

10. Folgerungen aus den Integralformeln

Satz 10.1 (Cauchysche Abschätzungen)

Sei $z_0 \in \mathbb{C}, r > 0, f \in H(U_r(z_0))$ und f sei auf $U_r(z_0)$ beschränkt mit $M := \sup_{U_r(z_0)} |f(z)|$.

Dann: $|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{Mn!}{r^n} \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis

Sei $0 < \rho < r, \gamma(t) := z_0 + \rho e^{it} (t \in [0, 2\pi])$. 9.6 $\implies f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$.

Für $w \in \text{Tr}(\gamma) : |w - z_0| = \rho$, also $\frac{|f(w)|}{|w-z_0|^{n+1}} \leq \frac{M}{\rho^{n+1}}$

$\xrightarrow{8.4} |f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M}{\rho^{n+1}} 2\pi\rho = \frac{Mn!}{\rho^n} \xrightarrow{\rho \rightarrow r} \text{Beh.}$ ■

Satz 10.2 (Satz von Liouville)

Ist $f \in H(\mathbb{C})$ auf \mathbb{C} beschränkt, so ist f konstant.

Beweis

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. 10.1 $\implies |f'(z_0)| \leq \frac{M}{r}; r > 0$ beliebig.

$\xrightarrow{r \rightarrow \infty} f'(z_0) = 0, z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig $\implies f' = 0$ auf \mathbb{C} . 4.2 \implies Beh. ■

Bemerkung: 10.2 ist in \mathbb{R} falsch. Z.B. ist $x \rightarrow \cos x$ auf \mathbb{R} beschränkt aber nicht konstant. Für $t \in \mathbb{R} : \cos(it) = \frac{1}{2}(e^{i(it)} + e^{i(-it)}) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) = \cosh t \rightarrow \infty (t \rightarrow \pm\infty)$

Hilfssatz

Sei $n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$ und $p(z) := a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$.

Dann ex. ein $R > 0 : |p(z)| \geq 1 \forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$.

Beweis

Für $z \neq 0 : \varphi(z) := \frac{|a_0|}{|z|^n} + \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} + \dots + \frac{|a_{n-1}|}{|z|} + |a_n|$.

$\implies \varphi(z) \rightarrow \underbrace{|a_n|}_{\neq 0} (|z| \rightarrow \infty) \implies |p(z)| = |z|^n |\varphi(z)| \rightarrow \infty (|z| \rightarrow \infty) \implies \text{Beh.}$ ■

Satz 10.3 (Fundamentalsatz der Algebra)

Sei p wie in obigem Hilfssatz. Dann ex. ein $z_0 \in \mathbb{C} : p(z_0) = 0$

Beweis

Hilfssatz $\implies \exists R > 0 : |p(z)| \geq 1 \forall z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| > R$.

Annahme: $p(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$. Dann $q := \frac{1}{p} \in H(\mathbb{C})$ und $|q(z)| \leq 1$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$.

q ist stetig $\implies q$ ist beschränkt auf $\overline{U_R(0)} \implies q$ ist auf \mathbb{C} beschränkt.

10.2 $\implies q$ ist konstant $\implies p$ ist konstant, Wid! ■

Satz 10.4 (Potenzreihenentwicklung)

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in H(D)$, $z_0 \in D$ und $r > 0$ so, dass $U_r(z_0) \subseteq D$. Dann:

$$(*)f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \forall z \in U_r(z_0)$$

wobei

$$(**)a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

mit $\gamma(t) = z_0 + \rho e^{it}, t \in [0, 2\pi], 0 < \rho < r$

Beweis

(**) folgt aus (*), 5.4 und 9.6. O.B.d.A.: $z_0 = 0$.

Sei $z \in U_r(0)$ und sei $R > 0$ so, dass $|z| < R < r$;

$\gamma_0(t) := z_0 + R \cdot e^{it} \ (t \in [0, 2\pi])$.

Sei $w \in \text{Tr}(\gamma_0)$. Dann $\frac{|z|}{|w|} = \frac{|z|}{R} < 1$, also $\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{w} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{w}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{w^{n+1}} z^n$.

$$\begin{aligned} \text{Also } \underbrace{\int_{\gamma_0} \frac{f(w)}{w-z} dw}_{\stackrel{9.4}{=} 2\pi i f(z)} &= \int_{\gamma_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{w^{n+1}} z^n \right) dw \\ &\stackrel{8.4}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\underbrace{\int_{\gamma_0} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw}_{\stackrel{9.6}{=} 2\pi i \cdot \frac{f^{(n)}(0)}{n!}} \right) z^n \implies f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right) z^n \end{aligned}$$

Bemerkungen:

(1) 10.4 ist in \mathbb{R} falsch.

Bekannt aus der Analysis: Die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & , x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

ist auf \mathbb{R} bel. oft db und $f^{(n)}(0) = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Also: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \equiv 0$ auf \mathbb{R} .

(2) Die Entwicklung (*) gilt in der größten offenen Kreisscheibe um z_0 , die noch ganz in D liegt. Sei r_0 der Radius dieser Kreisscheibe (ist $D = \mathbb{C}$, so ist $r = \infty$). Sei R der KR der PR in (*). Also: $R \geq r_0$.

Satz 10.5 (Konvergenzsatz von Weierstraß)

$D \subseteq \mathbb{C}$ sei offen, (f_n) sei eine Folge in $H(D)$ und (f_n) konvergiere auf D lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$.

- (1) $f \in H(D)$
- (2) (f'_n) konvergiere auf D lokal gleichmäßig gegen f' .

Beweis

- (1) 5.1 $\Rightarrow f \in C(D)$. Sei $\Delta \subseteq D$ ein Dreieck. (f_n) konvergiere auf $\partial\Delta$

gleichmäßig $\Rightarrow \int_{\partial\Delta} f(z)dz \stackrel{8.4}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Delta} f_n(z)dz \stackrel{9.1}{=} 0$.
 9.7 $\Rightarrow f \in H(D)$.

- (2) O.B.d.A. $f = 0$ auf D (ansonsten betrachte $f_n - f$). Sei $z_0 \in D$ und $r > 0$

so, daß $\overline{U_r(z_0)} \subseteq D$. Es genügt zu zeigen:

(f'_n) konvergiert auf $\overline{U_{\frac{r}{2}}(z_0)}$ gleichmäßig gegen 0.

$\gamma(t) := z_0 + r \cdot e^{it} (t \in [0, 2\pi])$. $M_n := \max_{w \in \text{Tr}(\gamma)} |f_n(w)|$

Vor $\Rightarrow M_n \rightarrow 0$.

Sei $z \in \overline{U_{\frac{r}{2}}(z_0)}$. $f'_n(z) \stackrel{9.6}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(w)}{(w-z)^2} dw$

$w \in \text{Tr}(\gamma) : |w - z| \geq \frac{r}{2} \Rightarrow \frac{|f_n(w)|}{|w-z|^2} \leq \frac{4M_n}{r^2}$

$\Rightarrow |f'_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{4M_n}{r^2} 2\pi r = \frac{4M_n}{r}$

Also: $|f'_n(z)| \leq \frac{4M_n}{r} \forall z \in \overline{U_{\frac{r}{2}}(z_0)} \forall n \in \mathbb{N}$ und $M_n \rightarrow 0$. ■

