Ejercicios-resueltos-T4.pdf

Ejercicios resueltos T4

EJERCICIOS TEMA 4.

Ejercicio 57.- Da una forma prenexa de las siguientes formulas:

1.- $\exists x\, (\forall y\, \exists z\, p(x,y,z) \wedge \exists z\, \forall y\, \neg p(x,y,z))$

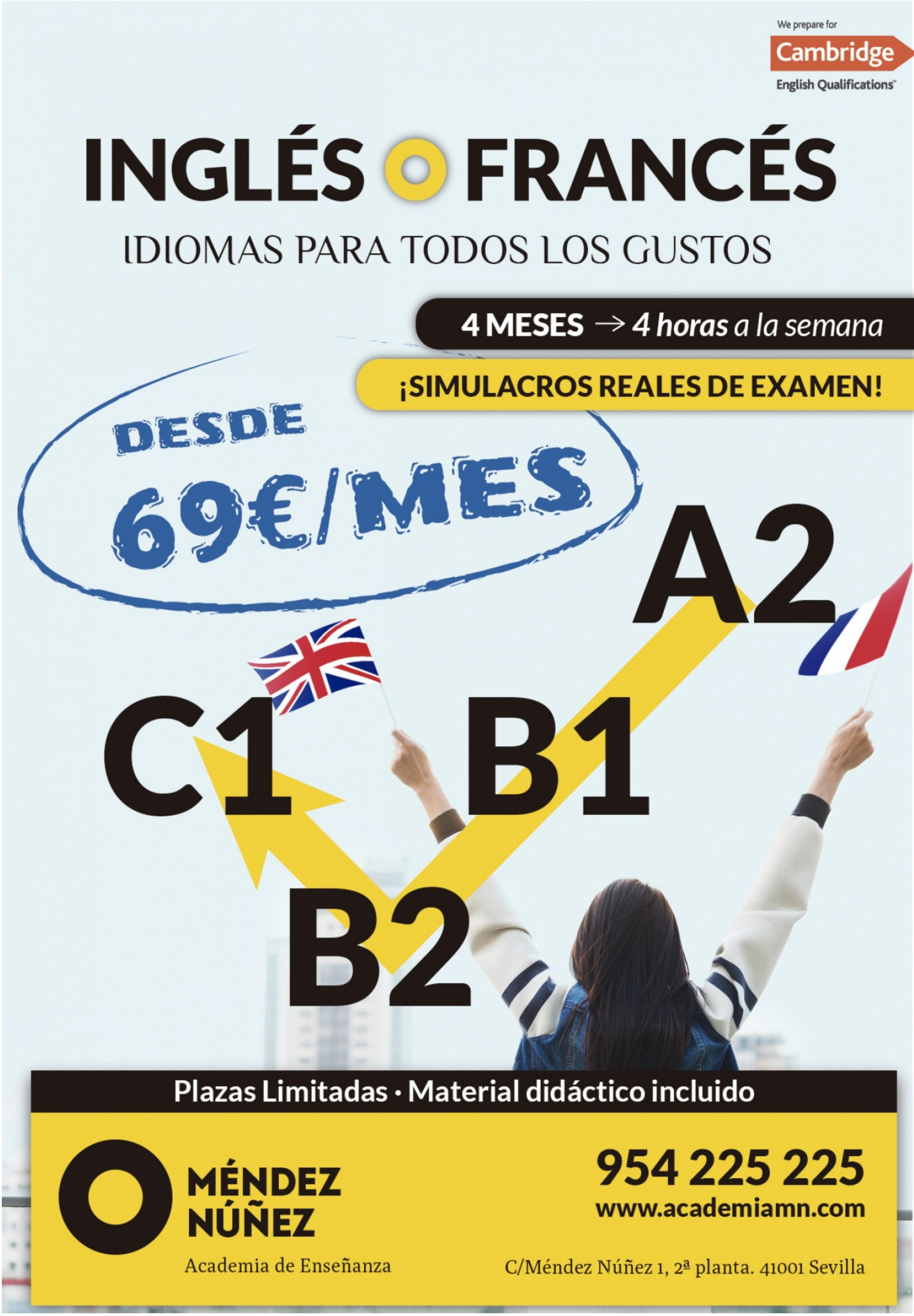
$$\exists x\, (\forall y\, \exists z\, p(x,y,z) \wedge \exists z\, \forall y\, \neg p(x,y,z)) \equiv$$
$$\equiv \exists x (\forall y_1\, \exists z_1\, p(x,y_1,z_1) \wedge \exists z_2\, \forall y_2\, \neg p(x, y_2, z_2)) \equiv$$
$$\equiv \exists x\, \exists z_2\, (\forall y_1\, \exists z_1\, p(x,y_1,z_1) \wedge \forall y_2\, \neg p(x,y_2,z_2)) \equiv$$
$$\equiv \exists x\, \exists z_2\, \forall y_1\, (\exists z_1\, p(x,y_1,z_1) \wedge \forall y_2\, \neg p(x,y_2,z_2)) \equiv$$
$$\equiv \exists x\, \exists z_2\, \forall y_1\, \exists z_1\, \forall y_2\, (p(x,y_1,z_1) \wedge \neg p(x,y_2,z_2))$$

