

II. Bewertung von Derivaten in diskreter Zeit

2.1. Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen

2.1.1. Bedingte Erwartungswerte

Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für $A, B \in \mathcal{F}$ mit $P(B) > 0$ ist die *bedingte Wahrscheinlichkeit* von A gegeben B definiert durch

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable.

Definition 2.1.1

Der *bedingte Erwartungswert* von X gegeben B ist

$$E[X | B] = \frac{E[X \cdot 1_B]}{P(B)} = \frac{1}{P(B)} \int_B X dP.$$

Falls X diskret mit Werten x_1, \dots, x_n ist, gilt

$$E[X | B] = \sum_{k=1}^n x_k \frac{P(\{X = x_k\} \cap B)}{P(B)} = \sum_{k=1}^n x_k P(\{X = x_k\} | B).$$

Falls X absolut stetig ist mit Dichte f_X , gilt

$$E[X | B] = \frac{1}{P(B)} \int_B X dP = \frac{1}{P(B)} \int_B x \cdot f_X(x) dx.$$

Beispiel 2.1.2 (Würfel)

Seien $\Omega = \{1, \dots, 6\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $P(\{\omega\}) = \frac{1}{6}$. Sei $X(\omega) = \omega$, $A := \{1, 2\}$, $B := A^c = \{3, 4, 5, 6\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} E[X | A] &= \frac{1}{P(A)} \int_A X dP = \frac{1}{\frac{1}{3}} \left(1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} \right) = \frac{3}{2} \\ E[X | B] &= \frac{1}{P(B)} \int_B X dP = \frac{1}{\frac{2}{3}} \left(3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} \right) = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Sei $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine diskrete Zufallsvariable mit Werten y_1, \dots, y_n auf den Mengen A_1, \dots, A_n , das heißt $A_i := \{\omega \in \Omega : Y(\omega) = y_i\}$, $i = 1, \dots, n$. Dann ist (A_i) eine Zerlegung von Ω , das heißt $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$. Über diese Zerlegung kann eine σ -Algebra definiert werden: $\sigma(Y) = \sigma(A_1, \dots, A_n) = \{\text{alle möglichen Vereinigungen der } A_i\}$.

Definition 2.1.3

Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $E[|X|] < \infty$. Der bedingte Erwartungswert von X gegeben Y ist die (diskrete) Zufallsvariable

$$E[X | Y](\omega) = \sum_{i=1}^n E[X | A_i] \cdot 1_{A_i}(\omega).$$

Man schreibt statt $E[X | Y]$ auch $E[X | \sigma(Y)]$.

Bemerkung 2.1.4

- $E[X | Y]$ kann als Approximation von X verstanden werden.
- Für konstante Y („schlechteste“ Approximation) ist $E[X | Y] = E[X]$.
- $E[X | Y](\omega) = E[X | A_i]$, falls $\omega \in A_i$.
- $E[X | Y] = g(Y)$, wobei $g(Y) = \sum_{i=1}^n E[X | Y = y_i] 1_{y_i}(Y)$.

Im Folgenden wird der bedingte Erwartungswert bezüglich einer beliebigen σ -Algebra definiert. Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$ eine beliebige Teil- σ -Algebra von \mathcal{F} . Außerdem sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit $E[|X|] < \infty$.

Definition 2.1.5

Die Zufallsvariable $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt bedingter Erwartungswert von X bezüglich der σ -Algebra \mathcal{S} , falls

- (1) Z ($\mathcal{S}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$)-messbar ist
- (2) für alle $A \in \mathcal{S}$ gilt: $\int_A X dP = \int_A Z dP$.

Man schreibt: $E[X | \mathcal{S}] = Z$.

Bemerkung 2.1.6

- Die Existenz von Z wurde von Kolmogorov bewiesen (1933). (siehe Williams, Kapitel 9)
- Z ist nur bis auf P -Nullmengen eindeutig. Man spricht deswegen manchmal auch von Versionen der bedingten Erwartung.

Lemma 2.1.7

Falls $\mathcal{S} = \sigma(Y)$ für eine diskrete Zufallsvariable Y , dann gilt $E[X | \mathcal{S}] = E[X | Y]$.

Beweis

Sei $Z := E[X | Y] = g(Y) = \sum_{i=1}^n E[X | Y = y_i] \cdot 1_{y_i}(Y)$. Y ist ($\mathcal{S}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$)-messbar, also ist auch Z ($\mathcal{S}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$)-messbar. Es genügt, die zweite Eigenschaft für die erzeugenden Ereignisse A_i der σ -Algebra \mathcal{S} zu zeigen.

$$\begin{aligned} \int_{A_j} Z dP &= \int_{A_j} \sum_{i=1}^n E[X | Y = y_i] \cdot 1_{y_i}(Y) dP \\ &= \int_{A_j} E[X | Y = y_j] dP \\ &= \int_{A_j} \frac{E[X \cdot 1_{Y=y_j}]}{P(Y = y_j)} dP \\ &= \int_{A_j} X dP \end{aligned}$$

■

Bemerkung 2.1.8

Angenommen, der Zufallsvektor (X, Y) hat die Dichte $f(x, y)$. Dann hat X die Randdichte $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$ und Y die Randdichte $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$.

Die bedingte Dichte von X gegeben Y ist

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}.$$

Es ist klar, dass wir die bedingte Erwartung nicht über $\frac{E[X|Y=y]}{P(Y=y)}$ definieren können, da wir dabei durch Null teilen müssten. Man könnte $\sigma(Y)$ als die kleinste σ -Algebra definieren, so dass alle Ereignisse $\{Y \leq c\} \in \sigma(Y)$, $c \in \mathbb{R}$ und dann über $E[X | \sigma(Y)]$ aus Definition 2.1.5 definieren.

Man kann aber $E[X | Y]$ auch direkt konstruieren: Für $\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx > 0$ setzen wir

$$g(y) := \frac{\int x f(x, y) dx}{\int f(x, y) dx} = \frac{\int x f(x, y) dx}{f_Y(y)}$$

und $g(y) = 0$ sonst. Dann ist $E[X | Y] = E[X | \sigma(Y)]$ gegeben durch $g(Y)$.

Zur Integrierbarkeit: Sei $A := \{Y \leq c\}$.

$$E[g(Y) \cdot 1_A] = \int_{-\infty}^c g(y) f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^c \frac{\int x f(x, y) dx}{f_Y(y)} f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^c \int x f(x, y) dx dy = E[X \cdot 1_A]$$

Beispiel 2.1.9 (Fortsetzung Würfelbeispiel)

Sei $A := \{1, 2\}$, $A^c := \{3, 4, 5, 6\}$. $\sigma(A) := \{\emptyset, A, A^c, \Omega\} =: \mathcal{A}$. Es ist also

$$Z := E[X | \mathcal{A}] = E[X | A] \cdot 1_A + E[X | A^c] \cdot 1_{A^c} = \begin{cases} \frac{3}{2}, & \text{falls } \omega \in A \\ \frac{9}{2}, & \text{falls } \omega \in A^c \end{cases}$$

und damit

$$E[Z] = E[E[X | \mathcal{A}]] = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{6} + \frac{9}{2} \cdot \frac{4}{6} = \frac{7}{2} = E[X].$$

Bemerkung 2.1.10 (Eigenschaften der bedingten Erwartung)

Sei $E[|X|] < \infty$ und \mathcal{G}, \mathcal{H} seien Teil- σ -Algebren von \mathcal{F} .

- (1) Sei Y eine Version der bedingten Erwartung $E[X | \mathcal{G}]$. Dann gilt $E[Y] = E[X]$.
- (2) Falls X \mathcal{G} -messbar ist, dann gilt: $E[X | \mathcal{G}] = X$ fast sicher.
- (3) Linearität: $E[a_1 X_1 + a_2 X_2 | \mathcal{G}] = a_1 E[X_1 | \mathcal{G}] + a_2 E[X_2 | \mathcal{G}]$
- (4) Positivität: Falls $X \geq 0$, dann gilt $E[X | \mathcal{G}] \geq 0$
- (5) Bedingtes MON: Falls $0 \leq X_n \uparrow X$, dann gilt $E[X_n | \mathcal{G}] \uparrow E[X | \mathcal{G}]$ fast sicher.
- (6) Bedingtes FATOU: Falls $X_n \geq 0$, dann gilt $E[\liminf X_n | \mathcal{G}] \leq \liminf E[X_n | \mathcal{G}]$ fast sicher.
- (7) Bedingtes DOM: Falls für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\omega \in \Omega$ gilt $|X_n(\omega)| \leq V(\omega)$, $E[V] < \infty$ und $X_n \rightarrow X$ fast sicher, dann gilt $E[X_n | \mathcal{G}] \rightarrow E[X | \mathcal{G}]$ fast sicher.
- (8) Bedingte Jensen-Ungleichung: Sei $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvex, $E[|c(X)|] < \infty$, dann ist $E[c(X) | \mathcal{G}] \geq c(E[X | \mathcal{G}])$ fast sicher.

II. Bewertung von Derivaten in diskreter Zeit

- (9) Turmeigenschaft: Sei \mathcal{H} eine Teil- σ -Algebra von \mathcal{G} , dann gilt $E[E[X | \mathcal{G}] | \mathcal{H}] = E[X | \mathcal{H}]$ fast sicher.
- (10) „Messbares Ausklammern“: Sei Z eine \mathcal{G} -messbare Zufallsvariable und beschränkt. Dann gilt $E[Z \cdot X | \mathcal{G}] = Z \cdot E[X | \mathcal{G}]$.
- (11) Falls \mathcal{H} unabhängig von $\sigma(\sigma(X), \mathcal{G})$ ist, dann gilt $E[X | \sigma(\mathcal{H}, \mathcal{G})] = E[X | \mathcal{G}]$ fast sicher. Insbesondere: Wenn X unabhängig von \mathcal{H} ist (also X und 1_A sind für alle $A \in \mathcal{H}$ unabhängig), dann gilt $E[X | \mathcal{H}] = E[X]$.

Für Beweise und weitere Informationen siehe Williams, Kapitel 9.

Aus diesen Eigenschaften folgt sofort für $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$: $E[X | \mathcal{G}] = E[X]$.

2.1.2. Martingale

Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Gegeben sei eine Indexmenge $I \neq \emptyset$. Wir verwenden in dieser Vorlesung $I = \{0, 1, \dots, t\}$ oder $I = \mathbb{N}_0$. In der Vorlesung „Finanzmathematik II“ wird $I = [0, \infty)$ sein. Die Menge I kann als Zeitparameter interpretiert werden.

Definition 2.1.11

- (1) Eine Familie von Zufallsvariablen $X = (X_t)_{t \in I}$, $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, heißt *stochastischer Prozess*.
- (2) Eine Familie $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ von Teil- σ -Algebren $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ heißt *Filtration*, falls für alle $s, t \in I$ mit $s < t$ gilt: $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$.
- (3) Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \in I}$ heißt *adaptiert bezüglich der Filtration* (\mathcal{F}_t) , falls für alle $t \in I$ die Zufallsvariable X_t \mathcal{F}_t -messbar ist.

Bemerkung 2.1.12

- Wir interessieren uns beispielsweise für stochastische Prozesse, die den Preisverlauf von Aktien über die Zeit beschreiben.
- Wir modellieren Informationen über die Filtration. Häufig ist (\mathcal{F}_t) die *natürliche Filtration*, das heißt die kleinste Filtration, bezüglich der der Prozess X adaptiert ist: $\mathcal{F}_t = \sigma(X_0, \dots, X_t) = \{(X_0, \dots, X_t)^{-1}(B) \mid B \subseteq \mathbb{R}^{t+1} \text{ messbar}\}$.
- Man schreibt $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ für einen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) , der mit der Filtration (\mathcal{F}_t) versehen ist und nennt diesen *filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum*.

Definition 2.1.13

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_t)_{t \in I}$ ein stochastischer Prozess. (X_t) heißt *Martingal*, falls

- (1) (X_t) adaptiert ist,
- (2) $E[|X_t|] < \infty$ für alle $t \in I$,
- (3) $E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$ gilt fast sicher für alle $s, t \in I$ mit $s \leq t$.

(X_t) ist ein Submartingal, falls (1) und (2) gilt, und (3) ersetzt wird durch: $E[X_t | \mathcal{F}_s] \geq X_s$ für alle $s, t \in I$ mit $s \leq t$.

(X_t) ist ein Supermartingal, falls (1) und (2) gilt, und (3) ersetzt wird durch: $E[X_t | \mathcal{F}_s] \leq X_s$ für alle $s, t \in I$ mit $s \leq t$.

Bemerkung 2.1.14

- Merksatz: Submartingal „wächst im Durchschnitt“, Supermartingal „fällt im Durchschnitt“.
- (X_t) ist ein Supermartingal genau dann, wenn $(-X_t)$ ein Submartingal ist.
- (X_t) ist ein Martingal genau dann, wenn (X_t) ein Supermartingal und ein Submartingal ist.
- Sei (X_t) ein stochastischer Prozess mit $X_0 \in \mathcal{B}^{-1}(\Omega, \mathcal{F}_0, P)$. Dann ist (X_t) ein Martingal, genau dann wenn $(X_t - X_0)$ ein Martingal ist. Deshalb setzt man manchmal $X_0 = 0$.
- Falls I diskret ist, genügt es (3) für alle $t, t+1 \in I$ zu überprüfen: $E[X_{t+1} | \mathcal{F}_t] = X_t$.

Beweis

Sei $m < n-1 < n$. Dann ist $\mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}_{n-1} \subseteq \mathcal{F}_n$. Wiederholtes Anwenden der Turmeigenschaft und der Martingaleigenschaft für $n, n+1$ liefert:

$$E[X_n | \mathcal{F}_m] = E[E[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] | \mathcal{F}_m] = E[X_{n-1} | \mathcal{F}_m] = \cdots = E[X_{m+1} | \mathcal{F}_m] = X_m \quad \blacksquare$$

- $E[X_{t+1} | \mathcal{F}_t] = X_t \iff E[X_{t+1} - X_t | \mathcal{F}_t] = 0$
- Sei $s \leq t$ und $E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$. Dann gilt $E[X_s] = E[X_t] = \cdots = EX_0$.

Beispiel 2.1.15

Seien $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, wobei X_i unabhängige Zufallsvariablen mit $EX_i = 0$, $E|X_i| < \infty$ und $S_0 := 0$ sind. Sei weiter $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n)$ und $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$. Dann ist (S_n) ein Martingal.

Beweis

Integrierbarkeit und Adaptiertheit klar. Martingaleigenschaft: Sei $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} E[S_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= E[S_n + X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \\ &= E[S_n | \mathcal{F}_n] + E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \\ &= S_n + EX_{n+1} \\ &= S_n \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Sei

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p = \frac{1}{2} \\ -1, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } (1-p) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dann ist $EX_i = 0$. X_i kann als Laufrichtung interpretiert werden: Man startet bei $S_0 = 0$ und wirft eine faire Münze um zu entscheiden, ob man einen Schritt nach links oder rechts läuft. (S_n) beschreibt eine Irrfahrt („random walk“) auf den ganzen Zahlen.

Eine andere Interpretation ist ein Glücksspiel: X_i beschreibt das Ergebnis des i -ten Münzwurfs und S_n beschreibt den Gewinn nach n Würfeln.

Satz 2.1.16

Sei $(M_t)_{t \in I}$ ein Martingal und $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion mit $E[|f(M_t)|] < \infty$ für alle $t \in I$. Dann ist $(f(M_t))_{t \in I}$ ein Submartingal.

Beweis

Aus der Jensen-Ungleichung folgt sofort, dass für alle $s, t \in I$ mit $s \leq t$ gilt:

$$E[f(M_t) | \mathcal{F}_s] \geq f(E[M_t | \mathcal{F}_s]) = f(M_s)$$

■

Definition 2.1.17

Ein Prozess $(X_n)_{n=1,2,\dots}$ auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n), P)$ heißt *vorhersagbar*, falls X_n für alle $n \geq 1$ \mathcal{F}_{n-1} -messbar ist.

Lemma 2.1.18 (Doobsche Zerlegung)

Sei $(X_t)_{t=0,1,\dots,T}$ ein Supermartingal bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t=0,1,\dots,T}$. Dann kann man (X_t) schreiben als

$$X_t = M_t + A_t,$$

wobei (M_t) ein Martingal bezüglich (\mathcal{F}_t) ist und (A_t) mit $A_0 = 0$ ein fallender Prozess, das heißt $A_{t+1} \leq A_t$ für $t = 0, 1, \dots, T-1$.

Außerdem ist (A_t) vorhersehbar. Die Zerlegung ist P -fast-sicher eindeutig.

Beweis

Übungsblatt

■

Martingal-Transformation

Wir betrachten ein Glücksspiel in diskreter Zeit. Die Indexmenge sei hier $I = \mathbb{N}_0$. Zum Zeitpunkt 0 findet kein Spiel statt, zu den Zeitpunkten $n = 1, 2, \dots$ wird gespielt und $\Delta Z_n := Z_n - Z_{n-1}$ ist der Nettogewinn im n -ten Spiel.

Falls (Z_n) ein Martingal ist, ist das Spiel fair in dem Sinne, dass $E[\Delta Z_n | \mathcal{F}_{n-1}] = 0$. Falls (Z_n) Supermartingal ist, ist das Spiel unvorteilhaft für den Spieler, da $E[\Delta Z_n | \mathcal{F}_{n-1}] \leq 0$.

Beispielsweise ist der Münzwurf mit $Z_n = S_n$ ein Martingal und damit ein faires Spiel. Es ist $\Delta S_n \in \{-1, 1\}$. Falls der Spieler zur Zeit $n-1$ (also vor dem n -ten Münzwurf) verdoppelt hätte, würde er $2\Delta S_n \in \{-2, 2\}$ gewinnen oder verlieren. Das Spiel wäre weiterhin fair. Er hätte seinen Einsatz so auswählen können, dass er von allen Ereignissen bis zur Zeit $n-1$ abhängt – das Spiel bliebe fair.

Sei (C_n) ein vorhersehbarer Prozess und $n \in \mathbb{N}$ (ohne 0). (C_n) repräsentiert den Spieleinsatz im n -ten Spiel. Der Spieler wählt (C_n) unter der Verwendung der Information bis zur Zeit $n-1$. Dann ist der Gewinn im n -ten Spiel $C_n \Delta Z_n = C_n(Z_n - Z_{n-1})$ und der Gesamtgewinn bis zur Zeit n ist $Y_n := \sum_{i=1}^n C_i(Z_i - Z_{i-1}) = (C \bullet Z)_n$. Hier ist $(C \bullet Z)_0 = 0$ und $Y_n - Y_{n-1} = C_n(Z_n - Z_{n-1})$. $(C \bullet Z)$ wird *Martingal-Transformation* von Z (durch C) genannt.

Satz 2.1.19

- (1) Sei C ein nicht-negativer, vorhersehbarer und beschränkter Prozess (das heißt, für ein $K \in [0, \infty)$ gelte für alle $n \in I$ und $\omega \in \Omega$: $|C_n(\omega)| \leq K$). Sei Z ein Supermartingal. Dann ist $(C \bullet Z)$ ein Supermartingal und $(C \bullet Z)_0 = 0$.

- (2) Falls C ein vorhersehbarer und beschränkter Prozess und Z ein Martingal ist, dann ist $(C \bullet Z)$ ein Martingal und $(C \bullet Z)_0 = 0$.

Beweis

$Y = C \bullet Z$ ist integrierbar, da C beschränkt und Z integrierbar ist. Adaptiertheit ist auch klar, da C vorhersehbar und Z adaptiert ist.

