Universidad Simon Bolivar
Curso: CI2526 / Estructuras Discretas 2
Trimestre: Abril-Julio, 2021
Segundo Parcial

Resumen de Axiomas, Teoremas y Definiciones.

Definiciòn de Relaciòn Reflexiva.

$$R \textit{ es reflexiva en } A \equiv \forall a \in A \ \ ((a,a) \in R)$$

Definiciòn de Relaciòn Simètrica.

$$R \textit{ es simètrica en } A \equiv \forall a,b \in A \ \ ((a,b) \in R \implies (b,a) \in R)$$

Definiciòn de Relaciòn Antisimètrica.

$$R \textit{ es antisimètrica en } A \equiv \forall a,b \in A \ \ ((a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \implies a = b)$$

Definiciòn de Relaciòn Transitiva.

$$R \textit{ es transitiva en } A \equiv \forall a,b,c \in A \ \ ((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \implies (a,c) \in R)$$

Definiciòn de Restricciones. Para denotar al subconjunto de R cuyas primeras coordenadas están en el conjunto C se usa la notación $R|_{izq}(C)$. Esto es

$$R|_{izq}(C) \equiv \{(a,b) \in R : a \in C\}$$

Para denotar al subconjunto de R cuyas segundas coordenadas están en el conjunto C se usa la notación $R|_{der}(C)$. Esto es

$$R|_{der}(C) \equiv \{(a,b) \in R : b \in C\}$$

Definiciòn de dominio de una relación. El dominio de una relación R es

$$Dom(R) = \{x|(\exists y|(x,y) \in R)\}$$

Definiciòn de rango de una relación. El rango de una relación R es

$$Rgo(R) = \{y|(\exists x|(x,y) \in R)\}$$

Definición de composición de relaciones. La composición de dos relaciones R y S es

$$R \circ S = \{(a,c) | (\exists b| : (a,b) \in S \wedge (b,c) \in R)\}$$

Clausura reflexiva r(R). Dada una relación R de A en A, se define la clausura reflexiva de R como la menor relación reflexiva de A en A que contiene a R. Equivalentemente, la clausura reflexiva de R, r(R), se define como la relación de A en A que satisface las siguientes propiedades:
(I) r(R) es reflexiva.
(II) R ⊆ r(R)
(III) Si R′ es reflexiva y R ⊆ R′, entonces r(R) ⊆ R′

Clausura simétrica s(R). Dada una relación R de A en A, se define la clausura simétrica de R como la menor relación simétrica de A en A que contiene a R. Equivalentemente, la clausura simétrica de R, s(R), se define como la relación de A en A que satisface las siguientes propiedades:
(I) s(R) es simètrica.
(II) R ⊆ s(R)
(III) Si R′ es simètrica y R ⊆ R′, entonces s(R) ⊆ R′

Clausura transitiva t(R). Dada una relación R de A en A, se define la clausura transitiva de R como la menor relación transitiva de A en A que contiene a R. Equivalentemente, la clausura transitiva de R, t(R), se define como la relación de A en A que satisface las siguientes propiedades:
(I) t(R) es transitiva.
(II) R ⊆ t(R)
(III) Si R′ es transitiva y R ⊆ R′, entonces t(R) ⊆ R′

Relación Identidad de A. Dado un conjunto A se define la relación Identidad de A como

$$Id_A = \{(x,x) : x \in A\}$$

Propiedades de Clausuras:
(I) $r(R) = R \cup Id_A$
(II) $s(R) = R \cup R^{-1}$
(III) $t(R) = \bigcup_{i \geq 1} R^i$
(IV) $t(R) = \bigcup_{i=1}^{n-1} R^i$
(V) Sean R y S relaciones sobre A tales que R ⊆ S. Entonces, r(R) ⊆ r(S)
(VI) Sean R y S relaciones sobre A tales que R ⊆ S. Entonces, s(R) ⊆ s(S)
(VII) Sean R_1 y R_2 relaciones sobre A, entonces $r(R_1 \cup R_2) = r(R_1) \cup r(R_2)$

Teorema 5.8: Si R es una relacion sobre A, A tiene n elementos y M es la matriz asociada a R, entonces

1. R es reflexiva si y sòlo si $I_n \leq M$.
2. R es simètrica si y sòlo si $M = M^t$.
3. R es antisimètrica si y sòlo si $M \wedge M^t \leq I_n$.
4. R es transitiva si y sòlo si $M^2 \leq M$.

Tambièn se puede usar la matriz asociada a una relaciòn para hallar sus clausuras reflexiva, simètrica y transitiva. Ello se formaliza en el siguiente teorema.

Teorema 5.9: Si R es una relacion sobre A, A tiene n elementos y M_R es la matriz asociada a R, entonces las matrices asociadas a las clausuras se hallan como sigue:

1. Reflexiva: $M_{r(R)} = I_n \vee M_R$.
2. Simètrica: $M_{s(R)} = M_R \vee M_R^t$.
3. Transitiva: $M_{t(R)} = \displaystyle\bigvee_{i=1}^{n-1} M_R^i$.

Relación de equivalencia. Una relación en un conjunto A se llama relación de equivalencia si es

1. Reflexiva.
2. Simètrica.
3. Transitiva.

Clase de equivalencia. Si R es una relación de equivalencia sobre un conjunto A y x es un elemento de A se define la clase de equivalencia de x como el conjunto de los elementos de A que están relacionados mediante R con x:

$$R[x] = \{y \in A : xRy\}$$

Cuando R se sobreentiende simplemente se usa la notación [x] para la clase de equivalencia de x.

Conjunto cociente. Al conjunto de las clases de equivalencia en las cuales una relación de equivalencia R sobre un conjunto A parte al conjunto se denomina conjunto cociente de A con respecto a R y se denota por

$$A/R = \{R[x] : x \in A\}$$

Relación de orden parcial. Una relación en un conjunto A se llama relación de orden parcial si es

1. Reflexiva.
2. Antisimètrica.
3. Transitiva.

Definiciones:

Sea f una funcion de A en B, $f: A \to B$. Entonces,

f es Inyectiva $\equiv (f(a) = f(b) \implies a = b)$.

f es Sobreyectiva $\equiv (\forall b \in B)\ (\exists a \in A)\ (f(a) = b)$.

f es Sobreyectiva $\equiv b \in B \implies (\exists a \in A)\ \ (f(a) = b)$.

f es Biyectiva $\equiv f$ es Inyectiva y Sobreyectiva.

Imagen de un conjunto. Dada una función $f : A \to B$ y $A' \subseteq A$, se define la imagen de A' mediante f como el conjunto de los elementos de B que son imágenes de algún elemento de A'. Simbólicamente:

$$f(A') = \{y \in B : \exists x \in A' \ \ (f(x) = y)\}$$

Imagen inversa o preimagen. Dada una función $f : A \to B$ y $B' \subseteq B$, se define la imagen inversa, o preimagen, de B′ mediante f como el conjunto de los elementos de A cuyas imágenes mediante f pertenecen a B′. Simbólicamente:

$$f^{-1}(B') = \{x \in A : f(x) \in B'\}$$