Laboratorium 1

Janusz Pawlicki

1. Wstęp

1.1 Układy LTI

Powyższy układ będzie liniowy jeśli spełniona będzie zasada superpozycji:

$$g[u_1(t) + u_2(t)] = y_1(t) + y_2(t)$$

oraz zasada jednorodności:

$$g[au(t)] = ay(t)$$

Powyższy układ będzie niezmienniczy w czasie jeśli na opóźnione wejście odpowie tak samo opóźnionym wyjściem, czyli spełniona będzie zasada:

$$g[u(t-\tau)] = y(t-\tau)$$

W Matlabie istnieją cztery podstawowe sposoby reprezentacji układów liniowych, niezmienniczych w czasie (ang. *Linear Time-Invariant*, LTI):

• za pomocą transmitancji (ang. *transfer function*),

• za pomocą zer, biegunów i wzmocnienia układu (ang. *zero/pole/gain*),

• w przestrzeni stanów (ang. *state space*),

• w postaci schematu blokowego w Simulinku.

1.2 Transformata Laplace'a

Transformata Laplace'a funkcji f (t) – lokalnie całkowalnej – jest dana jako:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Odwrotna transformata Laplace'a funkcji $F(s)$ wyraża się wzorem:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) e^{st} ds$$

Co skrótowo zapisujemy jako:

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$$

Przykładowo, policzmy transformatę Laplace'a funkcji skokowej (funkcji Heaviside):

$$f(t) = H(t-a) \qquad \text{dla } a > 0$$

Obliczając całkę zgodnie z definicją, mamy:

$$F(s) = \int_0^\infty H(t-a) e^{-st} dt = \int_a^\infty e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} |_a^\infty = \frac{1}{s} e^{-as}$$

1.3 Transmitacja

Transmitancja operatorowa (funkcja przejścia) to stosunek transformaty Laplace'a sygnału wyjściowego Y(s) do transformaty Laplace'a sygnału wejściowego U(s) przy zerowych warunkach początkowych:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Transmitancja w postaci wielomianowej jest dana wzorem:

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \ldots + b_{n-1} s + b_n}{a_1 s^{m-1} + \ldots + a_{m-1} s + a_m}$$

W wersji **sfaktoryzowanej** (czyli takiej, w której współczynnik przy każdym s jest równy jeden) transmitancję można wyrazić jako:

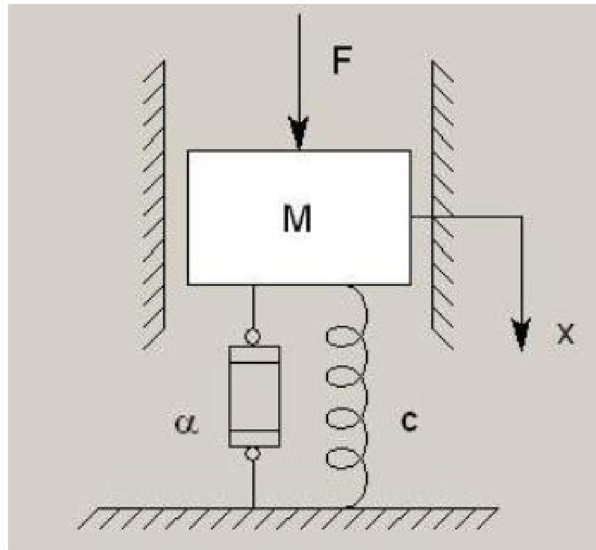
$$G(s) = k \frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_n)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_m)}$$

gdzie: $z_1 \ldots z_n$ – **zera**, $p_1 \ldots p_m$ – **bieguny**, k – **wzmocnienie**.

