Anhang A.

Übungen

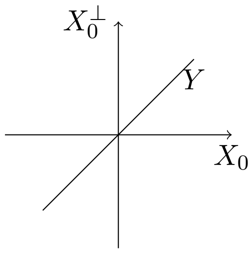
Übung 0 vom 22. Oktober 2012

Definition (Graßmann-Manningfaltigkeiten) Sei $k \leq n$ und $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) = \{V \subseteq \mathbb{R}^n \mid \dim V = k\}$

Behauptung: $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ ist eine glatte Manningfaltigkeit.

Bemerkung Für $k = 1$ ist $\mathrm{Gr}_1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}\mathbb{P}^n$

$X_0 \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \mathbb{R}^n = X_0 \oplus X_0^\perp$, $X_0 = \mathrm{span}\{e_1, \dots, e_k\}$
Definiere $U_{X_0} := \{Y \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \mid Y \cap X_0^\perp = \{0\}\}$. Für $Y \in U_{X_0}$ gilt dann: $\mathrm{pr}_{X_0}(Y) = X_0 \Rightarrow \mathrm{pr}_{X_0}$ ist ein Isomorphismus



$$X_0 \xrightarrow{(\mathrm{pr}_{X_0}|_Y)^{-1}} Y \xrightarrow{\mathrm{pr}_{X_0^\perp}} X_0^\perp$$

Definiere

$$\phi_{X_0} : \begin{cases} U_{X_0} & \to \quad \mathrm{Hom}(\underbrace{X_0, X_0^\perp}_{\cong \mathbb{R}^{k\cdot(n-k)}}) \\ Y & \mapsto \quad \mathrm{pr}_{X_0^\perp} \circ (\mathrm{pr}_{X_0}|_Y)^{-1} \end{cases}$$

$$\phi_{X_0}^{-1} : \begin{cases} \mathrm{Hom}(X_0, X_0^\perp) & \to \quad U_{X_0} \\ f & \mapsto \quad \mathrm{Graph}(f) = \{x + xf \mid x \in X_0\} \end{cases}$$

Zu zeigen:
(1) U_{X_0} ist offen
(2) $\phi_{X-0}, \phi_{X_0}^{-1}$ sind beide stetig
(3) $\phi_{X-0} \circ \phi_{X_0}^{-1}$ ist glatt
(4) $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ ist Hausdorffsch und hat eine abzählbare Basis der Topologie

Welche Topologie eigentlich? Sei $V = \{(v_1, \dots, v_k) \in (\mathbb{R}^n)^k \mid v_1, \dots, v_k$ linear unabhängig$\}$ und $\pi : V \to \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n), (v_1, \dots, v_k) \mapsto \mathrm{span}\{v_1, \dots, v_k\}$. Topologie auf $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$: induziert von der Quotientopologie auf $V/\sim \pi$, also

$$U \subset \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \text{ offen } \Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \text{ offen}$$

V ist offen in $(\mathbb{R}^n)^k$: $V = \widetilde{\det}^{-1}(\mathbb{R}^{\binom{n}{k}} \setminus \{0\})$ mit $\widetilde{\det}(v_1, \dots, v_k) = (\det(k \times k\text{-Untermatrizen}))$
Zu zeigen: $\pi^{-1}(U_{X_0})$ offen
$\pi^{-1}(U_{X_0}) = \{(v_1, \dots, v_k) \in V \mid \mathrm{pr}_{X_0}|_{\mathrm{span}\{v_i\}}$ hat vollen Rang$\} = \{(v_1, \dots, v_k) \in V \mid \mathrm{pr}_{X_0}(V - i)$ sind linear unabhängig$\} = (\widetilde{\det} \circ (\mathrm{pr}_{X_0}, \dots, \mathrm{pr}_{X_0}))^{-1}(\mathbb{R}^{\binom{n}{k}} \setminus \{0\})$
$\Rightarrow U_{Y_0}$ ist offen.

