Kapitel 7

Erwartungswert und Varianz von Zufallsvariablen

Im Folgenden sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Der Erwartungswert von X ist ein Lebesgue-Integral (allerdings allgemeiner als in Analysis II). Zunächst wird der Erwartungswert für sogenannte Elementare Zufallsvariablen definiert.

Definition 7.1 *Eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt* ***elementar****, falls sie eine Darstellung*

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot 1_{A_i}(\omega)$$

besitzt, mit $A_i \in \mathcal{A}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$,$m \in \mathbb{N}$. M^E sei die Menge aller elementaren Zufallsvariablen auf dem Warscheinlichkeitsraum.
Für $X \in M^E$ sei das Integral von X bezüglich P definiert durch $\int XdP := \int_{i=1}^{n} \alpha_i P(A_i)$

Bemerkung 7.1 a) $\int XdP$ ist unabhängig von der gewählten Darstellung von X (vgl. Analysis II)

b) Sei X eine diskrete Zufallsvariable. Wir führen das Zufallsexperiment n-mal druch (n groß). Welchen Wert erhält man im Mittel für X? Der Wert x_k tritt bei dem Experiment n_k-mal auf ($\sum_{k=0}^{\infty} n_k = n$). Mittelwert: $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} n_k x_k$

Jetzt wird der Integralbegriff erweitert. Sei $M^+ := \{X : \Omega- > \mathbb{R}_+ | X \text{ ist Zufallsvariable}\}$. Für $X \in M^+$ betrachte die Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$X_n := \sum_{i=0}^{n-2^n} \frac{i}{2^n} 1_{A_i^n} \text{ mit } A_i^n = \begin{cases} \{\frac{i}{2^n} \leq X \leq \frac{i+1}{2^n}\} & \text{, falls } i = 0, 1, \ldots, n \cdot 2^n - 1 \\ \{X \geq 1\} & \text{, falls } i = n \cdot 2^n \end{cases}$$

Offenbar ist $X_n \in M^E$ und $x_n(\omega) \leq x_{n+1}(\omega)\ \forall \omega \in \Omega$. Außerdem gilt $X_n(\omega) \uparrow X(\omega)$ punktweise $\forall \omega \in \Omega$.

$$\int XdP := \lim_{n \to \infty} \int X_n dP\,.$$

Bemerkung 7.2 a) Der Grenzwert existiert wegen der Monotonie

b) Der Grenzwert ist unabhängig von der gewählten Folge $(X_n)_{x\in\mathbb{N}}$: Sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge elementarer Zufallsvariablen, die monoton wachsend gegen X konvergiert, so gilt $\lim_{n\to\infty}\int X_n dP = \lim_{n\to\infty} Y_n dP$ (vergleiche Analysis II).

Für eine beliebige Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt: $X = X^+ - X^-$ wobei $X^+ = \max\{X, 0\}$ und $X^- = -\min\{X, 0\}$, also $X^+, X^- \in M^+$.
Wir definieren durch

$$\int X dP = \int X^+ dP - \int X^- dP =: \int_\Omega X(\omega) dP(\omega) =: EX$$

den **Erwartungswert** von X. X heißt integrierbar, falls $\int X^+ dP < \infty$ und $\int X^- dP < \infty$, d.h. wenn $\int |X| dP < \infty$

Bemerkung 7.3 a) Für $A \in \mathcal{A}$ sei $\int X dP := \int_\Omega X 1_A dP$

b) In Stochastik II wird das Thema weiter vertieft.

Satz 7.1
Es seien X, Y Zufallsvariablen mit existierendem Erwartungswert und $a, b \in \mathbb{R}$

a) Dann existiert auch $E(aX + bY)$ und es gilt:

$$E(aX + bY) = aEX + bEY \qquad \text{„Linearität“}$$

b) Gilt $X \leq Y$, d.h. $X(\omega) \leq Y(\omega) \quad \forall\, \omega \in \Omega$, so folgt:

$$EX \leq EY \qquad \text{„Monotonie“}$$

Beweis vgl. Analysis II ■

Satz 7.2 *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit Verteiltung P_X. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei messbar (Zufallsvariable). Dann ist (im Falle der Existenz):*

$$Eg(X) = \int_\Omega g(X) dP = \int_\mathbb{R} g dP_X$$

Beweis Sei nunächst $g \in M^E$, also $g(\omega) = \sum_{i=0}^m \alpha_i 1_{B_i}(\omega)$ für $m \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}_+, B_i \in \mathfrak{B}$ somit $g(X) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot 1_{A_i}$, $A_i = X^{-1}(B_i)$ und $\int_\Omega g(x) dP = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot P(A_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_i P_X(B_i) = \int_\mathbb{R} g dP_X$.
Falls $g \geq 0$, wähle $\{g_n\} \subset M^E$ mit $g_n \uparrow g$. Die Gleichung gilt für jedes g_n, Grenzübergang liefert die Gleichheit für g. Falls g beliebig, betrachte $g = g^+ - g^- \Rightarrow$ Behauptung. ■

Wir unterscheiden jetzt die beiden Fälle dass X diskret bzw. absolutstetig ist. Hier ergeben sich relativ einfache Formeln.

