

## 4. Topologie Übung

Ferdinand Szekeresch

10. Januar 2017

### Aufgabe 2

a)  $\mathbb{R}, (a, b), [a, b], (a, b]$

- $\mathbb{R}$  und  $(a, b)$  sind homöomorph, denn :

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1); x \mapsto \frac{1}{\pi} \arctan(x) + \frac{1}{2} \text{ ist homöomorph}$$

$$f_2 : (0, 1) \rightarrow (a, b), x \mapsto (b - a)x + a \text{ ist homöomorph}$$

$$\Rightarrow f_2 \circ f_1 : \mathbb{R} \rightarrow (a, b) \text{ ist Homöomorphismus.}$$

- $(a, b)$  und  $[a, b]$  sind nicht homöomorph, denn  $(a, b)$  ist nicht kompakt,  $[a, b]$  aber schon. Da stetige Abbildungen Kompakta auf Kompakta abbilden und Homöom. insbes. stetig sind, kann es keinen Homöomorphismus  $(a, b) \rightarrow [a, b]$  geben.
- $[a, b] \rightarrow (a, b]$  sind nicht homöomorph, wäre  $f : [a, b] \rightarrow (a, b]$  ein Homöomorphismus, so wäre  $f$  nach Zwischenwertsatz streng monoton, d.h.  $f([a, b]) = [f(a), f(b)] \neq (a, b]$ .
- analog:  $(a, b)$  und  $(a, b]$  sind nicht homöom.  
 $\Rightarrow \mathbb{R}$  und  $(a, b)$  bzw.  $(a, b]$  sind nicht homöom.

b)  $S^1$  und  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  sind homöom.

Definiere Homöomorphismus  $h : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1, [x] \mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$

$h$  ist wohldefiniert, denn seien  $x, y$  mit  $x \sim y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = y + k$

$$\Leftrightarrow h([x]) = (\cos(2\pi y + 2\pi k), \sin(2\pi y + 2\pi k)) = (\cos(2\pi y), \sin(2\pi y)) = h([y])$$

Die zeigt auch:  $h$  ist injektiv.

Klar:  $h$  ist surjektiv.

$h$  ist stetig, da  $h \circ \pi$  stetig ist, (+ Aufgabe 4, Blatt 5)

$h$  ist offen, denn  $h \circ \pi$  ist offen.

Das reicht, denn  $\forall O \subseteq \mathbb{R}/\mathbb{Z} : h(O) = h \circ \pi(\pi^{-1}(O))$ , da  $\pi$  surjektiv ist.)

Das überlegt man sich für Intervalle  $\subseteq \mathbb{R}$ .

- c)  $W^n := \partial([0, 1]^{n+1})$ ,  $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$  sind homöomorph.  
Definiere

$$f : S^n \rightarrow W^n, (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \frac{1}{\max(|x_1|, \dots, |x_{n+1}|)} (x_1, \dots, x_{n+1})$$

$$g : S^n \rightarrow W^n, (y_1, \dots, y_{n+1}) \mapsto \frac{1}{\max(|y_1|, \dots, |y_{n+1}|)} (y_1, \dots, y_{n+1})$$

$f$  und  $g$  sind stetig zueinander.

