

Laboratorium 7

Dyskretna transformacja Fouriera

Janusz Pawlicki

1. Ćwiczenia

1.1 Zadanie 1

Przeprowadź analizę sygnału $x_1(t) = \sin(2\pi f_1 t)$ próbkowanego z częstotliwością f_p . Szkic programu znajduje się na rysunku 1. Analizę zacznij od

$N = 10$ próbek sygnału wejściowego. Uzupełnij niekompletną implementację transformacji DFT zgodnie ze wzorem:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$$

```
clear all;
close all

syms t w

N = 10; % liczba próbek
fp = 1000; % Hz
Tp = 1/fp;
A1 = 1; f1 = 100; % Hz
x1 = A1*sin(2*pi*f1*t);
x = x1;

tn = [0:N-1]*Tp; % wsp. czasowe próbek
xn = double(subs(x,t,tn));
Xk = zeros(1,N);

for k = 0:N-1 % impl. wzoru (8)
    for n = 0:N-1
        Xk(k+1) = Xk(k+1) + xn(n+1)*(exp(-1j*2*pi/N)^(k*n));
    end
end

Xk_fft = fft(xn,N); %funkcja wbudowana
dft_err = sum(abs(Xk_fft-Xk))
```

```
dft_err = 1.8374e-14
```

```
disp('DFT error:'); disp(dft_err);
```

```
DFT error:
1.8374e-14
```

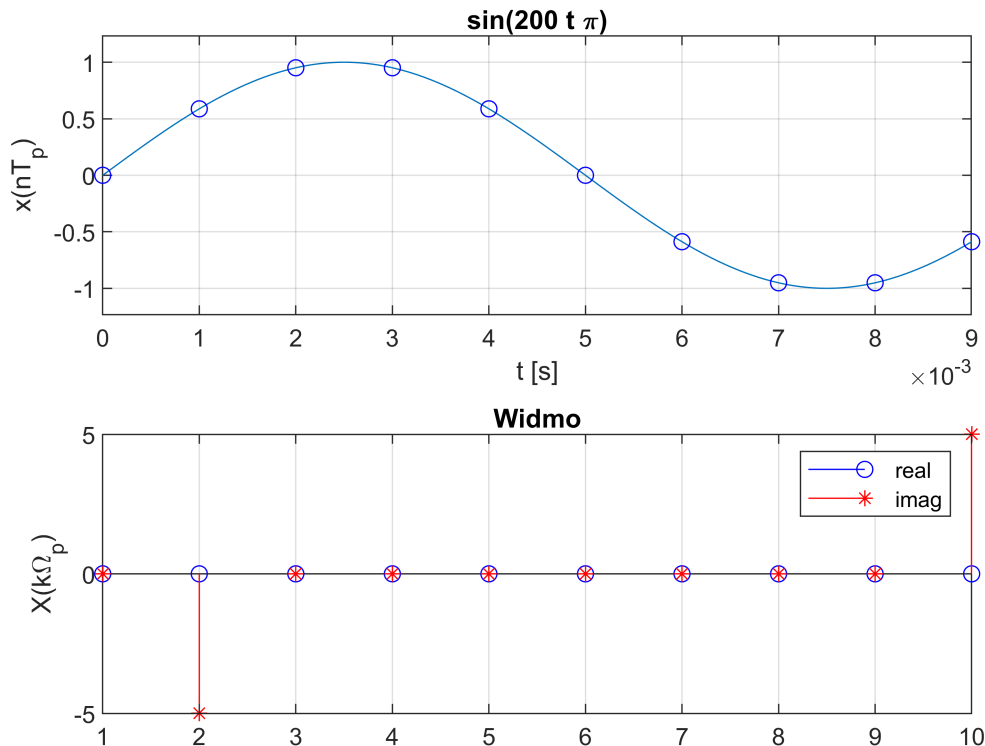
```
figure;
```

```

subplot(2,1,1)
ezplot(x,[tn(1),tn(N)]); hold on; grid on
plot(tn, xn,'ob');
xlabel('t [s]'); ylabel('x(nT_p)');

subplot(2,1,2)
stem(real(Xk),'ob'); grid on, hold on
stem(imag(Xk),'*r');
title('Widmo'),
ylabel('X(k\Omega_p)'); %xlabel('f [Hz]')
legend('real','imag')
hold off

```



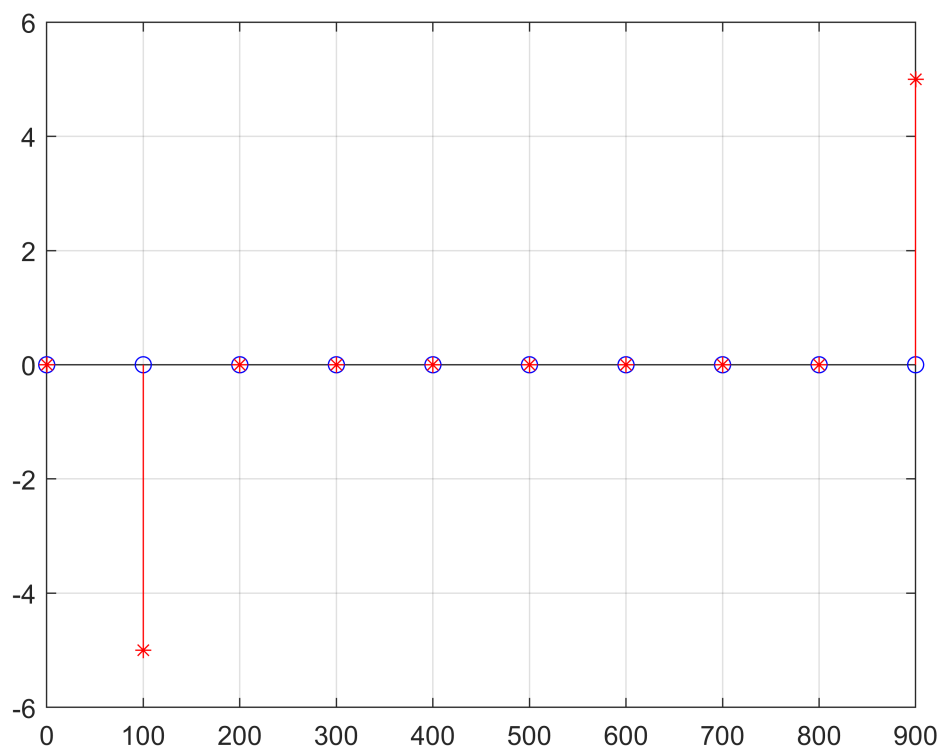
1.2 Zadanie 2

Otrzymany wykres widma nie jest zupełnie poprawny. Uzgódnij skalę częstotliwości (oś x wykresu) aby była oznaczona w jednostkach częstotliwości [Hz].

```

figure
wk = fp*[0:N-1]/N; % oś częstotliwości
stem(wk, real(Xk), 'ob'); grid on; hold on;
stem(wk, imag(Xk), '*r');
hold off

```

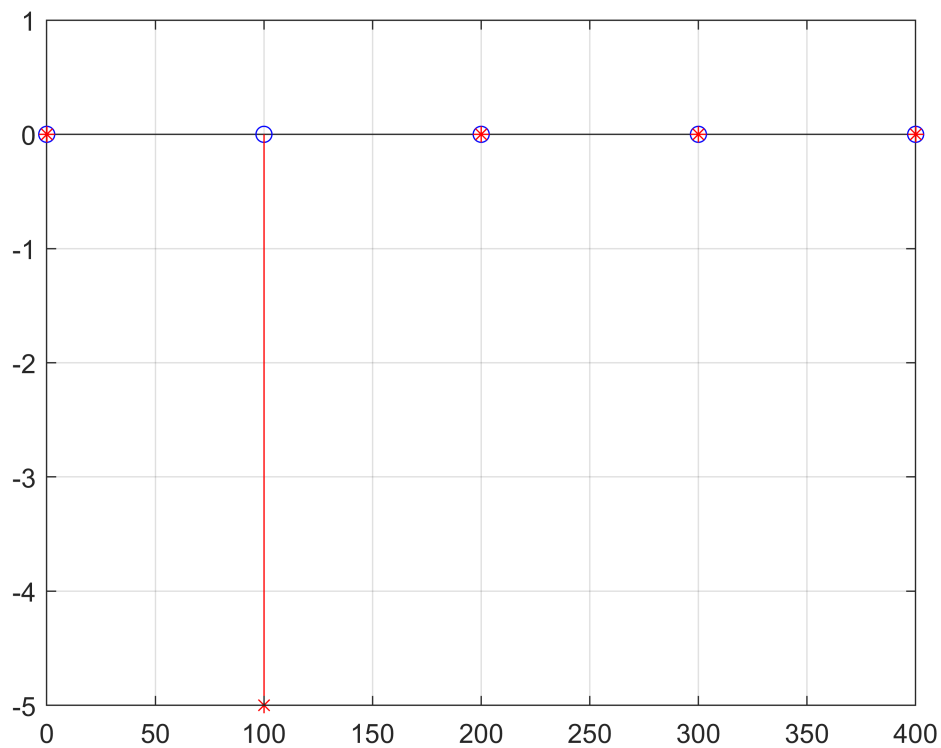


1.3 Zadanie 3

Usuń z wykresu, tą część widma która odpowiada częstotliwościom ujemnym

(por. Podstawowe własności transformaty DFT - Symetria) pozostawiając jedynie użyteczną część.

```
figure
wk = fp*[0:N/2-1]/N;    % oś częstotliwości
stem(wk, real(Xk(1:N/2)), 'ob'); grid on; hold on;
stem(wk, imag(Xk(1:N/2)), '*r');
hold off
```



