

# Kapitel II

## Garben und Divisoren

### § 9 $\mathcal{O}_X$ -Modulgarben

**Definition 9.1** Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  lokal geringter Raum,  $\mathcal{F}$  Garbe von abelschen Gruppen auf  $X$ .  $\mathcal{F}$  heißt  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe auf  $X$ , falls

- (i) Für jede offene Teilmenge  $U \subseteq X$  die abelsche Gruppe  $\mathcal{F}(U)$  ein  $\mathcal{O}_X(U)$ -Modul ist.
- (ii) Für alle offenen Teilmengen  $U' \subseteq U \subseteq X$  der Gruppenhomomorphismus  $\rho_{U'}^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U')$  ein  $\mathcal{O}_X(U)$ -Modulhomomorphismus ist. Dabei wird  $\mathcal{F}(U')$  vermöge  $\mathcal{O}_X \rho_{U'}^U$  als  $\mathcal{O}_X(U)$ -Modul aufgefasst.

**Definition + Bemerkung 9.2** (i) Ein *Homomorphismus von  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarben*  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  ist ein Garbenmorphismus  $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ , sodass für jede offene Teilmenge  $U \subseteq X$  der Gruppenhomomorphismus  $\phi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  ein  $\mathcal{O}_X(U)$ -Modulhomomorphismus ist. Man sagt,  $\phi$  ist  *$\mathcal{O}_X$ -linearer Garbenmorphismus*.

(ii) Die  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarben bilden zusammen mit den  $\mathcal{O}_X$ -linearen Garbenmorphismsen eine Kategorie  $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$ .

**Beispiel 9.3** Sei  $X$  eine nichtsinguläre, projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$ .

- (i) Sei  $D := \sum_{P \in X} n_P P$  ein Divisor auf  $X$ , das heißt es ist  $n_P \in \mathbb{Z}$ ,  $n_P \neq 0$  nur für endlich viele  $P \in X$ . Für  $U \subseteq X$  offen sei

$$\mathcal{L}(D)(U) := \{f \in k(X) \mid \operatorname{div}(f|_U) + D|_U \geq 0\} \cup \{0\}.$$

Dann ist  $\mathcal{L}(D)$  eine  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe, denn: für  $g \in \mathcal{O}_X(U)$  ist  $\operatorname{div} g \geq 0$  und damit

$$\operatorname{div}(fg|_U) + D|_U = \operatorname{div}(f|_U) + \operatorname{div}(g|_U) + D|_U = \operatorname{div}(f|_U) + D|_U \geq 0.$$

Weiter ist der globale Schnitt

$$\mathcal{L}(D)(X) = \{f \in k(X) \mid \operatorname{div} f + D \geq 0\} \cup \{0\} = L(D)$$

gerade der Riemann-Roch-Raum für  $D$ . Dieser ist demnach ein  $\mathcal{O}_X(X)$ -Modul, also ein  $k$ -Vektorraum. Dieses Resultat hatten wir vergangener Semester bereits gesehen. Betrachte nun eine kleine Umgebung  $U \subseteq X$  von  $P \in X$ , das heißt es gilt  $n_Q = 0$  für alle  $Q \in U \setminus \{P\}$ . Sei  $t_P$  ein Erzeuger des zu  $P$  zugehörigen maximalen Ideals  $\mathfrak{m}_P \subset \mathcal{O}_{X,P}$ . Wähle nun  $U$  so, dass  $\operatorname{div} t_P|_{U \setminus \{P\}} = 0$ , das heißt  $t_P \in \mathcal{O}_X(U)$ . Dann ist  $t_P^{-n_P} \in \mathcal{L}(D)(U)$  und  $t_P^{-n_P}$  erzeugt  $\mathcal{L}(D)(U)$  als  $\mathcal{O}_X(U)$ -Modul, denn: Ist  $g \in \mathcal{O}_X(U)$ , so ist

$$\operatorname{div}(t_P^{-n_P} g|_U) = \operatorname{div}(t_P^{-n_P}|_U) + \operatorname{div}(g|_U) \geq \operatorname{div}(t_P^{-n_P}|_U) = -n_P P,$$

also

$$\operatorname{div}(t_P^{-n_P} g|_U) + D|_U \geq -n_P P + n_P P \geq 0$$

und damit  $t_P^{-n_P} g \in \mathcal{L}(D)(U)$ . Ist umgekehrt  $g \in \mathcal{L}(D)(U)$ , also

$$\operatorname{div}(g|_U) + D|_U = \operatorname{div}(g|_U) + n_P P \geq 0,$$

so gilt

$$\operatorname{div}(t_P^{n_P} g|_U) = n_P P + \operatorname{div}(g|_U) \geq 0,$$

also  $t_P^{n_P} g \in \mathcal{O}_X(U)$  und damit  $g = t_P^{-n_P} (t_P^{n_P} g)$ .

- (ii) Sei  $\Omega = \Omega_{k(X)/k}$  der  $k(X)$ -Vektorraum der Kählerdifferentialen von  $k(X)/k$ . Die Elemente von  $\Omega$  heißen rationale Differentiale auf  $X$ . Ohne Einschränkung gelte  $X = V(f)$  mit einem irreduziblen Polynom  $f \in k[X, Y]$ . Dann ist  $k(X) = \operatorname{Quot} k[X, Y] / (f)$ . Damit wird  $\Omega$  erzeugt von den Elementen  $dg$  für  $g \in k(X)$ , wobei  $d$  die universelle Derivation bezeichne. Da  $d(X^2) = 2XdX$  und induktiv  $d(X^n) = n!XdX$ , genügen die linearen Terme.  $df = 0$  ergibt also eine lineare Gleichung zwischen  $dX$  und  $dY$  und wir erhalten  $\dim_{k(X)} \Omega = 1$ . Wir wollen uns daraus nun eine  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe basteln. Für  $\omega \in \Omega_{k(X)/k}$  sei

