17. Orthogonalsysteme

17.1. Winkel und Orthogonalität

Vorbemerkung: Sei V ein Vektorraum mit Skalaprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und zugehöriger Norm $\|\cdot\|$, dann gilt nach Cauchy-Schwarz:

$$\forall x, y \in V \setminus \{0\} : \quad \frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$$

Definition:

(a) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Für $x, y \in V \setminus \{0\}$ sei $\phi = \angle(x, y) \in [0, \pi]$ diejenige (eindeutig bestimmte) Zahl mit

$$\cos\phi = \frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

ϕ heißt der **Winkel** zwischen x und y.

(b) x, y heißen **orthogonal** oder senkrecht zueinander, falls $\langle x, y\rangle = 0$ gilt. Schreibe: $x \perp y$.

(c) Teilmengen $M, N \subseteq V$ heißen orthogonal, falls gilt:

$$\forall x \in M \forall y \in N : \quad x \perp y$$

Schreibe: $M \perp N$.

(d) Eine Teilmenge $B \subseteq V$ heißt **Orthogonalsystem** (OGS), falls für $x, y \in B$ gilt:

$$x \neq y \implies x \perp y$$

(e) Ein Orthogonalsystem B heißt **Orthonormalsystem** (ONS) wenn gilt:

$$\forall x \in B : \quad \|x\| = 1$$

(f) Eine Basis B von V heißt **Orthogonalbasis** (OGB), bzw. **Orthonormalbasis** (ONB), falls B ein Orthogonalsystem, bzw. Orthonormalsystem, ist.

Beispiel:

(1) Sei $V = \mathbb{K}^n$ mit Standardskalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und $S := \{e_1, \ldots, e_n\}$ Standardbasis.
Dann ist S eine Orthonormalbasis und jede Teilmenge $T \subseteq S$ ist ein Orthonormalsystem.

(2) Sei $I := [a, b]$ ein Intervall.
Sei $V := \{p \in \mathrm{Abb}(I, \mathbb{C}) \mid \exists P \in \mathbb{C}[T] : p(t) = P(t)\}$.
$w : I \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ sei stetig und mit der Eigenschaft $w(t) = 0$ nur für endlich viele $t \in I$.

Wir erhalten ein Skalarprodukt auf V:

$$\langle p, q \rangle_w := \int\limits_I w(t) p(t) \overline{q(t)} \mathrm{d}t$$

Eine Basis von V ist $\{p_n(t) =: t^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.

Gesucht ist eine Orthonormalbasis und ein Verfahren zu ihrer Bestimmung.

Bemerkung: Jedes Orthogonalsystem B mit $0 \notin B$ ist linear unabhängig.

Beweis: Es ist

$$\sum_{b \in B} \alpha_b \cdot b = 0$$

Dann gilt für alle $c \in B$:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle 0, c \rangle \\ &= \left\langle \sum_b \alpha_b b, c \right\rangle \\ &= \sum_b \alpha_b \langle b, c \rangle \\ &\overset{b=0 \forall b \neq c}{=} \alpha_c \underbrace{\langle c, c \rangle}_{\neq c} \\ \implies& \alpha_c = 0 \end{aligned}$$

■

17.2. Das E. Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren

Satz 13:
Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und sei $M := \{x_0, x_1, \ldots\}$ eine abzählbare Teilmenge von V.

(1) Es existiert ein Orthogonalsystem $\{y_0, y_1, \ldots\}$ derart, dass gilt:

$$\forall n : \quad \langle y_0, y_1, \ldots, y_n \rangle = \langle x_0, \ldots, x_n \rangle \quad \text{(gleiche lineare Hülle)} \tag{17.1}$$

(2) Falls M linear unabhängig ist, so sind alle $y_i \neq 0$ und $B := \{z_0, z_1, \ldots\}$ mit

$$z_i := \frac{1}{\|y_i\|} y_i$$

ist ein Orthonormalsystem mit

$$\forall n : \quad \langle z_0, z_1, \ldots, z_n \rangle = \langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle$$

Beweis: (1) Wir beschreiben einen Algorithmus zum Auffinden der y_n.
Start: $y_0 := x_0$. Angenommen: alle y_m für $m < n$ sind bereits gefunden. Setze

$$y_n := x_n - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\langle x_n, y_i\rangle}{\langle y_i, y_i\rangle} y_i$$

(nur über i mit $y_i \neq 0$ summieren).
Damit folgt:

$$y_n \in \langle \underbrace{y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}}_{=\langle x_0,\ldots,x_{n-1}\rangle}, x_n\rangle = \langle x_0, \ldots, x_n\rangle$$
$$x_n \in \langle y_0, y_1, \ldots, y_n\rangle$$

Daraus folgt (17.1).

