

1 Maß-Integral und Erwartungswert

Stochastik I: Ein Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) bestehend aus:

- (i) $\Omega \neq \emptyset$ bel. Menge, der Ergebnisraum
- (ii) $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ -Algebra, d.h.
 - $\Omega \in \mathcal{A}$
 - $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$
 - $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$
- (iii) $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, d.h.
 - $P(\Omega) = 1$
 - $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, paarweise disjunkt $\implies P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$
(σ -Additivität)

Statt das Wahrscheinlichkeitsmaßes P betrachten wir jetzt eine allgemeine Funktion $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, die beliebige positive Werte annehmen kann.

Definition

Sei (Ω, \mathcal{A}) ein messbarer Raum. Eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ heißt **Maß** auf (Ω, \mathcal{A}) , wenn $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ für alle paarweise disjunkten Ereignisse A_1, A_2, \dots , $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ heißt **Maßraum**.

Bemerkung

Da $\mu(A) = \infty$ möglich, definieren wir: $a + \infty = \infty \forall a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Definition

Sei μ ein Maß auf (Ω, \mathcal{A}) .

1. μ heißt **endlich**, falls $\mu(\Omega) < \infty$,
2. μ heißt **σ -endlich**, falls \exists eine Folge $(A_i), i \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{A}$ mit $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$ und $\mu(A_i) < \infty \forall i \in \mathbb{N}$.

Beispiel 1.1

- a) Sei (Ω, \mathcal{A}) ein messbarer Raum, $\omega \in \Omega$ fest.

$$\delta_{\omega}(A) := \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für $A \in \mathcal{A}$ definiert ein Maß.

δ_{ω} heißt **Einpunktmaß** oder **Dirac-Maß** im Punkt ω . Da $\delta_{\omega}(\Omega) = 1$ ist δ_{ω} sogar ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

- b) $\mu := \sum_{\omega \in \Omega} \delta_\omega$ ist das **abzählende Maß** auf Ω .
 (Falls $|A| < \infty$: $\mu(A) = |A|$ Anzahl der Elemente in A .)
 μ ist endlich $\Leftrightarrow \Omega$ ist endlich,
 μ ist σ -endlich $\Leftrightarrow \Omega$ ist abzählbar.
- c) Sei $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ Borelsche σ -Algebra.

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R}) = \underbrace{\sigma(\{(a, b], -\infty < a < b < \infty\})}_{=: \varepsilon \text{ Erzeuger}} = \sigma(\varepsilon) := \bigcap_{\mathcal{A} \text{ } \sigma\text{-Algebra, } \varepsilon \subset \mathcal{A}} \mathcal{A}$$

Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Durch $\lambda((a, b]) := b - a$ wird auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ ein Maß definiert, das sogenannte **Lebesgue-Maß**. Die Eindeutigkeit von λ folgt aus dem **Eindeutigkeitssatz für Maße**:

Sei $\mathcal{A} = \sigma(\varepsilon)$ und ε durchschnittsstabil (d.h.: $A, B \in \varepsilon \implies A \cap B \in \varepsilon$). Weiter seien μ_1, μ_2 Maße auf \mathcal{A} mit $\mu_1(A) = \mu_2(A) \forall A \in \varepsilon$. \exists eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \varepsilon$ mit $A_n \uparrow \Omega$ und $\mu_1(A_n) = \mu_2(A_n) < \infty \forall n$, so gilt $\mu_1 = \mu_2$.

Eine nichttriviale Aufgabe ist es hier zu zeigen, dass λ auf ganz $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ zu einem Maß fortgesetzt werden kann. (gezeigt von Carathéodory; s. z.B. Henze, Bauer)

Bei $\Omega = \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, ist $\mathfrak{B}(\bar{\mathbb{R}}) := \{B \subset \bar{\mathbb{R}} | B \cap \mathbb{R} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\} = \{B, B \cup \{\infty\}, B \cup \{-\infty\}, B \cup \{\infty, -\infty\} | B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\}$ eine σ -Algebra (analog $\mathfrak{B}((-\infty, \infty))$) und $\bar{\lambda}(B) = \lambda(B) \forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ und $\bar{\lambda}(\{\infty\}) = \bar{\lambda}(\{-\infty\}) = 0$

λ ist nicht endlich, da $\lambda((-\infty, a]) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\lambda((a-n, a-n+1])}_{=1} = \infty$, aber

σ -endlich, da $\bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n] = \mathbb{R}$, $\lambda((-n, n]) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$.

