14. Topologie-Übung

Joachim Breitner

6. Februar 2008

Aufgabe 1

Seien X, Y wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend, hausdorff'sch, und Y kompakt.

Behauptung: Ein lokaler Homöomorphismus $f : Y \to X$ ist Überlagerung.

Sei $x \in X$. Es git: $f^{-1}(x)$ endlich.

Denn wäre $f^{-1}(x)$ unendlich dann hätte $f^{-1}(x)$ einen Häufungspunkt h im kompakten Hausdorffraum Y. h hat keine Umgebung V, so dass $f|_V$ ein Homöomorphismus ist, denn in jeder Umgebung von h liegt ein Element von $f^{-1}(x)$, im Widerspruch zur Injektivität von $f|_V$.

Also gilt: $f^{-1}(x) = \{y_1, \dots, y_n\}$. Wähle für jedes y_i eine Umgebung U_i, so dass alle U_i disjunkt und wegzusammenhängend sind und $f|_{U_i}$ Homöomorphismen auf eine offene Teilmenge U von X sind.

Setze $V \coloneqq \bigcap_{i=1}^n f(U_i)$, dann enhält $f^{-1}(V)$ n „Kopien" von V, in jedem U_i eine.

Noch zu zeigen: Es gibt eine Umgebung $\tilde{V}$ von x, $\tilde{V} \subseteq V$, so dass für alle $\tilde{x} \in \tilde{V}$ gilt: $\#f^{-1}(\tilde{x}) = \#f^{-1}(x) = n$.

Angenommen, in jeder Umgebung $\tilde{V}$ von x gibt es ein $\tilde{x}$, so dass $\#f^{-1}(\tilde{x}) > n$, dann gibt es eine Folge $(x_k) \in V$, mit $\#f^{-1}(x_k) > n$. $f^{-1}(\tilde{x}) > n \implies \exists \tilde{y} \in f^{-1}(\tilde{x}) : \tilde{y} \notin V_1 \cap \ldots \cap V_n$. Y ist kompakt, also hat (x_k) einen Häufungspunkt, o.B.d.A: $\lim_{k\to\infty} x_k$ existiert, also $\lim_{k\to\infty} x_k = x$, Wid!.

Aufgabe 2

Seien $p_1 : Y_1 \to X_1$, $p_2 : Y_2 \to X_2$ Überlagerungen.

Behauptung: $p_1 \times p_2 : Y_1 \times Y_2 \to X_1 \times X_2$ ist auch eine Überlagerung.

Sei $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$. Zu zeigen: Es gibt eine Umgebung U von (x_1, x_2), so dass $p^{-1}(U)$ disjunkte Vereinigung von offenen Mengen in $Y_1 \times Y_2$ ist die alle homöomorph sind zu U.

p_1 ist Überlagerung, das heißt es gibt eine offene Umgebung U_1 von x_1, so dass $f^{-1}(U_1) = \bigcup_{x\in I} \tilde{V}_i$, $\tilde{V}_i$ homöomorph zu U_i für $i \in I$. p_2 ist auch Überlagerung, das heißt es gibt eine offene Umgebung U_2 von x_2, so dass $f^{-1}(U_2) = \bigcup_{x\in J} \tilde{W}_i$, $\tilde{W}_i$ homöomorph zu U_i für $i \in J$.

Dann gilt:

$$(p_1 \times p_2)^{-1}(U_1 \times U_2) = f^{-1}(U_1) \times f^{-1}(U_2) = \bigcup_{i\in I} \tilde{V}_i \times \bigcup_{j\in J} \tilde{W}_j = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (\tilde{V}_i \times \tilde{W}_j)$$

da die $\tilde{V}_i$, $\tilde{W}_j$ disjunkt und offen sind, sind die $\tilde{V}_i \times \tilde{W}_j$ disjunkt und offen, und $p_1 \times p_2$ ist ein Homöomorphismus von $\tilde{V}_i \times \tilde{W}_j$ nach $U_1 \times U_2$. Also ist $p_1 \times p_2$ eine Überlagerung.

Aufgabe 3

Sei $p : Y \to X$ eine Überlagerung.

Behauptung: Ist X ein Hausdorffraum, so auch Y.

Seien $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$.

1. Fall: $p(y_1) = p(y_2) = x$, dann „Überlagerungsumgebungen“ von y_1, Y_2 sind offen und disjunkt, trennen also y_1 und y_2.

2. Fall: $p(y_1) \neq p(y_2)$. Man findet offene disjunkte Umgebungen, die $p(y_1)$ und $p(y_2)$ trennen. Deren Urbilder sind disjunkte offene Umgebungen, die y_1 und y_2 trennen.

Behauptung: Ist X kompakt und $p^{-1}(x)$ für jedes $x \in X$ endlich, so ist auch Y kompakt.

Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von Y. Zu zeigen: Man kann daraus eine endliche Teilüberdeckung wählen. Für jedes $x \in X$ ist $p^{-1}(x)$ endlich. Das heißt: Es gibt eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$, sodass f^-1x von $(U_j)_{j\in J}$ überdeckt wird.

Setze $O_x \coloneqq \bigcup_{j\in J} U_j$. Zu O_x existiert eine offene Teilmenge V_x von x, so dass $x \in V_x$ und $f^{-1}(V_x) \subseteq O_x$.

Denn p ist Überlagerung, also gibt es eine Umgebung V von x, so dass $p^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^n U_i$, U_i disjunkt und homöomorph zu V. Definiere $V_x := p(\bigcup_{i=1}^n U_i \cap O_x)$.

Klar: $\{V_x, x \in x\}$ ist offene Überdeckung von X und X ist kompakt, also gibt es $x_1, \ldots, x_m$ aus X, so dass $V_{x_1}, \ldots V_{x_n}$ schon X überdecken.

Die zu V_{x_i} „gehörigen" $U_j, j \in J_{x_i}$, für $i = 1, \ldots, n$ bilden eine Teilüberdeckung von $(U_i)_{i\in I}$, denn für $y \in Y$, $x = p(y) \in V_{x_i}$, so ist $y \in f^{-1}(V_{x_i} \subseteq O_x = \bigcup_{j\in J_{x_i}} U_j$, also ist $y \in U_j$ für so ein j.