

## 22. Einschub: Das Zornsche Lemma

Es sei  $\emptyset \neq \mathcal{L}$  eine Menge und  $\triangleleft$  eine **Ordnungsrelation** auf  $\mathcal{L}$ , d.h. für  $a, b, c \in \mathcal{L}$  gilt:

$$(1) \quad a \triangleleft a$$

$$(2) \quad \text{aus } a \triangleleft b \text{ und } b \triangleleft a \implies a = b$$

$$(3) \quad \text{aus } a \triangleleft b \text{ und } b \triangleleft c \implies a \triangleleft c$$

Es sei  $\emptyset \neq \mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$ .  $\mathcal{K}$  heißt eine **Kette** :  $\iff$  aus  $a, b \in \mathcal{K}$  folgt stets:  $a \triangleleft b$  oder  $b \triangleleft a$ . Sei  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}$  und  $a \in \mathcal{L}$ .  $a$  heißt eine **obere Schranke** von  $\mathcal{M}$  :  $\iff x \triangleleft a \quad \forall x \in \mathcal{M}$ .  $v \in \mathcal{L}$  heißt ein **maximales Element** von  $\mathcal{L}$  :  $\iff$  aus  $a \in \mathcal{L}$  und  $v \triangleleft a$  folgt:  $v = a$

### **Lemma 22.1 (Das Zornsche Lemma)**

$\mathcal{L}$  und  $\triangleleft$  seien wie oben. Besitzt **jede** Kette in  $\mathcal{L}$  eine obere Schranke in  $\mathcal{L}$ , so enthält  $\mathcal{L}$  ein maximales Element.