- d) Seien μ_n Maße, $n \in \mathbb{N}$, so ist

$$\mu := \sum_{n=1}^{\infty} b_n \mu_n$$

wieder ein Maß.

Konvention: $a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty, a > 0, 0 \cdot \infty = 0$

Spezialfall: $\mu_n = \delta_{\omega_n} (\omega_n \in \Omega), b \geq 0, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1$

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \delta_{\omega_n}$$

ist dann ein diskretes, auf $\{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ konzentriertes Wahrscheinlichkeitsmaß.

- e) Sei $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wachsend und rechtsseitig stetig (Eine Funktion mit diesen Eigenschaften heißt **maßdefinierende Funktion**. Gilt zusätzlich $\lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = 0$, dann ist G eine Verteilungsfunktion.)

$$\mu_G((a, b]) := G(b) - G(a)$$

für $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ definiert μ_G ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$, das sogenannte **Lebesgue-Stieltjes-Maß** zu G . (Fortsetzungsproblem analog zu c))

Ist G eine Verteilungsfunktion mit $G(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy$ mit

$$f \geq 0 : \int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy = 1,$$

so ist $\mu_G((a, b]) = \int_a^b f(y)dy$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit Dichte f .

Bemerkung

Viele der in Stochastik I für Wahrscheinlichkeitsmaße besprochene Eigenschaften gelten auch für allgemeine Maße μ , z.B. μ ist stetig von unten, d.h.

$$\underbrace{A_n \uparrow}_{A_n \subset A_{n+1}} \text{ mit } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A \implies \mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

Bei der Stetigkeit von oben brauchen wir eine Zusatzbedingung:

$$\underbrace{A_n \downarrow}_{A_n \supset A_{n+1}} \text{ mit } \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A, \underline{\mu(A_n) < \infty} \implies \mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

Beispiel

Lebesgue-Maß: $A_n = (-\infty, -n] \downarrow, \emptyset = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, -n], \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda((-\infty, -n]) = \infty \neq 0 = \lambda(\emptyset)$

Definition

Seien (Ω, \mathcal{A}) und (Ω', \mathcal{A}') zwei meßbare Räume. Eine Abbildung $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ heißt $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ -**messbar**, falls

$$f^{-1}(A') \in \mathcal{A}, \quad \forall A' \in \mathcal{A}'$$

f mit dieser Eigenschaft heißt **Zufallsgröße**. Ist $\Omega' = \mathbb{R}$, dann **Zufallsvariable**.

Im Folgenden sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Ziel ist es, möglichst vielen Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ein Integral bezüglich μ zuzuordnen. Die Konstruktion erfolgt in drei Schritten:

- 1.) Sei $\mathcal{E} := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \geq 0, f \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar}, f(\Omega) \text{ endlich}\}$ die Menge der **Elementarfunktionen** auf Ω .

Ist $f(\Omega) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \alpha_j \geq 0$, so gilt:

$$f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$$

mit $A_j := f^{-1}(\{\alpha_j\})$ und $\Omega = \sum_{j=1}^n A_j$. Eine Darstellung von f mit dieser Eigenschaft heißt „Normaldarstellung“ von f .

Normaldarstellung ist nicht eindeutig.

Definition

Ist f eine Elementarfunktion mit Normaldarstellung $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$, so heißt $\int f d\mu := \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j)$ das **μ -Integral** von f . Schreibweise $\int f d\mu = \mu(f)$.

Lemma 1.1 (Unabhängigkeit des Integrals von der Normaldarstellung)

Für zwei Normaldarstellungen

$$f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{1}_{A_j} = \sum_{i=1}^m \beta_i \mathbf{1}_{B_i}$$

einer Funktion $f \in \mathcal{E}$ gilt:

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j) = \sum_{i=1}^m \beta_i \mu(B_i)$$

Beweis

$$\text{Voraussetzung} \implies \Omega = \sum_{j=1}^n A_j = \sum_{i=1}^m B_i$$

$$\begin{aligned} \implies \mu(A_j) &\stackrel{\sigma\text{-Add.}}{=} \sum_{i=1}^m \mu(A_j \cap B_i) \\ \mu(B_i) &= \sum_{j=1}^n \mu(A_j \cap B_i) \end{aligned}$$

$$\mu(A_j \cap B_i) \neq 0 \implies A_j \cap B_i \neq \emptyset \implies \alpha_j = \beta_i$$