Rest: Für alle $m < n:\ y_n \perp y_m$. Damit:

$$\begin{aligned}
\langle y_n, y_m\rangle &= \langle x_n, y_m\rangle - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\langle x_n, y_i\rangle}{\langle y_i, y_i\rangle} \langle y_i, y_m\rangle \\
&= \langle x_n, y_m\rangle - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\langle x_n, y_i\rangle}{\langle y_i, y_i\rangle} \delta_{im}\langle y_i, y_i\rangle \\
&= \langle x_n, y_m\rangle - \langle x_n, y_m\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

(2) ✓ Leicht selbst zu verifizieren. ■

Beispiel: Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt, $M := \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$. Dann:

$$\begin{aligned}
y_0 &= x_0, \quad \|y_0\| = \sqrt{2} \\
y_1 &= x_1 - \frac{\langle x_1, y_0\rangle}{\langle y_0, y_0\rangle} y_0 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \quad \|y_1\| = \sqrt{\frac{3}{2}} \\
y_2 &= x_2 - \frac{\langle x_2, y_0\rangle}{\langle y_0, y_0\rangle} y_0 - \frac{\langle x_2, y_1\rangle}{y_1, y_1\rangle} y_1 = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Auswirkungen (des Orthogonalisierungsverfahrens) auf Matrizen:
Sei $V \cong \mathbb{K}^n$ mit Standardskalarprodukt s und Basis $B := \{b_1, \ldots, b_n\}$. Das Orthogonalisierungsverfahren liefert eine Orthogonalbasis $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$.

$$c_\nu = b_\nu - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle\cdot,\cdot\rangle}{\langle\cdot,\cdot\rangle} \cdot c_i = \ldots = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_{i\nu} b_i \longrightarrow A = M_{BC} = (\alpha_{i\nu}) = \begin{pmatrix}1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}$$

$$\frac{c_\nu}{\|c_\nu\|} = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\alpha_{i\nu}}{\|c_i\|} b_i = z_\nu \longrightarrow M_{BZ} = \begin{pmatrix}* & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & *\end{pmatrix}$$

Erinnere (Darstellungsmatrix):

$$D_{BB}(s) = (s(b_\nu, b_\mu)) \in \mathbb{K}^n$$

Da C eine Orthogonalbasis ist, folgt $s(c_\nu, c_\mu) = \delta_{\nu\mu}\|c_\nu\|^2$, also

$$D_{CC}(s) = \operatorname{diag}\left(\ldots, \|c_\nu\|^2, \ldots\right)$$

Falls Z eine Orthonormalbasis ist, so folgt $D_{ZZ}(s) = I$.

Generell für beliebige Basen B, C und $A = M_{BC}$:

$$\begin{aligned} D_{CC}(s) &= (s(c_\nu, c_\mu)) \\ &= \left(s\left(\sum_{i=1}^n \alpha_{i\nu}, \sum_j \alpha_{j\mu} b_j\right)\right) \\ &= \left(\sum_i \sum_j \alpha_{i\nu}\overline{\alpha_{j\mu}} \cdot s(b_i, b_j)\right) \\ &= A^\top (s(b_i, b_j))\,\overline{A} \end{aligned}$$

Definition: Für beliebige $D \in \mathbb{K}^{n\times n}$ setze $D^* := \overline{D}^\top$ (die sogenannte **Adjungierte**).

$$D_{CC}(s) = A^\top D_{BB}(s)\overline{A}$$

Speziell für jede Orthonormalbasis C:

$$D_{CC}(s) = I,$$

das folgt wegen $M_{BC}^{-1} = M_{CB}$.
Es ist

$$D_{BB}(s) = D^* D$$

für $D := \overline{M}_{CB}$, wobei D obere Dreiecksmatrix ist.

Satz 14:
Für $P \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist äquivalent:

(1) P ist hermitesch (symmetrisch) und positiv definit

(2) Es gibt ein $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ mit $P = A^* A$.

