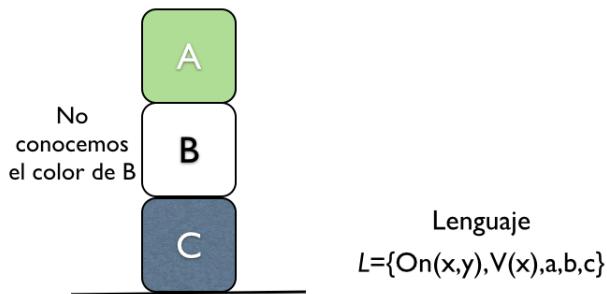


Nota: Esta relación contiene una colección amplia de ejercicios para que el alumno pueda resolverlos y repasar de ese modo conceptos de Lógica Computacional. En clase nos centraremos en los más relacionados con los siguientes temas.

Ejercicio 1. Supongamos que queremos representar y razonar sobre la siguiente situación de tres bloques, con el lenguaje que se muestra (siendo el bloque A de color verde, y C de otro color):



Se pide:

1. Construye la interpretación en el lenguaje L asociada a la situación (interpretando de manera natural los símbolos) que refleje la información que conocemos.
2. Construye el conjunto S formado por todas las fórmulas atómicas válidas conocidas en esa interpretación.
3. Construye una fórmula F que exprese la siguiente propiedad: *Existe un bloque de color verde que está encima de otro que no tiene ese color*
4. Probar (por ejemplo por resolución) que $S \models F$

Ejercicio 2. Supongamos que para representar la disposición de tres bloques a, b, c en una mesa utilizamos los predicados *Sobre*(x, y) (para denotar que el bloque x está sobre el y), *Mesa*(x) (x está sobre la mesa) y *Libre*(x) (el bloque x no tiene bloques encima)

1. Representa los siguiente hechos:
 - F_1 : Si un bloque está sobre la mesa no está sobre otro bloque.
 - F_2 : Los bloques libres no tienen ninguno encima.
2. Evalúa las fórmulas anteriores en la siguiente interpretación: Universo: $\{A, B, C\}$, $a^I = A$, $b^I = B$, $c^I = C$, $Sobre^I = \{(A, B)\}$, $Libre^I = \{A, C\}$, $Mesa^I = \{B, C\}$
3. Mostrar una interpretación donde sea válida la fórmula $\neg F_1 \wedge \neg F_2$

Ejercicio 3. Vamos a representar disposiciones de bloques numerados en una mesa. Por ejemplo, como



Utilizamos las constantes $\{0, \dots, 9\}$ para denotar los bloques y utilizamos los predicados $Sobre(x, y)$ (para denotar que el bloque x está apoyado sobre el y), $Mesa(x)$ (x está apoyado en la mesa), $Junto(x, y)$ (el bloque x está junto a y), $Par(x)$ (la etiqueta x es par).

1. Utilizando **sólo** el lenguaje anterior y usando la **interpretación pretendida de los predicados**, escribe en lógica de primer orden la siguiente información:

- Una fórmula F_1 que exprese que los bloques juntos tienen la misma paridad
- Una fórmula F_2 que exprese que los bloques impares no tienen ningún bloque encima
- Una fórmula F_3 que exprese que los bloques pares con un impar encima tienen un bloque par junto a él

2. Decide **formalmente** si

$$\{F_1, F_2\} \models \forall x \exists y (Par(y) \wedge Junto(x, y))$$

Ejercicio 4. Consideremos las siguientes fórmulas:

$$F_1 : \forall x \exists y Ama(x, y) \quad \text{y} \quad F_2 : \exists y \forall x Ama(x, y)$$

Decidir si las siguientes afirmaciones son válidas:

1. $F_1 \models F_2$
2. $F_2 \models F_1$

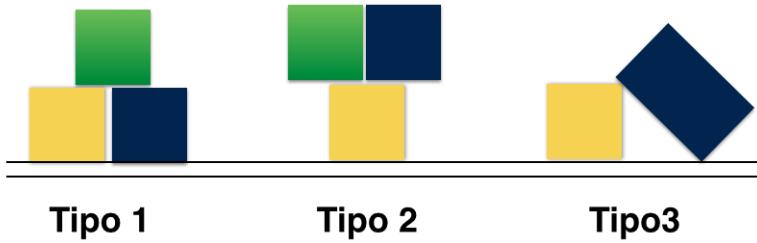
Ejercicio 5. Sabemos que

1. Existen pacientes a quienes les gustan todos los médicos
2. A ningún paciente le gusta ningún curandero

Con los predicados $P(x) = "x \text{ es un paciente}"$, $M(x) = "x \text{ es un médico}"$, $C(x) = "x \text{ es un curandero}"$, y $G(x, y) = "x \text{ le gusta } y"$, expresar los conocimientos anteriores en forma de cláusulas y demostrar que ningún médico es curandero.

