§ 17.

Normierte Räume, Banachräume, Fixpunktsatz

In diesem Paragraphen sei $\mathbb{K}$ stets gleich $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und sei X ein Vektorraum (VR) über $\mathbb{K}$.

Definition
Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ heißt genau dann eine **Norm** auf X, wenn folgendes erfüllt ist:

(1) $\forall x \in X : \|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(2) $\forall x \in X, \alpha \in \mathbb{K} : \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

(3) $\forall x, y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

In diesem Fall heißt $(X, \|\cdot\|)$ ein **normierter Raum** (NR).

Beispiele:

(1) Sei $n \in \mathbb{N}, X = \mathbb{K}^n$ und für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ die **euklidische Norm** gegeben:

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}$$

Dann ist $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ ein normierter Raum (vgl. §1).

(2) Sei $X = C[a, b]$ und für $f \in X$ seien die folgenden Normen gegeben:

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x$$

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x}$$

$$\|f\|_\infty := \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$$

Leichte Übung: $(X, \|\cdot\|_1), (X, \|\cdot\|_2)$ und $(X, \|\cdot\|_\infty)$ sind NRe.

(3) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $X := C(K, \mathbb{R}^m)$ und sei für $f \in X$ die Norm

$$\|f\|_\infty := \max\{\|f(x)\| : x \in K\}$$

Leichte Übung: $(X, \|\cdot\|_\infty)$ ist ein NR.

Für den Rest dieses Paragraphen sei X stets ein NR mit Norm $\|\cdot\|$.

Bemerkung: Wie in §1 zeigt man die umgekehrte Dreiecksungleichung:

$$\forall x, y \in X : |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

Definition

(1) Sei (x_n) eine Folge in X. (x_n) heißt genau dann **konvergent**, wenn ein $x_0 \in X$ existiert für das gilt:

$$\|x_n - x_0\| \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

In diesem Fall ist x_0 eindeutig bestimmt und man schreibt $x_n \overset{n\to\infty}{\to} x_0$ oder $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. x_0 heißt **Grenzwert** oder **Limes** von (x_n).

(2) (x_n) heißt genau dann **divergent**, wenn (x_n) nicht konvergent ist.

(3) (x_n) heißt genau dann eine **Cauchyfolge** (CF), wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \|x_n - x_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$$

(4) Sei $x_0 \in X$ und $\delta > 0$. Definiere:

$$U_\delta(x) := \{x \in X \mid \|x - x_0\| < \delta\}$$

(5) Sei $A \subseteq X$. A heißt **offen**, genau dann wenn gilt:

$$\forall x \in A \exists \delta = \delta(x) > 0 : U_\delta(x) \subseteq A$$

A heißt **abgeschlossen**, genau dann wenn $X \setminus A$ offen ist.

Satz 17.1 (Eigenschaften von Folgen in normierten Räumen)
Seien $(x_n), (y_n)$ Folgen in X, (α_n) Folge in $\mathbb{K}$, $x, y \in X$ und $A \subseteq X$.

(1) Gilt $x_n \to x, y_n \to y$ und $\alpha_n \to \alpha \in \mathbb{K}$, so folgt:

$$x_n + y_n \to x + y \qquad \alpha_n x_n \to \alpha x \qquad \|x_n\| \to \|x\|$$

D.h. die Addition und Skalarmultiplikation sind stetig.

(2) Ist (x_n) konvergent, so ist (x_n) **beschränkt**, d.h.:

$$\exists c \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N} : \|x_n\| \leq c$$

und (x_n) ist eine CF.

(3) Genau dann wenn A abgeschlossen ist, gilt für jede konvergente Folge (x_n) in A:

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in A$$

(4) Sei $(X, \|\cdot\|_\infty)$ wie in obigem Beispiel (3). Dann gilt für (f_n) in X und $f \in X$, dass (f_n) genau dann auf K **gleichmäßig** gegen f **konvergiert**, wenn gilt:

$$\begin{aligned} &\|f_n - f\|_\infty \overset{n\to\infty}{\to} 0 \\ :\Longleftrightarrow\ &\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \forall x \in K \end{aligned}$$

Beweis

(1) Wie im $\mathbb{R}^n$.

(2) Wie im $\mathbb{R}^n$.

(3) Wie im $\mathbb{R}^n$.