zu 2) *Behauptung:* für alle $Y \in U_{X_0}$ gibt es genau eine Basis $(y_1, \ldots, y_k)$ von Y sodass $\mathrm{pr}_{X_0}(y_i) = x_i$ für eine feste Orthonormalbasis $(x_1, \ldots, x_k)$ von X_0. Bezeichnet $B(Y)$ diese Basis, so ist $B : U_{X_0} \to V$ stetig

Beweis: Existenz und Eindeutigkeit ✓ (pr_{X_0} ist Isomorphismus)

Für $(v_1, \ldots, v_k) \in \pi^{-1}(U_{X_0})$ ist $B \circ \pi(v_1, \ldots, v_k) = ((\mathrm{pr}_{X_0}|_{\mathrm{span}\{v_1,\ldots,v_k\}})^{-1} X_i)_{i \leq k}$. Die Darstellungsmatrix von $(\mathrm{pr}_{X_0}|_{\mathrm{span}\{v_1,\ldots,v_k\}})^{-1}$ bezüglich $\{x_i\}, \{y_i\}$ hängt stetig von den v_i ab. Daraus folgt dass $B \circ \pi|_{\pi^{-1}(U_{X_0}}$ stetig ist, womit auch B stetig ist. Es gilt:

$$B(Y)_i = \underbrace{x_i}_{\in X_0} + \underbrace{\phi_{X_0}(Y)_{X_i}}_{\in X_0^\perp} \tag{*}$$

$\Rightarrow \phi_{X_0}(Y)_{x_i}$ hängt stetig von Y ab.

$\Rightarrow$ Darstellende Matrix von $\phi_{X_0}(Y)$ hängt stetig von Y ab $\Rightarrow \phi_{X_0}$ ist stetig

(*) $\Rightarrow B(\phi_{X_0}^{-1}(A))_i = x_i + Ax_i \Rightarrow B \circ \phi_{X_0}^{-1}$ ist stetig (sogar glatt)

$$\phi_{X_0}^{-1} = (\pi \circ B) \circ \phi_{X_0}^{-1} \text{ ist stetig}$$

zu 3) $\phi_{X_0} \circ \phi_{\tilde{X}_0}^{-1} = \phi_{X_0} \circ \pi \circ \underbrace{(B_{\tilde{X}_0} \circ \phi_{\tilde{X}_0}^{-1})}_{\text{ist glatt, s. o.}}$ ist glatt.

$\phi_{X_0} \circ \pi$ ist glatt, da $\phi_{X_0} \circ \pi(v_1, \ldots, v_k)(x_i) = (\underbrace{B_{X_0} \circ \pi}_{\text{glatt (Darst. aus Beh.)}})(v_1, \ldots, v_k) - x_i$

zu 4) Abzählbare Basis der Topologie wird von V geerbt. *Hausdorffsch*: Seien $X_0 \neq \tilde{X}_0 \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \xRightarrow[\text{Üb. Aufg.}]{\text{L. A.}} \exists Z \subseteq \mathbb{R}^n, \dim Z = n - k : Z \cap X_0 = \{0\} = Z \cap \tilde{X}_0, U_{\underbrace{Z^\perp}_{k\text{-dim}}} \ni X_0, \tilde{X}_0$

Alternativ: Sei $w \in X_0 \setminus \tilde{X}_0$ und $d_w^2 : \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, Y \mapsto (\mathrm{dist}(w, Y))^2 \Rightarrow d_w^2(X_0) = 0, d_w^2(\tilde{X}_0) > 0$. Falls d_w^2 stetig ist, gilt: $(d_w^2)^{-1}((-\infty, \frac{d_w^2(\tilde{X}_0)}{2}))$ und $(d_w^2)^{-1}((\frac{d_w^2(\tilde{X}_0)}{2}, \infty))$ trennen und sind offen.