$$\operatorname{div} \omega = \sum_{P \in X} \operatorname{ord}_P \omega P$$

folgendermaßen definiert: Für  $P \in X$  sei  $t_P$  Uniformisierende, also Erzeuger vom maximalen Ideal  $\mathfrak{m}_P$ . Dann gilt  $dt_P(P) = 0$  aber  $dt_P \neq 0$ , also bildet  $\{dt_P\}$  eine Basis von  $\Omega_{k(X)/k}$ . Schreibe also  $\omega = f_P dt_P$  für ein  $f_P \in k(X)$ . Setze nun  $\operatorname{ord}_P(\omega) = \operatorname{ord}_P(f_P)$ . Beachte:  $t_P - t_P(Q)$  ist Uniformisierende für  $Q$  auf einer offenen (und dichten) Teilmenge von  $X$

und  $d(t_P - t_P(Q)) = dt_P$ . Damit ist  $\text{div}\omega$  wohldefiniert. Setze nun

$$\Omega_X(U) := \{\omega \in \Omega_{k(X)/k} \mid \text{div}\omega|_U \geq 0\} \cup \{0\}.$$

$\Omega_X(U)$  ist für jedes  $U \subseteq X$  offen ein  $\mathcal{O}_X(U)$ -Modul, also ist  $\Omega_X$  eine  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe. Die Elemente in  $\Omega_X(U)$  heißen *reguläre Differentiale* auf  $U$ . Bachte: Mit der Notation aus (i) gilt  $\Omega_X \cong \mathcal{L}(\text{div}\omega_0)$  für  $\omega_0 \in \Omega_{k(X)/k} \setminus \{0\}$ , denn:  $\omega_0$  ist eine Basis von  $\Omega_{k(X)/k}$  und es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\text{div}\omega_0)(U) &= \{f \in k(X) \mid (\text{div}f + \text{div}\omega_0)|_U \geq 0\} \cup \{0\} \\ &= \{f \in k(X) \mid \text{div}(f\omega_0)|_U \geq 0\} \cup \{0\} \\ &= \{w \in \Omega_{k(X)/k} \mid \text{div}(w)|_U \geq 0\} \cup \{0\} \\ &= \Omega_X(U). \end{aligned}$$

$\text{div}\omega_0$  heißt auch *kanonischer Divisor*. Erinnern wir uns nun an den Satz von Riemann-Roch aus der algebraischen Geometrie, welcher besagt:

$$\dim L(D) - \dim L(K - D) = \deg D + 1 - g,$$

wobei  $g$  das Geschlecht der Kurve und  $K$  einen kanonsichen Divisor bezeichne, so erhalten wir mit  $D = 0$ :

$$1 - \dim L(K) = 1 - g \iff \dim L(K) = g$$

und mit  $D = K$

$$\dim L(K) - 1 = \dim L(K) - \dim L(0) = \deg K + 1 - g,$$

zusammen also  $\deg K = 2g - 2$ . Da sist praktisch! Betrachte wir uns beispielsweise den Punkt  $\infty = (1 : 0) \in \mathbb{P}^1$ , das Differential  $\omega = dX$  und die Uniformisierende  $t_\infty = \frac{1}{X}$ , so gilt

$$dX = \omega = f_P d\left(\frac{1}{X}\right) = -f_P \frac{1}{X^2} dX,$$

also  $f_P = -X^2$  und  $\text{ord}_P dX = \text{ord}_P X^2 = -2$ , was mit unserer oben gefunden Formel und  $g = 0$  für  $\mathbb{P}^1$  übereinstimmt. Eine weitere Anwendung ist natürlich auch die Bestimmung des Geschlechts einer Kurve mithilfe der obigen Formel.

**Definition + Bemerkung 9.4** (i) Sei  $X = \text{Spec} R$  ein affines Schema und  $M$  ein  $R$ -Modul. Dann gibt es genau eine Garbe  $\tilde{M}$  auf  $X$ , sodass  $\tilde{M}(D(f)) = M_f = M \otimes_R R_f$  für jedes  $f \in R$ .  $\tilde{M}$  wird so zur  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe. Weiterhin ist für jedes  $\mathfrak{p} \in \text{Spec} R$  der Halm gegeben durch

$$\tilde{M}_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}} = M \otimes_R R_{\mathfrak{p}}.$$

- (ii) Eine  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe  $\mathcal{F}$  heißt *quasikohärent* auf  $\text{Spec } R$ , falls es einen  $R$ -Modul  $M$  gibt mit  $\mathcal{F} \cong \tilde{M}$ , also  $\mathcal{F}(D(f)) \cong M_f$  als  $R_f$ -Moduln.
- (iii) Sei nun  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein allgemeines Schema. Eine  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe  $\mathcal{F}$  auf  $X$  heißt *quasikohärent*, falls es eine offene Überdeckung von  $X$  durch affine Unterschemata  $\{U_i = \text{Spec } R_i\}_{i \in I}$  gibt, sodass die Einschränkung  $\mathcal{F}|_{U_i}$  quasikohärent ist für jedes  $i \in I$ , also  $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \tilde{M}_i$  für einen  $R_i$ -Modul  $M_i$ .
- (iv) Eine quasikohärente  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe auf  $X$  heißt *kohärent*, falls  $X$  noethersch ist und die  $R_i$ -Moduln  $M_i$  aus (iii) allesamt endlich erzeugt sind.

**Proposition 9.5** *Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein Schema. Eine  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe  $\mathcal{F}$  auf  $X$  ist quasikohärent genau dann, wenn für jedes offene, affine Unterschema  $U \subseteq X$  die Einschränkung  $\mathcal{F}|_U$  quasikohärent ist.*

*Beweis.* Wie zum Beispiel 4.5 oder 7.3.

**Bemerkung 9.6** *Sei  $X = \text{Spec } R$  ein affines Schema. Dann ist die Zuordnung*

$$\underline{R\text{-Mod}} \longrightarrow \underline{\mathcal{O}_X\text{-Mod}}, \quad M \mapsto \tilde{M}$$

*ein volltreuer, exakter Funktor, dessen Bild die quasikohärenten  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarben sind.*

*Beweis.* Sei  $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$  exakte Sequenz von  $R$ -Moduln. Zu zeigen: Für jedes  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } R$  ist die lokalisierte Sequenz

$$0 \longrightarrow M'_{\mathfrak{p}} \longrightarrow M_{\mathfrak{p}} \longrightarrow M''_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0$$

ebenfalls exakt (als Sequenz von  $R_{\mathfrak{p}}$ -Moduln): Übung. Man sagt,  $R_{\mathfrak{p}}$  ist "flacher"  $R$ -Modul.

**Definition + Bemerkung 9.7** (i) Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein lokal geringter Raum,  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  zwei  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarben. dann ist die zur Prägarbe  $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$  assoziierte Garbe  $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$  eine  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe.

- (ii) Ist  $X = \text{Spec } R$  affin, so gilt für  $R$ -Moduln  $M, N$

$$\widetilde{M \otimes_R N} = \tilde{M} \otimes_{\tilde{R}} \tilde{N} = \tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{N}.$$

- (iii) Sind für  $i \in I$   $R$ -Moduln  $M_i$  gegeben, so ist

$$\widetilde{\bigoplus_{i \in I} M_i} = \bigoplus_{i \in I} \tilde{M}_i.$$

**Bemerkung + Definition 9.8** Sei  $f : X \longrightarrow Y$  Morphismus lokal geringter Räume.

- (i) Für jede  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe  $\mathcal{F}$  auf  $X$  ist  $f_*\mathcal{F}$  eine  $\mathcal{O}_Y$ -Modulgarbe auf  $Y$ .
- (ii) Für jede  $\mathcal{O}_Y$ -Modulgarbe  $\mathcal{G}$  auf  $Y$  ist  $f^{-1}\mathcal{G}$  eine  $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ -Modulgarbe und die zur Prägarbe  $U \mapsto f^{-1}\mathcal{G}(U) \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y(U)} \mathcal{O}_X(U)$  assoziierte Garbe  $f^*\mathcal{G} := f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$  eine  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe.  $f^*\mathcal{G}$  heißt *Pullback* von  $\mathcal{G}$  unter  $f$ .

*Beweis.* (i) Für  $U \subseteq Y$  offen ist  $f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$  ein  $\mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$ -Modul. Der Garbenmorphismus  $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$  induziert einen Ringhomomorphismus  $f_U^\# : \mathcal{O}_Y(U) \rightarrow f_*\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$ , welcher die gewünschte  $\mathcal{O}_Y(U)$ -Modulstruktur liefert.

(ii) Zur Wohldefiniertheit brauchen wir noch einen Morphismus  $f^{-1}\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$ . Der Garbenmorphismus  $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$  liefert den Morphismus  $f^{-1}\mathcal{O}_Y \rightarrow f^{-1}f_*\mathcal{O}_X$  und Proposition 2.16 liefert  $f^{-1}f_*\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$ , was zusammen die Behauptung liefert.  $\square$

**Bemerkung 9.9** Seien  $X = \operatorname{Spec} R$ ,  $Y = \operatorname{Spec} S$  affine Schemata,  $f : X \rightarrow Y$  Morphismus mit zugehörigem Ringhomomorphismus  $\alpha : S \rightarrow R$ .

- (i) Für jeden  $R$ -Modul  $M$  gilt:  $f_*\tilde{M} = \widetilde{\alpha M}$ , wobei  $\alpha M$  die von  $\alpha$  als  $S$ -Modul aufgefasste abelsche Gruppe  $M$  bezeichne.
- (ii) Für jeden  $S$ -Modul  $N$  gilt  $f^*\tilde{N} = \widetilde{N \otimes_S R}$ .

*Beweis.* (i) Für  $U \subseteq Y$  offen ist  $f_*\tilde{M}(U) = \tilde{M}(f^{-1}(U))$ . Das wird durch  $f_U^\#$  (von  $\alpha$  induziert) zum  $\mathcal{O}_Y(U)$ -Modul. Für  $U = D(g)$  gilt wegen  $f^{-1}(D(g)) = D(g \circ f) = D(\alpha(g))$ :

$$f_*\tilde{M}(U) = \tilde{M}(f^{-1}(U)) = M(D(\alpha(g))) = M_{\alpha(g)} = \widetilde{\alpha M}_g = \widetilde{\alpha M}(U).$$

- (ii) Für die globalen Schnitte gilt

$$f^*\tilde{N}(X) = (f^{-1}\tilde{N} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X)(X) = N \otimes_S R$$

und für  $U \subseteq X$  offen

$$\begin{aligned} f^*\tilde{N}(U) &= (f^{-1}\tilde{N} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X)(U) \\ &= (N \otimes_S f^{-1}\mathcal{O}_Y(U)) \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y(U)} \mathcal{O}_X(U) \\ &= N \otimes_S \mathcal{O}_X(U) \\ &= (\widetilde{N \otimes_S R})(U), \end{aligned}$$

also gerade die Behauptung.  $\square$

**Proposition 9.10** Sei  $f : X \rightarrow Y$  Morphismus von Schemata.

- (i) Ist  $\mathcal{G}$  eine quasikohärente  $\mathcal{O}_Y$ -Modulgarbe auf  $Y$ , so ist  $f^*\mathcal{G}$  eine quasikohärente  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe auf  $X$ .

