Universidad Simón Bolívar
Departamento de Computación y Tecnología de la Información
CI5651 – Diseño de Algoritmos I
Septiembre–Diciembre 2025

Tarea 2

A continuación encontrará 2 preguntas, cada una dirá cuántos puntos vale en su preámbulo. Sea lo más detallado y preciso posible en sus razonamientos, algoritmos y demostraciones.

La entrega se realizará <u>únicamente</u> por correo electrónico a rmonascal@gmail.com.

Fecha de entrega: Hasta las 11:59pm. VET del **Lunes, 06 de Octubre** (*Semana 3*).

1. (5 puntos) — ¡Bienvenido al pasado! Te encanta la música, pero aún no existe Spotify, Youtube o siquiera el internet. Si quieres escuchar una canción, no te queda de otra que esperar a que suene en la radio. No te interesa escuchar canciones incompletas. Si la canción ya está empezada o si debes saltar antes de que termine, prefieres no escucharla.

   ¡Pero tienes un ás bajo la manga! Tienes a tu disposición el programa de todas las emisoras, que son en extremo puntuales, incluyendo la hora exacta a la que han de reproducir las canciones que te gustan. Cada canción incluye la hora a la que ha de comenzar (en segundos, desde el inicio del día) y la duración de la canción (también en segundos).

   Dadas n canciones, donde la i–ésima canción tiene t_i (el tiempo en el que empieza la canción) y d_i (la duración de la canción), diseñe un algoritmo *eficiente* que permite escoger un conjunto maximal de canciones tal que se puedan escuchar las mismas completamente y sin interrupciones. Puede suponer que cambiar de emisora es una acción instantánea, por lo que si una canción empieza justo cuando otra termina, ambas pueden ser escuchadas completamente.

   Por ejemplo, considere que $n = 3$ y el cronograma de canciones es:

   - $t_1 = 1$ y $d_1 = 4$
   - $t_2 = 2$ y $d_2 = 1$
   - $t_3 = 3$ y $d_3 = 3$

   Un conjunto maximal sería $\{2, 3\}$, cubriendo los tiempos [2..3] y [3..6].

   Su algoritmo debe usar tiempo $O(n \log n)$ y memoria adicional $O(n)$.

   Justifique *informalmente* por qué su algoritmo es correcto y cumple con el orden asintótico propuesto.

   Además del informe expresando su solución, debe dar una implementación de su solución en el lenguaje de su elección (solamente como una función; el formato de entrada/salida no es relevante).

2. (4 puntos) — Considere las siguientes definiciones:

Conjuntos definitivos de firmas funcionales

Considere un conjunto de tipos T y sea F todas las firmas de funciones posibles entre los tipos de T.

Por ejemplo, si $T = \{A, B, C\}$ entonces F contiene

- $A \to A$
- $A \to B$
- $A \to C$
- $B \to A$
- $B \to B$
- $B \to C$
- $C \to A$
- $C \to B$
- $C \to C$

Diremos que un subconjunto $F' \subseteq F$ es *definitivo* si cada tipo ocurrente en F' aparece a lo sumo una vez como imagen en F'.

Por ejemplo, para el mismo T anterior:

- $\{A \to B, B \to C\}$ es definitivo
- $\{A \to B, C \to B\}$ no es definitivo.

Matroide asociada

Dado un conjunto de tipos T y su conjunto de todas las firmas de funciones F, definimos $M_T = (F, \mathcal{I})$, donde $F' \in \mathcal{I}$ si y sólo si F' es definitivo.

Potencial de una firma funcional

Definimos el *potencial* de una firma de función $X \to Y$ como la cantidad de funciones posibles que existen con X como dominio y Y como imagen. Recordemos que esto es igual a $|Y|^{|X|}$. Puede suponer que todos los tipos tienen al menos un elemento (T no contiene al tipo vacío).

El potencial de un conjunto de firmas de funciones es la suma del potencial para cada una de la firmas que contiene.

Se desea que:

a) Demuestre que M_T es una matroide.

b) Plantee una función de costo w de tal forma que para la matroide pesada M_T, con w como función de peso, los sub–conjuntos óptimos son los subconjuntos *definitivos* con *potencial máximo*.

Ricardo Monascal / Octubre 2025