) Die Sequenz

$$A \xrightarrow{d_0} \Omega_A \xrightarrow{d_1} \Omega_A^2 \xrightarrow{d_2} \dots \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega_A^n \xrightarrow{d_n} \dots$$

heißt **de Rham-Komplex** zu  $A$ , und wird mit  $\Omega_A^\bullet$  bezeichnet.

- c) Für jedes  $i \geq 0$  heißt  $H_{dR}^i(A) := \text{Kern}(d_i) / \text{Bild}(d_{i-1})$  ( $R$ -Modul) der  $i$ -te de Rham-Kohomologie-Modul von  $A$ . Dabei sei  $d_{-1} = 0$ , d.h.  $H_{dR}^0(A) = \text{Kern}(d) = R$ .

### Beweis

**1. Fall:** Es gilt  $A = R[X_1, X_2, \dots, X_n]$ .

Dann ist  $\Omega_A^k$  freier  $A$ -Modul mit Basis  $dX_{i_1} \wedge \dots \wedge dX_{i_k}$ ,  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ .

Für jedes  $f \in A$  ist  $df = d_A f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i} dX_i = \sum_{i=1}^n \partial_i f dX_i$ .

**Existenz der Folge  $(d_i)_{i \geq 0}$ :** Erstmal läßt sich  $d_0$  definieren durch  $d_0 = d$ . Damit ist (iii) erfüllt, und (i) gilt für  $i = 0$  weil  $d$  eine Derivation ist.

Nun definieren wir  $d_1$  durch  $d_1(\sum_{i=1}^n f_i dX_i) = \sum_{i=1}^n df_i \wedge dX_i \in \Omega_A^2$  für alle  $f_1, f_2, \dots, f_n \in A$ .

Konkretes Beispiel:  $d_1(f_1 dX_1 + f_2 dX_2)$

$$= (\frac{\partial f_1}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial f_1}{\partial X_2} dX_2) \wedge dX_1 + (\frac{\partial f_2}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial f_2}{\partial X_2} dX_2) \wedge dX_2 = (\frac{\partial f_2}{\partial X_1} - \frac{\partial f_1}{\partial X_2}) dX_1 \wedge dX_2$$

(denn  $dX_1 \wedge dX_1 = 0$ ,  $dX_2 \wedge dX_2 = 0$  und  $dX_2 \wedge dX_1 = -dX_1 \wedge dX_2$ ).

Allgemein definieren wir  $d_k$  für jedes  $k \geq 0$  durch:

$$d_k(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1 \dots i_k} dX_{i_1} \wedge \dots \wedge dX_{i_k}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d(f_{i_1 \dots i_k}) \wedge dX_{i_1} \wedge \dots \wedge dX_{i_k}$$

für alle Tupel  $(f_{i_1 \dots i_k})_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$  von Elementen von  $A$ .

Diese Definition von  $d_k$  stimmt in den Fällen  $k = 0$  und  $k = 1$  überein mit den oben gegebenen Definitionen von  $d_0$  und  $d_1$ .

Diese  $d_k$  erfüllen (i), denn:

Sei  $\omega = \sum_{\underline{i}} f_{\underline{i}} dX_{i_1} \wedge \dots \wedge dX_{i_k} \in \Omega_A^k$  (wobei alle  $f_{\underline{i}}$  in  $A$  liegen) und sei  $f \in A$ . Hierbei ist  $\underline{i}$  eine Abkürzung für ein  $k$ -Tupel  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$  natürlicher Zahlen, welches  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  erfüllt. Dann ist

$$\begin{aligned} d_k(f\omega) &= \sum_{\underline{i}} d(f f_{\underline{i}}) \wedge dX_{i_1} \wedge \dots \wedge dX_{i_k} \\ &= \underbrace{\sum_{\underline{i}} f df_{\underline{i}} \wedge dX_{i_1} \wedge \dots \wedge dX_{i_k}}_{=f \cdot d_k(\omega)} + \underbrace{\sum_{\underline{i}} f_{\underline{i}} df \wedge dX_{i_1} \wedge \dots \wedge dX_{i_k}}_{=df \wedge \omega} \end{aligned}$$

$$= f \cdot d_k(\omega) + df \wedge \omega.$$

Damit ist (i) für unsere Folge  $(d_i)_{i \geq 0}$  bewiesen.

Jetzt zeigen wir, dass (ii) gilt. Sei  $k \geq 0$ . Wir müssen zeigen, dass  $d_{k+1} \circ d_k = 0$  ist.

Dazu reicht es aus, zu beweisen, dass  $(d_{k+1} \circ d_k)(fdX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k}) = 0$  für alle  $f \in A$  und alle  $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$  gilt. Betrachten wir nun ein solches  $f$  und solche  $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ . Bezeichne  $dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k}$  mit  $\omega$ . Dann gilt  $d_k \omega = d_k(dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k}) = 0$  (nach der Definition von  $d_k$ , denn  $d(1) = 0$ ).

Wegen  $dX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k} = \omega$  ist nun

$$\begin{aligned} (d_{k+1} \circ d_k)(fdX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k}) &= (d_{k+1} \circ d_k)(f\omega) = d_{k+1}(d_k(f\omega)) \stackrel{(i)}{=} d_k(d_{k+1}(df \wedge \omega + f \underbrace{d_k \omega}_{=0})) \\ &= d_{k+1}(df \wedge \omega) = d_{k+1}\left(\left(\sum_{i=1}^n \partial f_i dX_i\right) \wedge \omega\right) = \sum_{i=1}^n d_{k+1}(\partial f_i \cdot dX_i \wedge \omega) \\ &\stackrel{\text{nach Definition von } d_{k+1}}{=} \sum_{i=1}^n d(\partial_i f) \wedge dX_i \wedge \omega \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_j(\partial_i f) dX_j \wedge dX_i \wedge \omega = \sum_{(i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2} \partial_j(\partial_i f) dX_j \wedge dX_i \wedge \omega \\ &= \sum_{(i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2; i=j} \partial_j(\partial_i f) \underbrace{dX_j \wedge dX_i}_{=dX_j \wedge dX_j=0 \text{ (da } i=j)} \wedge \omega + \sum_{(i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2; i \neq j} \partial_j(\partial_i f) dX_j \wedge dX_i \wedge \omega \\ &= \underbrace{\sum_{(i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2; i=j} \partial_j(\partial_i f) 0}_{=0} + \sum_{(i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2; i \neq j} \partial_j(\partial_i f) dX_j \wedge dX_i \wedge \omega \\ &= \sum_{(i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2; i \neq j} \partial_j(\partial_i f) dX_j \wedge dX_i \wedge \omega. \end{aligned}$$

Doch die Summe auf der rechten Seite dieser Gleichung ist 0, da sich ihre Addenden paarweise gegeneinander kürzen (nämlich kürzt sich der Addend zu  $(i, j)$  jeweils mit dem Addenden zu  $(j, i)$ , weil  $\partial_j(\partial_i f) = \partial_i(\partial_j f)$  und  $dX_i \wedge dX_j = -dX_j \wedge dX_i$  für alle  $i$  und  $j$  gilt). Somit ist auch die linke Seite dieser Gleichung 0; das heißt,

$$(d_{k+1} \circ d_k)(fdX_{i_1} \wedge \cdots \wedge dX_{i_k}) = 0.$$

Damit ist gezeigt, dass (ii) gilt. Die Folge  $(d_i)_{i \geq 0}$ , die wir konstruiert haben, erfüllt mithin alle Eigenschaften (i), (ii) und (iii); damit ist der Beweis der Existenz vollständig.

**Eindeutigkeit der Folge  $(d_i)_{i \geq 0}$ :** Gemäß (iii) ist  $d_0 = d$  vorgegeben.

Zur Eindeutigkeit von  $d_1$ : Wegen (ii) ist  $d_1(dX_i) = 0$  für alle  $i = 1, \dots, n$ .

Wegen (i) ist  $d_1(fdX_i) = df \wedge dX_i + f \underbrace{d_1(dX_i)}_{=0} = df \wedge dX_i$  für alle  $f \in A$  und  $i = 1, \dots, n$ .

Dadurch ist die Abbildung  $d_1$  eindeutig determiniert.

Zur Eindeutigkeit von  $d_2$ : Zuerst einmal gilt  $d_2(dX_{i_1} \wedge dX_{i_2}) = 0$  für alle  $i_1$  und  $i_2$ . (Dies folgt aus (ii), da  $dX_{i_1} \wedge dX_{i_2} = d_1(X_{i_1} dX_{i_2}) = d_1(-X_{i_2} dX_{i_1})$ .)

Wegen (i) folgt hieraus wiederum  $d_2(fdX_{i_1} \wedge dX_{i_2}) = df \wedge dX_{i_1} \wedge dX_{i_2}$  für alle  $f \in A$ . Hierdurch

ist  $d_2$  eindeutig determiniert.

Dieses Argument läßt sich leicht zu einem Beweis der Gleichheit  $d_k(f dX_{i_1} \wedge dX_{i_2} \wedge \dots \wedge dX_{i_k}) = df \wedge dX_{i_1} \wedge dX_{i_2} \wedge \dots \wedge dX_{i_k}$  für alle  $k \geq 0$ ,  $f \in A$  und  $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$  verallgemeinern. (Der Beweis benötigt Induktion über  $k$ .) Durch diese Gleichheit ist  $d_k$  eindeutig bestimmt. Also ist die Eindeutigkeit der Folge  $(d_i)_{i \geq 0}$  gezeigt. Der Beweis in Fall 1 ist somit komplett.

**2. Fall:**  $A$  ist beliebige  $R$ -Algebra.

Schreibe  $A$  als Faktoralgebra eines Polynomrings  $P$  (in eventuell unendlich vielen Variablen) über  $R$ .

vornehm: Es gibt einen surjektiven  $R$ -Algebren-Homomorphismus  $\varphi : P \rightarrow A$ .

$\Omega$  ist Funktor,  $\Lambda^i$  auch,  $\varphi$  induziert also einen Homomorphismus  $\varphi_i : \Omega_P^i \rightarrow \Omega_A^i$ .

Da wir unseren Satz bereits im 1. Fall bewiesen haben, wissen wir, dass es eine eindeutig bestimmte Folge  $(d_{i,P})_{i \geq 0}$  von  $R$ -linearen Abbildungen  $d_{i,P} : \Omega_P^i \rightarrow \Omega_P^{i+1}$  für alle  $i \geq 0$  gibt, die die Eigenschaften (i), (ii) und (iii) erfüllt.

Wir wollen nun (für festes  $i$ ) eine  $R$ -lineare Abbildung  $d_{i,A} : \Omega_A^i \rightarrow \Omega_A^{i+1}$  konstruieren, die folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc} \Omega_P^i & \xrightarrow{d_{i,P}} & \Omega_P^{i+1} \\ \downarrow \varphi_i & & \downarrow \varphi_{i+1} \\ \Omega_A^i & \xrightarrow{d_{i,A}} & \Omega_A^{i+1} \end{array}$$

Es gilt:

- $\text{Kern}(\varphi_i) \subseteq \text{Kern}(\varphi_{i+1} \circ d_{i,P})$ . [Warum?]
- $\varphi_i$  ist surjektiv (Ü4A3a für  $i = 1$ ).

Dann induziert  $d_{i,P}$  eine Abbildung  $d_{i,A} : \Omega_A^i \rightarrow \Omega_A^{i+1}$ , für welche obiges Diagramm kommutativ wird.

Die Eigenschaften (i), (ii) und (iii) werden (aufgrund der Surjektivität von  $\varphi_i$ ) von  $P$  auf  $A$  „vererbt“. Damit ist die Existenz der Folge  $(d_i)_{i \geq 0}$  gezeigt. Die Eindeutigkeit einer solchen Folge ergibt sich genauso wie im 1. Fall, wobei hier  $X_1, \dots, X_n$  durch Algebra-Erzeugenden von  $A$  ersetzt werden.

### Beispiele

$A = K[X_1, \dots, X_n]$ ,  $\text{char}(K) = 0$ .

**Beh.:**  $H_{dR}^i(A) = 0$  für alle  $i > 0$ .

**Bew.:**  $i = n$ : Ü4A2

$i > n$ :  $\Omega_A^i = 0$

$i = 1$ : Sei  $\omega = \sum_{\nu=1}^n f dX_\nu \in \text{Kern}(d_1)$ , also:  $0 = \sum_{\nu=1}^n df_\nu \wedge dX_\nu = \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial f_\nu}{\partial X_\mu} dX_\mu \wedge dX_\nu$

Für alle  $\nu \neq \mu$  ist also  $\frac{\partial f_\nu}{\partial X_\mu} = \frac{\partial f_\mu}{\partial X_\nu}$  (da  $dX_\mu \wedge dX_\nu = -dX_\nu \wedge dX_\mu$ ).

Zu zeigen:  $\omega = df$  für ein  $f \in A$ , d.h.  $f_\nu = \frac{\partial f}{\partial X_\nu}$ ,  $\nu = 1, \dots, n$ .

Schreibe  $f_\nu = \sum_{\underline{i}} a_{\underline{i}}^{(\nu)} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$ .

Ansatz:  $f = \sum_{\underline{i}} a_{\underline{i}} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial X_\nu} = \sum_{\underline{i}=(i_1, \dots, i_n), i_\nu \geq 1} a_{\underline{i}} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$

Wähle also  $a_{\underline{i}}$  so, dass  $i_\nu \cdot a_{\underline{i}} = a_{\underline{i}-e_\nu}^{(\nu)}$ ,  $e_\nu = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_\nu, 0, \dots, 0)$

Es bleibt zu zeigen:  $\frac{1}{i_\nu} a_{\underline{i}-e_\nu}^{(\nu)} = \frac{1}{i_\mu} a_{\underline{i}-e_\mu}^{(\mu)}$  für alle  $\nu \neq \mu$ .

Äquivalent:  $(*) \ i_\mu \cdot a_{\underline{i}-e_\nu}^{(\nu)} = i_\nu \cdot a_{\underline{i}-e_\mu}^{(\mu)}$

Beweis von  $(*)$ :  $\sum_{\underline{i}} i_\mu a_{\underline{i}-e_\nu} X^{i-e_\mu-e_\nu} = \sum_{\underline{i}, i_\mu \geq 1} i_\mu a_{\underline{i}}^{(\nu)} X^{i-e_\mu} = \sum_{\underline{i}, i_\nu \geq 1} i_\nu a_{\underline{i}}^{(\mu)} X^{i-e_\nu}$   
 $= \sum_{\underline{i}} i_\nu a_{\underline{i}-e_\nu}^{(\mu)} X^{i-e_\nu-e_\mu}$ , da  $\frac{\partial f_\nu}{\partial X_\mu} = \frac{\partial f_\mu}{\partial X_\nu}$ .

### Beispiele

$$A = K[X, X^{-1}] = K[X, Y]/(XY - 1) = \{f = \sum_{\nu=-n_0}^{n_1} a_\nu X^\nu : a_\nu \in K, n_0, n_1 \in \mathbb{N}\}$$

$$\Omega_A = AdX, df = (\sum_{\nu \neq 0} \nu a_\nu X^{\nu-1})dX \Rightarrow \Omega^2 = 0 \Rightarrow \text{Bild}(d) = \{f dx : f \in A, a_{-1} = 0\}, \text{ d.h.}$$

$$H_{dR}^1(A) = K \frac{dx}{x}$$



# 2 Noethersche Ringe und Moduln

## §1 Der Hilbertsche Basissatz

### Definition 2.1

Sei  $R$  ein (kommutativer) Ring (mit Eins),  $M$  ein  $R$ -Modul.

- (a)  $M$  erfüllt die **aufsteigende Kettenbedingung** (ACC), wenn jede aufsteigende Kette von Untermoduln stationär wird. D.h. sind  $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$  Untermoduln von  $M$  mit  $M_i \subseteq M_{i+1}$  für alle  $i$ , so gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $M_i = M_n$  für alle  $i > n$ .
- (b)  $M$  heißt **noethersch**, wenn  $M$  (ACC) erfüllt.
- (c)  $R$  heißt **noethersch**, wenn er als  $R$ -Modul noethersch ist.

### Beispiele

- 1.)  $k$  Körper. Ein  $k$ -Vektorraum  $V$  ist noethersch  $\Leftrightarrow \dim_k(V) < \infty$ .  
[ $k$  hat nur die Ideale  $\{0\}, k$ .]
- 2.)  $R = \mathbb{Z}$   
[alle Untermodule:  $n\mathbb{Z}$ , mit ggT( $n, m$ ) zusammenbauen]
- 3.)  $R = k[X]$   
[Ideale von einem Polynom erzeugt, um größer zu machen: ggT der Polynome nehmen.]

### Bemerkung 2.2

Sei  $0 \rightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \rightarrow 0$  kurze exakte Sequenz von  $R$ -Moduln. Dann gilt:

$$M \text{ noethersch} \Leftrightarrow M' \text{ und } M'' \text{ noethersch}$$

### Beweis

“ $\Rightarrow$ “:

- (i)  $M'_0 \subseteq M'_1 \subseteq \dots \subseteq M'_i \subseteq \dots$  Kette von Untermoduln von  $M' \Rightarrow \alpha(M'_0) \subseteq \alpha(M'_1) \subseteq \dots$  wird stationär  $\xrightarrow{\alpha \text{ injektiv}} M'_0 \subseteq M'_1 \subseteq \dots$  wird stationär.
- (ii) Sei  $M''_0 \subseteq M''_1 \subseteq \dots \subseteq M''_i \subseteq \dots$  Kette von Untermoduln von  $M'' \Rightarrow \beta^{-1}(M''_0) \subseteq \beta^{-1}(M''_1) \subseteq \dots \subseteq \beta^{-1}(M''_i) \subseteq \dots$  wird stationär  $\Rightarrow \underbrace{\beta(\beta^{-1}(M''_0))}_{=M'_0} \subseteq \dots \subseteq \underbrace{\beta(\beta^{-1}(M''_i))}_{=M'_i} \subseteq \dots$  wird stationär, da  $\beta$  surjektiv ist.

“ $\Leftarrow$ “:

Sei  $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_i \subseteq \dots$  Kette von Untermoduln von  $M$ . Sei  $M'_i := \alpha^{-1}(M_i)$ ,  $M''_i := \beta(M_i)$ .

Nach Voraussetzung gibt es  $n \in \mathbb{N}$ , so dass für  $i \geq n$  gilt:  $M'_i = M'_n$ ,  $M''_i = M''_n$ . Weiter gilt:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M'_n & \xrightarrow{\alpha} & M_n & \xrightarrow{\beta} & M''_n \longrightarrow 0 & \text{ist exakt} \\ & & \parallel & & \downarrow \gamma & & \parallel & \\ \text{für ein } i \geq n & & 0 & \longrightarrow & M'_i & \xrightarrow{\alpha} & M_i & \xrightarrow{\beta} M''_i \longrightarrow 0 & \text{ist exakt} \end{array}$$

$\gamma$  injektiv (Einbettung).

Zu zeigen:  $\gamma$  surjektiv.

Sei  $x \in M_i$ , dazu gibt es ein  $y \in M_n$  mit  $\beta(y) = \beta(x) \Rightarrow z := y - x \in \text{Kern}(\beta) = \text{Bild}(\alpha) = \alpha(M'_i) = \alpha(M'_n) \Rightarrow x = \gamma(y - z)$  und  $y - z \in M_n$ .

### Folgerung 2.3

Jeder endlich erzeugbare Modul über einem noetherschen Ring ist noethersch.

#### Beweis

**1. Fall:**  $F$  freier Modul vom Rang  $n$ .

Induktion über  $n$ .

$n = 1$ : Dann ist  $F \cong R$  als  $R$ -Modul, also noethersch nach Voraussetzung.

$n \geq 1$ : Sei  $e_1, \dots, e_n$  Basis von  $F$ . Dann ist  $F \cong \bigoplus_{i=1}^n R \cdot e_i$ . Dann ist  $0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{n-1} R \cdot e_i \rightarrow F \rightarrow R \cdot e_n \rightarrow 0$  exakt. Nach Induktionsvoraussetzung ist  $\bigoplus_{i=1}^{n-1} R \cdot e_i$  noethersch,  $R \cdot e_n$  ist nach Voraussetzung noethersch  $\xRightarrow{2.2} F$  noethersch.

**2. Fall:**  $M$  werde erzeugt von  $x_1, \dots, x_n$ . Dann gibt es (genau) einen surjektiven  $R$ -Modulhomomorphismus  $\beta : \bigoplus_{i=1}^n R \cdot e_i \rightarrow M$  mit  $\beta(e_i) = x_i \xRightarrow{2.2} M$  noethersch.

### Proposition 2.4

Sei  $R$  ein Ring.

(a) Für einen  $R$ -Modul  $M$  sind äquivalent:

- (i)  $M$  ist noethersch
- (ii) jede nichtleere Teilmenge von Untermoduln von  $M$  hat ein (bzgl.  $\subseteq$ ) maximales Element.
- (iii) jeder Untermodul von  $M$  ist endlich erzeugt.

(b)  $R$  ist genau dann noethersch, wenn jedes Ideal in  $R$  endlich erzeugbar ist.

#### Beweis

(a) **(i)  $\Rightarrow$  (ii):** Sei  $\emptyset \neq \mathcal{M}$  eine Familie von Untermoduln von  $M$ . Sei  $M_0 \in \mathcal{M}$ . Ist  $M_0$  nicht maximal, so gibt es ein  $M_1 \in \mathcal{M}$  mit  $M_0 \subsetneq M_1$ . Ist  $M_1$  nicht maximal, so gibt es ein  $M_2 \in \mathcal{M}$  mit  $M_1 \subsetneq M_2$ . ...