Übung 1 vom 29. Oktober 2012

Aufgabe 1

a) Es seien $\mathrm{S}^n = \{(x^0, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} (x^i)^2 = 1\}$, $N = (1, 0, \ldots, 0)$ und $S = (-1, 0, \ldots, 0)$. Weiter seien

$$\varphi : \mathrm{S}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n \qquad x \mapsto \left(\frac{x^1}{1 - x^0}, \ldots, \frac{x^n}{1 - x^0}\right)$$

und

$$\psi : \mathrm{S}^n \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^n \qquad x \mapsto \left(\frac{x^1}{1 + x^0}, \ldots, \frac{x^n}{1 + x^0}\right)$$

Zeigen Sie, dass $\{(\varphi, \mathrm{S}^n \setminus \{N\}), (\psi, \mathrm{S}^n \setminus \{S\})\}$ ein C^∞-Atlas für S^n ist.

b) Für $i = 0, \ldots, n$ sei $U_i^{\pm} = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathrm{S}^n \mid \pm x_i > 0\}$ und

$$\varphi_i^{\pm} : U_i^{\pm} \to \mathbb{R}^n \qquad (x^0, \ldots, x^n) \mapsto (x^0, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^n).$$

Zeigen Sie, dass $\{(\varphi_i^{\varepsilon}, U_i^{\varepsilon}) \mid i = 0, \ldots, n, \varepsilon \in \{+, -\}\}$ ein C^∞-Atlas ist, der mit dem durch stereographische Projekton gegebenen verträglich ist.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass durch die Karte

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto x^3$$

eine C^∞-Struktur induziert wird, die von der kanonischen (von $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ induzierten) C^∞-Struktur auf $\mathbb{R}$ abweicht. Sind die beiden Strukturen diffeomorph?

Aufgabe 3

Es sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Weiter seien M_1 und M_2 zwei C^k-Mannigfaltigkeiten und $N_i \subseteq M_i$ Untermannigfaltigkeiten.
Zeigen Sie: Ist $f \in C^j(M_1, M_2)$ für $1 \leq j \leq k$ und ist $f(N_1) \subseteq N_2$, so ist $f|_{N_1} \in C^j(N_1, N_2)$.

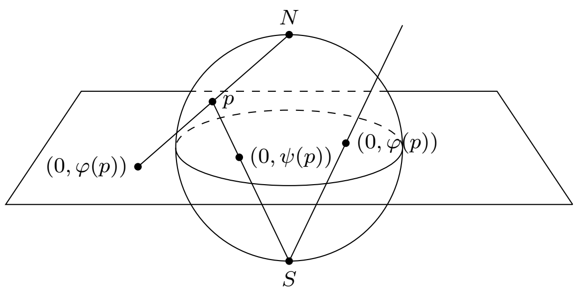
Aufgabe 4

In welchen der folgenden Fälle ist N eine Untermannigfaltigkeit der glatten Mannigfaltigkeit M?

a) $M = \mathrm{S}^n$, $N = \{(x^0, \ldots, x^n) \in \mathrm{S}^n \mid x^2 = \cdots = x^n = 0\}$

b) $M = \mathbb{R}^2$, $N = \{(0, y) \mid y \geq 0\} \cup \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$

Lösung 1



a) $S^n = (S^n \setminus \{N\}) \cup (S^n \setminus \{S\})$✓
φ, ψ Homöomorphismen, $\Phi : \{(x^0, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^0 < 1\} \to \mathbb{R}^n, x \mapsto \frac{1}{1-x^0}(x^1, \ldots, x^n) \Rightarrow$ Φ ist stetig $\Rightarrow \varphi = \Phi|_{S^n \setminus \{N\}}$ ist stetig. Es ist

$$\varphi^{-1}(y) = \frac{1}{1 + |y|^2}(\|y\|^2 - 1, 2y)$$

also ist φ^{-1} stetig. Analog für ψ:

$$\varphi \circ \psi^{-1}(y) = \frac{y}{\|y\|^2} = \psi \circ \varphi - 1(y)$$

für $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Also glatter Kartenwechsel.

$$\begin{aligned} \varphi_i^{\pm} : U_i^{\pm} \to B_1(0) \subset \mathbb{R}^n \qquad & x \mapsto (x^0, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^n) \\ (\varphi_i^{\pm})^{-1} : B_1(0) \to U_i^{\pm} \qquad & y \mapsto (y^0, \ldots, y^{i-1}, \pm(1 - \|y\|^2), y^i, \ldots, y^{n+1}) \end{aligned}$$