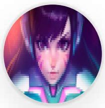
WUOLAH



Belen_Dominguez
www.wuolah.com/student/Belen_Dominguez

3914

MD - Tema 1 Apuntes.pdf

MD Apuntes Completos Temario

2º Matemática Discreta

Grado en Ingeniería Informática - Ingeniería del Software

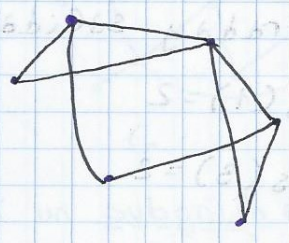
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática
US - Universidad de Sevilla

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Tema 1: Introducción a la Teoría de Grafos

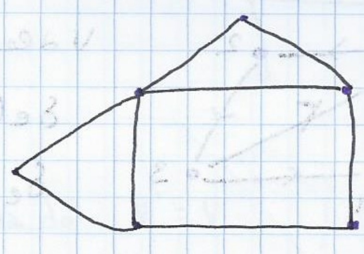
• Nociones básicas

Grafo: $G=(V,A)$ $\begin{cases} \text{Vértices} \\ \text{Aristas (pares no ordenados)} \end{cases}$ → $\{A,B\}=\{B,A\}$



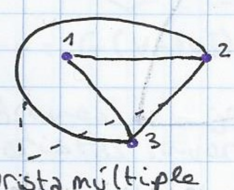
Representación gráfica

Grafo plano

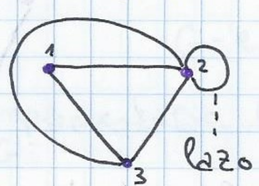


Inmersión

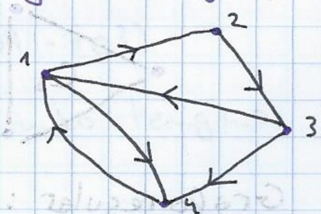
Multigrafo



Pseudografo



Dirigido o digrafo

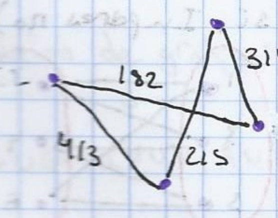


pares ordenados $(1,2)\neq(2,1)$

Digrafo múltiple ó multigrafo dirigido: digrafo con aristas múltiples

Pseudo digrafo ó pseudografo dirigido: digrafo con aristas múltiples y/ó lazos

Grafo ponderado



Valencia ó grado de un vértice ($\delta(v)$)

Aristas que parten de un vértice

Pares: $\delta(v)=2K$ Impares: $\delta(v)=2K+1$

Aislado: $\delta(v)=\emptyset$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Propiedades de la valencia (grafos simples):

$G = (V, A) \quad n = |V|$

1) $0 \leq \delta(v) \leq n-1$ [un vertice no superará el número de véretices ni será negativo]

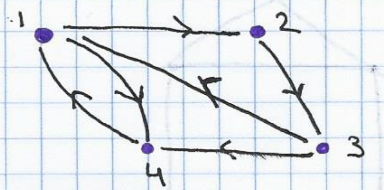
2) No puede tener un grafo simultaneamente vértices de valencia 0 y valencia n-1

3) **Lema de apretón de manos**: La suma de las valencias de los vértices es igual al doble del número de aristas:

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|A|$$

Por tanto, no puede haber un número impar de vértice de valencia impar.

Adyacencia en digrafos



Valencia de entrada y salida:

$\delta_e(1) = 2) \quad \delta_s(1) = 2$

$\delta_e(3) = 1 \quad \delta_s(3) = 2$

Grafo trivial: No contienen aristas

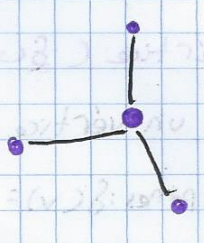
Grafo ciclo (C_n)

Grafo regular: Todos los vértices tiene misma valencia

Grafo completo (K_n): Todos los vértices tienen valencia n-1 (Ej: C_3 lo cumple y sería K_3)