Satz 7.3 *Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Werten $x_0, x_1, x_2, \dots$ und Zähldichte $\{P_X^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}_0}$. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei messbar. Dann existiert $Eg(X)$, falls $\sum_{k=0}^{\infty} |g(x_k)|P_X(k) < \infty$ und es gilt:*

$$Eg(X) = \sum_{k=0}^{\infty} g(x_k)P_X(k)$$

Beweis Sei zunächst $g \in M^E$, also $g = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i 1_{B_i}$ für $m \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{R}_+, B_i \in \mathfrak{B}$. Es gilt (vgl. Beweis vorher): $Eg(X) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i P_X(B_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left(\sum_{x_k \in B_i} P_X(k)\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sum_{k=0}^{\infty} 1_{B_i}(x_k)P_X(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i 1_{B_i}(x_k)}_{=g(x_k)} P_X(k) = \sum_{k=0}^{\infty} g(x_k)P_X(k)$. Allgemeines g wie im Beweis von Satz 7.2 ∎

Beispiel 7.1 Sei $X \sim B(n,p)$ (binomialverteilt). Dann gilt:

$$P_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Also folgt:

$$EX = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} =$$

$$= np \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{(n-1)-k}}_{=(p+(1-p))^{n-1}=1} = np$$

Satz 7.4 *Sei nun $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine absolut stetige Zufallsvariable mit Dichte f_X. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei messbar. Dann existiert $Eg(X)$, falls $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f_X(x)dx < \infty$ und es gilt:*

$$Eg(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)dx$$

Beweis ähnlich wie in Satz 7.3 ∎

Beispiel 7.2 Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (X normalverteilt). Also ist

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2})$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} EX &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma u + \mu) \exp(-\frac{1}{2}u^2)\,du \\ &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma u \exp(-\frac{1}{2}u^2)\,du}_{=0 \text{ wg. Symmetrie}} + \mu \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2}u^2)\,du}_{=1\text{, da Dichte}} = \mu \end{aligned}$$

Definition 7.2 *Sei X eine Zufallsvariable*

a) *Ist $k \in \mathbb{N}$ und existiert $E|X|^k$, dann heißt EX^k, **k-tes Moment von X** und $E(X - EX)^k$, **k-tes zentriertes Moment von X***

b) *Das zweite zentrierte Moment heißt auch **Varianz** von X.*
Wir schreiben: $\mathrm{Var}(X) = E(X - EX)^2$
$\sigma(X) := \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ *heißt **Standardabweichung***

Bemerkung 7.4 Die Varianz misst die mittlere quadratische Abweichung der Zufallsvariable X von ihrem Mittelwert. $\sigma(X)$ hat die gleiche Dimension wie X.

Satz 7.5 *Sei X eine Zufallsvariable. Falls die entsprechenden Größen existieren, gilt:*

a) $\mathrm{Var}(X) = EX^2 - (EX)^2$

b) $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(X)$ *für* $a, b \in \mathbb{R}$

c) $\mathrm{Var}(X) \geq 0$ *und* $\mathrm{Var}(X) = 0 \Leftrightarrow P(X = c) = 1$ *für ein* $c \in \mathbb{R}$

Beweis a) $\mathrm{Var}(X) = E(X^2 - 2XEX + (EX)^2) \overset{\text{Satz 7.2a}}{=} EX^2 - 2(EX)^2 + (EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$

b) Wir verwenden a): $\mathrm{Var}(aX + b) = E(aX + b)^2 - (aEX + b)^2 =$
$= E(a^2X^2 + 2abX + b^2) - a^2(EX)^2 - 2abEX - b^2 =$
$= a^2EX^2 + 2abEX + b^2 - a^2(EX)^2 - 2abEX - b^2 =$
$= a^2(EX^2 - (EX)^2) = a^2 \mathrm{Var}(X)$

c) Da $0 \leq (X - EX)^2 \overset{7.2\text{b}}{\Rightarrow} \mathrm{Var}(X) \geq 0$
Ist X diskret, so gilt: $\mathrm{Var}(X) = \sum_{k=1}^{\infty}(x_k - EX)^2 P(X = x_k)$
$\mathrm{Var}(X) = 0 \Leftrightarrow X$ nimmt nur den Wert $x_1 = EX$ ($x_k = EX \, \forall \, k \in \mathbb{N}$) an.
Analog im stetigen Fall. ∎

Beispiel 7.3 Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
Bsp. 7.2 $\Rightarrow EX = \mu$

$$\text{Also:} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \exp(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}) dx = \cdots = \sigma^2$$

($\rightarrow$ Übung)

Die folgende Ungleichung ist wegen ihrer Allgemeinheit nützlich:

Satz 7.6 (Tschebyscheff-Ungleichung)
Sei X eine Zufallsvariable mit $E|X| < \infty$ und $\varepsilon > 0$. Dann gilt:

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathrm{Var}(X)$$

Beweis
Betrachte:

$$g : \mathbb{R} \to \{0,1\} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & , \quad \text{falls} \quad |x - EX| \geq \varepsilon \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{und} \quad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad h(x) = \frac{1}{\varepsilon^2}(x - EX)^2$$

Offenbar gilt $g(x) \leq h(x) \, \forall \, x \in \mathbb{R}$ Also folgt $g(X) \leq h(X)$ und mit Satz 7.2 b

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) = Eg(X) \leq Eh(X) = \frac{1}{\varepsilon^2} \operatorname{Var}(X)$$