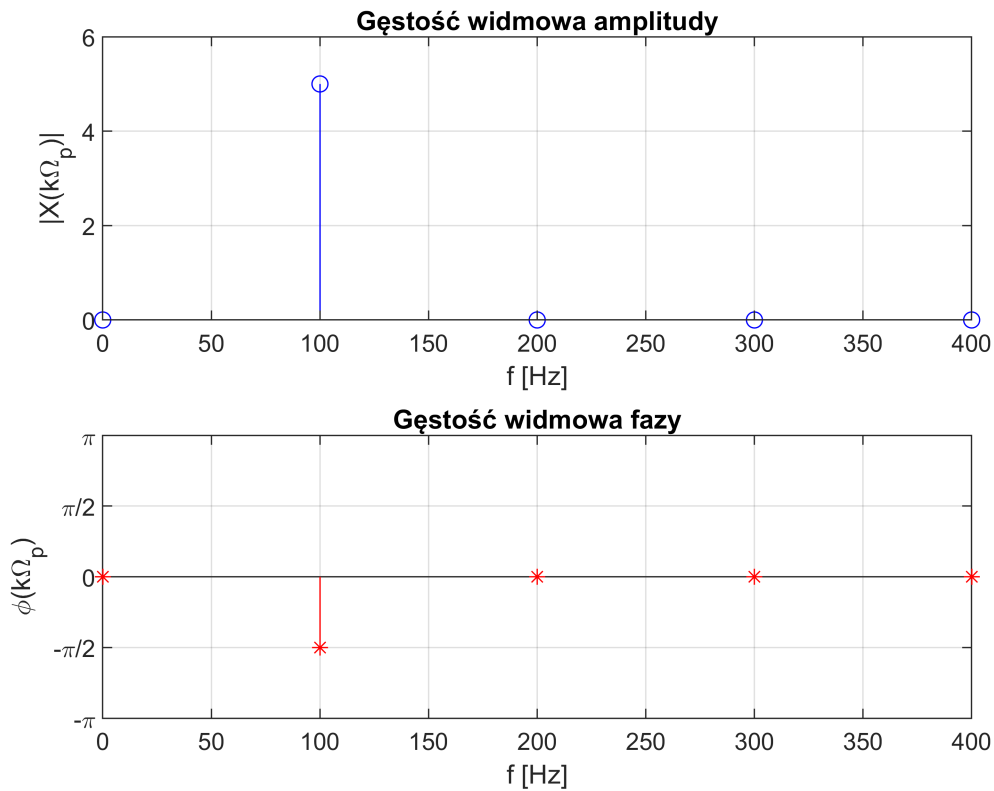
1.4 Zadanie 4

Dodaj do wykresu widmową gęstość amplitudową oraz widmową gęstość fazy sygnału.

```
tol = 10e-5;
Xk( abs(Xk) < tol ) = 0;

figure;
subplot(2,1,1);
stem(wk, abs(Xk(1:N/2)), 'ob'); grid on; hold on;
ylabel('|X(k\Omega_p)|');
title('Gęstość widmowa amplitudy');
xlabel('f [Hz]');

subplot(2,1,2);
stem(wk, angle(Xk(1:N/2)), '*r'); grid on;
yticks([-2*pi, -1.5*pi, -pi, -pi/2, 0, pi/2, pi, 1.5*pi, 2*pi]);
ylim([-pi, pi]);
yticklabels({'-2\pi', '-3/2\pi', '-\pi', '-\pi/2', '0', '\pi/2', '\pi', '3/2\pi', '2\pi'});
ylabel('\phi(k\Omega_p)');
title('Gęstość widmowa fazy');
xlabel('f [Hz]');
hold off
```



1.5 Zadanie 5

Wyznacz widmo dla $N = 15$ oraz $N = 20$.

N = 15

```
clear all;
close all

syms t w

N = 15; % liczba próbek
fp = 1000; % Hz
Tp = 1/fp;
A0 = 5;
A1 = 1; f1 = 100; % Hz
x1 = A1*sin(2*pi*f1*t);
x = x1;

tn = [0:N-1]*Tp; % wsp. czasowe próbek

xn = double(subs(x,t,tn));
Xk = zeros(1,N);

for k = 0:N-1 % impl. wzoru (8)
    for n = 0:N-1
        Xk(k+1) = Xk(k + 1) + xn(n + 1)*(exp(-1j*2*pi/N)^(k*n));
    end
end
```

```
end
```

```
Xk_fft = fft(xn,N); %funkcja wbudowana  
dft_err = sum(abs(Xk_fft-Xk))
```

```
dft_err = 1.0642e-13
```

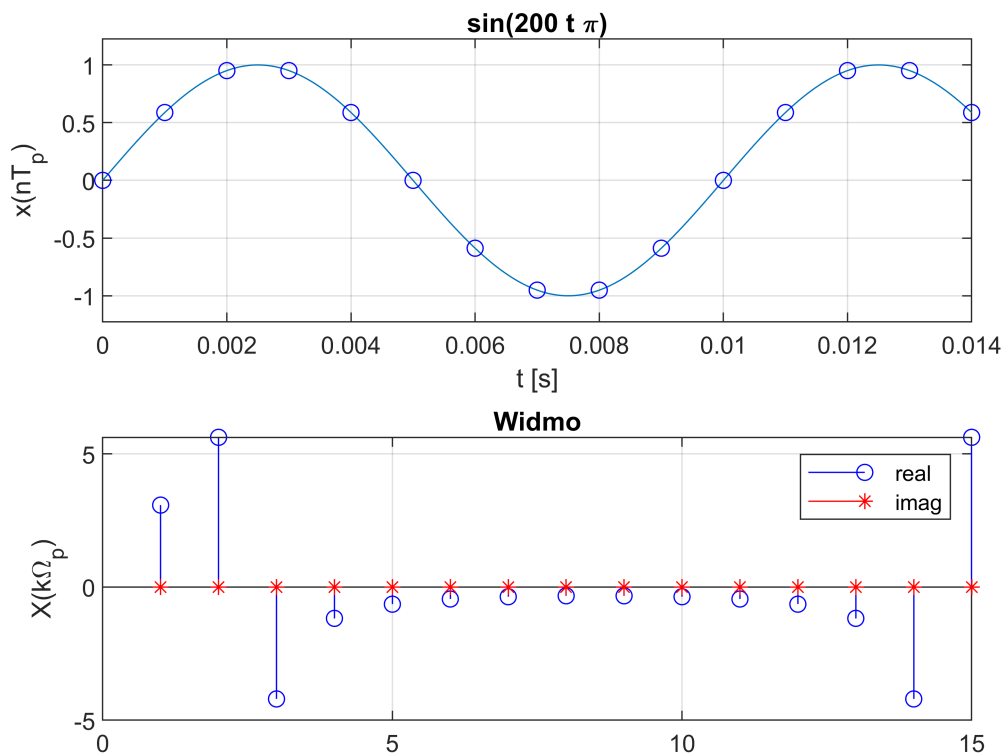
```
disp('DFT error:'); disp(dft_err);
```

```
DFT error:  
1.0642e-13
```

```
wk = fp*[0:floor(N/2)-1]/N; % oś częstotliwości
```

```
figure;  
subplot(2,1,1)  
ezplot(x,[tn(1),tn(N)]); hold on; grid on  
plot(tn, xn,'ob');  
xlabel('t [s]'); ylabel('x(nT_p)');
```

```
subplot(2,1,2)  
stem(real(Xk),'ob'); grid on, hold on  
stem(imag(Xk),'*r');  
title('Widmo'),  
ylabel('X(k\Omega_p)'); %xlabel('f [Hz]')  
legend('real','imag')  
hold off
```



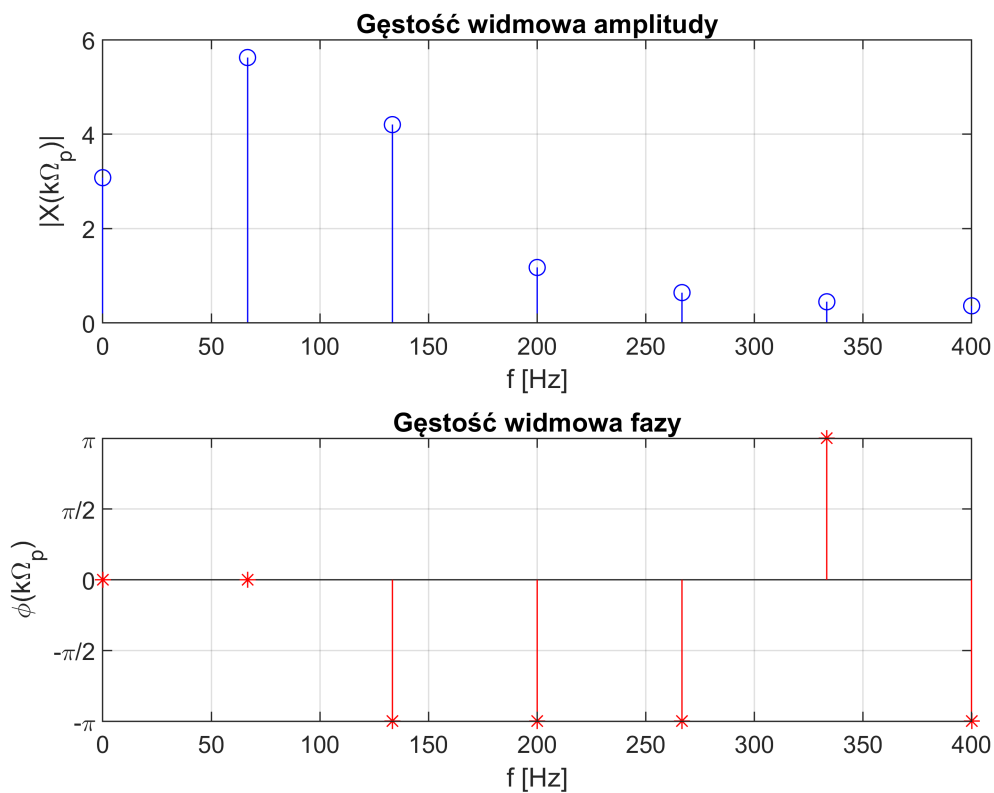
```

tol = 10e-5;
Xk( abs(Xk) < tol ) = 0;

figure;
subplot(2,1,1);
stem(wk, abs(Xk(1:floor(N/2))), 'ob'); grid on; hold on;
ylabel('|X(k\Omega_p)|');
title('Gęstość widmowa amplitudy');
xlabel('f [Hz]');

subplot(2,1,2);
stem(wk, angle(Xk(1:floor(N/2))), '*r'); grid on;
yticks([-2*pi, -1.5*pi, -pi, -pi/2, 0, pi/2, pi, 1.5*pi, 2*pi]);
ylim([-pi, pi]);
yticklabels({'-2\pi', '-3/2\pi', '-\pi', '-\pi/2', '0', '\pi/2', '\pi', '3/2\pi', '2\pi'});
ylabel('\phi(k\Omega_p)');
title('Gęstość widmowa fazy');
xlabel('f [Hz]');
hold off

```



N = 20

```

clear all;
close all

syms t w

N = 20; % liczba próbek

```

```

fp = 1000; % Hz
Tp = 1/fp;
A0 = 5;
A1 = 1; f1 = 100; % Hz
x1 = A1*sin(2*pi*f1*t);
x = x1;

tn = [0:N-1]*Tp; % wsp. czasowe próbek
xn = double(subs(x,t,tn));
Xk = zeros(1,N);

for k = 0:N-1 % impl. wzoru (8)
    for n = 0:N-1
        Xk(k+1) = Xk(k + 1) + xn(n + 1)*(exp(-1j*2*pi/N)^(k*n));
    end
end

Xk_fft = fft(xn,N); %funkcja wbudowana
dft_err = sum(abs(Xk_fft-Xk))

```

```
dft_err = 2.7865e-13
```

```
disp('DFT error:'); disp(dft_err);
```

```

DFT error:
2.7865e-13

```

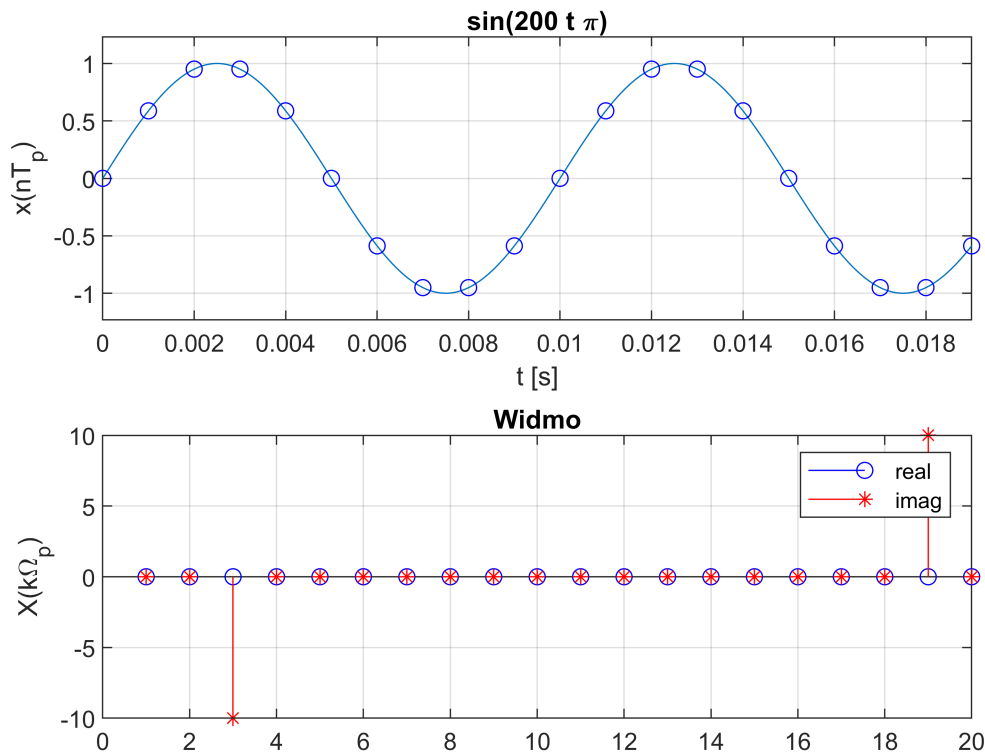
```

wk = fp*[0:N/2-1]/N; % oś częstotliwości

figure;
subplot(2,1,1)
ezplot(x,[tn(1),tn(N)]); hold on; grid on
plot(tn, xn,'ob');
xlabel('t [s]'); ylabel('x(nT_p)');

subplot(2,1,2)
stem(real(Xk),'ob'); grid on, hold on
stem(imag(Xk),'*r');
title('Widmo'),
ylabel('X(k\Omega_p)'); %xlabel('f [Hz]')
legend('real','imag')
hold off

```

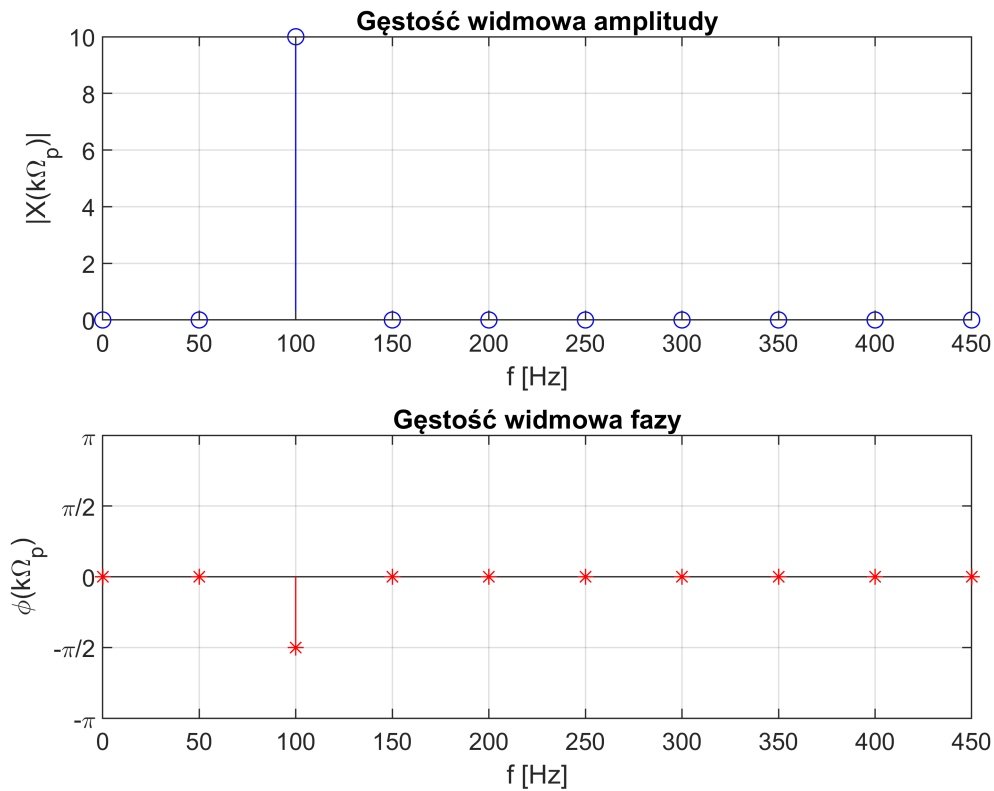
```

tol = 10e-5;
Xk( abs(Xk) < tol ) = 0;

figure;
subplot(2,1,1);
stem(wk, abs(Xk(1:N/2)), 'ob'); grid on; hold on;
ylabel('|X(k\Omega_p)|');
title('Gęstość widmowa amplitudy');
xlabel('f [Hz]');

subplot(2,1,2);
stem(wk, angle(Xk(1:N/2)), '*r'); grid on;
yticks([-2*pi, -1.5*pi, -pi, -pi/2, 0, pi/2, pi, 1.5*pi, 2*pi]);
ylim([-pi, pi]);
yticklabels({'-2\pi', '-3/2\pi', '-\pi', '-\pi/2', '0', '\pi/2', '\pi', '3/2\pi', '2\pi'});
ylabel('\phi(k\Omega_p)');
title('Gęstość widmowa fazy');
xlabel('f [Hz]');
hold off

```



1.6 Zadanie 6

Wyznacz widmo sygnału $x_3(t) = \sin(2\pi f_3 t)$ dla $N = 10$ próbek gdzie $f_3 = 150$ [Hz]. Zjawisko widoczne na wykresach to tzw. przeciek widma.

```
clear all;
close all

syms t w

N = 10; % liczba próbek
fp = 1000; % Hz
Tp = 1/fp;
A0 = 5;
A1 = 1; f3 = 150; % Hz
x1 = A1*sin(2*pi*f3*t);
x = x1;

tn = [0:N-1]*Tp; % wsp. czasowe próbek
xn = double(subs(x,t,tn));
Xk = zeros(1,N);

for k = 0:N-1 % impl. wzoru (8)
    for n = 0:N-1
        Xk(k+1) = Xk(k + 1) + xn(n + 1)*(exp(-1j*2*pi/N)^(k*n));
    end
end
```

```
Xk_fft = fft(xn,N); %funkcja wbudowana
dft_err = sum(abs(Xk_fft-Xk))
```

```
dft_err = 2.3639e-14
```

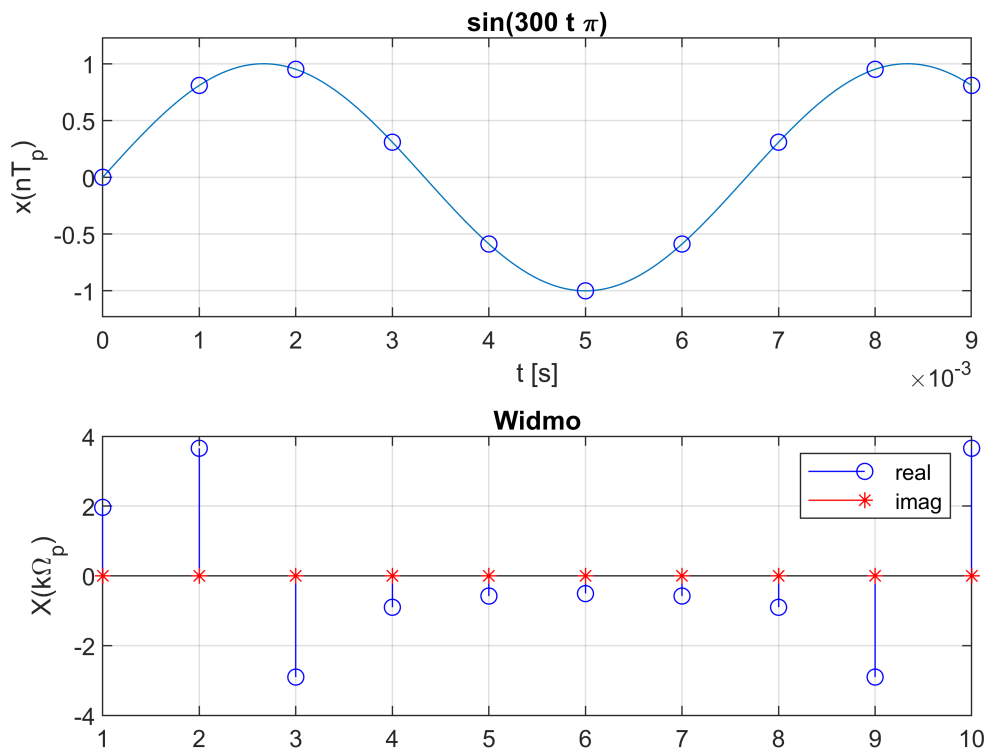
```
disp('DFT error:'); disp(dft_err);
```

```
DFT error:
2.3639e-14
```

```
wk = fp*[0:floor(N/2)-1]/N;
```

```
figure;
subplot(2,1,1)
ezplot(x,[tn(1),tn(N)]); hold on; grid on
plot(tn, xn,'ob');
xlabel('t [s]'); ylabel('x(nT_p)');
```

```
subplot(2,1,2)
stem(real(Xk),'ob'); grid on, hold on
stem(imag(Xk),'*r');
title('Widmo'),
ylabel('X(k\Omega_p)'); %xlabel('f [Hz]')
legend('real','imag')
hold off
```



```
tol = 10e-5;
```

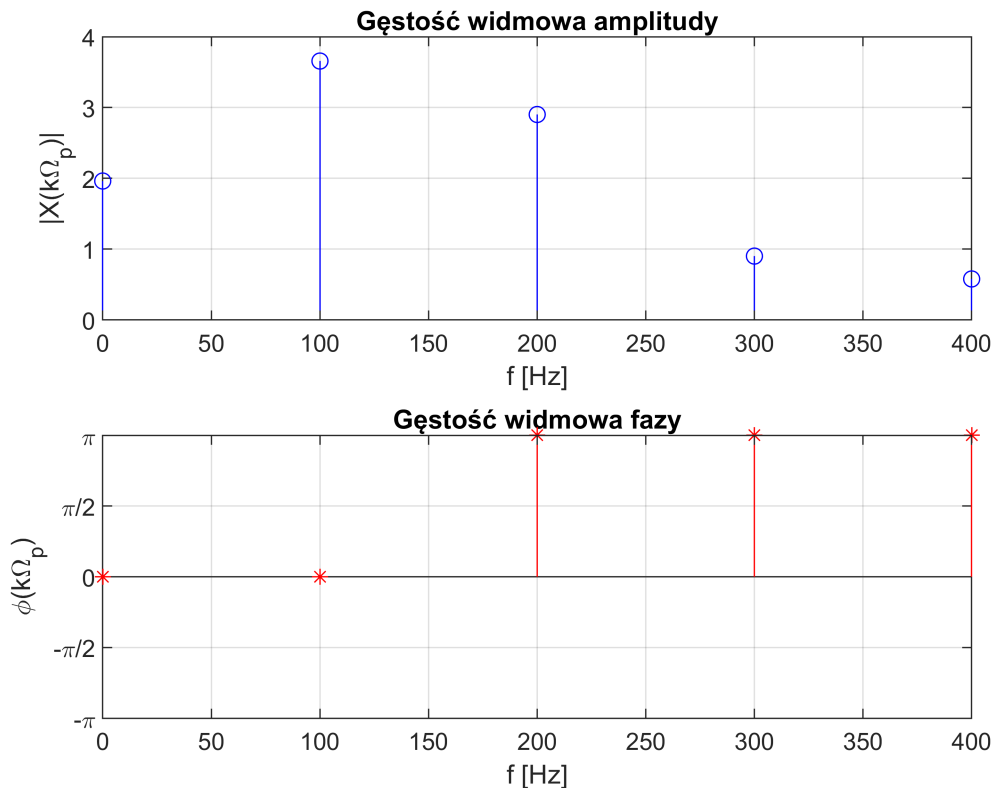
```

Xk( abs(Xk) < tol ) = 0;

figure;
subplot(2,1,1);
stem(wk, abs(Xk(1:N/2)), 'ob'); grid on; hold on;
ylabel('|X(k\Omega_p)|');
title('Gęstość widmowa amplitudy');
xlabel('f [Hz]');

subplot(2,1,2);
stem(wk, angle(Xk(1:N/2)), '*r'); grid on;
yticks([-2*pi, -1.5*pi, -pi, -pi/2, 0, pi/2, pi, 1.5*pi, 2*pi]);
ylim([-pi, pi]);
yticklabels({'-2\pi', '-3/2\pi', '-\pi', '-\pi/2', '0', '\pi/2', '\pi', '3/2\pi', '2\pi'});
ylabel('\phi(k\Omega_p)');
title('Gęstość widmowa fazy');
xlabel('f [Hz]');
hold off

```



1.7 Zadanie 7

Wyznacz widmo sygnału $x_3(t) = \sin(2\pi f_3 t)$ dla $N = 10$ próbek gdzie $f_3 = 150[\text{Hz}]$ i zapoznaj się z nim. Spostrzeżenia zapisz w sprawozdaniu. Zjawisko widoczne na wykresach to tzw. przeciek widma.

a) okno trójkątne

```

clear;
close all;