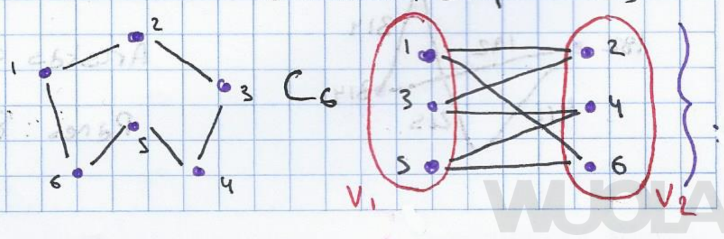
Bosque de 3 árboles (T_n)

Sin ciclos



Grafo bipartito

Dividimos los vértices en grupos y deben relacionarse entre grupos y no entre ellos. (Pares si, Impares no)

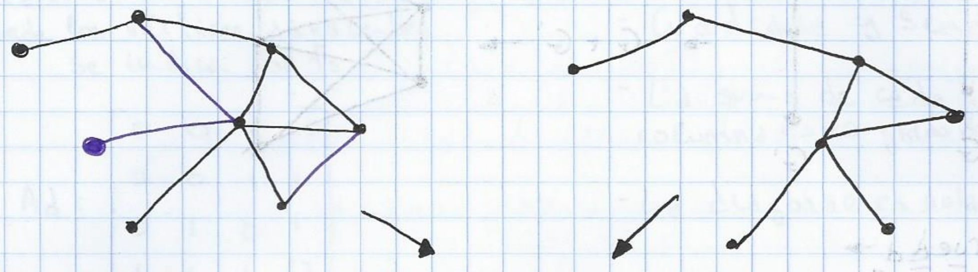


Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Descarga gou! y comparte coche por la city ahorrando pasta - www.goucar.es

• Subgrafos. Operaciones con grafos

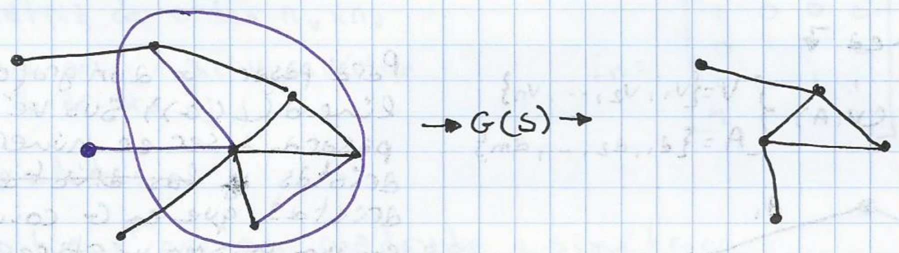
Siendo $G=(V,A)$ y $G'=(V',A')$ y G' es un subgrafo G:



G G'

$$G' \subseteq G \iff \begin{cases} V' \subseteq V \\ A' \subseteq A \end{cases}$$

Tendremos un subgrafo inducido en G cuando:



G

Será un subgrafo recubridor cuando $V' = V$

Eliminación de un vértice (v):

↓

$G=(V,A)$ $v \in V$

$G-v = G(V-\{v\})$

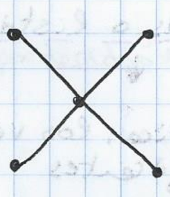
Eliminación de una arista (e)

↓

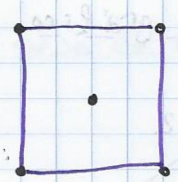
$G=(V,A)$ $e \in A$

$G-e = G(A-\{e\})$

Tendremos un grafo complementario ($\bar{G}$) cuando tengamos las aristas inversas a G:



$\bar{G}=(V,\bar{A})$



G $\bar{G}$

Unión de grafos

↓

$G \cup G' = (V \cup V', A \cup A')$

Intersección de grafos

↓

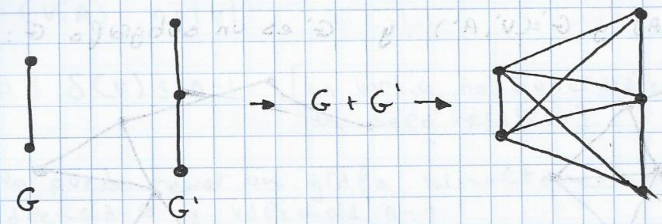
$G \cap G' = (V \cap V', A \cap A')$

¿Quieres triunfar en tus estudios? Conoce el método para lograrlo

WINFIELD'S
ENGLISH LANGUAGE CENTRE
Expertos en CAMBRIDGE y TRINITY.
Estamos en Reina Mercedes.

