

# 1 Gruppen

## 1.1 Grundlagen

## 1.2 Homomorphie- und Isomorphiesätze

Sind  $G$  und  $G'$  Gruppen und  $\varphi : G \longrightarrow G'$  ein Gruppenhomomorphismus. Dann gilt:

$$G/\text{Kern}(\varphi) \cong \text{Bild}(\varphi)$$

**Beispiele 1.1** (a)  $G/Z(G) \cong \text{Aut}_i(G)$

### Satz 1

Sei  $G$  eine Gruppe,  $N \subseteq G$  ein Normalteiler und  $H \subseteq G$  eine Untergruppe.

(a) Es gilt:

$$H/(H \cap N) \cong HN/N$$

Dabei sei  $HN := \{h \cdot n : h \in H, n \in N\}$

(b) Ist  $N \subseteq H$  und  $H$  ein Normalteiler in  $G$ , so gilt:

$$(G/N)/(H/N) \cong G/H$$

### 1.2.1 Exakte Sequenzen

**Definition + Bemerkung 1.2** 1. Eine Sequenz

$$1 \longrightarrow G_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow G_{i-1} \xrightarrow{\varphi_i} G_i \xrightarrow{\varphi_{i+1}} G_{i+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow G_n \longrightarrow 1$$

von Gruppenhomomorphismen heißt *exakt an der Stelle  $G_i$* , wenn

$$\text{Bild}(\varphi_i) = \text{Kern}(\varphi_{i+1})$$

gilt. Die Sequenz heißt *exakt*, wenn sie an jeder Stelle exakt ist.

2. Eine Sequenz

$$1 \longrightarrow G' \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} G'' \longrightarrow 1$$

von Gruppenhomomorphismen heißt *kurze Sequenz*.

3. Eine kurze Sequenz ist genau dann exakt, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

## 1 Gruppen

- a)  $\alpha$  ist injektiv (sprich: man kann  $G'$  als Untergruppe von  $G$  auffassen)
- b)  $\beta$  ist surjektiv
- c)  $\text{Bild}(\alpha) = \text{Kern}(\beta)$

### Beispiele 1.3

Ist  $G$  eine Gruppe und  $N \trianglelefteq G$ , so ist die folgende kurze Sequenz exakt:

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow G/N \longrightarrow 1$$

Eine kurze exakte Sequenz *spaltet*, wenn es einen Gruppenhomomorphismus  $\gamma : G'' \longrightarrow G$  gibt mit  $\beta \circ \gamma = \text{id}_{G''}$ .

$$1 \longrightarrow G' \xrightarrow{\alpha} G \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta} \\ \xleftarrow{\gamma} \end{array} G'' \longrightarrow 1$$

In diesem Fall ist  $\gamma$  injektiv, man kann also auch  $G''$  als Untergruppe von  $G$  auffassen.

## 1.3 Kommutatoren

### Bemerkung 1.4

Grundlegende Eigenschaften von Kommutatoren.

1. Genau dann ist eine Gruppe  $G$  abelsch, wenn  $K(G) = \{e\}$ .

### Bemerkung 1.5

Kommutatoren und Homomorphismen.

Seien  $G$  und  $G'$  eine Gruppen und  $\varphi : G \rightarrow G'$  ein Gruppenhomomorphismus.

- (a)  $\varphi([a, b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$ .
- (b)  $\varphi(K(G)) \subseteq K(G')$
- (c) Ist  $\varphi$  zudem noch surjektiv, so gilt:  $\varphi(K(G)) = K(G') = K(\varphi(G))$ .

#### Beweis:

(a)  $\varphi([a, b]) = \varphi(aba^{-1}b^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b)\varphi(a)^{-1}\varphi(b)^{-1} = [\varphi(a), \varphi(b)]$

(b) Sei  $[a, b] \in K(G)$ . Dann ist  $\varphi([a, b]) = [\varphi(a), \varphi(b)] \in K(G')$

(c) Sei  $[a', b'] \in K(G')$ . Da  $\varphi$  surjektiv ist, gibt es  $a, b \in G$  mit  $\varphi(a) = a'$  und  $\varphi(b) = b'$ . Dann gilt  $[a', b'] = [\varphi(a), \varphi(b)] = \varphi([a, b]) \in \varphi(K(G))$ . ■

### Bemerkung 1.6

Kommutatoren und Normalteiler.

