

## 9. Topologie-Übung

Joachim Breitner

19. Dezember 2007

### Aufgabe 1

Sei  $K := \overline{B_1(0)} \subseteq \mathbb{R}^2$ .

**Behauptung:** Jede stetige Abbildung  $G : K \rightarrow K$  hat mindestens einen Fixpunkt.

Wir nehmen an,  $G$  habe keinen Fixpunkt, also  $\forall x \in K : G(x) \neq x$ .

Für  $x \in K$  definiere  $\lambda_x \in \mathbb{R}_{>0}$  als die eindeutig bestimmte Zahl, für die gilt:  $G(x) + \lambda_x(x - G(x)) \in S^1$ . Behauptung:  $\lambda : K \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ ,  $x \mapsto \lambda_x$ , stetig. Dann ist auch  $F : K \rightarrow S^1$ ,  $x \mapsto G(x) + \lambda_x(x - G(x))$  stetig und  $F|_{S^1} = \text{id}_{S^1}$ , was laut Vorlesung nicht geht.

$\lambda$  ist stetig: Schreibe  $G(x) = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}$ ,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ . Es ist

$$\begin{aligned} \|G(x) + \lambda_x(x - G(x))\| = 1 &\iff \left\| \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix} + \lambda_x \begin{pmatrix} x_1 - G_1 \\ x_2 - G_2 \end{pmatrix} \right\| \\ &= (G_1 + \lambda_x(x_1 - G_1))^2 + (G_2 + \lambda_x(x_2 - G_2))^2 = 1 \end{aligned}$$

eine quadratische Gleichung mit Lösung  $\lambda_x$ , also hängt  $\lambda_x$  stetig von  $x$  und  $G(x)$  ab.

**Behauptung:** Das gilt auch für jeden zu  $K$  homöomorphen Raum  $X$ .

Sei  $H : K \rightarrow X$  ein Homöomorphismus und  $G : X \rightarrow X$  stetig. Zu zeigen ist:  $\exists x \in X : G(x) = x$ . Sei  $f := H \circ G \circ H^{-1} : K \rightarrow K$ .  $f$  ist stetig, also gibt es ein  $a \in K$ : mit  $f(a) = a \iff H \circ G \circ H^{-1}(a) = a \iff G(H^{-1}(a)) = H^{-1}(a)$ . Also ist  $x := H^{-1}(a)$  ein Fixpunkt von  $G$ .

## Aufgabe 2

Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine stetige geschlossene Kurve,  $x \in \mathbb{R}^2$ .

**Behauptung:**  $\chi(\gamma, x)$  hängt stetig von  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma([0, 1])$  ab.

Zur Erinnerung: Sei  $\sigma : [0, 1] \rightarrow S^1$ , dann gibt es genau ein  $\lambda : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass  $\sigma = \pi \circ \lambda$ , wobei  $\pi : t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$  gilt. Die Umlaufzahl von  $\sigma$  um 0 ist dann definiert als  $\lambda(1) - \lambda(0)$ .

Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  eine stetige geschlossene Kurve, dann ist

$$\gamma(t) = \underbrace{\|\gamma(t)\|}_{=: \sigma} \cdot \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}$$

und  $\chi(\gamma, 0) := \lambda(1) - \lambda(0)$ .

Für  $\lambda : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma([0, 1])$ , definiere die Umlaufzahl  $\chi(\gamma, x) := \chi(\tilde{\gamma}, 0)$ , wobei  $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(t) - x$ .

Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma([0, 1])$  mit  $x_n \rightarrow x$  für  $n \rightarrow \infty$ . Zu zeigen:  $\chi(\gamma, x_n) \rightarrow \chi(\gamma, x)$ . Definiere  $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \gamma([0, 1])$  stetig mit  $\Gamma(0, t) = \gamma(t) - x := \tilde{\gamma}_0(t)$  und  $\Gamma(1, t) = \gamma(t) - x_n := \tilde{\gamma}_1(t)$ . Laut Vorlesung gilt in diesem Fall:  $\chi(\tilde{\gamma}_1, 0) = \chi(\tilde{\gamma}_0, 0) = \chi(\gamma, x) = \chi(\gamma, x_n)$ .