¡Tu título de inglés en verano!
1 mes 80 horas / APTIS, Cambridge y TRINITY
Calidad avalada por nuestros antiguos estudiantes.
10 euros de descuento con esta publicidad.

Suma de grafos → Teniendo G y G', los vertices se mantienen y crean todas las aristas posibles entre los dos grafos.

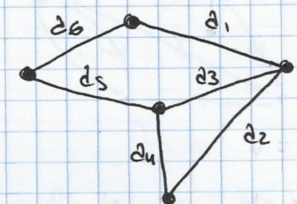


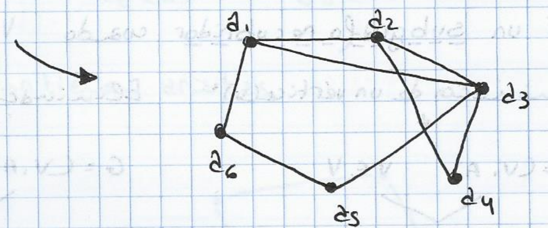
Grafo rueda →

Grafo línea →

Dado $G = (V, A) \begin{cases} V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \\ A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \end{cases}$

Para pasar G a un grafo línea ($L(G)$) sus vértices pasarán a ser el número de aristas y ~~las aristas~~ las aristas que en G coincide en un mismo vértice formarán las aristas de $G(L)$.

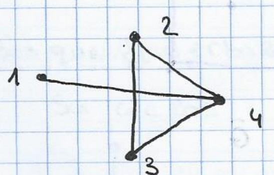




- **Formas de definir un grafo**

Teniendo $G = (V, A) \begin{cases} V = \{1, 2, 3, 4\} \\ A = \{\{1,4\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{2,3\}\} \end{cases}$ n_v vértices, n_a aristas

Realización gráfica
↓



Lista de adyacencias o lista de listas
↓
Para cada vértice, los vértices adyacentes

$\{\{4\}, \{3,4\}, \{2,4\}, \{1,2,3\}\}$

$\downarrow v_1 \quad \downarrow v_2 \quad \downarrow v_3 \quad \downarrow v_4$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.
WUOLAH

Matriz de adyacencia

Matriz de orden $n_v \times n_v$ donde los vértices adyacentes se indica con 1s

$$Ad = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Propiedades:

- Cuadrada y simétrica.
- La suma de cada fila o columna es el grado del vértice.
- La diagonal es nula.

Matriz de incidencia

Matriz de orden $n_v \times n_a$ donde será 1 si v_i es vértice de la arista a_j.

$$In = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \{1,4\} & \{2,4\} & \{2,3\} & \{3,4\} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & & 1 & 1 \\ 4 & 1 & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Propiedades:

- No tiene por que ser cuadrada o simétrica
- La suma de cada fila es el grado del vértice
- La suma de cada columna vale 2.

Notas sobre matrices de adyacencia:

¿Digrafo? → No tiene por que ser simétrica
→ la suma de las filas es el grado de salida y las columnas el grado de entrada.

¿Pseudografo? → Por cada lazo se multiplica por 2 donde su propio vértice por tanto la diagonal no tiene por que ser nula.

¿Grafo ponderado? → No tomará 1s sino el peso de la arista.

WUOLAH

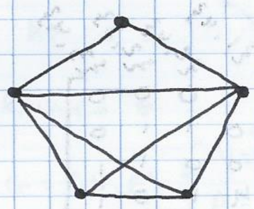
Descarga gou! y comparte coche por la city ahorrando pasta - www.goucar.es

- ## Isomorfismo

Para que dos grafos sean isomorfos ($G \sim G'$) deben coincidir:

- Mismo número de vértices y aristas.
- Mismo ~~número~~ grado de vértices.
- Mismo número de ciclos de igual longitud.
- Número de componentes conexas.
- etc.

