

## 27. Randwertprobleme (Einblick)

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

Wir betrachten das **Randwertproblem** (RWP):

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y''(a) = \gamma_a, \beta_1 y(b) + \beta_2 y''(b) = \gamma_b \end{cases}$$

mit  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_a, \gamma_b \in \mathbb{R}$ .

### Beispiel

Die Dgl  $y'' = -\pi^2 y$  hat die allg. Lösung  $y(x) = c_1 \cos(\pi x) + c_2 \sin(\pi x)$

Die Dgl  $y'' = -\pi^2 y + 1$  hat die allg. Lösung  $y(x) = c_1 \cos(\pi x) + c_2 \sin(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}$

$$\text{RWP (1)} \begin{cases} y'' = -\pi^2 y \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \quad (I = [0, 1])$$

$$0 = y(0) = c_1 \cos(\pi 0) + c_2 \sin(\pi 0) = c_1$$

$0 = y(1) = c_2 \sin(\pi) = 0$ . D.h.: das RWP hat unendlich viele Lösungen:  $y(x) = c \sin(\pi x)$  ( $c \in \mathbb{R}$ ).

$$\text{RWP (2)} \begin{cases} y'' = -\pi^2 y + 1 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \quad (I = [0, 1])$$

$$0 = y(0) = c_1 \cos(\pi 0) + c_2 \sin(\pi 0) + \frac{1}{\pi^2} = c_1 + \frac{1}{\pi^2} \implies c_1 = -\frac{1}{\pi^2}$$

$$0 = y(1) = -\frac{1}{\pi^2} \cos(\pi) + c_2 \sin(\pi) + \frac{1}{\pi^2} = \frac{2}{\pi^2}. \text{ D.h.: das RWP ist unlösbar.}$$

$$\text{RWP (3)} \begin{cases} y'' = -\pi^2 y \\ y(0) = y'(1) = 0 \end{cases} \quad (I = [0, 1])$$

$$0 = y(0) \implies c_1 = 0 \implies y(x) = c_2 \sin(\pi x)$$

$$y'(x) = c_2 \pi \cos(\pi x) \xrightarrow{x=1} c_2 \pi \cos(\pi) = -c_2 \pi \implies c_2 = 0$$

$\implies y = 0$  ist die eindeutig bestimmte Lösung des RWPs.

**Beachte** für später:

In Bsp(1) und (3):  $f(x, y) = -\pi^2 y$

In Bsp(2):  $f(x, y) = -\pi^2 y + 1$

In allen 3 Bsp'en:  $|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| = \underbrace{\pi^2}_L |y - \tilde{y}|$ . ( $\implies \exists$  kein  $L \in [0, \pi^2)$  :  $|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq$

$L|y - \tilde{y}|$  )

Definition: Die Funktion  $G : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  sei definiert durch:

$$G(x, t) := \begin{cases} t(x-1), & \text{falls } 0 \leq t \leq x. \\ x(t-1), & \text{falls } 0 \leq x \leq t. \end{cases}$$

## 27. Randwertprobleme (Einblick)

Klar:  $G \leq 0$ ;  $G(0, t) = G(1, t) = 0 \forall t \in [0, 1]$ . Übung:  $G$  ist stetig auf  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

### Hilfssatz 27.1

Gegeben:  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.  $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  sei definiert durch

$$\phi(x) := \int_0^1 G(x, t)h(t)dt.$$

Dann:  $\phi(0) = \phi(1) = 0$ ,  $\phi \in C^2([0, 1])$  und  $\phi'' = h$  auf  $[0, 1]$ .