Uproszczony model zawieszenia samochodowego można przedstawić za pomocą układu inercyjnego II rzędu:

Oznaczenia:

F – siła wymuszająca
M – masa „pojazdu"
x – przemieszczenie masy
α – stała tłumika
c – stała sprężyny



Układ można opisać równaniem różniczkowym II rzędu:

$$M\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx = F$$

Aby policzyć transmitancję, obie strony równania należy poddać transformacie Laplace'a (zakładamy zerowe warunki początkowe):

$$Ms^2X(s) + \alpha sX(s) + cX(s) = F(s)$$

Po uporządkowaniu:

$$X(s)(Ms^2 + \alpha s + c) = F(s)$$

Zakładając, że $F(s)$ jest wejściem, a $X(s)$ wyjściem układu, transmitancja jest dana wzorem:

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + \alpha s + c}$$

1.4 Przetrzeń stanów

Obiekt w tzw. *przestrzeni stanów* jest opisany za pomocą układu równań:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

gdzie **u** jest wejściem, **y** – wyjściem, **x** – stanem układu.
Współrzędne stanu wybiera się zazwyczaj jako wyjścia z integratorów (bloków całkujących). W naszym przypadku (modelu zawieszenia) możemy wybrać jako **zmienne stanu** przemieszczenie x oraz prędkość dx/dt:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases}$$

Wobec tego, pochodne zmiennych stanu wynoszą:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{F}{M} - \dfrac{\alpha}{M} x_2 - \dfrac{c}{M} x_1 \end{cases}$$

co można zapisać w postaci macierzowej dla równania stanu:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{c}{M} & -\dfrac{\alpha}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix} F$$

i dla równania wyjścia:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Macierze A, B, C, D wynoszą więc:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{c}{M} & -\dfrac{\alpha}{M} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathrm{D} = 0$$

Zadanie 1.

Narysuj funkcję Heaviside oraz jej transformatę Laplace'a dla a = 1 za pomocą funkcji `ezplot`

a) Definiiowanie zmiennych symbolicznych.

```
syms t s
syms a positive
f = heaviside(t - a)
```

f = $\mathrm{heaviside}(t - a)$

```
Fs = laplace(f, t, s)
```

Fs =

$$\frac{e^{-a\,s}}{s}$$

b) Rysowanie wykresów funkcji za pomocą funkcji ezplot.

