6 Exponentialfamilien

Es sei $(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$ Messraum, $\mathcal{M}^1(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$ Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathcal{B}$.

6.1 Definition

Eine Verteilungsklasse $\wp = \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\} \subset \mathcal{M}^1(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$ heißt **Exponentialfamilie** :$\Leftrightarrow$ es existiert ein $\sigma-$endliches dominierendes Maß μ auf $\mathcal{B}$, für ein $k \in \mathbb{N}$ existieren $q_1, \ldots, q_k$, $c : \Theta \to \mathbb{R}$ und messbare Funktionen $T_1, \ldots, T_k : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$, $h : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

$$f(x, \vartheta) := \frac{dP_\vartheta}{d\mu}(x) = c(\vartheta) \cdot e^{\sum_{j=1}^k q_j(\vartheta) T_j(x)} \cdot h(x) \quad \mu\text{-f.ü.}$$

6.2 Bemerkungen

a) Mit $q(\vartheta) := (q_1(\vartheta), \ldots, q_k(\vartheta))^T$ und $T(x) := (T_1(x), \ldots, T_k(x))^T$ ist

$$f(x, \vartheta) = c(\vartheta)\, e^{q(\vartheta)^T T(x)}\, h(x)$$

b) c ist Normierungskonstante:

$$c(\vartheta) = \left[\int e^{q(\vartheta)^T T(x)} h(x) \mu(dx)\right]^{-1} > 0$$

c) Der Träger $\{x : \; f(x, \vartheta) > 0\}$ hängt nicht von ϑ ab, insbesondere gilt

$$\forall N \in \mathcal{B} : \quad P_{\vartheta_1}(N) = 0 \Leftrightarrow P_{\vartheta_2}(N) = 0 \qquad (\vartheta_1, \vartheta_2 \in \Theta)$$

(d.h. es gilt $P_{\vartheta_1} \ll P_{\vartheta_2}, P_{\vartheta_2} \ll P_{\vartheta_1}$).

d) Im Folgenden gelte immer:

(i) Die Funktionen $1, q_1, \ldots, q_k$ sind linear unabhängig

(ii) Die Funktionen $1, T_1, \ldots, T_k$ sind linear unabhängig auf dem Komplement jeder μ-Nullmenge

(sogenannte (strikt) **k-parametrige Exponentialfamilie**).
Dann ist k kleinstmöglich gewählt, und q sowie T sind bis auf nicht ausgeartete affine Transformationen $q \mapsto Aq + a$, $T \mapsto BT + b$ (μ-f.ü.) eindeutig bestimmt.

6.3 Beispiele

a) $P_\vartheta := \mathcal{N}(\mu, \sigma^2),\ \vartheta := (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} =: \Theta.$
Die Lebesguedichte ist

$$\begin{aligned} f(x,\vartheta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)}_{=:c(\vartheta)} \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2}x - \frac{1}{2\sigma^2}x^2\right) \cdot \underbrace{1}_{=:h(x)} \end{aligned}$$

Mit $q(\vartheta) := (\frac{\mu}{\sigma^2}, -\frac{1}{2\sigma^2}),\ T(x) := (x, x^2)$ folgt, dass hier eine (strikt) zweiparametrige Exponentialfamilie vorliegt.

b) $P_\vartheta := \mathcal{N}(\vartheta, \vartheta^2),\ \vartheta \in \mathbb{R}_{>0} =: \Theta.$
Die Lebesguedichte ist

$$\begin{aligned} f(x,\vartheta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\vartheta^2}} \exp\left(-\frac{(x-\vartheta)^2}{2\vartheta^2}\right) \\ &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\vartheta^2}} e^{-1/2}}_{=:c(\vartheta)} \exp\left(\frac{1}{\vartheta}x - \frac{1}{2\vartheta^2}x^2\right) \cdot \underbrace{1}_{=:h(x)} \end{aligned}$$

Mit $q(\vartheta) := (\frac{1}{\vartheta}, -\frac{1}{2\vartheta^2}),\ T(x) := (x, x^2)$ folgt wieder, dass eine (strikt) zweiparametrige Exponentialfamilie vorliegt (obwohl der Parameterraum Θ eindimensional ist!)