Die Kette  $M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \dots$  muss stationär werden, d.h.  $\exists n$  mit  $M_n$  ist maximal in  $\mathcal{M}$ .

**(ii)  $\Rightarrow$  (iii):** Sei  $N \subseteq M$  ein Untermodul,  $\mathcal{M}$  Familie der endlich erzeugbaren Untermoduln von  $N$ .  $\mathcal{M} \neq \emptyset$ , da  $\{0\} \in \mathcal{M}$ . Nach Voraussetzung enthält  $\mathcal{M}$  ein maximales Element  $N_0$ . Wäre  $N_0 \neq N$  so gäbe es ein  $x \in N \setminus N_0$ . Dann wäre der von  $N_0$  und  $x$  erzeugte Untermodul  $N_1 \subset N$  endlich erzeugt und  $N_0 \subsetneq N_1$ . Widerspruch zu  $N_0$  maximal.

**(iii)  $\Rightarrow$  (i):** Seien  $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_i \subseteq \dots$  Untermoduln von  $M$ . Sei  $N := \bigcup_{i \geq 0} M_i$ .  $N$  ist Untermodul  $\checkmark$ .

$N$  ist nach Voraussetzung endlich erzeugt, z.B. von  $x_1, \dots, x_n$ . Jedes  $x_k$  liegt in einem  $M_{i(k)}$ , also liegen alle in  $M_m$  mit  $m = \max\{i(k) : k = 1, \dots, n\} \Rightarrow N = M_m \Rightarrow M_i = M_m$  für  $i \geq m$ .

(b) ist Spezialfall von (a) für  $R = M$ .

### Satz 4 (Hilbert'scher Basissatz)

Ist  $R$  noetherscher Ring, so ist auch  $R[X]$  noethersch.

**Beweis**

Sei  $\mathcal{J}$  ein nicht endlich erzeugbares Ideal in  $R[X]$ .

Sei  $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  Folge in  $\mathcal{J}$  wie folgt:  $f_1$  sei maximales Element in  $\mathcal{J} \setminus \{0\}$  von minimalen Grad. Für  $\nu \geq 2$  sei  $f_\nu$  ein Element in  $\mathcal{J} \setminus \underbrace{(f_1, \dots, f_{\nu-1})}_{=: \mathcal{J}_\nu}$  von minimalen Grad.

Nach Voraussetzung ist  $\mathcal{J}_\nu \neq \mathcal{J}$  für alle  $\nu$ . Für  $d_\nu := \deg(f_\nu)$  gilt  $d_\nu \leq d_{\nu+1}$ .

Sei  $a_\nu \in R$  der Leitkoeffizient von  $f_\nu$  (d.h.  $f_\nu = a_\nu X^{d_\nu} + \dots$ ). Sei  $I_\nu$  das von  $a_1, \dots, a_{\nu-1}$  in  $R$  erzeugte Ideal  $\Rightarrow I_\nu \subseteq I_{\nu+1} \Rightarrow \exists n$  mit  $I_{n+1} = I_n \Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in R$  mit  $a_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_i$ .

Setze  $g := f_n - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f_i X^{d_n - d_i} \Rightarrow g \notin \mathcal{J}_n$  (sonst wäre  $f_n \in \mathcal{J}_n$ ) aber  $\deg(g) < d_n = \deg(f_n)$  Widerspruch.

**Folgerung 2.5**

Sei  $R$  noetherscher Ring. Dann gilt:

- (a)  $R[X_1, \dots, X_n]$  ist noethersch für jedes  $n \in \mathbb{N}$
- (b) Jede endlich erzeugte  $R$ -Algebra  $A$  ist noethersch (als Ring)

**Beweis**

- (a)  $n = 1$ : Satz 4

$n > 1$ :  $R[X_1, \dots, X_n] = R[X_1, \dots, X_{n-1}][X_n]$

- (b) Es gibt surjektiven  $R$ -Algebra-Homomorphismus  $\varphi : R[X_1, \dots, X_n] \rightarrow A \xrightarrow{(a), 2.3} A$  ist noethersch als  $R[X_1, \dots, X_n]$ -Modul. Sei  $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots \subseteq I_k \subseteq \dots$  Kette von Idealen in  $A$ . Jedes  $I_k$  ist  $R[X_1, \dots, X_n]$ -Modul  $\Rightarrow$  Die Kette wird stationär

## §2 Ganze Ringerweiterungen

**Definition 2.6**

Sei  $S/R$  eine Ringerweiterung (d.h.  $R \subseteq S$ ).

- (a)  $b \in S$  heißt **ganz** über  $R$ , wenn es ein **normiertes** Polynom  $f \in R[X]$  gibt mit  $f(b) = 0$ .
- (b)  $S$  heißt **ganz** über  $R$ , wenn jedes  $b \in S$  ganz über  $R$  ist.

**Beispiele**

$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$  ist ganz über  $\mathbb{Z}$ .

$\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$  ist nicht ganz über  $\mathbb{Z}$  (Nullstelle von  $2X - 1$ ).

**Proposition 2.7**

Sei  $S/R$  Ringerweiterung. Für  $b \in S$  sind äquivalent:

- (i)  $b$  ist ganz über  $R$ .
- (ii)  $R[b]$  ist endlich erzeugbarer  $R$ -Modul.
- (iii)  $R[b]$  ist enthalten in einem Unterring  $S' \subseteq S$ , der als  $R$ -Modul endlich erzeugt ist.

**Beweis**

(i)  $\Rightarrow$  (ii): Nach Voraussetzung gibt es  $a_0, \dots, a_{n-1} \in R$ , sodass  $b^n = a_{n-1}b^{n-1} + \dots + a_0$   
 $\Rightarrow b^n$  ist in dem von  $1, b, \dots, b^{n-1}$  erzeugtem  $R$ -Untermodule von  $S$  enthalten. Sei  $M$  dieser Untermodul.

$\Rightarrow b^{n+1} = a_{n-1}b^n + \dots + a_0b = a_{n-1}(\sum_{i=0}^{n-1} a_i b^i) + \dots + a_0b \in M$

Induktion  $\Rightarrow b^k \in M$  für alle  $k \geq 0 \Rightarrow M = R[b]$ . Daraus folgt, dass  $R[b]$  ein endlich erzeugbarer  $R$ -Modul ist.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii): Trivial (setze  $S' = R[b]$ ).

(iii)  $\Rightarrow$  (i):  $S'$  werde als  $R$ -Modul von  $s_1, \dots, s_n$  erzeugt  $\Rightarrow b \cdot s_i \in S'$ , d.h. es gibt Elemente  $a_{ik}$  von  $R$ , die  $b \cdot s_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} s_k$  für  $i = 1, \dots, n$  erfüllen. Also ist  $\sum_{k=1}^n (a_{ik} - \delta_{ik} \cdot b) \cdot s_k = 0$  für  $i = 1, \dots, n$ .

Für die Matrix  $A = (a_{ik} - \delta_{ik} \cdot b)_{i,k=1,\dots,n} \in S^{n \times n}$  gilt also  $A \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = 0$ . Die Determinante

$\det(A)$  ist normiertes Polynom in  $b$  vom Grad  $n$  mit Koeffizienten in  $R$ .

**Beh.:**  $\det(A) = 0$ .

**Bew.:** Cramersche Regel:

$A^\# := (b_{ij})$  mit  $b_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A'_{ji})$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  wobei  $A'_{ji}$  durch Streichen der  $j$ -ten Zeile und der  $i$ -ten Spalte aus  $A$  hervor geht.

$A \cdot A^\# = (c_{ik})$  mit  $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{j+k} \det(A'_{kj}) = \begin{cases} i = k : \det(A) \text{ (Laplace)} \\ i \neq k : \det(A'_k) = 0 \end{cases}$

$\det(A'_k) = 0$  : in der  $k$ -ten Zeile steht  $a_{i1}, \dots, a_{in} \Rightarrow i$ -te und  $k$ -te Zeile sind gleich.

$\Rightarrow A \cdot A^\# = \det(A) \cdot E_n = A^\# \cdot A \Rightarrow 0 = A^\# \cdot A \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) \cdot s_i = 0$  für

$i = 1, \dots, n$ . Da  $1 \in S'$ , gibt es  $\lambda_i \in R$  mit  $1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i \Rightarrow \det(A) \cdot 1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \det(A) \cdot s_i = 0 \Rightarrow \det(A) = 0$ .

### Proposition 2.8

Ist  $S/R$  Ringerweiterung, so ist  $\bar{R} := \{b \in S : b \text{ ganz über } R\}$  ein Unterring von  $S$ .

### Beweis

Seien  $b_1, b_2 \in \bar{R}$ .

Zu zeigen:  $b_1 \pm b_2, b_1 \cdot b_2 \in \bar{R}$

Nach 2.7 genügt es zu zeigen:  $R[b_1, b_2]$  ist endlich erzeugt als  $R$ -Modul.

Dazu:  $R[b_1]$  ist endlich erzeugt als  $R$ -Modul (von  $x_1, \dots, x_n$ ) nach 2.7.  $R[b_1, b_2] = (R[b_1])[b_2]$  ist endlich erzeugt als  $R[b_1]$ -Modul (von  $y_1, \dots, y_m$ ). Dann erzeugen die  $x_i y_j$   $R[b_1, b_2]$  als  $R$ -Modul.

### Definition 2.9

Sei  $S/R$  Ringerweiterung.

- (a)  $\bar{R}$  (wie in 2.8) heißt der **ganze Abschluss** von  $R$  in  $S$ .
- (b) Ist  $R = \bar{R}$ , so heißt  $R$  **ganz abgeschlossen** in  $S$ .
- (c) Ein nullteilerfreier Ring  $R$  heißt **normal**, wenn er ganz abgeschlossen in  $\text{Quot}(R)$  ist.
- (d) Ist  $R$  nullteilerfrei, so heißt der ganze Abschluss  $\bar{R}$  von  $R$  in  $\text{Quot}(R)$  die **Normalisierung** von  $R$ .

### Bemerkung 2.10

Jeder faktorielle Ring ist normal.

**Beweis**

Sei  $R$  ein faktorieller Ring.

Sei  $K = \text{Quot}(R)$ . Sei  $x = \frac{a}{b} \in K^\times$  mit  $a, b \in R$  teilerfremd. Sei  $x$  ganz über  $R$ . Dann gibt es  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in R$  mit  $x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha_0 = 0 \xrightarrow{b^n} a^n + \alpha_{n-1}ba^{n-1} + \dots + \alpha_1b^{n-1}a + \alpha_0b^n = 0 \Rightarrow b \mid a^n$ . Da  $a$  und  $b$  teilerfremd sind, kann dies nur gelten, wenn  $b$  invertierbar ist. Also ist  $x \in R$ . Daher ist  $R$  normal.

**§3 Der Hilbert'sche Nullstellensatz****Satz 5 (Hilbert'scher Nullstellensatz)**

Sei  $K$  ein Körper und  $\mathfrak{m}$  ein maximales Ideal in  $K[X_1, \dots, X_n]$ .

Dann ist  $L := K[X_1, \dots, X_n]_{/\mathfrak{m}}$  eine algebraische Körpererweiterung von  $K$ .

**Beweis**

Für  $n = 1$  ist das aus Algebra I bekannt. Nimm das als Induktionsanfang einer vollständigen Induktion nach  $n$ .

$L$  wird als  $K$ -Algebra erzeugt von den Restklassen  $x_1, \dots, x_n$  der  $X_1, \dots, X_n$ . Wenn  $x_1, \dots, x_n$  algebraisch über  $K$  sind, so auch  $L$ . Wir nehmen an, dass sei nicht der Fall, sei also ohne Einschränkung  $x_1$  transzendent über  $K$ .

Da  $L$  Körper, liegt  $K' := K(x_1)$  in  $L$ , so dass  $L \subset K'[X_2, \dots, X_n]$  ein Faktoring von  $K'[X_2, \dots, X_n]$  nach einem maximalen Ideal ist.

$\stackrel{\text{I.V.}}{\Rightarrow} x_2, \dots, x_n$  sind algebraisch über  $K' \Rightarrow \exists a_{i\nu} \in K' = K(x_1)$  mit  $x_i^{n_i} + \sum_{\nu=0}^{n_i-1} a_{i\nu}x_i^\nu = 0$  für  $i = 2, \dots, n$ . Nennen wir den Hauptnenner der  $a_{i\nu}$  von nun  $b \in K[X_1] \Rightarrow x_2, \dots, x_n$  sind ganz über  $K[x_1, b^{-1}] =: R$ .

**Beh.:**  $R$  ist Körper.

**denn:** Sei  $a \in R \setminus \{0\}$  und  $a^{-1}$  das Inverse von  $a$  in  $L$ . Da  $L$  ganz über  $R$  ist, gibt es  $\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1} \in R$  mit  $(a^{-1})^m + \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i(a^{-1})^i = 0 \xrightarrow{a^m} 1 = -\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i a^{m-i} = a(-\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i a^{m-i-1}) \Rightarrow R \text{ ist Körper} \Rightarrow \text{Widerspruch! } R \text{ kann niemals Körper sein.}$

**Definition 2.11**

Sei  $I \trianglelefteq K[X_1, \dots, X_n]$  ein Ideal. Dann heißt die Teilmenge  $V(I) \subseteq K^n$ , die durch

$$V(I) := \{(x_1, \dots, x_n) \in K^n : f(x_1, \dots, x_n) = 0 \forall f \in I\}$$

bestimmt ist, die **Nullstellenmenge** von  $I$  in  $K^n$ .

**Beispiele**

- 1.) aus der LA bekannt: affine Unterräume des  $K^n$  sind Nullstellenmenge von linearen Polynomen.
- 2.) Anschaulicher Spezialfall von 1.):  
Punkte in  $K^n : (x_1, \dots, x_n) : V(X_1 - x_1, X_2 - x_2, \dots, X_n - x_n)$ .

**Bemerkung + Definition 2.12**

- (a) Für 2 Ideale  $I_1 \subseteq I_2$  gilt  $V(I_1) \supseteq V(I_2)$ .

- (b) Definiert man für eine beliebige Teilmenge  $V \subseteq K^n$  das **Verschwindungsideal** von  $V$  durch

$$I(V) := \{f \in K[X_1, \dots, X_n] : f(x_1, \dots, x_n) = 0 \forall (x_1, \dots, x_n) \in V\},$$

so gilt  $V \subseteq V(I(V))$ ;

ist  $V$  bereits Nullstellenmenge  $V(I)$  eines Ideals  $I$  von  $K[X_1, \dots, X_n]$ ,

so gilt sogar  $V = V(I(V))$ .

### Beweis

- (a) Sei  $x \in V(I_2) \Rightarrow f(x) = 0 \forall f \in I_2 \supseteq I_1 \Rightarrow x \in V(I_1)$

- (b) " $\subseteq$ ": Definition von  $V$  und  $I$

" $\supseteq$ ": Sei  $V = V(I)$  für  $I \trianglelefteq K[X_1, \dots, X_n]$ . Nach Definition  $I \subseteq I(V) \xrightarrow{(a)} V(I(V)) \subseteq V(I) = V$

### Satz (Schwacher Nullstellensatz)

Ist  $K$  algebraisch abgeschlossen, so ist für jedes echte Ideal  $I \trianglelefteq K[X_1, \dots, X_n] : V(I) \neq \emptyset$ .

### Beweis

Sei  $I \trianglelefteq K[X_1, \dots, X_n]$  echtes Ideal. Nach Algebra I gibt es dann maximales Ideal  $\mathfrak{m} \supseteq I$ . Weiter gilt:  $V(\mathfrak{m}) \subseteq V(I)$ , so können wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $I = \mathfrak{m}$  maximal ist.

Nach Satz 5 ist  $K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{m}$  eine algebraische Körpererweiterung von  $K$ .

Da  $K$  algebraisch abgeschlossen  $\Rightarrow K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{m} \cong K$ .

Seien nun  $x_i$  die Restklasse von  $X_i$  in  $K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{m}$  und  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

Für  $f \in K[X_1, \dots, X_n]$  ist  $f(x) = f(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n) = f \bmod I \Rightarrow f(x) = 0 \forall f \in I \Rightarrow x \in V(I)$ .

### Satz (Starker Nullstellensatz)

Ist  $K$  algebraisch abgeschlossen, so gilt für jedes Ideal  $I \trianglelefteq K[X_1, \dots, X_n]$ :

$$I(V(I)) = \{f \in K[X_1, \dots, X_n] : \exists d \geq 1 : f^d \in I\} =: \sqrt[d]{I}$$

### Beweis (Rabinovitsch-Trick)

Sei  $g \in I(V(I))$  und  $f_1, \dots, f_m$  Idealerzeuger von  $I \trianglelefteq K[X_1, \dots, X_n]$ .

Zu zeigen:  $\exists d \geq 1$  mit  $g^d = \sum_{i=1}^m a_i f_i$  für irgendwelche  $a_i$ .

Sei  $J \subseteq K[X_1, \dots, X_n, X_{n+1}]$  das von  $f_1, \dots, f_m, gX_{n+1} - 1$  erzeugte Ideal.

**Beh.:**  $V(J) = \emptyset$

**Bew.:** Sei  $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in V(J)$ . Dann ist  $f_i(x') = 0$  für  $x' = (x_1, \dots, x_n)$  und  $i = 1, \dots, m \Rightarrow x' \in V(I)$ .

Nach Wahl von  $g \in I(V(I))$  ist also  $g(x') = 0$

$\Rightarrow (gX_{n+1} - 1)(x) = g(x')x_{n+1} - 1 = -1 \neq 0. \Rightarrow V(J) = \emptyset$ .

Nach schwachen Nullstellensatz ist  $J = K[X_1, \dots, X_{n+1}]$

$\Rightarrow \exists b_1, \dots, b_m$  und  $b \in K[X_1, \dots, X_{n+1}]$  mit  $\sum_{i=1}^m b_i f_i + b(gX_{n+1} - 1) = 1$ .

Sei  $R := K[X_1, \dots, X_{n+1}]/(gX_{n+1} - 1) \cong K[X_1, \dots, X_n][\frac{1}{g}]$ . Unter dem Isomorphismus werden die  $f_i$  auf sich selbst, die  $b_i$  auf  $\tilde{b}_i \in R$  abgebildet  $\Rightarrow \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i f_i = 1$  in  $R$ . Multipliziere mit dem Hauptnenner  $g^d$  der  $\tilde{b}_i \Rightarrow \sum_{i=1}^m \underbrace{(g^d \tilde{b}_i)}_{\in K[X_1, \dots, X_n]} f_i = g^d \Rightarrow I(V(I)) \subseteq \sqrt[d]{I}$ .

" $\supseteq$ ": klar.

## §4 Graduierte Ringe und Moduln

### Definition + Bemerkung 2.13

- (a) Ein Ring  $S$  zusammen mit einer Zerlegung  $S = \bigoplus_{i \geq 0} S_i$  in abelsche Gruppen  $S_i$  heißt **graduierter Ring**, wenn für alle  $i, j \in \mathbb{N}$ :

$$S_i \cdot S_j \subseteq S_{i+j}$$

- (b) Ist  $S = \bigoplus_{i \geq 0} S_i$  graduierter Ring, so heißen die Elemente von  $S_i$  **homogen** vom Grad  $i$ .  
Für  $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i$  heißen die  $f_i$  die homogenen Komponenten von  $f$ .  
(c) Ist  $S = \bigoplus_{i \geq 0} S_i$  graduierter Ring, so ist  $S_0$  Unterring mit  $1 \in S_0$ .

### Beweis

- (c)  $S_0 \cdot S_0 \subseteq S_{0+0} = S_0$

Sei  $1 = \sum_{i \geq 0} e_i$  mit  $e_i \in S_i$ . Sei  $f \in S_n$  mit  $n \geq 1, f \neq 0$ .  $\Rightarrow f = f \cdot 1 = \sum_{i \geq 0} f e_i$  mit  $f \cdot e_i \in S_{n+i}$ . Da  $f$  nur auf eine Weise als Summe von homogenen Elementen geschrieben werden kann, ist  $e_i = 0$  für  $i \geq 0$  und  $e_0 = 1$ .

### Definition + Bemerkung 2.14

Sei  $S = \bigoplus_{i \geq 0} S_i$  graduierter Ring.

- (a) Ein Ideal  $I \subseteq S$  heißt **homogen**, wenn es von homogenen Elementen erzeugt wird.  
(b) Ein Ideal  $I \subseteq S$  ist genau dann homogen, wenn für jedes  $f \in I$ ,  $f = \sum_{i \geq 0} f_i$  ( $f_i \in S_i$ ) gilt:  $f_i \in I$ .  
(c) Sei  $I \subseteq S$  homogenes Ideal, erzeugt von homogenen Elementen  $(h_\nu)_{\nu \in J}$ . Dann hat jedes homogene  $f \in I$  eine Darstellung  $f = \sum_\nu g_\nu h_\nu$  mit  $g_\nu$  homogen.  
(d) Ist  $I$  homogenes Ideal in  $S$ , so ist  $S/I$  graduierter Ring mit  $(S/I)_i = S_i / (I \cap S_i)$

### Beweis

- (b) “ $\Leftarrow$ ”:  $\checkmark$

“ $\Rightarrow$ ”: Sei  $(h_\nu)_{\nu \in J}$  homogenes Erzeugendensystem von  $I$ .