Zur (Super-)Martingaleigenschaft: Es gilt

$$E[Y_n - Y_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] = E[C_n(Z_n - Z_{n-1}) | \mathcal{F}_{n-1}] = C_n E[Z_n - Z_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}]$$

da C_n ein \mathcal{F}_{n-1} -messbarer, beschränkter Prozess ist. Falls $C \geq 0$ und Z ein Supermartingal ist, gilt $C_n E[Z_n - Z_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] \leq 0$. Falls Z ein Martingal ist, gilt $C_n E[Z_n - Z_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] = 0$. ■

Interpretation: "You can't beat the system!" Da $C \bullet Z$ unter den obigen Voraussetzung ein Martingal ist, wird dadurch ein faires Spiel beschrieben.

Bemerkung 2.1.20

Der Ausdruck $(C \bullet Z)$, die Martingal-Transformation von Z durch C , ist das diskrete Äquivalent zum stochastischen Integral $\int C dZ$.

2.1.3. Stoppzeiten

Sei I weiterhin die Indexmenge.

Definition 2.1.21

Eine (\mathcal{F}_t) -Stoppzeit ist eine I -wertige Zufallsvariable τ , so dass für alle $t \in I$

$$\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Bemerkung 2.1.22

- Zur Schreibweise: Man schreibt häufig für die Menge $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\}$ verkürzt $\{\tau \leq t\}$ und ebenso $\{\tau = t\}$ für $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) = t\}$.
- Interpretation der Stoppzeit: Zum Zeitpunkt t weiß man, ob τ eingetreten ist oder nicht. Beispielsweise ist τ der Zeitpunkt, an dem der Spieler aufhört, an einem Glücksspiel teilzunehmen. Die Entscheidung nach der t -ten Spielrunde, das Spiel zu beenden, hängt nur von den Ergebnissen bis zum Zeitpunkt t und nicht von der Zukunft ab.

Lemma 2.1.23

Falls I diskret ist, gilt:

$$\tau \text{ ist } (\mathcal{F}_t)\text{-Stoppzeit} \iff \forall t \in I : \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$$

Beweis

Sei τ eine (\mathcal{F}_t) -Stoppzeit. Dann gilt $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ und $\{\tau \leq t-1\} \in \mathcal{F}_{t-1} \subseteq \mathcal{F}_t$. Daraus folgt $\{\tau = t\} = \{\tau \leq t\} \cap \{\tau \leq t-1\}^C \in \mathcal{F}_t$.

Sei nun für alle $t \in I$ $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$. Dann gilt $\{\tau \leq t\} = \bigcup_{k \leq t} \{\tau = k\} \in \mathcal{F}_t$. ■

Beispiel 2.1.24

(1) $\tau = t_0 \in I$ ist eine Stoppzeit, da

$$\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} = \{\omega \in \Omega : t_0 \leq t\} = \begin{cases} \Omega, & \text{falls } t_0 \leq t \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases} \in \mathcal{F}_t$$

(2) Sei $(S_t)_{t \in I}$, $I = \{0, 1, 2, \dots, T\}$, ein Aktienkursprozess adaptiert bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$. Dann ist

$$\tau := \inf\{t \geq 0 : S_t \geq b\} \wedge T$$

eine (\mathcal{F}_t) -Stoppzeit:

$$\{\tau \leq t\} = \bigcup_{k \leq t} \{\tau = k\} = \bigcup_{k \leq t} \{S_k \geq b\} \in \mathcal{F}_t$$

und $\tau = T$, falls der Aktienkurs in I nie den Wert b überschreitet.

(3) Sei S wie in 2. Definiere $\tau := \operatorname{argmax}_{t=0, \dots, T} S_t$ (Zeitpunkt, zu dem S den maximalen Wert annimmt). Dann ist τ *keine* Stoppzeit, da man zum Zeitpunkt $t < T$ nicht sagen kann, ob τ eingetreten ist.

Lemma 2.1.25

Sind τ, σ Stoppzeiten, so sind $\min\{\tau, \sigma\}$, $\max\{\tau, \sigma\}$ und $\tau + \sigma$ wieder Stoppzeiten.

Beweis

Übungsblatt

■

Satz 2.1.26 (Doob's Optional Stopping Theorem)

Sei τ eine beschränkte Stoppzeit und $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Martingal. Dann ist X_τ integrierbar und $E[X_\tau] = E[X_0]$.

Beweis

Da τ beschränkt ist, existiert ein $K \in \mathbb{N}$, so dass $\tau(\omega) \leq K$ für P -fast-alles ω . Dann gilt:

$$X_{\tau(\omega)}(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(\omega) 1_{\{\tau(\omega)=k\}} = \sum_{k=0}^K X_k(\omega) 1_{\{\tau(\omega)=k\}}$$

daher gilt

$$\begin{aligned}
 E[X_\tau] &= E\left[\sum_{k=0}^{\infty} X_k(\omega) 1_{\{\tau(\omega)=k\}}\right] \\
 &= \sum_{k=0}^K E[X_k 1_{\{\tau(\omega)=k\}}] \\
 &= \sum_{k=0}^K E[E[X_k | \mathcal{F}_k] 1_{\{\tau(\omega)=k\}}] \\
 &= \sum_{k=0}^K E[E[X_k 1_{\{\tau(\omega)=k\}} | \mathcal{F}_k]] \\
 &= \sum_{k=0}^K E[X_k 1_{\{\tau(\omega)=k\}}] \\
 &= E\left[\sum_{k=0}^K X_k 1_{\{\tau(\omega)=k\}}\right] = E[X_K] = E[X_0].
 \end{aligned}$$

■

Bemerkung 2.1.27

- Den Satz kann man auch auf ein Supermartingal $X = (X_n)$ anwenden und erhält dann $E[X_\tau] \leq E[X_0]$.
- Die Annahme, dass die Stoppzeit τ beschränkt ist, kann durch eine der beiden folgenden Bedingungen ersetzt werde:
 - (1) $X = (X_n)$ ist beschränkt ($|X_n(\omega)| \leq L$ für ein L und alle n, ω) und τ ist fast sicher endlich ($P(\tau < \infty) = 1$).
 - (2) $E[\tau] < \infty$ und für ein $L \in \mathbb{R}^+ : |X_n(\omega) - X_{n-1}(\omega)| \leq L$ für alle n, ω .

Satz 2.1.28

Sei $X = (X_n)$ ein (\mathcal{F}_n) -adaptierter stochastischer Prozess mit $E[X_n] < \infty$ für alle n . Für jede beschränkte Stoppzeit τ gelte $E[X_\tau] = E[X_0]$. Dann ist X ein Martingal.

Beweis

Sei $0 \leq m < n < \infty$ und $A \in \mathcal{F}_m$. Dann ist $\tau := n 1_A + m 1_{A^c}$ eine beschränkte Stoppzeit. Dann gilt

$$E[X_0] = E[X_\tau] = E[X_n 1_A + X_m 1_{A^c}] = E[X_n 1_A] + E[X_m 1_{A^c}]$$

Da $\sigma := m$ auch eine beschränkte Stoppzeit ist, gilt

$$E[X_0] = E[X_m] = E[X_m 1_A + X_m 1_{A^c}] = E[X_m 1_A] + E[X_m 1_{A^c}]$$

Daher gilt für alle $A \in \mathcal{F}_m$: $E[X_m 1_A] = E[X_n 1_A]$ und damit $E[X_n | \mathcal{F}_m] = X_m$ aus der Definition der bedingten Erwartung, das heißt X ist ein Martingal. ■

Definition 2.1.29

Sei τ eine (\mathcal{F}_t) -Stoppzeit. Die σ -Algebra der Ereignisse bis zur Zeit τ ist definiert durch

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} : \text{für alle } t \geq 0 \ A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

Lemma 2.1.30

Für eine Stoppzeit τ ist \mathcal{F}_τ eine σ -Algebra.

Lemma 2.1.31

Seien σ, τ Stoppzeiten mit $\sigma \leq \tau$. Dann gilt $\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\tau$.

Lemma 2.1.32

Sei $X = (X_n)$ ein stochastischer Prozess adaptiert zu (\mathcal{F}_n) und τ eine (\mathcal{F}_n) -Stoppzeit. Dann ist $X_\tau = \sum_n X_n 1_{\{\tau \geq n\}}$ \mathcal{F}_τ -messbar.

Satz 2.1.33 (Doob's Optional Sampling Theorem)

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Martingal und τ, σ beschränkte Stoppzeiten mit $\sigma \leq \tau$. Dann gilt $E[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma] = X_\sigma$ und daher $E[X_\tau] = E[X_\sigma]$.

Beweis

Die Beweise von 2.1.30–2.1.33 sind Übung. ■

Bemerkung 2.1.34

Häufig betrachtet man gleichgradig integrierbare Martingale:

Ein Martingal $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *gleichgradig integrierbar*, falls $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_n E[|X_n| 1_{\{|X_n| > \lambda\}}] = 0$.

Falls ein Martingal gleichgradig integrierbar ist, gilt Optional Sampling für beliebige Stoppzeiten.

Satz 2.1.35

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein (\mathcal{F}_n) -Martingal (Super-, Submartingal) und τ eine (\mathcal{F}_n) -Stoppzeit. Dann ist der gestoppte Prozess $(X_{n \wedge \tau})_{n \in \mathbb{N}_0}$ auch ein (\mathcal{F}_n) -Martingal (Super-, Submartingal).

Beweis

Sei $C_j := 1_{\{j \leq \tau\}}$. Dann ist

$$\begin{aligned} X_{\tau \wedge n} &= X_0 + \sum_{j=1}^n C_j (X_j - X_{j-1}) = X_0 + \sum_{j=1}^n 1_{\{j \leq \tau\}} (X_j - X_{j-1}) \\ &= X_0 + \sum_{j=1}^{\tau \wedge n} (X_j - X_{j-1}) = X_0 + X_1 - X_0 + \dots + X_{\tau \wedge n} - X_{\tau \wedge n - 1} \\ &= X_{\tau \wedge n} \end{aligned}$$

Da $\{j \leq \tau\} = \{\tau < j\}^C = \{\tau \leq j-1\}^C \in \mathcal{F}_{j-1}$ ist C_n vorhersagbar.

Daher ist $X_{\tau \wedge n}$ adaptiert. Es gilt

$$\begin{aligned} X_{\tau \wedge n} &= X_0 + \sum_{j=1}^n C_j(X_j - X_{j-1}) = X_0 + \sum_{j=1}^{n-1} C_j(X_j - X_{j-1}) + C_n(X_n - X_{n-1}) \\ &= X_{\tau \wedge n-1} + C_n(X_n - X_{n-1}) \end{aligned}$$

Dann folgt

$$E[X_{\tau \wedge n} | \mathcal{F}_{n-1}] = E[X_{\tau \wedge n-1} + C_n(X_n - X_{n-1}) | \mathcal{F}_{n-1}] = X_{\tau \wedge n-1} + C_n(E[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] - X_{n-1})$$

Aus der Martingal- (Super-, Submartingal)-Eigenschaft folgt die Behauptung. ■

Wir schließen dieses Kapitel mit einer Konvergenzaussage:

Satz 2.1.36 (Doob's Martingale Convergence Theorem)

Sei $X = (X_n)$ ein \mathcal{L}^1 -beschränktes Supermartingal ($\sup_n E[|X_n|] < \infty$). Dann existiert X_∞ \mathcal{F}_∞ -messbar, sodass $X_n \rightarrow X_\infty$ P -f.s. und X_∞ ist P -f.s. endlich.

Beweis

Siehe Williams Kapitel 11. ■

2.2. Motivation und erste Begriffe

Wir werden nun Derivate bewerten. Ein Derivat ist ein Finanztitel, bei dem Zahlungen wesentlich von anderen Finanztiteln (Basistitel) abhängen (derivare=ableiten).

Beispiele für Derivate:

- Termingeschäfte: Verträge, bei denen die Erbringung von Leistung und Gegenleistung zu einem zukünftigen Zeitpunkt heute vereinbart werden. Zu Termingeschäften gehören:

- (1) Waretermingeschäfte
- (2) Devisentermingeschäfte: z.B. kaufe zum Zeitpunkt T a US Dollar zu einem Wechselkurs von b .
- (3) Finanztermingeschäfte: Man unterscheidet hier Financial Forwards und Financial Futures. Futures werden an Märkten gehandelt, z.B. am CBOT (Chicago Board of Trade).



Abbildung II.1.: Chicago Board of Trade

- Optionen: Der Käufer der Option hat das Wahlrecht (aber nicht die Verpflichtung), ein bestimmtes Finanzgut (z.B. eine Aktie) (underlying, underlying asset) bis zu einem zukünftigen Zeitpunkt T (maturity, expiry) zu einem vereinbarten Preis K (strike price, exercise price, Ausübungspreis) zu kaufen oder zu verkaufen. Das Kaufrecht wird Call-Option genannt und das Verkaufsrecht wird Put-Option genannt. Man unterscheidet:
 - Europäische Option: Ausübung ist nur zum Zeitpunkt T möglich.
 - Amerikanische Option: Ausübung jederzeit bis zum Zeitpunkt T möglich.

Beispiel 2.2.1 (Preisbestimmung einer europäischen Call-Option)

Sei $t = 0$ der aktuelle Zeitpunkt, $T > 0$ der Ausübungszeitpunkt, (S_t) der stochastische Prozess, der den Preis der zugrunde liegenden Aktie beschreibt, und K der Ausübungspreis. Die Auszahlung des Calls zum Zeitpunkt T ist gegeben durch die Funktion

$$H := \max\{0, S_T - K\} = (S_T - K)^+.$$

Sei der Anfangswert der Aktie $S_0 = 10\$$. Wir nehmen an, dass die Aktie zum Zeitpunkt T nur zwei Werte annehmen kann: $S_T(\omega_1) = 20\$$, $S_T(\omega_2) = 7,5\$$ mit Wahrscheinlichkeiten p und $1 - p$. Sei $K = 15\$$. Dann ist die Auszahlung des Calls

$$H = (S_T - K)^+ = \begin{cases} 5, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p \\ 0, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - p \end{cases}$$

Wir nehmen weiter an, dass es als zusätzliche Investitionsmöglichkeit (neben der Aktie) in dem Markt noch ein Bankkonto gibt, mit Zinssatz $r = 0$ für Soll- und Habenpositionen. Was ist der Preis $\pi(H)$ für diese Option?

Idee: No-arbitrage-Prinzip: Es darf keine Arbitrage (risikoloser Gewinn) möglich sein. Die Auszahlung H wird mit anderen Finanzinstrumenten (hier Aktie und Bankkonto) repliziert. Das Anfangskapital, das nötig ist, um H zu repräsentieren, ist der Preis der Option. Im Folgenden bezeichnen wir mit (α, β) eine Handelsstrategie, wobei α die Anlage in die Aktie (Stückzahl) angibt und β ist die Anlage auf dem Bankkonto. Für $\alpha < 0$ spricht man vom Leerverkauf. Die Aktien können in beliebigen Anteilen ge- und verkauft werden. Der Wert des Portfolios aus Aktie und Bankkonto zum Zeitpunkt $t = 0$ ist $V_0(\alpha, \beta) = \beta + \alpha \cdot S_0$ und zum Zeitpunkt $t = T$ $V_T(\alpha, \beta) = \beta + \alpha \cdot S_T$.

Replizieren der Auszahlung bedeutet nun, dass man $H = V_T(\alpha, \beta)$ setzt, also $\beta + \alpha \cdot S_T(\omega) = H(\omega)$. Dies gibt für $\omega \in \{\omega_1, \omega_2\}$ ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \beta + \alpha \cdot 20 &= 5 \\ \beta + \alpha \cdot 7,5 &= 0 \end{aligned}$$

Lösen nach α, β liefert $\alpha = \frac{2}{5}$ und $\beta = -3$. Damit ist $V_0(\alpha, \beta) = -3 + \frac{2}{5} \cdot 10 = 1$. Die replizierende Strategie (Hedging-Strategie) für den Call H ist: Leihe heute 3\$ von der Bank und kaufe $\frac{2}{5}$ Aktien. Die Gesamtinvestition ist dann 1\$.

Zum Zeitpunkt T gibt es zwei Szenarios:

- (1) $S_T = 20\$$. Verkauf der Aktien liefert $\frac{2}{5} \cdot 20\$ = 8\$$. Nach der Kreditrückzahlung von 3\$ bleiben 5\$.
- (2) $S_T = 7,5\$$. Verkauf der Aktie liefert $\frac{2}{5} \cdot 7,5\$ = 3\$$. Nach der Kreditrückzahlung von 3\$ bleiben 0\$.

Angenommen, wir verkaufen einem Kunden die Call-Option zum Preis von 1\$ und investieren diesen wie oben beschrieben. Im ersten Szenario ($S_T = 20$) wird der Kunde von seinem Recht Gebrauch machen und den Call ausüben. Er möchte also die Aktie zum Ausübungspreis $K = 15$ \$ kaufen. Unsere replizierende Strategie hat uns schon 5\$ eingebracht, wir bekommen nun noch $K = 15$ \$ hinzu und können den Marktpreis einer Aktie von 20\$ bezahlen und sie dem Kunden geben.

Wir haben uns mit der replizierenden Strategie perfekt gegen das Risiko, dass der Kunde von seinem Ausübungsrecht Gebrauch macht, abgesichert (“Hedging”).

Im zweiten Szenario ($S_T = 7,5$ \$) wird der Kunde den Call nicht ausüben und die Aktie lieber am Markt für $S_T = 7,5$ \$ kaufen als von uns zum Preis $K = 15$ \$. Unsere replizierende Strategie hat uns 0\$ eingebracht, wir bekommen 0 hinzu und müssen keine Aktie liefern.

Der faire Preis ist $\pi(H) = 1$. Angenommen, es gelte $\pi(H) > 1$: Wir verkaufen Option zum Preis $\pi(H)$ und replizieren sie wie oben mit den Kosten von 1\$. Der risikolose Gewinn beträgt $\pi(H) - 1$. Nehmen wir stattdessen an, dass $\pi(H) < 1$ gilt, dann kaufen wir eine Option zum Preis $\pi(H)$ und verkaufen die replizierende Strategie. Der risikolose Gewinn wäre dann $1 - \pi(H)$.

Beachte: $\pi(H)$ ist unabhängig von der Wahrscheinlichkeit p (“real world probability”).

2.3. Endliche Finanzmärkte

Es werden nun endliche Finanzmärkte, die durch endlich viele Marktzustände und durch endlich viele Handelszeitpunkte charakterisiert sind, betrachtet. Es sei $I = \{0, 1, \dots, T\}$. Wir betrachten einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ mit endlichen Ω und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Weiter sei $P(\{\omega\}) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$. Handelszeitpunkte seien die Zeitpunkte $t = 0, 1, \dots, T$.

Der Markt besteht aus $d + 1$ Anlagemöglichkeiten: Einer risikolosen Anlagemöglichkeit B (“Bond”) mit deterministischem Bond-Preis $(B_t)_{t \in I}$, wobei $B_0 = 1$ und $B_t > 0$ für $t = 1, \dots, T$, und d risikobehafteten Anlagemöglichkeiten (“stocks”) mit Preisprozessen $(S_t^k)_{t \in I}$, $k = 1, \dots, d$, wobei $S_t = (S_t^1, \dots, S_t^d)^\top \in \mathbb{R}^d$ und $S_t^k(\omega) > 0$ für alle $k = 1, \dots, d$, $t \in I$, $\omega \in \Omega$. Die Prozesse $(S_t^k)_{t \in I}$ seien für alle $k = 1, \dots, d$ adaptiert bezüglich der gegebenen Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$.

Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir auch $Z_t = (B_t, S_t^1, \dots, S_t^d)^\top \in \mathbb{R}^{d+1}$ als Preisprozessvektor aller Anlagemöglichkeiten im Markt.