c) $P_\vartheta := \mathrm{Bin}(n, \vartheta),\ \vartheta \in (0,1) =: \Theta.$
Die Zähldichte ist

$$f(x,\vartheta) = \binom{n}{x} \vartheta^x (1-\vartheta)^{n-x} = (1-\vartheta)^n \exp\left(x \log \frac{\vartheta}{1-\vartheta}\right) \binom{n}{x}.$$

Mit $c(\vartheta) := (1-\vartheta)^n,\ q(\vartheta) := \log \frac{\vartheta}{1-\vartheta},\ T(x) := x$ und $h(x) := \binom{n}{x}$ folgt, dass $\wp := \{\mathrm{Bin}(n,\vartheta) :\ \vartheta \in \Theta\}$ eine einparametrige Exponentialfamilie ist.

d) Die Menge aller Gleichverteilungen $\{U(0,\vartheta),\ \vartheta \in \mathbb{R}_{>0}\}$ ist nach 6.2(c) keine Exponentialfamilie.

6.4 Satz

Es seien $X_1, \dots, X_n \overset{uiv}{\sim} P_\vartheta$, wobei P_ϑ Element einer $k-$parametrigen Exponentialfamilie $\{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ ist. Dann gehöhrt auch die Verteilung von $X := (X_1, \dots, X_n)$ zu einer $k-$parametrigen Exponentialfamilie mit

$$q(\vartheta) \quad \text{und} \quad T_{(n)}(x) := \sum_{j=1}^{n} T(x_j).$$

Beweis:
Sei $\mu^n := \mu \otimes \cdots \otimes \mu$ das $n-$fache Produktmaß auf $\mathcal{B}^n := \mathcal{B} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}$ und

$$P_\vartheta^n := P_\vartheta \otimes \cdots \otimes P_\vartheta$$

die Verteilung von X unter P_ϑ. Wir erhalten mit $x := (x_1, \dots, x_n)$:

$$\begin{aligned} \frac{dP_\vartheta^n}{d\mu^n}(x) &= \prod_{j=1}^{n} \frac{dP_\vartheta}{d\mu}(x_j) \quad \mu\text{-f.ü.} \\ &= \prod_{j=1}^{n} \left[c(\vartheta) \exp\left(q^T(\vartheta) T(x_j)\right) h(x_j)\right] \quad \mu\text{-f.ü.} \\ &= c(\vartheta)^n \exp\left(q^T(\vartheta) \sum_{j=1}^{n} T(x_j)\right) \prod_{J=1}^{n} h(x_j) \quad \mu\text{-f.ü.} \end{aligned}$$

Bemerkung:
In der Situation von Satz 6.4 ist der ML-Schätzer $\hat{\vartheta}_n$ für ϑ eine Funktion von $\sum_{j=1}^{n} T(X_j)$.

In der Darstellung

$$f(x, \vartheta) = c(\vartheta) \exp(q^T(\vartheta) T(x)) h(x)$$

hängt $c(\cdot)$ von ϑ nur über $q := q(\vartheta) \in Q := q(\Theta) \subset \mathbb{R}^k$ ab, das heißt es gilt

$$c(\vartheta) = C\left(q(\vartheta)\right)$$

für ein geeignetes $C : Q \to \mathbb{R}$.
q heißt **natürlicher Parameter.** Somit lässt sich f ausdrücken als

$$f(x, q) = \frac{dP_q}{d\mu}(x) = C(q) e^{q^T \cdot T(x)} h(x)$$

Die Menge

$$Q_* := \{q \in \mathbb{R}^k :\ 0 < \int e^{q^T T(x)} h(x)\mu(dx) < \infty\}$$

heißt **natürlicher Parameterraum** der Exponentialfamilie. Es gilt

$$Q = q(\Theta) \subset Q_*.$$

6.5 Satz

Q_* ist konvex und enthält ein nicht-ausgeartetes k-dimensionales Intervall.