Sei  $f \in I$ . Dann gibt es  $g_\nu \in S$  mit  $f = \sum_\nu g_\nu h_\nu$ . Sei  $g_\nu = \sum_{i \geq 0} g_{\nu,i}$  Zerlegung in homogene Komponenten.

$$\Rightarrow f = \sum_{\nu,i} g_{\nu,i} h_\nu \Rightarrow f_i = \sum_\nu g_{\nu,i - \deg f_\nu} h_\nu \quad (\text{mit } g_{\nu,j} = 0 \text{ für } j < 0) \Rightarrow f_i \in I$$

- (d)  $\varphi : S = \bigoplus_{i \geq 0} S_i \rightarrow \bigoplus_{i \geq 0} S_i / (I \cap S_i)$  ist surjektiver Ringhomomorphismus. Kern( $\varphi$ ) wird erzeugt von  $I \cap S_i$ ,  $i \geq 0$ . Da  $I$  homogen, ist Kern( $\varphi$ ) =  $I$ . Aus dem Homomorphiesatz folgt dann:  $S/I \cong \bigoplus_{i \geq 0} S_i / (I \cap S_i)$

### Beispiele

- (1)  $S = k[X, Y]$ ,  $I = (Y - X^2)$  ist *nicht* homogen.  $S/I \cong k[X]$ ,  $\bigoplus_i S_i / (I \cap S_i) = \bigoplus_i S_i = S$ , da  $I$  keine homogenen Elemente enthält.  
(2)  $S_+ := \bigoplus_{i > 0} S_i$  ist homogenes Ideal.  
Ist  $S_0$  Körper, so ist  $S_+$  das einzige maximale homogene Ideal.  
(3)  $S = k[X, Y]$ ,  $\deg(X) = 1$ ,  $\deg(Y) = 2$ . Dann ist  $I = (Y - X^2)$  homogenes Ideal!

### Definition + Bemerkung 2.15

Für einen graduierten Ring  $S = \bigoplus_{i \geq 0} S_i$  sind äquivalent:

- (i)  $S$  noethersch.

- (ii)  $S_0$  ist noethersch und  $S_+$  endlich erzeugbares Ideal.
- (iii)  $S_0$  ist noethersch und  $S$  ist endlich erzeugbare  $S_0$ -Algebra.

**Beweis**

„(i)  $\Rightarrow$  (ii)“:  $S_0 \cong S/S_+$ ;  $S_+$  endlich erzeugbar, da  $S$  noethersch.  $S_0$  also noethersch.

„(iii)  $\Rightarrow$  (i)“:  $S \cong \underbrace{S_0[X_1, \dots, X_n]}_{\text{noethersch nach Satz 4}} / I$  für ein  $n \geq 0$  und ein Ideal  $I \subset S_0[X_1, \dots, X_n]$ .  $S$  ist also noethersch.

„(ii)  $\Rightarrow$  (iii)“: Sei  $f_1, \dots, f_r$  homogenes Erzeugersystem von  $S_+$ ,  $S' := S_0[f_1, \dots, f_r] \subset S$  die von den  $f_i$  erzeugte  $S_0$ -Unteralgebra von  $S$ .

**Beh.:**  $S' = S$

Zeige dazu:  $S_i \subset S'$  für alle  $i$ .

Beweis der Behauptung durch Induktion über  $i$ :

$i = 0$ : ✓

$i > 0$ :  $g \in S_i \xrightarrow{2.14(c)} g = \sum_{\nu=1}^r g_\nu f_\nu$  mit  $g_\nu \in S_{i-\deg(f_\nu)}$

$f_\nu \in S_+ \Rightarrow \deg(f_\nu) > 0 \Rightarrow i - \deg f_\nu < i \xrightarrow{\text{I.V.}} g_\nu \in S'$ , also ist  $g \in S'$

**Definition + Bemerkung 2.16**

Sei  $S = \bigoplus_{i \geq 0} S_i$  graduierter Ring.

- (a) Ein **graduierter**  $S$ -Modul ist ein  $S$ -Modul  $M$  zusammen mit einer Zerlegung  $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$  in abelsche Gruppen  $M_i$ , sodass für alle  $i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}$  gilt:

$$S_i \cdot M_j \subseteq M_{i+j}$$

- (b) Eine  $S$ -lineare Abbildung  $\varphi : M \rightarrow M'$  zwischen graduerten  $S$ -Moduln heißt **graderhaltend**, wenn  $\varphi(M_i) \subseteq M'_i$  für alle  $i \in \mathbb{Z}$
- (c) Ein Ideal  $I \subseteq S$  ist homogen  $\Leftrightarrow I$  ist als  $S$ -Modul graduiert (mit der geerbten Graduierung)
- (d) Eine Abbildung  $\varphi : M \rightarrow M'$  heißt vom Grad  $d$ , wenn  $\varphi(M_i) \subseteq M'_{i+d}$  für alle  $i$  gilt. In diesem Fall ist  $\text{Kern}(\varphi)$  ein graduierter Untermodul. Graderhaltende Abbildungen sind genau die Abbildungen vom Grad 0.
- (e) Ist  $I \subseteq S$  homogenes Ideal, so ist  $\varphi : S \rightarrow S/I = \bigoplus_{i \geq 0} S_i / (I \cap S_i)$  graderhaltend.

**Beispiele**

Sei  $M$  graduierter  $S$ -Modul (z.B.:  $M = S$ ). Für  $l \in \mathbb{Z}$  sei  $M(l)$  der  $S$ -Modul  $M$  mit der Graduierung  $(M(l))_i := M_{l+i}$  (insbes.:  $(M(l))_0 = M_l$ )

$$S_j(M(l))_i = S_j \cdot M_{l+i} \subseteq M_{j+l+i} = (M(l))_{i+j}$$

$M(l)$  heißt ( $l$ -facher) **Twist** von  $M$ .

**Beweis**

- (d) Sei  $\varphi : M \rightarrow M'$  lineare Abbildung von  $S$ -Moduln vom Grad  $d$ . Sei  $x \in \text{Kern}(\varphi)$ ,  $x = \sum_{i \in \mathbb{Z}} x_i \Rightarrow 0 = \varphi(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \underbrace{\varphi(x_i)}_{\in M'_{i+d}} = 0 \forall i \Rightarrow x_i \in \text{Kern}(\varphi) \forall i \Rightarrow \text{Kern}(\varphi)$  ist graduiert.



**Beobachtung**

Ist  $\varphi : M \rightarrow M'$  vom Grad  $d$ , so ist  $\varphi : M \rightarrow M'(d)$  graderhaltend. Dabei ist  $M'(d) = M'$  als  $S$ -Modul, aber  $(M'(d))_i = M_{d+i}$ . Genauso ist  $\varphi : M(-d) \rightarrow M'$  graderhaltend.

**Beispiele**

$M = S (= k[X_1, \dots, X_n])$ ,  $f \in S$  homogen vom Grad  $d \Rightarrow \varphi_f : S \rightarrow S, g \mapsto f \cdot g$  ist linear vom Grad  $d$ .

**Proposition 2.17**

Sei  $S = k[X_1, \dots, X_n]$ ,  $k$  ein Körper,  $S = \bigoplus_{d=0}^{\infty} S_d$ .

$$\dim S_d^{(n)} = \binom{n+d-1}{d} = \frac{1}{(n-1)!} \cdot (n+d-1) \cdots (d+1)$$

Das ist ein Polynom vom Grad  $n-1$  in  $d$  (mit Leitkoeffizient  $\frac{1}{(n-1)!}$ ).

**Beweis**

Induktion über  $n$ :

$n = 1$ :  $S = k[X]$ ,  $\dim S_d^{(1)} = \binom{d}{d} = 1$ . ✓

$n = 2$ :  $S = k[X_1, X_2]$ ,  $\dim S_d^{(2)} = \binom{d+1}{d} = d+1$ . ✓

$n > 2$ : Induktion über  $d$ :

$d = 0$ :  $\dim S_0^{(n)} = \binom{n-1}{0} = 1$ . ✓

$d = 1$ :  $\dim S_1^{(n)} = \binom{n}{1} = n$ . ✓

$d > 1$ :  $\dim S_d^{(n)}$  ist die Anzahl der Monome vom Grad  $d$  in  $X_1, \dots, X_n$ .

In  $S_d^{(n)}$  gibt es  $\dim S_d^{(n-1)}$  Monome in denen  $X_n$  nicht vorkommt und  $\dim S_{d-1}^{(n)}$  Monome in denen  $X_n$  vorkommt

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{I.V.}} \dim S_d^{(n)} &= \binom{n+d-2}{d} + \binom{n+d-2}{d-1} = \frac{(n+d-2)!}{(d-1)!(n-2)!} \left( \frac{1}{d} + \frac{1}{n-1} \right) = \frac{(n+d-2)!}{(d-1)!(n-2)!} \frac{n+d-1}{d(n-1)} = \\ &= \frac{(n+d-1)!}{d!(n-1)!} = \binom{n+d-1}{d} \end{aligned}$$

**Satz 6 (Hilbert-Polynom)**

Sei  $k$  ein Körper,  $S = k[X_1, \dots, X_n]$ . Sei  $M$  ein endlich erzeugbarer graduierter  $S$ -Modul.

Dann gibt es ein Polynom  $P_M \in \mathbb{Q}[T]$  vom Grad  $\leq n-1$  und ein  $d_0 \in \mathbb{N}$ , sodass  $P_M(d) = \dim_k M_d$  für alle  $d \geq d_0$ .

$P_M$  heißt das **Hilbert-Polynom** von  $M$ .

**Beweis**

Induktion über  $n$ :

$n = 0$ :  $M$  ist endlich dimensionaler  $k$ -Vektorraum, also  $M_d = 0$  für alle  $d \gg 0$ ,  $P_M = 0$  tut's.

$n \geq 1$ : Sei  $\varphi : M \rightarrow M$  die  $S$ -lineare Abbildung  $x \mapsto X_n x$ ,  $\varphi$  ist vom Grad 1,  $\text{Kern}(\varphi)$  ist also graduierter Untermodul, ebenso ist  $\text{Bild}(\varphi)$  graduierter Untermodul, also auch  $M/X_n M$ .

Dann ist

$$0 \rightarrow \underbrace{K}_{=\text{Kern}(\varphi)} \rightarrow M(-1) \xrightarrow{\varphi} M \rightarrow M/X_n M \rightarrow 0$$

exakte Sequenz von graderhaltenden Homomorphismen zwischen graduierten endlich erzeugbaren  $S$ -Moduln.

Beachte:  $M$  ist noetherscher Modul, da  $S$  noethersch und  $M$  endlich erzeugbar, also ist  $K$  auch endlich erzeugbar.

Alle  $M_d, K_d, (M/X_n M)_d$  sind endlich dimensionale  $k$ -Vektorräume  $\Rightarrow$  für jedes  $d \in \mathbb{Z}$  gilt:  $\dim_k K_d - \dim_k M(-1)_d + \dim_k M_d - \dim_k (M/X_n M)_d = 0$  bzw.

$$\dim_k M_d - \dim_k M_{d-1} = \dim_k (M/X_n M)_d - \dim_k K_d$$

**Beh.:**  $M/X_n M$  und  $K$  sind (in natürlicher Weise)  $k[X_1, \dots, X_{n-1}]$ -Moduln.

**Bew.:** klar für  $M/X_n M$ .

für  $K$ : Seien  $y_1, \dots, y_r$  Erzeuger von  $K$  als  $S$ -Modul. Sei  $y = \sum_{i=1}^r f_i y_i \in K, f_i \in S$ . Dann ist ohne Einschränkung  $f_i \in k[X_1, \dots, X_{n-1}]$ , da  $X_n \cdot y = 0$  für alle  $i$ .

Nach I.V. gibt es  $\tilde{P} \in \mathbb{Q}[T]$  mit  $\deg(\tilde{P}) \leq n-2$  und  $\tilde{P} = \dim_k (M/X_n M)_d - \dim_k K_d = \dim_k M_d - \dim_k M_{d-1} =: H(d) - H(d-1)$ .

Sei  $\binom{T}{k} := \frac{1}{k!} T(T-1) \dots (T-k+1) \in \mathbb{Q}[T], \deg \binom{T}{k} = k$ .

Schreibe  $\tilde{P} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \binom{T}{k}$ . Es gilt  $\binom{T}{k} - \binom{T-1}{k-1} = \binom{T}{k+1}$ . Setze  $P_1(T) := \sum_{k=0}^{n-2} c_k \binom{T}{k+1}, \deg(P_1) \leq n-1$  und  $P_1(d) - P_1(d-1) = \tilde{P}(d)$ .  $P_M := P_1 + c$ , sodass  $P_M(d_0) = \dim_k M_{d_0}$ .

### Definition 2.18

Sei  $S$  endlich erzeugte graduierte  $k$ -Algebra,  $S_0 = k$ ,  $M$  endlich erzeugbarer graduierter  $S$ -Modul. Dann heißt die formale Potenzreihe

$$H_M(t) := \sum_{i=0}^{\infty} (\dim_k M_i) t^i$$

**Hilbert-Reihe** zu  $M$ .

### Beispiele

1.)  $M = S = k[X] \Rightarrow \dim M_i = 1$  für alle  $i \Rightarrow H_M(t) = \sum_{i=0}^{\infty} t^i = \frac{1}{1-t}$ .

2.)  $M = S = k[X_1, \dots, X_n]$

**Beh.:**  $H_M(t) = \frac{1}{(1-t)^n}$

**Bew.:**  $\frac{1}{(1-t)^n} = \left( \sum_{i=0}^{\infty} t^i \right)^n = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$  mit  $c_i = (\text{Anzahl aller } n\text{-Tupel } (k_1, k_2, \dots, k_n) \text{ nichtnegativer ganzer Zahlen mit } k_1 + k_2 + \dots + k_n = i) = (\text{Anzahl der Monome vom Grad } i \text{ in } X_1, \dots, X_n)$ .

3.)  $M = S = k[Y] (\cong k[X^d]), \deg Y = d > 0 \Rightarrow H_M(t) = \sum_{i=0}^{\infty} t^{d \cdot i} = \frac{1}{1-t^d}$

$$\dim M_i = \begin{cases} 1 : & d \mid i \\ 0 : & \text{sonst} \end{cases}$$

### Satz (6')

Wie in Definition 2.18 seien  $S$  endlich erzeugbare graduierte  $k$ -Algebra,  $M$  endlich erzeugbarer graduierter  $S$ -Modul.

$f_1, \dots, f_r$  homogene Erzeuger von  $S$  als  $k$ -Algebra,  $d_i := \deg f_i$ .

Dann gibt es ein Polynom  $F(t) \in \mathbb{Z}[t]$ , sodass gilt:

$$H_M(t) = \frac{F(t)}{(1-t^{d_1}) \cdot (1-t^{d_2}) \cdot \dots \cdot (1-t^{d_r})}$$

**Beweis**

Induktion über  $r$ :

$r = 0$ :  $S = S_0 = k \Rightarrow \dim_k M_i = 0$  für  $i \gg 0 \Rightarrow F(t) := H_M(t)$  ist Polynom in  $\mathbb{Z}[t]$ .

$r > 0$ : Multiplikation mit  $f_r$  gibt exakte Sequenz von graderhaltenden  $S$ -Modul-Homomorphismen:

$$0 \rightarrow K \rightarrow M \xrightarrow{f_r} M(d_r) \rightarrow (M/f_r M)(d_r) \rightarrow 0$$

Wie im Beweis von [Satz 6](#) sind  $K$  und  $Q := M/f_r M$  Moduln über  $S' := k[f_1, \dots, f_{r-1}] \subset S \Rightarrow$  für jedes  $i \geq 0$  ist

$$\begin{aligned} & -\dim M_i + \dim M_{i+d_r} = \dim Q_{i+d_r} - \dim K_i \\ \Rightarrow & \sum_{i=0}^{\infty} \dim M_{i+d_r} t^{i+d_r} - t^{d_r} \sum_{i=0}^{\infty} \dim M_i t^i = \sum_{i=0}^{\infty} \dim Q_{i+d_r} t^{i+d_r} - t^{d_r} \sum_{i=0}^{\infty} \dim K_i t^i \\ \Rightarrow & H_M(t) - \sum_{i=0}^{d_r-1} \dim M_i t^i - t^{d_r} H_M(t) = H_Q(t) - \sum_{i=0}^{d_r-1} \dim Q_i t^i - t^{d_r} H_K(t) \\ & (1 - t^{d_r}) H_M(t) = H_Q(t) - t^{d_r} H_K(t) + \sum_{i=0}^{d_r-1} \dim M_i t^i - \sum_{i=0}^{d_r-1} \dim Q_i t^i \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es  $F_1(t), F_2(t) \in \mathbb{Z}[t]$  mit

$$(1 - t^{d_r}) H_M(t) = \frac{F_1(t)}{\prod_{i=1}^{r-1} (1 - t^{d_i})} - \frac{t^{d_r} F_2(t)}{\prod_{i=1}^{r-1} (1 - t^{d_i})} + \underbrace{\sum_{i=0}^{d_r-1} \dim M_i t^i - \sum_{i=0}^{d_r-1} \dim Q_i t^i}_{=: G(t)}$$

$$\Rightarrow \text{Behauptung mit } F(t) = F_1(t) - t^{d_r} F_2(t) + G(t) \cdot \prod_{i=1}^{r-1} (1 - t^{d_i})$$

## §5 Invarianten endlicher Gruppen

**Definition + Bemerkung 2.19**

Sei  $k$  ein Körper,  $n \geq 0$ ,  $k[\mathfrak{X}] := k[X_1, \dots, X_n]$ .

Sei  $G \subseteq \text{Aut}(k[\mathfrak{X}])$  eine Untergruppe der  $k$ -Algebra-Automorphismen.

- (a)  $k[\mathfrak{X}]^G := \{f \in k[\mathfrak{X}] : \sigma(f) = f \text{ für alle } \sigma \in G\}$  heißt **Invariantenring** von  $k[\mathfrak{X}]$  bezüglich  $G$ .
- (b)  $k[\mathfrak{X}]^G$  ist  $k$ -Algebra.
- (c)  $G$  heißt **linear**, wenn jedes  $\sigma \in G$  graderhaltend ist. Dann ist  $\sigma|_{k[\mathfrak{X}]_1}$  ein  $k$ -Vektorraum-Automorphismus und  $\sigma \mapsto \sigma|_{k[\mathfrak{X}]_1}$  ist ein Gruppenhomomorphismus  $G \rightarrow \text{GL}_n(k)$ .

**Beispiele**

- 1.)  $n = 2$ ,  $G = \{id, \sigma\}$  mit  $\sigma(X) = Y$ ,  $\sigma(Y) = X \Rightarrow k[X, Y]^G$  wird erzeugt von  $X + Y$  und  $X \cdot Y$ .  
 $X^k + Y^k - (X + Y)^k = -kX^{k-1}Y - \dots - kXY^{k-1} = -kXY(X^{k-2} + Y^{k-2}) - \dots$
- 2.)  $n = 2$ ,  $G = \{id, \varphi\}$  mit  $\varphi(X) = -X$ ,  $\varphi(Y) = -Y$  (wobei  $\text{char } k \neq 2$ ).  
 $k[X, Y]^G$  wird erzeugt von  $X^2, Y^2, XY$ .

**Satz 7 (Endliche Erzeugbarkeit des Invariantenrings)**

Seien  $k$ ,  $G$ ,  $k[\mathfrak{X}]$  wie in Def. 2.19,  $G$  linear und endlich.

- (a) (Hilbert) Angenommen,  $\text{char } k$  sei kein Teiler von  $|G|$ . Dann ist  $k[\mathfrak{X}]^G$  eine endlich erzeugbare  $k$ -Algebra.
- (b) (E. Noether) Angenommen,  $\text{char } k$  sei kein Teiler von  $|G|!$ . Ist  $m = |G|$ , so wird  $k[\mathfrak{X}]^G$  von Elementen vom Grad  $\leq m$  erzeugt.

**Beweis**

- (a) Sei  $S := k[\mathfrak{X}]^G$  (graduierte Unter algebra von  $k[\mathfrak{X}]$ ).  
 $S_+ = \bigoplus_{i>0} S_i$ ,  $I := S_+ k[\mathfrak{X}]$  (Ideal in  $k[\mathfrak{X}]$ )  $\Rightarrow I$  ist endlich erzeugt (da  $k[\mathfrak{X}]$  noethersch ist).  
 Somit enthält auch das Erzeugendensystem  $\{s \in S_+ \mid s \text{ ist homogen}\}$  von  $I$  eine endliche Teilmenge, die  $I$  erzeugt (denn wannimmer ein Ideal  $J$  eines Ringes  $R$  endlich erzeugt ist, enthält jedes Erzeugendensystem von  $J$  eine endliche Teilmenge, die  $J$  erzeugt).  
 Seien also  $f_1, \dots, f_r \in S_+$  homogene Erzeuger von  $I$ . Sei  $S' := k[f_1, \dots, f_r] \subseteq S$ .

**Beh.:**  $S = S'$ .

**Bew.:** Zeige mit Induktion:  $S_d \subset S'$  für jedes  $d \geq 0$ .

$d = 0$ :  $S_0 = k = S'_0$ .

$d \geq 1$ : Sei  $f \in S_d$ . Dann ist  $f \in S_+ \subseteq I \Rightarrow f = \sum_{i=1}^r g_i f_i$  mit  $g_i \in k[\mathfrak{X}]_{d-d_i}$ ,  $d_i = \deg(f_i) \Rightarrow \deg(g_i) < d$ .

Jetzt definieren wir die „Mittelung“: Die Abbildung  $\varphi : k[\mathfrak{X}] \rightarrow S$ ,  $h \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \sigma(h)$  ist eine  $S$ -lineare, graderhaltende Projektion.