Es sei  $G$  eine Gruppe.

(a) Es sei  $N \trianglelefteq G$ .  
Genau dann ist  $G/N$  abelsch, wenn  $K(G) \subseteq N$ .

(b)  $G^{ab} := G/K(G)$  ist eine abelsche Gruppe.

**Beweis:**

(a)  $\Rightarrow$  Es sei  $G$  abelsch. Also:  $K(G) = \{e\} \subseteq N$ .

$\Leftarrow$  Es sei  $K(G) \subseteq N$  und  $\pi : G \rightarrow G/N$  die kanonische Projektion. Da  $\pi$  surjektiv ist, gilt:  $\pi(K(G)) = K(\pi(G)) = K(G/N)$ . Da  $K(G) \subseteq N$ , ist  $K(G/N) = \{N\}$ . Also ist  $G/N$  abelsch.

(b) Blatt 3, Aufgabe 1, a).

(c) Blatt 3, Aufgabe 1, b). ■

**Beispiele 1.7** 1. Symmetrische Gruppe:

a)  $K(S_1) =$

b)  $K(S_n) = A_n$  (für  $n \geq 2$ )

2. Alternierende Gruppe:

a)  $K(A_2) = K(A_3) = \{\text{id}\}$

b)  $K(A_4) = V_4 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  (kleinsche Vierergruppe)

c)  $K(A_n) = A_n$  (für  $n \geq 5$ )

3. Diedergruppe.

## 1.4 Konstruktion von Gruppen

### 1.4.1 Direktes Produkt

### 1.4.2 Semidirektes Produkt

Seien  $H, N$  Gruppen und  $\phi : H \rightarrow \text{Aut}(N)$  ein Gruppenhomomorphismus. Auf der Menge  $G := N \rtimes H$  definiert man eine Verknüpfung  $\star$  wie folgt:

$$(n_1, h_1) \star (n_2, h_2) := (n_1 \phi(h_1)(n_2), h_1 h_2),$$

wobei jeweils die Verknüpfungen in  $N$  bzw.  $H$  verwendet werden.

$(G, \star)$  heißt *semidirektes Produkt* von  $H$  mit  $N$ .

$G$  ist eine Gruppe, die  $N \times \{e_H\}$  als Normalteiler und  $\{e_N\} \times H$  als Untergruppe enthält.

**Bemerkung 1.8**

(Splitting Lemma)

Sei

## 1 Gruppen

$$1 \longrightarrow G' \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} G'' \longrightarrow 1$$

eine kurze exakte Sequenz, die spaltet. Das bedeutet, dass es einen Gruppenhomomorphismus  $\gamma : G'' \rightarrow G$  gibt mit  $\beta \circ \gamma = \text{id}_{G''}$

$G$  ist dann bezüglich einer geeigneten Abbildung  $\varphi : G'' \rightarrow \text{Aut}(G')$  ein semidirektes Produkt von  $G'$  und  $G''$ .

Setze

$$\varphi(h)(n) := \alpha^{-1}(\gamma(h)\alpha(n)\gamma(h^{-1}))$$

Da  $\alpha$  und  $\gamma$  injektiv sind, kann man sich  $G'$  und  $G''$  als Untergruppe von  $G$  vorstellen. In diesem Fall ergibt sich

$$\varphi(h)(n) := hnh^{-1}$$

## 1.5 Eigenschaften von Gruppen

### 1.5.1 Zyklische Gruppen

**Definition + Bemerkung 1.9** (a)  $G$  heißt zyklisch, wenn es ein  $g \in G$  gibt mit  $G = \langle g \rangle$ .

### 1.5.2 Abelsche Gruppen

**Definition + Bemerkung 1.10** (a)  $A$  heißt **freie abelsche Gruppe** mit Basis  $X$ , wenn jedes  $a \in A$  eine eindeutige Darstellung  $a = \sum_{x \in X} n_x x$  hat mit  $n_x \in \mathbb{Z}$ ,  $n_x \neq 0$  nur für endlich viele  $x \in X$ . Ist in dieser Situation  $|X| = n$ , so heißt  $n$  der **Rang** von  $A$ .  $A$  ist isomorph zu  $\mathbb{Z}^X := \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z}$