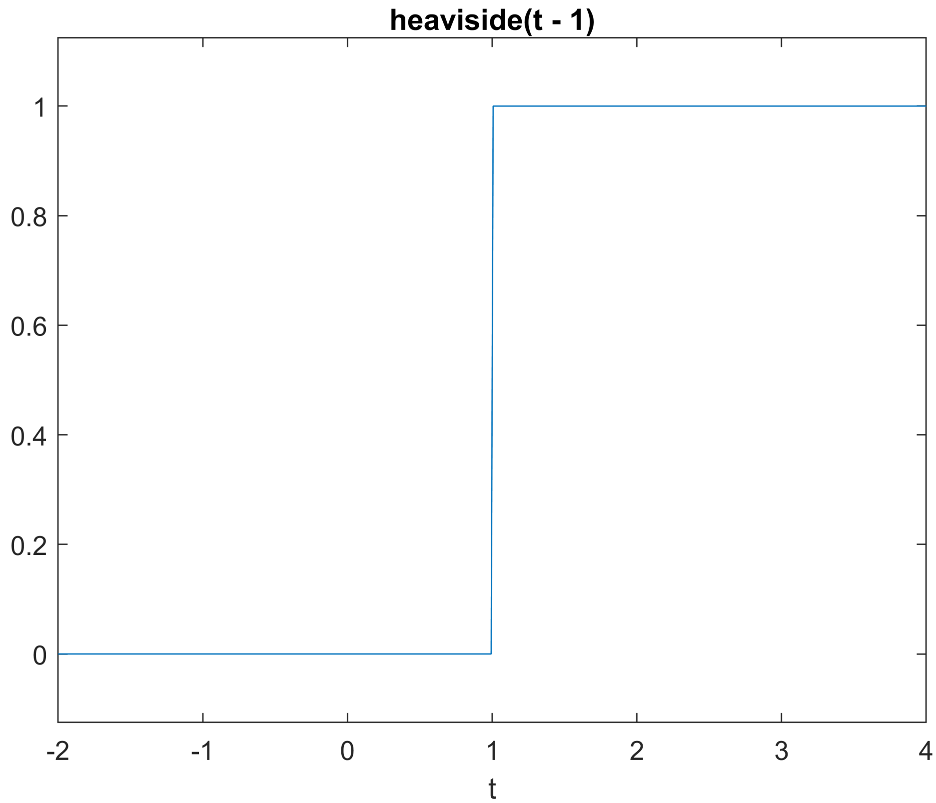
```
a = 1
```

a = 1

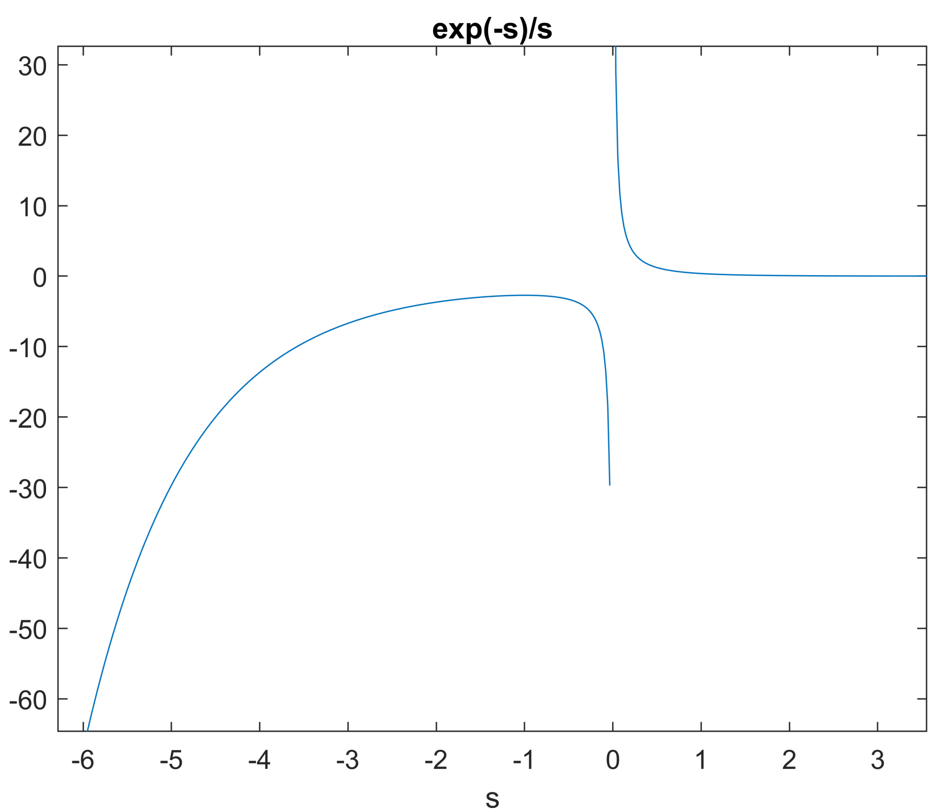
```
f1 = heaviside(t - a)
```

f1 = $\mathrm{heaviside}(t - 1)$

```
ezplot(f1, [-2, 4])
```




```
ezplot(laplace(f1, t, s))
```



Zadanie 2.

```
M = 1000
```

```
M = 1000
```

```
F = 1000
```

```
F = 1000
```

```
alfa = 500
```

```
alfa = 500
```

```
c = 400
```

```
c = 400
```

```
licz = [0 0 1]
```

```
licz = 1×3
     0     0     1
```

```
mian = [1000 500 400]
```

```
mian = 1×3
        1000         500         400
```

a) Odpowiedz na pytania:

- czy bieguny są rzeczywiste?