Beweis: Der Beweis erfolgt durch Ringschluss:

(1) $\Longrightarrow$ (2) Sei $V = \mathbb{K}^n$, $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ die Standardbasis.
P definiert ein Skalarprodukt:

$$s(x, y) = (\overline{\eta}_1, \ldots, \overline{\eta}_n) \cdot P \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$
$$P = (s(e_i, e_j)) = D_{BB}(s)$$

Das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren liefert eine Orthonormalbasis und damit $P = D^* D$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) $P = A^* A$ ist hermitesch; zu zeigen: $P^* = P$

$$\begin{aligned} P^* &= (A^* \cdot A)^* \\ &= \overline{(A^* \cdot A)}^\top \\ &= \overline{\left(\overline{A}^\top \cdot A\right)}^\top \\ &= \left(A^\top \cdot \overline{A}\right)^\top \\ &= \overline{A}^\top \cdot A \\ &= A^* A \\ &= P \end{aligned}$$

Daraus folgt: $s(x, y)$ ist hermitesche Form. Für alle $x \in \mathbb{K}^n$ gilt:

$$\begin{aligned} s(x, x) &= \overline{x}^\top \cdot P \cdot x \\ &= \overline{x}^\top \left(\overline{A}^\top \cdot A\right) x \\ &= \left(\overline{A}\overline{x}\right)^\top Ax \\ &= s_0(Ax, Ax) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Weiterhin:

$$\begin{aligned} & s_0(Ax, Ax) = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & Ax = 0 \\ \overset{A \text{ inv.}}{\Longleftrightarrow}\ & x = 0 \\ \Longrightarrow\ & s \text{ positiv definit} \end{aligned}$$

■

Falls speziell B und C Orthonormalbasen sind, folgt:

$$D_{BB}(s) = I = D_{CC}(s)$$

und $D := \overline{M}_{CB}$.

Folgerung: Die Basiswechselmatrix $A = M_{BC}$ einer Orthonormalbasis C in eine andere Orthonormalbasis B gehört zur **orthogonalen Gruppe**

$$O(n) := \left\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^\top \cdot A = I\right\} \quad \text{für } \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

beziehungsweise zur **unitären Gruppe**

$$U(n) := \left\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^\top \cdot \overline{A} = I\right\} \quad \text{für } \mathbb{K} = \mathbb{C}$$

Bemerkung: $O(n)$, beziehungsweise $U(n)$, ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, beziehungsweise $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Folgerung (Iwasawa-Zerlegung): Jede Matrix $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ hat eine eindeutige Produktzerlegung

$$g = k \cdot b$$

mit $k \in O(n)$ und $b \in B(n) := \left\{ \begin{pmatrix} \beta_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n \end{pmatrix} \mid \beta_\nu > 0 \right\}$. Das heißt:

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = O(n) \cdot B(n)$$

Analog gilt:

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = U(n) \cdot B(n)_\mathbb{C}$$

mit

$$B(n)_\mathbb{C} := \left\{ \begin{pmatrix} \beta_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \beta_\nu \in \mathbb{R}_{>0} \right\}$$

Beweis: Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}\, g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ folgt: Die Spalten $b_1, \ldots, b_n$ sind eine Basis von $\mathbb{R}^n$.
Das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren liefert eine Orthonormalbasis $\{c_1, \ldots, c_n\}$ mit Übergangsmatrix $A = M_{BC} \in B(n)$. Denn:

$$c_\nu := \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_{i\nu} b_i$$

besagt $g \cdot A = (c_1, \ldots, c_n)$ und $k = (c_1, \ldots, c_n) \in O(n)$, da $k^\top \cdot k = (\langle c_i, c_j \rangle) = I$. ∎

17.3. Orthogonale Projektion und orthogonales Komplement

Satz 15 (Satz von Pythagoras):
Für $x, y \in V$ mit $x \perp y$ gilt:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \underbrace{\langle x, y \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y, x \rangle}_{=0} + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 \end{aligned}$$

Ist $\{x_1, \ldots, x_N\}$ ein Orthogonalsystem, so folgt

$$\left\| \sum_{\nu=1}^{N} x_\nu \right\|^2 = \sum_{\nu=1}^{N} \|x_\nu\|^2$$

Der Beweis folgt leicht mit vollständiger Induktion. ∎

Satz 16:
Sei $U \leq V$ mit $\dim V < \infty$.

(1) Für alle $x \in V$ existiert genau ein $y \in U$ mit $d := \|x-y\| = \min\{\|x-u\| \mid u \in U\}$.

(2) Dieses $y \in U$ ist auch charakterisiert durch: $(x-y) \perp U$.
Schreibe: $y =: \Pi_U(x)$.

(3) Die Abbildung $\Pi_U \in \operatorname{End}(V)$ ist stetig; es gilt $\Pi_U^2 = \Pi_U$ und $\|\Pi_U(x)\| \leq \|x\|$.
d heißt **Abstand** von x und U, $y = \Pi_U(x)$ die **orthogonale Projektion** von x auf U, $z := x - y$ heißt **Lot** von x auf U, y **Lotfußpunkt**.

Beweis: (1) Wähle eine Orthonormalbasis $S = \{e_i \mid i = 1, \ldots, r\}$ in U. Setze $y = \Pi_U(x) := \sum_{i=1}^r \langle x, e_i \rangle e_i$.

Behauptung: $\forall u' \in U : \quad x - y \perp y - u'$

$$\langle x-y, y-u' \rangle = \underbrace{\langle x,y \rangle - \langle y,y \rangle}_{\overset{!}{=}0} + \underbrace{\langle y,u' \rangle - \langle x,u' \rangle}_{\overset{!}{=}0}$$

$$\langle x,y \rangle = \left\langle x, \sum_i \langle x,e_i \rangle e_i \right\rangle = \sum_i \overline{\langle x,e_i \rangle} \langle x,e_i \rangle$$

u' in Basisdarstellung: Mit $u' = \sum_j \alpha_j e_j$ folgt

$$\begin{aligned} \langle y,u' \rangle &= \left\langle \sum_i \langle x,e_i \rangle e_i, \sum_j \alpha_j e_j \right\rangle \\ &= \sum_i \langle x,e_i \rangle \overline{\alpha}_i \end{aligned}$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} \langle x,u' \rangle &= \left\langle x, \sum_j \alpha_j e_j \right\rangle \\ &= \sum_j \overline{\alpha}_j \langle x,e_j \rangle \end{aligned}$$

Mit Pythagoras folgt:

$$\begin{aligned} \|x-u'\|^2 &= \|x-y+y-u'\|^2 \\ &= \|x-y\|^2 + \underbrace{\|y-u'\|^2}_{\geq 0} \\ &\geq \|x-y\|^2 \end{aligned}$$

Es ist also $\|x-u'\| \geq \|x-y\|$, wobei Gleichheit genau für $y - u' = 0$ gilt. Damit folgt die Eindeutigkeit von y.

(2) Sei $y \in U$ und $x - y \perp U$. Dann gilt $\langle x, e_i \rangle = \langle y, e_i \rangle$ für alle i.
Es folgt:

$$\begin{aligned} y &= \sum_i \langle y, e_i \rangle e_i \\ &= \sum_i \langle x, e_i \rangle e_i \\ &= \Pi_U(x) \end{aligned}$$

(3) Aus $x - y \perp y$ folgt mit Pythagoras:

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|x - y\|^2 + \|y\|^2 \\ &\geq \|y\|^2 \\ &= \|\Pi_U(x)\|^2 \end{aligned}$$

Es folgt: Π_U ist (Lipschitz-)stetig.
$\Pi_U^2 = \Pi_U$ ist leicht selbst zu verifizieren. ∎

Definition: Sei $M \subseteq V$ Teilmenge. Der Vektorraum

$$M^\perp := \{y \in V \mid y \perp M\}$$

heißt **Orthogonalraum** oder **orthogonales Komplement** von M.

Lemma:

(1) $M_1 \subseteq M_2 \implies M_1^\perp \geq M_2^\perp$

(2) $\langle M \rangle^\perp = M^\perp$

(3) Aus $M_i \subseteq V$, $(i = 1, \ldots, n)$ folgt

$$\left(\bigcup_{i=1}^n M_i \right)^\perp = \bigcap_{i=1}^n M_i^\perp$$

(4) Aus $U_i \leq V$ (Teilräume) folgt

$$\left(\bigcap_{i=1}^n U_i \right)^\perp \geq \sum_{i=1}^n \left(U_i^\perp \right)$$

(5) $\langle M \rangle \leq \left(M^\perp\right)^\perp$ und $M^\perp = \left(\left(M^\perp\right)^\perp\right)^\perp$.

(6) Im Spezialfall $\dim V < \infty$ gilt:

(a) Mit $U \leq V$ folgt $V = U \oplus U^\perp$ (insbesondere $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$) und $\left(U^\perp\right)^\perp = U$

(b) Mit $U_i \leq V$ folgt $\left(\bigcap_{i=1}^n U_i\right)^\perp = \sum_{i=1}^n \left(U_i^\perp\right)$

Beweis: Übung! ■