Für viele Überlegungen ist es wichtig, dass der Preisprozess mindestens einer Anlagemöglichkeit strikt positiv ist: Einen Preisprozess $(Y_t)_{t \in I}$, der strikt positiv ist, nennt man Numéraire. Wir werden diskontierte Preise betrachten, wobei $\frac{1}{Y}$ als Diskontfaktor verwendet wird. Häufig wird der risikolose Bond $Y = B$ als Numéraire verwendet.

Definition 2.3.1

Ein Portfolio oder eine Handelsstrategie φ ist ein \mathbb{R}^{d+1} -wertiger stochastischer Prozess

$$\varphi := (\varphi_t)_{t \in I^+} = \begin{pmatrix} \beta_t \\ \alpha_t \end{pmatrix}_{t \in I^+}$$

der vorhersagbar bezüglich der Filtration (\mathcal{F}_t) ist. Dabei ist

- $\beta_t \in \mathbb{R}$ die Stückzahl des Bonds, die während des Zeitraums $(t - 1, t]$ gehalten wird.
- $\alpha_t = (\alpha_t^1, \dots, \alpha_t^d)^\top \in \mathbb{R}^d$ und α_t^k ist die Stückzahl des Wertpapiers k , die während des Zeitraums $(t - 1, t]$ gehalten wird.

II. Bewertung von Derivaten in diskreter Zeit

Die Vorhersagbarkeit von φ bedeutet, dass β_t, α_t^k für $t = 1, \dots, T$ \mathcal{F}_{t-1} -messbar sind. Wir setzen $\beta := (\beta_t)_{t \in I^+}$ und $\alpha := (\alpha_t)_{t \in I^+}$.

Der Investor beobachtet die Preise Z_{t-1} und wählt basierend auf diesen Informationen sein neues Portfolio φ_t , was er dann hält bis direkt nach Bekanntwerden der Preise Z_t .

Definition 2.3.2

Der Wert des Portfolios zum Zeitpunkt $t \in \{1, \dots, T\}$ ist gegeben durch

$$V_t^\varphi = \varphi_t^\top Z_t = \beta_t B_t + \alpha_t^\top S_t = \beta_t B_t + \sum_{k=1}^d \alpha_t^k S_t^k$$

und wir setzen $V_0^\varphi = \varphi_1^\top Z_0 = \beta_1 B_0 + \alpha_1^\top S_0$.

Bemerkung 2.3.3

- V_t^φ wird auch der Wert- oder Vermögensprozess zur Strategie φ genannt.
- V_0^φ wird als das Anfangsvermögen bezeichnet.
- $\varphi_{t+1}^\top Z_t$ ist der Wert des Portfolios direkt nachdem es zur Zeit t neu zusammengesetzt wurde.
- $\varphi_{t+1}^\top Z_{t+1}$ ist der Wert des Portfolios zum Zeitpunkt $t+1$, wenn die Zeit- $(t+1)$ -Preise beobachtet werden, aber das Portfolio noch nicht wieder umstrukturiert wurde.
- Die Änderung des Marktwertes des Portfolios nur durch Änderung der Preise ist daher

$$\varphi_{t+1}^\top (Z_{t+1} - Z_t) = \varphi_{t+1}^\top \Delta Z_{t+1}.$$

Definition 2.3.4

Eine Handelsstrategie φ heißt *selbstfinanzierend* ("self-financing"), falls

$$\varphi_t^\top Z_t = \varphi_{t+1}^\top Z_t$$

für $t = 1, 2, \dots, T-1$.

Dies bedeutet, dass kein Zu- oder Abfluss von Geld stattfindet. Wenn der Investor die neuen Preise Z_t beobachtet, passt er sein Portfolio von φ_t zu φ_{t+1} an, ohne dass er zusätzliches Vermögen hinzufügt oder abzieht.

Wir zeigen im Folgenden, dass bei selbstfinanzierenden Strategien die Kenntnis von $\varphi = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ äquivalent zur Kenntnis von (V_0^φ, α) ist.

Lemma 2.3.5

Sei $\varphi = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ eine selbstfinanzierende Strategie. Dann gilt

$$\beta_t = \beta_1 - \sum_{n=2}^t \Delta \alpha_n^\top \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}} = V_0^\varphi - \sum_{n=1}^t \Delta \alpha_n^\top \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}$$

für $t = 1, \dots, T$, wobei $\Delta \alpha_1^k := \alpha_1^k$ für $k = 1, \dots, d$.

Beweis

Sei $t = 1$.

$$V_0^\varphi = \beta_1 B_0 + \alpha_1^\top S_0 = \beta_1 + \alpha_1^\top \frac{S_0}{B_0}$$

und daher

$$\beta_1 = V_0^\varphi - \alpha_1^\top \frac{S_0}{B_0} = V_0^\varphi - \Delta \alpha_1^\top \frac{S_0}{B_0}$$

Sei $t \in \{2, 3, \dots, T\}$. Da $\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ selbstfinanzierend ist, gilt

$$\begin{aligned} \beta_{t-1} B_{t-1} + \alpha_{t-1}^\top S_{t-1} &= \beta_t B_{t-1} + \alpha_t^\top S_{t-1} \\ \iff (\beta_t - \beta_{t-1}) B_{t-1} &= -(\alpha_t^\top - \alpha_{t-1}^\top) S_{t-1} \\ \iff \Delta \beta_t &= -\Delta \alpha_t^\top \frac{S_{t-1}}{B_{t-1}} \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \beta_t &= \beta_1 - \beta_1 + \beta_2 - \beta_2 + \dots + \beta_{t-1} - \beta_{t-1} + \beta_t \\ &= \beta_1 + \sum_{n=2}^t \Delta \beta_n \\ &= \beta_1 + \sum_{n=2}^t (-1) \Delta \alpha_n^\top \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}} \\ &= V_0^\varphi - \Delta \alpha_1^\top \frac{S_0}{B_0} - \sum_{n=2}^t \Delta \alpha_n^\top \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}} \\ &= V_0^\varphi - \sum_{n=1}^t \Delta \alpha_n^\top \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}} \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Man kann sich oft ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf den Fall $B_t = 1$ beschränken, da der folgende Zusammenhang gilt:

Lemma 2.3.6

Sei $\varphi = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ eine selbstfinanzierende Strategie und $X_t^k := \frac{S_t^k}{B_t}$ der diskontierte Preisprozess, $k = 1, \dots, d$ und $t = 1, \dots, T$. Dann gilt:

$$\frac{V_t^\varphi}{B_t} = V_0^\varphi + \sum_{n=1}^t \alpha_n^\top \Delta X_n$$

Beweis

Für $n = 1, \dots, T$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{V_n}{B_n} - \frac{V_{n-1}}{B_{n-1}} &= \frac{1}{B_n} (\beta_n B_n + \alpha_n^\top S_n) - \frac{1}{B_{n-1}} (\beta_{n-1} B_{n-1} + \alpha_{n-1}^\top S_n) \\ &= \frac{1}{B_n} (\beta_n B_n + \alpha_n^\top S_n) - \frac{1}{B_{n-1}} (\beta_n B_{n-1} + \alpha_n^\top S_n) \\ &= (\beta_n - \beta_n) + \alpha_n^\top \left(\frac{S_n}{B_n} - \frac{S_n}{B_{n-1}} \right) \\ &= \alpha_n^\top \Delta X_n \end{aligned}$$

II. Bewertung von Derivaten in diskreter Zeit

Daher gilt mit $B_0 = 1$:

$$\begin{aligned}\frac{V_t^\varphi}{B_t} &= \frac{V_0^\varphi}{B_0} - \frac{V_0^\varphi}{B_0} + \dots + \frac{V_{t-1}^\varphi}{B_{t-1}} - \frac{V_{t-1}^\varphi}{B_{t-1}} + \frac{V_t^\varphi}{B_0} \\ &= \frac{V_0^\varphi}{B_0} + \sum_{n=1}^t \left(\frac{V_n^\varphi}{B_n} - \frac{V_{n-1}^\varphi}{B_{n-1}} \right) \\ &= V_0^\varphi + \sum_{n=1}^t \alpha_n^\top \Delta X_n\end{aligned}$$

■

Definition 2.3.7

Den Prozess (G_t^α) einer Handelsstrategie $\varphi = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$, der für $t = 1, \dots, T$ durch

$$G_t^\alpha := \sum_{n=1}^t \alpha_n^\top \Delta X_n$$

definiert ist und $G_0^\alpha = 0$, bezeichnen wir als (diskontierten) *Gewinnprozess* von φ .

Definition 2.3.8

Ein Zahlungsanspruch ("contingent claim") ist eine \mathcal{F} -messbare Zufallsvariable $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Bemerkung 2.3.9

Ist $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T = \sigma(S_0, S_1, \dots, S_T)$, so ist $H = h(S_0, S_1, \dots, S_T)$ für eine Funktion $h : \mathbb{R}^{T+1} \rightarrow \mathbb{R}$.

Beispiel 2.3.10

- Europäische Call-Option: $H = (S_T - K)^+$
- Europäische Put-Option: $H = (K - S_T)^+$
- Termingeschäft ("short"): $H = K - S_T$
- Digital Call-Option: $H = 1_{\{S_T > K\}}$
- Down-and-out-call: $H = (S_T - K_1) \cdot 1_{\{\min_{t \in \{0, \dots, T\}} S_t > K_2\}}$
- Asiatische Option: $H = (S_T - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T S_t)^+$

Definition 2.3.11

- (1) Ein Zahlungsanspruch H heißt *erreichbar*, wenn es eine selbstfinanzierende Strategie φ gibt mit

$$V_T^\varphi = H.$$

Dann heißt $\pi(H) = V_0^\varphi$ ein Preis von H und φ eine *Hedging-Strategie*.

- (2) Ein Markt heißt *vollständig*, falls jeder Zahlungsanspruch erreichbar ist.

Definition 2.3.12

Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie heißt *Arbitrage-Strategie*, falls $P(V_0^\varphi = 0) = 1$, $P(V_T^\varphi \geq 0) = 1$ und $P(V_T^\varphi > 0) > 0$.

Wir sagen, dass eine Arbitragemöglichkeit existiert, falls eine Arbitrage-Strategie existiert.

Bemerkung 2.3.13

Von Lemma 2.3.6 gilt für eine selbstfinanzierende Strategie $\varphi = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$

$$\frac{V_T^\varphi}{B_T} = V_0^\varphi + G_T^\alpha.$$

Daher liegt eine Arbitragemöglichkeit genau dann vor, wenn eine selbstfinanzierende Strategie $\varphi = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ existiert mit $P(V_0^\varphi = 0) = 1$, $P(G_T^\alpha \geq 0) = 1$, $P(G_T^\alpha > 0) > 0$.

Bemerkung 2.3.14

Wir schreiben (NA) ("no arbitrage"), wenn keine Arbitragemöglichkeit existiert.

Lemma 2.3.15

Es gelte (NA). Dann ist der Preis $\pi(H)$ für einen erreichbaren Zahlungsanspruch eindeutig bestimmt und damit unabhängig von der Wahl der Hedging-Strategie.

Beweis

Sei H ein erreichbarer Zahlungsanspruch und $\varphi = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$, $\tilde{\varphi} = \begin{pmatrix} \tilde{\beta} \\ \tilde{\alpha} \end{pmatrix}$ zwei Hedging-Strategien für H . Von Lemma 2.3.5 wissen wir, dass $\varphi, \tilde{\varphi}$ durch (V_0^φ, α) und $(V_0^{\tilde{\varphi}}, \tilde{\alpha})$ ausgedrückt werden können. Aus Lemma 2.3.6 folgt dann

$$V_0^\varphi + G_T^\alpha = \frac{H}{B_T} = V_0^{\tilde{\varphi}} + G_T^{\tilde{\alpha}}$$

Angenommen, $V_0^\varphi \neq V_0^{\tilde{\varphi}}$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $V_0^\varphi < V_0^{\tilde{\varphi}}$. Dann ist $d := V_0^{\tilde{\varphi}} - V_0^\varphi > 0$. Damit gilt

$$\begin{aligned} 0 &= V_0^\varphi - V_0^{\tilde{\varphi}} - G_T^{\tilde{\alpha}} + G_T^\alpha \\ &= -d + G_T^\alpha - G_T^{\tilde{\alpha}} \\ &= -d + \sum_{n=1}^T (\alpha_n^\top - \tilde{\alpha}_n^\top) \Delta X_n \\ &= -d + G_T^{\alpha - \tilde{\alpha}} \end{aligned}$$

Daher ist $G_T^{\alpha - \tilde{\alpha}} > 0$. Also ist ψ eine Arbitragemöglichkeit, wobei $\psi = \begin{pmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\alpha} \end{pmatrix}$, $\hat{\alpha} = \alpha - \tilde{\alpha}$ und $\hat{\beta}$ ist definiert über Lemma 2.3.5, wobei $V_0^\psi = 0$, im Widerspruch zu (NA). ■

2.4. Das Cox-Ross-Rubinstein-Modell

Wir betrachten nun ein einfaches Finanzmarktmodell in diskreter Zeit. In diesem Modell werden wir viele wichtige Ergebnisse zur Bewertung von Derivaten herleiten, die auch in viel allgemeineren Zusammenhängen gelten (siehe spätere Kapitel). Wir betrachten das grundlegende Binomialmodell von Cox, Ross und Rubinstein (1979 veröffentlicht).

Sei $d = 1$, das heißt wir betrachten einen Markt mit einem Bond und einer Aktie.

2.4.1. Ein-Perioden-CRR-Modell

Wir beginnen mit einem Ein-Perioden-Modell, also $T = 1$. Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ und $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\Omega)$. Die Werte des Bondes seien $B_0 = 1$ und $B_1 = 1 + r$, $r > 0$. Die Werte der Aktie seien $S_0 = S > 0$ und

$$S_1(\omega) = \begin{cases} u \cdot S_0, & \text{falls } \omega = \omega_1 \\ d \cdot S_0, & \text{falls } \omega = \omega_2 \end{cases}$$

für $0 < d < u$. Hier steht u für den up-Faktor und d für den down-Faktor. (Wäre $u = d$, wäre das Modell nicht wirklich stochastisch und damit nicht interessant.)

Lemma 2.4.1

Gegeben sei das Ein-Perioden-CRR-Modell. Dann gilt (NA) genau dann, wenn $d < 1 + r < u$.

Beweis

$$\begin{aligned}
 d < 1 + r < u &\iff \frac{d}{1+r} < 1 < \frac{u}{1+r} \\
 &\iff \frac{S_0 d}{1+r} < S_0 < \frac{S_0 u}{1+r} \\
 &\iff \frac{S_0 d}{1+r} - S_0 < 0 < \frac{S_0 u}{1+r} - S_0 \\
 &\iff \frac{S_1(\omega_2)}{1+r} - S_0 < 0 < \frac{S_1(\omega_1)}{1+r} - S_0 \\
 &\iff (NA)
 \end{aligned}$$

Die letzte Äquivalenz folgt aus den folgenden Überlegungen:

„ \implies “ Sei $V_0 = \beta + \alpha S_0 = 0$, daher $\beta = V_0 - \alpha S_0 = -\alpha S_0$. Also ist

$$V_1 = \beta(1+r) + \alpha S_1 = -\alpha S_0(1+r) + \alpha S_1 = \alpha(1+r) \left(\frac{S_1}{1+r} - S_0 \right)$$

Wir haben gerade gesehen, dass V_1 nicht mit positiver Wahrscheinlichkeit positiv sein kann, ohne dass es auch mit positiver Wahrscheinlichkeit negativ sein kann. Damit gilt (NA).

„ \impliedby “ Angenommen, $d \geq 1 + r$. Beginne ohne Anfangsvermögen. Leihe Geld für das Kaufen einer Aktie von der Bank und kaufe diese Aktie ($\alpha = 1$, $\beta = -S_0$, $V_0 = 0$).

Im ersten Szenario ist $S_1(\omega_1) = uS_0$ und damit

$$V_1 = \beta(1+r) + \alpha S_1 = -S_0(1+r) + uS_0 \geq -S_0 d + uS_0 = S_0(u-d) > 0.$$

Im zweiten Szenario ist $S_1(\omega_2) = dS_0$ und damit

$$V_1 = \beta(1+r) + \alpha S_1 = -S_0(1+r) + dS_0 \geq -S_0 d + dS_0 = 0.$$

Dies ist ein Widerspruch zu (NA). Analog kann man bei der Annahme von $u \leq 1 + r$ einen Leerverkauf der Aktie machen und das Geld auf dem Bankkonto investieren ($\alpha = -1$, $\beta = S_0$, $V_0 = 0$). ■

Lemma 2.4.2

Es gelte (NA). Dann ist das CRR-Modell vollständig, das heißt zu jedem Zahlungsanspruch H gibt es eine selbstfinanzierende Strategie $\varphi = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$, so dass $V_1^\varphi = H$.

Insbesondere ist hier

$$\alpha_1 = \frac{H(\omega_1) - H(\omega_2)}{(u - d)S_0} \quad \beta_1 = \frac{uH(\omega_2) - dH(\omega_1)}{(u - d)(1 + r)}$$

und damit ist der eindeutige Preis $\pi(H)$ gegeben durch

$$\pi(H) = \beta_1 B_0 + \alpha_1 S_0 = \frac{H(\omega_1)}{1 + r} \frac{1 + r - d}{u - d} + \frac{H(\omega_2)}{1 + r} \left(1 - \frac{1 + r - d}{u - d}\right)$$

Beweis

Der Ansatz ist $V_1^\varphi = \beta_1(1 + r) + \alpha_1 S_1 = H$. Da $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \beta_1(1 + r) + \alpha_1 S_1(\omega_1) &= H(\omega_1) \\ \beta_1(1 + r) + \alpha_1 S_1(\omega_2) &= H(\omega_2) \end{aligned}$$

was sich schreiben lässt als

$$\begin{aligned} \beta_1(1 + r) + \alpha_1 u S_0 &= H(\omega_1) \\ \beta_1(1 + r) + \alpha_1 d S_0 &= H(\omega_2). \end{aligned}$$

Dieses lässt sich nach β_1, α_1 auflösen, so dass man durch Umsortieren die Behauptung erhält. ■

Bemerkung 2.4.3

- Wir setzen $q := \frac{1+r-d}{u-d}$. Wegen (NA) gilt $0 < q < 1$.
- Nach Lemma 2.4.2 gilt dann für den Preis von H :

$$\pi(H) = \frac{H(\omega_1)}{1 + r} q + \frac{H(\omega_2)}{1 + r} (1 - q)$$

Wir definieren ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q durch $Q(\{\omega_1\}) = q$ und $Q(\{\omega_2\}) = 1 - q$. Also gilt $\pi(H) = E_Q[\frac{H}{1+r}]$, wobei E_Q den Erwartungswert bezüglich des Maßes Q bezeichnet.

- Für den diskontierten Preis $X_1 = \frac{S_1}{B_1}$ gilt

$$\begin{aligned} E_Q[X_1] &= E_Q\left[\frac{S_1}{B_1}\right] \\ &= \frac{S_1(\omega_1)}{B_1} \cdot q + \frac{S_1(\omega_2)}{B_1} \cdot (1 - q) \\ &= \frac{uS_0}{1 + r} q + \frac{dS_0}{1 + r} (1 - q) \\ &= S_0 = \frac{S_0}{B_0} = X_0. \end{aligned}$$

Q ist das einzige Wahrscheinlichkeitsmaß mit $E_Q[X_1] = X_0$.

2.4.2. Mehr-Perioden-CRR-Modell

Wir betrachten das T -Perioden-CRR-Modell, das heißt wir betrachten den Zeithorizont T und $t \in \{0, 1, \dots, T\}$.