- czy układ jest stabilny?

```
obiekt = tf(licz, mian)
```

```
obiekt =
 
            1
  ----------------------
  1000 s^2 + 500 s + 400
 
Continuous-time transfer function.
```

```
Pole = pole(obiekt)
```

```
Pole = 2×1 complex
  -0.2500 + 0.5809i
  -0.2500 - 0.5809i
```

```
stable = isstable(obiekt)
```

```
stable = logical
   1
```

Bieguny są zespolone.

Układ jest stabilny.

b) Za pomocą funkcji tf2zp oblicz zera, bieguny i wzmocnienie transmitancji i przedstaw ją w postaci sfaktoryzowanej.

```
[z, p, k] = tf2zp(licz, mian)
```

```
z =

  0×1 empty double column vector
p = 2×1 complex
  -0.2500 + 0.5809i
  -0.2500 - 0.5809i
k = 1.0000e-03
```

```
zeros = z
```

```
zeros =

  0×1 empty double column vector
```

```
bieguny = p
```

```
bieguny = 2×1 complex
  -0.2500 + 0.5809i
  -0.2500 - 0.5809i
```

```
wzmocnienie = k
```

```
wzmocnienie = 1.0000e-03
```

```
factor_form = tf([0 0 1/c], [M/c alfa/c 1])
```

```
factor_form =

         0.0025
  --------------------
  2.5 s^2 + 1.25 s + 1

Continuous-time transfer function.
```

c) Dobierz tak parametry układu aby zaobserwować odpowiedzi układu na skok jednostkowy w przypadku oscylacyjnym i tłumionym.

```
zeta = alfa/(2 * sqrt(c * M))
```

```
zeta = 0.3953
```

Dla wcześniej podanych parametrów układ jest oscylacyjny.

```
M1 = 500
```

```
M1 = 500
```

```
c1 = 200
```

```
c1 = 200
```

```
alfa1 = 650
```

```
alfa1 = 650
```

```
zeta1 = alfa1/(2 * sqrt(c1 * M1))
```

```
zeta1 = 1.0277
```

Dla nowo dobranych parametrów układ jest tłumiony.

Zadanie 3.

Za pomocą funkcji zpk zapisz poniższą transmitancję:

$$G(s) = \frac{4s+1}{s(0.2s+1)(10s+1)}$$

Wpółczynniki funkcji zpk to :

- z = -1/4
- p = [0 -5 -1/10]
- k = 2

```
obiekt = zpk(-1/4, [0 -5 -1/10], 2)
```

```
obiekt =

    2 (s+0.25)
  ---------------
  s (s+5) (s+0.1)

Continuous-time zero/pole/gain model.
```

Zadanie 4.

Dokonaj konwersji transmitancji modelu zawieszenia do przestrzeni stanów obiema metodami tj. za pomocą funkcji `zp2ss` oraz `tf2ss` i porównaj wyniki (czy macierze `A,B,C,D` są takie same? czy odpowiedzi skokowe są takie same?).

```
A = [ 0, 1; -c/M, -alfa/M]
```

```
A = 2×2
         0    1.0000
   -0.4000   -0.5000
```

```
B = [0; 1/M]
```

```
B = 2×1
10^-3 ×
         0
    1.0000
```

```
C = [1 0]
```

```
C = 1×2
     1     0
```

```
D = 0
```

```
D = 0
```

```
obiekt = ss(A, B, C, D)
```