```

```

syms t w

N = 10;
fp = 1000; % Hz
Tp = 1/fp;
A1 = 10; f1 = 100; % Hz
x1 = A1*sin(2*pi*f1*t);
x = x1;

tn = [0:N-1]*Tp;
wk = fp*[0:N/2-1]/N;
xn = double(subs(x,t,tn));
Xk = zeros(1,N);

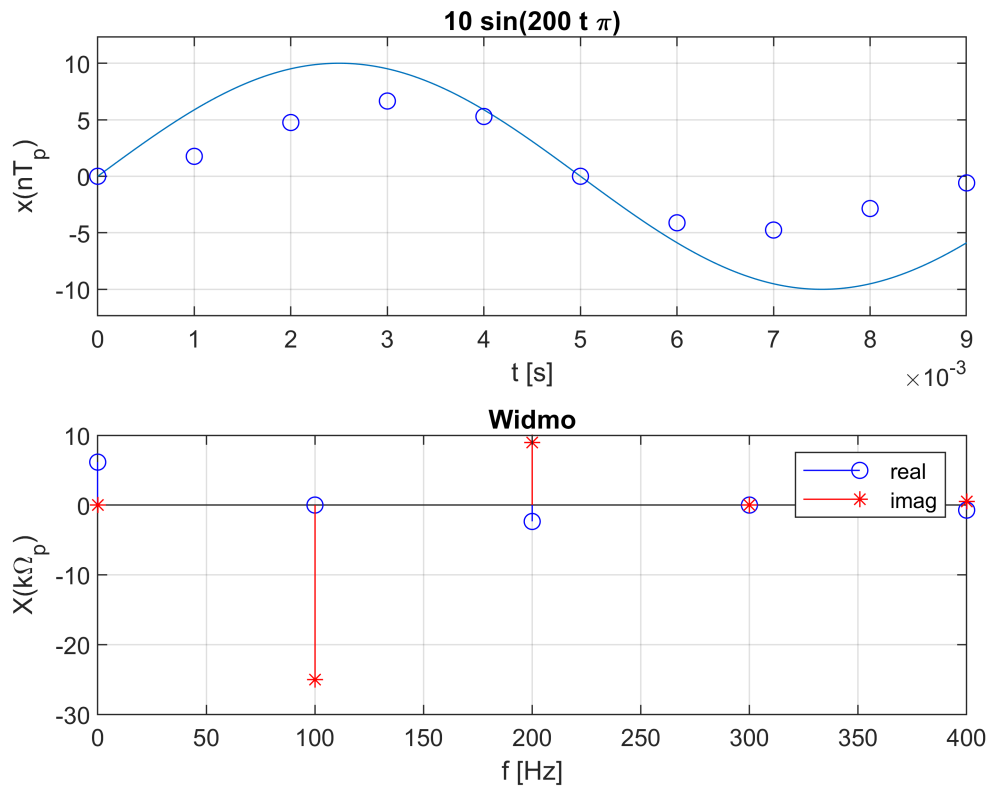
xn = xn.*triang(N)';

for k = 0:N-1
    for n = 0:N-1
        Xk(k+1) = Xk(k+1) + xn(n+1)*exp(-1j*2*pi/N*k*n);
    end
end

figure(1);
subplot(2,1,1);
ezplot(x,[tn(1),tn(N)]); hold on; grid on;
plot(tn, xn, 'ob');
xlabel('t [s]'); ylabel('x(nT_p)');

subplot(2,1,2);
stem(wk, real(Xk(1:N/2)), 'ob'); grid on; hold on;
stem(wk, imag(Xk(1:N/2)), '*r');
title('Widmo');
ylabel('X(k\Omega_p)'); xlabel('f [Hz]');
legend('real', 'imag');

```



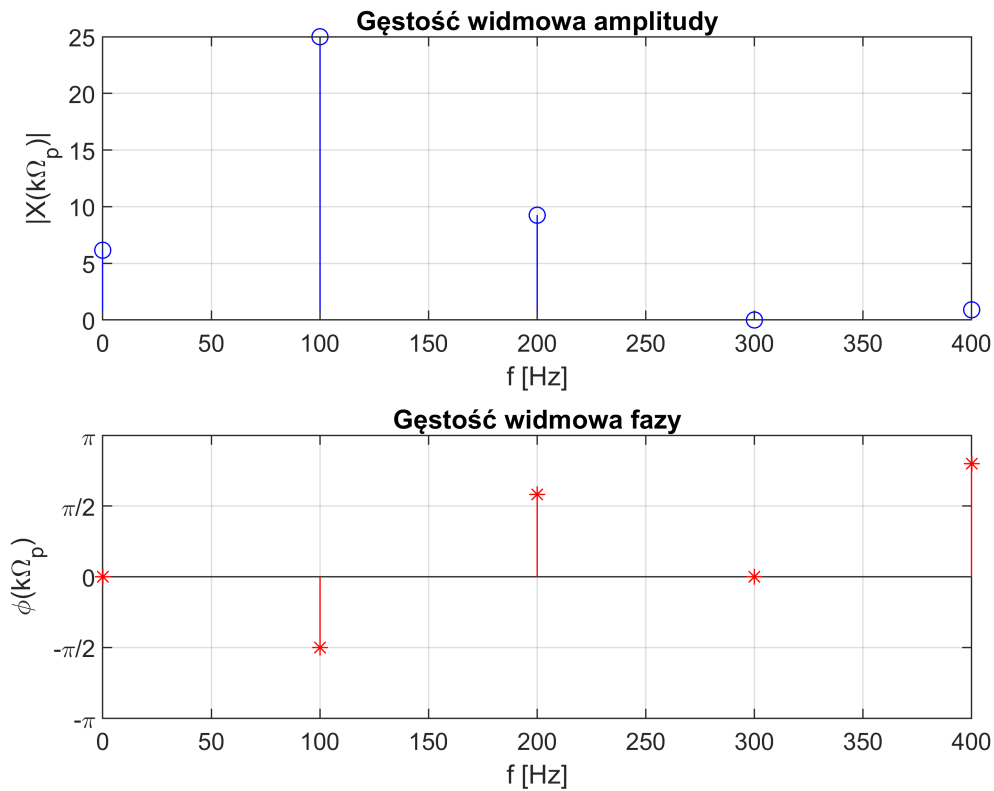
```

tol = 1e-2;
Xk(abs(Xk) < tol) = 0;

figure(2);
subplot(2,1,1);
stem(wk, abs(Xk(1:N/2)), 'ob'); grid on; hold on;
ylabel('|X(k\Omega_p)|');
title('Gęstość widmowa amplitudy');
xlabel('f [Hz]');

subplot(2,1,2);
stem(wk, angle(Xk(1:N/2)), '*r'); grid on;
yticks([-2*pi, -1.5*pi, -pi, -pi/2, 0, pi/2, pi, 1.5*pi, 2*pi]);
ylim([-pi, pi]);
yticklabels({'-2\pi', '-3/2\pi', '-\pi', '-\pi/2', '0', '\pi/2', '\pi', '3/2\pi', '2\pi'});
ylabel('\phi(k\Omega_p)');
title('Gęstość widmowa fazy');
xlabel('f [Hz]');

```



b) okno Gaussa

```
clear;
close all;
syms t w

N = 10;
fp = 1000; % Hz
Tp = 1/fp;
A1 = 10; f1 = 100; % Hz
x1 = A1*sin(2*pi*f1*t);
x = x1;

tn = [0:N-1]*Tp;
wk = fp*[0:N/2-1]/N;
xn = double(subs(x,t,tn));
Xk = zeros(1,N);

xn = xn.*window(@gausswin,N,2.5)';

for k = 0:N-1
    for n = 0:N-1
        Xk(k+1) = Xk(k+1) + xn(n+1)*exp(-1j*2*pi/N*k*n);
    end
end

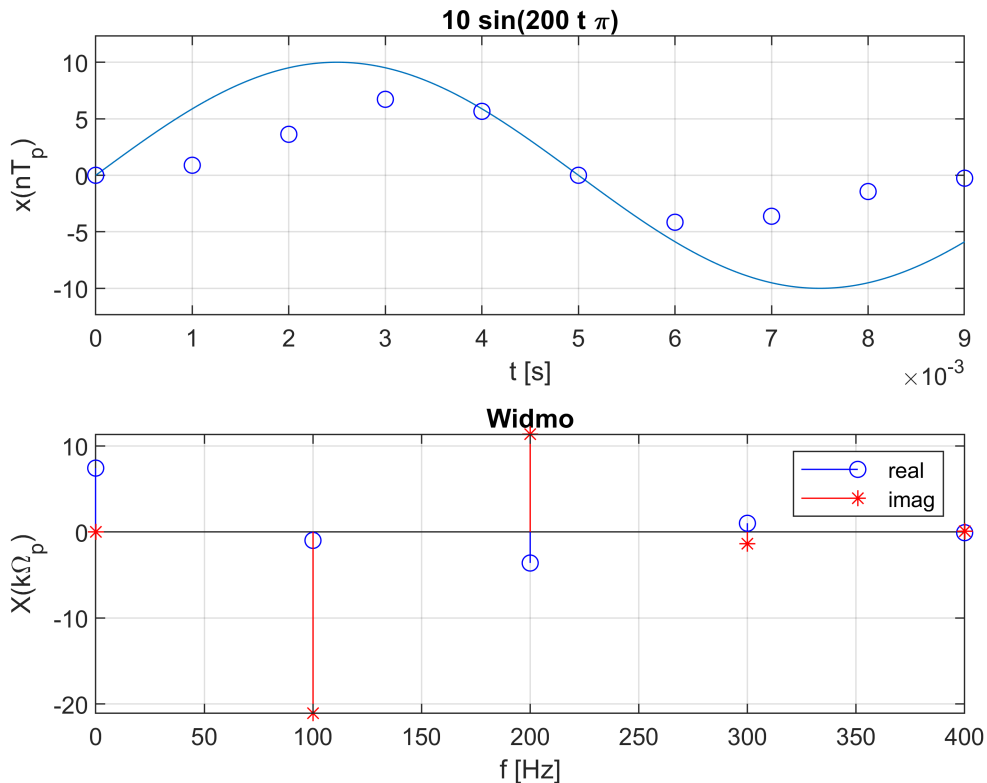
figure(1);
```

```

subplot(2,1,1);
ezplot(x,[tn(1),tn(N)]); hold on; grid on;
plot(tn, xn, 'ob');
xlabel('t [s]'); ylabel('x(nT_p)');

subplot(2,1,2);
stem(wk, real(Xk(1:N/2)), 'ob'); grid on; hold on;
stem(wk, imag(Xk(1:N/2)), '*r');
title('Widmo');
ylabel('X(k\Omega_p)'); xlabel('f [Hz]');
legend('real', 'imag');