Insgesamt:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j) &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \underbrace{\alpha_j}_{\beta_i} \mu(A_j \cap B_i) \\ &= \sum_{i=1}^m \beta_i \mu(B_i) \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Lemma 1.2 (Eigenschaften des μ -Integrals)

- a) $\int \mathbf{1}_A d\mu = \mu(A)$ für $A \in \mathcal{A}$
- b) $\int (\alpha f) d\mu = \alpha \int f d\mu$ für $f \in \mathcal{E}, \alpha \geq 0$
- c) $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$ für $f, g \in \mathcal{E}$
- d) $f \leq g \implies \int f d\mu \leq \int g d\mu$ für $f, g \in \mathcal{E}$

Beweis

a), b) klar

c) Sei $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$, $g = \sum_{i=1}^m \beta_i \mathbf{1}_{B_i}$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow f &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_j \mathbf{1}_{A_j \cap B_i} \\
 g &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \beta_i \mathbf{1}_{B_i \cap A_j} \\
 \text{also } f + g &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (\alpha_j + \beta_i) \mathbf{1}_{A_j \cap B_i} \\
 \Rightarrow \mu(f + g) &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (\alpha_j + \beta_i) \mu(A_j \cap B_i) \\
 &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \sum_{i=1}^m \mu(A_j \cap B_i) + \sum_{i=1}^m \beta_i \underbrace{\sum_{j=1}^n \mu(A_j \cap B_i)}_{=\mu(B_i)} \\
 &= \mu(f) + \mu(g)
 \end{aligned}$$

d) folgt mit gleicher Darstellung wie in c) ■

Bemerkung

- a) Ist $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{1}_{A_j} \in \mathcal{E}$, aber nicht notwendig eine Normaldarstellung, so folgt aus Lemma 1.2 c) $\int f d\mu = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j)$
- b) Ist (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine Zufallsvariable mit endlich vielen Werten $\{x_1, \dots, x_n\}$, so gilt:

$$\begin{aligned}
 \int X dP &= \sum_{j=1}^n x_j P(X^{-1}(\{x_j\})) \\
 &= \sum_{j=1}^n x_j P^X(\{x_j\})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (A_j &= X^{-1}(\{x_j\})) \\
 \text{Also: } \int X dP &= EX
 \end{aligned}$$

- 2.) Sei $\mathcal{E}^+ := \{f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \mid f \geq 0, f \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar}\}$. Wichtig: Elemente von \mathcal{E}^+ kann man beliebig gut durch Elemente aus \mathcal{E} approximieren.

Satz 1.1

Zu jedem $f \in \mathcal{E}^+$ gibt es eine wachsende Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus \mathcal{E} mit $u_n \uparrow f$, d.h. $u_n \leq u_{n+1}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = f$ (jeweils punktweise).

Beweis

Sei $\alpha_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ gegeben durch:

$$\alpha_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0 \\ \frac{j}{2^n}, & \text{falls } \frac{j}{2^n} \leq x < \frac{j+1}{2^n}, j = 0, 1, \dots, n2^n - 1 \\ n, & \text{falls } x \geq n \end{cases}$$

(Hier fehlt ein Bild)

α_n ist \mathfrak{B} -messbar. $\alpha_n \uparrow$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(x) = x$ für $n \rightarrow \infty$. Sei $u_n := \alpha_n \circ f$. Dann gilt $u_n \in \mathcal{E}$ und $u_n \uparrow f$. ■

Bemerkung

Ist f beschränkt, so konvergiert die Folge (u_n) gleichmäßig gegen f , d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega) - u_n(\omega)| = 0$.

Definition

Sei $f \in \mathcal{E}^+$ und (u_n) eine wachsende Folge aus \mathcal{E} mit $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = f$. Dann heißt

$$\int f d\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \int u_n d\mu$$

das μ -Integral von f . Wir zeigen, dass $\int f d\mu$ wohldefiniert ist.

