

# Kapitel 2.

## Tangentialvektoren und Tangentialräume

Betrachte in der nebenstehenden Abbildung eine differenzierbare Kurve  $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S^2$  mit  $c(0) = p$ . Dann gilt:

$$0 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle c(t), c(t) \rangle = 2 \langle \dot{c}(0), c(0) \rangle = 2 \langle \dot{c}(0), p \rangle \Rightarrow \dot{c}(0) \in p^\perp.$$

Die Kurven heißen **äquivalent**, wenn es eine Karte  $(\varphi, U)$  von  $M$  und  $p$  gibt, so dass gilt

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ c_1) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ c_2)$$

**Lemma 2.1** *Der oben definierte Begriff der Äquivalenz ist unabhängig von der Wahl der Karte.*

**Beweis** Es sei  $(\psi, V)$  eine weitere Karte von  $M$  um  $p$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\psi \circ c_1) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ c_1) = D(\psi \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(p)} \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ c_1) \\ &= D(\psi \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(p)} \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ c_2) = \dots = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\psi \circ c_2). \quad \square \end{aligned}$$

**Definition 2.2 (Geometrische Definition des Tangentialraums)** *Es sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $p \in M$ . Ein (geometrischer) **Tangentialvektor** an  $M$  in  $p$  ist eine Äquivalenzklasse von Kurven  $c$  mit  $c(0) = p$ . Die Menge*

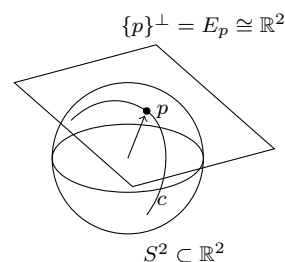
$$T_p^{\text{geo}} M = \{[c] \mid c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \text{ glatt}, c(0) = p\}$$

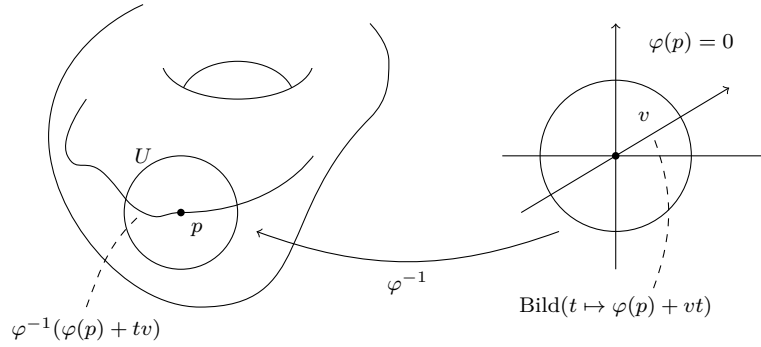
*heißt (geometrischer) **Tangentialraum** an  $M$  in  $p$ .*

**Bemerkung** Mit den Bezeichnungen wie oben ist die folgende Abbildung bijektiv:

$$A: T_p^{\text{geo}} M \rightarrow \mathbb{R}^n \quad [c] \mapsto \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ c).$$

**Beweis** Zu jedem Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  sei  $B(v) = [t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(p) + tv)]$  die Äquivalenzklasse der abgebildeten Kurve auf der Mannigfaltigkeit.





$$AB(v) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ B(v)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ \varphi^{-1}(\varphi(p) + tv)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi(p) + tv) = v.$$

$$BA(\underbrace{[c]}_{\exists c}) = B(v_c) = [t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(p) + tv_c)] \text{ wobei } v_c = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ c).$$

Die Kurven  $c$  und  $t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(p) + tv_c)$  sind äquivalent, also ist  $BA[c] = [c]$  und somit  $A$  bijektiv.  $\square$

Damit erhält  $T_p^{\text{geo}} M$  die Struktur eines reellen Vektorraumes vermöge der folgenden Verknüpfung:

$$\lambda[c_1] + \mu[c_2] = A^{-1}(\lambda A[c_1] + \mu A[c_2]).$$

Dabei gilt  $\lambda[c_1] + \mu[c_2] = [c]$  für  $c(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + t(\lambda v_1 + \mu v_2))$  mit  $v_i = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ c_i)$ .

