MD - Temario.pdf

Temario completo

2º Matemática Discreta

Grado en Ingeniería Informática - Ingeniería del Software

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática
US - Universidad de Sevilla

Escuela Técnica Superior de
Ingeniería Informática

MATEMÁTICA DISCRETA

TEMARIO COMPLETO

Departamento de Matemática
Aplicada I

Rubén Bueno Menéndez

Índice

TEMA 1

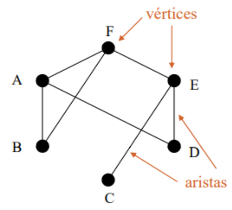
Introducción a la Teoría de Grafos

1. Nociones básicas

❖ **Grafos:**

Un grafo está compuesto de vértices y aristas, siendo las aristas la unión de 2 vértices.

$$G = (V, A) \begin{cases} V \text{ es el conjunto de vértices } \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\} \\ A \text{ es el conjunto de aristas } \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\} \end{cases}$$



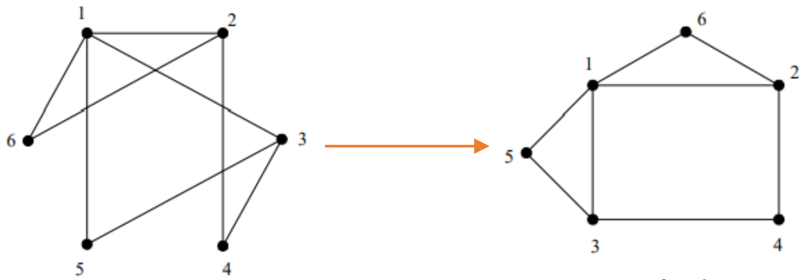
V = {A, B, C, D, E, F}

A = {{A, B}, {A, D}, {A, F}, {B, F}, {C, E}, {D, E}, {E, F}}

→ El conjunto de aristas se representa mediante llaves al tratarse de un grafo no dirigido.

Se pueden representar gráficamente o mediante conjuntos como está indicado con la notación anterior.

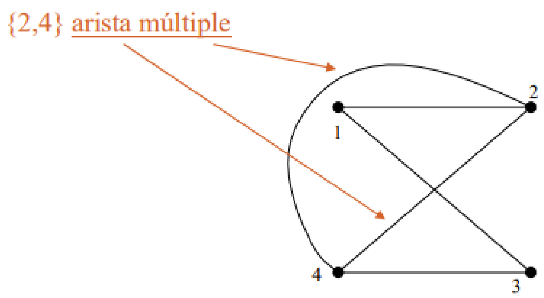
Un **grafo es plano** si podemos dibujarlo en el plano de modo que sus aristas se intersequen sólo en los vértices del grafo. A esta representación del grafo se conoce como una **inmersión** del grafo en el plano.



Grafo plano

❖ **Multigrafos:**

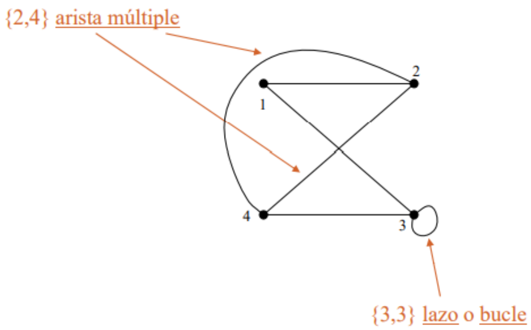
Un multigrafo es un tipo de grafo que contiene aristas múltiples, es decir, aristas que relacionan los mismos vértices, de manera que dos vértices pueden estar conectados por más de una arista.



La arista {2, 4} se trata de una arista múltiple porque aparece 2 veces en el grafo.

❖ Seudografo:

Un seudografo es un tipo de grafo que contiene aristas múltiples y lazos / bucles, es decir, aristas que relacionan los mismos vértices siendo los vértices diferentes o siendo el mismo (lazo / bucle), de manera que dos vértices o uno mismo pueden estar conectados por más de una arista.



La arista {2, 4} se trata de una arista múltiple porque aparece 2 veces en el grafo.

La arista {3, 3} se trata de un lazo o bucle porque está compuesto del mismo vértice.

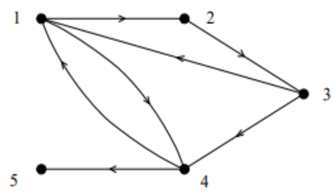
Los grafos simples no admiten aristas múltiples ni lazos.

❖ Grafo dirigido o digrafo:

Un grafo dirigido o digrafo es un tipo de grafo en el cual las aristas tienen un sentido definido, es decir, las aristas son pares ordenados.

V = {1, 2, 3, 4, 5}
A = {(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 1), (4, 5)}

→ El conjunto de aristas se representa mediante paréntesis al tratarse de un grafo dirigido.



❖ Digrafo múltiple o multigrafo múltiple:

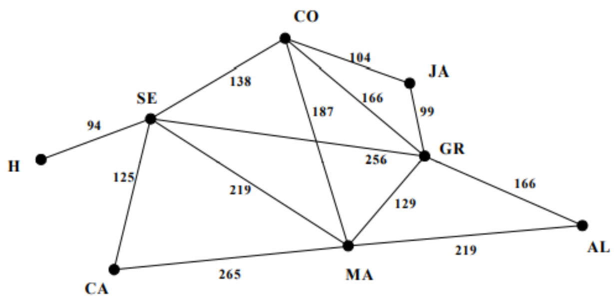
Un digrafo múltiple o multigrado múltiple es un grafo dirigido que contiene aristas múltiples.

❖ Seudografo dirigido:

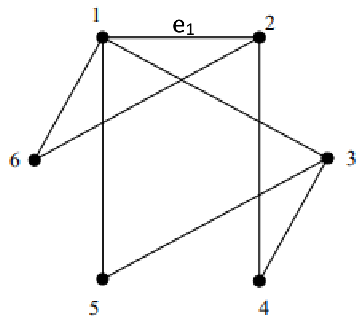
Un seudografo dirigido es un grafo dirigido que contiene aristas múltiples y lazos / bucles.

❖ Grafo ponderado:

Un grafo ponderado es un tipo de grafo en donde las aristas llevan asignados un peso.



❖ Vértices adyacentes:



Dado dos vértices v_1 y v_2, son adyacentes, si o solo si, estos constituyen una arista.

En el ejemplo de la derecha, el vértice 1 es adyacente a los vértices 6, 5 y 2, pero no al 4.

❖ Aristas incidentes:

Dado una arista e_1, es incidente, si y solo si, une a al menos dos vértices.

En el ejemplo de la derecha, en el vértice 1 inciden 4 aristas.

A esta incidencia se le llama **valencia** o **grado de un vértice**, es decir, será el número de aristas incidentes a un determinado vértice.

En el ejemplo tenemos: δ(1) = 4, δ(2) = 3, δ(3) = 3, δ(4) = 2, δ(5) = 2, δ(6) = 2.

Un **vértice se considera par si su grado es par**, de igual manera, un **vértice se considera impar si su grado es impar**.

Un **vértice se considera aislado si δ(v) = 0**, es decir, su valencia o grado es 0. Por tanto, su representación sería un punto.

Propiedades de los grados o valencias para grafos simples:

Sea G = (V, A) y n = |V| (número de vértices)

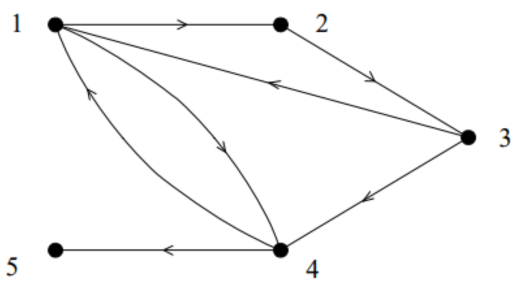
1. Si un grafo tiene n vértices, el número de posibles grados estará definido en 0 ≤ δ(v) ≤ n-1. Es decir, todo vértice estará unido a otro que no sea el mismo o a ninguno.
2. Un grafo no puede tener simultáneamente vértices de valencia 0 y de valencia n-1, ya que si un vértice tiene valencia n-1 (δ(v) = n-1), significa que está unido al resto de vértices del grafo, luego es imposible que se dé un vértice de valencia 0.
3. La suma de las valencias de los vértices es igual al doble del número de aristas, ya que cada arista ha sido contada 2 veces (v_i-v_j y v_j-v_i). Como consecuencia de ello, en un grafo, **el número de vértices impares siempre es un número par**.
   A esta propiedad se le conoce como el **Lema del Apretón de Manos**: $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2 \cdot |A|$

❖ Adyacencia de digrafos:

A diferencia de los grafos no dirigidos que tan sólo tienen una valencia o grado por vértice, los grafos dirigidos o digrafos tienen grado de entrada y de salida para cada vértice, de manera que:

- $\delta_e(v)$: número de aristas que se dirigen hacia el vértice v.
- $\delta_s(v)$: número de aristas que se dirigen hacia el vértice v.