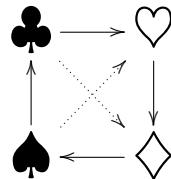
Ejercicio 6. Supongamos que para representar la disposición de bloques en una mesa utilizamos los predicados $Sobre(x, y)$ (para denotar que el bloque x está apoyado sobre el y), $Mesa(x)$ (x está apoyado en la mesa) y $Libre(x)$ (no existen bloques apoyados en x), y el **predicado de igualdad**, $=$.

Consideraremos la fórmula $F : \exists x \exists y (x \neq y)$ (es decir, que existen al menos dos bloques) y los siguientes tipos de disposiciones de bloques sobre la mesa:



1. Con el lenguaje anterior descrito y con la **interpretación pretendida de los predicados**, escribe:
 - Una fórmula F_1 tal que $\{F, F_1\}$ sea consistente y descarte los modelos del tipo 1
 - Una fórmula F_2 tal que $\{F, F_2\}$ sea consistente y descarte los modelos del tipo 2
 - Una fórmula F_3 tal que $\{F, F_3\}$ sea consistente y descarte los modelos del tipo 3
2. Justifica, ofreciendo una interpretación, que $\{F, F_1, F_2, F_3\} \not\models \neg \exists x Sobre(x, x)$

Ejercicio 7. Consideremos un lenguaje de lógica de predicados con un símbolo de función f y símbolos de predicado $P(\cdot)$, $R(\cdot, \cdot)$. Consideremos la interpretación representada en el siguiente diagrama, donde las flechas sólidas representan f^I , las flechas punteadas R^I , y P^I es el conjunto de figuras negras.



Evaluar las siguientes fórmulas, mostrando todos los pasos.

1. $\forall x(P(x) \vee \exists y R(y, x))$
2. $\forall x(P(x) \leftrightarrow \neg P(f(f(x))))$

Ejercicio 8. Sabemos que:

1. Los aficionados a la música son cultos
2. A algunos cultos les gusta el fútbol
3. Los aficionados a todo no son cultos
4. Los aficionados al fútbol, pero no a la música, no son cultos

Con los predicados $AF(x, y) = "x \text{ es aficionado a } y"$ y $CU(x) = "x \text{ es culto}"$, probar que hay a quien le gusta la música y el fútbol.

Ejercicio 9. Representa los siguientes enunciados, utilizando el lenguaje (usando si es necesario el predicado de igualdad): Constantes = { Juan, María, Ana}, Predicados = { $P(\cdot,\cdot)$, $H(\cdot,\cdot)$, $ig(\cdot,\cdot)$ } y Funciones = {padre(·),madre(·)}

donde $P(x,y)$ significa que x es el padre o la madre de y , $H(x,y)$ significa que x,y son hermanos o hermanas e $ig(x,y)$ significa que x,y son la misma persona.

1. María tiene exactamente dos hermanos.
2. El tío de Juan es abuelo materno de María.

Ejercicio 10. Consideremos la relación $Conoce(x,y)$ que la persona x conoce a la persona y dentro de un grupo de personas. Supongamos que las siguientes propiedades son válidas en dicho grupo

- (Simetría) A: Si una persona conoce a otra persona del grupo, entonces la segunda conoce a la primera
- (Transitividad) B: Si una persona conoce a otra persona y esta última conoce a una tercera, entonces la primera conocer a la tercera

Consideremos el siguiente hecho C: Si una persona conoce a otra persona, entonces si otra persona conoce a la segunda, conoce a la primera ¿Es cierto que $\{A,B\} \models C$?

Ejercicio 11. Tony, Mike y John van a pasar el fin de semana al club de montaña, del que son miembros. Todo miembro del club que no es esquiador es alpinista. A los alpinistas no les gusta la lluvia, y a los que no les gusta la nieve no son esquiadores. A Mike no le gusta lo que le gusta a Tony, y le gusta lo que a Tony no. A Tony le gusta la lluvia y la nieve.

1. Demuestra -una vez formalizado- que de la información anterior se deduce que existe un miembro del club de montaña que es alpinista pero no esquiador
2. Supongamos que afirmamos que afirmamos que a Mike le gusta lo que no le gusta a Tony, pero **NO** que no le gusta lo que le gusta a Tony. Demostrar que no se concluye que existe un miembro del club de montaña que es alpinista pero no esquiador

Ejercicio 12. Formaliza el siguiente enigma en el lenguaje:

- Función: $Abuela(x) = y$
- Predicados: $Deportivo(x)$, $Coche(x)$, $Rojo(x)$, $Sabe(x,y)$, $Conduce(x,y)$

La abuela de Laura conduce un coche deportivo rojo. La única persona que conduce un coche rojo es Antonia. ¿Quién es la abuela de Laura?