3.- $\forall x\, \neg \exists y\, p(x,y) \rightarrow \exists x\, q(x,x)$

$$\forall x\, \neg \exists y\, p(x,y) \rightarrow \exists x\, q(x,x) \equiv$$
$$\equiv \forall x_1\, \neg \exists y\, p(x_1,y) \rightarrow \exists x_2\, q(x_2,x_2) \equiv$$
$$\equiv \exists x_2\, (\forall x_1\, \neg \exists y\, p(x_1,y) \rightarrow q(x_2,x_2)) \equiv$$
$$\equiv \exists x_2\, \exists x_1\, (\neg \exists y\, p(x_1,y) \rightarrow q(x_2,x_2)) \equiv$$
$$\equiv \exists x_2\, \exists x_1\, (\forall y\, \neg p(x_1,y) \rightarrow q(x_2,x_2)) \equiv$$
$$\equiv \exists x_2\, \exists x_1\, \exists y\, (\neg p(x_1,y) \rightarrow q(x_2,x_2))$$
$$|\ p(x_1,y) \vee q(x_2,x_2)\ | \quad \{\{p(x_1,y)\}, \{q(x_2,x_2)\}\}$$

4.- $\forall x\, [P(x) \rightarrow P(x)]$

Ya está como prenex.


We prepare for
Cambridge
English Qualifications™
INGLÉS O FRANCÉS
IDIOMAS PARA TODOS LOS GUSTOS
4 MESES → 4 horas a la semana
¡SIMULACROS REALES DE EXAMEN!
DESDE
69€/MES
A2
C1
B1
B2
Plazas Limitadas · Material didáctico incluido
MÉNDEZ
NÚÑEZ
Academia de Enseñanza
954 225 225
www.academiamn.com
C/Méndez Núñez 1, 2ª planta. 41001 Sevilla

6.- $\neg \forall x\, [P(x) \rightarrow [\forall y\, [P(y) \rightarrow P(f(x,y))] \wedge \neg \forall y\, [Q(x,y) \rightarrow P(y)]]]$

$\neg \forall x\, [P(x) \rightarrow [\forall y\, [P(y) \rightarrow P(f(x,y))] \wedge \neg \forall y\, [Q(x,y) \rightarrow P(y)]]] \equiv$

$\equiv \neg \forall x\, [P(x) \rightarrow [\forall y_1\, [P(y_1) \rightarrow P(f(x,y_1))] \wedge \neg \forall y_2\, [Q(x,y_2) \rightarrow P(y_2)]]] \equiv$

$\equiv \exists x\, \neg [P(x) \rightarrow [\forall y_1\, [P(y_1) \rightarrow P(f(x,y_1))] \wedge \exists y_2\, \neg [Q(x,y_2) \rightarrow P(y_2)]]] \equiv$

$\equiv \exists x\, \neg \forall y_1\, \exists y_2\, (P(x) \rightarrow (P(y_1) \rightarrow P(f(x,y_1)))) \wedge \neg (Q(x,y_2) \rightarrow P(y_2)))$

$P_x \equiv \exists x\, \exists y_1\, \forall y_2\, \neg (P(x) \rightarrow (P(y_1) \rightarrow P(f(x,y_1))) \wedge \neg (Q(x,y_2) \rightarrow P(y_2)))$

$f a \quad f b$

$SK \equiv \neg (P(a) \rightarrow (P(b) \rightarrow P(f(a,b))) \wedge \neg (Q(a,y_2) \rightarrow P(y_2)))$