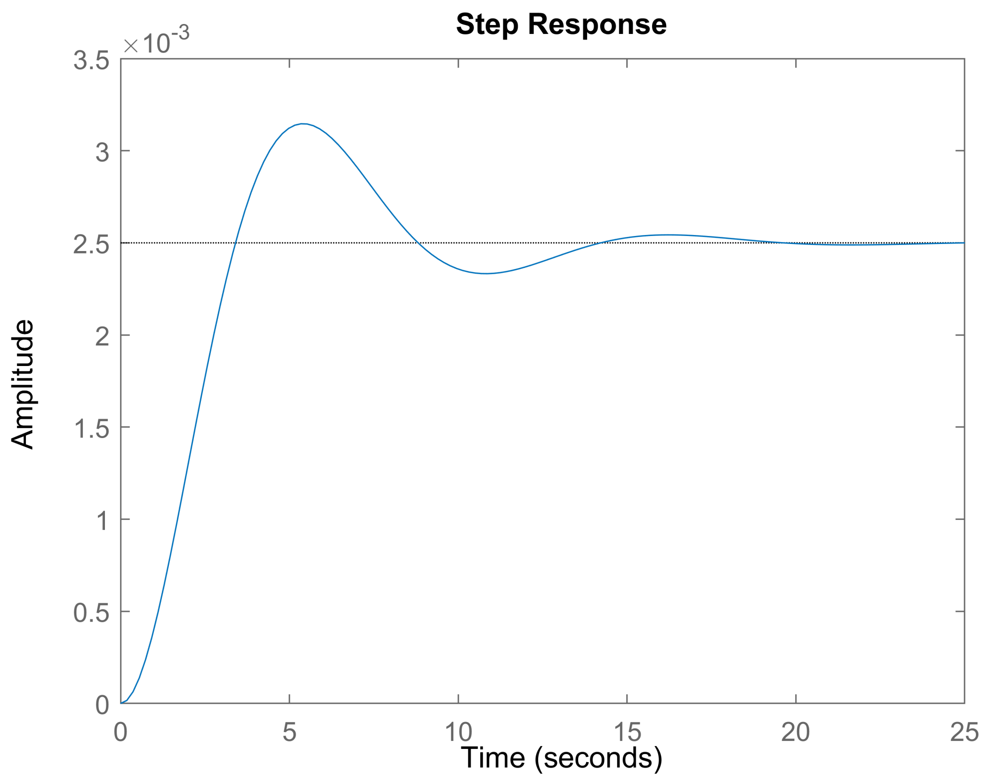
```
obiekt =

  A =
          x1    x2
   x1      0     1
   x2   -0.4  -0.5

  B =
           u1
   x1       0
   x2   0.001

  C =
       x1  x2
   y1   1   0

  D =
       u1
   y1   0

Continuous-time state-space model.
```

a) Funkcja zp2ss

```
[A1, B1, C1, D1] = zp2ss(z, p, k)
```

```
A1 = 2×2
   -0.5000   -0.6325
    0.6325         0
B1 = 2×1
     1
     0
C1 = 1×2
         0    0.0016
D1 = 0
```

```
step(A1, B1, C1, D1)
```