### Aufgabe 1

- a)  $\mathbb{Q}$  ist abzählbar  $\stackrel{\text{b)}}{\Rightarrow} \{\{x\} \mid x \in \mathbb{Q}\}$  ist die Menge der Zusammenhangskomponenten von  $\mathbb{Q}$ .
- b) Beh:  $(X, d)$  abzählbar  $\Rightarrow$  die Zusammenhangskomponenten von  $X$  sind einelementig.  
Bew: Seien  $x \neq y \in X \Rightarrow l := d(x, y) > 0$   
 $X$  abzählbar  $\Rightarrow l \in M$ , wobei  $M$  abzählbare Teilmenge von  $\mathbb{R}$   
 $\Rightarrow \exists r \in [0, l] : \{z \in X \mid d(x, z) = r\} = \emptyset$   
Setze  $V_1 = \{z \in X \mid d(x, z) \leq r\}$ ,  $V_2 = \{z \in X \mid d(x, z) \geq r\}$   
Gäbe es eine zusammenhängende Teilmenge  $A$  von  $X$  mit  $x, y \in A$ , so wäre  
 $A = \underbrace{(V_1 \cap A)}_{\neq \emptyset} \cup \underbrace{(V_2 \cap A)}_{\neq \emptyset} \not\hookrightarrow$  zu  $A$  zusammenhängend.

### Aufgabe 3

Seien jetzt aber  $A \subseteq B \subseteq A$  mit  $A$  zusammenhängend und  $U, V$  disjunkte offene Teilmengen mit  $B = U \cup V$

$$\Rightarrow \underbrace{(U \cap A)}_{=: \tilde{U}} \cup \underbrace{(V \cap A)}_{=: \tilde{V}} = (U \cup V) \cap A = A$$

$\tilde{U}, \tilde{V}$  sind disjunkt (wegen  $\tilde{U} \cap \tilde{V} \subseteq U \cap V = \emptyset$ )

$A$  zusammenhängend  $\Rightarrow \tilde{U} = \emptyset$  oder  $\tilde{V} = \emptyset$ . O.B.d.A  $\tilde{U} = \emptyset \Rightarrow A \subseteq V$

$\Rightarrow U \subseteq B \subseteq \bar{A} \subseteq \bar{V} \Rightarrow U = U \cap \bar{V} = \emptyset \Rightarrow B$  ist zusammenhängend.

### Aufgabe 4

Beh.  $X$  top.,  $A \subseteq X, Y$  Hausdorffraum,  $f : A \rightarrow Y$  stetige Abbildung.

$\Rightarrow$  kann man  $f$  fortsetzen zu einer stetigen Abb.  $g : \bar{A} \rightarrow Y$ , so ist  $g$  eindeutig.

Bew: Seien  $g_1 : \bar{A} \rightarrow Y, g_2 : \bar{A} \rightarrow Y$  stetige Fortsetzungen von  $f$ .

Ann:  $g_1 \neq g_2 \Rightarrow x \in \bar{A} : g_1(x) \neq g_2(x)$ . Es muss gelten:  $x \notin A$ . da  $\forall x \in A : g_1(x) = f(x) = g_2(x)$ .

Also:  $x \in \bar{A} \setminus A$ .

$Y$  Hausdorffraum,  $g_1(x) \neq g_2(x) \Rightarrow \exists$  offene disj. Teilmengen  $V_1, V_2 \subseteq Y$  mit  $g_1(x) \in V_1, g_2(x) \in V_2$ .

$g_1$  ist stetig  $\Rightarrow \exists$  offene Umg.  $U_1$  von  $x$  mit  $g_1(U_1) \subseteq V_1$

$g_2$  ist stetig  $\Rightarrow \exists$  offene Umg.  $U_2$  von  $x$  mit  $g_2(U_2) \subseteq V_2$

$U_1, U_2$  sind offene Umgebungen von  $x \Rightarrow U_1 \cap U_2$  ist offene Umg. von  $x \Rightarrow x \in U_1 \cap U_2$

$x \in \partial A \Rightarrow \exists y \in (U_1 \cap U_2) \cap A$  mit  $x \neq y$  (nach Aufg. 2, Blatt 3)

$\Rightarrow y \in U_1 \Rightarrow g_1(y) \in V_1, y \in U_2 \Rightarrow g_2(y) \in V_2$   
 Da aber  $y \in A$  gilt:  $g_1(y) = f(y) = g_2(y)$   
 $\Rightarrow f(y) \in V_1 \cap V_2 \quad \nrightarrow$  zu  $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ .