14. Potenzreihen

Definition (Potenzreihe)
Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Eine Reihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ heißt eine **Potenzreihe** (PR). Die Menge $\{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergent}\}$ heißt der **Konvergenzbereich** (KB) der Potenzreihe. Klar: Die Potenzreihe konvergiert für $x = 0$.

Erinnerung: Ist (x_n) eine Folge, die nicht nach oben beschränkt ist und $x_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, so war $\limsup x_n = \infty$.

Vereinbarung: „$\frac{1}{0} := \infty$“, „$\frac{1}{\infty} := 0$“

Satz 14.1 (Konvergenz von Potenzreihen)
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sei eine Potenzreihe, $\rho := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ und $r := \frac{1}{\rho}$ (also $r = 0$, falls $\rho = \infty$ und $r = \infty$ falls $\rho = 0$).

(1) Ist $r = 0$, so konvergiert die Potenzreihe nur für $x = 0$

(2) Ist $r = \infty$, so konvergiert die Potenzreihe absolut $\forall x \in \mathbb{R}$

(3) Ist $0 < r < \infty$, so konvergiert die Potenzreihe absolut für $|x| < r$ und sie divergiert für $|x| > r$ (Im Falle $|x| = r$, also für $x = r$ und $x = -r$ ist keine allgemeine Aussage möglich).

Die Zahl r heißt der **Konvergenzradius** der Potenzreihe. Der Konvergenzbereich der Potenzreihe hat also folgende Form: $\{0\}$, falls $r = 0$; $\mathbb{R}$ falls $r = \infty$ und $(-r, r)$, $(-r, r]$, $[-r, r)$ oder $[-r, r]$ wenn $0 < r < \infty$.

Beweis

(1) $r = 0 \implies \rho = \infty \implies \sqrt[n]{|a_n|}$ ist nicht nach oben beschränkt. Sei $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. $(\sqrt[n]{|a_n x^n|}) = (\sqrt[n]{|a_n|}|x|) \implies (\sqrt[n]{|a_n x^n|})$ ist nicht nach oben beschränkt $\overset{12.3}{\implies} \sum a_n x^n$ divergent.

(2) Sei $r = \infty \implies \rho = 0$. $x \in \mathbb{R} : \limsup \sqrt[n]{|a_n x^n} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}|x| = \rho|x| = 0 < 1 \overset{12.3}{\implies} \sum a_n x^n$

(3) $0 < r < \infty$, $x \in \mathbb{R} : \limsup \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \rho|x| = \frac{|x|}{r} < 1 \iff |x| < r$. Behauptung folgt aus 12.3. ∎

Beispiele:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n (a_n = 1 \forall\ n \in \mathbb{N}_0) \implies r = \rho = 1. \sum x^n$ konvergent $\iff |x| < 1$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} (a_0 = 0, a_n = \frac{1}{n^2}(n \geq 1))$ $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \to 1 (\rho = 1 = r)$. Die Potenzreihe konvergiert absolut für $|x| < 1$, sie divergiert für $|x| > 1$. $x = 1 : \sum \frac{1}{n^2}$ konvergent; $x = -1 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ konvergent (Leibniz!)

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $\rho = r = 1$. Die Potenzreihe konvergiert absolut für $|x| < 1$, sie divergiert für $|x| > 1$. $x = 1 : \sum \frac{1}{n}$ divergent; $x = -1 : \sum \frac{(-1)^n}{n}$ konvergent

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(n^4 + 2n^2)}_{:=a_n} x^n$; $1 \leq a_n \leq n^4 + 2n^4 = 3n^4 \forall\, n \in \mathbb{N} \implies 1 \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \underbrace{\sqrt[n]{3}(\sqrt[n]{n})^4}_{\to 1} \implies$ $\sqrt[n]{|a_n|} \to 1 \implies r = \rho = 1$ Die Potenzreihe konvergiert für $|x| < 1$ absolut, sie divergiert für $|x| > 1$. Für $|x| = 1$: $|a_n x^n| = |a_n||x^n| \nrightarrow 0 \implies$ divergent in $x = 1, x = -1$.

(5) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$; $a_n := n^n$ $\sqrt[n]{|a_n|} = n \implies \rho = \infty \implies r = 0$

(6) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $a_n := \begin{cases} 0 & \text{n gerade} \\ n2^n & \text{n ungerade} \end{cases}$. A16 $\implies \mathscr{H}(\sqrt[n]{|a_n|}) = \{0, 2\} \implies \rho = 2 \implies$ $r = \frac{1}{2}$. Die Potenzreihe konvergiert absolut für $|x| < \frac{1}{2}$, sie divergiert für $|x| > \frac{1}{2}$. Sei $|x| = \frac{1}{2}$. $|a_n x^n| = |a_n| \frac{1}{2^n} = n$ falls n ungerade $\implies a_n x^n \nrightarrow 0 \implies$ die Potenzreihe divergiert für $|x| = \frac{1}{2}$.

Die folgenden Potenzreihen haben jeweils den Konvergenzradius $r = \infty$:
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$,
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1}$, falls $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ KR $r = \infty$ hat.

Definition
$\cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ $(x \in \mathbb{R})$ (Cosinus Hyperbolikus)
$\sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ $(x \in \mathbb{R})$ (Sinus Hyperbolikus)
Nachrechnen: $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} (x \in \mathbb{R})$

Vereinbarung: Sei $\tilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$.
$(a - r, b + r) := (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ falls $r = \infty$ Sei $r_1, r_2 \in \tilde{\mathbb{R}}$ und $r_1 = \infty$ oder $r_2 = \infty$.

$$\min\{r_1, r_2\} := \begin{cases} \infty & \text{falls } r_1 = \infty = r_2 \\ r_2 & \text{falls } r_2 < \infty, r_1 = \infty \\ r_1 & \text{falls } r_1 < \infty, r_2 = \infty \end{cases}$$

Satz 14.2 (Konvergenzradien von Cauchyprodukten)
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ seien Potenzreihen mit den Konvergenzradien r_1 bzw. r_2. Sei $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ und r sei der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. $R := \min\{r_1, r_2\}$. Dann: $R \leq r$ und für $x \in (-R, R)$: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n)$

Beweis
Sei $x \in (-R, R) : (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) \stackrel{13.4}{=} \sum_{n=0}^{\infty} d_n$ wobei
$d_n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k b_{n-k} x^{n-k} = x^n c_n \implies R \leq r$ und
$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n)$. ■

Bemerkung: Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge und $x_0 \in \mathbb{R}$. Eine Reihe der Form $(*) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ heißt ebenfalls eine Potenzreihe (x_0 heißt **Entwicklungspunkt** der Potenzreihe). Substitution $t := x - x_0$, dann erhält man die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Sei r der Konvergenzradius dieser Potenzreihe. Dann: ist $r = 0$, so konvergiert die Potenzreihe in $(*)$ *nur* in $x = x_0$. Ist $r = \infty$, so konvergiert die Potenzreihe absolut $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Ist $0 < r < \infty$, so konvergiert die Potenzreihe in $(*)$ absolut für $|x - x_0| < r$, sie divergiert für $|x - x_0| > r$.