**Lemma 2.3** Die oben definierte Lineare Struktur ist unabhängig von der Wahl der Karte.

**Beweis** Es sei  $(\psi, V)$  eine Karte von  $M$  um  $p$  und  $A'[c] = \frac{d}{dt} \Big|_t (\psi \circ c)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} AA'^{-1}(v) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ (\psi^{-1}(\psi(p) + tv))) \\ &= D(\varphi \circ \psi^{-1})|_{\psi(p)} \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\psi \circ \psi^{-1}(\varphi(p) + tv)) = D(\varphi \circ \varphi^{-1}) \cdot v. \end{aligned}$$

Also ist  $AA'^{-1}$  linear,

$$\begin{aligned} A'^{-1}(\lambda A'[c_1] + \mu A'[c_2]) &= A^{-1}(AA'^{-1}(\lambda A'[c_1] + \mu A'[c_2])) \\ &= A^{-1}(\lambda AA'^{-1}[c_1] + \mu AA'^{-1}[c_2]) \\ &= A^{-1}(\lambda A[c_1] + \mu A[c_2]). \end{aligned}$$

$\square$

**Motivation: Richtungsableitungen im  $\mathbb{R}^n$**

**Bemerkung** Für  $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^n$  ist die **Richtungsableitung** wie folgt definiert:

$$\partial_v f(x) = Df(x) \cdot v = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(x + tv).$$

Diese erfüllt die Leibniz-Regel:

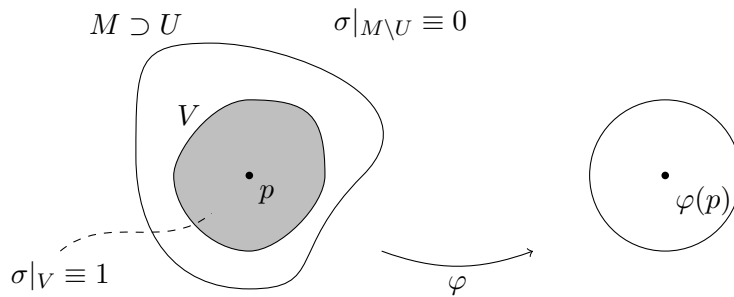
$$\partial_v(fg)(x) = \partial_v f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \partial_v g(x).$$

**Definition 2.4 (Algebraische Definition des Tangentialraumes)** Es sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $p \in M$ . Ein (algebraischer) **Tangentialvektor** an  $M$  in  $p$  ist eine Lineare Abbildung  $X_p: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ , welche die Leibniz-Regel erfüllt:

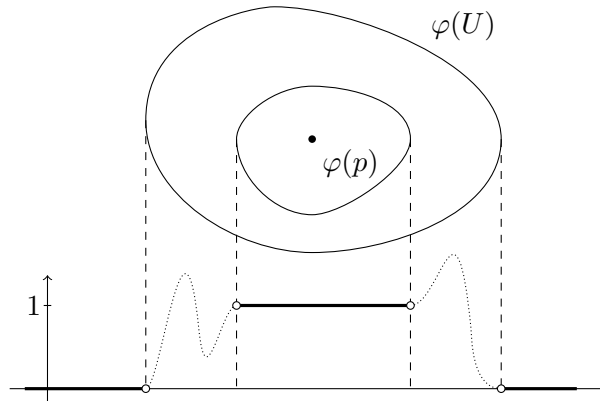
$$X_p(fg) = X_p(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot X_p(g).$$

Die algebraischen Tangentialvektoren bilden einen reellen Vektorraum  $T_p^{\text{alg}} M$ , den Tangentialraum an  $M$  in  $p$ .