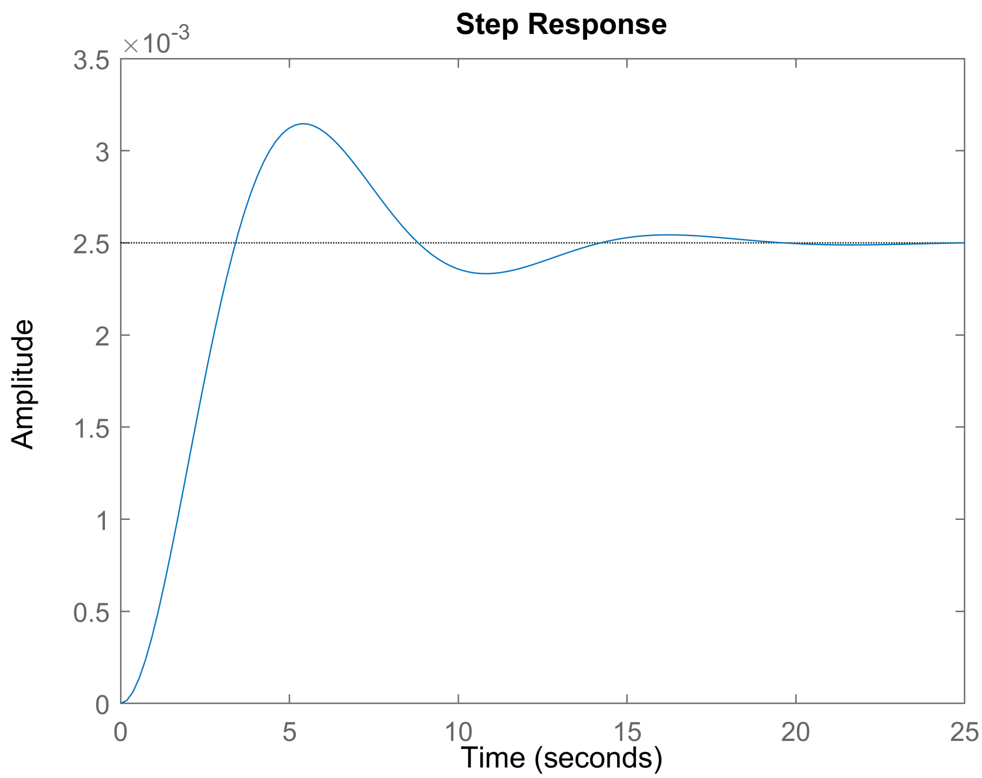


b) Funkcja tf2ss

```
[A2, B2, C2, D2] = tf2ss(licz, mian)
```

```
A2 = 2×2
   -0.5000   -0.4000
    1.0000         0
B2 = 2×1
     1
     0
C2 = 1×2
10^-3 ×
         0    1.0000
D2 = 0
```

```
step(A2, B2, C2, D2)
```



Macierze funkcji zp2ss i tf2ss nie są takie same.

Natomiast odpowiedzi skokowe w postaci wykresu są takie same.

Zadanie 5.

Oblicz transmitancję zastępczą Gsys dla połączenia szeregowego, równoległego i ujemnego sprzężenia zwrotnego, zakładając, że transmitancje obiektów sys1 i sys2 są dane jako:

$$G_{sys1}(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+1} \quad \text{oraz} \quad G_{sys2}(s) = \frac{1}{s^3+s^2-2s+1}$$

a) Gsys1

```
licz1 = [1 1]
```

```
licz1 = 1×2
     1     1
```

```
mian1 = [1 5 1]
```

```
mian1 = 1×3
     1     5     1
```

```
gsys1 = tf(licz1, mian1)
```

```
gsys1 =

     s + 1
  -------------
  s^2 + 5 s + 1

Continuous-time transfer function.
```

b) Gsys2

```
licz2 = [1]
```

```
licz2 = 1
```

```
mian2 = [1 1 -2 1]
```

```
mian2 = 1×4
     1     1    -2     1
```

```
gsys2 = tf(licz2, mian2)
```

```
gsys2 =

          1
  -------------------
  s^3 + s^2 - 2 s + 1

Continuous-time transfer function.
```

transmitacja zastępcza dla połączenia szeregowego

```
sys_series = series(gsys1, gsys2)
```

```
sys_series =

                  s + 1
  -------------------------------------
  s^5 + 6 s^4 + 4 s^3 - 8 s^2 + 3 s + 1

Continuous-time transfer function.
```

transmitacja zastępcza dla połączenia równoległego

```
sys_parallel = parallel(gsys1, gsys2)
```

```
sys_parallel =

          s^4 + 2 s^3 + 4 s + 2
  -------------------------------------
  s^5 + 6 s^4 + 4 s^3 - 8 s^2 + 3 s + 1

Continuous-time transfer function.
```

transmitacja zastępcza dla ujemnego sprzężenia

```
sys_feedbck = feedback(gsys1, gsys2)
```

```
sys_feedbck =

        s^4 + 2 s^3 - s^2 - s + 1
```

```
  ------------------------------------
  s^5 + 6 s^4 + 4 s^3 - 8 s^2 + 4 s + 2

Continuous-time transfer function.
```