Universidad Simón Bolívar
Departamento de Computación y Tecnología de la Información
CI5651 – Diseño de Algoritmos I
Septiembre–Diciembre 2025

Tarea 8

A continuación encontrará 3 preguntas, cada una dirá cuántos puntos vale en su preámbulo. Sea lo más detallado y preciso posible en sus razonamientos, algoritmos y demostraciones.

Además del informe expresando su solución, debe dar una implementación de su solución en el lenguaje de su elección (solamente como una función; el formato de entrada/salida no es relevante), para las preguntas 2 y 3.

La entrega se realizará <u>únicamente</u> por correo electrónico a rmonascal@gmail.com.

Fecha de entrega: Hasta las 11:59pm. VET del **Lunes, 24 de Noviembre** (*Semana 10*).

1. (2 puntos) – Considere un polinomio formado por los números de su carné, donde el i–ésimo número corresponde al coeficiente para x^i.

   Por ejemplo, si su carné es `12-02412`, entonces el polinomio será:

   $$\begin{aligned} P(x) &= 1x^0 + 2x^1 + 0x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 1x^5 + 2x^6 \\ &= 1 + 2x + 2x^3 + 4x^4 + x^5 + 2x^6 \end{aligned}$$

   Calcule y muestre el resultado de aplicar la DFT (Transformada Discreta de Fourier) al polinomio obtenido, usando las **raíces octavas** de la unidad.

2. (4 puntos) – Considere un número entero positivo X. Definimos la función $decomp(X)$ como la cantidad de enteros positivos, a, b, c y d de tal forma que $ab + cd = X$.

   $$decomp(X) = |\{(a, b, c, d) : a > 0 \wedge b > 0 \wedge c > 0 \wedge d > 0 \wedge ab + cd = X\}|$$

   Dado un número N, queremos hallar el máximo valor para $decomp(X)$ donde $1 \leq X \leq N$.

   Diseñe un algoritmo que permita encontrar la respuesta en $O(N \log N)$.

   Nota: Puede suponer que todas las operaciones aritméticas, incluyendo multiplicaciones, divisiones y módulos, se hacen en $O(1)$.

   Pistas:

   - ¿De cuántas formas se puede descomponer N en dos sumandos a y b, tal que $a+b = N$?
   - ¿De cuántas formas se puede descomponer N en dos factores a y b, tal que $a \times b = N$?
   - ¿Qué relación existe entre la cantidad de divisores de un número y su descomposición en factores primos?
   - La criba de Eratóstenes se puede usar para ver si un número es primo. ¿Se podrá modificar para calcular algo más?
   - Un cambio de perspectiva podría ser de utilidad.

3. (3 puntos) – Sea $R = \{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$ un conjunto de n rectángulos, donde cada rectángulo es un par ordenado $(alto, ancho)$.

   Para cualquier subconjunto $C \subseteq R$, definimos el costo de C como la multiplicación del alto del rectángulo más alto en C por el ancho del rectángulo más ancho en C (nótese que no necesariamente es el mismo rectángulo quien tiene estos máximos).

$$costo(C) = \left(\max_{(alto, ancho) \in C} alto\right) \times \left(\max_{(alto, ancho) \in C} ancho\right)$$

   Queremos realizar una partición de R en subconjuntos $C_1, C_2, \cdots, C_m$ de tal forma que

   - $C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_m = R$
   - $C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_m = \emptyset$

   La cantidad m de subconjuntos que forman la partición es libre, entre 1 y n. El costo de la partición es la suma de los costos de los conjuntos que lo conforman.

   Diseñe un algoritmo que permita hallar una partición de costo mínimo en $O(n \log n)$, usando memoria adicional $O(n)$.

   Pistas:

   - ¿Existen rectángulos en la entrada que son redundantes?
   - ¿Dar un orden a los rectángulos nos permitiría considerar **subsecuencias** en lugar de **subconjuntos**?
   - La geometría es un área muy útil de las matemáticas.

Ricardo Monascal / Noviembre 2025