$CP \equiv P(a) \wedge \neg (P(b) \rightarrow P(f(a,b))) \wedge \neg (Q(a,y_2) \rightarrow P(y_2)))$

$\equiv P(a),\ \neg (P(b) \rightarrow P(f(a,b))) \vee (Q(a,y_2) \rightarrow P(y_2)))$

$\equiv P(a),\ (P(b) \wedge \neg P(f(a,b))) \vee (\neg Q(a,y_2) \vee P(y_2)))$

$\equiv \underbrace{P(a)}_{1},\ \underbrace{P(b) \vee \neg Q(a,y_2) \vee P(y_2)}_{2},\ \underbrace{\neg P(f(a,b)) \vee Q(a,y_2) \vee P(y_2)}_{3}$

7.- $\forall x\, \exists y\, [[P(x,y) \rightarrow Q(y,x)] \wedge [Q(x,y) \rightarrow S(x,y)]] \rightarrow$
$\exists x\, \forall y\, [P(x,y) \rightarrow S(x,y)]$

$\forall x\, \exists y\, [[P(x,y) \rightarrow Q(y,x)] \wedge [Q(x,y) \rightarrow S(x,y)]] \rightarrow \exists x\, \forall y\, [P(x,y) \rightarrow S(x,y)]$

$\forall x_1\, \exists y_1\, [\underbrace{[P(x_1,y_1) \rightarrow Q(y_1,x_1)] \wedge [Q(x_1,y_1) \rightarrow S(x_1,y_1)]}_{F1}] \rightarrow \exists x_2\, \forall y_2\, [\underbrace{P(x_2,y_2) \rightarrow S(x_2,y_2)}_{F2}]$

$\neg \forall x_1\, \exists y_1\, (F_1) \vee \exists x_2\, \forall y_2\, (F_2)$

$\exists x_1\, \forall y_1\, \neg F_1 \vee \exists x_2\, \forall y_2\, (F_2)$

$\exists x_2\, \exists x_1\, \forall y_1\, \forall y_2\, (\neg F_1 \vee F_2)$ = FORMA PRENEX.

$\begin{array}{cc} \| & \| \\ a & b \end{array}$

$$\neg[[\neg P(a,y_1) \vee Q(y_1,a)] \vee [\neg Q(a,y_1) \wedge S(a,y_1)]] \vee [\neg P(b,y_2) \vee S(b,y_2)] \equiv$$

$$\equiv [[P(a,y_1) \wedge \neg Q(y_1,a)] \vee [Q(a,y_1) \wedge \neg S(a,y_1)]] \vee [\neg P(b,y_2) \vee S(b,y_2)] \equiv$$

$$\equiv [(P(a,y_1) \vee Q(a,y_1)) \wedge (P(a,y_1) \vee \neg S(a,y_1)) \wedge (\neg Q(y_1,a) \vee Q(a,y_1)) \wedge$$
$$(\neg Q(y_1,a) \vee \neg S(a,y_1))] \vee [\neg P(b,y_2) \vee S(b,y_2)] \equiv$$

$$\equiv (P(a,y_1) \vee Q(a,y_1) \vee \neg P(b,y_2)) \wedge (P(a,y_1) \vee \neg S(a,y_1) \vee (\neg P(b,y_2)$$
$$\vee S(b,y_2)) \wedge (\neg Q(y_1,a) \vee Q(a,y_1) \vee \neg P(b,y_2) \vee S(b,y_2))$$
$$\wedge (\neg Q(y_1,a) \vee \neg S(a,y_1) \vee \neg P(b,y_2) \vee S(b,y_2))$$

60.- Obtener formas prenex, de Skolem y clausal de la fórmula:

$$\forall x \exists v \forall u [Q(u,v) \to (\exists_y P(u,y) \to \exists_y (Q(y,v) \wedge P(u,y)))]$$

$$\forall x \exists v \forall u [Q(u,v) \to (\exists_y P(u,y) \to \exists_y (Q(y,v) \wedge P(u,y)))]$$

$$\forall x \exists v \forall u [Q(u,v) \to (\exists_{y_1} P(u,y_1) \to \exists_{y_2} (Q(y_2,v) \wedge P(u,y_2)))]$$

$\forall_{y_1}$ $\exists_{y_2}$

$$P_x \equiv \forall x \exists v \forall u \exists_{y_2} \forall_{y_1} (Q(u,x) \to (P(u,y_1) \to (Q(y_2,v) \wedge P(u,y_2))))$$

