Definitionen

Dichte
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$

$P([a,b]) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Ereignis
$A\subseteq\Omega$ bzw. $A\in\mathfrak{A}$.

Elementarereignis: $\{\omega\},\omega\in\Omega$

Ergebnis
$\omega\in\Omega$

Erwartungstreue
$$\forall\theta\in\Theta: E_\theta(T)=\theta$$

Erwartungswert
(Ex. falls mit $|\cdot|<\infty$)

$$E(X) := \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\cdot P(\{\omega\}) = \sum_{x\in\mathbb{R}:P(X=x)>0} x\cdot P(X=x)$$

$$E(X):=E(X_+)-E(X_-) = \int_{\mathbb{R}} x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x$$

bedingter Erwartungswert:

$$E(X|Y=y)=\sum xP(X=x|Y=y)$$

bedingte Erwartung:

$$E(X|Y):\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}, y\mapsto E(X|Y=y)$$

iterierter:

$$E(X)=E(E(X|Y))$$

Faltung
$X(\Omega)+Y(\Omega)$ F. der Verteilungen X,Y. ($P^{X+Y}=P^X * P^Y$)

Fehler 1./2. Art
1. Art: Wahre Hypothese abgelehnt.

2. Art: Falsche Hypothese nicht verworfen.

Gütefunktion
$$g:\Theta\to[0,1],\theta\mapsto P_\theta(X\in\mathcal{K})$$
$$g_\varphi:\Theta\to[0,1],\theta\mapsto E_\theta(\varphi)$$

Häufigkeit
Sei $(x_1,\dots,x_n)\in\{a_1,\dots,a_s\}^n$ Stichprobe.

absolute:

$$h_j=\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{x_i=a_j\}$$

relative:

$$\frac{h_j}{n}$$

Kombination
$$Kom_k^n(mW)=\{(a_1,\dots,a_k)\in M^k : a_1\le\dots\le a_k\}$$
$$Kom_k^n(oW)=\{(a_1,\dots,a_k)\in M^k : a_1<\dots<a_k\}$$
$$|Kom_k^n(mW)|=\binom{n+k-1}{k}$$
$$|Kom_k^n(oW)|=\binom{n}{k}$$

Konfidenzber./Bereichssch.
$(\mathcal{X},(P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ stat. Modell.

$$\mathcal{C}:\mathcal{X}\to\mathcal{P}(\Theta)$$

heißt Konfidenzbereich oder Bereichsschätzer.

Konfidenzniveau: $\mathcal{C}$ Konfidenzber. zum Niveau $1-\alpha$:

$$P_\theta(\mathcal{A}(\theta))\ge 1-\alpha$$

Konsistenz
(T_n) *Schätzfolge:* $\forall\varepsilon>0,\forall\theta\in\Theta:$

$$\lim_{n\to\infty}P_\theta(|T_n-\theta|\ge\varepsilon)=0$$

φ_n *Testfolge:* $\forall\theta\in\Theta_1$:

$$\lim_{n\to\infty} g_{\varphi_n}(\theta)=1$$

Konvergenz nach W-keit
$$Y_n\xrightarrow{P}Y \iff \forall\varepsilon>0: P(|Y_n-Y|\ge\varepsilon)\overset{n\to\infty}{\to}0$$

Koppelung
Das zu einem W-Maß P_1 und einer Übergangs-W-keit P_{12} gehörende W-Maß

$$P=P_1\otimes P_{12}$$

auf $\Omega_1\times\Omega_2$ heißt Koppelung von P_1 und P_{12}.

Korrelationskoeffizient
$$\rho(X,Y)=\frac{C(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

empirischer:

$$r_{xy} := \frac{\frac1n\sum(x_j-\overline{x})(y_j-\overline{y})}{\sqrt{\frac1n\sum(x_j-\overline{x})^2\cdot\frac1n\sum(y_j-\overline{y})^2}}$$

Kovarianz
$$C(X,Y)=E((X-EX)(Y-EY)) = E(XY)-E(X)E(Y)$$

kritischer Bereich
$\mathcal{K}\subseteq\mathcal{X}$ mit:

$$x\in\mathcal{K}\implies d_1$$
$$x\in\mathcal{X}\setminus\mathcal{K}\implies d_0$$

Lagemaß
$l:\{a_1,\dots,a_s\}^n\to\mathbb{R}$ ist ein Lagemaß, falls gilt:

$l(x_1+a,\dots,x_n+a)=l(x_1,\dots,x_n)+a$

Likelihood-Funktion
$$L_x:\Theta\to[0,1],\theta\mapsto P_\theta(X=x)$$

Marginalverteilung
P W-Maß auf $\Omega_1\times\dots\times\Omega_n$. j-te Marginalverteilung:

$$P_j(B):=P(\Omega'\times B\times\Omega'')$$

mit

$$\Omega':=\Omega_1\times\dots\times\Omega_{j-1}$$
$$\Omega':=\Omega_{j+1}\times\dots\times\Omega_n$$

(Analog für Zufallsvektoren.)

Maximum-Likelihood-Schätzung
$\hat\theta:\mathcal{X}\to\Theta$ ist ML-Schätzwert, falls $\forall x\in\mathcal{X}$:

$$L_x(\hat\theta(x))=\sup\{L_x(\theta):\theta\in\Theta\}$$

Median
Sei F^{-1} die Quantil-Funktion, dann heißt $F^{-1}(\frac12)$ der Median von F bzw. von X.

empirischer: Sei $(x_{(1)},\dots,x_{(n)})$ geordnete Stichprobe.

$$x_{\frac12}:=\begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})}, n=2k+1\\ \frac12(x_{(\frac n2)}+x_{(\frac n2+1)}), n=2k\end{cases}$$

Mittel
arithmetisches:

$$\overline{x}_n:=\frac1n\sum_{j=1}^n x_j$$

getrimmtes/gestutztes:

$$x_{t,\alpha}:=\frac{1}{n-2k}\sum_{j=k+1}^{n-k}x_{(j)}$$

mit $0<\alpha<\frac12$ und $k:=\lfloor n\alpha\rfloor$ heißt α-getrimmtes Mittel.

MQA
$$MQA_T(\theta)=E_\theta((T-\theta)^2) = \sum_{x\in\mathcal{X}}(T(x)-\theta)^2\cdot P_\theta(X=x)$$

heißt mittlere quadratische Abweichung vom T an der Stelle θ.

Moment
k-tes:

$$E(X^k)=\int_{\mathbb{R}} x^k\cdot f(x)\,\mathrm{d}x$$

k-tes absolutes:

$$E(|X|^k)=\int_{\mathbb{R}} |x|^k\cdot f(x)\,\mathrm{d}x$$

k-tes zentrales:

$$E((X-EX)^k)=\int_{\mathbb{R}}(x-EX)^k\cdot f(x)\,\mathrm{d}x$$

Permutation
$$Per_k^n(mW)=M^k$$
$$Per_k^n(oW)=\{(a_1,\dots,a_k)\in M^k : a_i\ne a_j (i\ne j)\}$$
$$|Per_k^n(mW)|=n^k$$
$$|Per_k^n(oW)|=n\cdots(n-k+1)=n^{\underline{k}}$$

Quantil
empirisches: Ist $0<p<1$, so heißt

$$x_p:=\begin{cases}x_{(\lfloor np+1\rfloor)}, np\notin\mathbb{N}\\ \frac12(x_{(np)}+x_{(np+1)}), np\in\mathbb{N}\end{cases}$$

empirisches p-Quantil.

Quantil-Funktion
X Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F.

$$F^{-1}:(0,1)\to\mathbb{R}$$
$$p\mapsto\inf\{x\in\mathbb{R}:F(x)\ge p\}$$

heißt Quantil-Funktion von X bzw. F.

Quartil
Sei F^{-1} die Quantil-Funktion, dann heißt $F^{-1}(\frac14)$ das untere und $F^{-1}(\frac34)$ das obere Quartil von F bzw. von X.

empirisch: Das $\frac14$-Quantil heißt unteres und das $\frac34$-Quantil oberes Quartil.

Quartilsabstand
$$x_{\frac34}-x_{\frac14}$$

Schätzer
$(\mathcal{X},(P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ stat. Modell.

$$T:\mathcal{X}\to\tilde\Theta$$

heißt Schätzer für θ.

Schätzfolge
$\mathcal{X}_n\subseteq\mathbb{R}^n$ Stichprobenraum für $X_{(n)}=(X_1,\dots,X_n)$ und $T_n:\mathcal{X}_n\to\tilde\Theta$ Schätzer $\forall n\in\mathbb{N}$, dann heißt $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Schätzfolge.

Schätzwert
$T(x)$ für $x\in\mathcal{X}$.

Spannweite
$$x_{(n)}-x_{(1)}$$

Standardabweichung
$$\sigma_X:=\sqrt{V(X)}$$

empirische:

$$s:=\sqrt{s^2}$$

Standardisierung
$$X^*:=\frac{X-EX}{\sqrt{V(X)}}$$

Statistisches Modell
$(\mathcal{X},(P_\theta)_{\theta\in\Theta})$, wobei $\mathcal{X}$ der Stichprobenraum einer Zufallvariable X, $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$ Bild einer bijektiven Abbildung des Parameterraum Θ auf eine Klasse von W-Maßen $\mathcal{P}$ ist.

Streuungsmaß
$\sigma:\{a_1,\dots,a_s\}^n\to\mathbb{R}$ heißt ein Streuungsmaß, falls gilt:

$\sigma(x_1+a,\dots,x_n+a)=\sigma(x_1,\dots,x_n)$

Test
nichtrandomisiert:

$$\varphi:\mathcal{X}\to\{0,1\},x\mapsto\mathbb{1}_{\mathcal{K}}$$

randomisiert:

$$\varphi:\mathcal{X}\to[0,1]$$

Testfolge
$\mathcal{X}_n$ Stichprobenraum für $X_{(n)}=(X_1,\dots,X_n)$ und $\varphi_n:\mathcal{X}_n\to[0,1]$ Test $\forall n\in\mathbb{N}$, dann heißt $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Testfolge.

Übergangswahrscheinlichkeit
$$P_{12}:\Omega_1\times\mathcal{P}(\Omega_2)\to[0,1]$$

heißt Übergangs-W-keit, falls $\forall\omega_1\in\Omega_1$

$$P_{12}(\omega_1,\cdot):\mathcal{P}(\Omega_2)\to[0,1]$$

ein W-Maß ist.

Unabhängigkeit
Ereignisse: $A_1,\dots,A_n$ unanbhängig, falls $\forall T\subseteq 1,\dots,n$

$$P(\bigcap_{j\in T}A_j)=\prod_{j\in T}P(A_j)$$

Zufallsvariablen diskret:

$X_1,\dots,X_n$ unabhängig, falls $\forall A_j\subseteq\Omega_j$ bzw. $\forall x_j\in\Omega_j$ gilt:

$$P(X_1\in A_1,\dots,X_n\in A_n)=\prod_{j=1}^n P(X_j\in A_j)$$
$$P(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n)=\prod_{j=1}^n P(X_j=x_j)$$

Zufallsvariablen indiskret:

$X_1,\dots,X_n$ unabhängig, falls gilt:

$$F(x)=\prod_{j=1}^n F(x_j)$$
$$f(x)=\prod_{j=1}^n f(x_j)$$

Varianz
(Ex. falls $E(X^2)$ existiert.)

$$V(X)=E(X-EX)^2=E(X^2)-(EX)^2 = \int_{\mathbb{R}}(x-EX)^2\cdot f(x)\,\mathrm{d}x$$

empirische:

$$s^2:=\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^n(x_j-\overline{x}_n)^2$$

Verteilung
$X:\Omega\to\tilde\Omega$ Zufallsvariable.

$P^X:\mathcal{P}(\tilde\Omega)\to[0,1], A'\mapsto P(X^{-1}(A'))$

heißt Verteilung von X.

Verteilungsfunktion
$P:\mathfrak{B}_1\to[0,1]$ W-Maß.

$$F:\mathbb{R}\to[0,1],x\mapsto P((-\infty,x])$$

heißt Verteilungsfunktion von P.

Verzerrung
Verzerrung eines Schätzers T an der Stelle θ:

$$b_T(\theta)=E_\theta(T)-\theta$$

Wahrscheinlichkeit
bedingte:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

W-Funktion
(Ω,P) W-Raum,

$$p:\Omega\to\mathbb{R},\omega\mapsto P(\{\omega\})$$

ist W-Funktion zum W-Maß P.

W-Maß
$P:\mathcal{P}(\Omega)\to[0,1]$ heißt W-Maß auf Ω, falls gilt

1. $P(A)\ge0$
2. $P(\Omega)=1$
3. $P(\sum_{j\in\mathbb{N}}A_j)=\sum_{j\in\mathbb{N}}P(A_j)$

W-Raum
(Ω,P) bzw. $(\Omega,\mathcal{A},P)$ mit $\mathcal{A}$ σ-Algebra auf Ω, P W-Maß auf Ω bzw. $\mathcal{A}$.

Laplace'scher: falls $P(A):=\frac{|A|}{|\Omega|}$

Zufallsvariable
(Ω,P) bzw. $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ W-Raum, $\mathfrak{A}'$ σ-Algebra auf Ω'.

$$X:\Omega\to\Omega'$$

heißt Ω'-wertige Zufallsvariable, falls X $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-mb.

Zufallsvektor
X heißt Zufallsvektor, falls es eine $\mathbb{R}^d$-wertige Zufallsvariable ist.

Sätze und Formeln

Bayes-Formel
Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zerlegung von Ω. Dann gilt:

$$P(A_k|B)=\frac{P(A_k)\cdot P(B|A_k)}{\sum_{j=1}^\infty P(A_j)\cdot P(B|A_j)}$$

Binomialkoeffizient
$$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$$

Binomischer Lehrsatz
$$(x+y)^k=\sum_{j=0}^k\binom kj\cdot x^j\cdot y^{k-j}$$

Blockungslemma
Seien $A_1,\dots,A_n$ unabhängig, $1\le k\le n-1$, $C\in\sigma(A_1,\dots,A_k)$, $D\in\sigma(A_k+1,\dots,A_n)$. Dann sind auch C und D unabhängig.

Cauchy-Schwarz
$$C(X,Y)^2\le V(X)\cdot V(Y)$$

Erwartungswert
$$E(aX)=a\cdot EX$$
$$E(X+Y)=EX+EY$$
$$|EX|\le E|X|$$

Sind X,Y unkorreliert gilt außerdem:

$$E(X\cdot Y)=EX\cdot EY$$

Faltungsformel

für Dichten:

$$f_{X+Y}(x) = \int_{\mathbb{R}} f_X(t)\cdot f_Y(x-t)\ \mathrm{d}t$$

Gesetz großer Zahlen

Seien $X_1,\dots,X_n$ unabhängige Zufallvariablen mit existierender Varianz. Dann gilt $\forall\varepsilon>0$:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j - EX_1\right|\ge\varepsilon\right)\overset{n\to\infty}{\to}0$$

Gesetz seltener Ereignisse

Ist $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[0,1]$ mit $\lim_{n\to\infty} np_n=\lambda$ für ein $0<\lambda<\infty$, so gilt:

$$\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k}\overset{n\to\infty}{\to}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Kovarianz

$C(X,Y)=C(Y,X)$

$C(X,X)=V(X)$

$C(aX+b,cY+d)=ac\cdot C(X,Y)$

$\rho(aX+b,cY+d)=sgn(ac)\cdot\rho(X,Y)$

X,Y sind unkorreliert,genau dann wenn:

$$C(X,Y)=0$$

kleinste Quadrate

$(a^*,b^*) := \arg\min_{a,b\in\mathbb{R}} E(Y-a-bX)^2$

ist bestimmt durch

$a^*=EY-b^*EX$

$$b^*=\begin{cases}0 & ,V(X)V(Y)=0\\ \frac{C(X,Y)}{V(X)} & ,V(X)V(Y)>0\end{cases}$$

Methoden zur Dichtebest.

Methode 1:

X reelle Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F, stückweise stetiger Dichte f. Weiter sei $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar und streng monoton wachsend, wobei $T'(x)\neq0$. Dann besitzt $Y=T(X)$ die Verteilungsfunktion:

$$G(y)=F(T^{-1}(y)) = \int_{-\infty}^{T^{-1}(y)} f(x)\ \mathrm{d}x$$

(bzw. $1-G(y)$ falls T monoton fallend), sowie die Dichte:

$$g(y)=\frac{f(T^{-1}(y))}{|T'(T^{-1}(y))|}$$

Methode 2:

$X=(X_1,\dots,X_n)$ k-dimensionaler Zufallsvektor mit positiver Dichte f. Weiter sei $T:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ stetig differenzierbar und injektiv, wobei $T'(x)\neq0$. Dann besitzt $Y=T(X)$ die Dichte:

$$g(y)=\frac{f(T^{-1}(y))}{|\det T'(T^{-1}(y))|}$$

Methode 3:

Ist $T:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^s$ mit $s<k$, so lässt sich T häufig zu einer Abbildung $T':\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ ergänzen, die die Voraussetzungen von Methode 2 erfüllt. Die Gewünschte Dichte ergibt sich dann aus Marginalverteilungsbildung.

