

Kapitel 10

Erzeugende Funktionen

In diesem Kapitel sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine diskrete Zufallsvariable mit Zähldichte $\{p_X(k)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, also $p_X(k) = P(X = k)$, $k \in \mathbb{N}_0$

Definition 10.1

Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine Zufallsvariable mit Zähldichte $\{p_X(k)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$. Die Funktion $g_X : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) s^k = E s^X$$

heißt *erzeugende Funktion von X*.

Bemerkung 10.1

a) $g_X(s)$ ist wohldefiniert für $|s| \leq 1$, da

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) |s|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) = 1$$

Insbesondere: $g_X(1) = 1$

b) $g_X^{(n)}(s)$ ist wohldefiniert für $s \in (-1, 1)$

c) Es gilt:

$$p_X(k) = \frac{g_X^{(k)}(0)}{k!} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0$$

Es sei $g_X(s^-) = \lim_{z \uparrow s} g_X(z)$ „linksseitiger Grenzwert“

Satz 10.1

Besitzt die \mathbb{N}_0 -wertige Zufallsvariable X die erzeugende Funktion g_X , so gilt:

a) $EX = g_X'(1^-)$, falls EX existiert

b) $\text{Var}(X) = g_X''(1^-) + g_X'(1^-) - (g_X'(1^-))^2$ falls $\text{Var}(X)$ existiert.

Beweis

a)

$$g'_X(s) = \sum_{k=1}^{\infty} p_X(k)k \cdot s^{k-1} \xrightarrow{s \rightarrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} p_X(k)k = EX$$

b) ähnlich

Beispiel 10.1Sei $X \sim B(n, p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0, 1)$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Es gilt:

$$g_X(s) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot s^k = (sp + 1 - p)^n$$

$$g'_X(s) = n(sp + 1 - p)^{n-1} p$$

$$g''_X(s) = n(n-1)(sp + 1 - p)^{n-2} p^2$$

Also:

$$EX = g'_X(1^-) = np$$

$$\text{Var}(X) = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$$

Satz 10.2 (Eindeutigkeitssatz für erzeugende Funktionen)

Sind X und Y zwei diskrete Zufallsvariablen mit Werten in \mathbb{N}_0 , Zähldichten $\{p_X(k)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, $\{p_Y(k)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ und erzeugenden Funktionen $g_X(s)$, $g_Y(s)$, so gilt:

$$p_X(k) = p_Y(k) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \iff g_X(s) = g_Y(s) \quad \forall s \in [-1, 1]$$

Beweis

Identitätssatz für Potenzreihen.

Satz 10.3

Sind X und Y zwei unabhängige, diskrete Zufallsvariablen mit Werten in \mathbb{N}_0 , dann gilt:

$$g_{X+Y}(s) = g_X(s) \cdot g_Y(s) \quad \forall s \in [-1, 1]$$

BeweisFür $s \in [-1, 1]$ gilt:

$$\begin{aligned} g_{X+Y}(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} s^k \cdot P(X+Y = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \overbrace{s^k}^{=s^i s^{k-i}} \sum_{i=0}^k \underbrace{P(X=i, Y=k-i)}_{\substack{X, Y \text{ unabh.} \\ \implies P(X=i) \cdot P(Y=k-i)}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k s^i P(X=i) s^{k-i} P(Y=k-i) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} s^i P(X=i) \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} s^j P(Y=j) \right) \\ &= g_X(s) \cdot g_Y(s) \end{aligned}$$

Beispiel 10.2

Es sei $X \sim B(n, p)$, $Y \sim B(m, p)$, X und Y unabhängig.

Mit Beispiel 10.1 gilt: $g_X(s) = (sp + 1 - p)^n$, $g_Y(s) = (sp + 1 - p)^m$

Also folgt mit Satz 10.3:

$$g_{X+Y}(s) = (sp + 1 - p)^{n+m} \Rightarrow X + Y \sim B(n + m, p)$$

Insbesondere ist $X = \sum_{i=1}^n X_i$, wobei X_1, \dots, X_n unabhängig und identisch verteilt mit $X_i \sim B(1, p)$

Beispiel 10.3 (Ruinspiel) • Spieler I besitzt n Euro

- Spieler II besitzt $(N - n)$ Euro
- Pro Runde: Spieler I gewinnt von Spieler II einen Euro mit Wahrscheinlichkeit p , sonst verliert er einen Euro an Spieler II
- Die Runden sind unabhängig
- Gespielt wird bis ein Spieler pleite ist

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler I gewinnt? Sei dabei $N \in \mathbb{N}$ fest. Wir definieren die Ereignisse A_n = Spieler I gewinnt bei Anfangskapital n und B = Spieler I gewinnt die erste Runde. Mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit ergibt sich:

$$P(A_n) = P(A_n|B) \cdot P(B) + P(A_n|B^c) \cdot P(B^c) \text{ für } 0 < n < N$$

Sei $p_n := P(A_n)$: $p_n = p_{n+1} \cdot p + p_{n-1} \cdot (1 - p)$, $0 < n < N$ und $p_0 = 0$ und $p_N = 1$. Die ist eine sogenannte Differenzengleichung. Sei $\rho := \frac{1-p}{p}$ und $\rho \neq 1$ (d.h. $p \neq \frac{1}{2}$).

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= (1 + \rho)p_n - \rho p_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \\ s^{n+1}p_{n+1} &= (1 + \rho)s^{n+1}p_n - \rho s^{n+1}p_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Sei $\hat{g}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \hat{g}(s) - p_1 \cdot s &= (1 + \rho)s\hat{g}(s) - \rho s^2\hat{g}(s) \\ \Rightarrow \hat{g}(s) &= \frac{p_1 \cdot s}{1 - (1 + \rho)s + \rho s^2} = \frac{p_1}{\rho - 1} \left(\frac{1}{1 - \rho s} - \frac{1}{1 - s} \right) \\ &= \frac{p_1}{\rho - 1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (\rho s)^k - \sum_{k=0}^{\infty} s^k \right) \\ \Rightarrow p_n &= \frac{p_1}{s - 1} (\rho^n - 1) \end{aligned}$$

Randbedingung: $p_N = 1$ ergibt $p_1 = \frac{\rho - 1}{\rho^N - 1}$. Insgesamt:

$$p_n = \frac{\rho^n - 1}{\rho^N - 1}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Bei $\rho = 1$:

$$p_n = \frac{n}{N}, \quad n = 1, 2, \dots$$