$\Rightarrow$  Wegen  $f \in S_+ \subset S$  ist  $f = \varphi(f) = \sum_{i=1}^r \varphi(g_i) f_i$  (da  $f = \sum_{i=1}^r g_i f_i$ ) mit  $\varphi(g_i) \in S$ ,  $\deg(\varphi(g_i)) < d$ .

Also nach Induktionsvoraussetzung  $\varphi(g_i) \in S' \Rightarrow f \in S'$ .

Damit ist induktiv gezeigt, daß  $S_d \subset S'$  für jedes  $d \geq 0$  ist. Somit ist  $S = \sum_{d \geq 0} S_d \subset \sum_{d \geq 0} S' = S' \Rightarrow k[f_1, \dots, f_r] = S' = S = k[\mathfrak{X}]^G$ , was zu zeigen war.

Bevor wir den Beweis mit Teil (b) fortsetzen, fügen wir ein Beispiel ein:

**Beispiele**

$S_n$  operiert auf  $k[X_1, \dots, X_n]$  durch  $\sigma(X_i) := X_{\sigma(i)}$ . Die Elemente von  $k[X_1, \dots, X_n]^{S_n}$  sind die symmetrischen Polynome.

**Beh.1:**

$k[X_1, \dots, X_n]^{S_n}$  wird (als  $k$ -Algebra) erzeugt von den „elementarsymmetrischen“ Polynomen:

$$s_1 := X_1 + \dots + X_n$$

$$s_2 := X_1 X_2 + X_1 X_3 + \dots + X_{n-1} X_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_i X_j$$

$$s_3 := \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} X_i X_j X_k$$

$\vdots$

$$s_n := X_1 \cdot \dots \cdot X_n$$

(dies gilt für Körper jeglicher Charakteristik, und sogar allgemeiner für kommutative Ringe).

**Beh.2:**  $k[X_1, \dots, X_n]^{S_n}$  wird erzeugt von den Potenzsummen

$f_k := \sum_{i=1}^n X_i^k$ ,  $k = 1, \dots, n$  wenn  $\text{char } k$  kein Teiler von  $n$  ist. (Man bemerke, dass  $f_1 = s_1 = \sum X_i$ .)

**Bemerkung**

Die Abbildung  $\varphi : k[\mathfrak{X}] \rightarrow k[\mathfrak{X}]^G$ ,  $f \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \sigma(f)$  ist  $k$ -lineare (und sogar  $k[\mathfrak{X}]^G$ -lineare) graderhaltende Projektion.

**Beweis**

- (b) Für jedes  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n$  setze  $X^\nu := X_1^{\nu_1} \cdot \dots \cdot X_n^{\nu_n}$  und  $|\nu| := \sum \nu_i$ . Sei  $\tilde{S}$  die von den  $\varphi(X^\nu)$ ,  $|\nu| \leq |G|$  erzeugte Unter algebra von  $k[\mathfrak{X}]^G$ .

Zu zeigen:  $\varphi(X^\nu) \in \tilde{S}$  für alle  $\nu \in \mathbb{N}^n$ .

Wir definieren Hilfspolynome in  $2n$  Variablen: Für jedes  $d \geq 0$  sei  $F_d := \sum_{\sigma \in G} \underbrace{\left( \sum_{i=1}^n \sigma(X_i) Y_i \right)^d}_{=: Z_\sigma} \in k[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n]$ .

Für jedes  $\sigma \in G$  sei  $Z_\sigma = \sum_{i=1}^n \sigma(X_i) Y_i$ . Dann ist also  $F_d = \sum_{\sigma \in G} Z_\sigma^d$ . Schreiben wir  $G$  in der Form  $G = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ , mit  $|G| = m$ , so wird hieraus  $F_d = \sum_{i=1}^m Z_i^d$ , wobei  $Z_j := Z_{\sigma_j}$ .

Umformungen: Sei  $\gamma_\nu = \frac{d!}{\nu_1! \dots \nu_n!}$  für jedes  $\nu \in \mathbb{N}^n$  mit  $|\nu| = d$ . Jedes  $\sigma \in G$  erfüllt dann  $Z_\sigma^d = \left( \sum_{i=1}^n \sigma(X_i) Y_i \right)^d = \sum_{|\nu|=d} \gamma_\nu \sigma(X^\nu) Y^\nu$ . Aus  $F_d = \sum_{\sigma \in G} Z_\sigma^d$  wird mithin

$$(1) \quad F_d = \sum_{\sigma \in G} \sum_{|\nu|=d} \gamma_\nu \sigma(X^\nu) Y^\nu = \sum_{|\nu|=d} \gamma_\nu \left( \sum_{\sigma \in G} \sigma(X^\nu) Y^\nu \right) = \sum_{|\nu|=d} \gamma_\nu m \varphi(X^\nu) Y^\nu.$$

Sei nun  $d \geq 0$  beliebig. Doch nach Beh.2 wird der Polynomring  $k[W_1, \dots, W_m]^{S_m}$  (wobei die  $W_i$  neue Variablen sind) erzeugt von den  $m$  Potenzsummen  $p_j := \sum_{i=1}^m W_i^j$  für  $j = 1, 2, \dots, m$ . Also muß das Polynom  $\sum_{i=1}^m W_i^d$  ein Polynom in diesen  $m$  Potenzsummen  $p_j$  sein (da es in  $k[W_1, \dots, W_m]^{S_m}$  liegt). Es gibt also für jedes  $\mu \in \mathbb{N}^m$  mit  $\sum_{i=1}^m i\mu_i = d$  ein Skalar  $a_\mu \in k$ , so daß die Gleichung  $\sum_{i=1}^m W_i^d = \sum_{\mu \in \mathbb{N}^m} a_\mu p_1^{\mu_1} \cdot \dots \cdot p_m^{\mu_m}$  gilt, wobei die Summe (aus Homogenitätsgründen) sich nur über alle  $\mu \in \mathbb{N}^m$  mit  $\sum_{i=1}^m i\mu_i = d$  erstreckt. Setzen wir in dieser Gleichung die  $m$  Terme  $Z_1, \dots, Z_m$  für die  $m$  Variablen  $W_1, \dots, W_m$  ein, so erhalten wir

$$F_d = \sum_{\mu \in \mathbb{N}^m} a_\mu F_1^{\mu_1} \cdot \dots \cdot F_m^{\mu_m}$$

(denn durch die Einsetzung wird  $\sum_{i=1}^m W_i^d$  zu  $\sum_{i=1}^m Z_i^d = F_d$  ausgewertet, und  $p_j = \sum_{i=1}^m W_i^j$  zu  $\sum_{i=1}^m Z_i^j = F_j$  für jedes  $j$ ). Mit anderen Worten:

$$(2) \quad F_d = \sum_{\mu \in \mathbb{N}^m} a_\mu \prod_{j=1}^m F_j^{\mu_j} \stackrel{(1)}{=} \sum_{\mu \in \mathbb{N}^m} a_\mu \prod_{j=1}^m \left( \sum_{|\nu|=j} \gamma_\nu m \varphi(X^\nu) Y^\nu \right)^{\mu_j} \stackrel{\text{sortieren nach}}{\stackrel{\text{Potenzen von } Y}}{=} \sum_{\lambda \in \mathbb{N}^m} P_\lambda(X) Y^\lambda \text{ mit } P_\lambda \in \tilde{S}.$$

Für jedes  $\lambda \in \mathbb{N}^m$  können wir nun zwischen (1) und (2) die Koeffizienten vor  $Y^\lambda$  vergleichen (wobei wir  $X_1, \dots, X_n$  als Konstanten betrachten), und erhalten hierdurch:

$$P_\lambda = \begin{cases} 0 & , |\lambda| \neq d \\ \gamma_\lambda m \varphi(X^\lambda) & , |\lambda| = d \end{cases}$$

Hieraus folgt  $\varphi(X^\lambda) \in \tilde{S}$  für alle  $\lambda \in \mathbb{N}^m$ , die  $|\lambda| = d$  erfüllen. Da  $d$  beliebig gewählt war, ist also  $\varphi(X^\lambda) \in \tilde{S}$  für alle  $\lambda \in \mathbb{N}^m$ . Das gesamte Bild von  $\varphi$  ist also in  $\tilde{S}$  enthalten. Da das Bild von  $\varphi$  aber  $k[\mathfrak{X}]^G$  ist, heißt dies, dass  $k[\mathfrak{X}]^G$  in  $\tilde{S}$  enthalten, d. h., von Elementen vom Grad  $\leq m$  erzeugt ist.

**Beispiele**

Sei  $n = 2$ ; der Kürze halber bezeichnen wir dann die beiden Variablen  $X_1$  und  $X_2$  mit  $X$  und  $Y$ . Sei nun  $G = \langle \sigma \rangle$ , wobei  $\sigma$  durch  $\sigma(X) = Y$  und  $\sigma(Y) = -X$  definiert ist. Dann ist  $G \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ . Durchrechnen aller Monome mit Grad  $\leq |G|$ :

$f = id(f)$	$\sigma(f)$	$\sigma^2(f)$	$\sigma^3(f)$	$\sum_{\tau \in G} \tau(f) = 4\varphi(f)$
$X$	$Y$	$-X$	$-Y$	0
$Y$	$-X$	$-Y$	$X$	0
$X^2$	$Y^2$	$X^2$	$Y^2$	$2(X^2 + Y^2)$
$Y^2$	$X^2$	$Y^2$	$X^2$	$2(X^2 + Y^2)$
$XY$	$-YX$	$XY$	$-YX$	0
$X^3$	$Y^3$	$-X^3$	$-Y^3$	0
$Y^3$	$-X^3$	$-Y^3$	$X^3$	0
$X^2Y$	$-XY^2$	$-X^2Y$	$XY^2$	0
$XY^2$	$X^2Y$	$-XY^2$	$-X^2Y$	0
$X^4$	$Y^4$	$X^4$	$Y^4$	$2(X^4 + Y^4)$
$XY^3$	$-X^3Y$	$XY^3$	$-X^3Y$	$2XY(Y^2 - X^2)$
$X^2Y^2$	$X^2Y^2$	$X^2Y^2$	$X^2Y^2$	$4(X^2Y^2)$

$\Rightarrow k[X, Y]^G$  wird erzeugt von  $I_1 = X^2 + Y^2$ ,  $I_2 = X^2Y^2$ ,  $I_3 = XY(X^2 - Y^2)$  (und  $I_4 = X^4 + Y^4 = I_1^2 - 2I_2$ ). Zwischen  $I_1, I_2, I_3$  besteht die Gleichung  $I_3^2 = I_2(X^4 + Y^4 - 2X^2Y^2) = I_1(I_1^2 - 4I_2)$

## §6 Nakayama, Krull und Artin-Rees

### Definition + Bemerkung 2.20

Sei  $R$  ein Ring.

(a)

$$\mathcal{J}(R) := \bigcap_{\mathfrak{m} \text{ maximales Ideal in } R} \mathfrak{m}$$

heißt **Jacobson-Radikal** von  $R$ .

(b)  $\mathcal{J}(R)$  ist Radikalideal.

(c) Für jedes  $a \in \mathcal{J}(R)$  ist  $1 - a$  eine Einheit in  $R$ .

### Beweis

(b) Sei  $x \in R$ ,  $x^n \in \mathcal{J}(R)$ ; zu zeigen:  $x \in \mathcal{J}(R)$ .

Sei  $\mathfrak{m}$  maximales Ideal von  $R$ , dann ist  $x^n \in \mathfrak{m} \xrightarrow{\text{prim}} x \in \mathfrak{m} \Rightarrow x \in \mathcal{J}(R)$

(c) Ist  $1 - a \notin R^\times$ , so gibt es ein maximales Ideal  $\mathfrak{m}$  mit  $1 - a \in \mathfrak{m}$ ,  
aber:  $a$  ist auch  $\in \mathfrak{m}$ , also auch  $1 = 1 - a + a \in \mathfrak{m} \Rightarrow$  Widerspruch.

### Beispiele

$$\mathcal{J}(\mathbb{Z}) = 0, \quad \mathcal{J}(k[X]) = 0$$

$R$  lokaler Ring  $\Rightarrow \mathcal{J}(R) = \mathfrak{m}$  (es gibt nur ein maximales Ideal in  $R$ )

### Satz 8 (Lemma von Nakayama)

Sei  $R$  ein Ring,  $I \subseteq \mathcal{J}(R)$  ein Ideal,  $M$  ein endlich erzeugbarer  $R$ -Modul,  $N \subseteq M$  ein Untermodul.

Dann gilt:

$$\text{Ist } M = I \cdot M + N, \text{ so ist } N = M$$

Speziell: Ist  $M = I \cdot M \Rightarrow M = 0$ .

### Beweis

Sei  $M = I \cdot M + N \Rightarrow M/N = (I \cdot M)/N = I \cdot M/N$ , also ohne Einschränkung  $N = 0$ .

Annahme:  $M \neq 0$

Dann sei  $x_1, \dots, x_n$  ein minimales Erzeugendensystem von  $M$ , also  $M' := \langle x_2, \dots, x_n \rangle \subsetneq M$ .

Nach Voraussetzung ist  $M = I \cdot M$ , also  $x_1 \in I \cdot M \Rightarrow \exists a_1, \dots, a_n \in I$  mit  $x_1 = \sum_{i=1}^n a_i x_i = a_1 x_1 + \underbrace{a_2 x_2 + \dots + a_n x_n}_{\in M'} \Rightarrow x_1 \underbrace{(1 - a_1)}_{\in R^\times \text{ 2.20 (c)}} \in M' \Rightarrow x_1 \in M'$ . Widerspruch.

**Folgerung 2.21**

$R, I, M$  wie in Satz 8.

Dann gilt für  $x_1, \dots, x_n \in M$ :

$$x_1, \dots, x_n \text{ erzeugt } M \Leftrightarrow \overline{x_1}, \dots, \overline{x_n} \text{ erzeugen } \overline{M} = M/IM$$

**Beweis**

„ $\Rightarrow$ “: klar.

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $N$  der von  $x_1, \dots, x_n$  erzeugte Untermodul von  $M$ . Dann ist  $M = N + I \cdot M \xrightarrow{\text{Satz 8}} M = N$ .

**Beispiele**

$R$  lokaler Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$ .  $M = \mathfrak{m}$ ,  $I = \mathfrak{m}$ .

Falls  $\mathfrak{m}$  endlich erzeugt (dies gilt z.B. falls  $R$  noethersch ist):  $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m} \Rightarrow \mathfrak{m} = 0$ , also  $R$  Körper.

**Satz 9 (Durchschnittssatz von Krull)**

Sei  $R$  noethersch,  $M$  endlich erzeugbarer  $R$ -Modul,  $I \subseteq R$  Ideal.

Dann gilt für

$$N := \bigcap_{n \geq 0} I^n M \quad : \quad I \cdot N = N$$

**Folgerung 2.22**

- (a) Ist in Satz 9  $I \subseteq \mathcal{J}(R)$ , so ist  $N = 0$ .
- (b) Ist  $R$  nullteilerfrei, so ist  $\bigcap_{n \geq 0} I^n = 0$ , falls  $I \neq R$ .

**Beweis**

- (a) klar.
- (b) Sei  $\mathfrak{m}$  ein maximales Ideal mit  $I \subseteq \mathfrak{m}$ .  $R_{\mathfrak{m}}$  die Lokalisierung von  $R$  nach  $\mathfrak{m}$ .  
 $R_{\mathfrak{m}}$  ist noethersch, lokal, also  $\mathcal{J}(R_{\mathfrak{m}}) = \mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}$ .  
 $i : R \rightarrow R_{\mathfrak{m}}, a \mapsto \frac{a}{1}$  ist injektiv, da  $R$  nullteilerfrei.

Dann ist  $i(\bigcap_{n \geq 0} I^n) \subseteq \bigcap_{n \geq 0} i(I^n) \subseteq \bigcap_{n \geq 0} (\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}})^n \stackrel{(a)}{=} 0$ .

Da  $i$  injektiv ist, folgt  $\bigcap_{n \geq 0} I^n = 0$ .

**Proposition 2.23 (Artin-Rees)**

Sei  $R$  noethersch,  $I \subseteq R$  Ideal,  $M$  endlich erzeugbarer  $R$ -Modul,  $N \subseteq M$  Untermodul.

Dann gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $n \geq n_0$  gilt:

$$I^n M \cap N = I^{n-n_0} (I^{n_0} M \cap N)$$

**Beweis (Satz 9)**

Setze in Prop. 2.23 (Artin-Rees)  $N = \bigcap_{n \geq 0} I^n M$ . Betrachte das  $n_0$  aus Prop. 2.23 (Artin-Rees).

$$\begin{aligned} \text{Dann ist } N &= \bigcap_{n \geq 0} I^n M = I^{n_0+1} M \cap \bigcap_{n \geq 0} I^n M = I^{n_0+1} M \cap N \\ &\stackrel{\text{Artin-Rees}}{=} I(I^{n_0} M \cap N) = I(I^{n_0} M \cap \bigcap_{n \geq 0} I^n M) = I \cdot \bigcap_{n \geq 0} I^n M = I \cdot N \end{aligned}$$

**Beweis (Prop. 2.23)**

Führe Hilfsgrößen ein:

$R' := \bigoplus_{n \geq 0} I^n$  ist graduierter Ring,  $R'_0 = R$  ist noethersch,  $I$  ist endlich erzeugt,

$\Rightarrow R'$  ist noethersch (als endlich erzeugte  $R$ -Algebra),

$M' := \bigoplus_{n \geq 0} I^n M$  ist graduierter, endlich erzeugter  $R'$ -Modul,

$N' := \bigoplus_{n \geq 0} \underbrace{I^n M \cap N}_{=: N'_n}$  ist graduierter  $R'$ -Modul, Untermodul von  $M'$ , also auch endlich erzeug-

bar.  $N'$  werde erzeugt von den homogenen Elementen  $x_1, \dots, x_r$  mit  $x_i \in N'_{n_i}$ .

Für  $n \geq n_0 := \max\{n_1, \dots, n_r\}$  ist dann  $N'_{n+1} = \{\sum_{i=1}^r a_i x_i : a_i \in R'_{n+1-n_i} = I^{n+1-n_i}\}$ .

$I \cdot N'_n = I \cdot \{\sum_{i=1}^r a_i x_i : a_i \in R'_{n-n_i} = I^{n-n_i}\} = \{\sum_{i=1}^r \tilde{a}_i x_i : \tilde{a}_i \in I \cdot I^{n-n_i} = I^{n+1-n_i}\} = N'_{n+1}$ .

Mit Induktion folgt die Behauptung.

**Beispiele**

- 1)  $R = \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  ist noethersch, aber nicht nullteilerfrei.

Sei  $I$  das von  $e_1 = (1, 0)$  erzeugte Ideal,  $I^2 = (e_1^2) = (e_1) = I$  ( $e_1$  ist „idempotent“)

$e \in R$  heißt idempotent, wenn  $e^2 = e$  ist. Dann ist  $(e - 1)e = 0$ .

Frage: was ist  $\mathbb{Z}^2$  lokalisiert nach  $I$ ?

Antwort:  $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})_I = \mathbb{Q}$ .

- 2)  $R = \mathcal{C}^\infty(-1, 1)$ ,  $I = \{f \in R : f(0) = 0\}$ .  $R/I = \mathbb{C}$  (oder  $\mathbb{R}$ ).

$I$  ist Hauptideal, erzeugt von  $f(x) = x$ .

$\bigcap I^n = ?$  z.B.  $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \in \bigcap I^n$ .

$R$  ist nicht noethersch!

- 3)  $R = k[X, Y]$ ,  $I = (X, Y)$ ,  $k$  algebraisch abgeschlossen.

$R' = R \oplus I \oplus I^2 \oplus \dots = \bigoplus_{n \geq 0} I^n = R[u, v] / (Xv - Yu)$ .

Was sind die maximalen homogenen Ideale in  $R'$ , die nicht ganz  $R'_+$  enthalten?

Typ 1: maximale Ideale in  $R$ ,  $\neq (X, Y) : (X - a, Y - b)$  mit  $(a, b) \neq (0, 0)$

Typ 2:  $(X, Y, \alpha u + \beta v)$ ,  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$

## §7 Krull-Dimension

**Definition 2.24**

Sei  $R$  ein Ring.

- (a) Eine Folge  $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$  von Primidealen in  $R$  heißt **Primidealkette** zu  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_n$  der Länge  $n$ , wenn  $\mathfrak{p}_{i-1} \subsetneq \mathfrak{p}_i$  für  $i = 1, \dots, n$ .
- (b) Für ein Primideal  $\mathfrak{p} \subset R$  heißt

$$h(\mathfrak{p}) := \sup\{n \in \mathbb{N} : \text{es gibt Primidealkette der Länge } n \text{ zu } \mathfrak{p}\}$$

die **Höhe** von  $\mathfrak{p}$ .

- (c)  $\dim R := \sup\{h(\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \text{ Primideal in } R\}$  heißt **Krull-Dimension** von  $R$ .

**Beispiele**

- (a)  $R = k$  Körper:  $\dim k = 0$
- (b)  $R = \mathbb{Z}$ :  $\dim \mathbb{Z} = 1$
- (c)  $R = k[X]$ :  $\dim k[X] = 1$



- (d)  $R = k[X, Y]$ :  $\dim k[X, Y] = 2$   
 $\geq 2$  ist klar, da  $(0) \subsetneq (X) \subsetneq (X, Y)$ . Aber warum  $= 2$ ?