Sei $r > 0$ und $B_{t+1} = B_t(1 + r)$, $B_0 = 1$. Dann ist $B_t = (1 + r)^t$ für $t = 0, 1, \dots, T$.

Für die risikobehaftete Anlagemöglichkeit gelte

$$S_{t+1} = \begin{cases} uS_t, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p \\ dS_t, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - p \end{cases}$$

für $0 < d < u$, $p \in (0, 1)$, $t = 0, 1, \dots, T - 1$ und $S_0 > 0$.

Wir konstruieren nun ein Modell, indem wir den Prozess

$$(Y_t) = \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right)$$

mit $t = 1, \dots, T$ jeweils als Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}_t, \tilde{\mathcal{F}}_t, \tilde{P}_t)$ betrachten, wobei

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_t &:= \tilde{\Omega} = \{u, d\}, \\ \tilde{\mathcal{F}}_t &:= \tilde{\mathcal{F}} := \mathcal{P}(\tilde{\Omega}) = \{\emptyset, \{d\}, \{u\}, \tilde{\Omega}\} \\ \tilde{P}_t &:= \tilde{P} \text{ mit } \tilde{P}(\{u\}) = p, \tilde{P}(\{d\}) = 1 - p, \text{ für ein } p \in (0, 1) \end{aligned}$$

Auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum ist $Y_t(u) := u$, $Y_t(d) := d$, $t = 1, 2, \dots, T$.

Unser Ziel ist es, einen Wahrscheinlichkeitsraum zu definieren, auf dem wir die Preise der Anlagemöglichkeiten B und S beschreiben können. Da man den Aktienkurs S als

$$S_t = S_0 \prod_{k=1}^t Y_k, \quad t = 1, \dots, T$$

schreiben kann, liegt es nahe als zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum den Produktraum (Ω, \mathcal{F}, P) zu betrachten, wobei:

$$\begin{aligned} \Omega &:= \tilde{\Omega}_1 \times \dots \times \tilde{\Omega}_T \\ \mathcal{F} &:= \mathcal{P}(\Omega) \\ P(\{\omega\}) &:= \tilde{P}(\{y_1\}) \dots \tilde{P}(\{y_T\}) \end{aligned}$$

wobei $\omega = (y_1, \dots, y_T)$ und $y_t \in \{d, u\}$, $t \in \{1, \dots, T\}$.

Für weitere Infos zu Produkträumen siehe Williams, Kapitel 8. Hier werden über den Produktraum unabhängige Wiederholungen eines Zufallsexperiments beschrieben. Da Y_t eine Zufallsvariable ist, die zwei Werte annehmen kann, kann man das durch Y beschriebene Zufallsexperiment als Münzwurf (mit einer nicht notwendig fairen Münze) interpretieren.

Wir definieren nun die Y_t , $t = 1, \dots, T$, neu auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) :

$$Y_t(\omega) = Y_t((y_1, \dots, y_T)) := \begin{cases} u & \text{falls } y_t = u \\ d & \text{falls } y_t = d \end{cases}$$

für $t = 1, \dots, T$.

Mit dieser Konstruktion gilt: $P(Y_t = u) = p = 1 - P(Y_t = d)$ und die Y_i sind unabhängig identisch verteilt.

Die Informationen im Markt werden durch die naheliegende Filtration modelliert: $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{F}_t := \sigma(Y_1, \dots, Y_t) = \sigma(S_1, \dots, S_t)$ für $t \in \{1, \dots, T-1\}$ und $\mathcal{F}_T := \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Bisher haben wir nur das Reale-Welt-Maß P definiert. Zur Optionsbewertung werden wir aber wie im Ein-Perioden-Modell ein risikoneutrales Maß Q benötigen, dass wir analog zum obigen Vorgehen auf dem messbaren Raum (Ω, \mathcal{F}) definieren:

$$Q(\{\omega\}) = Q(\{(y_1, \dots, y_T)\}) = \tilde{Q}(\{y_1\}) \cdots \tilde{Q}(\{y_T\}) = q_{y_1} \cdots q_{y_T}$$

wobei

$$\tilde{Q}(\{y_t\}) := q_{y_t} := \begin{cases} q & \text{falls } y_t = u \\ 1 - q & \text{falls } y_t = d \end{cases}$$

mit $q := \frac{1+r-d}{u-d}$ und wir fordern, dass $d < 1 + r < u$. Man rechnet leicht nach, dass Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

Lemma 2.4.4

Im T -Perioden-CRR-Modell gilt:

$$(NA) \iff d < 1 + r < u$$

Beweis

siehe Übungsblatt ■

Satz 2.4.5

Es gelte (NA). Dann ist das T -Perioden-CRR-Modell vollständig. Insbesondere gilt:

Zu jedem Zahlungsanspruch H gibt es eine selbstfinanzierende Hedging-Strategie $\varphi = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ mit $V_T^\varphi = H$ und

$$\pi(H) = \beta_1 B_0 + \alpha_1 S_0 = \sum_{\omega=(y_1, \dots, y_T) \in \Omega} q_{y_1} \cdots q_{y_T} \frac{H(\omega)}{B_T} = E_Q \left[\frac{H}{B_T} \right]$$

ist der eindeutige Preis von H und Q ist das oben definierte Wahrscheinlichkeitsmaß.

Beweis

Der Preis und die Hedging-Strategie kann rekursiv im Binomialbaum ermittelt werden. Beginne mit $t = T$. Setze $V_T = H$. Da Y_T zwei Werte annehmen kann, wird aus der Gleichung

$$V_t = \beta_t B_t + \alpha_t S_t$$

das Gleichungssystem mit den zwei Gleichungen:

$$V_{t-1} = \beta_{t-1} B_{t-1} + \alpha_{t-1} S_{t-1} = \beta_t B_{t-1} + \alpha_t S_{t-1}$$

II. Bewertung von Derivaten in diskreter Zeit

Löse LGS in zwei Unbekannten (β_T, α_T) (eindeutig lösbar) in Abhängigkeit von (y_1, \dots, y_{T-1}) (zur Erinnerung: $\omega = (y_1, \dots, y_T)$).

Aus der zweiten Gleichung kann nun V_{T-1} berechnet werden (in Abhängigkeit von (y_1, \dots, y_{T-1})).

Für $T = 1$ folgt die Behauptung aus dem Ein-Perioden-CRR-Modell.

Für $T > 1$ kann der Schritt für $t = T - 1, t = T - 2, \dots$ rekursiv wiederholt werden.

Q berechnet man analog zum Ein-Perioden-CRR-Modell. ■

Korollar 2.4.6

Sei H ein europäischer Zahlungsanspruch mit Laufzeit T gegeben durch $H = f(S_T)$. Dann ist der Preis (zur Zeit 0) gegeben durch

$$\pi(H) = E_Q \left[\frac{f(S_T)}{B_T} \right] = \frac{1}{B_T} \sum_{k=0}^T \binom{T}{k} q^k (1-q)^{T-k} f(S_0 u^k d^{T-k}),$$

wobei $q = \frac{1+r-d}{u-d}$.

Beweis

Es gilt $S_T = S_0 \prod_{k=1}^T Y_k$ mit $Q(Y_k = u) = q = 1 - Q(Y_k = d)$. Daher folgt aus Satz 2.4.5 sofort die Behauptung. ■

Bemerkung 2.4.7 (Hedging im Mehr-Perioden-CRR-Modell)

Sei H ein Zahlungsanspruch und $\pi_t(H, S_t)$ der Preis des Zahlungsanspruchs H zum Zeitpunkt t bei Kurs S_t . Sei $\varphi = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ eine selbstfinanzierende Hedging-Strategie für H , so gilt $\pi_t(H, S_t) = V_t^\varphi$ und außerdem $\pi(H) = \pi_0(H, S_0)$.

Mit $\pi_t(H, S_t) = \beta_t B_t + \alpha_t S_t$ folgt:

$$\pi_t(H, uS_{t-1}) = \beta_t B_t + \alpha_t uS_{t-1}$$

$$\pi_t(H, dS_{t-1}) = \beta_t B_t + \alpha_t dS_{t-1}$$

und daher ist

$$\alpha_t = \frac{\pi_t(H, uS_{t-1}) - \pi_t(H, dS_{t-1})}{(u-d)S_{t-1}}$$

und

$$\beta_t = \frac{u\pi_t(H, dS_{t-1}) - d\pi_t(H, uS_{t-1})}{(u-d)B_t}.$$

Definition 2.4.8

- Ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf (Ω, \mathcal{F}) , für das

$$(X_t) = \left(\frac{S_t}{B_t} \right)_{t \in \{0, \dots, T\}}$$

ein Martingal ist (bezüglich der Filtration \mathcal{F}_t), heißt *Martingalmaß* oder *risikoneutrales Maß*. Zur Erinnerung: Für ein solches Q gilt: (X_t) ist adaptiert, $E|X_t| < \infty$ für $t = 0, \dots, T$ und $E_Q[X_{t+1} | \mathcal{F}_t] = X_t$ für $t = 0, \dots, T-1$.

- $\mathcal{Q} = \{Q \text{ Wahrscheinlichkeitsmaß auf } (\Omega, \mathcal{F}) \mid Q \text{ ist ein Martingalmaß}\}$
- $\mathcal{Q}^* = \{Q \in \mathcal{Q} \mid Q \text{ ist äquivalent zu } P\}$

Bemerkung 2.4.9

- Zur Erinnerung: Ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q ist äquivalent zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß P (kurz $Q \sim P$) genau dann, wenn Q und P die gleichen Nullmengen haben, das heißt für alle $A \in \mathcal{F}$ gilt $P(A) = 0 \iff Q(A) = 0$.
- Wir haben bisher gefordert, dass $P(\{\omega\}) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$. Daher ist in diesem Fall $\mathcal{Q}^* = \{Q \in \mathcal{Q} \mid \forall \omega \in \Omega : Q(\{\omega\}) > 0\}$.

Satz 2.4.10

Gegeben sei das T -Perioden-CRR-Modell. Dann gilt

- (1) (NA) $\iff d < 1 + r < u$
- (2) $d < 1 + r < u \iff$ Es existiert ein äquivalentes Martingalmaß Q . (EMM)
- (3) Es gelte $d < 1 + r < u$. Dann ist das Martingalmaß eindeutig und charakterisiert durch

$$q = \frac{1 + r - d}{u - d}.$$

Beweis

- (1) Lemma 2.4.4, Übungsblatt
- (2) Sei Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 E_Q[X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] &= E_Q\left[\frac{S_{t+1}}{B_{t+1}} \mid \mathcal{F}_t\right] \\
 &= E_Q\left[\frac{Y_{t+1}S_t}{B_{t+1}} \mid \mathcal{F}_t\right] \\
 &= \frac{S_t}{B_{t+1}} E_Q[Y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] \\
 &= \frac{S_t}{B_{t+1}} E_Q[Y_{t+1}] \\
 &= \frac{S_t}{B_t} \frac{1}{1+r} E_Q[Y_{t+1}] \\
 &= X_t \frac{1}{1+r} E_Q[Y_{t+1}] \\
 &\stackrel{!}{=} X_t
 \end{aligned}$$

Damit Q ein Martingal ist, muss also $\frac{1}{1+r} E_Q[Y_{t+1}] = 1$ gelten, also $qu + (1 - q)d = 1 + r$ für ein $q \in [0, 1]$.

Das ist ein gewichtetes Mittel von $1 + r$ und daher $1 + r \in [d, u]$. Falls Q äquivalent zu P ist, ist $q \in (0, 1)$ und damit Q äquivalent zu P .

- (3) Die Gleichung $qu + (1 - q)d = 1 + r$ hat eine eindeutige Lösung und diese ist $q = \frac{1+r-d}{u-d}$. ■

2.5. Hauptsatz der Optionspreistheorie

Wir betrachten wieder allgemeine endliche Finanzmärkte wie in [Sektion 2.3](#). Sei (Ω, \mathcal{F}, P) der Wahrscheinlichkeitsraum mit natürlicher Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ und $I = \{0, 1, \dots, T\}$. Wir betrachten wieder einen Bond $(B_t)_{t \in I}$ und d Aktien $(S_t^k)_{t \in I}$, $k = 1, \dots, d$. Wir schreiben wieder

$$(X_t)_{t \in I} = \left(\frac{S_t}{B_t} \right)_{t \in I}$$

und wie zuvor $\mathcal{Q} = \{Q \text{ Wahrscheinlichkeitsmaß auf } (\Omega, \mathcal{F}) \mid Q \text{ ist Martingalmaß}\}$ und $\mathcal{Q}^* = \{Q \in \mathcal{Q} \mid Q \sim P\} = \{Q \in \mathcal{Q} \mid \forall \omega \in \Omega : Q(\{\omega\}) > 0\}$.

Satz 2.5.1

Sei $Q \in \mathcal{Q}^*$ und $\varphi = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ eine selbstfinanzierende Strategie. Dann ist der diskontierte Vermögensprozess

$$\left(\frac{V_t^\varphi}{B_t} \right)$$

ein Q -Martingal.

Beweis

Da φ selbstfinanzierend ist, gilt nach [Lemma 2.3.6](#):

$$\frac{V_t^\varphi}{B_t} = V_0^\varphi + G_t^\alpha = V_0^\varphi + \sum_{n=1}^t \alpha_n^\top \Delta X_n$$

und daher

$$\frac{V_t^\varphi}{B_t} - \frac{V_{t-1}^\varphi}{B_{t-1}} = G_t^\alpha - G_{t-1}^\alpha = \alpha_t^\top \Delta X_t = \alpha_t^\top \left(\frac{S_t}{B_t} - \frac{S_{t-1}}{B_{t-1}} \right)$$

und da $X_t = \frac{S_t}{B_t}$ ein Q -Martingal ist, gilt

$$E_Q \left[\frac{V_t^\varphi}{B_t} - \frac{V_{t-1}^\varphi}{B_{t-1}} \mid \mathcal{F}_{t-1} \right] = \alpha_t^\top E_Q \left[\frac{S_t}{B_t} - \frac{S_{t-1}}{B_{t-1}} \mid \mathcal{F}_{t-1} \right] = 0.$$

Der diskontierte Wertprozess ist also eine Martingal-Transformation des Q -Martingals $\frac{S_t}{B_t}$ durch φ und daher selbst ein Q -Martingal. ■

Satz 2.5.2

Sei Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Ω, \mathcal{F}) . Dann gilt

$$(1) \quad Q \in \mathcal{Q} \iff \forall \alpha : E_Q[G_T^\alpha] = 0$$

$$(2) \quad \mathcal{Q}^* \neq \emptyset \implies (\text{NA})$$

Beweis

- (1) „ \Rightarrow “: Sei $Q \in \mathcal{Q}$. Für alle α ist $G_T^\alpha = \sum_{n=1}^T \alpha_n^\top \Delta X_n$. Im Beweis von Satz 2.5.1 wurde gezeigt, dass $E_Q[\alpha_n^\top \Delta X_n | \mathcal{F}_{n-1}] = 0$ für alle $n \in \{1, \dots, T\}$. Da $E_Q[\alpha_n^\top \Delta X_n] = E_Q[E_Q[\alpha_n^\top \Delta X_n | \mathcal{F}_{n-1}]]$ folgt die Behauptung.

„ \Leftarrow “: Für $n \in \{1, \dots, T\}$, $k \in \{1, \dots, d\}$ und $B \in \mathcal{F}_{n-1}$ definieren wir die folgende Strategie α :

$$\alpha_n^k := 1_B \quad \alpha_t^j = 0 \text{ für } (j, t) \neq (k, n)$$

Dann ist α vorhersehbar. Dann gilt $G_T^\alpha := 1_B \Delta X_n^k$ und nach Voraussetzung

$$0 = E_Q[G_T^\alpha] = E_Q[1_B \Delta X_n^k]$$

Da $1_B \mathcal{F}_{n-1}$ -messbar ist, gilt dann

$$0 = E_Q[E_Q[1_B \Delta X_n^k | \mathcal{F}_{n-1}]] = E_Q[1_B E_Q[\Delta X_n^k | \mathcal{F}_{n-1}]]$$

Da n, k, B beliebig sind, folgt für alle $n = 1, \dots, T$, $k = 1, \dots, d$: $E_Q[\Delta X_n^k | \mathcal{F}_{n-1}] = 0$, also $Q \in \mathcal{Q}$.

- (2) Sei $Q \in \mathcal{Q}^*$. Die (NA)-Bedingung ist äquivalent zu der Aussage, dass für alle selbstfinanzierenden Handelsstrategien $\varphi = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ gilt

$$G_T^\alpha \geq 0 \implies G_T^\alpha = 0 \quad (P\text{-f.s.})$$

Aus (1) folgt, dass für alle α gilt $E_Q[G_T^\alpha] = 0$. Damit ist $G_T^\alpha \geq 0 \implies G_T^\alpha = 0$ (Q -f.s.). Da Q äquivalent zu P ist, gilt dies auch P -f.s. ■

Lemma 2.5.3 (Trennungssatz)

Sei $L \subseteq \mathbb{R}^n$ ein linearer Unterraum und $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte und konvexe Teilmenge mit $L \cap K = \emptyset$. Dann gibt es eine lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $\forall x \in L: f(x) = 0$ und $\forall x \in K: f(x) > 0$.

Satz 2.5.4 (Erster Fundamentalsatz der Preistheorie)

(Auch “first fundamental theorem of asset pricing”, FTAP1)

$$(NA) \iff \mathcal{Q}^* \neq \emptyset$$

Bemerkung 2.5.5

Ausformuliert sagt FTAP1: Der Finanzmarkt ist genau dann arbitragefrei, wenn ein zu P äquivalentes Maß Q existiert, so dass der diskontierte d -dimensionale Preisprozess

$$(X_t)_{t \in I} = \left(\frac{S_t}{B_t} \right)_{t \in I}$$

ein Martingal unter Q ist.

Beweis

„ \Leftarrow “ Siehe Satz 2.5.2 (2).

„ \Rightarrow “ Ω ist endlich, wir setzen $m := |\Omega| < \infty$ und schreiben $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$. Wir werden im Folgenden eine Zufallsvariable X auf (Ω, \mathcal{F}, P) als Vektor im $\mathbb{R}^{|\Omega|} = \mathbb{R}^m$ interpretieren, indem wir schreiben $(X(\omega_1), \dots, X(\omega_m))^\top$. Sei Λ die Menge aller Zufallsvariablen auf (Ω, \mathcal{F}, P) . Dann bezeichnen wir mit $\tilde{\Lambda} \subseteq \mathbb{R}^m$ den dazugehörigen m -dimensionalen Raum $(X \in \Lambda \iff (X(\omega_1), \dots, X(\omega_m))^\top \in \tilde{\Lambda})$. Wir schreiben für $X(\omega_i)$ auch X_i .

Wir definieren zwei Unterräume des \mathbb{R}^m :

$$C := \{Y \in \tilde{\Lambda} \mid \forall i \in \{1, \dots, m\} : Y_i \geq 0 \text{ und } \exists i \in \{1, \dots, m\} : Y_i > 0\}$$

$$L := \{Y \in \tilde{\Lambda} \mid \forall i \in \{1, \dots, m\} : Y_i = G_T^\alpha(\omega_i) \text{ für eine selbstfinanzierende}$$

$$\text{Handelsstrategie } \varphi = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}\}$$

Die Menge C wird verwendet, um (NA) geeignet auszudrücken. Sei $\varphi = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ eine selbstfinanzierende Handelsstrategie mit Anfangsvermögen $V_0^\varphi = 0$, dann folgt aus (NA), dass $(V_T^\varphi(\omega_1), \dots, V_T^\varphi(\omega_m))^\top \notin C$.