**Lemma 2.5** Es sei  $U$  eine Umgebung von  $p \in M$ . Dann existiert eine Umgebung  $V \subset U$  von  $p$  und eine glatte reellwertige Funktion  $\sigma \in C^\infty(M)$  mit den Eigenschaften  $\sigma|_V = 1$  und  $\text{supp}(\sigma) \subset U$ .



**Beweis** Man kann ohne Einschränkung annehmen, dass  $U$  das Kartengebiet einer Karte  $\varphi$  von  $M$  um  $p$  ist und  $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$ . Es sei nun  $\varepsilon > 0$  so, dass  $\overline{B}_\varepsilon(0) \subset \varphi(U)$  gilt.



Ist dann  $\eta$  eine glatte Funktion auf  $\mathbb{R}$  mit  $\eta \equiv 1$  auf  $\left[-\frac{\varepsilon^2}{2}, \frac{\varepsilon^2}{2}\right]$  und  $\eta \equiv 0$  auf  $\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon^2, \varepsilon^2)$ , so hat für  $U_1 = \varphi^{-1}(B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0))$  die Funktion

$$\sigma(q) = \begin{cases} \eta(\|\varphi(q)\|^2) & \text{für } q \in U_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

die gewünschten Eigenschaften. □

**Lemma 2.6** Für alle  $X_p \in T_p^{\text{alg}} M$  gilt:

- (i)  $X_p(f) = 0$  falls  $f$  in einer Umgebung von  $p$  konstant ist.
- (ii)  $X_p(f) = X_p(g)$  falls  $f$  und  $g$  auf einer Umgebung übereinstimmen.

**Beweis** (ii) Es sei  $U$  eine Umgebung von  $p$  mit  $f|_U = g|_U$ . Ist dann  $\sigma$  wie in Lemma 2.5, so gilt  $\sigma f = \sigma g$  und aus

$$X_p(\sigma)f(p) + \sigma(p)X_p(f) = X_p(\sigma f) = X_p(\sigma g) = X_p(\sigma)g(p) + \sigma(p)X_p(g)$$

folgt  $X_p(f) = X_p(g)$ .

(i) Wegen der  $\mathbb{R}$ -Linearität und (ii) genügt es  $f \equiv 1$  zu betrachten. Es gilt

$$X_p(1) = X_p(1 \cdot 1) = X_p(1) \cdot 1 + 1 \cdot X_p(1) = 2 \cdot X_p(1),$$

$$\text{also } X_p(1) = 0.$$

□

**Bemerkung** Also gilt für  $f \in C^\infty(M)$  und  $g \in C^\infty(U)$  direkt:

$$\sigma g = \begin{cases} \sigma g|_U & \sigma g \in C^\infty(M) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aus  $\sigma g \in C^\infty(M)$  folgt  $X_p(g) = X_p(\sigma g)$ . Für eine Karte  $\varphi: U \rightarrow V$  von  $M$  und  $p$  seien algebraische Tangentialvektoren definiert:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \in T_p^{\text{alg}} M \quad \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p (f) = \partial_i(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) = D(f \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(p)} e_i.$$

**Satz 2.7** Die Vektoren  $\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p$  bilden eine Basis von  $T_p^{\text{alg}} M$ .

**Lemma 2.8** Es sei  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  und  $g \in C^\infty(B_\varrho(x_0))$ . Dann existieren glatte Funktionen  $h_i \in C^\infty(B_\varrho(x_0))$  mit  $h_i(x_0) = \partial_i g(x_0)$  und

$$g(x) = g(x_0) + \sum_{i=1}^n (x^i - x_0^i) h_i(x).$$

**Beweis (Beweis des Satzes)** Die  $j$ -te Komponente  $\varphi^j$  der Karte ist glatt und es gilt:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p (\varphi^j) = \partial_i(\varphi^j \circ \varphi^i)(\varphi(p)) = \partial_i x^j(\varphi(p)) = \delta_i^j.$$

Damit sind die Vektoren linear unabhängig.