```



```

tol = 1e-2;
Xk(abs(Xk) < tol) = 0;

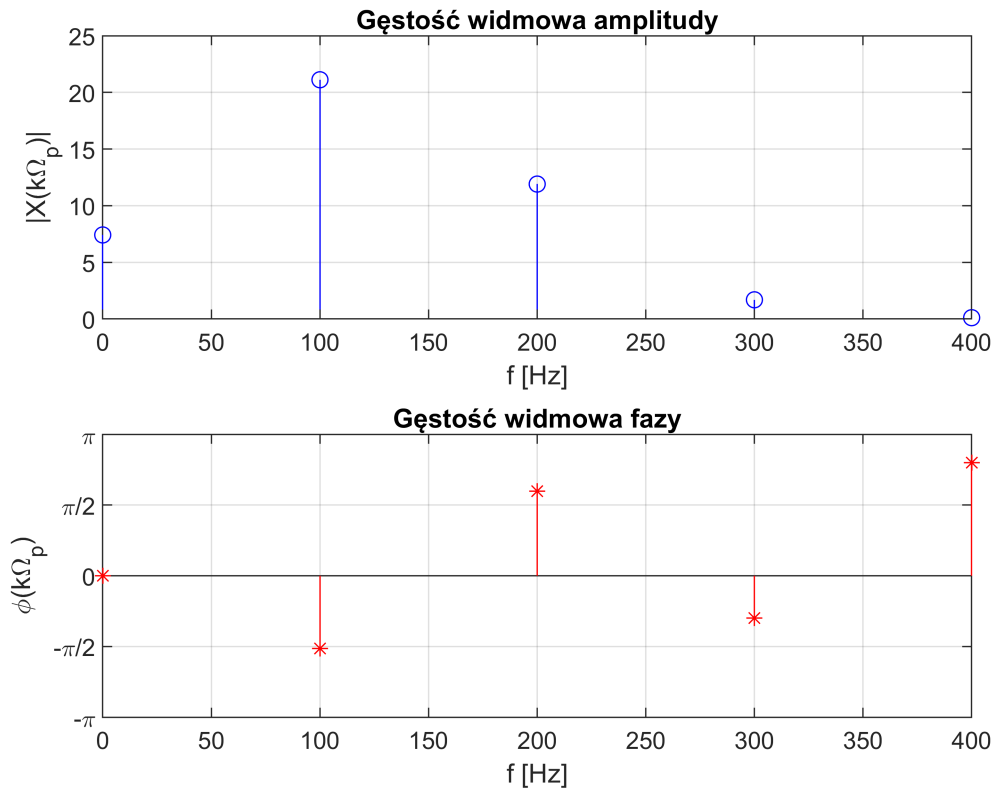
figure(2);
subplot(2,1,1);
stem(wk, abs(Xk(1:N/2)), 'ob'); grid on; hold on;
ylabel('|X(k\Omega_p)|');
title('Gęstość widmowa amplitudy');
xlabel('f [Hz]');

subplot(2,1,2);
stem(wk, angle(Xk(1:N/2)), '*r'); grid on;
yticks([-2*pi, -1.5*pi, -pi, -pi/2, 0, pi/2, pi, 1.5*pi, 2*pi]);
ylim([-pi, pi]);
yticklabels({'-2\pi', '-3/2\pi', '-\pi', '-\pi/2', '0', '\pi/2', '\pi', '3/2\pi', '2\pi'});
ylabel('\phi(k\Omega_p)');

```



```
title('Gęstość widmowa fazy');
xlabel('f [Hz]');
```



c) Okno Czebyszewa

```
clear;
close all;
syms t w

N = 10;
fp = 1000; % Hz
Tp = 1/fp;
A0 = 5;
A1 = 10; f1 = 100; % Hz
x1 = A1*sin(2*pi*f1*t);
x = x1;

tn = [0:N-1]*Tp;
wk = fp*[0:N/2-1]/N;
xn = double(subs(x,t,tn));
Xk = zeros(1,N);

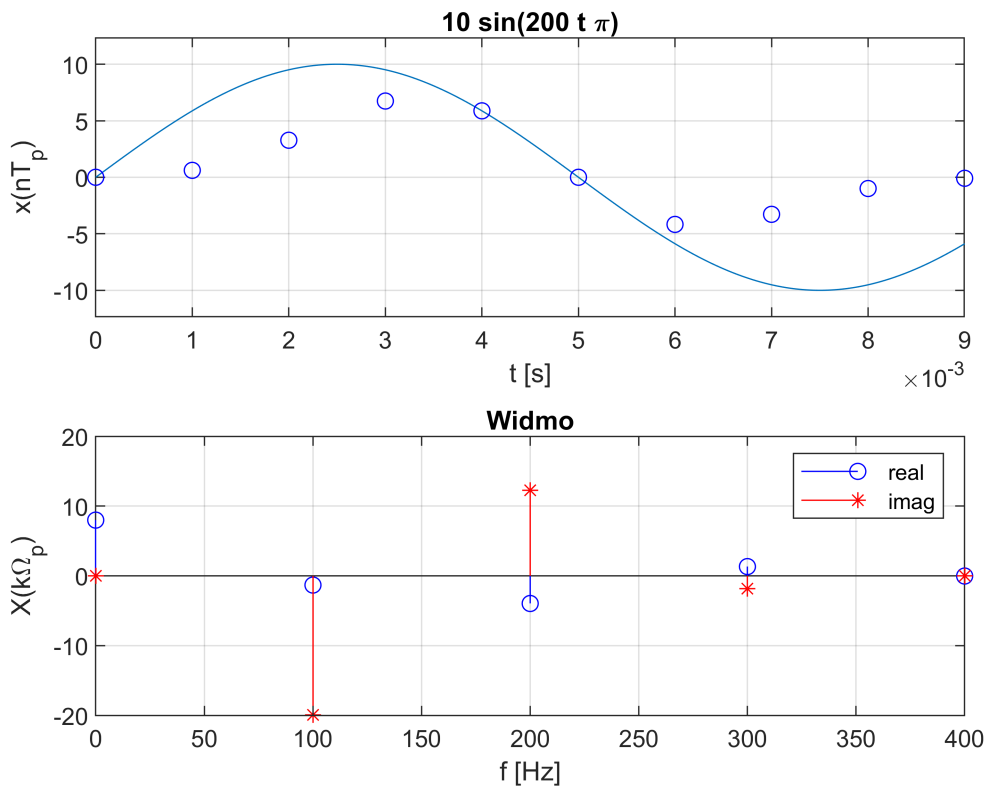
xn = xn.*chebwin(N)';

for k = 0:N-1
    for n = 0:N-1
        Xk(k+1) = Xk(k+1) + xn(n+1)*exp(-1j*2*pi/N*k*n);
    end
end
```

```
end
```

```
figure(1);
subplot(2,1,1);
ezplot(x,[tn(1),tn(N)]); hold on; grid on;
plot(tn, xn, 'ob');
xlabel('t [s]'); ylabel('x(nT_p)');

subplot(2,1,2);
stem(wk, real(Xk(1:N/2)), 'ob'); grid on; hold on;
stem(wk, imag(Xk(1:N/2)), '*r');
title('Widmo');
ylabel('X(k\Omega_p)'); xlabel('f [Hz]');
legend('real', 'imag');
```