Markow-Ungleichung

Sei $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ monoton wachsend. Dann gilt für jede Zufallsvariable Y mit $E_\varphi(|Y|)<\infty$ und jedes $\varepsilon>0$ mit $\varphi(\varepsilon)>0$:

$$P(|Y|\ge\varepsilon)\le\frac{1}{\varphi(\varepsilon)}E_\varphi(|Y|)$$

Quantilsfunktion

$$F(x)\ge p \iff x\ge F^{-1}(p)$$

$$F(F^{-1}(p))\ge p$$

$$F(F^{-1}(p))=p\iff p\in F(\mathbb{R})$$

Außerdem ist F^{-1} monoton wachsend und linksseitig stetig.

Siebformel/Poincare-Sylvester

Für $1\le\nu\le n$ sei

$$S_\nu := \sum_{1\le i_1<\dots<i_\nu\le n} P(A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_\nu})$$

(Summation über ν-elementige Teilmengen.) Dann gilt:

$$P\Big(\bigcup_{j=1}^n A_j\Big)=\sum_{\nu=1}^n(-1)^{\nu-1}S_\nu$$

Steiner-Formel

$$\forall a\in\mathbb{R}: V(X)=E(X-a)^2-(EX-a)^2$$

Stetigkeit

Es gilt:

$$P\Big(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\Big)=\lim_{j\to\infty}P(A_j)$$

für jede aufsteigende Folge $A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots$. Ebenso gilt:

$$P\Big(\bigcap_{j=1}^\infty A_j\Big)=\lim_{j\to\infty}P(A_j)$$

für jede absteigende Folge $A_1\supseteq A_2\supseteq\cdots$.

Subadditivität

$$P\Big(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\Big)\le\sum_{j=1}^\infty P(A_j)$$

totale W-keit

Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zerlegung von Ω. Dann gilt:

$$P(B)=\sum_{j=1}^\infty P(A_j)\cdot P(B|A_j)$$

Transformationsformel

$$E(g(Z))=\sum_{z\in\mathbb{R}^k} g(z)\cdot P(Z=z) = \int_{\mathbb{R}^k} g(x)\ \mathrm{d}x$$

Tschebyschow-Ungleichung

$$P(|X-EX|\ge\varepsilon)\le\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot V(X)$$

Varianz

$V(X)=\min_{a\in\mathbb{R}}E(X-a)^2$

$V(a\cdot X+b)=a^2\cdot V(X)$

$V(X)\ge0$

$V(X)=0\iff\exists a\in\mathbb{R}:P(X=a)=1$

$V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2C(X,Y)$

$V(X_1+\dots+X_n)$

$$=\sum_{j=1}^n V(X_j)+2\sum_{1\le i<j\le n}C(X_i,X_j)$$

(siehe auch Steiner-Formel)

ZGWS

Sei $X_n\sim Bin(n,p_n)$ mit $\lim_{n\to\infty} np_n(1-p_n)=\infty$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty}P\left(a\le\frac{X_n-np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}\le b\right)=\Phi(b)-\Phi(a)$$

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{X_n-np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}\le b\right)=\Phi(b)$$

Verteilungen

Binomialverteilung

$X\sim Bin(n,p)$

$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$

$F_X(x)=\sum_{k\le x}\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$

$EX=np$

$V(X)=np(1-p)$

Ist $Y\sim Bin(m,p)$ und X,Y unabhängig, so gilt $X+Y\sim Bin(n+m,p)$.

Exponentialverteilung

$X\sim Exp(\lambda)$

$F_X(x)=(1-e^{-\lambda x})\cdot\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$

$f_X(x)=\lambda\cdot e^{-\lambda x}\cdot\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$

$EX=\frac{1}{\lambda}$

$V(X)=\frac{1}{\lambda^2}$

geometrische Verteilung

$X\sim G(p)=Nb(1,p)$

Gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass vor dem ersten Treffer in einem Bernoullischen Versuchsschema mit Trefferwahrscheinlichkeit p genau k Nieten gezogen werden.

