8. Komplexe Wegintegrale

Im Folgenden sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ $(a < b)$ und $\varphi, \psi : I \to \mathbb{C}$ Funktionen.

Definition

(1) Ist φ auf I stetig, so setze: $\int_a^b \varphi(t)dt := \int_a^b \operatorname{Re}\varphi(t)dt + i\int_a^b \operatorname{Im}\varphi(t)dt$; $\int_b^a \varphi(t)dt := -\int_a^b \varphi(t)dt$; $\int_a^a \varphi(t)dt := 0$

(2) φ heißt auf I **differenzierbar** (db) $\Leftrightarrow \operatorname{Re}\varphi, \operatorname{Im}\varphi$ sind auf I differenzierbar. In diesem Fall: $\varphi' := (\operatorname{Re}\varphi)' + i(\operatorname{Im}\varphi)'$

(3) φ heißt auf I **stetig differenzierbar** $\Leftrightarrow \operatorname{Re}\varphi, \operatorname{Im}\varphi$ sind auf I stetig differenzierbar.

Satz 8.1
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in H(D)$, $\varphi(I) \subseteq D$ und φ auf I differenzierbar.
Dann ist $f \circ \varphi : I \to \mathbb{C}$ differenzierbar auf I und $(f \circ \varphi)'(t) = f'(\varphi(t))\varphi'(t) \, \forall t \in I$.

Beweis
Übung! ■

Satz 8.2

(1) Sei φ stetig auf I und $\Phi : I \to \mathbb{C}$ definiert durch $\Phi(s) := \int_a^s \varphi(t)dt$. Dann ist Φ stetig differenzierbar auf I und $\Phi' = \varphi$ auf I

(2) Sei φ auf I stetig differenzierbar $\Rightarrow \int_a^b \varphi'(t)dt = \varphi(b) - \varphi(a)$

Beweis
Übung! ■

Definition
Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Weg (also γ stetig).

(1) $\operatorname{Tr}(\gamma) := \gamma([a, b])$ **Träger von** γ

(2) γ heißt **geschlossen** $:\Leftrightarrow \gamma(a) = \gamma(b)$

(3) γ heißt **glatt** $:\Leftrightarrow \gamma$ ist auf $[a, b]$ stetig differenzierbar.

Definition
Sei $n \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{R},\ a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1}$ und $\gamma_j := [a_j, a_{j+1}] \to \mathbb{C}$ seien Wege $(j = 1, \ldots, n)$ mit $\gamma_j(a_{j+1}) = \gamma_{j+1}(a_{j+1})\ (j = 1, \ldots, n-1)$.
Definiere $\gamma : [a_1, a_{n+1}] \to \mathbb{C}$ durch $\gamma(t) := \gamma_j(t)$, falls $t \in [a_j, a_{j+1}]$.
Dann ist γ ein Weg und man schreibt: $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \cdots \oplus \gamma_n$
γ heißt **stückweise glatt** $:\Leftrightarrow \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ sind glatt.

Bemerkungen:
(1) Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Weg. γ ist stückweise glatt $\Leftrightarrow \exists\, a_1, \ldots, a_{n+1} \in [a, b] :\ a = a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1} = b$ und $\gamma_{|[a_j, a_{j+1}]}$ ist glatt $(j = 1, \ldots, n)$

(2) stückweise glatte Wege sind rektifizierbar.

(3) glatt $\Rightarrow$ stückweise glatt

Beispiel
$\gamma_1(t) := t\ (t \in [0, 1]),\ \gamma_2(t) := 1 + i(t-1)\ (t \in [1, 2])$.
$\gamma := \gamma_1 \oplus \gamma_2,\ \gamma_1, \gamma_2$ sind glatt, $\ \gamma_1'(t) = 1 \neq \gamma_2'(1) = i \Rightarrow \gamma$ in 1 nicht differenziebar.

Wie in $\mathbb{R}$ zeigt man: Ist $\phi : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig, so gilt: $|\int_a^b \phi(t)dt| \leq \int_a^b |\phi(t)|dt$.
Für den Rest des Paragraphen sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ stets ein Weg (also stetig).

