§ 15 Integralsatz von Stokes

In diesem Paragraphen sei $\varnothing \neq B \subseteq \mathbb{R}^2$, B kompakt, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $B \subseteq D$ und $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$. Das heißt: $\varphi_{|B}$ ist eine Fläche mit Parameterbereich B, $S := \varphi(B)$

Definition
Definiere die folgenden **Oberflächenintegrale**:

(1) Sei $f : S \to \mathbb{R}$ stetig. Dann:

$$\int_\varphi f \mathrm{d}\sigma := \int_B f(\varphi(u,v)) \|N(u,v)\| \mathrm{d}(u,v)$$

(2) Sei $F : S \to \mathbb{R}^3$ stetig. Dann:

$$\int_\varphi F \cdot n \mathrm{d}\sigma := \int_B F(\varphi(u,v)) \cdot N(u,v) \mathrm{d}(u,v)$$

Beispiel
Seien D, B, f, φ wie im letzten Beispiel in Kapitel 14.

Sei $F(x,y,z) := (x,y,z)$; bekannt: $N(u,v) = (-2u, -2v, 1)$. Dann:

$$\begin{aligned} F(\varphi(u,v)) \cdot N(u,v) &= F(u,v,u^2+v^2) \cdot (-2u,-2v,1) \\ &= (u,v,u^2+v^2) \cdot (-2u,-2v,1) \\ &= -(u^2+v^2) \end{aligned}$$

Also:

$$\int_\varphi F \cdot n \mathrm{d}\sigma = -\int_B (u^2+v^2) \mathrm{d}(u,v) = -\frac{\pi}{2}$$

Satz 15.1 (Integralsatz von Stokes)
Es sei B zulässig, $\partial B = \Gamma_\gamma$, wobei $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ wie zu Beginn des Paragraphen 13 ist. Es sei $\varphi \in C^2(D, \mathbb{R}^3)$. Weiter sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $S \subseteq G$ und $F = (F_1, F_2, F_3) \in C^1(G, \mathbb{R}^3)$. Dann:

$$\underbrace{\int_\varphi \operatorname{rot} F \cdot n \mathrm{d}\sigma}_{\text{Oberflächenint.}} = \underbrace{\int_{\varphi \circ \gamma} F(x,y,z) \cdot \mathrm{d}(x,y,z)}_{\text{Wegint.}}$$

Beispiel
D, B, f, F und φ seien wie in obigem Beispiel. Hier: $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad (t \in [0, 2\pi])$. Dann: $(\varphi \circ \gamma)(t) = \varphi(\cos t, \sin t) = (\cos t, \sin t, 1) \quad (t \in [0, 2\pi])$.

Es ist $\operatorname{rot} F = 0$, also: $\int_\varphi \operatorname{rot} F \cdot n \mathrm{d}\sigma = 0$

$$
\begin{aligned}
\int_{\varphi\circ\gamma} F(x,y,z)\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^{2\pi} F((\varphi\circ\gamma)(t)) \cdot (\varphi\circ\gamma)'(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t, 1) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \underbrace{(\cos t, \sin t, 1) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)}_{=0} \mathrm{d}t \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Beweis
Sei $\varphi := \varphi \circ \gamma$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, also $\varphi_j = \varphi_j \circ \gamma \quad (j = 1,2,3)$.

Zu zeigen:

$$
\begin{aligned}
\int_\varphi \operatorname{rot} F \cdot n\mathrm{d}\sigma &= \int_\varphi F(x,y,z)\mathrm{d}(x,y,z) \\
&= \int_0^{2\pi} F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{j=1}^3 F_j(\varphi(t))\varphi_j'(t) \right) \mathrm{d}t \\
&= \sum_{j=1}^3 \int_0^{2\pi} F_j(\varphi(t))\varphi_j'(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Es ist $\int_\varphi \operatorname{rot} F \cdot n\mathrm{d}\sigma = \int_B \underbrace{(\operatorname{rot} F)(\varphi(x,y)) \cdot (\varphi_x(x,y) \times \varphi_y(x,y))}_{=:g(x,y)} \mathrm{d}(x,y)$. Für $j = 1,2,3$:

$$
h_j(x,y) := \left(\underbrace{F_j(\varphi(x,y))\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(x,y)}_{=:u_j(x,y)}, \underbrace{-F_j(\varphi(x,y))\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(x,y)}_{=:v_j(x,y)} \right) \quad ((x,y) \in D)
$$

$h_j = (u_j, v_j)$; $\quad F \in C^1$, $\varphi \in C^2$, damit folgt: $h_j \in C^1$

Nachrechnen: $g = \operatorname{div} h_1 + \operatorname{div} h_2 + \operatorname{div} h_3$

Damit:

$$
\begin{aligned}
\int_B \operatorname{rot} F \cdot n\mathrm{d}\sigma &= \sum_{j=1}^3 \int_B \operatorname{div} h_j(x,y)\mathrm{d}(x,y) \\
&= \sum_{j=1}^3 \int_\gamma (u_j \mathrm{d}y - v_j \mathrm{d}x) \\
&= \int_0^{2\pi} F_j(\varphi(t))\varphi_j'(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

■