Lemma 1.3

Sind (u_n) und (v_n) wachsende Folgen aus \mathcal{E} mit $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$, so gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int u_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int v_n d\mu$$

Beweis

Wir zeigen zunächst: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \geq v$ mit $v \in \mathcal{E} \implies \mu(v) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(u_n)$
Denn: Sei $v = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$ ($\alpha_j \geq 0, A_j \in \mathcal{A}$) und $0 < c < 1$ beliebig. Sei $B_n := \{\omega | u_n(\omega) \geq cv(\omega)\} \in \mathcal{A}$. Da $u_n \geq cv \mathbf{1}_{B_n}$ folgt:

$$\mu(u_n) \geq c\mu(v \mathbf{1}_{B_n}) \quad (*)$$

Nach Voraussetzung: $v \leq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n, u_n \uparrow \implies B_n \uparrow \Omega, A_j \cap B_n \uparrow A_j$

$$\begin{aligned} \implies \mu(v) &= \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j \cap B_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(v \mathbf{1}_{B_n}) \end{aligned}$$

Nehme $\lim_{n \rightarrow \infty}$ in $(*)$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(u_n) \geq c\mu(v)$. Da $c < 1$ beliebig war, folgt die Behauptung.

Jetzt zur eigentlichen Aussage: Es gilt: $v_k \leq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n, u_k \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \xrightarrow{\text{Hilfsaussage}} \mu(v_k) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(u_n), \mu(u_k) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(v_n), \forall k \in \mathbb{N}$.
 $\lim_{k \rightarrow \infty}$ bei beiden Ungleichungen \implies Behauptung. ■

Bemerkung

- a) Die letzten beiden Definitionen sind verträglich
 - b) Die Eigenschaften von Lemma 1.2 gelten weiter.
- 3.) $f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ ist \mathcal{A} -messbar (ohne Vorzeichenbeschränkung). $f^+ := \max\{0, f\}$, $f^- := -\min\{0, f\}$, $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$

Definition

Eine \mathcal{A} -messbare Funktion $f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ heißt μ -integrierbar, falls $\int f^+ d\mu < \infty$, $\int f^- d\mu < \infty$. In diesem Fall heißt $\int f d\mu = \mu(f) = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$ das **μ -Integral von f** .

Schreibweise: $\int f d\mu = \int f(\omega) \mu(d\omega) = \int_{\Omega} f d\mu$; $\int_A f d\mu := \int f \cdot \mathbf{1}_A d\mu$

Bemerkung a) Die letzten beiden Definitionen sind verträglich

- b) Falls mindestens einer der Werte $\int f^+ d\mu$, $\int f^- d\mu$ endlich ist, so heißt f **quasi-integrierbar**.
- c) Ist (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable, so gilt: EX existiert $\iff X$ ist P -integrierbar. In diesem Fall: $EX = \int X dP$
- d) Offenbar gilt: f ist integrierbar $\iff |f|$ ist integrierbar

Satz 1.2 (Eigenschaften des μ -Integrals)

Es seien $f, g : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ μ -integrierbar und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- a) cf und $f + g$ sind μ -integrierbar und

$$\begin{aligned} \int cf d\mu &= c \int f d\mu \\ \int (f + g) d\mu &= \int f d\mu + \int g d\mu \end{aligned}$$

- b) $f \leq g \implies \int f d\mu \leq \int g d\mu$

- c) $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$

Beweis a) α Sei $c \geq 0$ (analog $c \leq 0$): $(cf)^+ = cf^+$, $(cf)^- = cf^-$

Also ist cf integrierbar: $\xrightarrow{\text{Satz 1.1}} \exists u_n^+ \uparrow f^+, u_n^+ \in \mathcal{E}$

$$\begin{aligned} \int cf^+ d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int cu_n^+ d\mu \\ &= c \lim_{n \rightarrow \infty} \int u_n^+ d\mu \\ &= c \int f^+ d\mu \end{aligned}$$

Analog f^- .

$\beta)$ $|f + g| \leq |f| + |g| \implies f + g$ μ -integrierbar.