- (ii) Sind  $X, Y$  noethersch und  $\mathcal{G}$  zusätzlich kohärent, so ist auch  $f^*\mathcal{G}$  kohärent.
- (iii) Ist  $X$  noethersch und  $\mathcal{F}$  eine quasikohärente  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe auf  $X$ , so ist  $f_*\mathcal{F}$  eine quasikohärente  $\mathcal{O}_Y$ -Modulgarbe auf  $Y$ .

*Beweis.* (i) Die Eigenschaft quasikohärent zu sein ist eine lokale Eigenschaft, ohne Einschränkung sei also  $X$  und damit auch  $Y$  affin. Dann folgt die Aussage mit 9.9 aus  $\mathcal{G} = \tilde{N}$  für einen  $S$ -Modul  $N$  und  $f^*\mathcal{G} = \widetilde{N \otimes_S R}$ .

- (ii) Ist  $N$  als  $S$ -Modul erzeugt von den  $n_1, \dots, n_r$ , so ist  $N \otimes_S R$  erzeugt von den  $n_1 \otimes 1, \dots, n_r \otimes 1$ , also insbesondere endlich erzeugt als  $R$ -Modul.
- (iii) Ohne Einschränkung sei  $Y$  affin. Da  $X$  noethersch ist, gibt es eine endliche Überdeckung  $X = \bigcup_{i=1}^r U_i$ , ohne Einschränkung sei  $U_i \cap U_j$  affin für alle  $i, j$ .  $\mathcal{F}$  ist eine Garbe, die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{F}|_{U_i} \xrightarrow{\beta} \bigoplus_{i < j} \mathcal{F}|_{U_i \cap U_j}$$

mit  $\alpha(m) = (m|_{U_i})_i$  und  $\beta((m_i)_i) = (m_i|_{U_i \cap U_j} - m_j|_{U_i \cap U_j})_{i < j}$  ist also exakt. Der Funktor  $f_*$  ist linksexakt, denn: Ist  $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$  exakt, so ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow f_*\mathcal{F}'(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U)) \longrightarrow \mathcal{F}(f^{-1}(U)) \longrightarrow \mathcal{F}''(f^{-1}(U))$$

ebenfalls exakt (2.9 und 2.14). Da nun  $\bigoplus_{i=1}^r f_*\mathcal{F}|_{U_i}$  und  $\bigoplus_{i < j} f_*\mathcal{F}|_{U_i \cap U_j}$  quasikohärent sind, ist  $f_*\mathcal{F}$  als Kern eines Homomorphismus quasikohärenter Garben ebenfalls quasikohärent, was zu zeigen war.  $\square$

## § 10 Lokal freie Garben

**Beispiel 10.1** Sei  $X$  nichtsinguläre, projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$ ,  $D = \sum_{P \in X} n_P P$  ein Divisor auf  $X$  sowie  $\mathcal{L}(D)$  die zu  $D$  assoziierte  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe

$$\mathcal{L}(D)(U) = \{f \in k(X) \mid (\operatorname{div} f + D)|_U \geq 0\} \cup \{0\}.$$

Erinnerung: Ist  $U$  "klein", so ist  $\mathcal{L}(D)(U) = t_U \mathcal{O}_X(U)$ . Außerdem gilt für den Halm in jeden Punkt  $P \in X$ :

$$\mathcal{L}(D)_P = \{f \in k(X) \mid \operatorname{ord}_P(f) \geq -n_P\} \cup \{0\} = t_P^{-n_P} \mathcal{O}_{X,P}.$$

**Bemerkung 10.2** Ist  $X$  wie in Beispiel 10.1, so gilt für Divisoren  $D, D'$  auf  $X$

$$\mathcal{L}(D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}(D') \cong \mathcal{L}(D + D').$$

*Beweis.* Für  $U \subseteq X$  offen ist

$$\psi : \mathcal{L}(D)(U) \times \mathcal{L}(D')(U) \longrightarrow \mathcal{L}(D + D')(U), \quad (f, g) \mapsto fg$$

eine wohldefinierte, bilineare Abbildung von  $\mathcal{O}_X(U)$ -Moduln, denn es gilt

$$(\operatorname{div}(fg) + (D + D'))|_U = (\operatorname{div}f + D)|_U + (\operatorname{div}g + D')|_U \geq 0 + 0 = 0.$$

Damit induziert  $\phi$  also eine  $\mathcal{O}_X(U)$ -lineare Abbildung

$$\phi_U : (\mathcal{L}(D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}(D'))(U) \longrightarrow \mathcal{L}(D + D')(U).$$

Diese Abbildungen verkleben sich zu einem Garbenmorphismus

$$\phi : \mathcal{L}(D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}(D') \longrightarrow \mathcal{L}(D + D').$$

Nach Beispiel 10.1 haben wir in jedem Punkt eine Isomorphismus der Halme

$$\phi_P : t_P^{-n_P} \mathcal{O}_{X,P} \otimes_{\mathcal{O}_{X,P}} t_P^{-n'_P} \mathcal{O}_{X,P} \longrightarrow t_P^{-n_P - n'_P} \mathcal{O}_{X,P},$$

$\phi$  ist also Isomorphismus. Beachte: Es gilt  $\mathcal{L}(D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}(-D) \cong \mathcal{O}_X$ . □

**Definition 10.3** Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  lokal geringter Raum,  $\mathcal{F}$  eine  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe,  $n \in \mathbb{N}$ .

- (i)  $\mathcal{F}$  heißt *frei von Rang  $n$* , falls gilt  $\mathcal{F} \cong \mathcal{O}_X^n = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_X$ .
- (ii)  $\mathcal{F}$  heißt *lokal frei von Rang  $n$* , wenn es eine offene Überdeckung  $\{U_i\}_{i \in I}$  von  $X$  gibt, sodass für alle  $i \in I$  gilt  $\mathcal{F}|_{U_i} \cong (\mathcal{O}_X|_{U_i})^n$ .

