

3. Grenzwerte bei Funktionen, Stetigkeit

Vereinbarung: Stets in dem Paragraphen: Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine (**vektorwertige**) Funktion. Für Punkte $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ schreiben wir auch (x, y) . Für Punkte $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ schreiben wir auch (x, y, z) . Mit $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$ hat f die Form $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$, wobei $f_j : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($j = 1, \dots, m$). Kurz: $f = (f_1, \dots, f_m)$.

Beispiele:

- (1) $n = 2, m = 3$. $f(x, y) = (x + y, xy, xe^y)$; $f_1(x, y) = x + y$, $f_2(x, y) = xy$, $f_3(x, y) = xe^y$.
- (2) $n = 3, m = 1$. $f(x, y, z) = 1 + x^2 + y^2 + z^2$

Definition

Sei $x_0 \in H(D)$.

- (1) Sei $y_0 \in \mathbb{R}^m$. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 : \iff$ für **jede** Folge $(x^{(k)})$ in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x^{(k)} \rightarrow x_0$ gilt: $f(x^{(k)}) \rightarrow y_0$. In diesem Fall schreibt man: $f(x) \rightarrow y_0 (x \rightarrow x_0)$.
- (2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert : $\iff \exists y_0 \in \mathbb{R}^m : \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$.

Beispiele:

- (1) $f(x, y) = (x + y, xy, xe^y)$; $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x, y) = (2, 1, e)$, denn: ist $((x_k, y_k))$ eine Folge mit $(x, y) \rightarrow (1, 1) \implies (x_k, y_k) \rightarrow (1, 1) \xrightarrow{2.1} x_k \rightarrow 1, y_k \rightarrow 1 \implies x_k + y_k \rightarrow 2, x_k y_k \rightarrow 1, x_k e^{y_k} \rightarrow e \xrightarrow{2.1} (x_k, y_k) \rightarrow (2, 1, e)$.
- (2) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , \text{ falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
 $f(\frac{1}{k}, 0) = 0 \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), $(\frac{1}{k}, 0) \rightarrow (0, 0)$, $f(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$ ($k \rightarrow \infty$), $(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \rightarrow (0, 0)$, d.h. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ existiert nicht! **Aber:** $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = 0 = \lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y))$.

Satz 3.1 (Grenzwerte vektorwertiger Funktionen)

- (1) Ist $f = (f_1, \dots, f_m)$ und $y_0 = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, so gilt: $f(x) \rightarrow y_0 (x \rightarrow x_0) \iff f_j(x) \rightarrow y_j (x \rightarrow x_0) (j = 1, \dots, m)$
- (2) Die Aussagen des Satzes Ana I, 16.1 und die Aussagen (1) und (2) des Satzes Ana I, 16.2 gelten sinngemäß für Funktionen von mehreren Variablen.

Beweis

- (1) folgt aus 2.1
- (2) wie in Ana I ■

Definition (Stetigkeit vektorwertiger Funktionen)

- (1) Sei $x_0 \in D$. f heißt **stetig** in x_0 gdw. für jede Folge $(x^{(k)})$ in D mit $(x^{(k)}) \rightarrow x_0$ gilt: $f(x^{(k)}) \rightarrow f(x_0)$. Wie in Ana I: Ist $x_0 \in D \cap H(D)$, so gilt: f ist stetig in $x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- (2) f heißt auf D stetig gdw. f in jedem $x \in D$ stetig ist. In diesem Fall schreibt man: $f \in C(D, \mathbb{R}^m)$ ($C(D) = C(D, \mathbb{R})$).
- (3) f heißt auf D **gleichmäßig** (glm) stetig gdw. gilt:
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon \forall x, y \in D : \|x - y\| < \delta$
- (4) f heißt auf D **Lipschitzstetig** gdw. gilt:
 $\exists L \geq 0 : \|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \forall x, y \in D$.

Satz 3.2 (Stetigkeit vektorwertiger Funktionen)

- (1) Sei $x_0 \in D$ und $f = (f_1, \dots, f_m)$. Dann ist f stetig in x_0 gdw. alle f_j stetig in x_0 sind. Entsprechendes gilt für „stetig auf D “, „glm stetig auf D “, „Lipschitzstetig auf D “.
- (2) Die Aussagen des Satzes Ana I, 17.1 gelten sinngemäß für Funktionen von mehreren Variablen.
- (3) Sei $x_0 \in D$. f ist stetig in x_0 gdw. zu jeder Umgebung V von $f(x_0)$ eine Umgebung U von x_0 existiert mit $f(U \cap D) \subseteq V$.
- (4) Sei $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{R}^m$, $f(D) \subseteq E$, $g : E \rightarrow \mathbb{R}^p$ eine Funktion, f stetig in $x_0 \in D$ und g stetig in $f(x_0)$. Dann ist $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ stetig in x_0 .

Beweis

- (1) folgt aus 2.1
- (2) wie in Ana 1
- (3) Übung
- (4) wie in Ana 1 ■

Beispiele:

$$(1) f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (D = \mathbb{R}^2)$$

$$f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0) \implies f \text{ ist in } (0, 0) \text{ nicht stetig.}$$

$$(2) f(x, y) := \begin{cases} \frac{1}{y} \sin(xy), & y \neq 0 \\ x, & y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Für } y \neq 0 : |f(x, y) - f(0, 0)| = \frac{1}{|y|} |\sin(xy)| \leq \frac{1}{|y|} |xy| = |x|.$$

$$\text{Also gilt: } |f(x, y) - f(0, 0)| \leq |x| \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \implies f(x, y) \rightarrow f(0, 0) \text{ ((} x, y \text{) } \rightarrow (0, 0) \text{)} \implies f \text{ ist stetig in } (0, 0).$$

(3) Sei $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$, $\Phi(0) = 0$, $\Phi'(0) = 2$ und $a \in \mathbb{R}$.