Es sei  $X_p \in T_p^{\text{alg}} M$  und  $f \in C^\infty(M)$ . Für  $x_0 = \varphi(p) \in \mathbb{R}^n$ ,  $B_\varrho(x_0) \subset \varphi(U)$  und für  $g = f \circ \varphi^{-1}|_{B_\varrho(x_0)}$  gilt mit den Bezeichnungen wie im letzten Lemma:

$$\begin{aligned} X_p(f) &= X_p(g \circ \varphi) = X_p(g(\varphi(p))) + \sum (\varphi^i - \varphi(p)^i)(h_i \circ \varphi) \\ &= \underbrace{X_p(g(\varphi(p)))}_{=0} + \sum X_p((\varphi^i - \varphi(p)^i)(h_i \circ \varphi)) \\ &= \sum X_p(\varphi^i)(h_i \circ \varphi)(p) - X_p(\varphi(p)^i)(h_i \circ \varphi)(p) + \sum (\varphi^i - \varphi(p)^i)(p) X_p(h_i \circ \varphi) \\ &= \sum_{i=1}^n X_p(\varphi^i) \underbrace{(h_i \circ \varphi)(p)}_{\substack{=h_i(\varphi(p))=h_i(x_0)=\partial_i g(x_0) \\ =\partial_i(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))=\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p (f)}} \\ &= \sum_{i=1}^n X_p(\varphi^i) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p (f). \end{aligned}$$

□

**Bemerkung** Ist  $X_p = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ , so gilt  $\xi^i = X_p(\varphi^i)$ .

**Beweis (Beweis des Lemmas)** Es gilt:

$$g(x) - g(x_0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} g(tx + (1-t)x_0) dt = \sum_{i=1}^n (x^i - x_0^i) \underbrace{\int_0^1 \partial_i g(tx + (1-t)x_0) dt}_{=: h_i(x)} \square$$

**Satz 2.9 (Äquivalenz der Tangentialraumbegriffe)** Die Abbildung

$$J_p: T_p^{geo} M \rightarrow T_p^{alg} M \quad J_p[c](f) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ c)$$

ist ein linearer *Isomorphismus* „ $c(0)(f)$ “.

**Beweis** Wegen

$$\begin{aligned} J_p[c](f) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ c) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ c) \\ &= D(f \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(p)} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ c) = D(f \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(p)} A[c] \end{aligned}$$

ist  $J_p = D(\cdot) \circ A$  linear.

Ist  $[c] \in \text{Kern } J_p$ , so folgt aus  $0 = J_p[c](\varphi^i) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi^i \circ c)$ , dass  $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ c) = 0$  gilt, also  $[c] = 0$ . Damit ist  $J_p$  injektiv, also ein Isomorphismus.  $\square$

**Bemerkung** 1) Ist  $X_p = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ , so gilt  $X_p = \dot{c}(0)$  für  $c(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + t\xi)$ .

2) Für jede glatte Kurve  $c$  durch  $p$  ist  $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ c)$  der Koeffizientenvektor von  $\dot{c}(0)$  in der Basis  $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ .

**Satz 2.10 (Transformationsverhalten bei Kartenwechsel)** Es seien  $\varphi$  und  $\psi$  Karten in  $M$  um  $p$  und es bezeichnen  $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$  und  $\frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_p$  die damit assoziierten Basen von  $T_p M$ . Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \sum_j \partial_i(\psi^j \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p.$$

Es sei  $X_p = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \sum \eta^i \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_p$ . Dann gilt:

$$\eta^j = \sum \partial_i(\psi^j \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \xi^i \quad \text{bzw.} \quad \eta = D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \xi.$$

**Beweis** Es gelte  $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \sum \alpha_i^j \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p$  und nach obiger Bemerkung zum vorletzten Satz gilt:

$$\alpha_i^j = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (\psi^j) = \partial_i(\psi^j \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \quad \square$$