Definition
$\gamma^- : [a, b] \to \mathbb{C}, \gamma^-(t) := \gamma(b + a - t); \gamma^-$ heißt der zu γ **inverse Weg**.
Klar: $\mathrm{Tr}(\gamma) = \mathrm{Tr}(\gamma^-)$

Definition
Ist γ glatt, so setze $L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|dt$.
Ist $\gamma = \gamma_1 \oplus \cdots \oplus \gamma_n$ stückweise glatt (mit $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ glatt), so setze:
$L(\gamma) := L(\gamma_1) + \cdots + L(\gamma_n)$
$L(\gamma)$ heißt **Weglänge** von γ.

Beispiele:
(1) Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \gamma(t) := z_1 + t(z_2 - z_1)(t \in [0, 1]), \gamma$ ist glatt.

$$\gamma'(t) = z_2 - z_1. \implies L(\gamma) = \int_0^1 |z_2 - z_1|dt = |z_2 - z_1|$$

(2) Sei $z_0 \in \mathbb{C}, r > 0$ und $\gamma(t) := z_0 + re^{it}(t \in [0, 2\pi])$

$$\gamma \text{ ist glatt, } \gamma'(t) = rie^{it},\ |\gamma'(t)| = r \implies L(\gamma) = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

Definition
Sei $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$ und $h : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ stetig differenzierbar, bijektiv und $h(\alpha) = a, h(\beta) = b$. Ist γ stückweise glatt, so setze $\Gamma := \gamma \circ h$, also $\Gamma(s) = \gamma(h(s))(s \in [\alpha, \beta])$.
Dann ist Γ ein stückweise glatter Weg mit $\mathrm{Tr}(\Gamma) = \mathrm{Tr}(\gamma)$.
h heißt eine **Parametertransformation**. Man schreibt $\Gamma \sim \gamma$.

Definition
Sei $f \in C(\mathrm{Tr}(\gamma))$;

Ist γ glatt, so setze $\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$

Ist $\gamma = \gamma_1 \oplus \cdots \oplus \gamma_n$ stückweise glatt mit $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ glatt, so setze $\int\limits_\gamma f(z)dz := \sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{\gamma_j} f(z)dz$.
$\int\limits_\gamma f(z)dz$ heisst ein (komplexes) **Wegintegral** (von f längs γ)

Beispiel
$\gamma(t) := 3e^{it}(t \in [0, 2\pi])$

(1) $f(z) = \overline{z}, \int\limits_\gamma \overline{z}dz = \int\limits_0^{2\pi} 3e^{-it} i3e^{it}dt = 18\pi i.$

(2) $f(z) = z^2, \int\limits_\gamma z^2dz = \int\limits_0^{2\pi} 9e^{2it} i3e^{it}dt = 0.$

Wie in der Analysis zeigt man:

Satz 8.3
γ sei stückweise glatt, $f, g : \mathrm{Tr}(\gamma) \to \mathbb{C}$ seien stetig, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und Γ sei ein stückweise glatter Weg mit $\Gamma \sim \gamma$.

(1) $\int\limits_\gamma (\alpha f(z) + \beta g(z))dz = \alpha \int\limits_\gamma f(z)dz + \beta \int\limits_\gamma g(z)dz$

(2) $\int\limits_\Gamma f(z)dz = \int\limits_\gamma f(z)dz$ (und $L(\Gamma) = L(\gamma)$)

(3) $\int\limits_{\gamma^-} f(z)dz = -\int\limits_\gamma f(z)dz$

Satz 8.4
γ und f seien wie in 8.3. f_n sei eine Folge in $C(\mathrm{Tr}(\gamma))$ und es sei $M := \max_{z \in \mathrm{Tr}(\gamma)} |f(z)|$. Dann:

(1) $|\int\limits_\gamma f(z)dz| \leq ML(\gamma)$

(2) Konvergiert die Folge (f_n) auf $\mathrm{Tr}(\gamma)$ gleichmaessig gegen f, so gilt:

$$\int\limits_\gamma f_n(z)dz \to \int\limits_\gamma f(z)dz (n \to \infty)$$

(also: $\lim_{n\to\infty} \int\limits_\gamma f_n(z)dz = \int\limits_\gamma (\lim_{n\to\infty} f_n(z))dz$)

Beweis
(1) $|\int\limits_\gamma f(z)dz| = |\int\limits_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt| \leq \int\limits_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt \leq \int\limits_a^b M|\gamma'(t)|dt = ML(\gamma).$

(2) $M_n := \max_{z\in\mathrm{Tr}(\gamma)} |f_n(z) - f(z)|$. Vorraussetzung $\implies M_n \to 0 (n \to \infty)$.
$|\int\limits_\gamma f_n(z)dz - \int\limits_\gamma f(z)dz| = |\int\limits_\gamma (f_n(z) - f(z))dz| \overset{(1)}{\leq} M_n L(\gamma)$. ■

Definition
Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$, D offen und $f \in C(D)$. f besitzt auf D eine **Stammfunktion** (SF) $:\iff \exists F \in H(D) : F' = f$ auf D.

Satz 8.5
Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$, D offen und $f \in C(D)$ besitze auf D die Stammfunktion F und γ sei ein stückweiser glatter Weg mit $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq D$. Dann:

$$\int\limits_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Beweis
O.B.d.A: γ glatt. $\int\limits_\gamma f(z)dz = \int\limits_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int\limits_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int\limits_a^b (F\circ\gamma)'(t)dt \overset{8.2}{=} (F \circ \gamma)(b) - (F\circ\gamma)(a)$. ■

Folgerung 8.6
D, f und γ seien wie in 8.5. Ist γ geschlossen $\implies \int\limits_\gamma f(z)dz = 0$.

Beispiel 8.7
Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$. $\gamma(t) = z_0 + re^{it} (t \in [0, 2\pi])$; γ ist geschlossen.
Für $k \in \mathbb{Z}$ sei $f_k(z) := (z - z_0)^k$ $(z \in \mathbb{C}\backslash\{z_0\})$

(1) Sei $k \neq -1$. f_k hat auf $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ die Stammfunktion $z \mapsto \frac{1}{k+1}(z - z_0)^{k+1}$.
8.6 $\implies \int\limits_\gamma (z - z_0)^k dz = 0$

(2) Sei $k = -1$: $\int\limits_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it}dt = 2\pi i$.

Also:
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = 1$$

Wegen 8.6: Die Funktion $z \mapsto \frac{1}{z-z_0}$ hat auf $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ keine Stammfunktion!
Aber: im Falle $z_0 = 0$ hat die Funktion $z \mapsto \frac{1}{z}$ die Stammfunktion $\mathrm{Log} z$ auf $\mathbb{C}_-$.

Satz 8.8
Sei $[a_j, b_j] \subseteq \mathbb{R}$ und $\gamma_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{C}$ glatte Wege mit $\gamma_j(b_j) = \gamma_{j+1}(a_{j+1})$ $(j = 1, \ldots, n)$
Dann exisitert ein stückweise glatter Weg γ mit: $\mathrm{Tr}(\gamma) = \bigcup\limits_{j=1}^n \mathrm{Tr}(\gamma_j), L(\gamma) = L(\gamma_1) + \cdots + L(\gamma_n)$ und $\int\limits_\gamma f(z)dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)dz + \cdots + \int\limits_{\gamma_n} f(z)dz \ \forall f \in C(\mathrm{Tr}(\gamma))$

Beweis
mit 8.3(2). ∎

Beispiel
$\gamma_1(t) = t$, $(t \in [0,1])$; $\gamma_2(t) = 1 + it, t \in [0,1]$
$\tilde{\gamma}_2(t) := 1 + i(t-1), t \in [1,2]$. Dann: $\tilde{\gamma}_2 \sim \gamma_2$; $\gamma := \gamma_1 \oplus \tilde{\gamma}_2 : [0,2] \to \mathbb{C}$.

Satz 8.9
Sei (K_n) eine Folge kompakter Mengen in $\mathbb{C}$ mit: $K_n \neq \emptyset$ $(\forall n \in \mathbb{N}), K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \dots$ und $d(K_n) := \max\limits_{z,w \in K_n} |z - w| \to 0$ $(n \to \infty)$. Dann:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset.$$

Beweis
Wähle in jedem K_n ein z_n. Für n,k $\in \mathbb{N} : z_n, z_{n+k} \in K_n$
Dann: $|z_n - z_{n+k}| \leq d(K_n) \implies (z_n)$ ist eine Cauchy-Folge $\implies \exists z_0 \in \mathbb{C} : z_n \to z_0$.

Sei $N \in \mathbb{N}$. $z_n \in K_N \forall n \geq N$. K_N abgeschlossen $\implies z_0 \in K_N$. ∎