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{\Phi(a(x^2+y^2))}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ \frac{1}{2}, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist f stetig in $(0, 0)$?

Fall 1: $a = 0$

$f(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \implies f$ ist in $(0, 0)$ nicht stetig.

Fall 2: $a \neq 0$

$r := x^2 + y^2$. $(x, y) \rightarrow (0, 0) \iff \|(x, y)\| \rightarrow 0 \iff r \rightarrow 0$, Sei $(x, y) \neq (0, 0)$. Dann gilt:

$$f(x, y) = \frac{\Phi(ar)}{r} = \frac{\Phi(ar) - \Phi(0)}{r - 0} = a \frac{\Phi(ar) - \Phi(0)}{ar - 0} \xrightarrow{r \rightarrow 0} a\Phi'(0) = 2a. \text{ Das heißt: } f(x, y) \rightarrow 2a \quad ((x, y) \rightarrow (0, 0)).$$

Daher gilt: f ist stetig in $(0, 0) \iff 2a = \frac{1}{2} \iff a = \frac{1}{4}$.

Definition (Beschränktheit einer Funktion)

$f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt **beschränkt** (auf D) gdw. $f(D)$ beschränkt ist ($\iff \exists c \geq 0 : \|f(x)\| \leq c \quad \forall x \in D$).

Satz 3.3 (Funktionen auf beschränkten und abgeschlossenen Intervallen)

D sei beschränkt und abgeschlossen und es sei $f \in C(D, \mathbb{R}^m)$.

- (1) $f(D)$ ist beschränkt und abgeschlossen.
- (2) f ist auf D gleichmäßig stetig.
- (3) Ist f injektiv auf D , so gilt: $f^{-1} \in C(f(D), \mathbb{R}^n)$.
- (4) Ist $m = 1$, so gilt: $\exists a, b \in D : f(a) \leq f(x) \leq f(b) \quad \forall x \in D$.

Beweis

wie in Ana I. ■

Satz 3.4 (Fortsetzungssatz von Tietze)

Sei D abgeschlossen und $f \in C(D, \mathbb{R}) \implies \exists F \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) : F = f$ auf D .

Satz 3.5 (Lineare Funktionen und Untervektorräume von \mathbb{R}^n)

- (1) Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und *linear*, so gilt: f ist Lipschitzstetig auf \mathbb{R}^n , insbesondere gilt: $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.
- (2) Ist U ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n , so ist U abgeschlossen.

Beweis

- (1) Aus der Linearen Algebra ist bekannt: Es gibt eine $(m \times n)$ -Matrix A mit $f(x) = Ax$. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\|f(x) - f(y)\| = \|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\| \leq \|A\| \cdot \|x - y\|$
- (2) Aus der Linearen Algebra ist bekannt: Es gibt einen UVR V von \mathbb{R}^n mit: $\mathbb{R}^n = U \oplus V$. Definiere $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ wie folgt: zu $x \in \mathbb{R}^n$ existieren eindeutig bestimmte $u \in U$, $v \in V$ mit: $x = u + v$; $P(x) := u$.

Nachrechnen: P ist linear.

$P(\mathbb{R}^n) = U$ (Kern $P = V$, $P^2 = P$). Sei $(u^{(k)})$ eine konvergente Folge in U und $x_0 := \lim u^{(k)}$, z.z.: $x_0 \in U$.

Aus (1) folgt: P ist stetig $\implies P(u^{(k)}) \rightarrow P(x_0) \implies x_0 = \lim u^{(k)} = \lim P(u^{(k)}) = P(x_0) \in P(\mathbb{R}^n) = U$. ■

Definition (Abstand eines Vektor zu einer Menge)

Sei $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$. $d(x, A) := \inf\{\|x - a\| : a \in A\}$ heißt der **Abstand** von x und A .

Klar: $d(a, A) = 0 \ \forall a \in A$.

Satz 3.6 (Eigenschaften des Abstands zwischen Vektor und Menge)

- (1) $|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\| \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.
- (2) $d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$.

Beweis

- (1) Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Sei $a \in A$. $d(x, A) \leq \|x - a\| = \|x - y + y - a\| \leq \|x - y\| + \|y - a\|$
 $\implies d(x, A) - \|x - y\| \leq \|y - a\| \ \forall a \in A$
 $\implies d(x, A) - \|x - y\| \leq d(y, A)$
 $\implies d(x, A) - d(y, A) \leq \|x - y\|$

Genauso: $d(y, A) - d(x, A) \leq \|y - x\| = \|x - y\| \implies \text{Beh.}$

- (2) „ \Leftarrow “: Sei $x \in \overline{A} \xrightarrow{2.2} \exists \text{ Folge } (a^{(k)}) \text{ in } A : a^{(k)} \rightarrow x \xrightarrow{(1)} d(a^{(k)}, A) \rightarrow d(x, A) \implies d(x, A) = 0$.

„ \Rightarrow “: Sei $d(x, A) = 0$. $\forall k \in \mathbb{N} \exists a^{(k)} \in A : \|a^{(k)} - x\| < \frac{1}{k} \implies a^{(k)} \rightarrow x \xrightarrow{2.2} x \in \overline{A}$. ■