### Beweis

$$\phi(0) = \int_0^1 \underbrace{G(0, t)}_{=0} h(t)dt = 0; \phi(1) = \int_0^1 \underbrace{G(1, t)}_{=0} h(t)dt = 0$$

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1] : \phi(x) &= \int_0^x G(x, t)h(t)dt + \int_x^1 G(x, t)h(t)dt = \int_0^x (tx - t)h(t)dt + \int_x^1 (xt - x)h(t)dt \\ &= x \int_0^x th(t)dt - \int_0^x th(t)dt + x \int_x^1 th(t)dt - x \int_x^1 h(t)dt \\ &= x \int_0^1 th(t)dt - \int_0^x th(t)dt + x \int_1^x h(t)dt \\ &\implies \phi \text{ ist db auf } [0, 1] \text{ und } \phi'(x) = \int_0^1 th(t)dt - xh(x) + \int_1^x h(t)dt + xh(x) \\ &= \int_0^1 th(t)dt + \int_1^x h(t)dt. \implies \phi \text{ ist auf } [0, 1] \text{ 2 mal db und } \phi''(x) = h(x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### Beispiel

$$\int_0^1 G(x, t)dt = \underbrace{\int_0^1 G(x, t)1dt}_{=: \phi(x)} \xrightarrow{27.1} \phi''(x) = 1 = \phi'(x) = x + c_1$$

$$\implies \phi(x) = \frac{1}{2}x^2 + c_1x + c_2$$

$$0 = \phi(0) = c_2$$

$$0 = \phi(1) = \frac{1}{2} + c_1 \implies c_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\implies \int_0^1 G(x, t)dt = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \quad \forall x \in [0, 1].$$

### Definition

$f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig. Das RWP

$$(R) \begin{cases} y'' = f(x, y) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

heisst **Dirichlet Randwert-Problem** und obige Funktion  $G$  heisst die zu (R) gehörende **Greensche Funktion**.

Im Folgenden sei  $X := C([0, 1], \mathbb{R})$  und der Operator  $T : X \rightarrow X$  definiert durch

$$(T_y)(x) := \int_0^1 G(x, t)f(t, y(t))dt \quad (y \in X, x \in [0, 1])$$

Aus 27.1:  $(T_y)(0) = (T_y)(1) = 0$ ,  $T_y \in C^2[0, 1]$  und  $(T_y)''(x) = f(x, y(x)) \quad \forall y \in X \quad \forall x \in [0, 1]$ .

### Satz 27.2

Sei  $y \in X$ .

$$y \text{ löst (R) auf } [0, 1] \iff T_y = y$$

**Beweis**

"  $\implies$  ":

$$\forall x \in I : y''(x) = f(x, y(x)) \stackrel{\text{s.o.}}{=} (T_y)''(x); \Psi(x) := y(x) - (T_y)(x)$$

$$\implies \Psi'' = 0 \text{ auf } [0, 1] \implies \Psi'(x) = c_1 \implies \Psi(x) = c_1 x + c_2$$

$$\Psi(0) = y(0) - (T_y)(0) = 0 \implies c_2 = 0.$$

$$\Psi(1) = y(1) - (T_y)(1) = 0 \implies c_1 = 0.$$

"  $\Leftarrow$  ":

$$\text{Sei } y = T_y \stackrel{27.1}{\implies} y \in C^2([0, 1]) \text{ und } y''(x) = (T_y)''(x) = f(x, y(x)) \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$y(0) = (T_y)(0) \stackrel{\text{s.o.}}{=} 0$$

$$y(1) = (T_y)(1) \stackrel{\text{s.o.}}{=} 0. \quad \blacksquare$$

**Vorbetrachtung:**

Sei  $0 < c < \pi$ ,  $\phi(x) := \cos c(x - \frac{1}{2})$  ( $x \in [0, 1]$ ).

$$\phi \in C([0, 1], \mathbb{R}). \quad x \in [0, 1] \implies c(x - \frac{1}{2}) \in [-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}] \subsetneq [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\implies \phi(x) > \frac{c}{2} > 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

**Satz 27.3 (Satz von Lettenmeyer)**

$f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig. Es sei  $L \geq 0$  und es gelte:

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}| \quad \forall (x, y), (x, \tilde{y}) \in [0, 1] \times \mathbb{R}.$$

Ist  $L < \pi^2$ , so hat (R) auf  $[0, 1]$  genau eine Lösung.