(4) **In der großen Übung.** ∎

Beispiel
Sei $X = C[-1,1]$ mit $\|f\|_2 := \sqrt{\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x}$. Definiere die Folge (f_n) wie folgt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : f_n(x) = \begin{cases} -1 & , -1 \leq x \leq -\frac{1}{n} \\ nx & , -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & , \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Dann ist klar, dass $f_n \in X$ für alle $n \in \mathbb{N}$. In den **großen Übungen** wird gezeigt:

(1) (f_n) ist eine CF in X.

(2) Es existiert **kein** $f \in X$ mit $\|f_n - f\|_2 \to 0$

Definition
X heißt ein **Banachraum** oder **vollständig**, genau dann wenn jede CF in X einen Grenzwert in X hat.

Beispiele:

(1) Sei $X = \mathbb{K}^n, \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}$. Dann folgt aus §2, dass $(X, \|\cdot\|_2)$ ein BR ist.

(2) Sei $X = C[-1,1], \|f\|_2 = \sqrt{\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x}$. Dann ist $(X, \|\cdot\|_2)$ **kein** BR.

(3) Sei $(X, \|\cdot\|_\infty)$ wie in 17.1(4). In den **großen Übungen** wird gezeigt, dass $(X, \|\cdot\|_\infty)$ ein BR ist.

Satz 17.2 (Banachscher Fixpunktsatz)
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein BR, $\emptyset \neq A \subseteq X$ sei abgeschlossen und es sei $F : A \to X$ eine Abbildung mit:

(i) $F(A) \subseteq A$

(ii) F ist eine **Kontraktion**, d.h.:

$$\exists L \in [0,1) : \forall x, y \in A : \|F(x) - F(y)\| \leq L \cdot \|x - y\|$$

Dann existiert genau ein $x^* \in A$ mit $F(x^*) = x^*$.
Ist $x_0 \in A$ beliebig und (x_n) definiert durch $x_{n+1} := F(x_n)$ $(n \geq 0)$, so ist $x_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gilt:

$$x_n \overset{n\to\infty}{\to} x^*$$

Weiter gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{L^n}{1-L} \|x_1 - x_0\|$$

Diese Folge heißt Folge der **sukzessiven Approximationen**.

Beweis
Sei $x_0 \in A$ und (x_n) wie oben definiert. Es gilt:

$$\|x_2 - x_1\| = \|F(x_1) - F(x_2)\| \leq L \cdot \|x_1 - x_0\|$$

Induktiv lässt sich zeigen:

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : \|x_{k+1} - x_k\| \leq L^k \cdot \|x_1 - x_0\|$$

Seien nun $m, n \in \mathbb{N}$ und $m > n$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
\|x_m - x_n\| &= \|(x_m - x_{m-1}) + \cdots + (x_{n+1} - x_n)\| \\
&\leq \|x_m - x_{m-1}\| + \cdots + \|x_{n+1} - x_n\| \\
&\leq L^{m-1}\|x_1 - x_0\| + \cdots + L^n\|x_1 - x_0\| \\
&= (L^{m-1} + \cdots + L^n) \cdot \|x_1 - x_0\| \\
&= L^n(1 + \cdots + L^{m-n-1}) \cdot \|x_1 - x_0\| \\
&\leq L^n(\sum_{j=0}^{\infty} L^j) \cdot \|x_1 - x_0\| \\
&= \frac{L^n}{1-L}\|x_1 - x_0\|
\end{aligned}$$

Also ist (x_n) eine CF. Da X außerdem BR ist, existiert ein $x^* \in X$ mit $x_n \to x^*$. Wegen $(x_n) \subseteq A$ und A abgeschlossen ist außerdem $x^* \in A$.
Festes n und $m \to \infty$ liefert aus obiger Gleichung:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|x_n - x^*\| \leq \frac{L^n}{1-L}\|x_1 - x_0\|$$

Für $F(x^*)$ gilt also:

$$\begin{aligned}
\|F(x^*) - x^*\| &= \|F(x^*) - x_{n+1} + x_{n+1} - x^*\| \\
&\leq \|F(x^*) - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x^*\| \\
&= \|F(x^*) - F(x_n)\| + \|x_{n+1} - x^*\| \\
&\leq L\|x^* - x_n\| + \|x_{n+1} - x^*\| \overset{n\to\infty}{\to} 0
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\|F(x^*) - x^*\| = 0 \iff F(x^*) = x^*$$

Sei nun $z \in A$ und $F(z) = z$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\|x^* - z\| = \|F(x^*) - F(z)\| \leq L\|x^* - z\| \\
\Longrightarrow\ &(1 - L)\|x^* - z\| \leq 0 \\
\Longrightarrow\ &x^* = z
\end{aligned}$$

Also ist x^* eindeutig. ∎