$P(X=k)=p\cdot(1-p)^k$

$F_X(x)=\sum_{k\le x}p\cdot(1-p)^k$

$EX=\frac{1-p}{p}$

$V(X)=\frac{1-p}{p^2}$

Ist $Y\sim G(p)$ und X,Y unabhängig, so gilt $X+Y\sim Nb(2,p)$.

Gleichverteilung

$X\sim U(A)$

diskrete:

Sei $A=\{x_1,\dots,x_n\}$.

$P(X=x_j)=\frac{1}{n}$

$EX=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j$

$V(X)=\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^n x_j^2-\left(\sum_{j=1}^n x_j\right)^2\right)$

indiskrete:

Sei $A\in\mathfrak{B}_1$.

$P(B)=\frac{\lambda_1(A\cap B)}{\lambda_1(A)}$

$F_X(x)=\frac{\lambda_1(A\cap(-\infty,x])}{\lambda_1(A)}$

$f_X(x)=\frac{1}{\lambda_1(A)}\cdot\mathbb{1}_A(x)$

hypergeometrische Verteilung

$X\sim Hyp(n,r,s)$

Gibt die Wahrscheinlichkeit an, beim n-maligen Ziehen ohne Zurücklegen k der r roten von insgesamt $r+s$ Kugeln zu ziehen.

$P(X=k)=\frac{\binom{r}{k}\cdot\binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}}$

$EX=\frac{rn}{r+s}$

$V(X)=$

$$\left(\frac{rs}{r+s}\right)\left(1-\frac{r}{r+s}\right)\left(\frac{r+s-n}{r+s-1}\right)$$

Multinomialverteilung

$X=(X_1,\dots,X_s)\sim Mult(n,p_1,\dots,p_s)$

$P(X=x)=\binom{k}{x_1,\dots,x_s}\cdot\prod_{j=1}^s p_j^{x_j}$

$X_k\sim Bin(n,p_k)$

$\sum_{j=1}^k X_{i_j}\sim Bin(n,\sum_{j=1}^k p_{i_j})$

$C(X_i,X_j)=-np_ip_j$

$\rho(X_i,X_j)=-\sqrt{\frac{p_ip_j}{(1-p_i)(1-p_j)}}$

negative Binomialverteilung

$X\sim Nb(r,p)$

Gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass vor dem r-ten Treffer in einem Bernoullischen Versuchsschema mit Trefferwahrscheinlichkeit p genau k Nieten gezogen werden.

$P(X=k)=\binom{k+r-1}{k}\cdot p^r\cdot(1-p)^k$

$F_X(x)=\sum_{k\le x}\binom{k+r-1}{k}\cdot p^r\cdot(1-p)^k$

$EX=r\cdot\frac{1-p}{p}$

$V(X)=r\cdot\frac{1-p}{p^2}$

Ist $Y\sim Nb(s,p)$ und X,Y unanhängig, so gilt $X+Y\sim Nb(r+s,p)$.

Normalverteilung

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$F_X(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$\Phi(x)=\int_{-\infty}^x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\ \mathrm{d}y$

$\Phi(x)=1-\Phi(-x)$

$\Phi^{-1}(x)=-\Phi^{-1}(1-x)$

$f_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$

$EX=\mu$

$V(X)=\sigma^2$

Ist $Y\sim N(\tilde{\mu},\tilde{\sigma}^2)$ und X,Y unanhängig, so gilt $X+Y\sim N(\mu+\tilde{\mu},\sigma^2+\tilde{\sigma}^2)$.

mehrdimensionale:

$X\sim N_k(\mu,\Sigma)$

Dabei seien $Y_1,\dots,Y_k\sim N(0,1)$ unabhängig, $A\in\mathbb{R}^{k\times k}$ regulär, $\Sigma=A\cdot A^\perp$, $\mu\in\mathbb{R}^k$ und $X:=A\cdot Y+\mu$. Dann gilt:

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k\cdot\det\Sigma}}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^\perp\Sigma^{-1}(x-\mu)\right)$$

Poisson-Verteilung

$X\sim Po(\lambda)$

$P(X=k)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$

$F_X(x)=\sum_{k\le x}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$

$EX=\lambda$

$V(X)=\lambda$

Ist $Y\sim Po(\mu)$ und X,Y unabhängig, so gilt $X+Y\sim Po(\lambda+\mu)$. In diesem Fall ist

$$P^{X|X+Y=n}=Bin\left(n,\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$$