Beweis:
Für $q, r \in Q_*$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &< \int e^{(\lambda q^T + (1-\lambda) r^T) T} h d\mu \\ &= \int \left(e^{q^T T}\right)^{\lambda} \left(e^{r^T T}\right)^{1-\lambda} h d\mu \\ &\leq \int \max\left(e^{q^T T}, e^{r^T T}\right) h d\mu \\ &= \int \left(e^{q^T T} + e^{r^T T}\right) h d\mu \qquad < \infty \end{aligned}$$

Die zweite Aussage folgt dann aus der linearen Unabhängigkeit
von $1, q_1, \ldots, q_k$.

Bemerkung:
Im Folgenden setzen wir $\vartheta := q$, betrachten also Exponentialfamilien

$$f(x, \vartheta) = \frac{dP_\vartheta}{d\mu}(x) = C(\vartheta) e^{\vartheta^T T(x)} h(x) \tag{1}$$

mit $\vartheta \in \Theta := \left\{\vartheta \in \mathbb{R}^k :\ 0 < \int e^{\vartheta^T T(x)} h(x)\mu(dx) < \infty\right\}$.
Weiter sei

$$b(\vartheta) := -\log C(\vartheta).$$

6.6 Lemma

Es sei $\varphi : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ eine messbare Abbildung mit

$$E_\vartheta|\varphi| = \int |\varphi(x)| f(x, \vartheta)\mu(dx) < \infty$$

Sei

$$A_\varphi(\vartheta) := \int \varphi(X) e^{\vartheta^T T(x)} h(x)\mu(dx), \quad \vartheta \in \Theta^0 \tag{2}$$

Dann ist $A_\varphi : \Theta^0 \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und die Differentiation in (2) kann unter dem Integralzeichen vorgenommen werden beziehungsweise Integration und Differentiation können vertauscht werden.

Beweis:
Witting, 1985, S. 151f.

6.7 Satz

a) Die Funktion $b(\vartheta)$, $\vartheta \in \Theta^0$, ist beliebig oft differenzierbar.

b) Besitzt X die Dichte $f(x,\vartheta)$ aus (1), so gilt:

$$E_\vartheta T(X) = \frac{d}{d\vartheta} b(\vartheta)$$

$$\mathrm{Var}_\vartheta\, T(X) = \frac{d^2}{d\vartheta d\vartheta^T} b(\vartheta)$$

Beweis:

a) $\varphi \equiv 1$ in 6.6 $\Rightarrow A_\varphi(\vartheta) = C(\vartheta)^{-1} = e^{b(\vartheta)}$
6.6 $\Rightarrow$ Behauptung

b)

$$\begin{aligned}
E_\vartheta T(X) &= e^{-b(\vartheta)} \int T(x) e^{\vartheta^T T(x)} h(x)\mu(dx) \\
&= e^{-b(\vartheta)} \int \frac{d}{d\vartheta} e^{\vartheta^T T(x)} h(x)\mu(dx) \\
&\overset{6.6}{=} e^{-b(\vartheta)} \frac{d}{d\vartheta} \underbrace{\int e^{\vartheta^T T(x)} h(x)\mu(dx)}_{=e^{b(\vartheta)}} \\
&= \frac{d}{d\vartheta} b(\vartheta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_\vartheta[T(X)\cdot T(X)^T] &= e^{-b(\vartheta)}\int T(x)e^{\vartheta^T T(x)}T(x)^T h(x)\mu(dx) \\ &= e^{-b(\vartheta)}\int \frac{d^2}{d\vartheta d\vartheta^T}e^{\vartheta^T T(x)}h(x)\mu(dx) \\ &= e^{-b(\vartheta)}\frac{d^2}{d\vartheta d\vartheta^T}e^{b(\vartheta)} \\ &= \frac{d^2}{d\vartheta d\vartheta^T}b(\vartheta) + \underbrace{(\frac{d}{d\vartheta}b(\vartheta))(\frac{d}{d\vartheta}b(\vartheta))^T}_{=E_\vartheta T(X)\cdot(E_\vartheta T(X))^T} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \operatorname{Var}_\vartheta T(X) = \frac{d^2}{d\vartheta d\vartheta^T}b(\vartheta)$