$\delta_e(1) = 2$ $\delta_s(1) = 2$
$\delta_e(2) = 1$ $\delta_s(2) = 1$
$\delta_e(3) = 1$ $\delta_s(3) = 2$
$\delta_e(4) = 2$ $\delta_s(4) = 2$
$\delta_e(5) = 1$ $\delta_s(5) = 0$

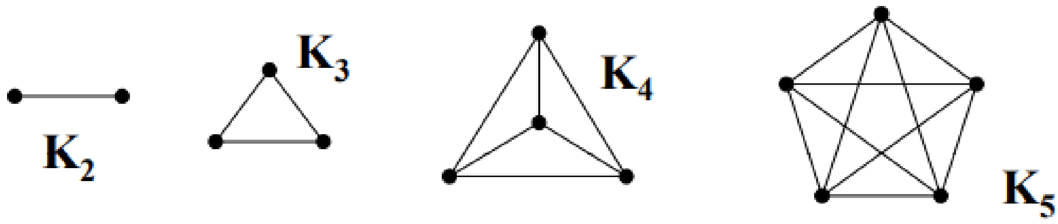


❖ Grafos especiales:

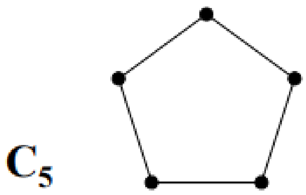
Grafo trivial: es un tipo de grafo simple que no tiene ninguna arista, es decir, todos los vértices son aislados ($\delta(v) = 0$).

Grafo regular: es un tipo de grafo simple en donde todos los vértices tienen la misma valencia. Un grafo regular con vértices de grado k se le conoce como **grafo k-valente** o **grafo k-regular**.

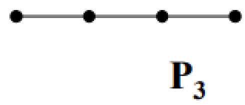
Dentro de los grafos regulares, si todos los vértices son de grado $\delta(v) = n-1$, es decir, $k = n-1$, entonces se llaman **grafos completos** (k_n).



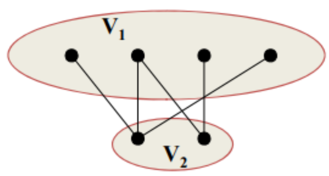
Dentro de los grafos 2-regulares, existe uno concreto llamado **grafo ciclo**, que consiste en un camino cerrado en el que no se repite ningún vértice a excepción del primero que aparece dos veces como principio y fin del camino. Se denota como C_n, siendo el menor grafo ciclo el C_3.



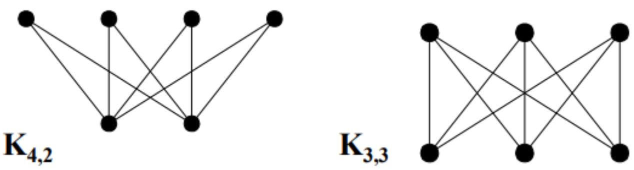
En el caso de que sea una secuencia de vértices abierta tal que haya una arista entre cada vértice y el siguiente, se le llama **grafo camino** y se denota como P_n, donde n es el número de aristas.



Grafo bipartito: es un tipo de grafo simple que se puede partir en 2 conjuntos, de manera que $V = V_1 \cup V_2$ y además cualquier arista del grafo esté determinado por los vértices de V_1 y V_2.



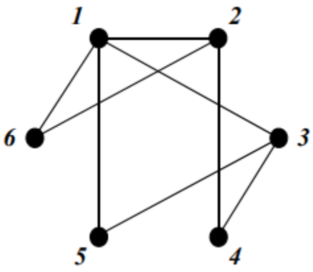
Dentro de los grafos bipartitos, existen los **grafos bipartitos completos**, que se denotan como $K_{n,m}$ y en donde los vértices de V_1 tendrán grado igual al número de vértices de V_2 y los vértices de V_2 tendrán grado igual al número de vértices de V_1.



2. Formas de definir un grafo

La manera más simple como ya se ha visto anteriormente es representarlo gráficamente o mediante conjuntos.

$$G = (V, A) \begin{cases} V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ A = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\} \end{cases}$$



❖ **Listas de adyacencia o listas de listas:**

Son listas formadas por n_v listas, es decir, por cada vértice, hay una lista y cada una de ellas estará compuesta por los vértices adyacentes a dicho vértice.

Para el grafo del ejemplo anterior, la lista de adyacencia sería:

{{2, 3, 5, 6}, {1, 4, 6}, {1, 4, 5}, {2, 3}, {1, 3}, {1, 2}}

Como podemos observar, por ejemplo, la primera lista de la lista corresponde al vértice 1, que es adyacente al vértice 2, 3, 5 y 6.

❖ **Matriz de adyacencia:**

Se trata de una matriz de orden n_v x n_v en donde: $a_{ij} \begin{cases} 1 \text{ si } v_i \text{ es adyacente a } v_j \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$

Para el grafo del ejemplo anterior, la matriz de adyacencia sería:

$$\mathbf{Ad} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como podemos observar, por ejemplo, el elemento a_{34} será 1 porque el vértice 3 es adyacente al vértice 4.

<u>Propiedades de la matriz de adyacencia:</u>

1. La matriz de adyacencia siempre es cuadrada y simétrica.
2. La suma de cada fila o columna es el grado del vértice correspondiente.
3. Todos los elementos de la diagonal principal son nulos.

❖ **Matriz de incidencia:**

Se trata de una matriz de orden n_v x n_a en donde: $b_{ij} \begin{cases} 1 \text{ si } v_i \text{ es vértice de la arista } a_j \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$

Las filas indicarán los vértices y las columnas indicarán las aristas.

Para el grafo del ejemplo anterior, la matriz de incidencia sería:

$$\mathbf{In} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como podemos observar, por ejemplo, el elemento a_{32} será 1 porque el vértice 3 tiene una arista que va al vértice 1 porque a_{12} también vale 1.

Como podemos observar, aparen en las columnas (es decir, las aristas) pares de 1, ya que se tratan de grafos simples y entonces sólo hay una arista como máximo entre un vértice y otro.

Propiedades de la matriz de incidencia:

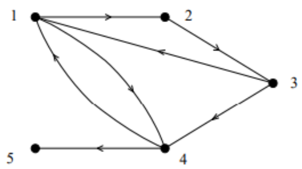
1. La matriz de incidencia no tiene por qué ser ni cuadrada ni simétrica.
2. La suma de cada fila es el grado del vértice correspondiente.
3. La suma de cada columna vale 2.

❖ **Matriz de adyacencia de un digrafo:**

Se trata de una matriz de orden n_v x n_v en donde: $a_{ij} \begin{cases} 1 \text{ si } (v_i, v_j) \text{ es una arista} \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$

Para el siguiente ejemplo:

$$G = (V, A) \begin{cases} V = \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ A = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 1), (4, 5)\} \end{cases}$$



La matriz de adyacencia sería la siguiente:

$$\mathbf{Ad} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como podemos observar, por ejemplo, el elemento a_{31} será 1 porque existe la arista (3, 1)

<u>Propiedades de la matriz de adyacencia de un digrafo:</u>

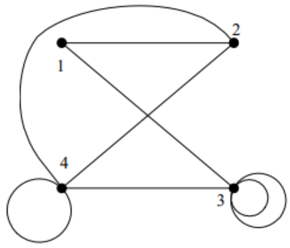
1. La matriz de adyacencia de un digrafo es cuadrada pero no tiene por qué ser simétrica.
2. La suma de cada fila es el grado de salida del vértice correspondiente.
3. La suma de cada columna es el grado de entrada del vértice correspondiente.
4. Todos los elementos de la diagonal principal son nulos.

❖ **Matriz de adyacencia de un seudografo:**

Se trata de una matriz de orden n_v x n_v en donde: a_{ij} $\begin{cases} \text{si } i \neq j\text{, entonces será el número de veces que aparece la arista } \{v_i, v_j\} \\ \text{si } i = j\text{, entonces será el doble del número de veces que aparece la lazo } \{v_i, v_j\} \end{cases}$

Para el siguiente ejemplo:

$$G = (V, A) \begin{cases} V = \{1, 2, 3, 4\} \\ A = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 3\}, \{3, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 4\}\} \end{cases}$$



La matriz de adyacencia sería la siguiente:

$$\mathbf{Ad} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Como podemos observar, por ejemplo, el elemento a_{42} será 2 porque existe la arista {4,2} 2 veces (o {2,4}, es lo mismo).

Como podemos observar, por ejemplo, el elemento a_{33} será 4 porque existen el lazo {3,3} 2 veces y el doble será 4.

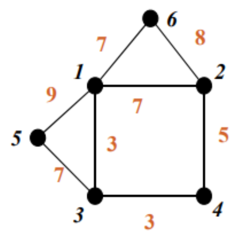
<u>Propiedades de la matriz de adyacencia de un seudografo:</u>

1. La matriz de adyacencia de un seudografo es cuadrada y simétrica.
2. La suma de cada fila o columna es el grado del vértice correspondiente.
3. La diagonal no tiene por qué ser nula (sólo lo será en el caso de no haber lazos).