$v \to f(x)$ $\quad$ $y_2 \to g(x,u)$

$$Sk \equiv Q(u,x) \to (P(u,y_1) \to (Q(g(x,u), f(x)) \wedge P(u, g(x,u)))$$

$$L' \equiv L \cup \{f, g\}$$

$$Cl \equiv Q_1 \to (P_1 \to (Q_2 \wedge P_2)) \equiv \neg Q_1 \vee (\neg P_1 \vee (Q_2 \wedge P_2))$$
$$\equiv (\neg Q_1 \vee \neg P_1 \vee Q_2) \wedge$$
$$(\neg Q_1 \vee \neg P_1 \vee P_2)$$

Ejercicio 62.- Para cada una de las siguientes fórmulas, encontrar una forma de Skolem y un subconjunto finito de su extensión de Herbrand que sea inconsistente.

1.- $\exists x \forall y (p(x,y) \leftrightarrow \neg p(y,y))$

$\sqcap \{\exists x \forall y (p(x,y) \leftrightarrow \neg p(y,y))\}$ [Ya está en forma Prenex y está cerrada porque no tiene variables libres]

$L = \{p\}$

$L' = \{p, a\}$

$\Sigma = SK = \{\forall y (p(a,y) \leftrightarrow \neg p(y,y))\}$

$p(a,y) \leftrightarrow \neg p(y,y)$

$EH(\Sigma) = \{p(a,a) \leftrightarrow \neg p(a,a)\}$ $\quad UH(\Sigma) = \{a\}$

$p \leftrightarrow \neg p \equiv$ inconsistente

$\square$

2.- $\exists x \forall y [p(x,y) \leftrightarrow \neg \exists z (p(y,z) \wedge p(z,y))]$.

$\sqcap$ $\exists x \forall y [p(x,y) \leftrightarrow \neg \exists z (p(y,z) \wedge p(z,y))]$ $\quad L = \{p\}$

$\exists x \forall y (p(x,y) \rightarrow \forall z_1 \neg (p(y,z_1) \wedge p(z_1,y))) \wedge$

$\forall z_2 \neg (p(y,z_2) \wedge p(z_2,y) \rightarrow p(x,y))$

$Px \equiv \exists x \forall y \exists z_2 \forall z_1 ((p(x,y) \rightarrow \neg (p(y,z_1) \wedge p(z_1,y))) \wedge$

$(\neg p(y,z_2)) \wedge p(z_2,y)) \rightarrow p(x,y)))$

$x \to a$ $\quad z_2 \to f(x)$

Tu academia universitaria en Reina Mercedes
www.academiaconoser.es
Calle Torcuato Luca de Tena nº3
663 767 434
academiaconoser@gmail.com

$$SK \equiv \forall y \forall z \, (p(a,y) \rightarrow \neg(p(y,z_1) \wedge p(z_1,y)) \wedge$$
$$(\neg(p(y,f(y)) \wedge p(f(y),y)) \rightarrow p(a,y)))$$

$$L' = \{p, a, f\}$$

$$Cl = \{ \underbrace{\neg p(a,y) \vee \neg p(y,z_1) \vee \neg p(z_1,y)}_{1}, \underbrace{p(y,f(y)) \vee p(a,y)}_{2},$$
$$\underbrace{p(f(y),y) \vee p(a,y)}_{3} \}$$

$$\neg p(a,y) \vee \neg p(y,z_1) \vee \neg p(z_1,y), \quad p(y,f(y)) \vee p(a,y), \quad p(f(y),y) \vee p(a,y))$$

$f(a) = y$

$z_1 = a$

$$\neg p(a,a) \vee \neg p(a,a) \vee \neg p(a,a) \quad \neg p(a,a)$$
$$p(a,f(a)) \vee p(a,a) \quad p(a,f(a))$$
$$p(f(a),a) \vee p(a,a) \quad p(f(a),a)$$

$\square$ cláusula vacía, es una contradicción

$$\rightarrow \neg p(a,f(a)) \vee \neg p(f(a),a)$$

$$UH(\Sigma) = \{a, f(a), f^2(a), f^3(a), \ldots\}$$

Ejercicio 61.- Introduciendo la notación apropiada, escribir las sentencias de los siguientes razonamientos como fórmulas de primer orden y decidir si la conclusión es consecuencia lógica de las premisas, utilizando para ello formas clausales.