Añade el conocimiento implícito que necesites para resolver (por ejemplo por resolución) el enigma

Ejercicio 13. Consideramos el lenguaje de primer orden $L = \{C, T, E, IZQ, DER, \mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, donde C, T, E son símbolos de predicado de aridad 1, IZQ, DER son símbolos de predicado de aridad 2, y \mathbf{a}, \mathbf{b} son símbolos de constante.

En este ejercicio, un mundo es una estructura para el lenguaje L cuyo universo puede ser descrito por una lista (posiblemente infinita) de figuras (cuadrados, triángulos y estrellas) y la interpretación de los símbolos de predicado es la natural si suponemos que $C(x)$ expresa “ x es un cuadrado”, $T(x)$ expresa “ x es un triángulo”, $E(x)$ expresa “ x es una estrella”, $IZQ(x, y)$ expresa “ x está a la izquierda de y ” y $DER(x, y)$ expresa “ x está a la derecha de y ”.

Consideramos los tres siguientes mundos:

M1	□	□	★	△	□
	a		b		
M2	△	★	△	□	△
	b		a		
M3	□	□	□	□	
	a		b		

1. Estudia la validez de las siguientes fórmulas en cada uno de los mundos anteriores.

- $F_1 : \forall x [E(x) \rightarrow \exists y (C(y) \wedge IZQ(x, y))]$
- $F_2 : \exists x [\neg T(x) \wedge IZQ(x, \mathbf{a}) \wedge DER(\mathbf{b}, x)]$
- $F_3 : \exists x [C(x) \wedge (\exists y (T(y) \wedge DER(y, x)) \leftrightarrow \forall y (T(y) \rightarrow DER(y, x)))]$
- $F_4 : \forall x \exists y IZQ(x, y)$

2. Para cada una de las siguientes fórmulas, describe un mundo en el que sea válida:

- $\varphi_1 : C(\mathbf{a}) \vee [\neg E(\mathbf{b}) \wedge (T(\mathbf{b}) \rightarrow \exists x C(x))]$
- $\varphi_2 : \forall x [C(x) \rightarrow \exists y (T(y) \wedge IZQ(y, x))]$
- $\varphi_3 : \forall x [T(x) \leftrightarrow (\exists y (E(y) \wedge IZQ(y, x)))]$
- $\varphi_4 : \exists x [E(x) \wedge \forall y (C(y) \rightarrow \neg DER(y, x))]$

3. Describe, si es posible, un mundo en el que sean válidas todas las fórmulas del apartado anterior.

¿Es consistente el conjunto $U = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$?

Ejercicio 14. Decide si la siguiente base de conocimiento implica la fórmula R :

$$\{P \wedge Q \rightarrow R, A \wedge B \rightarrow R, C \rightarrow A, C, P, S \rightarrow Q, S \rightarrow B, P \wedge A \wedge C \rightarrow B\}$$

1. Por encadenamiento hacia adelante
2. Por encadenamiento hacia atrás

Ejercicio 15. Responde razonadamente a las siguientes cuestiones sobre la siguiente base de conocimiento, formada por cláusulas definidas:

- 1.- Calcula todas las consecuencias por encadenamiento hacia adelante
- 2.- Calcula el valor de $ask\ a$ por encadenamiento hacia atrás.
- 3.- ¿Es válido en todos los modelos de la base de conocimiento la cláusula $a \leftarrow d$?
Razónese la respuesta
- 4.- Si añadimos la cláusula $b \leftarrow g$ ¿Se obtienen las mismas consecuencias?
Razónese la respuesta

$$\begin{aligned} a &\leftarrow b \wedge c. \\ b &\leftarrow d \wedge e. \\ b &\leftarrow g \wedge e. \\ c &\leftarrow e. \\ d. \\ e. \\ f &\leftarrow a \wedge g. \end{aligned}$$

Ejercicio 16. Responde razonadamente a las siguientes cuestiones sobre la base de conocimiento formada por cláusulas definidas:

- 1.- Encuentra un modelo de la base.
- 2.- Muestra una interpretación que no sea modelo.
- 3.- Muestra dos átomos que sean consecuencia de la base.
- 4.- Muestra dos átomos que no sean consecuencia de la base.

$$\begin{aligned} a &\leftarrow b \wedge c. \\ a &\leftarrow e \wedge f. \\ b &\leftarrow d. \\ b &\leftarrow f \wedge h. \\ c &\leftarrow e. \\ d &\leftarrow h. \\ e. \\ f &\leftarrow g. \\ g &\leftarrow c. \end{aligned}$$