Da $G_T^\alpha = \sum_{n=1}^T \alpha_n \Delta X_n$ linear ist, ist $L \subseteq \mathbb{R}^m$ ein linearer Unterraum. L beschreibt die Menge aller Zahlungsansprüche, die erreichbar zum Preis 0 sind. Wegen (NA) gilt daher $C \cap L = \emptyset$.

Wir definieren nun einen weiteren Unterraum des \mathbb{R}^m :

$$K := \{Y \in C \mid \sum_{i=1}^m Y_i = 1\}.$$

K ist konvex und kompakt, und da $K \subseteq C$ ist, gilt wegen (NA) auch hier $K \cap L = \emptyset$.

Aus dem Trennungssatz (Lemma 2.5.3) folgt die Existenz einer linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\forall x \in L : f(x) = 0$ und $\forall x \in K : f(x) > 0$, die wir als $f(x) = q^\top x = \sum_{i=1}^m q_i x_i$ schreiben.

Wir betrachten die Zufallsvariable $\xi^{(i)} := 1_{\{\omega_i\}}$. Dann ist der zugehörige m -dimensionale Vektor $(\xi^{(i)}(\omega_1), \dots, \xi^{(i)}(\omega_m))^\top$, wobei $\xi_j^{(i)} = \delta_{ij}$. Daher ist $(\xi^{(i)}(\omega_1), \dots, \xi^{(i)}(\omega_m))^\top \in K$ für $i = 1, \dots, m$. Dann gilt

$$f((\xi^{(i)}(\omega_1), \dots, \xi^{(i)}(\omega_m))^\top) = \sum_{j=1}^m \xi_j^{(i)} q_j = q_i.$$

Der Trennungssatz liefert uns also $q_i > 0$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$.

Wir definieren nun ein neues Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Ω, \mathcal{F}) :

$$Q(\{\omega_i\}) := \frac{q_i}{\sum_{j=1}^m q_j}$$

Da dieses Q keine nichtleeren Nullmengen hat, ist Q äquivalent zu P .

Aus dem Trennungssatz folgt insbesondere, dass $f(x) = q^\top x = 0$ für alle $x \in L$. Sei $\varphi = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ eine selbstfinanzierende Handelsstrategie. Dann gilt

$$E_Q[G_T^\alpha] = \sum_{i=1}^m \frac{q_i}{\sum_{j=1}^m q_j} G_T^\alpha(\omega_i) = \frac{1}{\sum_{j=1}^m q_j} \sum_{i=1}^m q_i G_T^\alpha(\omega_i) = 0,$$

da $(G_T^\alpha(\omega_1), \dots, G_T^\alpha(\omega_m))^\top \in L$. Mit Satz 2.5.2 (1) folgt damit, dass $Q \in \mathcal{Q}$, und da Q äquivalent zu P ist, auch $Q \in \mathcal{Q}^*$. ■

2.5.1. Risikoneutrale Bewertung von Zahlungsansprüchen

Das folgende Lemma verallgemeinert Lemma 2.3.15.

Lemma 2.5.6

Es gelte (NA). Dann gilt für jeden erreichbaren Zahlungsanspruch H und zwei selbstfinanzierende Strategien φ, ψ mit $V_T^\varphi = H = V_T^\psi$ zu jedem Zeitpunkt $t = 0, \dots, T$:

$$V_t^\varphi = V_t^\psi$$

Beweis

Übungsblatt ■

Definition 2.5.7

Es gelte (NA) und H sei ein erreichbarer Zahlungsanspruch mit Laufzeit T . Der Arbitragepreisprozess

$$(\pi_t(H))_{t \in \{0, \dots, T\}}$$

ist der Wertprozess einer replizierenden Strategie φ von H .

Satz 2.5.8

Es gelte (NA). Sei H ein erreichbarer Zahlungsanspruch. Dann gilt die risikoneutrale Bewertungsformel

$$\pi_t(H) = B_t E_Q \left[\frac{H}{B_T} \mid \mathcal{F}_t \right]$$

wobei $Q \in \mathcal{Q}^*$ beliebig.

Beweis

Da H erreichbar ist, existiert eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\varphi = \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)$ mit $H = V_T^\varphi$. Wegen (NA) existiert nach Satz 2.5.4 ein $Q \in \mathcal{Q}^*$. Aus Satz 2.5.1 folgt, dass

$$\left(\frac{V_t^\varphi}{B_t} \right)$$

ein Q -Martingal ist. Daher gilt

$$\pi_t(H) = V_t^\varphi = B_t \frac{V_t^\varphi}{B_t} = B_t E_Q \left[\frac{V_T^\varphi}{B_T} \mid \mathcal{F}_t \right] = B_t E_Q \left[\frac{H}{B_T} \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad \blacksquare$$

Der folgende Satz gibt uns nun die Methode an, mit der wir faire Preise zum Zeitpunkt $t = 0$ eines Zahlungsanspruchs bestimmen können. Ein solcher Preis ist ein Erwartungswert unter einem risikoneutralen Maß:

Korollar 2.5.9

Es gelte (NA). Sei H ein erreichbarer Zahlungsanspruch. Dann gilt für den Preis $\pi(H)$ von H zur Zeit $t = 0$:

$$\pi(H) = E_Q \left[\frac{H}{B_T} \right]$$

wobei $Q \in \mathcal{Q}^*$ beliebig.

Beweis

Die Behauptung folgt sofort aus Satz 2.5.8 mit $B_0 = 1$ und $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. ■

2.6. Vollständigkeit und Martingalmaße

Wir haben gesehen, dass das Cox-Ross-Rubinsteinmodell vollständig ist. In allgemeinen endlichen Finanzmärkten liefert uns der zweite Fundamentalsatz den Zusammenhang zwischen Vollständigkeit und Eindeutigkeit des äquivalenten Martingalmaßes.

Satz 2.6.1 (Zweiter Fundamentalsatz der Preistheorie)

(Auch “second fundamental theorem of asset pricing”, FTAP2)

Es gelte (NA). Dann ist der Markt genau dann vollständig, wenn $|\mathcal{Q}^*| = 1$, also wenn genau ein äquivalentes Martingalmaß existiert.

Beweis

„ \Rightarrow “: Der Markt sei vollständig. Wegen (NA) gilt nach Satz 2.5.4 (FTAP1), dass $\mathcal{Q}^* \neq \emptyset$. Seien $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}^*$.

Sei H ein Zahlungsanspruch und $\varphi = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ die zugehörige Hedging-Strategie. Dann gilt $\frac{H}{B_T} = V_0^\varphi + G_T^\alpha$. Aus Satz 2.5.2 folgt: $E_{Q_1}[G_T^\alpha] = 0 = E_{Q_2}[G_T^\alpha]$ und daher $E_{Q_1}[H] = E_{Q_2}[H]$.

Setze nun $H = 1_A$ für $A \in \mathcal{F}$. Dann gilt $Q_1(A) = E_{Q_1}[1_A] = E_{Q_2}[1_A] = Q_2(A)$, und somit $Q_1 = Q_2$ und $|\mathcal{Q}^*| = 1$.

„ \Leftarrow “: Der Markt sei nicht vollständig. Zu zeigen ist $|\mathcal{Q}^*| > 1$.

Wir betrachten wieder die Menge aller Zufallsvariablen auf (Ω, \mathcal{F}) , bezeichnet mit $\tilde{\Lambda}$, und die dazugehörige m -dimensionale Darstellung $\tilde{\Lambda}$ wie im Beweis von Satz 2.5.4, wobei $m = |\Omega|$, $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$.

Sei

$$L := \{(c + G_T^\alpha(\omega_1), \dots, c + G_T^\alpha(\omega_m))^\top \in \tilde{\Lambda} \mid \varphi = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \text{ selbstfinanzierende Handelsstrategie, } c \in \mathbb{R}\}$$

Da G_T^α linear ist, ist L ein linearer Untervektorraum von \mathbb{R}^m .

Wegen (NA) gilt $\mathcal{Q}^* \neq \emptyset$ (Satz 2.5.4, FTAP1). Sei $Q \in \mathcal{Q}^*$ und $Q(\{\omega_i\}) =: q_i$ für $i = 1, \dots, m$. Wir betrachten das Skalarprodukt $(Z, Y) \mapsto E_Q[ZY]$ für Zufallsvariablen $Z, Y \in \Omega$. In der m -dimensionalen Schreibweise bedeutet dies für $(Z(\omega_1), \dots, Z(\omega_m))^\top, (Y(\omega_1), \dots, Y(\omega_m))^\top \in \tilde{\Lambda}$:

$$((Z(\omega_1), \dots, Z(\omega_m))^\top, (Y(\omega_1), \dots, Y(\omega_m))^\top) \mapsto \sum_{i=1}^m Z(\omega_i) Y(\omega_i) q_i$$

Nach Voraussetzung existiert ein nicht erreichbarer Zahlungsanspruch H . Dann ist $(H(\omega_1), \dots, H(\omega_m)) \in \tilde{\Lambda}$, aber $\notin L$. Damit ist L ein echter Untervektorraum von \mathbb{R}^m und das orthogonale Komplement L^\perp ist nicht trivial, das heißt es gibt $(Z(\omega_1), \dots, Z(\omega_m))^\top \in L^\perp \setminus \{0\}$ mit $\sum_{i=1}^m Z(\omega_i) Y(\omega_i) q_i = 0$ für alle $(Y(\omega_1), \dots, Y(\omega_m))^\top \in L$. Da $(1, \dots, 1)^\top \in L$ gilt $\sum_{i=1}^m Z(\omega_i) q_i = 0$.

Wir definieren nun ein weiteres Wahrscheinlichkeitsmaß

$$Q'(\{\omega_i\}) := (1 + \frac{Z(\omega_i)}{2\|Z\|_\infty}) Q(\{\omega_i\})$$

wobei $\|Z\|_\infty = \sup\{|Z(\omega_i)| : \omega_i \in \Omega\}$. Durch die Konstruktion ist klar, dass $Q' \neq Q$. Q' ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß, da für alle $\omega_i \in \Omega : Q'(\{\omega_i\}) > 0$ gilt und

$$\begin{aligned} Q'(\Omega) &= \sum_{i=1}^m \left(1 + \frac{Z(\omega_i)}{2\|Z\|_\infty}\right) Q(\{\omega_i\}) \\ &= \sum_{i=1}^m Q(\{\omega_i\}) + \frac{1}{2\|Z\|_\infty} \sum_{i=1}^m Z(\omega_i) Q(\{\omega_i\}) = 1 + 0 = 1. \end{aligned}$$

Insbesondere hat Q' keine nichtleeren Nullmengen und ist damit äquivalent zu P .

Sei nun $(Y(\omega_1), \dots, Y(\omega_m))^\top = (c + G_T^\alpha(\omega_1), \dots, c + G_T^\alpha(\omega_m))^\top \in L$. Dann gilt

$$\begin{aligned} c + E_{Q'}[G_T^\alpha] &= E_{Q'}[Y] = \sum_{i=1}^m Y(\omega_i) Q'(\{\omega_i\}) \\ &= \sum_{i=1}^m Y(\omega_i) \left(1 + \frac{Z(\omega_i)}{2\|Z\|_\infty}\right) Q(\{\omega_i\}) \\ &= \sum_{i=1}^m Y(\omega_i) q_i + \sum_{i=1}^m Y(\omega_i) \frac{Z(\omega_i)}{2\|Z\|_\infty} q_i \\ &= E_Q[Y] + 0 \\ &= E_Q[c + G_T^\alpha] = c \end{aligned}$$

da $(Y(\omega_1), \dots, Y(\omega_m)) \in L$, $Q \in \mathcal{Q}^*$.

Daher gilt $E_{Q'}[G_T^\alpha] = 0$ und deswegen folgt mit Satz 2.5.2, dass $Q' \in \mathcal{Q}$. Da Q' äquivalent zu P ist, gilt $Q \in \mathcal{Q}^*$. Aus $Q \neq Q'$ folgt damit die Behauptung. ■

2.7. Bestimmung des risikoneutralen Maßes Q

Im Cox-Ross-Rubinstein-Modell haben wir das Maß Q explizit angegeben. Wie sieht dieses Maß in allgemeinen endlichen Finanzmärkten aus? Wir betrachten ein Maß auf $\Omega = \tilde{\Omega}^T$ mit $|\tilde{\Omega}| < \infty$, wobei $\tilde{\Omega}$ die Menge der Ein-Schritt-Bewegungen des Aktienkurses ist (zum Vergleich: Im CRR-Modell ist $\tilde{\Omega} = \{u, d\}$). Wir schreiben $\omega = (y_1, \dots, y_T) \in \Omega$ und $\omega_t = (y_1, \dots, y_t) \in \tilde{\Omega}^t$.

Wir definieren das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$Q(\{\omega\}) = Q(\{(y_1, \dots, y_T)\}) = q_1(y_1) q_2(y_2 | \omega_1) \cdots q_T(y_T | \omega_{T-1})$$

Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten pro Periode können im Gegensatz zum Cox-Ross-Rubinstein-Modell unterschiedlich sein. Deswegen müssen wir angeben, wo im Baum wir uns befinden. Daher die Schreibweise $q_t(y_t | \omega_{t-1})$.

Ist $Q \in \mathcal{Q}$, so gilt für alle $t = 1, \dots, T$, $k = 1, \dots, d$:

$$\begin{aligned} &E_Q[\Delta X_t^k | \mathcal{F}_{t-1}] = 0 \\ \iff &\forall A \in \mathcal{F}_{t-1} \int_A \Delta X_t^k dQ = \int_A 0 dQ \\ \iff &\int_{\{\omega | \omega_{t-1} = (y_1, \dots, y_{t-1})\}} \Delta X_t^k dQ = 0 \\ \iff &\sum_{y \in \tilde{\Omega}} \Delta X_t^k(\omega_{t-1}, y) q_t(y | \omega_{t-1}) = 0 \end{aligned}$$

II. Bewertung von Derivaten in diskreter Zeit

Daher kann man $Q \in \mathcal{Q}^*$ bestimmen, indem man für jede Aktie $k = 1, \dots, d$ und jeden Verzweigungspunkt $t = 1, \dots, T$ die bedingten Wahrscheinlichkeiten $q_t(y | \omega_{t-1})$ aus dem folgenden Gleichungssystem bestimmt:

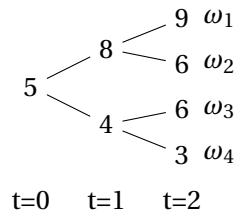
$$\sum_{y \in \tilde{\Omega}} q_t(y | \omega_{t-1}) \Delta X_t^k(\omega_{t-1}, y) = 0$$

$$\sum_{y \in \tilde{\Omega}} q_t(y | \omega_{t-1}) = 1$$

für alle $\omega_{t-1} \in \tilde{\Omega}^{t-1}$, $t = 1, \dots, T$, $k = 1, \dots, d$.

Beispiel 2.7.1

Gegeben sei ein Markt mit zwei Anlagemöglichkeiten: ein Bond, ein Stock. Wir betrachten den Zeithorizont $T = 2$. Die Werte des Bonds seien $B_t = 1$ für alle $t = 0, 1, 2$. Die Werte der Aktie zeigt der folgende Baum:



Dann ist $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$, $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}, \Omega\}$ und $\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(\Omega) = \mathcal{F}$.

Für $t = 1$ gilt

$$q_1(u)(8 - 5) + q_1(d)(4 - 5) = 0$$

$$q_1(u) + q_1(d) = 1$$

woraus man $q_1(u) = \frac{1}{4}$ und $q_1(d) = \frac{3}{4}$ berechnen kann.

Für $t = 2$ und $y_1 = u$ gilt:

$$q_2(u | u)(9 - 8) + q_2(d | u)(6 - 8) = 0$$

$$q_2(u | u) + q_2(d | u) = 1$$

woraus man $q_2(u | u) = \frac{2}{3}$ und $q_2(d | u) = \frac{1}{3}$ berechnen kann.

Für $t = 2$ und $y_1 = d$ gilt:

$$q_2(u | d)(6 - 4) + q_2(d | d)(3 - 5) = 0$$

$$q_2(u | d) + q_2(d | d) = 1$$

woraus man $q_2(u | d) = \frac{1}{3}$ und $q_2(d | d) = \frac{2}{3}$ berechnen kann.

Insgesamt gilt also

$$Q(\{\omega_1\}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

$$Q(\{\omega_2\}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

$$Q(\{\omega_3\}) = \frac{1}{4}$$

$$Q(\{\omega_4\}) = \frac{1}{2}$$

Bemerkung 2.7.2

Das Gleichungssystem hat für jedes t und jedes ω_t $d + 1$ Gleichungen in $|\tilde{\Omega}|$ Unbekannten $q_t(y | \omega_t), \omega \in \tilde{\Omega}$. Eine eindeutige Lösung liegt zum Beispiel dann vor, wenn für alle $\omega_t \in \tilde{\Omega}^t, t = 1, \dots, T$, die Vektoren $(\Delta X_t^k(\omega_{t+1}, y), y \in \tilde{\Omega}) \in \mathbb{R}^{|\tilde{\Omega}|}$ und $(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{|\tilde{\Omega}|}$ linear unabhängig sind und $d + 1 = |\tilde{\Omega}|$ ist.

Anders ausgedrückt: Besteht zwischen der Preisentwicklung der d Aktien keine lineare Abhängigkeit, so existiert ein eindeutiges Martingalmaß im Allgemeinen nur, falls $|\tilde{\Omega}| = d + 1$. Das heißt, wenn die Anzahl der Wertpapiere (Bond und Stock) gleich der Anzahl der möglichen Marktbewegungen ist.

2.8. Konsistente Preissysteme

Wir betrachten im Folgenden sogenannte konsistente Preissysteme. Darüber kann auch $Q \in \mathcal{Q}^*$ interpretiert werden.

Definition 2.8.1

Ein Preissystem ist eine Abbildung $p: \mathbb{R}^{|\Omega|} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

- (1) für $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ und Zahlungsansprüche $H_1, H_2 \in \mathbb{R}^{|\Omega|}$ gilt

$$p(\alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2) = \alpha_1 p(H_1) + \alpha_2 p(H_2) \quad (\text{„Linearität“})$$

- (2) für $H \geq 0$ gilt $p(H) \geq 0$ und

$$p(H) = 0 \iff \forall \omega \in \Omega: H(\omega) = 0 \quad (\text{„Positivität“})$$

Ein Preissystem p heißt konsistent, falls gilt: Ist H ein durch eine selbstfinanzierende Strategie φ erreichbarer Zahlungsanspruch, so ist $p(H) = V_0^\varphi$.

Bemerkung 2.8.2

Ist p ein konsistentes Preissystem, so folgt $p(B_T) = 1$, da $\varphi = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ mit $\alpha = 0, \beta = 1$ eine Hedging-Strategie für B_T ist, mit $V_0^\varphi = 1$.

Satz 2.8.3

- (1) Sei p ein konsistentes Preissystem. Dann ist Q , definiert durch

$$Q(A) := p(B_T 1_A) \text{ für } A \in \mathcal{F},$$

in \mathcal{Q}^* .

- (2) Ist $Q \in \mathcal{Q}^*$, so ist p , definiert durch

$$p(H) := E_Q \left[\frac{H}{B_T} \right] = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{H(\omega)}{B_T(\omega)} Q(\{\omega\}) \text{ für } H \in \mathbb{R}^{|\Omega|},$$

ein konsistentes Preissystem.