1.- Todos los científicos están locos. No existen vegetarianos locos. Por tanto, no existen científicos vegetarianos.

$C(x) \equiv$ x es científico.
$V(x) \equiv$ x es vegetariano.
$L(x) \equiv$ x está loco.

$$\{\forall x\ (C(x) \to L(x)),\ \neg \exists x\ (V(x) \land L(x))\} \models \neg \exists x\ (C(x) \land V(x))$$

$$\Gamma = \{\forall x\ (C(x) \to L(x)),\ \forall x\ \neg (V(x) \land L(x)),\ \exists x\ (C(x) \land V(x))$$

$L = \{C, L, V\}$

$$\Sigma = \{\neg C(x) \lor L(x),\ \neg V(x) \lor \neg L(x),\ C(a),\ V(a)\}$$

$L' = L \cup \{a\}$
$UH = \{a\}$

$$CH(\Sigma) \equiv \{\neg C(a) \lor L(a),\ \neg V(a) \lor \neg L(a),\ C(a),\ V(a)\}$$

$$\{\neg C(a) \lor L(a),\ \neg V(a) \lor \neg L(a),\ C(a),\ V(a)$$

$L(a)$ $\qquad$ $\neg L(a)$

$\square$

Como es inconsistente, se verifica la consecuencia lógica

2- Todos los hombres son animales. Algunos animales son carnívoros. Por tanto, algún hombre es carnívoro.

C ≡ Carnívoros.
H ≡ Hombre.
A ≡ Ser animal.

$\{\forall x\,(H(x) \rightarrow A(x)),\ \exists x\,(A(x) \wedge C(x))\} \vDash \exists x\,(H(x) \wedge C(x))$

$\Gamma = \{\forall x\,(H(x) \rightarrow A(x)),\ \exists x\,(A(x) \wedge C(x)),\ \neg\exists x\,(H(x) \wedge C(x))\}$

$\forall x\,(H(x) \rightarrow A(x)),\ \exists x\,(A(x) \wedge C(x)),\ \forall x\,\neg(H(x) \wedge C(x))$

$L = \{H, A, C\}$

$\Sigma = \{\neg H(x) \vee A(x),\ A(a),\ C(a),\ \neg H(a) \vee \neg C(a)\}$

$L' = L \cup \{a\}$

$EH(\Sigma) = \{\cancel{\neg H(a) \vee A(x)},\ \underline{A(a)},\ \underline{C(a)},\ \cancel{\neg H(a) \vee \neg C(a)}\}$

$U = \{a\}$
$H = \emptyset$
$C = \{a\}$
$A = \{a\}$

No es consecuencia lógica, porque es consistente y además hemos construido un nuevo mundo.

2- Todos los hombres son animales. Algunos animales son carnívoros. Por tanto, algún hombre es carnívoro.

C≡ Carnívoros.
H≡ Hombre.
A≡ Ser animal.

$$\{\forall x\,(H(x)\rightarrow A(x)),\ \exists x\,(A(x)\wedge C(x))\} \models \exists x\,(H(x)\wedge C(x))$$

$$\Gamma=\{\forall x\,(H(x)\rightarrow A(x)),\ \exists x\,(A(x)\wedge C(x)),\ \neg\exists x\,(H(x)\wedge C(x))\}$$

$$\forall x\,(H(x)\rightarrow A(x)),\ \exists x\,(A(x)\wedge C(x)),\ \forall x\,\neg(H(x)\wedge C(x))$$

$$L=\{H, A, C\}$$

$$\Sigma=\{\neg H(x)\vee A(x),\ A(a),\ C(a),\ \neg H(a)\vee\neg C(a)\}$$

$$L'=L\cup\{a\}$$

$$EH(\Sigma)=\{\cancel{\neg H(a)\vee A(x)},\ \underline{A(a)},\ \underline{C(a)},\ \cancel{\neg H(a)\vee\neg C(a)}\}$$

$U=\{a\}$
$H=\emptyset$
$C=\{a\}$
$A=\{a\}$

No es consecuencia lógica, porque es consistente y además hemos construido un nuevo mundo.

Ejercicio 58.- Para cada una de las siguientes fórmulas, encuentra una forma prenexa con matriz en FND y otra en FNC.