❖ **Matriz de adyacencia de un grafo ponderado:**

Se trata de una matriz de orden n_v x n_v en donde: a_{ij} = peso de la arista $\{v_i, v_j\}$.

Para el ejemplo de la derecha, la matriz de adyacencia sería la siguiente:



$$\mathbf{Ad} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 3 & 0 & 9 & 7 \\ 7 & 0 & 0 & 5 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

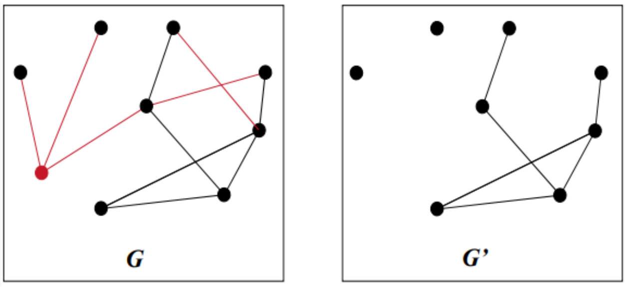
Como podemos observar, por ejemplo, el elemento a_{24} será 5 porque la arista {2,4} tiene peso 5.

3. Subgrafos. Operaciones con grafos

❖ **Subgrafo:**

Un subgrafo G’ de un grafo G es un grafo cuyo conjunto de vértices y de aristas es un subconjunto del de G.

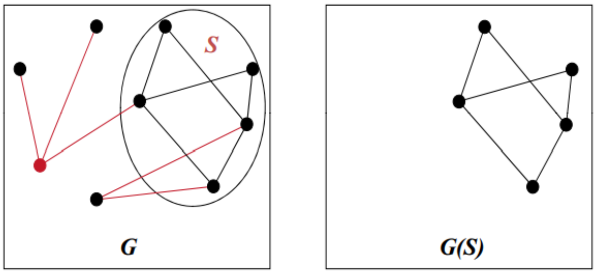
$$G' \subseteq G \Longleftrightarrow \begin{cases} V' \subseteq V \\ A' \subseteq A \end{cases}$$



Como se puede observar en el ejemplo, se han eliminado 4 aristas y 1 vértice.

❖ **Subgrafo inducido:**

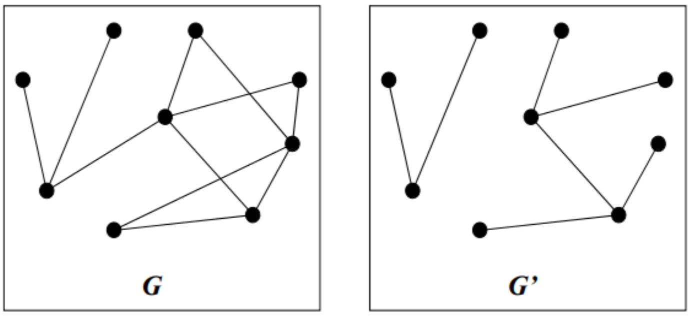
Un subgrafo inducido G(S) por un conjunto de vértices V’ (que es un subconjunto de vértices del grafo original) perteneciente a un subgrafo S, es un subgrafo formado por dicho conjunto de vértices y el subconjunto de aristas de A tal que toda arista tiene sus dos extremos en V’.



Como podemos observar, en el subconjunto S se ha eliminado todas las aristas y vértices que están “fuera” de ese conjunto, obteniéndose G(S).

❖ **Subgrafo recubridor:**

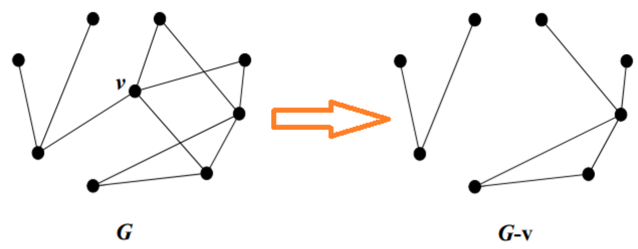
Un subgrafo recubridor es un subgrafo G’ de un grafo G en donde los vértices del subgrafo G’ y del grafo G son los mismos, es decir, V’ = V.



Como podemos observar, en el subgrafo G' tenemos los mismos vértices que en el grafo original G.

❖ **Eliminación de vértices:**

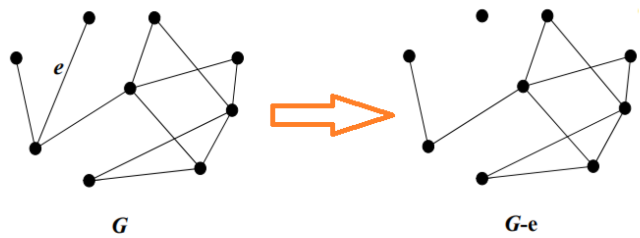
Sea v un vértice perteneciente al conjunto de vértices V, si se elimina ese vértice v, entonces se eliminan todas las aristas incidentes a ese vértice.



Como podemos observar, al haber eliminado el vértice v, se han eliminado todas las aristas adyacentes a v.

❖ Eliminación de aristas:

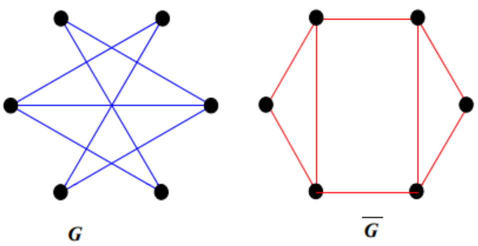
Sea e una arista perteneciente al conjunto de aristas A, si se elimina esa arista e, entonces los vértices adyacentes permanecen presentes.



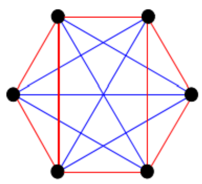
Como podemos observar, al haber eliminado la arista e, han permanecido presente los vértices adyacentes.

❖ Grafo complementario:

Dado un grafo G = (V, A), se considera el grafo complementario como el grafo $\overline{G}$ = (V, $\overline{A}$), en donde los vértices G y $\overline{G}$ son los mismos y las aristas de $\overline{G}$ serán las que no aparecen en G (y quitando las aristas de G).

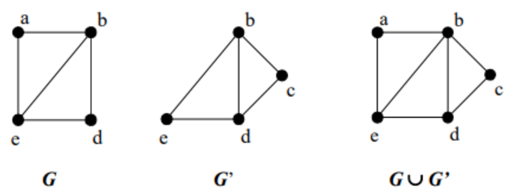


Como consecuencia de ello, la unión de G y $\overline{G}$ es un grafo regular completo K_n ($G \cup \overline{G} = K_n$):



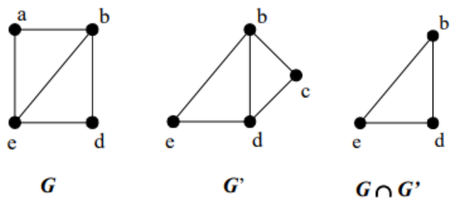
❖ Unión de grafos:

Sea un grafo G = (V, A) y un subgrafo G’ = (V’, A’), entonces la unión es G ∪ G’ = (V ∪ V’, A ∪ A’), es decir, se forma un grafo en el que los vértices y las aristas de ambos grafos se juntan.



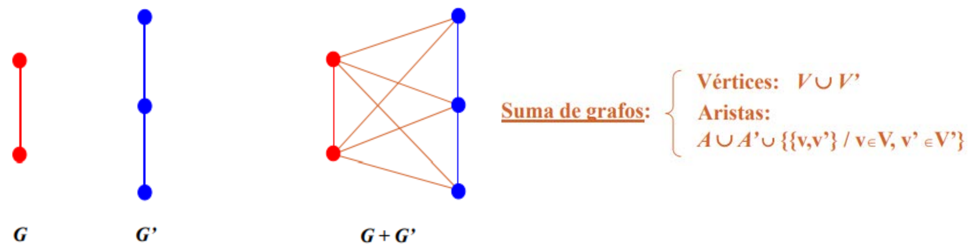
❖ Intersección de grafos:

Sea un grafo G = (V, A) y un subgrafo G’ = (V’, A’), entonces la intersección es G ∩ G’ = (V ∩ V’, A ∩ A’), es decir, se forma un grafo en los que los vértices y aristas de ambos grafos coincidan.

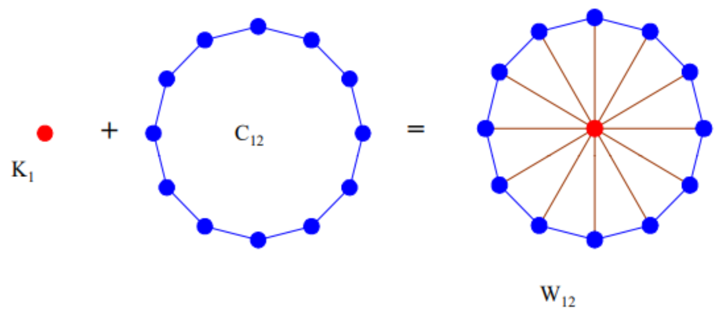


❖ **Suma de grafos:**

Sean dos grafos simples disjuntos ($V \cap V' = 0$), entonces una suma de grafos es una operación binaria entre grafos que consiste en unir los conjuntos de vértices y los conjuntos de aristas de ambos grafos y además se unen todos los vértices del primer grafo con todos los vértices del segundo grafo mediante aristas.