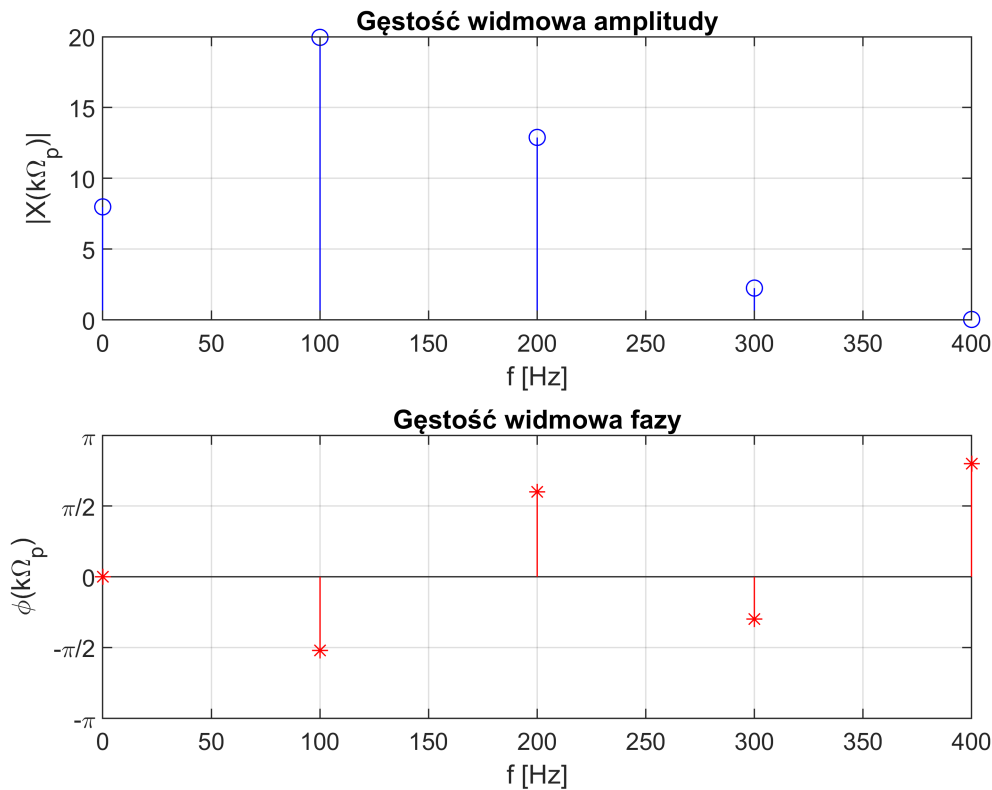


```
tol = 1e-2;
Xk(abs(Xk) < tol) = 0;

figure(2);
subplot(2,1,1);
stem(wk, abs(Xk(1:N/2)), 'ob'); grid on; hold on;
ylabel('|X(k\Omega_p)|');
title('Gęstość widmowa amplitudy');
xlabel('f [Hz]');

subplot(2,1,2);
stem(wk, angle(Xk(1:N/2)), '*r'); grid on;
yticks([-2*pi, -1.5*pi, -pi, -pi/2, 0, pi/2, pi, 1.5*pi, 2*pi]);
```

```
ylim([-pi, pi]);
yticklabels({'-2\pi', '-3/2\pi', '-\pi', '-\pi/2', '0', '\pi/2', '\pi', '3/2\pi', '2\pi'});
ylabel('\phi(k\Omega_p)');
title('Gęstość widmowa fazy');
xlabel('f [Hz]');
```



Zadanie 1.8

Zdefiniuj sygnał $x = A_1 \sin(2\pi f_1 t) + A_2 \sin(2\pi f_2 t)$; i sporządź wykresy dla $A_2 = 5.0$; oraz $f_2 = 200$. Spróbkowany sygnał x_n przesunij cylicznie w prawo o 2 próbki w prawo, zaobserwuj zmiany w widmie i opisz je w sprawozdaniu.

```
clear;
close all;
syms t w

N = 10;
fp = 1000; % Hz
Tp = 1/fp;
A1 = 10; f1 = 100; % Hz
A2 = 5.0; f2 = 200;
x8 = A1*sin(2*pi*f1*t) + A2*sin(2*pi*f2*t);
x = x8;

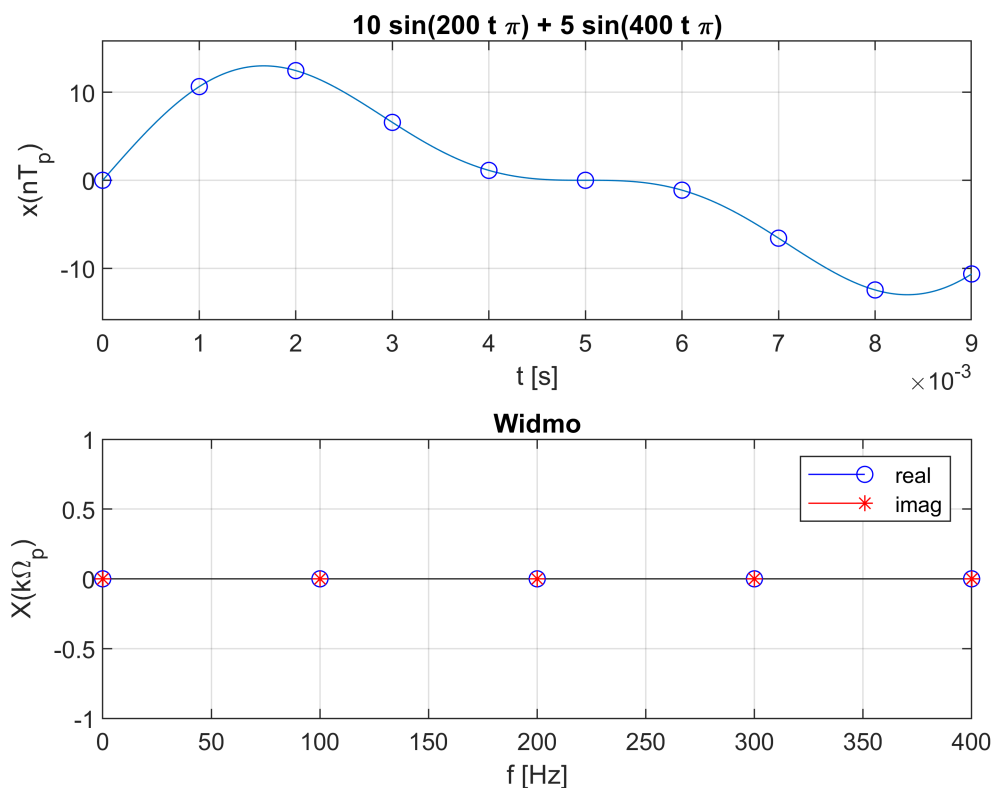
tn = [0:N-1]*Tp;
wk = fp*[0:N/2-1]/N;
xn = double(subs(x,t,tn));
Xk = zeros(1,N);
```

```
Xk_fft = fft(xn,N);
dft_err = sum(abs(Xk_fft - Xk));
disp('DFT error:'); disp(dft_err);
```

DFT error:
150

```
figure(1);
subplot(2,1,1);
ezplot(x,[tn(1),tn(N)]); hold on; grid on;
plot(tn, xn, 'ob');
xlabel('t [s]'); ylabel('x(nT_p)');

subplot(2,1,2);
stem(wk, real(Xk(1:N/2)), 'ob'); grid on; hold on;
stem(wk, imag(Xk(1:N/2)), '*r');
title('Widmo');
ylabel('X(k\Omega_p)'); xlabel('f [Hz]');
legend('real', 'imag');
```



```
tol = 1e-2;
Xk(abs(Xk) < tol) = 0;

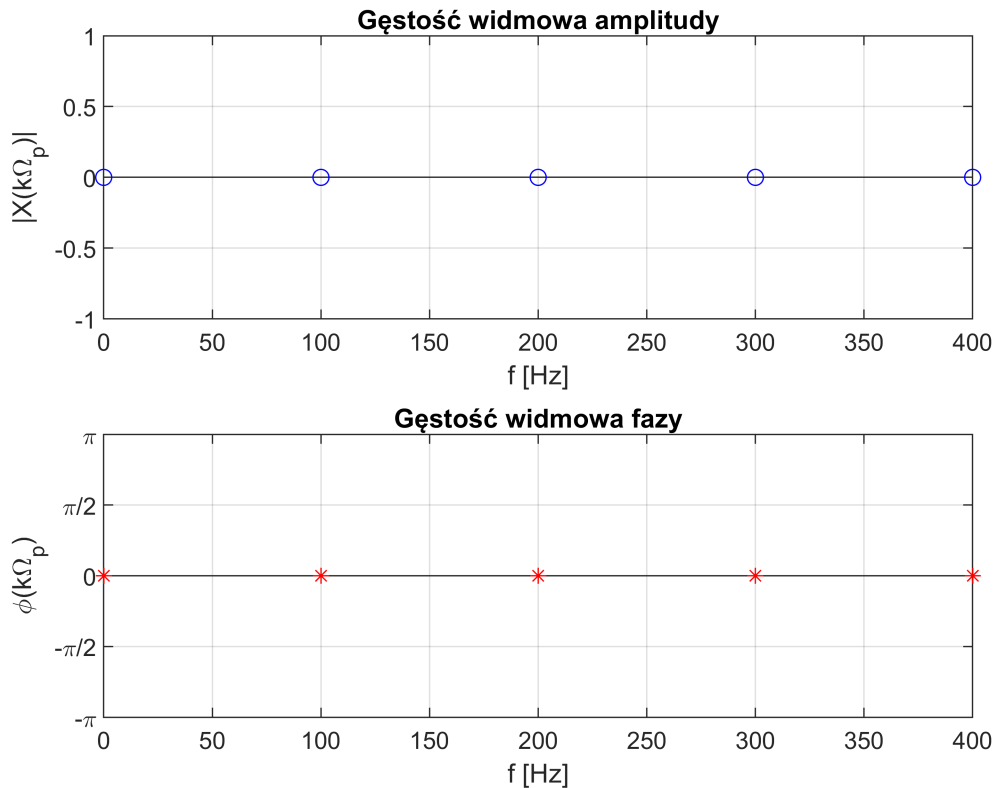
figure(2);
subplot(2,1,1);
stem(wk, abs(Xk(1:N/2)), 'ob'); grid on; hold on;
```

```

ylabel('|X(k\Omega_p)|');
title('Gęstość widmowa amplitudy');
xlabel('f [Hz]');

subplot(2,1,2);
stem(wk, angle(Xk(1:N/2)), '*r'); grid on;
yticks([-2*pi, -1.5*pi, -pi, -pi/2, 0, pi/2, pi, 1.5*pi, 2*pi]);
ylim([-pi, pi]);
yticklabels({'-2\pi', '-3/2\pi', '-\pi', '-\pi/2', '0', '\pi/2', '\pi', '3/2\pi', '2\pi'});
ylabel('\phi(k\Omega_p)');
title('Gęstość widmowa fazy');
xlabel('f [Hz]');