Beweis

(1) Da p ein konsistentes Preissystem ist, ist p linear und damit gibt es ein $Y \in \mathbb{R}^{|\Omega|}$, so dass

$$p(H) = \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) H(\omega) \quad (*)$$

Zu zeigen ist, dass $(X_t^k)_{t \in I}$ ein Q -Martingal für $k = 1, \dots, d$ ist.

$$\begin{aligned} E_Q \left[\frac{H}{B_T} \right] &= \sum_{\omega \in \Omega} \frac{H(\omega)}{B_T} Q(\{\omega\}) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} \frac{H(\omega)}{B_T} p(B_T 1_{\{\omega\}}) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} \frac{H(\omega)}{B_T} \left(\sum_{\tilde{\omega} \in \Omega} Y(\tilde{\omega}) B_T 1_{\{\omega\}}(\tilde{\omega}) \right) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} \frac{H(\omega)}{B_T} Y(\omega) B_T \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} H(\omega) Y(\omega) \\ &= p(H) \end{aligned}$$

Für alle $t = 1, \dots, T$, $k = 1, \dots, d$, $A \in \mathcal{F}_{t-1}$ existiert eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\varphi = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ für den Zahlungsanspruch $H = B_T 1_A \Delta X_t^k$. Dabei gilt: Falls zur Zeit $t-1$ das Ereignis A eingetreten ist, so leihe $\frac{B_T}{B_t} S_{t-1}^k$ aus dem Bond und kaufe damit $\frac{B_T}{B_t}$ Anteile des Stocks k .

Zum Zeitpunkt $t-1$ wähle $\beta_t = -\frac{1}{B_{t-1} B_t} S_{t-1}^k B_T$ und $\alpha_t = \frac{B_T}{B_t}$. Das Vermögen nach der Zusammenstellung zum Zeitpunkt $t-1$ ist dann

$$\beta_t B_{t-1} + \alpha_t S_{t-1}^k = -\frac{1}{B_{t-1} B_t} S_{t-1}^k B_T B_{t-1} + \frac{B_T}{B_t} S_{t-1}^k = 0$$

und zum Zeitpunkt t

$$\beta_t B_t + \alpha_t S_t = -\frac{1}{B_{t-1} B_t} S_{t-1}^k B_T B_{t-1} + \frac{B_T}{B_t} S_t^k = B_T \left(\frac{S_t^k}{B_t} - \frac{S_{t-1}^k}{B_{t-1}} \right) = B_T \Delta X_t^k$$

also repliziert φ den Zahlungsanspruch H .

Also gilt

$$0 = V_0^\varphi = p(H) = E_Q \left[\frac{H}{B_T} \right] = E_Q [1_A \Delta X_t^k]$$

und damit ist $(X_t^k)_{t \in I}$ ein Q -Martingal.

Mit $(*)$ und der Positivität von p folgt $Y \geq 0$. Damit gilt für alle $A \in \mathcal{F}$

$$Q(A) = p(B_T 1_A) = \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) B_T 1_A(\omega) = B_T \sum_{\omega \in A} Y(\omega)$$

und $Q(A) \geq 0$. Es ist $Q(\Omega) = p(B_T) = 1$, also ist Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Sei

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & Y(\omega) = 0 \\ 0, & Y(\omega) > 0. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} p(H) = 0 &\implies H = 0 \\ &\implies \forall \omega \in \Omega : Y(\omega) > 0 \\ &\implies \forall \omega \in \Omega : Q(\{\omega\}) = B_T Y(\omega) > 0 \end{aligned}$$

also ist Q ein zu P äquivalentes Martingalmaß.

- (2) p ist ein Erwartungswert und damit linear. $H \geq 0 \implies p(H) \geq 0$ und $H \geq 0, p(H) = E_Q[\frac{H}{B_T}] = 0 \implies H = 0$ Q -fast-sicher und damit, da $Q \in \mathcal{Q}^*$, auch P -fast-sicher. Konsistenz von p ist klar.

■

Satz 2.8.4

Die folgenden Aussagen sind äquivalent

- (1) (NA)
- (2) $\mathcal{Q}^* \neq \emptyset$
- (3) Es gibt ein konsistentes Preissystem (Arrow-Debreu-Preissystem).

Beweis

Die Aussagen folgen sofort aus den Sätzen 2.5.4 und 2.8.3.

■

2.9. Grenzübergang von Cox-Ross-Rubinstein zu Black-Scholes

Von Korollar 2.4.6 wissen wir, dass der Preis eines europäischen Zahlungsanspruchs mit Laufzeit T der Form $H = f(S_T)$ im Mehrperioden-Cox-Ross-Rubinsteinmodell gegeben ist durch

$$\pi(H) = E_Q\left[\frac{f(S_T)}{B_T}\right] = \frac{1}{B_T} \sum_{k=0}^T \binom{T}{k} q^k (1-q)^{T-k} f(S_0 u^k d^{T-k}),$$

wobei $q = \frac{1+r-d}{u-d}$.

Für den europäischen Call mit $H = f(S_T) = (S_T - K)^+$ gilt dann insbesondere mit

$$\begin{aligned} a &:= \min\{k \in \mathbb{N}_0 \mid S_0 u^k d^{T-k} - K > 0\} \\ C_0 &:= \pi(H) = \frac{1}{B_T} \sum_{k=0}^T \binom{T}{k} q^k (1-q)^{T-k} (S_0 u^k d^{T-k} - K)^+ \\ &= \frac{1}{B_T} \sum_{k=a}^T \binom{T}{k} q^k (1-q)^{T-k} (S_0 u^k d^{T-k} - K) \\ &= S_0 \sum_{k=a}^T \binom{T}{k} \left(\frac{qu}{1+r}\right)^k \left(\frac{(1-q)d}{1+r}\right)^{T-k} - \frac{K}{(1+r)^T} \sum_{k=a}^T \binom{T}{k} q^k (1-q)^{T-k} \\ &= S_0 \sum_{k=a}^T \binom{T}{k} \left(\frac{qu}{1+r}\right)^k \left(1 - \frac{qu}{1+r}\right)^{T-k} - \frac{K}{(1+r)^T} \sum_{k=a}^T \binom{T}{k} q^k (1-q)^{T-k} \end{aligned}$$

II. Bewertung von Derivaten in diskreter Zeit

Wir betrachten nun die Konvergenz gegen ein zeitstetiges Modell. Dabei bleibt T fest und wir zerlegen das Intervall $[0, T]$ in n Teilintervalle der Länge $\Delta_n := \frac{T}{n}$.

Sei $r > 0$ eine Zinsrate im stetigen Modell und $(1 + r_n) := e^{r\Delta_n}$.

Weiterhin sei $u_n = \exp(\sigma\sqrt{\Delta_n})$ und $d_n := \frac{1}{u_n} = \exp(-\sigma\sqrt{\Delta_n})$ für ein $\sigma > 0$ (Volatilität).

Wenn n groß genug ist, ist die (NA)-Bedingung in jedem Fall erfüllt.

Wir definieren $q_n := \frac{1+r_n-d_n}{u_n-d_n}$ und

$$C_0^{(n)} := \frac{1}{(1+r_n)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q_n^k (1-q_n)^{n-k} (S_0 u_n^k d_n^{n-k} - K)^+$$

Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \frac{1}{2}$ und

$$C_0^{BS} := \lim_{n \rightarrow \infty} C_0^{(n)} = S_0 \Phi(d) - K e^{-rT} \Phi(d - \sigma\sqrt{T})$$

mit

$$d := \frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist. Die Formel für C_0^{BS} ist die Formel von Black und Scholes (1973, Preis für europäische Call-Optionen). Hier ist r der Zinssatz im stetigen Fall, σ die Volatilität des Aktien, S_0 der Aktienkurs zum Zeitpunkt $t = 0$, T der Fälligkeitstermin der Option und K der Ausübungspreis.

Der Black-Scholes-Preis der europäischen Call-Option zum Zeitpunkt t ist gegeben durch

$$C_t^{BS} = S_t \Phi(d_t) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_t - \sigma\sqrt{T-t}), \quad d_t := \frac{\log(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Beweis

Für den Konvergenzbeweis setzen wir $a_n := \min\{k \in \mathbb{N}_0 : S_0 u_n^k d_n^{n-k} - K > 0\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} C_0^{(n)} &:= \frac{1}{(1+r_n)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q_n^k (1-q_n)^{n-k} (S_0 u_n^k d_n^{n-k} - K)^+ \\ &= \frac{1}{(1+r_n)^n} \sum_{k=a_n}^n \binom{n}{k} q_n^k (1-q_n)^{n-k} (S_0 u_n^k d_n^{n-k} - K) \\ &= S_0 \underbrace{\sum_{k=a_n}^n \binom{n}{k} \left(\frac{q_n u_n}{1+r_n}\right)^k \left(\frac{(1-q_n)d_n}{1+r_n}\right)^{n-k}}_{=: \tilde{B}_{n, \hat{q}_n}(a_n)} - \frac{K}{(1+r_n)^n} \underbrace{\sum_{k=a_n}^n \binom{n}{k} q_n^k (1-q_n)^{n-k}}_{=: \tilde{B}_{n, q_n}(a_n)} \end{aligned}$$

Man kann leicht nachrechnen, dass durch

$$\hat{q}_n := \frac{q_n u_n}{1+r_n}$$

ein weiteres Wahrscheinlichkeitsmaß induziert wird.

Achtung: Der Aktienkurs $S^{(n)}(t)$ hängt von n ab, aber $S^{(n)}(0) = S_0$ für alle n .

Es gilt $(1 + r_n)^{-n} = \exp(-r \frac{T}{n} \cdot n) = e^{-rT}$. Wir zeigen $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{B}_{n, \hat{q}_n}(a_n) = \Phi(d)$. Sei Z_n eine binomialverteilte Zufallsvariable mit Parametern (n, \hat{q}_n) . Dann ist $\bar{B}_{n, \hat{q}_n}(a_n) = P(a_n \leq Z_n \leq n)$. Unser Ziel ist es, den zentralen Grenzwertsatz anzuwenden. Wir normieren deswegen:

$$\tilde{Z}_n := \frac{Z_n - EZ_n}{\sqrt{\text{Var}(Z_n)}} = \frac{Z_n - n\hat{q}_n}{\sqrt{n\hat{q}_n(1-\hat{q}_n)}} = \frac{\sum_{j=1}^n I_j - n\hat{q}_n}{\sqrt{n\hat{q}_n(1-\hat{q}_n)}}$$

wobei I_j unabhängig und identisch binomialverteilt mit Parameter $(1, \hat{q}_n)$.

Seien $\alpha_n := \frac{a_n - n\hat{q}_n}{\sqrt{n\hat{q}_n(1-\hat{q}_n)}}$, $\beta_n := \frac{n(1-\hat{q}_n)}{\sqrt{n\hat{q}_n(1-\hat{q}_n)}}$. Man kann zeigen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \frac{1}{2}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - 2\hat{q}_n)\sqrt{\Delta_n} = -T(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2})$ (siehe Übung). Außerdem ist

$$\begin{aligned} S_0 u_n^k d_n^{n-k} - K > 0 &\iff \log(u_n^k d_n^{n-k}) > \log\left(\frac{K}{S_0}\right) \\ &\iff k \log u_n + (n-k) \log d_n > \log\left(\frac{K}{S_0}\right) \\ &\iff k > \frac{\log\left(\frac{K}{S_0}\right) - n \log d_n}{\log\left(\frac{u_n}{d_n}\right)} \end{aligned}$$

und $\log\left(\frac{u_n}{d_n}\right) = \log\left(\frac{e^{\sigma\Delta_n}}{e^{-\sigma\sqrt{\Delta_n}}}\right) = 2\sigma\sqrt{\Delta_n}$ und $\log d_n = -\sigma\sqrt{\Delta_n}$.

Weiter ist

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - n\hat{q}_n}{\sqrt{n\hat{q}_n(1-\hat{q}_n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\log\left(\frac{K}{S_0}\right) - n \log d_n}{\log\left(\frac{u_n}{d_n}\right)} - n\hat{q}_n}{\sqrt{n\hat{q}_n(1-\hat{q}_n)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\frac{K}{S_0}\right) - n \log d_n - n\hat{q}_n 2\sigma\sqrt{\Delta_n}}{\sqrt{n\hat{q}_n(1-\hat{q}_n)2\sigma\sqrt{\Delta_n}}} \\ &= \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\frac{K}{S_0}\right) + \sigma n\sqrt{\Delta_n}(1-2\hat{q}_n)}{\sqrt{n\Delta_n\hat{q}_n(1-\hat{q}_n)2\sigma}} \\ &= \frac{\log\left(\frac{K}{S_0}\right) - \sigma T\left(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}\right)}{\frac{1}{2}\sqrt{T}2\sigma} \\ &= \frac{\log\left(\frac{K}{S_0}\right) - T\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}} \\ &= -\frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + T\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}} \\ &= -d \end{aligned}$$

und analog ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = +\infty$. Mit dem zentralen Grenzwertsatz gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_{n, \hat{q}_n}(a_n) = \Phi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n\right) - \Phi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n\right) = \Phi(\infty) - \Phi(-d) = 1 - \Phi(-d) = \Phi(d)$$

und ähnlich zeigt man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{B}_{n, q_n} = \Phi(d - \sigma\sqrt{T}).$$

2.10. Amerikanische Optionen

Europäische Optionen können nur am Ende ihrer Laufzeit zur Zeit T ausgeübt werden. Dagegen können amerikanische Optionen zu jeder Zeit bis zum Ende ihrer Laufzeit, also in $\{0, \dots, T\}$, ausgeübt werden.

- Was ist der optimale Ausübungszeitpunkt einer amerikanischen Option?
- Was ist ein fairer Preis für eine amerikanische Option?
- Wie sieht eine Hedging-Strategie für eine amerikanische Option aus?

Sei $(H_t)_{t \in I}$, $I = \{0, \dots, T\}$, ein (\mathcal{F}_t) -adaptierter stochastischer Prozess und $\tau : \Omega \rightarrow \{0, \dots, T\}$ eine (\mathcal{F}_t) -Stoppzeit. Dann ist $H_\tau = \sum_{t=0}^T H_t 1_{\{\tau \geq t\}}$.

Beispiel 2.10.1 (Amerikanische Call-Option)

Es ist $H_t = (S_t - K)^+$. Eine Ausübungsstrategie könnte sein: $\tau = \min\{t \in \mathbb{N} : S_t \geq K\} \wedge T$ (τ ist eine Stoppzeit, vergleiche Beispiel 2.1.24). Dann ist $H_\tau = \sum_{t=0}^T (S_t - K)^+ 1_{\{\tau \geq t\}}$.

Für ein festes τ ist H_τ ein Zahlungsanspruch und damit ist sein Preis $\pi(H_\tau) = E_Q[\frac{H_\tau}{B_\tau}]$.

Bemerkung 2.10.2

Wir gehen im Folgenden immer von einem vollständigen, arbitragefreien Markt aus. Damit ist das äquivalente Martingalmaß Q eindeutig. Wir definieren den Preis einer amerikanischen Option durch

$$\pi^A(H) = \sup_{\tau} E_Q \left[\frac{H_\tau}{B_\tau} \right]$$

wobei das Supremum über alle Stoppzeiten τ mit $\tau \leq T$ genommen wird.

Warum ist diese Definition sinnvoll? Angenommen, $\pi^A(H) < \sup_{\tau} E_Q \left[\frac{H_\tau}{B_\tau} \right]$. Dann gibt es eine Stoppzeit $\tilde{\tau}$, so dass $\pi^A(H) < E_Q \left[\frac{H_{\tilde{\tau}}}{B_{\tilde{\tau}}} \right]$. Kaufe die amerikanische Option zum Preis $\pi^A(H)$ und übe sie mit $\tilde{\tau}$ aus und verkaufe eine Hedging-Strategie für $\frac{H_{\tilde{\tau}}}{B_{\tilde{\tau}}}$. Dann ergibt sich ein risikoloser Gewinn von $E_Q \left[\frac{H_{\tilde{\tau}}}{B_{\tilde{\tau}}} \right] - \pi^A(H) > 0$, im Widerspruch zu (NA).

Der Fall $\pi^A(H) > \sup_{\tau} E_Q \left[\frac{H_\tau}{B_\tau} \right]$ wird später besprochen.

Zur Bewertung einer amerikanischen Option muss ein optimales Stopp-Problem gelöst werden. Sei $(X_t)_{t \in I}$, $I = \{0, \dots, T\}$ ein (\mathcal{F}_t) -adaptierter stochastischer Prozess mit $E|X_t| < \infty$ für alle $t \in I$. Zu lösen ist $\sup_{\tau} E X_\tau$.

Definition 2.10.3

Ein stochastischer Prozess $(Z_t)_{t \in I}$ definiert durch $Z_T = X_T$ und $Z_t = \max\{X_t, E[Z_{t+1} | \mathcal{F}_t]\}$ für $t = T-1, \dots, 0$ heißt Snell-Einhüllende (snell envelope) von (X_t) .

Satz 2.10.4

Die Snell-Einhüllende (Z_t) von (X_t) ist ein Supermartingal und das kleinste Supermartingal, das (X_t) dominiert (das heißt $Z_t \geq X_t$ fast sicher für alle $t \in I$).

Beweis

Nach Definition gilt $Z_t \geq E[Z_{t+1} | \mathcal{F}_t]$ für $t = T-1, \dots, 0$ und $Z_t \geq X_t$.

Sei (Y_t) ein weiteres Supermartingal mit $Y_t \geq X_t$. Wir zeigen $Y_t \geq Z_t$.

Induktion nach t (rückwärts): Es gilt $Y_T \geq X_T = Z_T$. Weiter gilt $Y_{t-1} \geq E[Y_t | \mathcal{F}_{t-1}] \geq E[Z_t | \mathcal{F}_{t-1}]$ und $Y_{t-1} \geq X_{t-1}$. Daher ist $Y_{t-1} \geq \max\{X_{t-1}, E[Z_t | \mathcal{F}_{t-1}]\} = Z_{t-1}$. ■

Lemma 2.10.5

Sei $\tau^* := \inf\{t \geq 0 : Z_t = X_t\}$. Dann ist τ^* eine Stoppzeit und der gestoppte Prozess $(Z_{t \wedge \tau^*})_{t \in I}$ ist ein Martingal.

Beweis

Da $Z_T = X_T$ ist $\tau^* \in \{0, 1, \dots, T\}$ wohldefiniert. Für $t = 0$ gilt $\{\tau^* = 0\} = \{Z_0 = X_0\} \in \mathcal{F}_0$, da X_0 \mathcal{F}_0 -messbar ist. Für $t \geq 1$ ist $\{\tau^* = t\} = \{Z_0 > X_0\} \cap \dots \cap \{Z_{t-1} > X_{t-1}\} \cap \{Z_t = X_t\} \in \mathcal{F}_t$, da $\{Z_i > X_i\} \in \mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_t$ für alle $i = \{0, \dots, t-1\}$ und $\{Z_t = X_t\} \in \mathcal{F}_t$. Daher ist τ^* eine Stoppzeit.

Für $t \leq T-1$ gilt $Z_{(t+1) \wedge \tau^*} - Z_{t \wedge \tau^*} = 1_{\{t+1 \leq \tau^*\}}(Z_{t+1} - Z_t)$. Nach Definition von τ^* gilt auf der Menge $\{t+1 \leq \tau^*\}$: $Z_t > X_t$ und wegen der Definition von Z_t gilt dann $Z_t = E[Z_{t+1} | \mathcal{F}_t]$ auf $\{t+1 \leq \tau^*\}$. Daher gilt $Z_{(t+1) \wedge \tau^*} - Z_{t \wedge \tau^*} = 1_{\{t+1 \leq \tau^*\}}(Z_{t+1} - E[Z_{t+1} | \mathcal{F}_t])$, denn für $\tau^* \leq t$ sind beide Seiten Null.