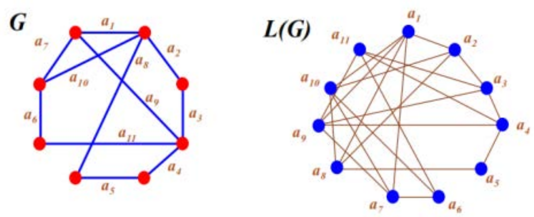
Si se realiza la suma de un grafo completo k_1 (es decir, un vértice) y un grafo ciclo C_n, entonces se obtiene el **grafo rueda**, que se denota como $W_n = K_1 + C_n$.



❖ **Grafo de línea:**

Dado un grafo simple no dirigido G, el grafo de línea L(G) estará compuesto de manera que:

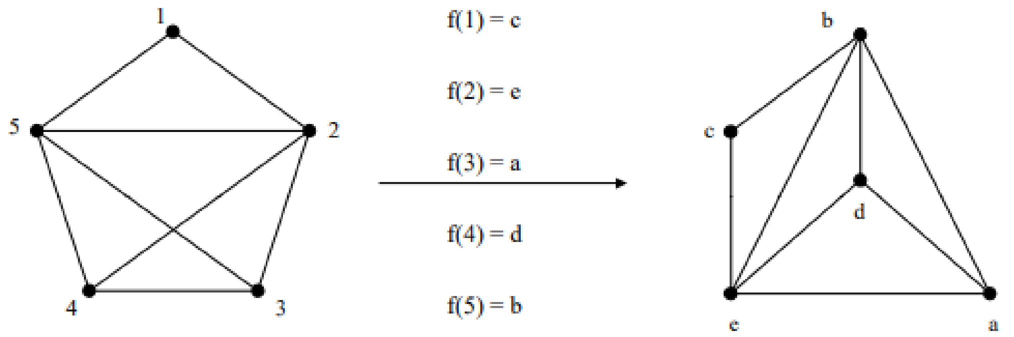
- Los vértices del grafo de línea L(G) son las aristas del grafo original G.
- Las aristas del grafo de línea L(G) se construyen según las adyacencias de aristas en el grafo original G, es decir, si y sólo si sus aristas correspondientes comparten un vértice del grafo original G.



Como podemos observar, por ejemplo, la arista a_1 del grafo original G pasa a ser un vértice en el grafo de línea L(G) y como en el grafo original G, la arista a_1 es adyacente a las aristas a_7, a_9, a_{10}, a_8 y a_2, entonces en el grafo de línea L(G) se forman aristas que van a dichos vértices.

4. Isomorfismos de grafos

Sea un grafo G y otro G', se dicen que son **isomorfos** cuando se puede establecer una aplicación biyectiva entre los conjuntos de sus vértices f: V $\longrightarrow$ V', es decir, cuando para cada elemento de V tiene asignado uno diferente de V', de manera que se conserva la relación de adyacencia. Se denota como G ~ G'.



Observando el ejemplo anterior, el grafo de la izquierda tiene el siguiente conjunto de aristas:

A = {{1, 2}, {1, 5}, {2, 3}, {2, 4}, {2, 5}, {3, 4}, {3, 5}, {4, 5}}

Si se realiza la aplicación biyectiva indicada a dicho conjunto, es decir, se sustituyen los valores del conjunto anterior según la aplicación, entonces se obtiene un nuevo conjunto de aristas:

A' = {{c, e}, {c, b}, {e, a}, {e, d}, {e, b}, {a, d}, {a, b}, {d, b}}

Como dicho conjunto de aristas existe en el grafo de la derecha, entonces podemos confirmar que ambos grafos son isomorfos al haber podido establecer una aplicación biyectiva correcta.

Si con el mismo ejemplo hubiéramos probado a realizar una aplicación biyectiva diferente a dicho conjunto, por ejemplo: f(1) = a, f(2)= b, f(3) = c, f(4) = d, f(5) = e, entonces tendríamos el siguiente conjunto resultante de la aplicación biyectiva:

A' = {{a, b}, {a, e}, {b, c}, {b, d}, {b, e}, {c, d}, {c, e}, {d, e}}

Observamos que dicho conjunto de aristas no existe en el grafo de la derecha (concretamente la arista {c, d}) y por tanto la aplicación biyectiva que hemos aplicado sería incorrecta, pero esto no implica que no exista una aplicación biyectiva que sí sea correcta como ya hemos visto.

Por tanto, a la hora de averiguar si 2 grafos son isomorfos, puede haber diferentes aplicaciones biyectivas que no sean válidas de igual manera que puede haber aplicaciones biyectivas que sí lo sean. Para verificar que sí son isomorfos, tan sólo hay que encontrar una aplicación biyectiva válida.

Probar diferentes aplicaciones biyectivas aleatoriamente puede ser tedioso y largo, por ello, también se puede comprobar que 2 grafos no son isomorfos en el caso de que se incumpla algunas de las siguientes invariantes.

Invariantes del isomorfismo de grafos:

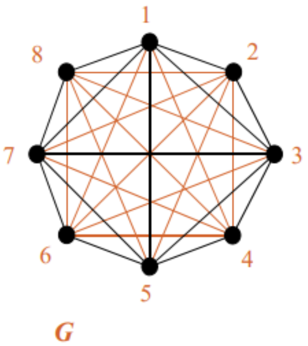
Si G y G' son isomorfos (G ~ G'), entonces se cumple que:

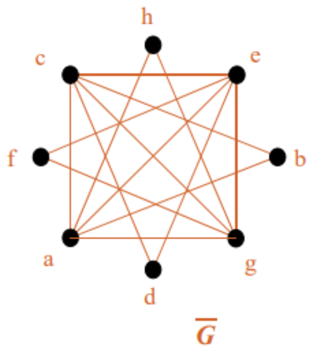
1. El número de vértices de cada grafo es el mismo.
2. El número de aristas de cada grafo es el mismo.
3. El número de grados de los vértices de cada grafo es el mismo.
4. El número de ciclos de cada grafo son de igual longitud.
5. El número de componentes conexas de cada grafo son iguales.

Existen más invariantes, pero esas son las principales.

❖ Grafo autocomplementario:

Un grafo G es autocomplementario si es isomorfo a su complementario $\bar{G}$, es decir, G ~ $\bar{G}$.





f(1) = a
f(2) = b
f(3) = c
f(4) = d
f(5) = e
f(6) = f
f(7) = g
f(8) = h

El ejemplo anterior demuestra que el grafo G es autocomplementario porque es isomorfo a su complementario según la aplicación biyectiva anterior.

Dos grafos G y G' son isomorfos si, y solo si, sus grafos complementarios lo son.

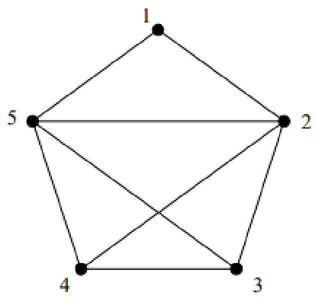
G ~ G' ↔ $\bar{G}$ ~ $\bar{G}$'

Debido a que los grafos complementarios suelen tener un menor número de aristas, se trabajan sobre ellos a la hora de comprobar si 2 grafos son isomorfos, ya que, en el caso de serlos, según la propiedad anterior, entonces también lo son sus grafos originales.

❖ Lista de grados de un grafo:

Una lista de grados de un grafo simple no dirigido es una secuencia de los grados de los vértices de dicho grafo, ordenados de mayor a menor.

Para el ejemplo de la derecha, la lista de grados sería (4, 4, 3, 3, 2).

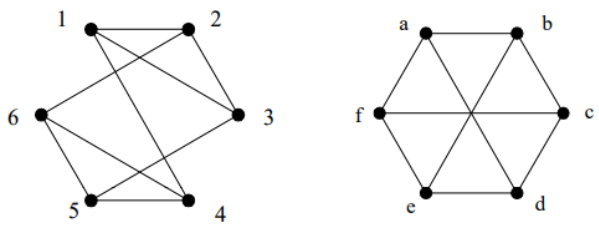


Relación de adyacencias

{2,4,3,3,4}

δ(1)=2, δ(2)=4, δ(3)=3, δ(4)=3, δ(5)=4

Que dos grafos tengan la misma lista de grados no implica que entonces sean isomorfos como se muestra a continuación:



Listas de grados (3,3,3,3,3,3)

Como podemos observar, ambos grafos tienen la misma lista de grados, pero sin embargo no son isomorfos porque se incumple la invariante de que el número de ciclos de cada grafo son de igual longitud.