**Bemerkung:**

(1) Die Beispiele am Anfang des Paragraphen zeigen, dass die Schranke  $\pi^2$  optimal ist.

(2) Allgemein kann man das RWP

$$\begin{cases} y'' = f(x, y) \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases}$$

(mit  $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig) betrachten. Dann ist  $\pi^2$  durch  $\frac{\pi^2}{(a-b)^2}$  zu ersetzen.

**Beweis**

Sei  $c := (\frac{c+\pi^2}{2})^{\frac{1}{2}}$ . Dann:  $L < c^2 < \pi^2$ ,  $q = \frac{L}{c^2}$ , also  $q < 1$ .

Sei  $\phi$  wie in der Vorbetrachtung. Wir versehen nun  $X$  mit folgender Norm:

$$\|u\| := \max\left\{\frac{u(x)}{\phi(x)} : 0 \leq x \leq 1\right\} \quad (u \in X) \quad \textbf{gewichtete Max-Norm}$$

Bekannt:  $(X, \|\cdot\|)$  ist ein BR (Par. 13). Wir werden zeigen:

$$\|T_u - T_v\| \leq q\|u - v\| \quad \forall u, v \in X.$$

Aus 11.2 folgt dann:  $T$  hat genau einen Fixpunkt. Aus 27.2 folgt dann die Behauptung.

$$\begin{aligned} \text{Seien } u, v \in X \text{ und } x \in [0, 1]. \quad |(T_u)(x) - (T_v)(x)| &= \left| \int_0^1 G(x, t)(f(t, u(t)) - f(t, v(t)))dt \right| \leq \\ &\int_0^1 |G(x, t)|L|u(t) - v(t)|dt \\ &= L \int_0^1 |G(x, t)| \underbrace{\frac{|u(t) - v(t)|}{\phi(t)}}_{\leq \|u-v\|} \phi(t)dt \leq L\|u - v\| \int_0^1 |G(x, t)|\phi(t)dt \end{aligned}$$

## 27. Randwertprobleme (Einblick)

$$G \leq 0 \quad L \|u - v\| \left( - \underbrace{\int_0^1 G(x, y) \phi(t) dt}_{=: g(x)} \right)$$

$$27.1 \implies g(0) = g(1) = 0, g \in C^2([0, 1]) \text{ und } g'' = \phi. \text{ Dann: } g'(x) = \frac{1}{c} \sin c(x - \frac{1}{2}) + c_1$$

$$\implies g(x) = -\frac{1}{c^2} \cos c(x - \frac{1}{2}) + c_1 x + c_2 = -\frac{1}{c^2} \phi(x) + c_1 x + c_2.$$

$$0 = g(0) = -\frac{1}{c^2} \phi(0) + c_2 \implies c_2 = \frac{1}{c^2} \cos \frac{c}{2} \quad 0 = g(1) = -\frac{1}{c^2} \phi(1) + \frac{1}{c^2} \cos \frac{c}{2} \implies c_1 = 0$$

$$\implies g(x) = -\frac{1}{c^2} \phi(x) + \frac{1}{c^2} \cos \frac{c}{2}$$

$$\implies |(T_u)(x) - (T_v)(x)| \leq L \|u - v\| \frac{1}{c^2} (\phi(x) - \cos \frac{c}{2}) = \frac{L}{c^2} \|u - v\| (\phi(x) - \cos \frac{c}{2}) \implies \underbrace{|(T_u)(x) - (T_v)(x)|}_{=\phi(x)} \leq$$

$$\frac{L}{c^2} \|u - v\| (1 - \frac{\cos \frac{c}{2}}{\phi(x)}) \leq \frac{L}{c^2} \|u - v\| = q \|u - v\|$$

$$\implies \|T_u - T_v\| \leq q \|u - v\|. \quad \blacksquare$$

### Satz 27.4 (Satz von Scorza-Dragoni)

Sei  $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ,  $D := I \times \mathbb{R}$  und  $f \in C(D, \mathbb{R})$  sei auf  $D$  beschränkt.