6.8 CR-Effizienz in Exponentialfamilien

Seien $X_1,\dots,X_n \overset{uiv}{\sim} f_1(\xi,\vartheta) = e^{-b(\vartheta)}e^{\vartheta^T T(\xi)}h(\xi)$ wie in (1).
$\Rightarrow X = (X_1,\dots,X_n)$ besitzt die Dichte

$$f(x,\vartheta) = e^{-nb(\vartheta)}\cdot\exp(\vartheta^T\sum_{i=1}^n T(x_j))\prod_{j=1}^n h(x_j)$$

Sei $S(X) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n T(X_j)$.

$$\Rightarrow E_\vartheta S(X) = E_\vartheta T(X_1) \overset{6.7}{=} \frac{d}{d\vartheta}b(\vartheta),\ \vartheta\in\Theta$$

$\Rightarrow$ S erwartungstreu für $\frac{d}{d\vartheta}b(\vartheta)$.
Behauptung: $S(X)$ ist CR-effizient.

Beweis:

$$\operatorname{Var}_\vartheta S(X) = \frac{1}{n}\operatorname{Var}_\vartheta T(X_1) \overset{6.7}{=} \frac{1}{n}\frac{d^2}{d\vartheta d\vartheta^T}b(\vartheta)$$

CR-Ungleichung:

$$\operatorname{Var}_\vartheta S(X) \geq C_n(\vartheta)^T I_n(\vartheta)^{-1}C_n(\vartheta)$$

wobei

$$C_n(\vartheta) = \frac{d}{d\vartheta}E_\vartheta[S(X)^T] = \frac{d}{d\vartheta}[\frac{d}{d\vartheta}b(\vartheta)]^T = \frac{d^2}{d\vartheta d\vartheta^T}b(\vartheta)$$

$$I_n(\vartheta) = n\cdot I_1(\vartheta) = n\cdot E_\vartheta[\frac{d}{d\vartheta}\log f_1(X_1,\vartheta)\cdot\frac{d}{d\vartheta}\log f_1(X_1,\vartheta)^T]$$

$$\log f_1(X_1,\vartheta) = -b(\vartheta) + \vartheta^T T(X_1) + \log h(X_1)$$

$$\frac{d}{d\vartheta}\log f_1(X_1,\vartheta) = -\frac{d}{d\vartheta}b(\vartheta) + T(X_1) = T(X_1) - E_\vartheta T(X_1)$$

$$\Rightarrow I_n(\vartheta) = n \cdot \mathrm{Var}_\vartheta\, T(X_1) = n \cdot \frac{d^2}{d\vartheta d\vartheta^T} b(\vartheta)$$
$$\Rightarrow C_n(\vartheta)^T I_n(\vartheta)^{-1} C_n(\vartheta) = \frac{1}{n} \frac{d^2}{d\vartheta d\vartheta^T} b(\vartheta)$$

6.9 Beispiel

$$f_1(\xi, \vartheta) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2})}_{=C(\vartheta)} \exp(\frac{\mu}{\sigma^2} \cdot \xi - \frac{1}{2\sigma^2}\xi^2)$$

$$\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2) := (\frac{\mu}{\sigma^2}, -\frac{1}{2\sigma^2})$$
$$b(\vartheta) = -\log C(\vartheta) = \frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2) = -\frac{1}{4}\frac{\vartheta_1^2}{\vartheta_2} + \frac{1}{2}\log(\frac{-\pi}{\vartheta_2})$$
$$\frac{d}{d\vartheta} b(\vartheta) = (-\frac{1}{2}\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}, \frac{1}{4}\frac{\vartheta_1^2}{\vartheta_2^2} - \frac{1}{2\vartheta_2})^T = (\mu, \sigma^2 + \mu^2)^T$$

Fazit:

$$S(X) = (\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j, \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j^2)$$

ist erwartungstreu und CR-effizient für $(E_\vartheta X_1, E_\vartheta X_1^2)$.

Frage:
Ist $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ CR-effizient für σ^2?