En este caso, el grafo de la izquierda tiene ciclos de longitud 3 y sin embargo el grafo de la derecha no, de hecho, es de por sí un grafo ciclo C_6.

No siempre una secuencia numérica decreciente representa una lista de grados de un grafo.

<u>Teorema de Havel-Hakimi:</u>

La secuencia numérica decreciente ($a_1, a_2, ..., a_p$; con $a_1 > 0$, $p > 1$) es una **secuencia gráfica** si, y sólo si, también lo es la que resulta de efectuar las siguientes operaciones:

1) Eliminar el primer elemento (a_1) de la lista.
2) Restar una unidad a los primeros a_1 elementos de la nueva lista.
3) Ordenar en sentido decreciente la nueva lista

<u>Algoritmo de Havel-Hakimi:</u>

Una secuencia numérica decreciente representa una lista de grados de un grafo si el siguiente algoritmo devuelve una lista de ceros:

P.1 Leer la lista decreciente ($a_1, a_2, ..., a_p$).
P.2 Mientras el primer elemento sea $a_1 > 0$:
    P.3 Eliminar el elemento a_1 de la lista.
    P.4 Restar 1 a los primeros a_1 elementos de la nueva lista.
    P.5 Ordenar decrecientemente la nueva lista.
P.6 Retornar la lista ($a_1, a_2, ...$).

Por ejemplo, para la siguiente lista, comprobamos si es realmente una lista de grados aplicando el algoritmo de Havel-Hakimi: (5, 4, 4, 4, 2, 1).

$(5, 4, 4, 4, 2, 1) \rightarrow_{P.3} (4, 4, 4, 2, 1) \rightarrow_{P.4} (3, 3, 3, 1, 0) \rightarrow_{P.3} (3, 3, 1, 0) \rightarrow_{P.4} (2, 2, 0, 0) \rightarrow_{P.3}$

$\rightarrow_{P.3} (2, 0, 0) \rightarrow_{P.4} (1, -1, 0) \rightarrow_{P.5} (1, 0, -1) \rightarrow_{P.3} (0, -1) \rightarrow_{P.4} (-1, -1)$

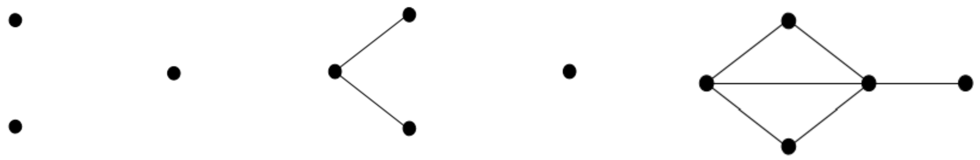
Por tanto, como la lista retornada no está compuesta de 0, entonces la lista de grados (5, 4, 4, 4, 2, 1) no es una secuencia gráfica.

Para otro ejemplo, comprobamos si (1, 2, 2, 3, 4) es realmente una lista de grados aplicando el algoritmo de Havel-Hakimi:

$(1, 2, 2, 3, 4) \to (4, 3, 2, 2, 1) \to_{P.3} (3, 2, 2, 1) \to_{P.3} (2, 1, 1, 0) \to_{P.3} (1, 1, 0) \to_{P.4} (0, 0, 0)$

Por tanto, como la lista retornada está compuesta de 0, entonces la lista de grados (1, 2, 2, 3, 4) es una secuencia gráfica.

Gracias a este algoritmo se puede representar el grafo partiendo de la lista (0, 0, 0) y volviendo hacia atrás.



(0, 0, 0) (2, 1, 1, 0) (4, 3, 2, 2, 1)

TEMA 2

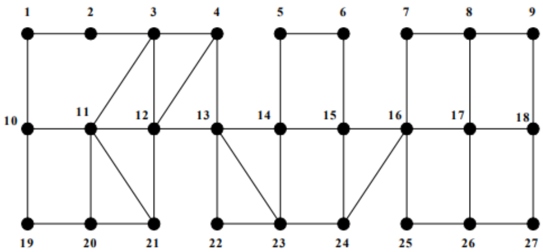
Conectividad en grafos

1. Introducción

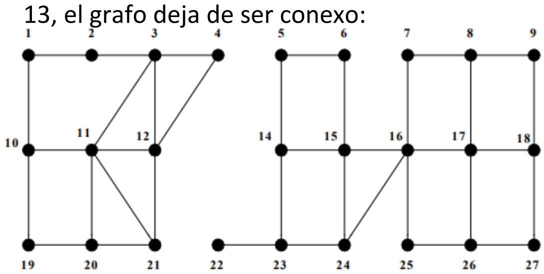
❖ **Fragilidad de una red (conexión en grafos):**

Se puede estudiar la conectividad de un grafo sabiendo el número de vértices que son necesarios eliminar para que un grafo deje de ser conexo.

Si tenemos el siguiente grafo:



Observamos que con tan sólo eliminar el vértice 13, el grafo deja de ser conexo:



❖ **Redistribución de tráfico (conexión en digrafos):**

Un ejemplo llevado a la vida real es el tráfico en una ciudad haciendo uso de la conectividad entre digrafos, de manera que podríamos estudiar diferentes características como por ejemplo el camino más corto.

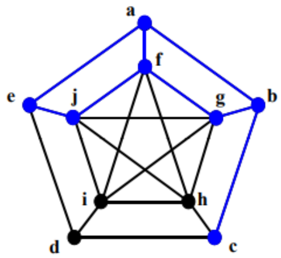
2. Conexión en grafos

❖ **Camino:**

En los grafos, un camino es una sucesión de vértices adyacentes de manera que 2 vértices constituyen una arista. Es decir, se trata de una secuencia alternada de vértices y aristas.

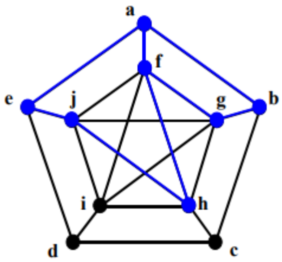
Por tanto, cuando 2 vértices están **conectados** ($v_i \sim v_j$), formarán un camino.

La **longitud** será el número de aristas que habrá en total en el camino siempre que se traten de grafos sin ponderación.



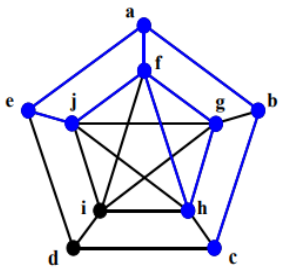
Como podemos observar en el grafo de la izquierda, tenemos un camino formado por los vértices a, b, g, f, a, e, j, f, a, b, c, de longitud 10 (ya que el camino está formado por 10 aristas). Observamos que se repiten aristas y vértices.

En el caso de que el camino empiece y termine en el mismo vértice, entonces se considera un **camino cerrado**.



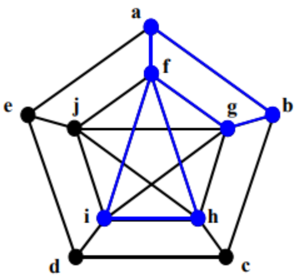
Como podemos observar en el grafo de la izquierda, tenemos un camino formado por los vértices a, e, j, h, f, a, b, g, f, a, de longitud 9 (ya que el camino está formado por 9 aristas). Observamos que se trata de un camino cerrado porque el vértice inicial es igual al vértice final.

En el caso de que en el camino no se repita aristas, entonces se considera un **recorrido**.



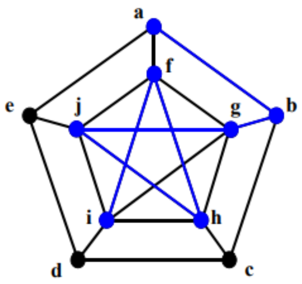
Como podemos observar en el grafo de la izquierda, tenemos un camino formado por los vértices a, f, h, g, f, j, e, a, b, c, de longitud 9 (ya que el camino está formado por 9 aristas). Observamos que se trata de un recorrido porque no se repite ninguna arista.

En el caso de que en el camino empiece y termine en el mismo vértice y además no se repita aristas (es decir, es camino cerrado y recorrido a la vez), entonces se considera un **circuito**.



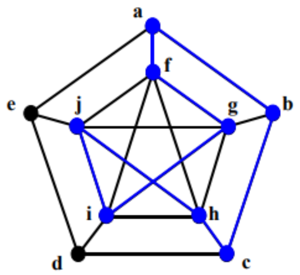
Como podemos observar en el grafo de la izquierda, tenemos un camino formado por los vértices a, f, i, h, f, g, b, a, de longitud 7 (ya que el camino está formado por 7 aristas). Observamos que se trata de un circuito es camino cerrado y recorrido a la vez.

En el caso de que en el camino no se repita vértices (y como consecuencia, tampoco aristas), entonces se considera un **camino simple**.



Como podemos observar en el grafo de la izquierda, tenemos un camino formado por los vértices i, f, h, j, g, b, a, de longitud 6 (ya que el camino está formado por 6 aristas). Observamos que se trata de un camino simple porque no se repite ningún vértice (tampoco aristas).