**Bemerkung 2.25**

Sei  $R$  ein nullteilerfreier Ring. Dann gilt:

- (a) Sind  $p, q$  Primelemente,  $p \neq 0 \neq q$  mit  $(p) \subseteq (q)$ , so ist  $(p) = (q)$ .  
 (b) Ist  $R$  Hauptidealring, so ist  $R$  Körper oder  $\dim(R) = 1$

**Beweis**

- (a)  $(p) \subseteq (q) \Rightarrow p \in (q)$ , d.h.  $p = q \cdot r$  für ein  $r \in R$ .  
 Da  $R$  nullteilerfrei, ist  $p$  irreduzibel, also  $r \in R^\times \Rightarrow (p) = (q)$   
 (b)  $\dim R \leq 1$  nach (a). Sei  $R$  kein Körper, also gibt es ein  $p \in R$  ( $p \neq 0$ ) mit  $p \notin R^\times$ .  
 Da  $R$  nullteilerfrei, ist  $(0)$  Primideal;  $p$  ist in einem maximalen Ideal  $\mathfrak{m}$  enthalten ( $\mathfrak{m} = (q)$ )  
 $\Rightarrow (0) \subsetneq \mathfrak{m}$  ist Kette der Länge 1  $\Rightarrow \dim(R) \geq 1 \Rightarrow \dim(R) = 1$

**Satz 10**

Sei  $S/R$  eine ganze Ringerweiterung. Dann gilt:

- (a) Zu jedem Primideal  $\mathfrak{p}$  in  $R$  gibt es ein Primideal  $\mathfrak{P}$  in  $S$  mit  $\mathfrak{P} \cap R = \mathfrak{p}$   
 (b) Zu jeder Primidealkette  $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_n$  in  $R$  gibt es eine Primidealkette  $\mathfrak{P}_0 \subsetneq \mathfrak{P}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{P}_n$  in  $S$  mit  $\mathfrak{P}_i \cap R = \mathfrak{p}_i$  ( $i = 0, \dots, n$ )  
 (c)  $\dim R = \dim S$

**Beweis**

- (a) **Beh. 1:**  $\mathfrak{p} \cdot S \cap R = \mathfrak{p}$

Dann sei  $N := R \setminus \mathfrak{p}$  und  $\mathcal{P} := \{I \subseteq S \text{ Ideal} : I \cap N = \emptyset, \mathfrak{p} \cdot S \subseteq I\}$

Nach Beh. 1 ist  $\mathcal{P} \neq \emptyset$ . Nach Zorn gibt es ein maximales Element  $\mathfrak{P}$  in  $\mathcal{P}$ . Die Aussage folgt also aus Beh. 2.:

**Beh. 2:**  $\mathfrak{P}$  ist Primideal.

**Bew. 2:** Seien  $b_1, b_2 \in S \setminus \mathfrak{P}$  mit  $b_1 \cdot b_2 \in \mathfrak{P}$ . Dann sind  $\mathfrak{P} + (b_1)$  und  $\mathfrak{P} + (b_2)$  nicht in  $\mathcal{P}$ . Es gibt also  $s_i \in S$  und  $p_i \in \mathfrak{p}$  ( $i = 1, 2$ ) mit  $p_i + s_i \cdot b_i \in N$ .  $\Rightarrow (p_1 + s_1 b_1)(p_2 + s_2 b_2) \in N \cap \mathfrak{P} = \emptyset$ . Widerspruch.

**Bew. 1:** Sei  $b \in \mathfrak{p} \cdot S \cap R$ ,  $b = p_1 t_1 + \dots + p_k t_k$  mit  $p_i \in \mathfrak{p}, t_i \in S$ . Da  $S$  ganz ist über  $R$ , ist  $S' := R[t_1, \dots, t_k] \subseteq S$  endlich erzeugbarer  $R$ -Modul.

Seien  $s_1, \dots, s_n$   $R$ -Modul Erzeuger von  $S'$ . Für jedes  $i$  hat  $b \cdot s_i$  eine Darstellung  $b \cdot s_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} s_k$  mit  $a_{ik} \in \mathfrak{p}$  (weil  $b \in \mathfrak{p} \cdot S'$ ).

Es folgt:  $b$  ist Nullstelle eines Polynoms vom Grad  $n$  mit Koeffizienten in  $\mathfrak{p}$ :

$$b^n + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i b^i}_{\in \mathfrak{p}} = 0, \alpha_i \in \mathfrak{p}$$

Nach Voraussetzung ist  $b \in R$ :  $b^n \in \mathfrak{p} \Rightarrow b \in \mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{p} \cdot S \cap R \subseteq \mathfrak{p}$ .

- (b) Induktion über  $n$ :  $n = 0$  ist (a).  $n \geq 1$ :

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Kette  $\mathfrak{P}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{P}_{n-1}$  in  $S$  mit  $\mathfrak{P}_i \cap R = \mathfrak{p}_i$  ( $i = 0, \dots, n-1$ ).

Sei  $S' := S/\mathfrak{P}_{n-1}$ ,  $R' := R/\mathfrak{p}_{n-1}$ . Dann ist  $S'/R'$  ganze Ringerweiterung.

Nach (a) gibt es in  $S'$  ein Primideal  $\mathfrak{P}'_n$  mit  $\mathfrak{P}'_n \cap R' = \mathfrak{p}'_n := \mathfrak{p}_n/\mathfrak{p}_{n-1}$ .

Dann gilt für  $\mathfrak{P}_n := \text{pr}^{-1}(\mathfrak{P}'_n)$  ( $\text{pr} : S \rightarrow S'$  kanonische Projektion):

$\mathfrak{P}_n \cap R = \mathfrak{p}_n$  und  $\mathfrak{P}_n \neq \mathfrak{P}_{n-1}$ .

(c) Aus (b) folgt:  $\dim S \geq \dim R$ . Es bleibt zu zeigen:  $\dim S \leq \dim R$ .

Sei  $\mathfrak{P}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{P}_n$  Kette in  $S$ ,  $\mathfrak{p}_i := \mathfrak{P}_i \cap R$ ,  $i = 0, \dots, n$ .

klar:  $\mathfrak{p}_i$  ist Primideal in  $R$ ,  $\mathfrak{p}_{i-1} \subseteq \mathfrak{p}_i$ . Noch zu zeigen:  $\mathfrak{p}_{i-1} \neq \mathfrak{p}_i$  für alle  $i$ .

Gehe über zu  $R/\mathfrak{p}_{i-1}$  und  $S/\mathfrak{P}_{i-1}$ , also ohne Einschränkung  $\mathfrak{p}_{i-1} = (0)$  und  $\mathfrak{P}_{i-1} = (0)$ .

**Annahme:**  $\mathfrak{p}_i = (0)$

Sei  $b \in \mathfrak{P}_i \setminus \{0\}$ .  $b$  ist ganz über  $R$ :  $b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \dots + a_1b + a_0 = 0$ .

Sei  $n$  der minimale Grad einer solchen Gleichung.

Es ist  $a_0 = -b(b^{n-1} + a_{n-1}b^{n-2} + \dots + a_1) \in R \cap \mathfrak{P}_i = \mathfrak{p}_i = (0)$ .

$\Rightarrow 0 = -b(b^{n-1} + a_{n-1}b^{n-2} + \dots + a_1)$

Da  $S$  nullteilerfrei ist, muss gelten:  $b^{n-1} + a_{n-1}b^{n-2} + \dots + a_1 = 0$ .

Widerspruch zur Wahl von  $n$ .

### Folgerung 2.26

Sei  $S/R$  ganze Ringerweiterung,  $\mathfrak{p}$  bzw.  $\mathfrak{P}$  Primideale in  $R$  bzw.  $S$ . Ist  $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap R$ , so gilt:

$$\mathfrak{p} \text{ maximal} \iff \mathfrak{P} \text{ maximal}$$

### Beweis

„ $\Rightarrow$ “: Sei  $\mathfrak{P}'$  maximales Ideal in  $S$  mit  $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{P}'$ . Dann ist  $\mathfrak{P}' \cap R = \mathfrak{p}$  weil  $\mathfrak{p}$  maximal  $\Rightarrow \mathfrak{P}' = \mathfrak{P}$ .  
Nach dem Beweis von Teil (c) des Satzes.

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $\mathfrak{p}'$  maximales Ideal mit  $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$ . Nach (b) gibt es ein Primideal  $\mathfrak{P}'$  in  $S$  mit  $\mathfrak{P}' \cap R = \mathfrak{p}'$  und  $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{P}'$ .  
 $\mathfrak{P}' \text{ maximal} \implies \mathfrak{P}' = \mathfrak{P} \Rightarrow \mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$ .

### Satz 11

Sei  $k$  Körper,  $A$  endlich erzeugbare  $k$ -Algebra.

- (a) In  $A$  gibt es algebraisch unabhängige Elemente  $x_1, \dots, x_d$  (für ein  $d \geq 0$ ), sodass  $A$  ganz ist über  $k[x_1, \dots, x_d]$ . [Die Algebra  $k[x_1, \dots, x_d]$  ist dann isomorph zur Polynomalgebra  $k[X_1, \dots, X_d]$ , da  $x_1, \dots, x_d$  algebraisch unabhängig sind. Ferner ist dann  $A$  als  $k[x_1, \dots, x_d]$ -Modul endlich erzeugbar, da als Algebra endlich erzeugbar und ganz.]
- (b) Ist  $I \subseteq A$  ein echtes Ideal, so können in a) die  $x_i$  so gewählt werden, dass  $I \cap k[x_1, \dots, x_d] = (x_{\delta+1}, \dots, x_d)$  für ein  $\delta \leq d$ .
- (c)  $\dim k[x_1, \dots, x_d] = d$  ( $\Rightarrow \dim A = d$ )

### Beweis

(c) „ $\geq$ “: klar.

„ $\leq$ “: Sei  $0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_m$  Primidealkette in  $A$ . Ohne Einschränkung (Satz 10) sei  $A = k[x_1, \dots, x_n]$ .

Nach (b) existiert eine Einbettung  $B := k[y_1, \dots, y_d] \hookrightarrow A$  mit  $\mathfrak{p}_1 \cap k[y_1, \dots, y_d] = (y_{\delta+1}, \dots, y_d)$ .

**Beh.:**  $\delta \leq d - 1$  (d.h.  $\mathfrak{p}_1 \cap k[y_1, \dots, y_d] \neq \{0\}$ )

Denn: Sonst  $A$  ganz über  $B \Rightarrow \mathfrak{p}_1 = 0$  (Satz 10, Beweis Teil (c)).

Sei nun  $A_1 := A/\mathfrak{p}_1$ ,  $B_1 := B/(\mathfrak{p}_1 \cap B) \cong k[y_1, \dots, y_\delta]$ .  $A_1$  ist ganz über  $B_1$ , also ist nach Satz 10 (c)  $\dim A_1 = \dim B_1 \stackrel{\text{I.V.}}{=} \delta$

Weiter ist  $0 = \mathfrak{p}_1/\mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2/\mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_m/\mathfrak{p}_1$  Primidealkette in  $A_1$ .  
 $\Rightarrow m - 1 \leq \delta \leq d - 1 \Rightarrow m \leq d$

- (a) Sei
- $A = k[a_1, \dots, a_n]$
- (endliches Erzeugendensystem)

Induktion über  $n$ : $n = 1$ :  $A = k[a]$ ; ist  $a$  transzendent, so ist  $A \cong k[X]$ . Sonst:  $A \cong k[X]/(f)$  für ein irreduzibles  $f \in k[X]$ , also endliche Körpererweiterung von  $k$ . $n > 1$ : Sind  $a_1, \dots, a_n$  algebraisch unabhängig, so ist  $A \cong k[X_1, \dots, X_n]$ . Andernfalls gibt es  $F \in k[X_1, \dots, X_n]$  mit  $F(a_1, \dots, a_n) = 0$ .**1. Fall:**  $F = X_n^m + \sum_{i=0}^{m-1} g_i X_n^i$  für ein  $m \geq 1$  und  $g_i \in k[X_1, \dots, X_{n-1}]$ .Aus  $F(a_1, \dots, a_n) = 0$  folgt  $a_n$  ganz über  $k[a_1, \dots, a_{n-1}] =: A'$ . Nach Induktionsvoraussetzung existieren algebraisch unabhängige Elemente  $x_1, \dots, x_d$  in  $k[a_1, \dots, a_{n-1}]$ , sodass  $A'$  ganz über  $k[x_1, \dots, x_d]$ .  $A$  ist also ganz über  $k[x_1, \dots, x_d]$ , da  $A = A'[a_n]$ .**2. Fall:**  $F$  beliebig,  $F = \sum_{i=0}^m F_i$  mit  $F_i$  homogen vom Grad  $i$ .Ersetze  $a_i$  durch  $b_i := a_i - \lambda_i a_n$  ( $i = 1, \dots, n-1$ , mit  $\lambda_i \in k$  „geeignet“). Dann sind  $b_1, \dots, b_{n-1}, a_n$  auch  $k$ -Algebra-Erzeuger von  $A$ . Das Monom  $a_1^{\nu_1} \cdots a_n^{\nu_n}$  geht über in

$$a_n^{\nu_n} \prod_{i=1}^{n-1} (b_i + \lambda_i a_n)^{\nu_i} = a_n^{\nu_n} \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i^{\nu_i} a_n^{\nu_i} + \text{Terme niedriger Ordnung in } a_n$$

$$\Rightarrow F_m(a_1, \dots, a_n) = F_m(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 1) \cdot a_n^m + \text{Terme niedriger Ordnung in } a_n$$

$$\Rightarrow F(a_1, \dots, a_n) = F_m(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 1) \cdot a_n^m + \text{Terme niedriger Ordnung in } a_n$$

Ist  $F_m(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 1) \neq 0$ , so weiter wie in Fall 1.Ist  $k$  unendlich, so kann man immer  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  finden, sodass  $F_m(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 1) \neq 0$ .Ist  $k$  endlich, so hilft es,  $a_i$  durch  $b_i = a_i - a_n^{\mu_i}$  zu ersetzen.

- (b) Ohne Einschränkung sei
- $A = k[x_1, \dots, x_d]$
- (betrachte
- $I' = I \cap k[x_1, \dots, x_d]$
- ).

**1. Fall:**  $I = (f)$  Hauptideal,  $f \neq 0$ .Setze  $y_d := f$ ,  $y_i = x_i - \lambda_i x_d$  für geeignete  $\lambda_i \in k$ .Dann ist  $f - y_d = 0$  normiertes Polynom in  $x_d$  über  $k[y_1, \dots, y_d]$  (vgl. (a))**Beh.:**  $I \cap k[y_1, \dots, y_d] = (y_d)$ Denn: Sei  $g \in I \cap k[y_1, \dots, y_d]$ , d.h.  $g = h \cdot f$  für ein  $h \in k[x_1, \dots, x_d]$ .  $h$  ist ganz über  $k[y_2, \dots, y_d] \Rightarrow h^m + b_{m-1}h^{m-1} + \dots + b_1h + b_0 = 0$  ( $m \geq 1$ ,  $b_i \in k[y_2, \dots, y_d]$ )  $\Rightarrow$   

$$g^m + \underbrace{b_{m-1}fg^{m-1} + \dots + b_1f^{m-1}g + b_0f^m}_{=y_d \cdots} = 0$$
 $y_d$  teilt also  $g^m$ , d.h.  $g^m \in (y_d) \xrightarrow{\text{prim}} g \in (y_d)$ **2. Fall:** Sei  $I$  beliebig. Induktion über  $d$ : $d = 1$ :  $A = k[X] \Rightarrow$  jedes Ideal ist Hauptideal. $d > 1$ : Sei  $f \in I$ ,  $f \neq 0$ .Dann gibt es nach Fall 1 eine Einbettung  $k[y_1, \dots, y_d] \hookrightarrow A$  mit  $f = y_d$ . $I' := I \cap k[y_1, \dots, y_{d-1}]$ Nach Induktionsvoraussetzung gibt es Einbettung  $k[z_1, \dots, z_{d-1}] \hookrightarrow k[y_1, \dots, y_{d-1}]$  mit  $I' \cap k[z_1, \dots, z_{d-1}] \subset (z_{\delta+1}, \dots, z_{d-1})$  für ein  $\delta \leq d-1$ .

$$\Rightarrow I \cap k[z_1, \dots, z_{d-1}, z_d] = (z_{\delta+1}, \dots, z_{d-1}, y_d)$$

Folgerung: Für jede endlich erzeugte nullteilerfreie  $k$ -Algebra  $A$  über einem Körper  $k$  gilt:

$$\text{trdeg}(\text{Quot}(A)) = \dim A$$

Dabei bezeichnet  $\text{trdeg}(K)$  (der **Transzendenzgrad** von  $K$  über  $k$ ) die Maximalzahl über  $k$  algebraisch unabhängiger Elemente in  $K$ , wenn  $K$  eine Körpererweiterung von  $k$  ist.

## §8 Das Spektrum eines Rings

### Definition + Bemerkung 2.27

Sei  $R$  ein Ring.

- a)  $\text{Spec}(R) := \{\mathfrak{p} \subset R : \mathfrak{p} \text{ Primideal}\}$  heißt **Spektrum** von  $R$ .
- b) Eine Teilmenge  $V \subset \text{Spec}(R)$  heißt **abgeschlossen**, wenn es ein Ideal  $I \subseteq R$  gibt mit

$$V = V(I) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) : I \subseteq \mathfrak{p}\}$$

- c) Die abgeschlossenen Teilmengen von  $\text{Spec}(R)$  definieren eine Topologie auf  $\text{Spec}(R)$ , sie heißt die **Zariski-Topologie**.

### Beispiele

$$R = \mathbb{Z}: \text{Spec}(\mathbb{Z}) = \{(0)\} \cup \{(p) : p \text{ Primzahl}\}$$

$V((p)) = (p) \Rightarrow (p)$  ist abgeschlossen in  $\text{Spec}(R)$  für jede Primzahl  $p$ .

$$V((0)) = \text{Spec}(\mathbb{Z}).$$

$I = n\mathbb{Z} \Rightarrow V(I) = \{(p_1), \dots, (p_k)\}$ , wenn  $n = p_1^{\nu_1} \cdots p_k^{\nu_k}$  die Primfaktorzerlegung von  $n$  ist.

$$\overline{\{(0)\}} = \text{Spec}(\mathbb{Z})$$

$$R = k[X]: \overline{\{(0)\}} = \text{Spec}(R).$$

$f \in k[X]$  irreduzibel  $\Rightarrow (f)$  ist abgeschlossener Punkt.

$$k := \mathbb{C}: f \text{ irreduzibel} \Leftrightarrow f(X) = X - c \text{ für ein } c \in \mathbb{C}. \Rightarrow \text{Spec}(\mathbb{C}[X]) = \mathbb{C} \cup \{(0)\}$$

### Beweis

c) Sei  $U \subseteq \text{Spec}(R)$  offen  $:\Leftrightarrow \text{Spec}(R) \setminus U$  abgeschlossen.

Zu zeigen:

- (i)  $\emptyset$  ist abgeschlossen:  $\emptyset = V(R)$ .  
 $\text{Spec}(R)$  ist abgeschlossen:  $\text{Spec}(R) = V((0))$ .
- (ii) endliche Vereinigung von abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.

Zeige dazu:  $V(I_1) \cup \dots \cup V(I_n) = V(I_1 \cap \dots \cap I_n) = V(I_1 \cdot \dots \cdot I_n)$

**denn:** Ohne Einschränkung sei  $n = 2$ :

„ $\subseteq$ “ Sei  $\mathfrak{p} \in V(I_1) \Rightarrow I_1 \subseteq \mathfrak{p} \Rightarrow I_1 \cap I_2 \subseteq \mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{p} \in V(I_1 \cap I_2)$ .

„ $\supseteq$ “ Sei  $\mathfrak{p} \in V(I_1 \cap I_2)$ ,  $\mathfrak{p} \notin V(I_1)$ .

Dann gibt es ein  $a \in I_1 \setminus \mathfrak{p}$ . Sei  $b \in I_2$ .

Dann ist  $a \cdot b \in I_1 \cap I_2 \subseteq \mathfrak{p}$ .  $\xrightarrow[\text{Vor.}]{\substack{\mathfrak{p} \text{ prim} \\ a \notin \mathfrak{p}}} b \in \mathfrak{p} \Rightarrow I_2 \subseteq \mathfrak{p}$ , d.h.  $\mathfrak{p} \in V(I_2)$ .

- (iii) beliebiger Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen. Zeige dazu:

$$\bigcap_{\nu} V(I_{\nu}) = V\left(\sum_{\nu} I_{\nu}\right)$$

**denn:**  $\mathfrak{p} \in \bigcap_{\nu} V(I_{\nu}) \Leftrightarrow I_{\nu} \subseteq \mathfrak{p} \forall \nu \Leftrightarrow \sum_{\nu} I_{\nu} \subseteq \mathfrak{p}$ .

**Bemerkung 2.28**

- a) Für Ideale  $I_1 \subseteq I_2$  ist  $V(I_1) \supseteq V(I_2)$ .  
 b) Für jedes Ideal  $I \subseteq R$  ist  $V(I) = V(\sqrt{I}) = V(\text{Rad}(I))$

**Beweis**

Sei  $\mathfrak{p}$  Primideal mit  $I \subseteq \mathfrak{p}$ ,  $f \in \sqrt{I}$ , dann ist  $f^n \in I$  für ein  $n \geq 1$ .  $\Rightarrow f^n \in \mathfrak{p} \xRightarrow{\mathfrak{p} \text{ prim}} f \in \mathfrak{p} \Rightarrow \sqrt{I} \subseteq \mathfrak{p}$ .