(b) (UAE der freien abelschen Gruppe)

Zu jeder abelschen Gruppe  $A$  und jeder Abbildung  $f : X \rightarrow A$  gibt es genau einen Homomorphismus  $\varphi : \mathbb{Z}^X \rightarrow A$  mit  $\forall x \in X : \varphi(x) = f(x)$

### Beispiele 1.11

$X$  endlich,  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Dann ist  $\mathbb{Z}^X \cong \mathbb{Z}^n$

$\mathbb{Z}^n$  ist "so etwas ähnliches" wie ein Vektorraum ("freier Modul"). Insbesondere lassen sich die Gruppenhomomorphismen  $\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^m$  durch eine  $m \times n$ -Matrix mit Einträgen in  $\mathbb{Z}$  beschreiben.

### Satz 2 (Elementarteilersatz)

Sei  $H$  eine Untergruppe von  $\mathbb{Z}^n$  ( $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ). Dann gibt es eine Basis  $\{x_1, \dots, x_n\}$  von  $\mathbb{Z}^n$ , ein  $r \in \mathbb{N}$  mit  $0 \leq r \leq n$  und  $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  mit  $a_i$  teilt  $a_{i+1}$  für  $i = 1, \dots, r-1$ , so daß  $a_1 x_1, \dots, a_r x_r$  eine Basis von  $H$  ist. Insbesondere ist  $H$  ebenfalls eine freie abelsche Gruppe.

Klassifizierung:

### Satz 3 (Struktursatz für endlich erzeugte abelsche Gruppen)

Sei  $A$  endlich erzeugte abelsche Gruppe.

$$\Rightarrow A \cong \mathbb{Z}^r \oplus \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}/a_i\mathbb{Z}$$

mit  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{N}$ ,  $\forall i : a_i \geq 2$ ,  $a_i$  teilt  $a_{i+1}$  für  $i = 1, \dots, m-1$ . Dabei sind  $r, m$  und die  $a_i$  eindeutig bestimmt.

Abgeschlossenheit:

1. Untergruppen abelscher Gruppen sind abelsch.
2. Faktorgruppen abelscher Gruppen sind abelsch.
3. Produkte abelscher Gruppen sind abelsch.
4. Direkte Summen abelscher Gruppen sind abelsch.
5. Seien  $G, G'$  Gruppen,  $\varphi : G \longrightarrow G'$  ein Gruppenhomomorphismus.  
Ist  $G$  abelsch, so ist  $\varphi(G)$  auch abelsch.

Beispiele für abelsche Gruppen:

- zyklische Gruppen
- Gruppen der Ordnung  $p$  oder  $p^2$
- $\text{Aut}(G)$  ist zyklisch
- $G = H/[H, H]$
- Für alle  $x \in G$  gilt  $x^2 = e$ .

Beispiele für *nicht* abelsche Gruppen:

- $D_n$
- $S_n$  (für  $n \geq 3$ )
- $A_n$  (für  $n \geq 4$ )

### 1.5.3 Einfache Gruppen

**Beispiele 1.12** (a) Es gibt keine einfachen Gruppen der Ordnung 21.

**Beweis:** Die Sätze von Sylow liefern, dass es nur eine 7-Sylowgruppe gibt. Diese muss also auch Normalteiler sein. ■

## 1 Gruppen

- (b) Es gibt keine einfachen Gruppen der Ordnung 30.

**Beweis:** Es sei  $G$  eine Gruppe der Ordnung 30. Die Sätze von Sylow liefern  $s_3 \in \{1, 10\}$  und  $s_5 \in \{1, 6\}$ . Falls  $s_3 = 1$  oder  $s_5 = 1$  gilt, so gibt es nach dem vorigen Argument einen Normalteiler in  $G$ . Es gelte also im folgenden  $s_3 = 10$  und  $s_5 = 6$ . Die 5-Sylowgruppen sind zyklisch und bis auf das Neutralelement disjunkt. In den 5-Sylowgruppen liegen also  $6 \cdot 4 = 24$  Elemente ( $\neq e_G$ ). Die 3-Sylowgruppen sind zyklisch und bis auf das Neutralelement disjunkt. In den 3-Sylowgruppen liegen also  $10 \cdot 2 = 20$  Elemente ( $\neq e_G$ ). Je eine 3-Sylowgruppe und eine 5-Sylowgruppe schneiden sich trivial. Es gibt also mindestens  $24 + 20 + 1 = 45$  Elemente in  $G$ . Widerspruch. ■

- (c) Es gibt keine einfachen Gruppen der Ordnung 36.