**Bemerkung 10.4** Aus Freiheit folgt sicherlich lokale Freiheit, die Umkehrung ist im Allgemeinen allerdings nicht der Fall. Betrachte hierfür  $X = \mathbb{P}_k^1$  für einen algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$  und für den Divisor  $D = 1 \cdot P$  auf  $X$  für ein  $P \in X$  die Garbe  $\mathcal{L}(D)$  auf  $X$ . In Beispiel 10.1 haben wir bereits gesehen, dass  $\mathcal{L}(D)$  lokal frei von Rang 1 ist. Betrachte nun die globalen Schnitte von  $\mathcal{L}(D)$  und der Strukturgarbe. Es gilt

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}(\mathbb{P}_k^1) = k$$

und

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(D)(\mathbb{P}_k^1) &= \{f \in k(X) \mid \operatorname{div} f + P \geq 0\} \\
&= \{f \in k(X) \mid \operatorname{ord}_Q f \geq 0 \text{ für alle } Q \in \mathbb{P}^1 \setminus \{P\}\} \oplus \{f \in k(X) \mid \operatorname{ord}_P f \geq -1\} \\
&= \left\{f \in k(X) \mid f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}(\mathbb{P}_k^1 \setminus \{P\})\right\} \oplus \{f \in k(X) \mid \operatorname{ord}_P f \geq -1\} \\
&= k \oplus \frac{1}{X - X_P} k,
\end{aligned}$$

womit die Garben nicht isomorph sein können.

**Bemerkung 10.5** Ist  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein Schema, so ist jede lokalfreie Garbe auf  $X$  quasikohärent. Ist  $X$  weiterhin noethersch, so ist jede lokalfreie Garbe sogar kohärent.

*Beweis.* Sei  $\mathcal{F}$  eine lokal freie Garbe von Rang  $n$  sowie  $\{U_i = \operatorname{Spec} R_i\}_{i \in I}$  eine offene, ohne Einschränkung affine Überdeckung von  $X$  derart, dass  $\mathcal{F}|_{U_i} = (\mathcal{O}_X|_{U_i})^n$  für alle  $i \in I$ . Dann gilt  $\mathcal{F}|_{U_i} = \tilde{R}_i^n$ . Ist zudem  $X$  noethersch, so ist  $R_i$  noethersch für alle  $i \in I$ ,  $\mathcal{F}$  also kohärent.  $\square$

**Bemerkung 10.6** Jede lokalfreie Garbe  $\mathcal{L}$  von Rang 1 auf einer nichtsingulären, projektiven Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$ , die sich einbetten lässt in die konstante Garbe des Funktionenkörpers, ist isomorph zu einer Garbe  $\mathcal{L}(D)$  für einen Divisor  $D$  auf  $X$ .

*Beweis.* Sei  $\{U_i\}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  offene Überdeckung von  $X$  mit  $\mathcal{L}|_{U_i} \cong t_i \mathcal{O}_X|_{U_i}$  mit Erzeugern  $t_i \in k(X) \cap \mathcal{L}(U_i)$ . Es ist  $t_i \mathcal{O}_X|_{U_i \cap U_j} = t_j \mathcal{O}_{U_i \cap U_j}$ , das heißt es gilt  $\frac{t_i}{t_j} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^\times$ . Damit gilt

$$\operatorname{div} t_i|_{U_i \cap U_j} = \operatorname{div} \frac{t_j t_i}{t_j} \Big|_{U_i \cap U_j} = \operatorname{div} \frac{t_i}{t_j} \Big|_{U_i \cap U_j} + \operatorname{div} t_j|_{U_i \cap U_j} = \operatorname{div} t_j|_{U_i \cap U_j},$$

das heißt, wir können einen wohldefinierten Divisor  $D$  auf  $X$  durch  $D|_{U_i} = \operatorname{div} \frac{1}{t_i} \Big|_{U_i}$  definieren.

Dann gilt  $\mathcal{L} \cong \mathcal{L}(D)$ , denn für die Schnitte erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(U_i) &= \{t_i f \mid f \in \mathcal{O}_X(U_i)\} = \{t_i f \mid \operatorname{div} f|_{U_i} \geq 0\} \\
&= \left\{f \in \mathcal{O}_X(U_i) \mid \operatorname{div} \frac{f}{t_i} \Big|_{U_i} \geq 0\right\} \\
&= \{f \in \mathcal{O}_X(U_i) \mid \operatorname{div} f|_{U_i} \geq \operatorname{div} t_i|_{U_i}\} \\
&= \{f \in k(X) \mid (\operatorname{div} f - \operatorname{div} t_i)|_{U_i} \geq 0\} \\
&= \left\{f \in k(X) \mid \left(\operatorname{div} f + \operatorname{div} \frac{1}{t_i}\right) \Big|_{U_i} \geq 0\right\} \\
&= \{f \in k(X) \mid (\operatorname{div} + D)|_{U_i} \geq 0\} \\
&= \mathcal{L}(D)(U_i),
\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.  $\square$



**Proposition 10.7** Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  lokal geringter Raum,  $\mathcal{F}$  lokal freie Garbe von Rang  $n$  auf  $X$ . Dann gilt:

- (i) Ist  $\mathcal{G}$  lokal frei von Rang  $m$ , so ist  $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$  lokal frei von Rang  $mn$ .
- (ii) Ist  $f : Y \rightarrow X$  Morphismus von lokal geringten Räumen, so ist  $f^* \mathcal{F}$  lokal freie Garbe von Rang  $n$  auf  $Y$ .

*Warnung:* Es gibt keine entsprechende Aussage für  $f_*$ .