En el caso de que en el camino no se repita vértices (y como consecuencia, tampoco aristas) y empiece y termine en el mismo vértice (es decir, es camino simple y cerrado, aunque se repita el primer y último vértice, ya que es cerrado), entonces se considera un **ciclo**.



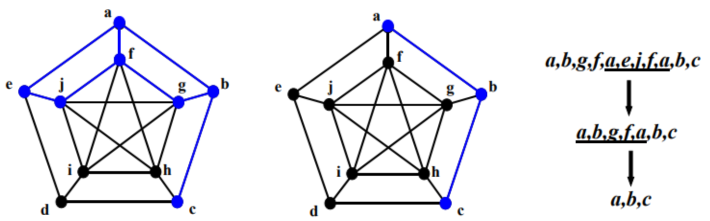
Como podemos observar en el grafo de la izquierda, tenemos un camino formado por los vértices a, f, g, i, j, h, c, b, a, de longitud 8 (ya que el camino está formado por 8 aristas). Observamos que se trata de un ciclo porque es camino simple y cerrado.

Todos estos conceptos anteriores quedan resumidos en la siguiente tabla:

Nombre	Puede repetir vértices?	Puede repetir aristas?	¿Es cerrado?
camino	SI	SI	
camino cerrado	SI	SI	SI
recorrido	SI	NO	
circuito	SI	NO	SI
camino simple	NO	NO	
ciclo	NO	NO	SI

Si 2 vértices están conectados ($v_i \sim v_j$), entonces lo estarán mediante un camino simple, es decir, no se repiten vértices y como consecuencia tampoco aristas.

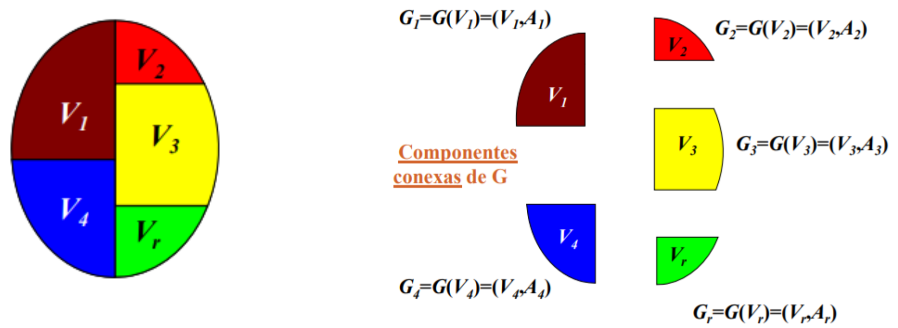
Si observamos el siguiente grafo cuyo camino está formado por a, b, g, f, a, e, j, f, a, b, c, podemos extraer un camino simple de menor longitud eliminando los vértices que se repiten y los que están entre esos que se repiten, de manera que quedará un camino simple de menor longitud: a, b, c.



❖ **Componentes conexas:**

Se dice que existe una **relación de equivalencia** entre un vértice y otro, si los componentes donde se encuentran están conexos, y por tanto se puede encontrar un camino para cada conjunto de vértices.

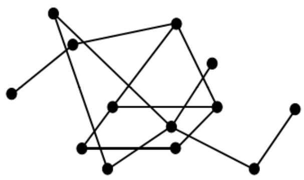
Como podemos observar, en el siguiente ejemplo tenemos un grafo conexo que pasa a ser un grafo no conexo con 5 componentes conexas:



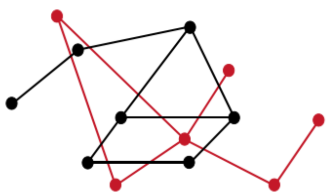
Cada **componente conexa** es una parte del grafo de manera que no puede existir un camino de una componente conexa a otra.

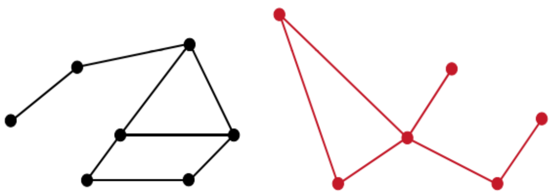
Un **grafo** será considerado **conexo** si está formado únicamente por una componente conexa, por tanto, todos los vértices del grafo están conectados entre sí mediante al menos un camino.

Si observamos el siguiente ejemplo, se trata de un grafo no conexo formado por 2 componentes conexas:



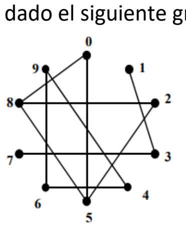
Lo coloreamos en rojo para distinguirlos y los separamos.





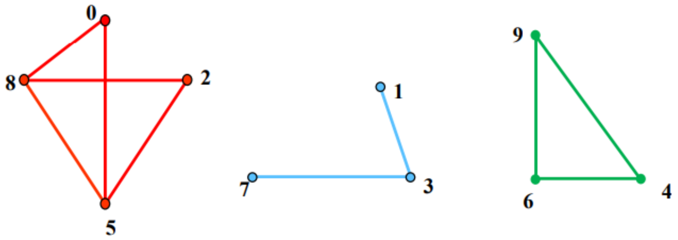
Se pueden obtener las componentes conexas mediante el algoritmo de **búsqueda en profundidad o anchura** (explicado en el tema 3). Se puede usar una tabla de adyacencias, donde la primera fila representa los vértices y el resto de filas los vértices adyacentes al vértice indicado en la primera fila.

Por ejemplo, dado el siguiente grafo con la siguiente lista de adyacencias:



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5 8	3	5 8	1 7	6 9	0 2 8	4 9	3	0 2 5	4 6

El resultado de los algoritmos sería los siguientes subgrafos inducidos y las siguientes tablas de adyacencias:



0	2	5	8
5	5	0	0
8	8	2	2
		8	5

1	3	7
3	1	3
	7	

4	6	9
6	4	4
9	9	6

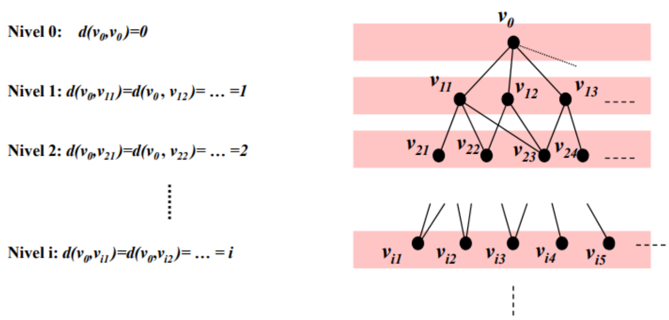
Por tanto, el grafo tiene 3 componentes conexas.

❖ Distancia:

Siempre que un grafo no sea ponderado, se define **distancia** entre 2 vértices $d(v_i, v_j)$ de un grafo simple como el número de aristas del camino más corto que los une.

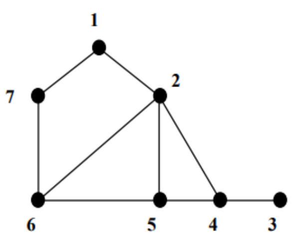
Se utiliza el algoritmo de búsqueda en profundidad para obtener la distancia de un vértice v_0 a todos los demás, de manera que se predispone el grafo por niveles y se elige un vértice cualquiera raíz, de manera que en el siguiente nivel estarán los vértices adyacentes. A su vez, para cada uno de esos vértices, estarán los vértices adyacentes y así hasta que no haya más vértices.

En el caso de que no exista un camino entre v_0 y un vértice cualquiera v, entonces la distancia será $d(v_0, v) = \infty$.



Se considera la **excentricidad** de un vértice como la mayor distancia desde un vértice v al resto de vértices del grafo: $e(v) = \max\{d(v,u) : v,u \in V\}$

Si observamos el siguiente grafo:

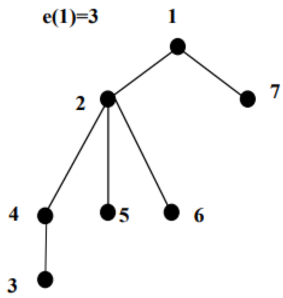


Las excentricidades serían las siguientes:

e(1)=3 e(3)=4 e(5)=2 e(7)=4

e(2)=2 e(4)=3 e(6)=3

Por ejemplo, para e(1), se parte del vértice 1 y se miden las distancias hacia todos los vértices, es decir, el número de aristas del camino más corto que los une para cada vértice. Entonces se elige el camino con mayor distancia y esa será la excentricidad. Una forma fácil de verlo es representarlo en forma de árbol por niveles:



Podemos observar que e(1) = 3 ya que es la distancia mayor.