Definiere also  $\Gamma(r, t) := \gamma(t) - ((1-r) \cdot x + r x_n) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Für  $n$  groß genug ist das die gesuchte Abbildung. Für alle  $n \geq N_0$  gilt dann:  $\chi(\tilde{\gamma}_1, 0) = \chi(\tilde{\gamma}_0, 0) \implies \forall n \geq N_0 : \chi(\gamma, x_n) = \chi(\gamma, x) \implies \chi(\gamma, x_n) \rightarrow \chi(\gamma, x) \implies$  Behauptung.

**Behauptung:** Es gibt eine Zusammenhangskomponente, auf der die Umlaufzahl von  $\gamma$  Null ist.

$\gamma([0, 1])$  ist kompakt, also gibt es ein  $r \in \mathbb{R}$ , so dass  $\gamma([0, 1]) \subseteq B_r(0)$ . Sei  $x \in \mathbb{R}^2$  mit  $\|x\| \geq 2r$ . Sei

$$\tilde{\gamma}(t) = \underbrace{\|\tilde{\gamma}(t)\|}_{=: \sigma(t)} \cdot \frac{\tilde{\gamma}(t)}{\|\tilde{\gamma}(t)\|}$$

Es ist  $\chi(\gamma, x) = \chi(\tilde{\gamma}, 0) = 0$ , denn:

Angenommen  $\gamma(1) \neq \gamma(0) \implies \text{Bild}(\pi \circ \gamma) = S^1$ , im Widerspruch zur Skizze an der Tafel.

## Aufgabe 4

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $x \in X$  und  $A \subseteq X$ .

**Behauptung:**  $x \in \bar{A}$  genau dann, wenn es einen Filter  $\mathcal{F}$  gibt mit  $A \in \mathcal{F}$  und  $\mathcal{F} \rightarrow x$ .

„ $\implies$ “: Sei  $x \in \bar{A}$ . Die Obermengen der Mengen  $\{U \cap A \mid U \text{ Umgebung von } x\}$  bilden einen Filter mit  $A \in \mathcal{F}$ , der gegen  $x$  konvergiert.  $\emptyset \notin \mathcal{F}$ , da jede Umgebung von  $x \in \bar{A}$  nichtleeren Schnitt mit  $A$  hat.

„ $\impliedby$ “: Sei  $\mathcal{F}$  ein Filter mit  $A \in \mathcal{F}$ , der gegen  $x$  konvergiert. Also liegen alle Umgebungen  $U$  von  $x$  in  $\mathcal{F}$ .  $U \cap A \neq \emptyset$  (sonst wäre  $\emptyset \in \mathcal{F}$ ). Ist  $x \in A$ , so ist  $x \in \bar{A}$  sowieso. Ist  $x \notin A$ , so gilt für jede Umgebung  $U$  von  $x$ :  $U \cap A \neq \emptyset$  und  $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ , also ist  $x \in \partial A \subseteq \bar{A}$ .

**Behauptung:** Es gibt einen topologischen Raum  $X$ ,  $A \subseteq X$  und  $x \in \bar{A}$ , so dass keine Folge  $(x_n)$  in  $A$  gegen  $x$  konvergiert.

Setze  $X := \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ , definiere Topologie  $J$  durch  $A \in J \iff (0,0) \neq A$ , oder  $\{n \in \mathbb{N}_0 \mid (n,m) \notin A\}$  ist endlich für fast alle  $M$ .  $(X, J)$  ist ein topologischer Raum.  $A := X \setminus \{(0,0)\}$ . Es gibt keine Folge in  $A$ , die gegen  $(0,0)$  konvergiert, aber  $(0,0) \in X = \bar{A}$ :

Sei  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} =: (n_i, m_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $A$ .

1. Fall: Es gibt ein  $m \in \mathbb{N}_0$ , so dass  $m_i = m$  für unendlich viele  $i \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $U := X \setminus \{(n,m) \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{(0,0)\}$  ist eine Umgebung von  $(0,0)$ , in der mehr als endlich viele Elemente der Folge nicht liegen, also konvergiert die Folge nicht.

2. Fall: Für alle  $m \in \mathbb{N}_0$  gilt:  $m_i = m$  für endlich viele  $i$ . Dann ist  $U := X \setminus \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  ist Umgebung von  $(0,0)$ , in der keine Folgenglieder liegen, also konvergiert auch hier die Folge nicht.