*Beweis.* (i) Wähle eine ausreichend feine Überdeckung  $\{U_i\}_{i \in I}$  von  $X$ , sodass

$$\mathcal{F}|_{U_i} \cong (\mathcal{O}_X|_{U_i})^n, \quad \mathcal{G}|_{U_i} \cong (\mathcal{O}_X|_{U_i})^m$$

und wähle Basen  $t_{i1}, \dots, t_{in}$  von  $\mathcal{F}|_{U_i}$  und  $s_{i1}, \dots, s_{im}$  von  $\mathcal{G}|_{U_i}$  als  $\mathcal{O}_X(U_i)$ -Moduln. Dann bilden die  $t_{i1} \otimes s_{i1}, \dots, t_{i1} \otimes s_{im}, \dots, t_{in} \otimes s_{im}$  eine Basis von  $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ , woraus die Behauptung folgt.

(ii) Sei  $U \subseteq X$  offen mit  $\mathcal{F}|_U \cong (\mathcal{O}_X|_U)^n$ . Dann ist

$$\begin{aligned} f^* \mathcal{F}|_{f^{-1}(U)} &= (f^{-1} \mathcal{F} \otimes_{f^{-1} \mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y) \Big|_{f^{-1}(U)} \\ &= (f^{-1} \mathcal{F})|_{f^{-1}(U)} \otimes_{f^{-1} \mathcal{O}_X|_{f^{-1}(U)}} \mathcal{O}_Y|_{f^{-1}(U)} \\ &= f^{-1}(\mathcal{F}|_U) \otimes_{f^{-1} \mathcal{O}_X|_{f^{-1}(U)}} \mathcal{O}_Y|_{f^{-1}(U)} \\ &= f^{-1}(\mathcal{O}_X|_U)^n \otimes_{f^{-1} \mathcal{O}_X|_{f^{-1}(U)}} \mathcal{O}_Y|_{f^{-1}(U)} \\ &= (f^{-1} \mathcal{O}_X)^n|_{f^{-1}(U)} \otimes_{f^{-1} \mathcal{O}_X|_{f^{-1}(U)}} \mathcal{O}_Y|_{f^{-1}(U)} \\ &= \left( f^{-1} \mathcal{O}_X|_{f^{-1}(U)} \otimes_{f^{-1} \mathcal{O}_X|_{f^{-1}(U)}} \mathcal{O}_Y|_{f^{-1}(U)} \right)^n \\ &= \left( f^{-1} \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1} \mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y \right)|_{f^{-1}(U)}^n \\ &= (\mathcal{O}_Y|_{f^{-1}(U)})^n \end{aligned}$$

Ist nun  $\{U_i\}_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $X$ , so ist auch  $\{f^{-1}(U)\}$  eine offene Überdeckung für  $Y$  und damit ist  $f^* \mathcal{F}$  lokal frei von Rang  $n$  wie gewünscht.  $\square$

**Definition + Proposition 10.8** Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  lokal geringter Raum sowie  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$   $\mathcal{O}_X$ -Modulgarben auf  $X$ . Für  $U \subseteq X$  offen sei

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U).$$

Dann ist  $\mathbf{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  eine  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe.

*Beweis.* Sei  $U \subseteq X$  offen. Klar:  $\mathbf{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U)$  ist abelsche Gruppe. Wir brauchen also nur noch eine  $\mathcal{O}_X(U)$ -Modulstruktur. Für  $\alpha \in \mathcal{O}_X(U)$  und  $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ . Definiere  $\alpha\phi$

wie folgt: Für jede offene Teilmenge  $V \subseteq U$  sei

$$(\alpha\phi)_V : \mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{G}(V), \quad (\alpha\phi)_V(s) := \alpha|_V \phi_V(s).$$

Die  $(\alpha\phi)_V$  ergeben den gewünschten Garbenmorphismus  $\alpha\phi : \mathcal{F}|_U \longrightarrow \mathcal{G}|_U$ , womit also  $\mathbf{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U)$  zum  $\mathcal{O}_X(U)$ -Modul wird. Es bleibt noch zu zeigen: die Zuordnung  $U \mapsto \mathbf{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$  ist eine Garbe. Übung!  $\square$

**Definiton + Proposition 10.9** Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  lokal geringter Raum,  $\mathcal{F}$  lokal freie Garbe von Rang  $n$  auf  $X$ .

- (i)  $\mathcal{F}^* := \mathbf{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$  ist lokal frei von Rang  $n$ .
- (ii)  $\mathcal{F}^*$  heißt *die zu  $\mathcal{F}$  duale Garbe*.
- (iii) Für jede  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe  $\mathcal{G}$  auf  $X$  gilt

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong \mathcal{F}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}.$$

*Beweis.* (i) Es genügt zu zeigen: Ist  $\{U_i\}_{i \in I}$  offene Überdeckung von  $X$ , so ist  $\mathbf{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)|_{U_i}$  frei. Es sei also ohne Einschränkung  $\mathcal{F} \cong \mathcal{O}_X^n$ . Dann ist zu zeigen:

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) = \mathbf{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^n, \mathcal{O}_X) \stackrel{!}{\cong} \mathcal{O}_X^n.$$

Aus der linearen Algebra wissen wir, dass für einen Körper  $k$  gilt:  $\mathrm{Hom}_k(k^n, k) \cong k^n$ . Der zugehörige Isomorphismus ist  $l \mapsto (l(e_1), \dots, l(e_n))$ , wobei  $\{e_1, \dots, e_n\}$  eine Basis des  $k^n$  ist. Dieselbe Aussage kann auf freie Moduln übertragen werden, woraus die Behauptung folgt.