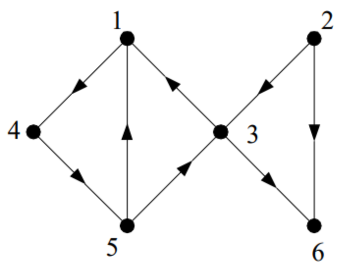
Se considera **radio** de un grafo como la menor excentricidad y **diámetro** de un grafo como la mayor excentricidad. Para el grafo del ejemplo anterior rad(G)=2 y diam(G)=4.

3. Conexión en digrafos

❖ **Camino dirigido:**

Los caminos en digrafos se tratan de la misma manera que en los grafos simples no dirigidos, salvo que esta vez se tiene en cuenta la dirección.

Un **semicamino** sería un camino en el que se suprimen las direcciones, es decir, se trata de como un camino en los grafos simples no dirigidos.



***4-5-3-6* es un camino**

***3-1-4-5-3* es un ciclo**

***1-3-6-2-3-5* es un semicamino**

❖ **Componentes conexas:**

Un grafo es **débilmente conexo** cuando para cada par de vértices, existe un semicamino, es decir, si se tratase como un grafo no dirigido, es equivalente a decir que el grafo es conexo. En caso de que haya algún par en el que no exista un semicamino, entonces no será débilmente conexo.

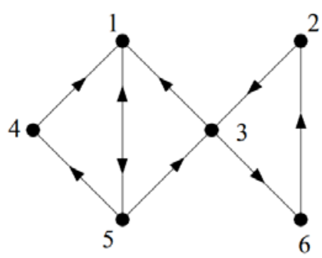
El grafo del ejemplo anterior es débilmente conexo, ya que, si quitamos las direcciones, se puede observar que forma un grafo conexo.

Un grafo es **unilateralmente conexo** cuando para cada par de vértices, existe un camino v_i-v_j o v_j-v_i. En caso de que haya algún par en el que no exista un camino v_i-v_j o v_j-v_i, entonces no será unilateralmente conexo.

El grafo del ejemplo anterior no es unilateralmente conexo, ya que, no existe un camino del vértice 2 al 5 ni tampoco del vértice 5 al 2.

Un grafo es **fuertemente conexo** cuando para cada par de vértices, existe un camino v_i-v_j y v_j-v_i. En caso de que haya algún par en el que no exista un camino v_i-v_j y v_j-v_i, entonces no será fuertemente conexo.

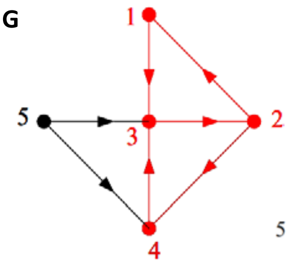
El grafo representado a la derecha, sería fuertemente conexo.

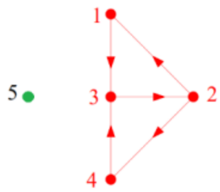


Estudiar si un grafo es fuertemente conexo es bastante laborioso, es por ello que lo que se hace es estudiar las componentes fuertemente conexas. Para obtener las componentes fuertemente conexas de un digrafo, se realiza el **algoritmo de Tarjan** (explicado en el tema 3).

A diferencia de los grafos simples, las diferentes componentes no tienen por qué ser igual a G.

G



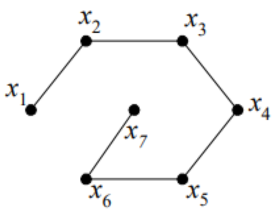


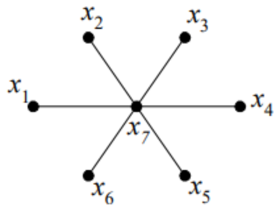
En la figura, G_1 y G_2 son componentes fuertemente conexas.

4. k-conexión en grafos

❖ **k-conexión con vértices:**

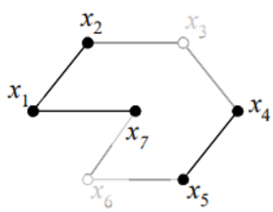
Es importante que un grafo sea conexo. Por ejemplo, en una red de ordenadores, si queremos conectar 7 ordenadores, observamos dos posibles soluciones, usando un grafo camino y un grado en estrella:

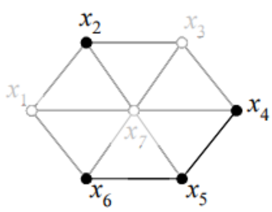




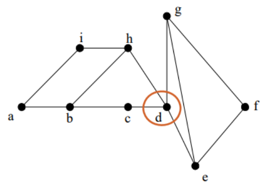
Sin embargo, estas dos soluciones no son adecuadas, ya que en el grafo camino hay muchos nodos "delicados" que lo parten en dos (por ejemplo, eliminar el vértice x_3), y en el grafo estrella hay un único vértice delicado (el vértice x_7), pero parte el grafo en 6.

Si pusiéramos el grafo en forma de ciclo, no tendríamos este problema, sin embargo, desconectando 2 nodos ya quedarían aislados. De manera similar, si usamos un grafo rueda, desconectando 3 nodos, ya quedarían aislados.



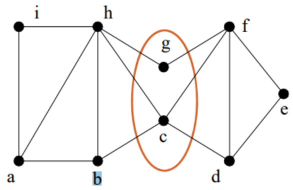


A estos vértices se les llaman **vértices de corte**, es decir, son aquellos vértices que, si se eliminan, el grafo deja de ser conexo.



Para el grafo de la derecha, el vértice d sería un vértice de corte.

Si son dos vértices los que son necesarios eliminar para que el grafo deje de ser conexo, entonces se denominan **pareja de corte**.



Para el grafo de la derecha, los vértices g y c serían una pareja de corte.

Si son dos o más los vértices de corte, entonces se denominan **conjunto de corte**.

Se llama **conectividad** (k(G)) de un grafo conexo al menor cardinal de todos sus conjuntos de corte, es decir, al menor número de vértices que hay que eliminar para que un grafo deje de ser conexo. Para el ejemplo en el que se elimina g y c, k(G) = 2.

La existencia de un vértice de corte significa que el grafo tiene conectividad 1, de igual manera, la existencia de una pareja de corte significa que el grafo tiene conectividad 2, y así sucesivamente.

Por tanto, un grafo conexo se dice que es **r-conexo** si es preciso eliminar al menos r vértices: $k(G) \geq r$

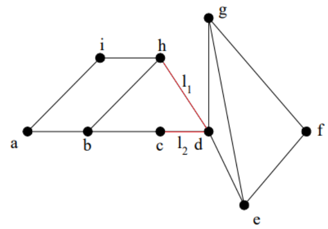
Por ejemplo, si la conectividad es k(G) = 3, entonces el grafo será 1-conexo, 2-conexo y 3-conexo, pero no 4-conexo.

- **k-conexión con aristas:**

De manera análoga a como se ha hecho con los vértices, los ejemplos de la red de ordenadores no son viables, ya que, falle la línea que falle (es decir, eliminando una arista), los sistemas quedarán desconectados.

A estas aristas que se eliminan y hacen que el grafo quede no conexo, se les llaman **arista de corte** o **puente**. De igual manera que en los vértices, una **pareja de corte (de aristas)** y un **conjunto de corte (de aristas)**, son las aristas necesarias de eliminar para que el grafo deje de ser conexo.

Se llama **conectividad lineal** ($\lambda(G)$) de un grafo conexo al menor cardinal de todos sus conjuntos de corte (de aristas), es decir, al menor número de aristas que hay que eliminar para que un grafo deje de ser conexo.



Para el grafo de la derecha, es necesario eliminar las aristas l1 y l_2 para que el grafo deje de ser conexo, por lo que $\lambda(G) = 2$.

La existencia de una arista de corte significa que el grafo tiene conectividad 1, de igual manera, la existencia de una pareja de corte (de aristas) significa que el grafo tiene conectividad 2, y así sucesivamente.

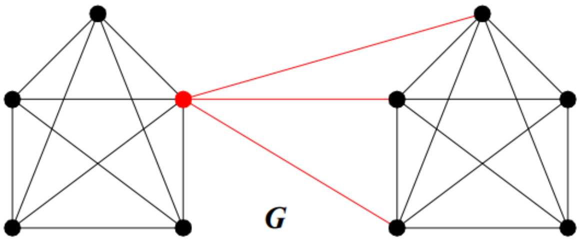
Por tanto, un grafo conexo se dice que es **r-linealmente conexo** si es preciso eliminar al menos r aristas: $\lambda(G) \geq r$

Por ejemplo, si la conectividad es $\lambda(G) = 3$, entonces el grafo será 1-conexo, 2-conexo y 3-conexo, pero no 4-conexo.

❖ Teorema de Whitney:

Sea un grafo conexo G=(V,A), si llamamos $\delta(G)$ a la menor de las valencias de sus vértices, se verifica que:

$$k(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

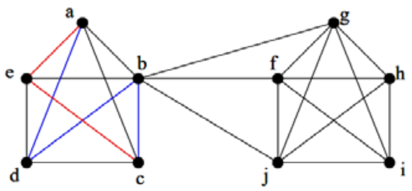


G es 1-conexo y 3-linealmente conexo, de manera que la mínima valencia de sus vértices es 4.