Sei zunächst $f, g \in \mathcal{E}^+ \xrightarrow{\text{Satz 1.1}} \exists u_n \uparrow f, v_n \uparrow g, u_n, v_n \in \mathcal{E} \implies u_n + v_n \uparrow f + g, u_n + v_n \in \mathcal{E}$

Mit Lemma 1.2 folgt:

$$\begin{aligned} \int (f + g) d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int (u_n + v_n) d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int u_n d\mu + \int v_n d\mu \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int u_n d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int v_n d\mu \\ &= \int f d\mu + \int g d\mu \end{aligned}$$

Sei jetzt f, g beliebig

$$\begin{aligned} (f + g)^+ - (f + g)^- &= f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^- \implies (f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+ \xrightarrow{\text{s.o.}} \int (f + g)^+ d\mu + \int f^- d\mu + \int g^- d\mu = \\ &= \int (f + g)^- d\mu + \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu \\ \implies \int (f + g) d\mu &= \int (f + g)^+ d\mu - \int (f + g)^- d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu \end{aligned}$$

b) vergleiche Übung

c) $f \leq |f|, -f \leq |f| \xrightarrow{\text{b) mit } g = |f|}$ Behauptung ■

Bemerkung Ist $\mu = \lambda$ das Lebesgue-Maß, so heißt $\int f d\mu = \int f d\lambda$ Lebesgue-Integral.

Beispiel 1.2 a) Sei δ_ω das Dirac-Maß, $f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ ist δ_ω -integrierbar falls $f(\omega) < \infty$ und dann gilt

$$\int f d\delta_\omega = f(\omega)$$

Denn: Sei $f \in \mathcal{E} \implies f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{1}_{A_j} \implies \int f d\delta_\omega = \sum_{j=1}^n \alpha_j \delta_\omega(A_j) = \alpha_k \cdot 1 = f(\omega)$

$f \in \mathcal{E}^+ : u_n \uparrow f, \int u_n d\delta_\omega = u_n(\omega) \uparrow f(\omega)$

f allgemein $\implies f = f^+ - f^-$

b) Sei (μ_n) eine Folge von Maßen und $\mu = \sum_{n=1}^\infty \mu_n$. Für $f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ gilt:

$$\begin{aligned} f \text{ ist } \mu\text{-integrierbar} &\iff \sum_{n=1}^\infty \int |f| d\mu_n < \infty \\ \int f d\mu &= \sum_{n=1}^\infty \int f d\mu_n \text{ (vergleiche Übung)} \end{aligned}$$

Spezialfall: $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})), \mu = \sum_{n=1}^\infty \delta_n$ (Zählmaß auf \mathbb{N})

f ist μ -integrierbar $\iff \sum_{n=1}^\infty |f(n)| < \infty$, dann $\int f d\mu = \sum_{n=1}^\infty f(n)$.

Summation ist ein Spezialfall von Integration. Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}, \mathcal{A} =$

$\mathcal{P}(\Omega) \cdot \mu = P := \sum_{n=1}^{\infty} p_n \delta_{\omega_n}$ mit $p_n \geq 0, \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$ (Wahrscheinlichkeitsmaß).

Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable:

$$EX \text{ existiert} \iff \sum_{n=1}^{\infty} |X(\omega_n)| p_n < \infty \iff X \text{ ist } P\text{-integrierbar}$$

$$EX = \sum_{n=1}^{\infty} X(\omega_n) P_n = \sum_{n=1}^{\infty} X(\omega_n) P(\{\omega_n\}) = \int X dP$$

- c) Sei $\Omega = [a, b]$ und $\mathcal{A} = \mathfrak{B}_{[a,b]} = \{A \cap [a, b] \mid A \in \mathfrak{B}\}$ (Spur von \mathfrak{B} auf $[a, b]$)
 $\mu(A) := \lambda(A) \forall A \in \mathcal{A}$. Ist $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ messbar und f Riemann-integrierbar, so ist f auch μ -integrierbar und es gilt:

$$\int f d\mu = \int f(x) dx$$

(Hier fehlt ein Bild zur Veranschaulichung)

Das Lebesgue-Integral ist eine Erweiterung des Riemann-Integrals:

Sei $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$. f ist nicht Riemann-integrierbar. Da $f \in \mathcal{E}$ gilt:

$$\int f d\lambda = 0 \cdot \lambda(\mathbb{Q}^c \cap [0, 1]) + 1 \cdot \lambda(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt wegen:

- (i) $\lambda(\{a\}) = 0$, da $\{a\} = \cap_{n=1}^{\infty} [a, a + \frac{1}{n})$
- (ii) $\lambda(\sum_{i=1}^{\infty} \{a_i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(\{a_i\}) = 0$

Vorsicht bei uneigentlichen Riemann-Integralen! $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ ist Riemann-integrierbar, aber nicht Lebesgue-integrierbar.