Ejemplo:



$f(1) = c$

$f(2) = e$

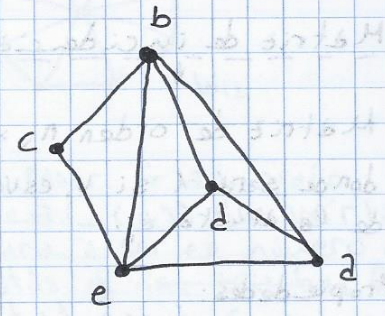
$\longrightarrow$

$f(3) = a$

$f(4) = d$

$f(5) = b$

Podemos "mover" el grafo para formar el dibujo original



Grafo autocomplementario

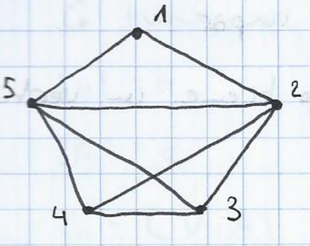
Si dos grafos son isomorfos, tb lo serán sus complementarios: $G_1 \approx G_2 \longleftrightarrow \overline{G}_1 \approx \overline{G}_2$

Utilizaremos los grafos ~~aut~~ complementarios a la hora de tener grafos muy complejos y así ahorrarnos trabajo.

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

¿Quieres triunfar en tus estudios? Conoce el método para lograrlo

Lista de grados de un grafo

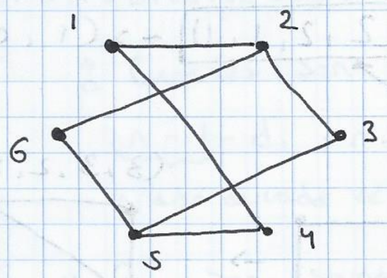


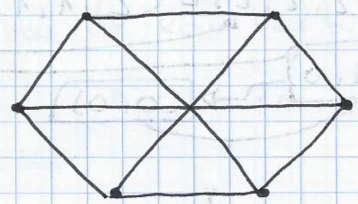
Relación de adyacencias: {2, 4, 3, 3, 4}

↓

Lista de grados: {(4, 4, 3, 3, 2)

Nota: Dos grafos pueden tener la misma lista de grados y no ser isomorfos.





Lista de grados (3, 3, 3, 3, 3, 3) pero el primer grafo tiene 3-ciclos y el otro no.

No siempre una secuencia numérica decreciente es una lista de grados, lo que tendríamos es una secuencia gráfica.

(Teorema de Havel-Hakimi)

La secuencia numérica decreciente $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ (con $a_1 > 0$, $p > 1$) es una secuencia gráfica si, y solo si, también lo es la que resulta de efectuar lo siguiente:

1- La lista debe ser decreciente

2- Mientras $a_1 > 0$:

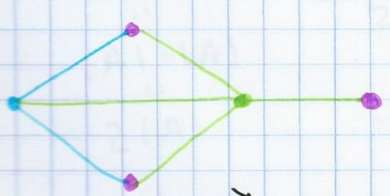
1) Eliminamos a_1 y restamos 1 a los primeros a_1 de la lista nueva.

2) Ordenamos decrecientemente

3- Si la lista queda todo a cero es una secuencia gráfica.

Ej: (1, 2, 2, 3, 4) → $\boxed{(4, 3, 2, 2, 1)}$ → (3, 2, 2, 1) → $\boxed{(2, 1, 1, 0)}$ → (1, 1, 0) → $\boxed{(0, 0, 0)}$ → Sí

(5, 4, 4, 4, 2) → (4, 4, 4, 2) → (3, 3, 3, 1) → (3, 3, 1) → (2, 2, 0) → (2, 0) → (1, −1) → No



Para representarlo vamos de abajo hacia arriba

WUOLAH

Descarga gou! y comparte coche por la city ahorrando pasta - www.goucar.es