**Beweis:** Es sei  $G$  eine Gruppe der Ordnung 36. Die Sätze von Sylow liefern  $s_2 \in \{1, 3, 9\}$  und  $s_3 \in \{1, 4\}$ . Ohne Einschränkung gelte  $s_3 = 4$ . Je 2 3-Sylowgruppen sind konjugiert, deshalb operiert  $G$  auf der Menge  $M$  der 3-Sylowgruppen durch Konjugation (nichttrivial). Nenne diese 3-Sylowgruppen  $M = \{1, 2, 3, 4\}$ . Man erhält durch diese Operation einen Gruppenhomomorphismus  $\varphi : G \rightarrow \text{Perm}(M) = S_4$ .  $\varphi$  ist nicht injektiv, da  $|G| = 36$ ,  $|S_4| = 24$ .  $\varphi$  ist nicht der triviale Homomorphismus, da  $G$  nichttrivial auf  $M$  operiert.  $\text{Kern}(\varphi)$  ist also ein echter, nichttrivialer Normalteiler in  $G$ . ■

- (d) Es gibt keine einfachen Gruppen der Ordnung 300.

**Beweis:** Es sei  $G$  eine Gruppe der Ordnung 300. Die Sätze von Sylow liefern  $s_2 \in \{1, 3, 5, 15, 25, 75\}$ ,  $s_3 \in \{1, 4, 10, 25, 100\}$  und  $s_5 \in \{1, 6\}$ . Ohne Einschränkung gelte  $s_5 = 6$ . Je 2 5-Sylowgruppen sind konjugiert, deshalb operiert  $G$  auf der Menge  $M$  der 5-Sylowgruppen durch Konjugation (nichttrivial). Nenne diese 5-Sylowgruppen  $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Man erhält durch diese Operation einen Gruppenhomomorphismus  $\varphi : G \rightarrow \text{Perm}(M) = S_6$ .  $|G| = 300$  ist kein Teiler von  $|S_6| = 720$ , also ist  $\varphi$  nicht injektiv.  $\varphi$  ist nicht der triviale Homomorphismus, da  $G$  nichttrivial auf  $M$  operiert.  $\text{Kern}(\varphi)$  ist also ein echter, nichttrivialer Normalteiler in  $G$ . ■

- (e) Gruppen der Ordnung  $2m$  ( $m$  ungerade) enthalten einen Normalteiler der Ordnung  $m$ . Hinweis: Satz von Cayley. Zeige, dass eine Untergruppe der  $S_n$ , die eine ungerade Permutation enthält, einen Normalteiler von Index 2 besitzt (Isomorphiesätze).

**Beweis:** Es sei  $U$  eine Untergruppe der  $S_n$ ,  $\sigma \in U \setminus A_n$  (d.h.  $\sigma$  ungerade).  $A_n$  ist ein Normalteiler in  $S_n$ ,  $U$  ist eine Untergruppe in  $S_n$ , also ist nach den Isomorphiesätzen  $UA_n$  eine Untergruppe von  $S_n$  und  $U \cap A_n$  ein Normalteiler in  $U$ . Weiter gilt:  $U/(U \cap A_n) \cong UA_n/A_n$ . Andererseits ist  $UA_n \leq A_n \leq S_n$ . Da  $(S_n : A_n) = 2$  muss also  $UA_n = S_n$  gelten. Einsetzen:  $U/(U \cap A_n) \cong S_n/A_n$ . Insbesondere:  $(U : (U \cap A_n)) = (S_n : A_n) = 2$

Zu der eigentlichen Aussage: Sei  $G$  eine Gruppe der Ordnung  $2m$ ,  $m$  ungerade. Nach dem Satz von Cayley ist  $\tau : G \rightarrow \text{Perm}(G)$ ,  $g \mapsto \tau_g$  ein injektiver Homomorphismus ( $\tau_g$ : Konjugation mit  $g$ ). Nummeriert man die Elemente von  $G$  durch, so kann man den Homomorphismus auch als  $\tau : G \rightarrow S_{2m}$  auffassen. Da  $\tau$  injektiv ist, ist  $U := \tau(G)$  eine Untergruppe von  $S_n$  und  $U \cong G$ . In  $G$  gibt es ein Element der Ordnung 2 (Sylow), in  $U$  also auch. Es sei also  $\sigma \in U$  mit  $\text{ord}(\sigma) = 2$ .

to be continued ■

### 1.5.4 Auflösbare Gruppen

**Definition + Bemerkung 1.13** (a) Eine Gruppe heißt *auflösbar*, wenn sie eine Normalreihe mit abelschen Faktorgruppen besitzt.