```



1.8 Przesunięcie cykliczne

```

clear;
close all;
syms t w

N = 10;
fp = 1000; % Hz
Tp = 1/fp;
A0 = 5;
A1 = 10; f1 = 100; % Hz
A2 = 5.0; f2 = 200

```

```
f2 = 200
```

```

x8 = A1*sin(2*pi*f1*t) + A2*sin(2*pi*f2*t);
x = x8;

tn = [0:N-1]*Tp;
wk = fp*[0:N/2-1]/N;
xn = double(subs(x,t,tn));
Xk = zeros(1,N);

%przesuniecie cykliczne
xm = zeros(1,N);
m = 2;
for n = 0:N-1
    xm(n+1) = xn(mod(n + m, N)+1);
end
xn = xm;

for k = 0:N-1 % impl. wzoru (8)
    for n = 0:N-1
        Xk(k+1) = Xk(k + 1) + xn(n + 1)*(exp(-1j*2*pi/N)^(k*n));
    end
end

Xk_fft = fft(xn,N);
dft_err = sum(abs(Xk_fft - Xk));
disp('DFT error:'); disp(dft_err);

```

```

DFT error:
3.2165e-13

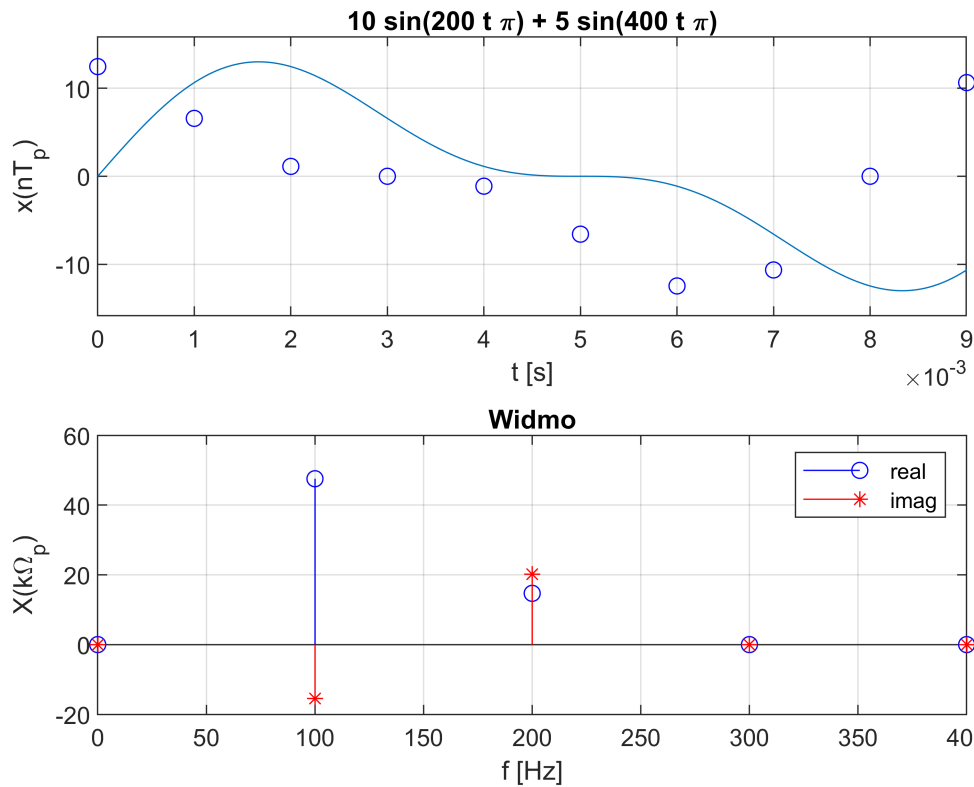
```

```

figure(1);
subplot(2,1,1);
ezplot(x,[tn(1),tn(N)]); hold on; grid on;
plot(tn, xn, 'ob');
xlabel('t [s]'); ylabel('x(nT_p)');

subplot(2,1,2);
stem(wk, real(Xk(1:N/2)), 'ob'); grid on; hold on;
stem(wk, imag(Xk(1:N/2)), '*r');
title('Widmo');
ylabel('X(k\Omega_p)'); xlabel('f [Hz]');
legend('real', 'imag');

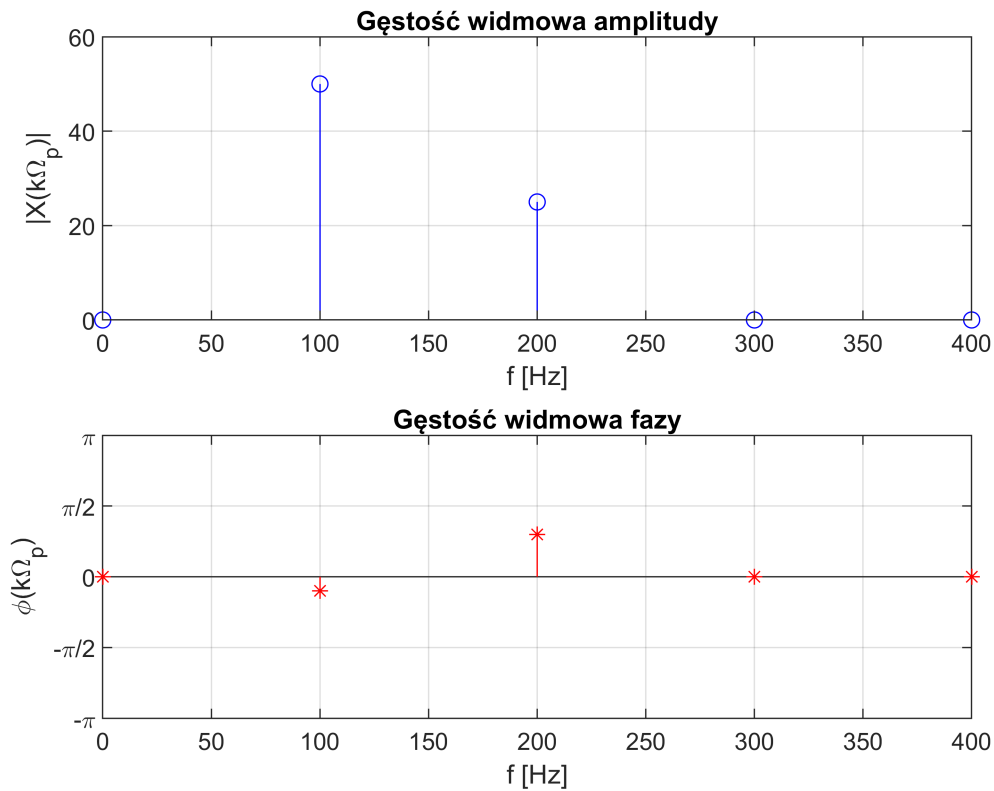
```



```
tol = 1e-2;
Xk(abs(Xk) < tol) = 0;

figure(2);
subplot(2,1,1);
stem(wk, abs(Xk(1:N/2)), 'ob'); grid on; hold on;
ylabel('|X(k\Omega_p)|');
title('Gęstość widmowa amplitudy');
xlabel('f [Hz]');

subplot(2,1,2);
stem(wk, angle(Xk(1:N/2)), '*r'); grid on;
yticks([-2*pi, -1.5*pi, -pi, -pi/2, 0, pi/2, pi, 1.5*pi, 2*pi]);
ylim([-pi, pi]);
yticklabels({'-2\pi', '-3/2\pi', '-\pi', '-\pi/2', '0', '\pi/2', '\pi', '3/2\pi', '2\pi'});
ylabel('\phi(k\Omega_p)');
title('Gęstość widmowa fazy');
xlabel('f [Hz]');
```



1.9 Zadanie domowe

Zastąp iteracyjną implementację dyskretnej transformacji Fouriera macierzową realizacją. Wówczas nie będą potrzebne pętle `for ...end` a wystarczy mnożenie macierzowe aby uzyskać zespolone dyskretne widmo.

% Funkcja w matlabie

```
W = dftmtx(N);
Xk = xn*W;
```

% Funkcja tworzona

```
W = zeros(N,N);
omega = exp(-1j*2*pi/N);
for u = 0:N-1
    for v = 0:u
        W(u+1,v+1) = omega.^(u*v);
    end
end
```

% sklejenie macierzy, pozbycie się "podwójnej przekątnej"
W = W.'+W-W.*eye(N); % macierz transponowana bez sprzężenia

```
Xk = xn*W;
```