Dann hat das Randwertproblem

$$\begin{cases} y'' = f(x, y) \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases}$$

eine Lösung auf  $I$ .

### Beispiel

$$I = [0, \pi], \quad f(x, y) = \begin{cases} 1, & y \leq -1 \\ -y, & |y| \leq 1 \\ -1, & y \geq 1 \end{cases}$$

Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{cases} y'' = f(x, y) \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $|\alpha| \leq 1$  und  $y_\alpha(x) := \alpha \sin x$ ,  $|y_\alpha| \leq 1$ ,  $y_\alpha''(x) = -\alpha \sin x = -y_\alpha(x) = f(x, y_\alpha(x))$ ,  $y_\alpha(0) = y_\alpha(\pi) = 0$ . Das heißt: Ein Randwertproblem wie in 27.4 muß *nicht* eindeutig lösbar sein.

### Beweis

Wir führen den Beweis nur unter der zusätzlichen Voraussetzung:

$$\exists L \geq 0 : |f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L |y - \tilde{y}| \quad \forall (x, y), (x, \tilde{y}) \in D$$

Sei  $M \geq 0$  so, dass  $|f| \leq M$  auf  $D$ .

Sei  $s \in \mathbb{R}$ . Wir betrachten das Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y) \\ y(a) = 0, y'(a) = s \end{cases}$$

18.3  $\implies$  obiges Anfangswertproblem hat genau eine Lösung  $y_s$  auf  $I$ . §18 und 25.2  $\implies |y_{s_1}(x) - y_{s_2}(x)| \leq c|s_1 - s_2| \forall x \in I, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ .

$h(s) := y_s(b)$  ( $s \in \mathbb{R}$ ), damit  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Ist  $s_0 \in \mathbb{R}$  und  $h(s_0) = 0$ , so ist  $y := y_{s_0}$  eine Lösung des Randwertproblems.

$$\begin{aligned} \forall x \in I : y'_s(x) - s &= y'_s(x) - y'_s(a) = \int_a^x y''_s(t) dt = \int_a^x f(t, y_s(t)) dt \\ \implies y'_s(x) &= s + \int_a^x f(t, y_s(t)) dt \\ \implies y_s(b) &= y_s(b) - y_s(a) \\ &\stackrel{\text{MWS}}{=} y'_s(\xi)(b-a) \\ &= \left( s + \int_a^\xi f(t, y_s(t)) dt \right) (b-a) \\ &= s(b-a) + \int_a^\xi f(t, y_s(t)) dt (b-a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies |h(s) - s(b-a)| &= \left| \int_a^\xi f(t, y_s(t)) dt (b-a) \right| \leq M(\xi-a) \leq M(b-a) =: c \\ \implies -c &\leq h(s) - s(b-a) \leq c \quad \forall s \in \mathbb{R} \\ \implies s(b-a) - c &\leq h(s) \leq c + s(b-a) \quad \forall s \in \mathbb{R} \\ \implies h(s) &\rightarrow \infty \quad (s \rightarrow \infty) \text{ und } h(s) \rightarrow -\infty \quad (s \rightarrow -\infty) \end{aligned}$$

Der Zwischenwertsatz liefert nun:  $\exists s_0 \in \mathbb{R} : h(s_0) = 0$  ■

### Satz 27.5

Sei  $A > 0$ ,  $0 < B < \pi^2$ ,  $f \in C([0, 1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  und es gelte

$$|f(x, y)| \leq A + B|y| \quad \forall x \in [0, 1], y \in \mathbb{R}$$

Dann hat das Randwertproblem

$$\begin{cases} y'' = f(x, y) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

eine Lösung auf  $[0, 1]$

**Bemerkung:** Die Schranke  $\pi^2$  ist optimal:

$$\begin{cases} y'' = -\pi^2 y + 1 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

ist unlösbar!