- (iii) Die entsprechende Aussage aus der linearen Algebra für  $k$ -Vektorräume  $V$  und  $W$  lautet

$$\mathrm{Hom}_k(V, W) \cong V^* \otimes_k W,$$

denn: Betrachte die bilineare Abbildung

$$\psi : V^* \times W \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(V, W), \quad (l, w) \mapsto (\alpha : V \longrightarrow W, v \mapsto l(v)w).$$

Es induziert  $\psi$  eine Abbildung  $\phi : V^* \otimes W \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(V, W)$ . Wir müssen zeigen:  $\phi$  ist bijektiv. Surjektivität sehen wir wie folgt ein: Sind Basen  $\{b_1, \dots, b_n\}$  für  $V$  und  $\{c_1, \dots, c_m\}$  für  $W$  gegeben, so wird  $\mathrm{Hom}_k(V, W)$  erzeugt von den  $f_{ij}$  für  $1 \leq i \leq n$  und  $1 \leq j \leq m$ , wobei  $f_{ij}$  gegeben ist durch  $f_{ij}(b_k) = \delta_{ik}c_j$ . Ist  $\{b_1^*, \dots, b_n^*\}$  die zu  $\{b_1, \dots, b_n\}$  duale Basis

von  $V^*$ , so erhalten wir die Darstellung  $f_{ij} = \psi(b_i^*, c_j)$ , das heißt,  $\phi$  ist surjektiv. Nun gilt

$$\dim V^* \otimes_k W = \dim V^* \dim W = \dim V \dim W = nm = \dim \operatorname{Hom}_k(V, W),$$

also ist  $\phi$  auch injektiv und damit bereits Isomorphismus und die Behauptung folgt.  $\square$

**Definiton + Proposition 10.10** Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  lokal gringter Raum.

- (i) Für jede lokal freie  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe von Rang 1 gilt  $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^* \cong \mathcal{O}_X$ .
- (ii) Eine  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe  $\mathcal{L}$  heißt *invertierbar*, falls es eine  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe  $\mathcal{L}'$  gibt, sodass  $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}' \cong \mathcal{O}_X$ .
- (iii) Ist  $(X, \mathcal{O}_X)$  noethersches Schema, so ist jede invertierbare  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe auf  $X$  lokal frei von Rang 1.
- (iv) Die Isomorphieklassen der invertierbaren  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarben auf  $X$  bilden eine abelsche Gruppe, die sogenannte *Picard-Gruppe*  $\operatorname{Pic}(X)$ .

*Beweis.* (i) Nach 10.9 gilt  $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^* \cong \mathbf{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{L})$ . Definiere nun

$$\phi : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{L}), \quad 1 \mapsto \operatorname{id}_{\mathcal{L}}.$$

Dann ist  $\phi$  ein wohldefinierter, injektiver Morphismus von  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarben. Für den Beweis genügt es nun, die Surjektivität von  $\phi$  nachzuweisen. Dies zeigen wir halmweise. Sei  $x \in X$  und betrachte  $\phi_x$ . Sei  $\alpha \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_x) = (\mathbf{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{F}))_x$ , also  $\alpha = (U, s)$ , wobei ohne Einschränkung  $U$  klein genug ist, sodass  $\mathcal{L}|_U \cong \mathcal{O}_X|_U$ . Dann gilt  $s = \phi_x(s(1))$ , also ist  $\phi_x$  und damit  $\phi$  surjektiv.

(iii) Übung.

- (v) Die Strukturgarbe  $\mathcal{O}_X$  ist neutral bezüglich des Tensorprodukt (welches auch assoziativ und kommutativ ist) und inverses Element folgt aus (i).  $\square$

**Beispiel 10.11** Sei  $X$  differenzierbare Mannigfaltigkeit,  $\mathcal{O}_X$  die Garbe der  $C^\infty$ -Funktionen auf  $X$ . Dann ist  $(X, \mathcal{O}_X)$  lokal geringter Raum. Sei  $E$  eine weitere differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $p : E \longrightarrow X$  differenzierbare Abbildung. Das Paar  $(E, p)$  heißt *Vektorbündel von Rang  $n$  über  $X$* , falls es eine offene Überdeckung  $\{U_i\}_{i \in I}$  von  $X$  und für jedes  $i \in I$  einen Diffeomorphismus  $\phi_i : p^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$  gibt, sodass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E \supseteq p^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\phi_i} & U_i \times \mathbb{R}^n \\ & \searrow p \quad \swarrow \pi_1 & \\ & U_i & \end{array}$$

kommutiert, also  $p = \pi_1 \circ \phi_i$ , und gilt

$$\phi_{ij} := \phi_i \circ \phi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow (U_i \cap U_j) \mathbb{R}^n$$

faserweise linear ist für alle  $i, j \in I$ , nach Wahl eine Basis des  $\mathbb{R}^n$  also durch eine Matrix  $A = (A_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j))$  dargestellt wird. Im folgenden wollen wir zeigen, dass die Vektorbündel von Rang  $n$  auf  $X$  gerade den lokal freien  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarben von Rang  $n$  auf  $X$  entsprechen. Sei dazu zunächst  $(E, p)$  ein Vektorbündel von Rang  $n$  auf  $X$  wie oben definiert und  $\mathcal{E}$  die Garbe der Schnitte in  $E$  auf  $X$ , für offene Teilmengen  $U \subseteq X$  gilt also

$$\mathcal{E}(U) = \{s : U \longrightarrow E \mid s \text{ ist differenzierbare Abbildung mit } p \circ s = \mathrm{id}_U\}.$$

Dann ist  $\mathcal{E}$  lokal frei von Rang  $n$ , denn für  $i \in I$  gilt

$$\mathcal{E}(U_i) = \{s : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n \mid s \text{ ist differenzierbar}\} = \mathcal{O}_X(U_i)^n.$$

Dasselbe erhalten wir für Einschränkungen auf beliebige offene  $V \subseteq U_i$ .