- c) Die  $U(f) := \text{Spec}(R) - V((f))$ ,  $f \in R \setminus \sqrt{(0)}$  bilden eine Basis der Zariski-Topologie.

**Beweis**

$$\sqrt{(0)} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)} \mathfrak{p} \quad (\text{Ü7A2b})$$

Also ist  $V(f) = \text{Spec}(R) \Leftrightarrow f \in \sqrt{(0)}$ . Für  $f \in R \setminus \sqrt{(0)}$  ist also  $U(f) \neq \emptyset$ .

Zu zeigen: Ist  $U \subseteq \text{Spec}(R)$  offen,  $U \neq \emptyset$ , so gibt es ein  $f \in R \setminus \sqrt{(0)}$  mit  $U(f) \subseteq U$ .

Sei also  $U = \text{Spec}(R) - V(I)$  mit  $I \not\subseteq \sqrt{(0)}$ . Für  $f \in I \setminus \sqrt{(0)}$  ist  $(f) \subseteq I$ , also  $V(f) \supseteq V(I) \Rightarrow U(f) \subseteq U$ .

**Zusatz:**  $U(f) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) : f \notin \mathfrak{p}\}$ .

**Definition + Proposition 2.29**

- a) Ein topologischer Raum  $X$  heißt **irreduzibel**, wenn er nicht Vereinigung zweier echter abgeschlossener Teilmengen ist.

**Beispiele**

$$R = \mathbb{C}[X, Y],$$

$$V((X)) = \{(X)\} \cup \{(X, Y - c), c \in \mathbb{C}\}$$

$$V((Y)) = \{(Y)\} \cup \{(X - a, Y), a \in \mathbb{C}\}.$$

$$V(X \cdot Y) = V((X)) \cup V((Y)) = \text{Achsenkreuz und } (X), (Y).$$

- b) Eine abgeschlossene Teilmenge  $V(I) \subseteq \text{Spec}(R)$  ist genau dann irreduzibel, wenn  $I$  ein Primideal ist.

**Beweis**

„ $\Rightarrow$ “ Seien  $f_1, f_2 \in R$ ,  $f_1 \cdot f_2 \in I$  und  $f_1 \notin I$ . Dann ist  $V(f_1) \not\subseteq V := V(I)$ .

$$\text{Andererseits: } V \subseteq V(f_1 \cdot f_2) = V(f_1) \cup V(f_2)$$

$$\Rightarrow V = (V \cap V(f_1)) \cup (V \cap V(f_2))$$

$$\xRightarrow{V \text{ irreduz.}} V \subseteq V(f_2) \Rightarrow f_2 \in I.$$

„ $\Leftarrow$ “ Sei  $V(I) = V = V(I_1) \cup V(I_2)$  und  $V(I_1) \neq V$

d.h.  $I_1 \not\subseteq I$ . Sei  $f_1 \in I_1 \setminus I$

$$\text{Andererseits ist } V(I_1 \cdot I_2) = V(I_1) \cup V(I_2) = V \Rightarrow I_1 \cdot I_2 \subseteq \sqrt{I} = I$$

Für jedes  $f \in I_2$  ist also  $f_1 \cdot f \in I \xRightarrow{f_1 \notin I} f \in I \Rightarrow I_2 \subseteq I \Rightarrow V(I) \subseteq V(I_2)$ .

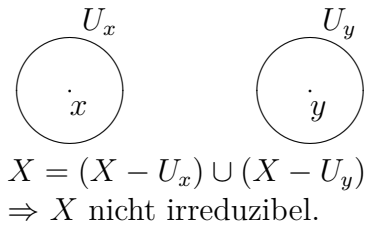
**Folgerung 2.30**

Ist  $\text{Spec}(R)$  hausdorffsch, so ist  $\dim R = 0$

**Beweis**

$\text{Spec}(R)$  hausdorffsch,  $\Rightarrow$  jede irreduzible Teilmenge von  $\text{Spec}(R)$  ist einelementig.

- $\Rightarrow$  Für jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $R$  ist  $V(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$
- $\Rightarrow$  jedes Primideal in  $R$  ist maximales Ideal.
- $\Rightarrow \dim R = 0$



**Definition + Bemerkung 2.31**

- a) Für eine beliebige Teilmenge  $V$  von  $\text{Spec}(R)$  heißt

$$I(V) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V} \mathfrak{p}$$

das **Verschwindungsideal** von  $V$ .

- b) Für jedes Ideal  $I$  von  $R$  gilt:

$$I(V(I)) = \sqrt{I}$$

**Beweis**

Nach Ü7A2d ist  $\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \supseteq I \\ \mathfrak{p} \text{ Primideal}}} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(I)} \mathfrak{p}$

**Folgerung**

Ist  $V(I_1) = V(I_2)$ , so ist  $\sqrt{I_1} = \sqrt{I_2}$ .

**Definition + Proposition 2.32**

- a) Sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine irreduzible Teilmenge  $V \subseteq X$  heißt **irreduzible Komponente**, wenn  $V$  maximale irreduzible Teilmenge ist bzgl.  $\subseteq$ .
- b) Jeder topologischer Raum ist Vereinigung seiner irreduziblen Komponenten.
- c) Ist  $R$  noethersch, so ist jede abgeschlossene Teilmenge von  $V$  von  $\text{Spec}(R)$  endliche Vereinigung von irreduziblen Komponenten von  $V$ ; diese sind eindeutig bestimmt.

**Beweis**

- b) Zu zeigen: jedes  $x \in X$  ist in einer irreduziblen Komponente von  $X$  enthalten.

Sei  $\mathcal{C}_x := \{U \subseteq X : x \in U, U \text{ irreduzibel}\}$ .

$\mathcal{C}_x \neq \emptyset$ , da  $\{x\} \in \mathcal{C}_x$ .

Seien  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{C}_x$  mit  $U_i \subseteq U_{i+1}$  für alle  $i$ .

Sei  $U := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ , zu zeigen:  $U \in \mathcal{C}_x$ , d.h.  $U$  irreduzibel.

**denn:** Sei  $U = V \cup W$ ,  $V, W$  abgeschlossene Teilmengen von  $U$ . Dann ist  $U_i = (U_i \cap V) \cup (U_i \cap W)$  für jedes  $i \in \mathbb{N}$

Da  $U_i$  irreduzibel, ist (ohne Einschränkung)  $U_i \cap V = U_i$  für unendliche viele  $i$ .

$\Rightarrow U_i \subseteq V \Rightarrow U = \bigcup_{\text{diese } i} U_i \subseteq V \Rightarrow U \subseteq V$ .

$\Rightarrow U$  irreduzibel.

Mit dem Zornschen Lemma folgt:  $\mathcal{C}_x$  enthält ein maximales Element.

c) Ohne Einschränkung sei  $V = \text{Spec}(R)$ : Sei  $V = V(I)$  für ein Ideal  $I$ .

$$V(I) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) : I \subseteq \mathfrak{p}\} \xleftrightarrow{\text{bijektiv}} \{\mathfrak{p}' \in \text{Spec}(R/I)\}$$

Aus 2.34b wird folgen: Die Abbildung ist ein Homöomorphismus.

Sei  $\mathfrak{V}$  die Menge der abgeschlossenen Teilmengen von  $\text{Spec}(R)$ , die nicht Vereinigung von endlich vielen irreduziblen Teilmengen sind. Weiter sei  $J := \{I(V) : V \in \mathfrak{V}\}$

Zu zeigen:  $\mathfrak{V} = \emptyset$

Anderenfalls ist auch  $J \neq \emptyset$ . Da  $R$  noethersch ist, enthält  $J$  ein maximales Element  $I(V_0)$  für ein  $V_0 \in \mathfrak{V}$ .

$V_0$  ist nicht irreduzibel.

Also gibt es abgeschlossene Teilmengen  $V_1, V_2$  von  $V_0$  mit  $V_0 = V_1 \cup V_2$ ,  $V_1 \neq V_0 \neq V_2$ .

$V_i \notin \mathfrak{V}$  für  $i = 1, 2$ , da  $I(V_0) \subsetneq I(V_1)$

Also lassen sich  $V_1$  und  $V_2$  als endliche Vereinigung von irreduziblen Teilmengen schreiben.

$\Rightarrow V_0$  lässt sich auch als endliche Vereinigung von irreduziblen Teilmengen schreiben.

Widerspruch zur Wahl von  $V_0$ .

$\Rightarrow \mathfrak{V} = \emptyset$ .

Sei also  $V = V_0 \cup \dots \cup V_r$  mit irreduziblen Teilmengen  $V_i$ .

Noch zu zeigen:

- die  $V_i$  sind (ohne Einschränkung) irreduzible Komponenten.
- Eindeutigkeit

denn:

Aus b) folgt: jedes  $V_i$  ist in einer irreduziblen Komponente  $\widetilde{V}_i$  von  $V$  enthalten, also  $V = \bigcup_{i=0}^r \widetilde{V}_i$ ; ohne Einschränkung alle  $\widetilde{V}_i$  verschieden.

Sei  $W$  irreduzible Komponente von  $V$ .

$\Rightarrow W = \bigcup_{i=0}^r (W \cap \widetilde{V}_i) \xrightarrow{W \text{ irreduz.}} \text{es gibt ein } i \text{ mit } W \subseteq \widetilde{V}_i$

$\xrightarrow{W \text{ Komponente}} W = \widetilde{V}_i$

### Folgerung 2.33

Ein noetherscher Ring hat nur endlich viele minimale Primideale.

### Beweis

Sei  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$  minimales Primideal.  $\Leftrightarrow V(\mathfrak{p}) \subseteq \text{Spec}(R)$  irreduzible Komponente.

### Proposition 2.34

Sei  $\alpha : R \rightarrow S$  Ringhomomorphismus.

a) Die Abbildung  $\varphi_\alpha : \text{Spec}(S) \rightarrow \text{Spec}(R)$ ,  $\mathfrak{p} \mapsto \alpha^{-1}(\mathfrak{p})$  ist stetig.

Eleganter:  $R \rightarrow \text{Spec}(R)$  ist kontravarianter Funktor Ringe  $\rightarrow$  top. Räume

b) Ist  $\alpha$  surjektiv, so ist  $\varphi_\alpha$  injektiv und  $\varphi_\alpha(\text{Spec}(S)) = V(\text{Kern}(\alpha))$

### Beweis

a)  $\alpha^{-1}(\mathfrak{p})$  ist Primideal:

Seien  $a, b \in R$  mit  $a \cdot b \in \alpha^{-1}(\mathfrak{p}) \Rightarrow \alpha(a \cdot b) \in \mathfrak{p} \xrightarrow{\text{OE}} \alpha(a) \in \mathfrak{p} \Rightarrow a \in \alpha^{-1}(\mathfrak{p})$

$\varphi_\alpha$  **stetig**: Zu zeigen: für jede abgeschlossene Teilmenge  $V = V(I)$  von  $\text{Spec}(R)$  ist  $\varphi_\alpha^{-1}(V)$  abgeschlossen in  $\text{Spec}(S)$ .

$$\varphi_\alpha^{-1}(V(I)) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(S) : I \subseteq \alpha^{-1}(\mathfrak{p})\} = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(S) : \alpha(I) \subseteq \mathfrak{p}\} = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(S) : \alpha(I) \cdot S \subseteq \mathfrak{p}\} = V(\alpha(I) \cdot S)$$

- b) Seien  $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in \text{Spec}(S)$  mit  $\varphi_\alpha(\mathfrak{p}) = \varphi_\alpha(\mathfrak{p}')$   
 $\Rightarrow \alpha^{-1}(\mathfrak{p}) = \alpha^{-1}(\mathfrak{p}') \Rightarrow \alpha(\alpha^{-1}(\mathfrak{p})) = \alpha(\alpha^{-1}(\mathfrak{p}')) \xRightarrow[\alpha \text{ surj.}]{} \mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$

## §9 Diskrete Bewertungsringe

### Definition 2.35

Sei  $K$  ein Körper.

Ein surjektiver Gruppenhomomorphismus  $v : K^\times \rightarrow \mathbb{Z}$  heißt **diskrete Bewertung**, wenn für alle  $x, y \in K^\times$  mit  $x + y \in K^\times$  gilt:

$$v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$$

Anmerkungen: Manchmal setzt man  $v(0) = \infty$ .

Da  $v$  Gruppenhomomorphismus ist, gilt:  $v(x \cdot y) = v(x) + v(y)$  und  $v(1) = 0$ .

### Beispiele

- 1.)  $K = \mathbb{Q}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$  Primzahl.

Für  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$  schreibe  $a = p^n \cdot a'$ ,  $b = p^m \cdot b'$  mit  $p \nmid a'$ ,  $p \nmid b'$ .

Setze  $v_p(\frac{a}{b}) := n - m$ . Und es gilt:  $a + b \stackrel{\text{OE}}{=} p^{n \leq m} p^n \cdot (a' + p^{m-n} b')$ .

$v_p$  heißt  **$p$ -adische Bewertung** auf  $\mathbb{Q}$ . Es gilt:

- $v_p(a) \geq 0 \forall a \in \mathbb{Z}$ .  $v_3(\frac{7}{2}) = 0$ ,  $v_3(\frac{9}{2}) = 2$ .
- $v_p(a + b) = \min\{v_p(a), v_p(b)\}$ , falls  $v_p(a) \neq v_p(b)$ .

- 2.)  $K = k(X) = \text{Quot}(k[X])$  ( $k$  Körper).

Für  $f = \frac{f_1}{f_2}$  sei  $v(f) = v(f_1) - v(f_2)$ .

- a)  $v(f_1) = \text{ord}_a(f_1)$  für festes  $a \in k$  (Nullstellenordnung).

Es gilt  $v_a(f_1 \cdot f_2) = v_a(f_1) + v_a(f_2)$

$$v_a(f_1 + f_2) = v_a((X - a)^{n_1} \cdot g_1 + (X - a)^{n_2} \cdot g_2)$$

$$\stackrel{\text{OE}}{=} \stackrel{n_1 \leq n_2}{=} v_a((X - a)^{n_1} (g_1 + (X - a)^{n_2 - n_1} \cdot g_2))$$

- b) Für  $f \in k[X]$  sei  $v(f) = -\deg(f)$ .

### Bemerkung 2.36

Sei  $v : K^\times \rightarrow \mathbb{Z}$  diskrete Bewertung. Sei  $\rho \in \mathbb{R}$  mit  $0 < \rho < 1$ . Dann ist die Abbildung

$$|\cdot|_v : K \rightarrow \mathbb{R}, |x|_v = \begin{cases} 0 & : x = 0 \\ \rho^{v(x)} & : x \in K^\times \end{cases}$$

ein **Absolutbetrag** auf  $K$ , d.h. eine Abbildung  $K \rightarrow \mathbb{R}$  mit:

- (i)  $|x|_v = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (ii)  $|x \cdot y|_v = |x|_v \cdot |y|_v$
- (iii)  $|x + y|_v \leq |x|_v + |y|_v$



In unserer Situation gilt sogar:

$$|x + y|_v \leq \max\{|x|_v, |y|_v\} \leq |x|_v + |y|_v \Rightarrow \text{„nichtarchimedischer Betrag“}$$

Weiter ist  $d(x, y) := |x - y|_v$  eine Metrik auf  $K$ .

### Zur Geometrie

Kreis um  $a$  mit Radius  $r$ :  $K_r = \{b \in K : d(a, b) \leq r\}$ .

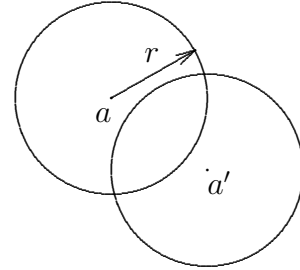
### Jeder Kreis hat mehrere Mittelpunkte:

**Beh.:** Für jedes  $a' \in K_r$  ist  $K_r(a') = K_r(a)$

**Bew.:** Sei  $b \in K_r(a)$ , also  $d(b, a) \leq r$ .

Dreiecksungleichung:

$$d(b, a') \leq \max\{\underbrace{d(b, a)}_{\leq r}, \underbrace{d(a, a')}_{\leq r}\} \leq r \Rightarrow b \in K_r(a')$$



### Es gibt kein allgemeines Dreieck:

Ist  $d(a, b) < d(a, c)$ , also  $|a - b| < |c - a|$ , so ist  $|c - b| = |a - b + c - a| = \max\{|a - b|, |c - a|\} = |c - a|$   
 $\Rightarrow$  jedes Dreieck ist gleichschenkelig.

### Erinnerung

$\mathbb{R}$  entsteht aus  $\mathbb{Q}$  durch „Vervollständigung“:

$C :=$  Ring der Cauchy-Folgen von  $\mathbb{Q}$  (bzgl.  $|\cdot|$ )

$N :=$  Ideal der Nullfolgen in  $C$  (maximales Ideal)

$\mathbb{R} := C/N$

Analog:

$C_p :=$  Ring der Cauchy-Folgen von  $\mathbb{Q}$  (bzgl.  $|\cdot|_p := |\cdot|_{v_p}$ )

$N_p :=$  Ideal der Nullfolgen in  $C_p$  (maximales Ideal)

$\mathbb{Q}_p := C_p/N_p$  „**Körper der  $p$ -adischen Zahlen**“

### Bemerkung 2.37

Ist  $v$  diskrete Bewertung auf  $K^\times$ , so ist  $\mathcal{O}_v := \{x \in K^\times : v(x) \geq 0\} \cup \{0\}$  ein Ring, genauer: ein lokaler Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}_v := \{x \in K^\times : v(x) > 0\} \cup \{0\}$ .

### Beweis

$\mathcal{O}_v$  ist Ring, da  $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\} \geq 0$  für alle  $x, y \in \mathcal{O}_v$ .

$\mathfrak{m}_v$  ist Ideal: Ist  $x \in \mathfrak{m}_v$ ,  $r \in \mathcal{O}_v$ , so ist  $v(x \cdot r) = v(x) + v(r) > 0$ .

Für  $x \in \mathcal{O}_v \setminus \mathfrak{m}_v = \{x \in K : v(x) = 0\}$  ist  $v(\frac{1}{x}) = -v(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \in \mathcal{O}_v \setminus \mathfrak{m}_v \Rightarrow x \in \mathcal{O}_v^\times$ .

### Definition + Proposition 2.38

- Ein nullteilerfreier Ring  $R$  heißt **diskreter Bewertungsring**, wenn es eine diskrete Bewertung  $v$  von  $K = \text{Quot}(R)$  gibt mit  $R = \mathcal{O}_v$ .
- Jeder diskrete Bewertungsring ist noethersch, lokal und eindimensional.

### Beweis

Zeige mehr:  $R$  ist Hauptidealring.

$R$  ist lokal  $\checkmark$ , sei  $\mathfrak{m}$  das maximale Ideal in  $R$ .

**Beh.1:**  $\mathfrak{m}$  ist Hauptideal.

**Bew.1:** Sei  $t \in R$  mit  $v(t) = 1 \Rightarrow t \in \mathfrak{m}$ . Sei  $x \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$ ,  $y = \frac{x}{t^{v(x)}} \Rightarrow v(y) = v(x) - v(t^{v(x)}) = 0$   
 $\Rightarrow y \in R^\times \Rightarrow x = t^{v(x)} \cdot y \in (t)$ .

**Beh.2:** Jedes Ideal  $\neq 0$  in  $R$  ist von der Form  $\mathfrak{m}^n$  für ein  $n \geq 0$ .

**Bew.2:** Sei  $I \subseteq R$  ein Ideal,  $n := \min\{v(x) : x \in I \setminus \{0\}\}$ . Sei  $x_0 \in I$  mit  $v(x_0) = n \Rightarrow v(\frac{x_0}{t^n}) = 0 \Rightarrow t^n = \frac{t^n}{x_0} \cdot x_0 \in I \Rightarrow \mathfrak{m}^n = (t^n) \subseteq I$ .

Umgekehrt:  $x_0 = t^n \cdot \frac{x_0}{t^n} \in (t^n)$ .

Sei  $x \in I \Rightarrow v(\frac{x}{t^n}) = v(x) - n \geq 0 \Rightarrow x = t^n \cdot \frac{x}{t^n} \in (t^n) \Rightarrow I \subseteq \mathfrak{m}^n$ .

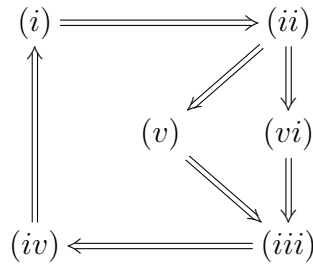
### Satz 12 (Diskrete Bewertungsringe)

Sei  $R$  ein lokaler noetherscher Ring der Dimension 1 mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$  und Restklassenkörper  $k = R/\mathfrak{m}$ .

Dann sind äquivalent:

- (i)  $R$  ist diskreter Bewertungsring
- (ii)  $R$  ist (nullteilerfreier) Hauptidealring
- (iii)  $R$  ist nullteilerfrei und  $\mathfrak{m}$  ist ein Hauptideal
- (iv) es gibt ein  $t \in R$ , sodass jedes  $x \in R \setminus \{0\}$  eine eindeutige Darstellung  $x = u \cdot t^n$  hat mit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u \in R^\times$
- (v)  $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$
- (vi)  $R$  ist normal

### Beweis



(i)  $\Rightarrow$  (ii) [Proposition 2.38](#)

(iv)  $\Rightarrow$  (i)

$R$  nullteilerfrei:

Annahme:  $u \cdot t^n \cdot v \cdot t^m = 0 = u \cdot v \cdot t^{n+m} \Rightarrow t^{n+m} = t^{n+m} + 0 = t^{n+m} + u \cdot v \cdot t^{n+m} = (1 + u \cdot v)t^{n+m} \xrightarrow{\text{Eind.}} 1 + u \cdot v = 1 \Rightarrow u \cdot v = 0 \Rightarrow$  Widerspruch zu  $u \cdot v \in R^\times$ .

