0.2 Das Volumenproblem

Das Elementavolumen eines Quaders $Q = I_1 \times \cdots \times I_d$ für Intervalle $I_j \subset \mathbb{R}$ mit Länge l_j ist: $\mathrm{vol}(Q) = l_1 \cdots l_d$.

Ziel: Setze dies sinnvoll auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d) := \{A : A \subset \mathbb{R}^d\}$ fort, d.h.: Wir suchen eine Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$ mit:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- für disjunkte $A_1, \ldots, A_n$ gilt: $\mu(A_1 \dot\cup \ldots \dot\cup A_n) = \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n)$

Daraus folgt: Für $A, B \subset \mathbb{R}^d$ gilt:

- $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$
- $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

Ferner soll gelten $\mu(Q) = \mathrm{vol}(Q)$ für alle Quader Q, sowie $\mu(T(A)) = \mu(A)$ für jede Bewegung $Tx = a + Ux$ ($a \in \mathbb{R}^d, U$ othogonale Matrix).

Inhaltsproblem: Gibt es so ein μ? Antwort: Nein! (für $d \geq 3$)

Banach-Tarski-Paradoxon (1924)
Es gibt 5 Mengen $A_1, \ldots, A_5 \subset \overline{B}(0,1) =: K$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$ und Bewegungen $T_1, \ldots, T_5$ mit $T_1(A_1) \cup T_2(A_2) \cup T_3(A_3) = K$ und $T_4(A_4) \cup T_5(A_5) = K$. Das heißt: Wenn es ein solches wie oben μ gäbe, dann würde gelten:

$$\begin{aligned}\mu(K) &= \sum_{k=1}^{5} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{5} \mu(T_k A_k) \geq \mu(T_1 A_1 \cup T_2 A_2 \cup T_3 A_3) + \mu(T_4 A_4 \cup T_5 A_5) \\ &= 2\mu(K)\end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch, denn $\mu(K) \geq \mu(Q) > 0$ für jeden echten Quader $Q \subset K$.