1.- $\forall x \exists y \, (x + y = 0) \wedge \exists u \forall x \, (x + u = x \wedge u + u = 0) \wedge \forall x \, (\neg(x = u) \rightarrow x + x = x)$

$\forall x_1 \exists y \, \underbrace{(x_1 + y = 0)}_{F_1} \wedge \exists u_1 \forall x_2 \, \underbrace{(x_2 + u_1 = x_2 \wedge u_1 + u_1 = 0)}_{F_2} \wedge \forall x_3 \, \underbrace{(\neg(x_3 = u) \rightarrow x_3 + x_3 = x_3)}_{F_3}$

Como la u no es libre, se pone el $\forall u$

$\forall u \, (\forall x_1 \exists y \, (F_1) \wedge \exists u_1 \forall x_2 \, (F_2) \wedge \forall x_3 \, (F_3))$

$\forall u \exists u_1 \forall x_1 \exists y \forall x_2 \forall x_3 \, (F_1 \wedge F_2 \wedge F_3) \equiv P_r$

$u_1 \downarrow g(u)$, $y \downarrow f(u, x_1)$

$(x + f(u, x_1) = 0) \wedge (x_2 + g(u) = x_2) \wedge (g(u) + g(u) = 0) \wedge$
$(\neg(x_3 = u) \rightarrow x_3 + x_3 = x_3) \equiv SK$

$(x + f(u, x_1) = 0) \wedge (x_2 + g(u) = x_2) \wedge (g(u) + g(u) = 0) \wedge$
$((x_3 = u) \vee (x_3 + x_3 = x_3)) \equiv FNC$

$P_1 \wedge (P_2 \wedge (P_3 \wedge (P_4 \vee P_5)))$
$(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4) \vee (P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_5) \equiv FND$

3.- $\forall x\,(x + y = y \to \forall y\,\forall x\,(x + y = x))$

$\forall x_1\,(x_1 + y = y \to \forall y_1 \forall x_2\,(x_2 + y_1 = x_2))$

$\forall y_1 \forall x_1\,(\underbrace{x_1 + y_1 = y_1}_{F1} \to \forall y_2\,\forall x_2\,(\underbrace{x_2 + y_2 = x_2}_{F_2}))$

$\forall y_1\,\forall x_1\,(F1 \to \forall y_2\,\forall x_2\,(F_2))$

$\forall y_1\,\forall x_1\,\forall y_2\,\forall x_2\,(\neg F1 \vee F_2) \equiv P_r$

$\neg F1 \vee F_2 \equiv FNC$

Ejercicio 63.- Consideremos las siguientes fórmulas:

$\varphi_1: \forall x\,[p(c) \wedge \neg p(f(c)) \wedge p(f(f(f(c)))) \wedge (\neg p(x) \vee p(f(f(x))))]$

$\varphi_2: \forall x\,[p(c) \wedge \neg p(f(c)) \wedge p(f(f(f(f(c))))) \wedge (\neg p(x) \vee p(f(f(x))))]$

1.- Probar que φ_1 es satisfactible

Para calcular que es satisfactible, se calcula la extensión de herbrand.

$\forall x\,[p(c) \wedge \neg p(f(c)) \wedge p(f(f(f(c)))) \wedge (\neg p(x) \vee p(f(f(x))))]$

Ya está en forma prenex.

$$\Sigma = \{ p(c),\ \neg p(f(c)),\ p(f(f(f(c)))),$$
$$\forall x\,(\neg p(x) \vee p(f(f(c)))) \}$$

$$UH(\Sigma) = \{ c,\ f(c),\ f^2(c),\ \dots \}$$
$$L: \{ p,\ f,\ c \}$$

$$EH(\Sigma) = \{ p(c),\ \neg p(f(c)),\ p(f^3(c)),\ \neg p(c) \vee p(f^2(c))$$
$$,\ \neg p(f(c)) \vee p(f^3(c))$$
$$,\ \neg p(f^2(c)) \vee p(f^4(c))$$
$$,\ \neg p(f^3(c)) \vee p(f^5(c))$$

$\underline{P}$

c

$f(c)$

$f^2(c)$

$f^3(c)$

$f^4(c)$

$f^5(c)$

$M = \{ c,\ f(c),\ \dots \}$

$P = M \setminus \{ f(c) \}$

$M = \mathbb{N}$

$c = 0$

$f =$ siguiente

$P = \mathbb{N} - \{1\}$

6