Sei nun umgekehrt  $\mathcal{E}$  lokal freie  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe von Rang  $n$  auf  $X$ . Dann ist für jedes  $x \in X$  der Halm  $\mathcal{E}_x$  ein freier  $\mathcal{O}_{X,x}$ -Modul von Rang  $n$ . Weiter gilt  $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \cong \mathbb{R}$  sowie  $\mathcal{E}_x/\mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x \cong \mathbb{R}^n$ . Ist nun  $U_i \subseteq X$  offen mit  $\mathcal{E}|_{U_i} \cong (\mathcal{O}_X|_{U_i})^n$  via  $\phi_i : \mathcal{E}|_{U_i} \longrightarrow (\mathcal{O}_X|_{U_i})^n$ , so ist  $\phi_i \phi_j^{-1}$  ein  $\mathcal{O}_X|_{U_i \cap U_j}$ -Modulgarbenisomorphismus von  $(\mathcal{O}_X|_{U_i \cap U_j})^n$  auf sich selbst, also ein Element  $A_{ij} \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j))$ . In jedem  $x \in U_i \cap U_j$  induziert  $A_{ij}$  einen Vektorraumisomorphismus von  $\mathcal{E}_x/\mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x \cong \mathbb{R}^n$ . Verklebt man nun die  $U_i \times \mathbb{R}^n$  mithilfe der  $A_{ij}$  zum Vektorbündel  $E$ , so erhält man die gewünschte Aussage.

**Definiton + Proposition 10.12** Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein Schema,  $p : E \longrightarrow X$  Morphismus von Schemata.

- (i)  $(E, p)$  heißt *geometrisches Vektorbündel von Rang  $n$  über  $X$* , falls es eine offene Überdeckung  $\{U_i\}_{i \in I}$  von  $X$  und für jedes  $i \in I$  Isomorphismen  $\phi_i : p^{-1}(U_i) \longrightarrow \mathbb{A}_{U_i}^n = U_i \times_{\mathrm{Spec} \mathbb{Z}} \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n$  gibt, sodass für alle  $i, j \in I$  und jedes affine offene Unterschema  $\mathrm{Spec} R = U \subseteq U_i \cap U_j$  von  $X$  die Abbildungen  $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$   $R$ -lineare Automorphismen sind, also von linearen Automorphismen von  $R[X_1, \dots, X_n]$  induziert werden.
- (ii) Die Isomorphieklassen von geometrischen Vektorbündeln von Rang  $n$  entsprechen bijektiv den Isomorphieklassen von lokal freien  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarben von Rang  $n$  auf  $X$ .

*Beweis.* Wie in 10.11

□

## § 11 Divisoren und invertierbare Garben

Erinnerung: Ist  $X$  nichtsinguläre, projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$  und  $D = \sum_{P \in X} n_P P$  ein Divisor auf  $X$ , so wird durch

$$\mathcal{L}(D)(U) = \{f \in k(X) \mid \text{ord}_P f + n_P > 0 \text{ für alle } p \in U\}$$

eine lokal freie Garbe von Rang 1 auf  $X$  definiert.

**Beispiel 11.1** Betrachte den Newtonknoten  $X = V(Y^2 - X^3 - X^2) \subseteq \mathbb{P}_k^2$  in der projektiven Ebene und definiere einen Divisor durch  $D = 1 \cdot P_0$ , wobei  $P_0$  den singulären Punkt der Kurve bezeichne. Können wir nun auch die Garbe  $\mathcal{L}(D)$  definieren? Betrachte das maximale Ideal im Punkt  $P_0$ : Es wird erzeugt von den Restklassen von  $X, Y$ , bezeichne sie mit  $x, y$ . Es gilt  $y^2 = x^2(x-1)$ , es kann aber auf keinen Erzeuger verzichtet werden,  $\mathfrak{m}_{P_0}$  ist also kein Hauptideal. Wie kann man dann  $\text{ord}_{P_0} f$  bestimmen? Ist  $\text{ord}_{P_0} x = 2$ ? Betrachte den Faktoring  $\mathcal{O}_{X, P_0} / (f)$  und setze  $\text{ord}_{P_0} := \dim_k \mathcal{O}_{X, P_0} / (f)$  und erhalte beispielsweise  $\text{ord}_{P_0} x = 2$  (denn in  $\mathcal{O}_{X, P_0} / (x)$  sind  $1, y$  linear unabhängig). Wir können die Garbe  $\mathcal{L}(D)$  als konstruieren, für den Halm in  $P_0$  gilt aber

$$\mathcal{L}(D)_{P_0} = \{f \in k(X) \mid \text{ord}_{P_0} f \geq 1\} = \mathfrak{m}_P,$$

weswegen dieser nicht frei von Rang 1 ist und  $\mathcal{L}(D)$  damit nicht lokal frei von Rang 1, also nicht invertierbar ist.

**Definition 11.2** Ein Schema  $(X, \mathcal{O}_X)$  heißt *integer*, falls es reduziert und irreduzibel ist.

**Definition + Bemerkung 11.3** Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein Schema.

- (i) Ein *Primdivisor* auf  $X$  ist ein integres, abgeschlossenes Unterschema der Kodimension 1.
- (ii) Die von den Primdivisoren auf  $X$  erzeugte frei abelsche Gruppe  $\text{Div}(X)$  heißt *Gruppe der Weil-Divisoren*. Die Elemente von  $\text{Div}(X)$  heißen *Weil-Divisoren*.
- (iii) Ist  $X$  eine Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$ , so sind die Primdivisoren gerade die abgeschlossenen Punkte in  $X$  und die Weil-Divisoren von der Form  $D = \sum_{P \in X} n_P P$  für gewisse  $n_P \in \mathbb{Z}$ .
- (iv) Sei  $W$  ein Primdivisor auf  $X$ ,  $\gamma_W$  der generische Punkt von  $W$ .