(b) Eine endliche Gruppe ist genau dann auflösbar, wenn die Faktoren in ihrer Kompositionsreihe zyklisch von Primzahlordnung sind.

(c) Sei

$$1 \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow G'' \longrightarrow 1$$

eine kurze exakte Sequenz von Gruppen. Dann gilt:

$G$  ist auflösbar  $\Leftrightarrow G'$  und  $G''$  sind auflösbar.

Ist  $N$  ein Normalteiler in  $G$ , so gilt also:

$G$  ist auflösbar  $\Leftrightarrow N$  und  $G/N$  sind auflösbar.

### 1.5.5 Freie Gruppen

## 1.6 Monographien von Gruppen

### 1.6.1 Symmetrische Gruppe

Eigenschaften:

- Anzahl der Elemente:  $|S_n| = n!$
- Im allgemeinen *nicht* abelsch.

## 1 Gruppen

### 1.6.2 Alternierende Gruppe

Eigenschaften:

- Anzahl der Elemente:  $|A_n| = n!/2$
- Im allgemeinen *nicht* abelsch.

### 1.6.3 Diedergruppe

- Definition:  $D_n := \langle D, S \rangle$ ,  $\text{ord}(D) = n$ ,  $\text{ord}(S) = 2$
- Anzahl der Elemente:  $|D_n| = 2n$
- Im allgemeinen *nicht* abelsch.

Charakterisierende Eigenschaft:

- Es gibt ein Element  $S$  der Ordnung 2.
- Es gibt ein Element  $D$  der Ordnung  $n$ .
- $SD = D^{-1}S$

Rechenregeln in der Diedergruppe

1.  $D^n = e$
2.  $S^2 = e$
3.  $(D^i S)^2 = e$
4.  $SD = D^{-1}S$
5.  $SD^i = D^{n-i}S$

Weitere Eigenschaften:

1. Zentralisator:  $\langle D \rangle$

#### Beispiele 1.14 • $D_6, N := \langle D^3 \rangle \trianglelefteq D_6$

- $D_{12}, N := \langle D^3 \rangle \trianglelefteq D_{12}$   
 $D_{12}/N$  ist nicht abelsch.



## 1.7 Bestimmung aller Isomorphieklassen

Einige Kandidaten für Untergruppen:

- Zyklische Gruppen
- Abelsche Gruppen
- Diedergruppe  $D_n$
- Alternierende Gruppe  $A_n$
- Kleinsche Vierergruppe  $V_4$
- Quaternionengruppe

Bestimmen Sie alle Isomorphieklassen von Gruppen der Ordnung  $n$ .

- Satz von Lagrange
- Sätze von Sylow
- abelsch oder nicht abelsch? (Klassifizierung endlicher abelscher Gruppen)

Spezialfälle

- $n = p$  Primzahl (nur die zyklische Gruppe)
- $n = p^2$ ,  $p$  Primzahl ( $\mathbb{Z}_{p^2}$  oder  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ )
- $n = 2p$ ,  $p \geq 3$  Primzahl (nur Diedergruppe und zyklische Gruppe)
- $n = pq$ ,  $p, q$  Primzahlen,  $p > q$ ,  $q$  teilt nicht  $p - 1$ :  $\mathbb{Z}_{pq}$

Seien  $U_1, \dots, U_k$   $k$  paarweise (bis auf das Neutralelement) disjunkte Untergruppen von  $G$ . Dann gilt:  $xy = yx$ , für  $x \in G_i, y \in G_j$

Wenn alle Sylowgruppen normal in einer Gruppe  $G$  sind, so ist  $G$  isomorph zum direkten Produkt dieser Sylowgruppen.