Ejercicio 17. Sabemos que:

1. Pepe tiene dinero: $DI(Pepe)$
2. La librería Lib tiene el libro Sistemas Expertos: $TL(Lib, SE)$
3. Pepe quiere ese libro: $Q(Pepe, SE)$
4. Si una librería L envía el libro l a un cliente c , $ENV(L, l, c)$, entonces el cliente recibe el libro: $R(c, l)$
5. Si una librería L tiene un libro l , y un cliente c le envía un cheque, $CH(c, L)$, entonces la librería L envía el libro l al cliente c
6. Si un cliente quiere un libro, y tiene dinero, entonces puede enviar un cheque a una librería

Expresa esa información en forma de cláusulas y, por resolución, decide si Pepe recibirá el libro Sistemas Expertos.

Ejercicio 18. Se conocen los siguientes hechos acerca de las preferencias de dos famosos personajes:

1. Silvestre y Garfield son gatos.
2. A todos los gatos les gusta el queso o los ratones.
3. A nadie a quien le guste el queso, le gusta el vino.
4. A quienes les gustan los ratones, les gusta la cerveza.

5. A Garfield no le gusta lo que le gusta a Silvestre.

6. A Silvestre le gusta el vino y la cerveza.

Se pide:

(a) Formalizar los enunciados anteriores en lenguaje de primer orden utilizando:

- **a, b, c, d**, como constantes para queso, ratones, vino y cerveza, respectivamente.
- **SIL** y **GAR** como constantes para Silvestre y Garfield, respectivamente.
- Los predicados: $G(x)$: “ x es un gato”, $GU(x, y)$: “a x le gusta y ”.

(b) Probar que a Garfield le gusta el queso y no le gusta el vino.

Ejercicios auxiliares

Nota: Para la resolución de los siguientes ejercicios es de gran ayuda el uso de un demostrador automático. Aconsejamos Prover9 (otter/mace4) <https://www.cs.unm.edu/~mccune/mace4/gui/v05.html>. Si lo vas a usar, habla con tu profesor

Ejercicio 19. **Nota:** Para el siguiente ejercicio se aconseja el uso de Prover9.

1. Representa en lógica de predicados la siguiente información:

- a) Alguien que vive en la Mansión Dreadbury mató a tía Agatha
- b) Agatha, el mayordomo, y Charles viven en la Mansión Dreadbury, y sólo ellos
- c) Un asesino siempre odia a su víctima, y nunca es más rico que su víctima
- d) Charles no odia a nadie que odia a tía Agatha
- e) Agatha odia a todo el mundo excepto al mayordomo
- f) El mayordomo odia a todo el que no es más rico que tía Agatha
- g) El mayordomo odia a todo el que tía Agatha odie
- h) Nadie odia a todo el mundo
- i) Agatha no es el mayordomo

2. Deduce quién mató a tía Agatha (indicación: prueba con todas las posibilidades usando Prover9)

Ejercicio 20. **Nota:** Para el siguiente ejercicio se aconseja el uso de Prover9.

Supongamos que disponemos de un ranking de programas de televisión formado por los programas H, J, L, P, Q, S, V . Disponemos de la siguiente información:

- 1. J y L son menos populares que H
- 2. J es más popular que Q
- 3. S y V son menos populares que L

4. P y S son menos populares que Q
 5. S no es el último del ranking
1. Expresa en el lenguaje $<$ la información anterior
 2. Demuestra que sólo uno de los siguientes rankings **es posible**:
 - (A) J, H, L, Q, V, S, P
 - (B) H, L, Q, J, S, P, V
 - (C) H, J, Q, L, S, V, P
 - (D) H, J, V, L, Q, S, P
 - (E) H, L, V, J, Q, P, S
 3. Si J es más popular que L y S es más popular que P , demuestra que sólo una de las siguientes condiciones **debe ser cierta**:
 - (a) J es el segundo
 - (b) J es el tercero
 - (c) L es el tercero
 - (d) Q es el tercero
 - (e) P es el séptimo
 4. ¿Cuál de los siguientes programas **NO** puede ser el tercero del ranking?
 - (a) L
 - (b) J
 - (c) Q
 - (d) V
 - (e) P
 5. Si V es más popular que Q y J es menos popular que L , demuestra que sólo una de las siguientes condiciones **podría ser cierta** en el ranking:
 - a) P más popular que S
 - b) S más popular que V
 - c) P más popular que L
 - (d) J más popular que V
 - (e) Q más popular que V
 6. Si Q es más popular que V , entonces demuestra que **sólo una** de las siguientes condiciones no puede ser cierta:
 - a) H está en primer lugar
 - b) L está en cuarto lugar
 - c) V no está en cuarto lugar
 - d) J no es el tercero
 - e) Q es el tercero