Diskrete Bewertung:

Für  $a = u \cdot t^n \in R \setminus \{0\}$  setze  $v(a) = n$ . Für  $x = \frac{a}{b} \in K = \text{Quot}(R)$ ,  $a, b \in R \setminus \{0\}$  setze  $v(x) = v(a) - v(b)$ .

$v(x)$  wohldefiniert: Ist  $x = \frac{a'}{b'}$  mit  $a', b' \in R \setminus \{0\}$ , so ist  $a \cdot b' = a' \cdot b$ . Aus  $a = u \cdot t^n, b = v \cdot t^m, a' = u' \cdot t^{n'}, b' = v' \cdot t^{m'}$  folgt:  $u' \cdot v t^{n'+m} = u \cdot v' \cdot t^{n+m'} \xrightarrow{\text{Eind.}} n' + m = n + m' \Rightarrow n' - m' = n - m$ .

$v$  ist diskrete Bewertung:  $v(x \cdot y) = v(u \cdot t^n \cdot v \cdot t^m) = v(u \cdot v \cdot t^{n+m}) = n + m = v(x) + v(y)$ .

$v(x + y) \stackrel{m \leq n}{=} v(t^m \cdot (v + u \cdot t^{n-m})) \geq m = \min\{v(x), v(y)\}$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) Sei  $\mathfrak{m} = (t)$ . Sei  $x \in R \setminus \{0\}$ . Da  $R$  noethersch ist, ist  $\bigcap_{n \geq 0} \mathfrak{m}^n = (0)$  ([Folgerung 2.22](#)). Also gibt es ein (eindeutiges)  $n \geq 0$  mit  $x \in \mathfrak{m}^n \setminus \mathfrak{m}^{n+1} \Rightarrow \exists u \in R^\times$  mit  $x = u \cdot t^n$ .  $u$  ist eindeutig: Wäre  $u \cdot t^n = v \cdot t^n$ , so wäre  $(u - v) \cdot t^n = 0$ , also  $t$  Nullteiler  $\Rightarrow$  Widerspruch

(ii)  $\Rightarrow$  (v)  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  ist  $k$ -Vektorraum:  $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}^2$  und damit  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  sind  $R$ -Moduln. Für  $a \in \mathfrak{m}$  und  $x \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  ist  $a \cdot \bar{x} = \overline{a \cdot x} = 0$ , da  $a \cdot x \in \mathfrak{m}^2 \Rightarrow \bar{a} \cdot \bar{x}$  ist wohldefiniert für die Klasse  $\bar{a}$  von

$a$  in  $R/\mathfrak{m} = k$ .

Es ist  $\mathfrak{m}^2 \neq \mathfrak{m}$ , da  $\dim R = 1$  (und  $R$  noethersch)  $\Rightarrow \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \geq 1$ .

$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  wird von  $\bar{t}$  erzeugt (als  $R$ -Modul und damit auch als  $R/\mathfrak{m}$ -Modul)  $\Rightarrow \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \leq 1$   
 $\Rightarrow \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$ .

(v)  $\Rightarrow$  (iii) Sei  $t \in \mathfrak{m}$ , sodass  $\bar{t} \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  Erzeuger ist.

Mit Nakayama (Folgerung 2.21) folgt:  $t$  erzeugt  $\mathfrak{m}$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (vi) Jeder (nullteilerfreie) Hauptidealring ist faktoriell

$\Rightarrow R$  ist normal. (Bemerkung 2.10)

(vi)  $\Rightarrow$  (iii) Sei  $K = \text{Quot}(R)$ .

Sei  $\bar{\mathfrak{m}} := \{x \in K : x \cdot \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}\}$ ,  $\mathfrak{m}^{-1} := \{x \in K : x \cdot \mathfrak{m} \subseteq R\}$

Offensichtlich:  $R \subseteq \bar{\mathfrak{m}} \subseteq \mathfrak{m}^{-1}$

**Beh. 1:**

1.)  $\bar{\mathfrak{m}} = R$

2.)  $\mathfrak{m}^{-1} \neq R$

3.)  $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}^{-1} = R$  ( $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}^{-1}$  ist das von allen  $a \cdot x$ ,  $a \in \mathfrak{m}$ ,  $x \in \mathfrak{m}^{-1}$  erzeugte Ideal in  $R$ )

Dann sei  $t \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2 \Rightarrow t \cdot \mathfrak{m}^{-1} \subseteq R$  ist Ideal in  $R$ . Wäre  $t \cdot \mathfrak{m}^{-1} \subseteq \mathfrak{m}$ , so wäre  $(t) = t \cdot R \stackrel{3.)}{=} t \cdot \mathfrak{m}^{-1} \cdot \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}^2 \Rightarrow$  Widerspruch zu  $t \notin \mathfrak{m}^2$ . Also ist  $t \cdot \mathfrak{m}^{-1} = R$  und  $(t) \stackrel{3.)}{=} t \cdot \mathfrak{m}^{-1} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ .

**Bew. 3:** Aus  $R \subseteq \mathfrak{m}^{-1}$  folgt  $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}^{-1}$ . Wäre  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}^{-1}$ , so wäre  $\mathfrak{m}^{-1} \subseteq \bar{\mathfrak{m}} = R$  im Widerspruch zu Beh. 2.).

**Bew. 1:**  $\bar{\mathfrak{m}}$  ist Unterring von  $K$ .

Zeige:  $\bar{\mathfrak{m}}$  ist ganz über  $R$  (dann ist  $\bar{\mathfrak{m}} = R$ , da  $R$  normal).

Es genügt zu zeigen:  $\bar{\mathfrak{m}}$  ist endlich erzeugter  $R$ -Modul.

Für  $t \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$  ist  $t \cdot \bar{\mathfrak{m}} \subseteq R$ , also endlich erzeugt, da  $R$  noethersch. Als  $R$ -Modul sind  $\bar{\mathfrak{m}}$  und  $t \cdot \bar{\mathfrak{m}}$  isomorph.

**Bew. 2:** Sei  $t \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$

**Beh. 4:** Es gibt ein  $n \geq 1$  mit  $\mathfrak{m}^n \subseteq (t)$ .

Sei  $n$  in Beh.4 minimal,  $y \in \mathfrak{m}^{-1} \setminus (t)$ ,  $x := \frac{y}{t} \in K$ . Dann ist  $x \in \mathfrak{m}^{-1} : x \cdot \mathfrak{m} = \frac{y}{t} \cdot \mathfrak{m} \subseteq \frac{1}{t} \cdot \mathfrak{m}^n \subseteq R$ , aber  $x \notin R$ , sonst wäre  $y = x \cdot t \in (t) \Rightarrow$  Widerspruch.

**Bew. 4:**  $\sqrt{(t)} = \bigcap_{\mathfrak{p} \subset R, t \in \mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ .

Seien  $x_1, \dots, x_r$  Erzeuger von  $\mathfrak{m}$ ,  $\nu_i \in \mathbb{N}$  ( $i = 1, \dots, r$ ) mit  $x_i^{\nu_i} \in (t)$ .

Für  $N = 1 + \sum_{i=1}^r (\nu_i - 1)$  ist dann  $\mathfrak{m}^N \subseteq (t)$ , da  $\mathfrak{m}^N$  erzeugt wird von den  $x_1^{\nu_1} \cdot \dots \cdot x_r^{\nu_r}$  mit  $\sum \nu_i = N \Rightarrow \exists \nu_i = 1$ .

### Beispiele

$R = (k[X, Y]/(Y^2 - X^3 - X^2))_{(X, Y)}$  ist nullteilerfrei, eindimensional, lokal, noethersch aber *kein* diskreter Bewertungsring.

Denn: das maximale Ideal in  $R$  ist kein Hauptideal:

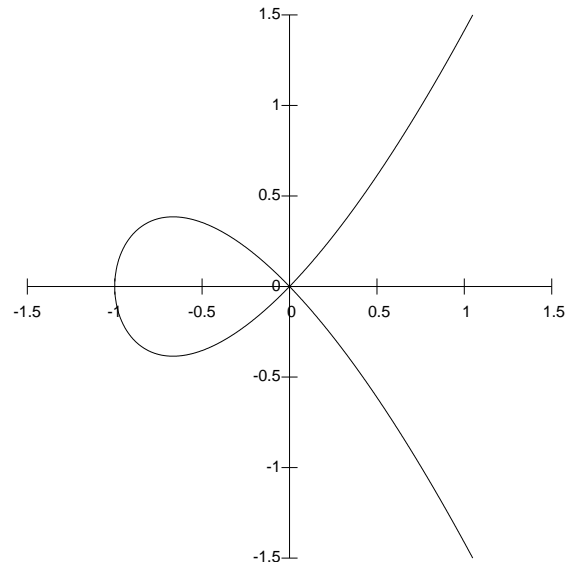
$\mathfrak{m} = (X, Y)$ ,  $f = Y^2 - X^2(X + 1) \in \mathfrak{m}^2$ .

Es gilt  $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 2$ , da  $X, Y$  linear unabhängig in  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ . Sei  $\mathfrak{M}$  das von  $X$  und  $Y$  in  $k[X, Y]$  erzeugte Ideal.  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = (\mathfrak{M}/(f))/(\mathfrak{M}^2/(f)) \cong \mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$

Geometrisch:

$V(f) = \{(x, y) \in k^2 : f(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in k^2 : y^2 = x^2(x + 1)\}$

Singularität in  $(0, 0) = (X, Y) \Rightarrow$  "Newton-Knoten".



## §10 Dedekindringe

### Definition 2.39

Ein nullteilerfreier Ring heißt **Dedekindring**, wenn er noethersch, normal und eindimensional ist.

### Beispiele

- 1)  $\mathbb{Z}$ ,  $k[X]$  ( $k$  Körper)
- 2) diskrete Bewertungsringe
- 3) Hauptidealringe (nullteilerfrei)
- 4) der ganze Abschluss  $\mathcal{O}_d$  von  $\mathbb{Z}$  in  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$  wobei  $d \in \mathbb{Z}$  quadratfrei.

$$\mathcal{O}_d = \begin{cases} \mathbb{Z}[\sqrt{d}] & d \not\equiv 1 \pmod{4} \\ \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}] & d \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}$$

Beobachtung: Es gibt Dedekindringe, die nicht faktoriell sind: Beispiel:  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ .  
 $(2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})).$

### Definition + Bemerkung 2.40

Sei  $R$  nullteilerfrei,  $K = \text{Quot}(R)$

- a) Ein  $R$ -Untermodul  $I \neq (0)$  von  $K$  heißt **gebrochenes Ideal** von  $R$ , wenn es ein  $a \in R \setminus \{0\}$  gibt mit  $a \cdot I \subseteq R$ . (Beispiel:  $(\frac{1}{n})$  ist gebrochenes Ideal von  $\mathbb{Z}$ , da  $n \cdot (\frac{1}{n}) \subseteq \mathbb{Z}$  mit  $R = \mathbb{Z}$ .)
- b) Für gebrochene Ideale  $I, J$  von  $R$  sei  $I \cdot J$  der von allen  $a \cdot b$ ,  $a \in I, b \in J$ , erzeugte  $R$ -Untermodul von  $K$ .
- c) Die gebrochenen Ideale von  $R$  bilden mit der Multiplikation aus b) ein kommutatives Monoid mit neutralem Element  $R$ .
- d) Die Einheiten in diesem Monoid heißen **invertierbare** (gebrochene) Ideale.  
d.h.  $I$  invertierbar  $\Leftrightarrow \exists I'$  mit  $I \cdot I' = R$ .

### Beispiele

- 0) Jedes von 0 verschiedene Ideal in  $R$  ist gebrochenes Ideal.

- 1) Jeder von 0 verschiedene endlich erzeugbare  $R$ -Untermodul von  $K$  ist gebrochenes Ideal.  
**denn:** Seien  $x_1 = \frac{a_1}{b_1}, \dots, x_n = \frac{a_n}{b_n}$  Erzeuger von  $M$  ( $a_i, b_i \in R$ )  $\Rightarrow$  für  $b = b_1 \cdot \dots \cdot b_n$  ist  $b \cdot M \subseteq R$ .
- 2) Ist  $I$  gebrochenes Ideal, so ist  $I^{-1} := \{x \in K : x \cdot I \subseteq R\}$  ebenfalls gebrochenes Ideal: für jedes  $a \in I$  ist  $a \cdot I^{-1} \subseteq R$ .  
 $I$  ist invertierbar  $\Leftrightarrow I \cdot I^{-1} = R$ .
- 3)  $R = k[X, Y]$ ,  $I = (X, Y) \Rightarrow I^{-1} = R$ .  
**denn:** für  $a = \frac{f}{g} \in I^{-1}$  muss gelten:  $a \cdot X \in R$ ,  $a \cdot Y \in R$ .
- 4) Jedes Hauptideal  $\neq (0)$  ist invertierbar:  $(a) \cdot (\frac{1}{a} \cdot R) = R$ .

**Bemerkung 2.41**

Jedes invertierbare Ideal von einem Integritätsbereich ist endlich erzeugbar (als  $R$ -Modul).

**Beweis**

Sei  $I$  invertierbar, also  $I \cdot I^{-1} = R$ , dann gibt es  $a_i \in I, b_i \in I^{-1}$  mit  $1 = \sum_{i=1}^n a_i b_i$

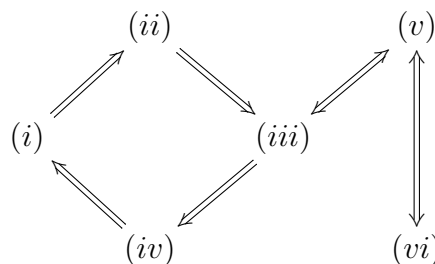
**Beh:**  $a_1, \dots, a_n$  erzeugen  $I$ .

**denn:** Sei  $a \in I \Rightarrow a = a \cdot 1 = a \cdot \sum_{i=1}^n a_i b_i = \sum_{i=1}^n a_i \underbrace{(a b_i)}_{\in R}$

**Satz 13 (Dedekindringe)**

Für einen nullteilerfreien Ring  $R$  sind äquivalent:

- (i)  $R$  ist Dedekindring oder Körper.
- (ii)  $R$  ist noethersch und  $R_{\mathfrak{p}}$  ist diskreter Bewertungsring für jedes Primideal  $\mathfrak{p} \neq (0)$  in  $R$ .
- (iii) Jedes Ideal  $I \neq (0)$  in  $R$  ist invertierbar.
- (iv) Die gebrochenen Ideal in  $R$  bilden eine Gruppe.
- (v) Jedes echte Ideal in  $R$  ist Produkt von endlich vielen Primidealen.
- (vi) Jedes echte Ideal besitzt eine eindeutige Darstellung als Produkt von endlich vielen Primidealen.

**Beweis****Beweisplan:**

**(i)  $\Rightarrow$  (ii) :**

Sei  $\mathfrak{p} \neq (0)$  Primideal im Dedekindring  $R$ .  $\Rightarrow R_{\mathfrak{p}}$  noethersch,  $\dim R_{\mathfrak{p}} = \text{lat}(\mathfrak{p}) = 1$ , da  $\dim R = 1$ .

$R_{\mathfrak{p}}$  normal: Sei  $a \in K = \text{Quot}(R) = \text{Quot}(R_{\mathfrak{p}})$  ganz über  $R_{\mathfrak{p}}$ .

Dann gibt es eine Gleichung:  $a^n + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b_i}{s_i} a^i = 0$  mit  $b_i \in R, s_i \in R \setminus \mathfrak{p}$

$\Rightarrow (s \cdot a)^n + \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{b}_i (sa)^i = 0$  mit  $\tilde{b}_i \in R, s := \prod_{i=0}^{n-1} s_i$

$\xRightarrow{R \text{ normal}} s \cdot a \in R \Rightarrow a = \frac{s \cdot a}{s} \in R_{\mathfrak{p}} \quad s \notin \mathfrak{p}$

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) :

Sei  $(0) \neq I \subset K$  gebrochenes Ideal,  $a \in R \setminus \{0\}$  mit  $a \cdot I \subseteq R$ .  $\Rightarrow a \cdot I$  invertierbar.  $\Rightarrow$   
 $R = (a \cdot I) \cdot I' = I \cdot (a \cdot I') \Rightarrow I$  ist invertierbar.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) :

Sei  $I \neq (0)$  Ideal in  $R$ .  $K = \text{Quot}(R)$ .  $I^{-1} := \{x \in K : x \cdot I \subseteq R\}$

Zu zeigen:  $I \cdot I^{-1} = R$ .

Annahme:  $I \cdot I^{-1} \subsetneq R$ :

Dann gibt es ein maximales Ideal  $\mathfrak{m}$  von  $R$  mit  $I \cdot I^{-1} \subseteq \mathfrak{m}$ .

$\Rightarrow R_{\mathfrak{m}}$  ist diskreter Bewertungsring.

$\Rightarrow I \cdot R_{\mathfrak{m}}$  ist Hauptideal, d.h.  $I \cdot R_{\mathfrak{m}} = \frac{a}{s} \cdot R_{\mathfrak{m}}$  für ein  $a \in I, s \in R \setminus \mathfrak{m}$

Seien  $b_1, \dots, b_n \in I$  Erzeuger ( $R$  ist noethersch).  $\Rightarrow \frac{b_i}{1} = \frac{a}{s} \cdot \frac{r_i}{s_i}$  für gewisse  $r_i \in R, s_i \in R \setminus \mathfrak{m}$

Sei  $t = s \cdot \prod_{i=1}^n s_i$ . Es gilt:  $t \in R \setminus \mathfrak{m}$ .

Für jedes  $i = 1, \dots, n$  ist  $\frac{t}{a} \cdot b_i = r_i \cdot s_i \cdot \dots \cdot \hat{s}_i \cdot \dots \cdot s_n \in R$ .

$\Rightarrow \frac{t}{a} \in I^{-1} \Rightarrow t = a \cdot \frac{t}{a} \in I \cdot I^{-1} \subseteq \mathfrak{m}$ . Widerspruch.

(iv)  $\Rightarrow$  (i) :

$R$  noethersch: Nach [Bemerkung 2.41](#) ist jedes invertierbare Ideal endlich erzeugbar.

$R$  normal: Sei  $x \in K$  ganz über  $R$ .  $\Rightarrow R[x]$  ist endlich erzeugbarer  $R$ -Modul, also gebrochenes Ideal (Beispiel 1).  $\Rightarrow R[x]$  ist invertierbar.

Da  $R[x]$  Ring ist, gilt  $R[x] \cdot R[x] = R[x]$ .  $\xRightarrow{R[x] \text{ invertierbar}} R[x] = R$  (neutrale Element).

$\Rightarrow x \in R$ .

$\dim R \leq 1$ : Sei  $\mathfrak{p} \neq (0)$  Primideal in  $R$ ,  $\mathfrak{m} \subseteq R$  maximales Ideal mit  $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$ .

$\Rightarrow \mathfrak{m}^{-1} \cdot \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}^{-1} \mathfrak{m} = R$  und  $\mathfrak{m} \cdot (\mathfrak{m}^{-1} \mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ .

$\xRightarrow{\mathfrak{p} \text{ Primideal}} \mathfrak{m} = \mathfrak{p} \text{ oder } \mathfrak{m}^{-1} \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}$ .

Falls  $\mathfrak{m}^{-1} \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p} \xRightarrow{\cdot \mathfrak{p}^{-1}} \mathfrak{m}^{-1} \subseteq R$ . Widerspruch (da sonst  $\mathfrak{m}^{-1} \cdot \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}$ )

(iii)  $\Rightarrow$  (v) :

Sei  $I \neq (0), I \neq R$  Ideal in  $R$ .

Setze  $I_0 := I$ .

Definiere induktiv:  $I_n$  für  $n \geq 1$ :

Ist  $I_{n-1} \neq R$ , so sei  $\mathfrak{m}_{n-1}$  maximales Ideal mit  $I_{n-1} \subseteq \mathfrak{m}_{n-1}$  und  $I_n := I_{n-1} \mathfrak{m}_{n-1}^{-1} \subseteq R$ .

Es ist  $I_{n-1} \subseteq I_n$

Wäre  $I_n = I_{n-1}$ , so wäre  $\mathfrak{m}_{n-1}^{-1} = R$ . Widerspruch zu  $\mathfrak{m}_{n-1}^{-1} \cdot \mathfrak{m}_{n-1} = R$ .

Da nach [2.41](#)  $R$  noethersch ist, wird die Kette  $I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots$  stationär.

$\Rightarrow \exists n$  mit  $R = I_n = I_{n-1} \mathfrak{m}_{n-1}^{-1} = I_{n-2} \mathfrak{m}_{n-2}^{-1} \mathfrak{m}_{n-1}^{-1} = \dots = I_0 \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \mathfrak{m}_i^{-1}$

$\Rightarrow I = I_0 = \prod_{i=0}^{n-1} \mathfrak{m}_i$

(v)  $\Rightarrow$  (vi) :

Sei  $\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n = \mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_m$  mit Primidealen  $\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_i$ . Zu zeigen:  $n = m$  und  $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_{\sigma(i)}$  für eine Permutation  $\sigma \in S_n$ :

Induktion über  $n$ :

$n = 1$ :  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_m \xRightarrow{\mathfrak{p} \text{ prim}} \exists i_0 \text{ mit } \mathfrak{q}_{i_0} \subseteq \mathfrak{p}$ . Umgekehrt ist  $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}_i$  für jedes  $i$ .  $\Rightarrow \mathfrak{p} = \mathfrak{q}_{i_0}$

$n > 1$ : Ohne Einschränkung  $\mathfrak{p}_1$  minimal bzgl.  $\subseteq$  in  $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$ .