Wir betrachten nun die bedingte Erwartung unter \mathcal{F}_t auf beiden Seiten. Da $\{t+1 \leq \tau^*\} = \{\tau^* \leq t\}^c \in \mathcal{F}_t$, gilt dann

$$\begin{aligned} E[Z_{(t+1) \wedge \tau^*} - Z_{t \wedge \tau^*} | \mathcal{F}_t] &= E[1_{\{t+1 \leq \tau^*\}}(Z_{t+1} - E[Z_{t+1} | \mathcal{F}_t]) | \mathcal{F}_t] \\ &= 1_{\{t+1 \leq \tau^*\}} E[Z_{t+1} - E[Z_{t+1} | \mathcal{F}_t] | \mathcal{F}_t] \\ &= 1_{\{t+1 \leq \tau^*\}} (E[Z_{t+1} | \mathcal{F}_t] - E[Z_{t+1} | \mathcal{F}_t]) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daher ist $E[Z_{(t+1) \wedge \tau^*} | \mathcal{F}_t] = Z_{t \wedge \tau^*}$ und $Z_{t \wedge \tau^*}$ ist ein Martingal. ■

Satz 2.10.6

Die Stoppzeit

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0 : Z_t = X_t\}$$

löst das Stopp-Problem $\sup_{\tau} E[X_{\tau}]$ und es gilt $Z_0 = E[X_{\tau^*}] = \sup_{\tau} E[X_{\tau}]$.

Beweis

Da nach Lemma 2.10.5 der Prozess $(Z_{t \wedge \tau^*})$ ein Martingal ist, gilt $Z_0 = Z_{0 \wedge \tau^*} = E[Z_{T \wedge \tau^*}] = E[Z_{\tau^*}] = E[X_{\tau^*}]$. Für eine beliebige Stoppzeit τ gilt dann wegen Satz 2.1.35 $Z_0 = Z_{0 \wedge \tau} \geq E[Z_{T \wedge \tau}] = E[X_{\tau}] \geq E[X_{\tau}]$. ■

Wir verwenden nun diese Ergebnisse, um den Preis einer amerikanischen Option zu bewerten. Hier ist $X_t = \frac{H_t}{B_t}$, $t = 0, \dots, T$, und gesucht ist die Lösung von $\sup_{\tau} E_Q[\frac{H_{\tau}}{B_{\tau}}]$.

Korollar 2.10.7

Sei $(Z_t)_{t \in I}$ die Snell-Einhüllende von $(\frac{H_t}{B_t})_{t \in I}$ bezüglich dem Wahrscheinlichkeitsmaß Q und $\tau^* = \inf\{t \geq 0 : Z_t = X_t\}$. Dann ist der Preis der amerikanischen Option gegeben durch

$$\pi^A(H) = \sup_{\tau} E_Q \left[\frac{H_{\tau}}{B_{\tau}} \right] = E_Q \left[\frac{H_{\tau^*}}{B_{\tau^*}} \right] = Z_0$$

und τ^* ist die optimale Ausübungsstrategie.

Beispiel 2.10.8 (Amerikanische Calloption)

Hier ist $H_t = (S_t - K)^+$, $t \in I$. Dann ist

$$\frac{H_t}{B_t} = \left(\frac{S_t}{B_t} - \frac{K}{B_t} \right)^+ = \left(X_t - \frac{K}{B_t} \right)^+.$$

Die Funktion $g(x) = \left(x - \frac{K}{B_{t+1}} \right)^+$ ist konvex. Aus der Jensen-Ungleichung folgt dann

$$\frac{H_t}{B_t} \leq g(X_t) = g(E_Q[X_{t+1} | \mathcal{F}_t]) \leq E_Q[g(X_{t+1}) | \mathcal{F}_t] = E_Q\left[\frac{H_{t+1}}{B_{t+1}} | \mathcal{F}_t\right].$$

Daher ist $\frac{H_t}{B_t}$ ein Submartingal unter Q .

Für beliebige beschränkte Stoppzeiten $\sigma \leq \tau$ gilt nach Satz 2.1.33

$$\frac{H_{\sigma}}{B_{\sigma}} \leq E_Q \left[\frac{H_{\tau}}{B_{\tau}} | \mathcal{F}_{\sigma} \right] \implies E_Q \left[\frac{H_{\sigma}}{B_{\sigma}} \right] \leq E_Q \left[\frac{H_{\tau}}{B_{\tau}} \right].$$

Da $\tau \leq T$ für alle τ gilt:

$$\sup_{\tau} E_Q \left[\frac{H_{\tau}}{B_{\tau}} \right] = E_Q \left[\frac{H_T}{B_T} \right].$$

Das heißt die amerikanische Calloption wird erst am Ende der Laufzeit ausgeübt und hat den gleichen Preis wie eine europäische Calloption.

2.10.1. Amerikanische Optionen im Cox-Ross-Rubinsteinmodell

Sei $(H_t)_{t \in I}$ ein (\mathcal{F}_t) -adaptierter stochastischer Prozess. Sei $\tilde{X}_t = \frac{H_t}{B_t}$ und (Z_t) die Snell-Einhüllende von (\tilde{X}_t) . Wir betrachten den Spezialfall, dass H_t nur von S_t abhängt (und nicht wie im Allgemeinen $H_t = h(S_0, \dots, S_t)$), das heißt $H_t = h(S_t)$. Zum Beispiel beim amerikanischen Put gilt $h(s) = (K - s)^+$.

Im Cox-Ross-Rubinsteinmodell ist $S_t = S_0 \prod_{k=1}^t Y_k$ und $Q(Y = u) = q = \frac{1+r-d}{u-d}$ ist die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit für eine Aufwärtsbewegung des Aktienkurses. Dann gilt:

$$\begin{aligned} Z_T &= \tilde{X}_T = \frac{h(S_T)}{B_T} = \frac{h(S_T)}{(1+r)^T} &=: V_T(S_T) \\ Z_{T-1} &= \max\{\tilde{X}_{T-1}, E_Q[Z_T | \mathcal{F}_{T-1}]\} \\ &= \max\left\{\frac{h(S_{T-1})}{(1+r)^{T-1}}, E_Q[V_T(S_{T-1}Y_T) | \mathcal{F}_{T-1}]\right\} \\ &= \max\left\{\frac{h(S_{T-1})}{(1+r)^{T-1}}, qV_T(S_{T-1}u) + (1-q)V_T(S_{T-1}d)\right\} &=: V_{T-1}(S_{T-1}) \\ Z_t &= \max\left\{\frac{h(S_t)}{(1+r)^t}, qV_{t+1}(S_t u) + (1-q)V_{t+1}(S_t d)\right\} &=: V_t(S_t) \\ Z_0 &= \max\{h(S_0), qV_1(S_0 u) + (1-q)V_1(S_0 d)\} \end{aligned}$$

2.10.2. Preisvergleich zwischen amerikanischen und europäischen Optionen

Bemerkung 2.10.9

- (1) Sei φ eine selbstfinanzierende Handelsstrategie. Dann ist $\frac{V_t^\varphi}{B_t}$ ein Q -Martingal (siehe Satz 2.5.1).
- (2) Sei H ein Zahlungsanspruch und φ eine selbstfinanzierende Hedging-Strategie für H . Dann ist der Preis für die zugehörige europäische Option zur Zeit t gegeben durch $V_t^\varphi = B_t E_Q[\frac{V_T}{B_T} | \mathcal{F}_t] = E_Q[\frac{B_t}{B_T} H | \mathcal{F}_t]$ (siehe Satz 2.5.8).

Sei $(H_t)_{t \in I}$ gegeben. Der Preis der zugehörigen amerikanischen Option zur Zeit t ist

$$\sup_{t \leq \tau \leq T} E_Q[\frac{B_t}{B_\tau} H_\tau | \mathcal{F}_t] = B_t Z_t =: \tilde{Z}_t$$

wobei (Z_t) die Snell-Einhüllende von $\frac{H_t}{B_t}$ ist.

Satz 2.10.10

Der Preis der amerikanischen Option ist zu jedem Zeitpunkt größer oder gleich dem Preis der entsprechenden europäischen Option: also $\tilde{Z}_t \geq V_t$ für alle $t \in I$.

Ist $\frac{H_t}{B_t}$ ein Q -Submartingal, dann sind die Preise gleich, also $\tilde{Z}_t = V_t$ für alle $t \in I$ und $\tau^* = T$ ist der optimale Ausübungszeitpunkt der amerikanischen Option.

Beweis

Da $\tau = T$ eine Stoppzeit ist, gilt $\tilde{Z}_t = B_t \sup_{t \leq \tau \leq T} E_Q[\frac{H_\tau}{B_\tau} | \mathcal{F}_t] \geq B_t E_Q[\frac{H_T}{B_T} | \mathcal{F}_t] = V_T$ für $t \in I$.

Ist $(\frac{H_t}{B_t})$ ein Q -Submartingal, so gilt für alle $t = 0, 1, \dots, T$:

$$\frac{H_t}{B_t} \leq E_Q\left[\frac{H_T}{B_T} | \mathcal{F}_t\right] \iff H_t \leq B_t E_Q\left[\frac{H_T}{B_T} | \mathcal{F}_t\right] = V_t$$

also ist $H_t \leq V_t$ für alle $t = 0, \dots, T$ und daher $\frac{V_t}{B_t} \geq \frac{H_t}{B_t}$. Da $(\frac{V_t}{B_t})$ ein Q -Martingal ist (und damit auch ein Q -Supermartingal) folgt mit Satz 2.10.4 für alle $t = 0, \dots, T$: $Z_t \leq \frac{V_t}{B_t}$ und daher $\tilde{Z}_t \leq V_t$. Daher gilt dann also für alle $t = 0, \dots, T$: $\tilde{Z}_t = V_t$. ■

Im Folgenden sei C_t^E der Preis der europäischen Call-Option und C_t^A der Preis der amerikanischen Call-Option zur Zeit t und P_t^E beziehungsweise P_t^A der Preis der europäischen beziehungsweise amerikanischen Put-Option zur Zeit t .

Satz 2.10.11

Es gelten die folgenden Zusammenhänge:

- (1) Put-Call-Parität: Für $t = 0, \dots, T$:

$$C_t^E - P_t^E = S_t - K \frac{B_t}{B_T}$$

(2) Für $t = 0, \dots, T$ gilt

$$S_t - K \leq C_t^A - P_t^A \leq S_t - K \frac{B_t}{B_T}$$

Beweis

(1) Es gilt $C_t^E = B_t E_Q[\frac{H_T}{B_T} | \mathcal{F}_t]$ mit $H_T = (S_T - K)^+$ und $P_t^E = B_t E_Q[\frac{\tilde{H}_T}{B_T} | \mathcal{F}_t]$ mit $\tilde{H}_T = (K - S_T)^+$. Es gilt $H_T + K = \max\{S_T, K\} = \tilde{H}_T + S_T$ und damit

$$\begin{aligned} \frac{1}{B_t} (C_t^E - P_t^E) &= E_Q[\frac{H_T - \tilde{H}_T}{B_T} | \mathcal{F}_t] \\ &= E_Q[\frac{S_T - K}{B_T} | \mathcal{F}_t] \\ &= E_Q[\frac{S_T}{B_T} | \mathcal{F}_t] - \frac{K}{B_T} \\ &= \frac{S_t}{B_t} - \frac{K}{B_T} \end{aligned}$$

(2) Aus $P_t^A \geq P_t^E$ und $C_t^A = C_t^E$ folgt für alle $t = 0, \dots, T$

$$C_t^A - P_t^A \leq C_t^E - P_t^E = S_t - K \frac{B_t}{B_T}.$$

Wir müssen noch zeigen, dass $C_t^A + K \geq P_t^A + S_t$ ist. Wir setzen

$$Y := \frac{(S_T - K)^+}{B_T} + \frac{K}{B_t}$$

dann ist $Y \geq \frac{K}{B_t}$ und $Y \geq \frac{S_T}{B_T}$, da $B_T \geq B_t$ und

$$Y = \frac{(S_T - K)^+}{B_T} + \frac{K}{B_t} = \frac{\max\{S_T, K\} - K}{B_T} + \frac{K}{B_t} = \frac{\max\{S_T, K\}}{B_T} + K(\frac{1}{B_t} - \frac{1}{B_T}) \geq \frac{S_T}{B_T}.$$

Sei τ eine beliebige Stoppzeit $t \leq \tau \leq T$. Dann gilt

$$\begin{aligned} E_Q[Y | \mathcal{F}_\tau] &\geq E_Q[\frac{K}{B_t} | \mathcal{F}_\tau] = \frac{K}{B_t} \geq \frac{K}{B_\tau} \\ E_Q[Y | \mathcal{F}_\tau] &\geq E_Q[\frac{S_T}{B_T} | \mathcal{F}_\tau] = \frac{S_\tau}{B_\tau} \\ \Rightarrow E_Q[Y | \mathcal{F}_\tau] &\geq \max\{\frac{K}{B_\tau}, \frac{S_\tau}{B_\tau}\} = \frac{\max\{K, S_\tau\}}{B_\tau} \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} C_t^A + K &= C_t^E + K = B_t E_Q[Y | \mathcal{F}_t] \\ &= B_t E_Q[E_Q[Y | \mathcal{F}_\tau] | \mathcal{F}_t] \\ &\geq B_t E_Q[\frac{\max\{K, S_\tau\}}{B_\tau} | \mathcal{F}_t] \\ &= B_t E_Q[\frac{((K - S_\tau)^+ + S_\tau)}{B_\tau} | \mathcal{F}_t] \\ &= B_t E_Q[\frac{(K - S_\tau)^+}{B_\tau} | \mathcal{F}_t] + B_t E_Q[\frac{S_\tau}{B_\tau} | \mathcal{F}_t] \\ &= B_t E_Q[\frac{(K - S_\tau)^+}{B_\tau} | \mathcal{F}_t] + S_t \end{aligned}$$

insbesondere gilt dann $C_t^A + K \geq \sup_{\tau} (B_t E_Q[\frac{(K-S_{\tau})^+}{B_{\tau}} | \mathcal{F}_t]) + S_t$ und daher $C_t^A + K \geq P_t^A + S_t$. ■

2.10.3. Hedging einer amerikanischen Option

Wir betrachten weiterhin einen vollständigen, arbitragefreien Markt. Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie φ ist eine Hedging-Strategie für eine amerikanische Option basierend auf (H_t) , falls für alle $t = 0, \dots, T$ gilt: $V_t^{\varphi} \geq H_t$.

Wir zeigen, dass es eine Hedging-Strategie φ gibt mit

$$V_0^{\varphi} = \pi^A(H) = \sup_{\tau} E_Q[\frac{H_{\tau}}{B_{\tau}}] = Z_0$$

wobei (Z_t) die Snell-Einhüllende von $(\frac{H_t}{B_t})$ ist.

Nach Satz 2.10.4 ist (Z_t) ein Supermartingal. Aus Lemma 2.1.18 folgt $Z_t = M_t + A_t$ wobei (M_t) ein Martingal ist und (A_t) mit $A_0 = 0$ ein fallender, vorhersehbarer Prozess. Insbesondere ist $A_{t+1} \leq A_t \leq \dots \leq A_1 \leq A_0 = 0$.

Da der Markt vollständig ist, gibt es eine Hedging-Strategie φ für den Zahlungsanspruch $B_T M_T$. Wir zeigen, dass φ eine Hedging-Strategie für die amerikanische Option ist. Wir zeigen $V_t^{\varphi} \geq H_t$ für $t = 0, \dots, T$.

Für $t = T$ gilt $V_T^{\varphi} = B_T M_T \geq B_T Z_T = B_T \frac{H_T}{B_T} = H_T$, da nach Definition der Snell-Einhüllenden $Z_T = \frac{H_T}{B_T}$ gilt. Wegen $A_T \leq A_0 = 0$ und $Z_T = M_T + A_T$ gilt auch $M_T \geq Z_T$.

Für $t < T$ gilt $V_t^{\varphi} = B_t E_Q[\frac{B_T M_T}{B_T} | \mathcal{F}_t] = B_t E_Q[M_T | \mathcal{F}_t] = B_t M_t \geq B_t Z_t \geq B_t \frac{H_t}{B_t} = H_t$.

Dann ist der Preis für die Hedging-Strategie φ

$$V_0^{\varphi} = E_Q[\frac{B_T M_T}{B_T}] = E_Q[M_T] = M_0 = M_0 + A_0 = Z_0.$$

Also gilt auch $\pi^A(H) = \inf\{V_0^{\varphi} | \varphi \text{ ist eine selbstfinanzierende Hedging-Strategie für } (H_t)\}$. Mit der so konstruierten Hedging-Strategie können wir die Begründung vom „fairen“ Preis für eine amerikanische Option abschließen:

Angenommen, es sei $\pi^A(H) > \sup_{\tau} E_Q[\frac{H_{\tau}}{B_{\tau}}]$. Wir verkaufen die Option zum Preis $\pi^A(H)$ und realisieren mit dem Betrag $\sup_{\tau} E_Q[\frac{H_{\tau}}{B_{\tau}}]$ eine Hedging-Strategie wie oben angegeben. In diesem Fall ist ein risikoloser Gewinn dieser Differenz möglich. Ähnlich folgt für die optimale Ausübungsstrategie τ^* , dass $V_{\tau^*}^{\varphi} = H_{\tau^*}$, das heißt wir verkaufen die amerikanische Option zum fairen Preis und übt der Käufer optimal aus, so bleibt in diesem Fall kein Gewinn übrig.

2.11. Exotische Optionen

Wir betrachten nun Optionen, deren Auszahlung vom Maximum des Aktienkurses abhängen.

Beispiel 2.11.1

- Up-and-in-Call-Option

$$H_{u\&i}^{\text{Call}} = \begin{cases} (S_T - K)^+ & \text{falls } \max_{0 \leq t \leq T} S_t \geq B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Up-and-out-Call-Option

$$H_{\text{u\&o}}^{\text{Call}} = \begin{cases} 0 & \text{falls } \max_{0 \leq t \leq T} S_t \geq B \\ (S_T - K)^+ & \text{sonst} \end{cases}$$

- Lookback-Put-Option

$$H_{\text{max}}^{\text{Put}} = \max_{0 \leq t \leq T} S_t - S_T$$

Wir betrachten später eine spezielle Form des T -Perioden-Cox-Ross-Rubinsteinmodells, das uns erlaubt, eine explizite Preisformel für obige Beispiele zu bekommen. Dabei wird das *Spiegelungsprinzip* eine zentrale Rolle spielen.

Sei $\Omega := \{-1, +1\}^T = \{\omega = (\gamma_1, \dots, \gamma_T) : \gamma_i \in \{-1, +1\}\}$. Für $\omega = (\gamma_1, \dots, \gamma_T)$ sei

$$\Gamma_t(\omega) = \Gamma_t((\gamma_1, \dots, \gamma_T)) = \begin{cases} +1, & \text{falls } \gamma_t = 1 \\ -1, & \text{falls } \gamma_t = -1 \end{cases}$$

die Projektion auf die t -te Komponente.

Sei Z gegeben durch $Z_0 := 0$, $Z_t := \sum_{i=1}^t \Gamma_i$, $t = 1, \dots, T$.