Aus  $\prod \mathfrak{q}_i \subseteq \prod \mathfrak{p}_j \subseteq \mathfrak{q}_{i_1} \Rightarrow \exists j_0 \text{ mit } \mathfrak{p}_{j_0} \subseteq \mathfrak{q}_{i_0} \subseteq \mathfrak{p}_1 \xRightarrow{\mathfrak{p}_1 \text{ minimal}} \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{q}_{i_0} \xRightarrow{(iii)} \mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_n = \mathfrak{q}_1 \cdots \widehat{\mathfrak{q}_{i_0}} \cdots \mathfrak{q}_m \Rightarrow \text{Behauptung aus Induktionsvoraussetzung.}$

**(v)  $\Rightarrow$  (iii) :**

Sei  $I \neq (0)$ ,  $I = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r$  mit Primidealen  $\mathfrak{p}_i$ . Ist jedes  $\mathfrak{p}_i$  invertierbar, so ist  $I^{-1} = \mathfrak{p}_1^{-1} \cdots \mathfrak{p}_r^{-1}$  und  $I \cdot I^{-1} = R$ . Also ohne Einschränkung  $I = \mathfrak{p}$  Primideal.

Sei  $a \in \mathfrak{p} - \{0\}$ ,  $(a) = \mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_n$  mit Primidealen  $\mathfrak{q}_i \Rightarrow \mathfrak{q}_i \subseteq \mathfrak{p}$  für ein  $i$ .

$\mathfrak{q}_i$  ist invertierbar:  $\mathfrak{q}_i^{-1} = \frac{1}{a} \cdot R \cdot \mathfrak{q}_1 \cdots \widehat{\mathfrak{q}_i} \cdots \mathfrak{q}_n$

Es genügt also zu zeigen:  $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}$

**Beh. 1:** Jedes invertierbare Primideal  $\mathfrak{q}$  in  $R$  ist maximal.

**Bew. 1:** Ist  $\mathfrak{q}$  nicht maximal, so sei  $x \in R \setminus \mathfrak{q}$  mit  $\mathfrak{q} + (x) \neq R$ .

**Beh. 2:** Dann ist  $(\mathfrak{q} + (x))^2 = \mathfrak{q} + (x^2)$

Dann ist  $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q} + (x^2) \xRightarrow{\text{Beh. 2}} (\mathfrak{q} + (x))^2 \subseteq \mathfrak{q}^2 + (x) (*)$

Weiter ist  $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}^2 + \mathfrak{q} \cdot (x)$

**denn:** Sei  $b \in \mathfrak{q}$ , schreibe nach  $(*)$   $b = c + rx$  mit  $c = \mathfrak{q}^2, r \in R$ , dabei ist  $r \in \mathfrak{q}$ , da  $r \cdot x \in \mathfrak{q}$  und  $x \notin \mathfrak{q}$ .

$\Rightarrow \mathfrak{q} = \mathfrak{q}^2 + \mathfrak{q} \cdot (x)$  („ $\supseteq$ “ ist trivial)

$\Rightarrow \mathfrak{q} = \mathfrak{q}(\mathfrak{q} + (x)) \xRightarrow{\mathfrak{q} \text{ invertierbar}} R = \mathfrak{q} + (x)$  Widerspruch.

**Bew. 2:** „ $\subseteq$ “  $\checkmark$ , „ $\supseteq$ “

Schreibe beide Seiten als Produkt von Primidealen.

$\mathfrak{q} + (x) = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r$ ,  $\mathfrak{q} + (x^2) = \mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_s$ .

In  $R/\mathfrak{q}$  ist dann:  $(\bar{x}) = \bar{\mathfrak{p}}_1 \cdots \bar{\mathfrak{p}}_r$ ,  $(\bar{x})^2 = \bar{\mathfrak{q}}_1 \cdots \bar{\mathfrak{q}}_s = \bar{\mathfrak{p}}_1^2 \cdots \bar{\mathfrak{q}}_r^2$

$(\bar{x}), (\bar{x}^2)$  invertierbar.  $\Rightarrow \bar{\mathfrak{p}}_i, \bar{\mathfrak{q}}_j$  invertierbar.

„(iii) + (v) = (vi)“  $\bar{\mathfrak{q}}_i = \bar{\mathfrak{p}}_{\sigma(i)}^2 \Rightarrow \text{ohne Einschränkung } \mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i^2$ .

#### Satz 14

Sei  $R$  ein Dedekindring,  $K = \text{Quot}(R)$ ,  $L/K$  endliche separable Körpererweiterung.  $S$  der ganze Abschluß von  $R$  in  $L$ .

Dann ist  $S$  ein Dedekindring.

#### Beweis

$\dim S = 1$ : Folgt aus [Satz 10\(c\)](#)

$S$  normal:

Sei  $x \in L$  ganz über  $S$ , also  $x^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i x^i = 0$  mit  $a_i \in S$ . Sei  $S'$  der von  $R$  und  $a_1, \dots, a_{n-1}$  erzeugte Unterring von  $S$ .  $S'$  ist endlich erzeugbarer  $R$ -Modul, da die  $a_i$  ganz über  $R$  sind.  $S[X]$  ist endlich erzeugter  $S'$ -Modul und damit endlich erzeugbarer  $R$ -Modul  $\Rightarrow x$  ist ganz über  $R \Rightarrow x \in S$ .

$S$  noethersch:

**Beh. 1:** Es gibt ein primitives Element  $\alpha$  von  $L/K$  mit  $\alpha \in S$ .

**Bew. 1:** Sei  $\tilde{\alpha} \in L$  primitives Element, also  $1, \tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}^2, \dots, \tilde{\alpha}^{n-1}$  ist  $K$ -Basis von  $L$  ( $n := [L : K]$ ).

## 2 Noethersche Ringe und Moduln

Sei  $\tilde{\alpha} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \tilde{\alpha}^i$  für gewisse  $c_i \in K$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ . Schreibe  $c_i = \frac{a_i}{b_i}$  mit  $a_i, b_i \in R$ ,  $b := \prod_{i=0}^{n-1} b_i$ . Setze  $\alpha := b \cdot \tilde{\alpha} \Rightarrow \alpha^n = b^n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} c_i \tilde{\alpha}^i = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{c_i b^{n-i}}_{\in R} \alpha^i \Rightarrow \alpha \in S$

$1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$  linear unabhängig:

Sei  $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \alpha^i = 0 \Rightarrow \sum \lambda_i b^i \tilde{\alpha}^i = 0 \Rightarrow \lambda_i b^i = 0 \forall i$

Sei nun  $\bar{K}$  ein algebraischer Abschluss von  $K$ . Seien  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  die verschiedenen Einbettungen von  $L$  in  $\bar{K}$ , also die Elemente von  $\text{Hom}(L, \bar{K})$ .

$d := d(\alpha) := (\det(\sigma_i(\alpha^{j-1}))_{i,j=1,\dots,n})^2$  heißt die Diskriminante von  $L/K$  (bzgl.  $\alpha$ ).

**Beh. 2:**

(a)  $d \neq 0$

(b)  $S$  ist in dem von  $\frac{1}{d}, \frac{\alpha}{d}, \dots, \frac{\alpha^{n-1}}{d}$  erzeugten  $R$ -Untermodul von  $L$  enthalten.

Dann ist  $S$  als Untermodul eines endlich erzeugbaren  $R$ -Modul selbst endlich erzeugbar und damit noethersch (weil  $R$  noethersch ist).

**Bew. 2:**

$$(a) \quad d = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \sigma_1(\alpha) & \sigma_2(\alpha) & \dots & \sigma_n(\alpha) \\ \sigma_1(\alpha)^2 & \sigma_2(\alpha)^2 & \dots & \sigma_n(\alpha)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_1(\alpha)^{n-1} & \sigma_2(\alpha)^{n-1} & \dots & \sigma_n(\alpha)^{n-1} \end{pmatrix} \stackrel{\text{Vandermonde}}{=} \prod_{i>j} (\sigma_i(\alpha) - \sigma_j(\alpha)) \neq 0$$

(b) Für  $x \in L$  sei  $\text{Spur}(x) := \sum_{i=1}^n \sigma_i(x) \in \bar{K}$

$\text{Spur}(x) \in K$ : Für  $\sigma \in \text{Aut}_K(\bar{K})$  ist  $\sigma \circ \sigma_i \in \text{Hom}_K(L, \bar{K})$

$\sigma(\text{Spur}(x)) = \sum_{i=1}^n (\sigma \circ \sigma_i)(x) = \text{Spur}(x) \in \bar{K}^{\text{Aut}_K(\bar{K})} = K$ .

Sei  $x \in S$ ,  $x = \sum_{j=1}^n c_j \alpha^j$  mit  $c_j \in K$ .

**Beh. 3:**  $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$  ist Lösung eines LGS  $A \cdot c = b$  mit  $b \in R^n$  und  $A \in R^{n \times n}$  mit  $\det A = d$ .

Nach der Cramerschen Regel ist dann  $c_i = \frac{\det A_i}{\det A}$  wobei  $A_i$  aus  $A$  dadurch entsteht, dass die  $i$ -te Zeile durch  $b$  ersetzt wird.  $\Rightarrow c_i \in \frac{1}{d}R \Rightarrow x$  liegt in dem von  $\frac{1}{d}, \frac{\alpha}{d}, \dots, \frac{\alpha^{n-1}}{d}$  erzeugten  $R$ -Modul.

**Bew. 3:** Für  $i = 1, \dots, n$  ist  $\text{Spur}(\alpha^{i-1}x) = \sum_{j=1}^n \text{Spur}((\alpha^{i-1}\alpha^{j-1})c_j) \in K$  (\*) ganz über  $R$   
 $\Rightarrow \text{Spur}(\alpha^{i-1}x) \in R \Rightarrow A := (\text{Spur}(\alpha^{i-1}\alpha^{j-1}))_{i,j=1,\dots,n} \in R^{n \times n}$

$$b := \begin{pmatrix} \text{Spur}(x) \\ \text{Spur}(\alpha x) \\ \vdots \\ \text{Spur}(\alpha^{n-1}x) \end{pmatrix} \in R^n \quad (*) \text{ heißt } A \cdot c = b.$$

Noch zu zeigen:  $\det A = d$ .

Nach Definition ist  $d = (\det B)^2$  mit  $B = (\sigma_i(\alpha^{j-1}))_{i,j}$

$\Rightarrow B^T \cdot B = (\beta_{ij})$  mit  $\beta_{ij} = \sum_{k=1}^n \sigma(\alpha^{i-1})\sigma_k(\alpha^{j-1}) = \text{Spur}(\alpha^{i-1}\alpha^{j-1})$

$\Rightarrow B^T \cdot B = A \Rightarrow \det A = (\det B)^2 = d$

**Beispiele**

$K = \mathbb{Q}$ ,  $L = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ ,  $D$  quadratfrei,  $R = \mathbb{Z}$ .

Was ist  $d$ ?  $\alpha = \sqrt{D}$ ,  $\sigma_1 = \text{id}$ ,  $\sigma_2(a + b\sqrt{D}) = a - b\sqrt{D}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{D} & -\sqrt{D} \end{pmatrix}$$



$$d = (\det B)^2 = (-2\sqrt{D})^2 = 4D$$

## §11 Primärzerlegung

### Beispiele

$R = k[X, Y]$ .  $I = (X^2, Y)$  hat keine Darstellung als Produkt von Primidealen.

**denn:** Wäre  $I = \mathfrak{p}_1^{\nu_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{\nu_r}$  mit paarweise verschiedenen Primidealen  $\mathfrak{p}_i$ , so wäre  $\sqrt{I} = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r = (X, Y) = \mathfrak{m}$ . also  $r = 1$ ,  $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{m}$ . Aber:  $\mathfrak{m} \supsetneq I \supsetneq \mathfrak{m}^2$ .

### Definition + Bemerkung 2.42

Sei  $R$  Ring,  $\mathfrak{q} \subseteq R$  echtes Ideal.

- $\mathfrak{q}$  heißt **Primärideal**, wenn für alle  $a, b \in R$  mit  $a \cdot b \in \mathfrak{q}$  und  $a \notin \mathfrak{q}$  gilt: es gibt ein  $n \geq 1$  mit  $b^n \in \mathfrak{q}$ .
- Ist  $\mathfrak{q}$  Primärideal, so ist  $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$  Primideal.  $\mathfrak{p}$  heißt zu  $\mathfrak{q}$  **assoziertes** Primideal.

### Beweis

Seien  $a, b \in R$  mit  $a \cdot b \in \mathfrak{q} \Rightarrow a^n b^n \in \mathfrak{q}$  für ein  $n \geq 1$ .

Ist  $a \notin \sqrt{\mathfrak{q}}$ , so ist  $a^n \notin \mathfrak{q} \xRightarrow{\text{Def.}} (b^n)^m \in \mathfrak{q} \Rightarrow b \in \sqrt{\mathfrak{q}}$

- $\mathfrak{q}$  Primärideal  $\Leftrightarrow$  jeder Nullteiler in  $R/\mathfrak{q}$  ist nilpotent.

### Beispiele

- Ist  $p \in R$  ein Primelement, so ist  $(p^n) = (p)^n$  Primärideal für jedes  $n \geq 1$ .

**denn:** Seien  $a, b \in R$  mit  $a \cdot b \in (p^n)$  und  $a \notin (p^n)$ . Ist  $b \in (p)$ , so ist  $b^n \in (p^n)$ .

Anderenfalls ist  $a \in (p)$ . Dann gibt es  $1 \leq d < n$  mit  $a \in (p^d) \setminus (p^{d+1}) \Rightarrow a = p^d \cdot u$  mit  $u \in R \setminus (p)$ . Dann ist  $u \cdot b \notin (p) \Rightarrow a \cdot b = p^d \cdot u \cdot b \notin (p^{d+1})$  Widerspruch.

- Ist  $R$  Dedekindring, so sind die Primärideale genau die Potenzen von Primidealen.

**denn:** Ist  $\mathfrak{q}$  Primärideal,  $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_1^{\nu_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{\nu_r}$  die Zerlegung von  $\mathfrak{q}$  in Primidealen.

$\Rightarrow \sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r \xRightarrow{\sqrt{\mathfrak{q}} \text{ ist prim}} r = 1$ .

Sei umgekehrt  $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^n$  für ein Primideal  $\mathfrak{p}$ ,  $n \geq 1$ . Seien  $a, b \in R$ ,  $a \cdot b \in \mathfrak{p}^n$ ,  $a \notin \mathfrak{p}^n$ . Nach [Satz 13](#) ist  $R_{\mathfrak{p}}$  Hauptidealring. D.h.  $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$  wird erzeugt von einem  $\frac{p}{s}$ , wobei  $p \in \mathfrak{p}$ ,  $s \in R \setminus \mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{p}^n R_{\mathfrak{p}} = (\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}})^n$  ist Primideal.

Ist  $a \in \mathfrak{p}^n R_{\mathfrak{p}}$ , so ist  $a = \frac{p^n}{s^n} \cdot \frac{u}{t}$  mit  $u \in R, t \in R \setminus \mathfrak{p} \Rightarrow t \cdot s^n \cdot a \in \mathfrak{p}^n \Rightarrow a \in \mathfrak{p}^n$ . Widerspruch.

Anderenfalls ist  $b^m \in \mathfrak{p}^n R_{\mathfrak{p}}$  für ein  $m$  und damit  $b \in \mathfrak{p}$  und  $b^n \in \mathfrak{p}^n$ .

### Bemerkung 2.43

Sind  $I_1, \dots, I_r$   $\mathfrak{p}$ -primär (d.h.  $I_i$  primär und  $\sqrt{I_i} = \mathfrak{p}$ ), so ist auch  $I := \bigcap_{i=1}^r I_i$   $\mathfrak{p}$ -primär.

### Beweis

Seien  $a, b \in R$  mit  $a \cdot b \in I$ ,  $a \notin I$ . Dann gibt es  $i$  mit  $a \notin I_i \Rightarrow b^{n_i} \in I_i$  für ein  $n_i \geq 1 \Rightarrow b \in \sqrt{I_i} = \mathfrak{p} \Rightarrow$  Für  $j = 1, \dots, r$  gibt es  $n_j \geq 1$  mit  $b^{n_j} \in I_j \Rightarrow b^n \in I$  für  $n = \max_{j=1}^r n_j$ .

### Definition 2.44

Sei  $I$  Ideal in  $R$ .

- a) Eine Darstellung  $I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$  heißt **Primärzerlegung** von  $I$ , wenn alle  $\mathfrak{q}_i$  primär sind.
- b) Eine Primärzerlegung heißt **reduziert**, wenn  $\sqrt{\mathfrak{q}_i} \neq \sqrt{\mathfrak{q}_j}$  für  $i \neq j$  und kein  $\mathfrak{q}_i$  weggelassen werden kann.
- c) Besitzt  $\mathfrak{q}$  eine Primärzerlegung, so auch eine reduzierte.

**Satz 15 (Reduzierte Primärzerlegung)**

Sei  $R$  noetherscher Ring.

Dann hat jedes echte Ideal in  $R$  eine reduzierte Primärzerlegung. Die assoziierten Primideale sind eindeutig. Die Primärideale, deren assoziierten Primideale minimal unter den in der Zerlegung vorkommenden sind, sind ebenfalls eindeutig.

**Beweis**

Sei  $\mathcal{B} = \{I \subset R \text{ Ideal} : I \text{ besitzt keine Primärzerlegung}\}$ . Ist  $\mathcal{B} \neq \emptyset$ , so besitzt  $\mathcal{B}$  ein maximales Element  $I_0$ . Da  $I_0$  nicht primär ist, gibt es  $a, b \in R$  mit  $a \cdot b \in I_0$  und  $a \notin I_0$  und  $b^n \notin I_0$  für alle  $n \geq 1$ .

**Ziel:** Konstruiere Ideale  $I$  und  $J$  mit  $I_0 = I \cap J$  und  $I \neq I_0 \neq J$ . Dann haben  $I$  und  $J$  Primärzerlegungen, also  $I_0$  auch. Widerspruch!

Für  $n \geq 1$  sei  $I_n := \{c \in R : c \cdot b^n \in I_0\}$ .  $I_n$  ist Ideal mit  $I_0 \subseteq I_n \subseteq I_{n+1}$ . Da  $R$  noethersch ist, gibt es  $k \in \mathbb{N}$  mit  $I_n = I_k$  für alle  $n \geq k$ . Setze  $I := I_n$ . Beachte  $a \in I_1 \setminus I_0 \subseteq I \setminus I_0$ .

Sei  $J := I_0 + (b^k) \supsetneq I_0$ , da  $b^k \notin I_0$ .

**Beh:**  $I \cap J = I_0$

**denn:** „ $\supseteq$ “ ✓ „ $\subseteq$ “ Sei  $y \in I \cap J$ , also  $y = x + b^k \cdot r$  (für ein  $x \in I_0, r \in R$ ) und  $y \cdot b^k \in I_0 \Rightarrow y \cdot b^k = b^{2k} \cdot r + x \cdot b^k \Rightarrow r \cdot b^{2k} = yb^k \cdot xb^k \Rightarrow r \in I_{2k} = I_k \Rightarrow r \cdot b^k \in I_0 \Rightarrow y \in I_0$ .

# Vokabeln

## Abbildung

- alternierende, 15
- graderhaltende, 32
- symmetrische, 15

## abgeschlossen, 44

## Abschluss

- ganzer, 28

## Absolutbetrag, 48

## Algebra

- symmetrische, 16
- äußere, 16

## Basis, 6

## Bewertung

- diskrete, 48
- p-adische, 48

## de Rham-Komplex, 21

## Dedekindring, 52

## Derivation, 16

## Graßmann-Algebra, 16

## Hilbert

- Polynom, 33
- Reihe, 34

## homogen

- Elemente, 31
- Ideal, 31

## Ideal

- gebrochenes, 52

## Invariantenring, 35

## irreduzibel

- Komponente, 46
- topologischer Raum, 45

## Jacobson-Radikal, 38

## Kategorie

- abelsche, 5
- R-Mod, 5

## Krull-Dimension, 40

## linear unabhängig, 6

## Normalisierung, 28

## Nullstellenmenge, 29

## p-adischen Zahlen, 49

## Potenz

- symmetrische, 15
- äußere, 15

## Primideal

- assoziertes, 57

## Primidealkette, 40

- Höhe, 40

## Primärideal, 57

## Primärzerlegung, 58

- reduziert, 58

## R-Algebra, 13

## R-bilinear, 9

## R-linear, 5

## R-Modul, 5

- Homomorphismus, 5

- dualer, 5

- flacher, 12

- freier, 6

- graduierter, 32

- injektiver, 7

- noetherscher, 25

- projektiver, 7

## Ring

- diskreter Bewertungs-, 49

- ganz abgeschlossener, 28

- graduierter, 31

- noetherscher, 25

- normaler, 28

## Ringerweiterung, 13

- ganze, 27

## Spektrum, 44

## Tensorprodukt, 9

## Transzendenzgrad, 44

## Twist, 32

## Verschwindungsideal, 30, 46

## Zariski-Topologie, 44