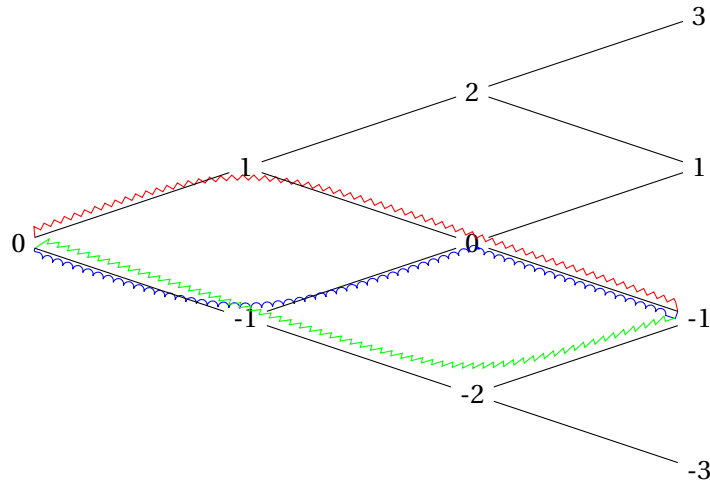
Sei $P(\{\omega\}) = 2^{-T}$ für alle $\omega \in \Omega$. Unter dem Maß P sind die Zufallsvariablen Γ_t unabhängig mit Verteilung $P(\Gamma_t = 1) = \frac{1}{2}$. Daher ist der Prozess Z eine symmetrische Irrfahrt unter P .

Daher gilt

$$P(Z_t = k) = \begin{cases} 2^{-t} \binom{t}{\frac{t+k}{2}}, & \text{falls } t+k \text{ gerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Bemerkung 2.11.2

Es führen $3 = \binom{3}{\frac{3-1}{2}}$ Wege zu -1 . Man benötigt immer eine Aufwärtsbewegung und zwei Abwärtsbewegungen.



Angenommen, die Irrfahrt besteht aus $\frac{t+k}{2}$ Aufwärtsbewegungen und $\frac{t-k}{2}$ Abwärtsbewegungen, dann ist der Wert der Irrfahrt $\frac{t+k}{2} \cdot 1 + \frac{t-k}{2} \cdot (-1) = k$. Es gibt $\binom{t}{\frac{t+k}{2}}$ Möglichkeiten $\frac{t+k}{2}$ Aufwärtsschritte bei insgesamt t Schritten zu machen. Alle diese Wege sind unter P gleichwahrscheinlich.

Im Folgenden sei $M_t := \max_{0 \leq s \leq t} Z_s$ das laufende Maximum des Prozesses Z . Für den folgenden Satz nehmen wir an, dass der Prozess Z bis zur Zeit $T+1$ definiert ist. Das kann durch geeignete Erweiterung des Wahrscheinlichkeitsraums erreicht werden.

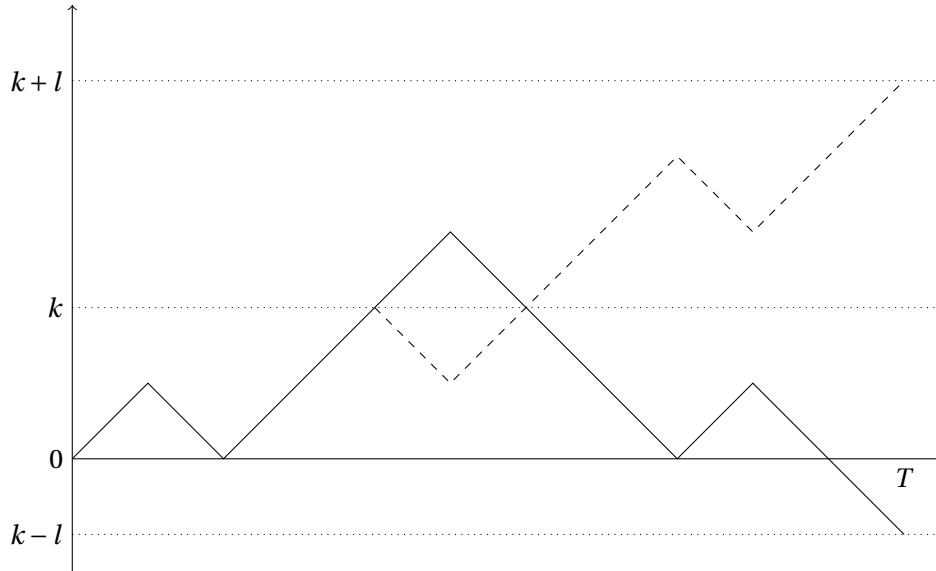
Satz 2.11.3 (Spiegelungsprinzip)

Für alle $k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$P(M_T \geq k, Z_T = k - l) = P(Z_T = k + l)$$

und

$$P(M_T = k, Z_T = k - l) = 2 \frac{k + l + 1}{T + 1} P(Z_{T+1} = 1 + k + l)$$



Beweis

Sei $\tau(\omega) := \{t \geq 0 : Z_t = k\} \wedge T$. Für $\omega = (\gamma_1, \dots, \gamma_T) \in \Omega$ definieren wir $f(\omega) = \omega$, falls $\tau = T$ und $f(\omega) = (\gamma_1, \dots, \gamma_{\tau(\omega)}, -\gamma_{\tau(\omega)+1}, \dots, -\gamma_T)$, falls das Niveau k vor dem Endzeitpunkt T erreicht wird. Man sieht im Bild, dass die zwei Pfade $(Z_t(\omega))$ und $(Z_t(f(\omega)))$ bis zur Zeit $\tau(\omega)$ übereinstimmen. Ab $\tau(\omega)$ erhält man den neuen Pfad durch Spiegelung des ursprünglichen Pfades an der horizontalen Achse zum Niveau k .

Sei $A_{k,l} := \{\omega \in \Omega \mid M_T(\omega) \geq k, Z_T(\omega) = k - l\}$. Dann ist f eine Bijektion von $A_{k,l}$ in die Menge $\{\omega \in \Omega \mid M_T(\omega) \geq k, Z_T(\omega) = k + l\}$. Da $l \geq 0$ gilt $\{\omega \in \Omega \mid M_T \geq k, Z_T = k + l\} = \{\omega \in \Omega \mid Z_T = k + l\}$. Daher teilt die Gleichverteilung P die beiden Mengen $A_{k,l}$, $\{\omega \in \Omega \mid Z_T(\omega) = k + l\}$ die gleiche Wahrscheinlichkeiten zu. Daher gilt die erste Gleichung.

Die zweite Gleichung ist klar, falls $T + k + l$ ungerade ist, da dann $P(Z_{T+1} = 1 + k + l) = 0$ und auch $T + k - l$ ungerade ist, und damit die linke Seite auch 0 ist.

II. Bewertung von Derivaten in diskreter Zeit

Sei $j := \frac{T+k+l}{2}$. Wir verwenden die Verteilung von (Z_t) und den ersten Teil des Satzes. Es gilt

$$\begin{aligned}
 P(M_T = k, Z_T = k - l) &= P(M_T \geq k, Z_T = k - l) - P(M_T \geq k + 1, Z_T = k - l) \\
 &= P(Z_T = k + l) - P(M_T \geq k + 1, Z_T = (k + 1) - (l + 1)) \\
 &= P(Z_T = k + l) - P(Z_T = k + l + 2) \\
 &= 2^{-T} \binom{T}{j} - 2^{-T} \binom{T}{j+1} \\
 &= 2^{-T} \binom{T+1}{j+1} \frac{2j+1-T}{T+1}
 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 2 \frac{k+l+1}{T+1} \cdot P(Z_{T+1} = 1 + k + l) &= 2 \frac{k+l+1}{T+1} 2^{-(T+1)} \binom{T+1}{\frac{T+k+l+2}{2}} \\
 &= 2^{-T} \binom{T+1}{j+1} \frac{T+k+l+1-T}{T+1} \\
 &= 2^{-T} \binom{T+1}{j+1} \frac{2j+1-T}{T+1}
 \end{aligned}$$

■

Für die Bewertung von exotischen Optionen benötigen wir das Martingalmaß Q und nicht P . Falls die Gleichverteilung P durch das Martingalmaß Q ersetzt wird, erhält man

$$Q(Z_t = k) = \begin{cases} q^{\frac{t+k}{2}} (1-q)^{\frac{t-k}{2}} \binom{t}{\frac{t+k}{2}}, & \text{falls } t+k \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir formulieren das Spiegelungsprinzip unter Q :

Satz 2.11.4 (Spiegelungsprinzip unter Q)

Für alle $k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned}
 Q(M_T \geq k, Z_T = k - l) &= \left(\frac{1-q}{q} \right)^l Q(Z_T = k + l) \\
 &= \left(\frac{q}{1-q} \right)^k Q(Z_T = -k - l) \\
 Q(M_T = k, Z_T = k - l) &= \frac{1}{q} \left(\frac{1-q}{q} \right)^l \frac{k+l+1}{T+1} Q(Z_{T+1} = 1 + k + l) \\
 &= \frac{1}{1-q} \left(\frac{q}{1-q} \right)^k \frac{k+l+1}{T+1} Q(Z_{T+1} = -1 - k - l)
 \end{aligned}$$

Beweis

Wir zeigen zuerst, dass die Dichte von Q bezüglich P gegeben ist durch

$$\frac{dQ}{dP} = 2^T q^{\frac{T+Z_T}{2}} (1-q)^{\frac{T-Z_T}{2}} \quad (\star)$$

Das Maß Q ordnet jedem $\omega = (\gamma_1, \dots, \gamma_T) \in \Omega$, das genau k Komponenten mit $\gamma_i = +1$ enthält, die Wahrscheinlichkeit $Q(\omega) = q^k (1-q)^{T-k}$ zu. Für solche ω gilt aber genau $Z_T(\omega) = k - (T - k) = 2k - T$ und damit gilt die Gleichung für die Dichte.

Daher folgt aus (\star)

$$Q(M_T \geq k, Z_T = k - l) = 2^T q^{\frac{T+k-l}{2}} (1-q)^{\frac{T-(k-l)}{2}} P(M_T \geq k, Z_T = k - l)$$

Aus dem Spiegelungsprinzip für P (2.11.3) zusammen mit (\star) folgt:

$$\begin{aligned} & 2^T q^{\frac{T+k-l}{2}} (1-q)^{\frac{T-(k-l)}{2}} P(M_T \geq k, Z_T = k - l) \\ &= 2^T q^{\frac{T+k-l}{2}} (1-q)^{\frac{T-(k-l)}{2}} P(Z_T = k + l) = \\ &= 2^T q^{\frac{T+k-l}{2}} (1-q)^{\frac{T-(k-l)}{2}} (2^T q^{\frac{T+k+l}{2}} (1-q)^{\frac{T-(k+l)}{2}})^{-1} Q(Z_T = k + l) = \\ &= \left(\frac{1-q}{q} \right)^l Q(Z_T = k + l) \end{aligned}$$

Die zweite Aussage zeigt man analog. ■

Im Folgenden betrachten wir den Finanzmarkt, der einen Bond $B_t = (1+r)^t$, $t = 0, \dots, T$, und eine Aktie mit Preisprozess $S_t(\omega) = S_0 u^{Z_t(\omega)}$ enthält. Z ist die Irrfahrt, die oben definiert wurde. Dies ist ein spezieller Fall des CRR-Modells mit $u = \frac{1}{d}$.

Beispiel 2.11.5 (Up-and-In-Call)

$$H_{u\&i}^{\text{Call}} = \begin{cases} (S_T - K)^+ & \text{falls } \max_{0 \leq t \leq T} S_t \geq B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Hier ist $K > 0$ der Ausübungspreis und $B > \max\{S_0, K\}$ ist eine vorgegebene Schranke.

Wir möchten den Preis $\pi(H_{u\&i}^{\text{Call}}) = E_Q \left[\frac{H_{u\&i}^{\text{Call}}}{(1+r)^T} \right]$ berechnen. Man sieht sofort, dass

$$\begin{aligned} E_Q[H_{u\&i}^{\text{Call}}] &= E_Q[(S_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{\max_{0 \leq t \leq T} S_t \geq B\}}] \\ &= \underbrace{E_Q[(S_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{S_T \geq B\}}]}_{=: I_1} + \underbrace{E_Q[(S_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{\max_{0 \leq t \leq T} S_t \geq B, S_T < B\}}]}_{=: I_2} \end{aligned}$$

Wir nehmen an (OBdA), dass B ein möglicher Aktienpreis ist, d.h. es existiert ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $B = S_0 u^k$. Dann ist $S_t = S_0 u^{Z_t} \geq B = S_0 u^k \iff Z_t \geq k$ (und damit $\max_{0 \leq t \leq T} S_t \geq B \iff M_T \geq k$). Der erste Erwartungswert I_1 kann direkt berechnet werden (vgl. Kor 2.4.6).

Sei $f(s) := (s - K)^+ \mathbf{1}_{\{s \geq B\}}$.

$$I_1 = \sum_{n=0}^T \binom{T}{n} q^n (1-q)^{T-n} \underbrace{(S_0 u^{2n-T} - K)^+ \mathbf{1}_{\{S_0 u^{2n-T} \geq B\}}}_{=: f(S_0 u^{2n-T})}$$

Sei $b_k = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : S_0 u^{2n-T} \geq S_0 u^k\} = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : 2n - T \geq k\}$. Dann gilt

$$I_1 = \sum_{n=b_k}^T \binom{T}{n} q^n (1-q)^{T-n} (S_0 u^{2n-T} - K)^+$$

II. Bewertung von Derivaten in diskreter Zeit

Wir berechnen I_2 , und wenden dazu das Spiegelungsprinzip für Q (Satz 2.11.4) an:

$$\begin{aligned}
 I_2 &= E_Q[(S_0 u^{Z_T} - K)^+ 1_{\{M_T \geq k, Z_T < k\}}] \\
 &= \sum_{l \geq 1} E_Q[(S_0 u^{Z_T} - K)^+ 1_{\{M_T \geq k, Z_T = k-l\}}] \\
 &= \sum_{l \geq 1} E_Q[(S_0 u^{k-l} - K)^+ 1_{\{M_T \geq k, Z_T = k-l\}}] \\
 &= \sum_{l \geq 1} (S_0 u^{k-l} - K)^+ Q(M_T \geq k, Z_T = k-l) \\
 &= \sum_{l \geq 1} (S_0 u^{k-l} - K)^+ \left(\frac{q}{1-q}\right)^k Q(Z_T = -k-l) \\
 &= \left(\frac{q}{1-q}\right)^k u^{2k} \sum_{l \geq 1} (S_0 u^{-k-l} - \underbrace{K u^{-2k}}_{=: \tilde{K}})^+ Q(Z_T = -k-l) \\
 &= \left(\frac{q}{1-q}\right)^k \left(\frac{B}{S_0}\right)^2 \sum_{l \geq 1} (S_0 u^{-k-l} - \tilde{K})^+ Q(Z_T = -k-l) \\
 &= \left(\frac{q}{1-q}\right)^k \left(\frac{B}{S_0}\right)^2 E_Q[(S_T - \tilde{K})^+ 1_{\{S_T < \tilde{B}\}}]
 \end{aligned}$$

wobei $\tilde{B} := \frac{S_0^2}{B} = S_0 u^{-k}$.

Im letzten Schritt haben wir verwendet, dass $Z_T = -k-l \iff S_T < \tilde{B}$. Dazu folgende Nebenrechnung:

Sei $Z_T = -k-l$. Dann ist $S_T = S_0 u^{-k-l} = \frac{S_0^2}{B} u^{-l} = \tilde{B} \frac{1}{u^l} < \tilde{B}$. Dann folgt wie bei der Berechnung von I_1 mit $\tilde{b}_k := \max\{n \in \mathbb{N}_0 : S_T = S_0 u^{2n-T} < \tilde{B}\} = \max\{n \in \mathbb{N}_0 : 2n - T < -k\}$:

$$I_2 = \left(\frac{q}{1-q}\right)^k \left(\frac{B}{S_0}\right)^2 \sum_{n=0}^{\tilde{b}_k} \binom{T}{n} q^n (1-q)^{T-n} (S_0 u^{2n-T} - \tilde{K})^+$$

Dann ist $\pi(H_{u\&i}^{\text{Call}}) = \frac{1}{(1+r)^T} (I_1 + I_2)$.

Beispiel 2.11.6 (Up-and-Out-Call-Option)

$$H_{u\&o}^{\text{Call}} = \begin{cases} 0 & \text{falls } \max_{0 \leq t \leq T} S_t \geq B \\ (S_T - K)^+ & \text{sonst} \end{cases}$$

Hier ist K der Ausübungspreis, $B > \max\{S_0, K\}$ die Schranke.

Wie im Beispiel zuvor sei $B = S_0 u^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Sei $H^{\text{Call}} := (S_T - K)^+$ die gewöhnliche Call-Option mit Preis $\pi(H^{\text{Call}}) = E_Q \left[\frac{(S_T - K)^+}{(1+r)^T} \right]$.

$$\begin{aligned}
 \pi(H_{u\&o}^{\text{Call}}) &= \pi(H^{\text{Call}}) - \pi(H_{u\&i}^{\text{Call}}) \\
 &= \frac{1}{(1+r)^T} (E_Q[(S_T - K)^+ 1_{\{S_T < B\}}] - \left(\frac{q}{1-q}\right)^k \left(\frac{B}{S_0}\right)^2 E_Q[(S_T - \tilde{K})^+ 1_{\{S_T < \tilde{B}\}}])
 \end{aligned}$$

mit der gleichen Notation wie zuvor.

Beispiel 2.11.7 (Lookback-Put-Option)

$$H_{\max}^{\text{Put}} = \max_{0 \leq t \leq T} S_t - S_T$$

Bei Lookback-Optionen handelt man die zugrundeliegende Aktie zum minimalen bzw. maximalen Preis. Der Preis der Option ist

$$\pi(H_{\max}^{\text{Put}}) = E_Q \left[\frac{\max_{0 \leq t \leq T} S_t - S_T}{(1+r)^T} \right] = E_Q \left[\frac{\max_{0 \leq t \leq T} S_t}{(1+r)^T} \right] - S_0.$$

Wir berechnen also den Erwartungswert

$$E_Q[\max_{0 \leq t \leq T} S_t] = E_Q[\max_{0 \leq t \leq T} S_0 u^{Z_t}] = E_Q[S_0 u^{M_T}] = \sum_{n=0}^T S_0 u^n Q(M_T = n).$$

Aus Satz 2.11.4 folgt

$$\begin{aligned} Q(M_T = n) &= \sum_{l \geq 0} Q(M_T = n, Z_T = n - l) \\ &= \sum_{l \geq 0} \frac{1}{1-q} \left(\frac{q}{1-q} \right)^n \frac{n+l+1}{T+1} Q(Z_{T+1} = -1-l-n) \\ &= \frac{1}{1-q} \left(\frac{q}{1-q} \right)^n \frac{1}{T+1} \sum_{l \geq 0} (n+l+1) Q(-Z_{T+1} = 1+n+l) \\ &= \frac{1}{1-q} \left(\frac{q}{1-q} \right)^n \frac{1}{T+1} E_Q[-Z_{T+1} 1_{\{Z_{T+1} \leq -(1+n)\}}] \end{aligned}$$

Daher gilt für den Preis:

$$\begin{aligned} \pi(H_{\max}^{\text{Put}}) &= \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{n=0}^T S_0 u^n Q(M_T = n) - S_0 \iff \\ \pi(H_{\max}^{\text{Put}}) + S_0 &= \frac{S_0}{(1+r)^T (1-q)(T+1)} \sum_{n=0}^T u^n \left(\frac{q}{1-q} \right)^n E_Q[-Z_{T+1} 1_{\{Z_{T+1} \leq -(1+n)\}}] \end{aligned}$$

Der Erwartungswert kann explizit berechnet werden.

Bemerkung 2.11.8

- Neben den hier betrachteten Barrier-Optionen und Lookback-Optionen gibt es noch eine Vielzahl anderer exotischer Optionen: asiatische Option, Chooser-Option, binäre Optionen, Basket-Option,...
- Prinzipiell werden exotische Optionen nicht nur als europäische Option gehandelt.