$k(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G) \rightarrow 1 \leq 3 \leq 4$

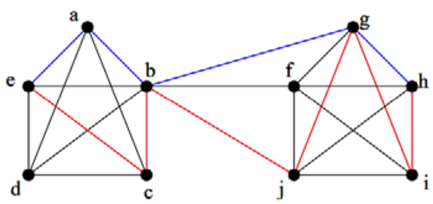
❖ Caminos disjuntos:

Dos caminos entre dos vértices u,v∈V se dice que son **disjuntos** si los únicos vértices que tienen en común son u y v.



Los caminos {a, e, c} y {a, d, b, c} son disjuntos porque sólo tienen en común los vértices a y c, que son los de inicio y fin.

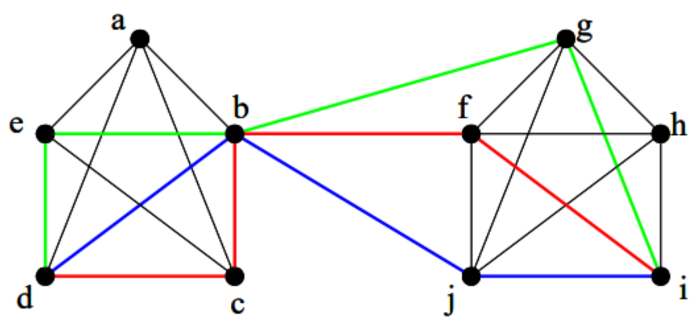
Dos caminos entre dos vértices u,v ∈ V se dice que son **disjuntos en aristas** si no tienen ninguna arista en común.



Los caminos {e, c, b, j, g, i, h} y {e, a, b, g, h} son disjuntos en aristas porque no tienen ninguna arista en común,

❖ Teorema de Menger:

a) La conectividad de un grafo coincide con el mayor número de caminos disjuntos que existen entre cualesquiera dos vértices del grafo.
b) La conectividad lineal de un grafo coincide con el mayor número de caminos disjuntos en aristas que existen entre cualesquiera dos vértices del grafo.



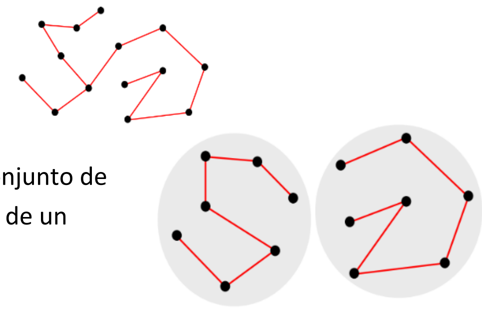
Sólo es posible un camino disjunto (en vértices), por lo que su conectividad es k(G) = 1.

Los caminos de color rojo y azul son disjuntos en aristas, de igual manera que los caminos de color rojo y verde, y azul y verde, por lo que su conectividad lineal es λ(G) = 3.

TEMA 3

Árboles

1. Introducción



Un **árbol** es un grafo conexo que no contiene ciclos.

En el caso de que el grafo no contenga ciclos es no conexo, entonces se trata de un **bosque**, es decir, un conjunto de árboles o lo que es lo mismo, cada componente conexa de un bosque es un árbol.

Un árbol tiene las siguientes propiedades:

- Es conexo.
- No contiene ciclos.
- Dados dos vértices cualesquiera del grafo, existe un único camino simple entre ellos.
- Al eliminar una arista cualquiera del grafo, se obtiene un grafo con dos componentes conexas, siendo cada una de ellas un árbol.
- Si tiene n_v vértices y n_a aristas, entonces $n_a = n_v - 1$.

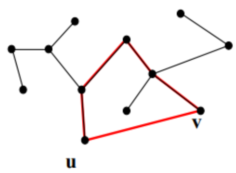
❖ Teorema de caracterización de árboles:

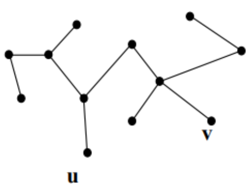
A partir de las propiedades anteriores, se puede deducir que dado un grafo T = (V ,A), son equivalentes las siguientes condiciones:

- T es un árbol.
- Entre dos vértices cualesquiera de T existe un único camino simple.
- T es conexo y al eliminar una arista cualquiera del grafo se desconecta dando lugar a dos componentes conexas, que son árboles.
- T es conexo y $n_a = n_v - 1$, siendo n_a el número de aristas y n_v el número de vértices.
- T no contiene ciclos y $n_a = n_v - 1$, siendo n_a el número de aristas y n_v el número de vértices.

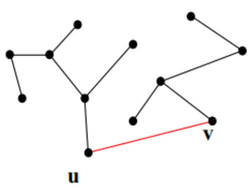
Como consecuencia de este teorema, podemos deducir las siguientes propiedades:

1) Si a un árbol se añade una arista se genera un ciclo.
2) Si eliminamos otra arista del ciclo obtenido, se obtiene otro árbol no necesariamente isomorfo al anterior.



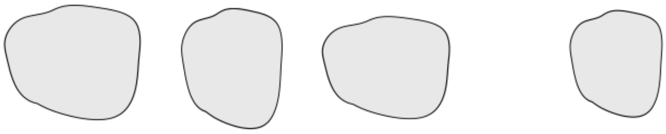


(4,3,3,2,2,2,1,1,1,1,1,1)



(3,3,3,2,2,2,2,1,1,1,1,1)

3) Si G = (V, A) es un bosque con c componentes conexas (árboles), entonces $n_v = n_a + c$ y por tanto $n_a = n_v - c$.

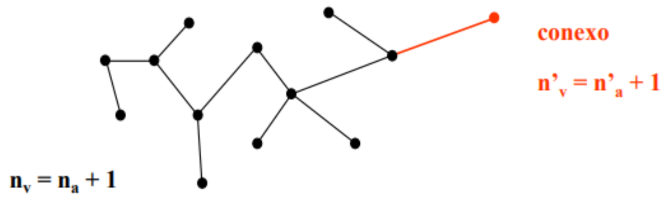


(V_1,A_1) (V_2,A_2) (V_3,A_3) (V_c,A_c)

$v_1 = a_1 + 1$ $v_2 = a_2 + 1$ $v_3 = a_3 + 1$ $v_c = a_c + 1$

$$n_v = v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_c = a_1 + 1 + a_2 + 1 + a_3 + 1 + ... + a_c + 1 = n_a + c$$

4) Si a un árbol le añadimos un vértice y una arista incidente en él, se obtiene un nuevo árbol.



2. Árboles enraizados

Se tratan de árboles representados por niveles, es decir, se destaca un vértice al que se le llamará **raíz**, de manera que el resto de vértices se representa por niveles.

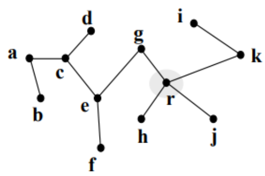
Se define **peso** o **altura** del árbol enraizado como el último nivel no vacío del árbol.

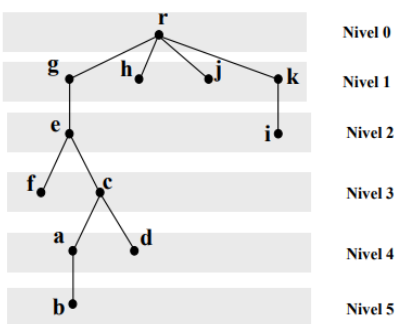
Se dice que un vértice v es **padre** de otro vértice u si v está en el nivel inmediatamente superior a u, siendo entonces u el **hijo**.

Se definen las **hojas** del árbol enraizado como aquellos vértices que no tienen hijos. Los **vértices internos** son aquellos que no son hojas, es decir, que tienen hijos.

En conclusión, dos árboles son isomorfos con la misma raíz si tienen los mismos vértices en cada nivel y la misma altura.

Por ejemplo, para el siguiente grafo, elegimos como vértice raíz el vértice r:



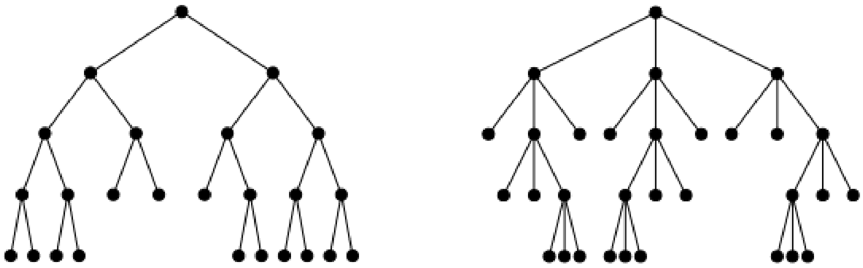


c es vértice padre de d.
d es vértice hijo de c.
g es vértice abuelo de f.
f es vértice nieto de g.
g es ascendiente de a.
a es descendiente de g.

Los vértices f, b, d, h, j e i son hojas y el resto de vértices son vértices internos.

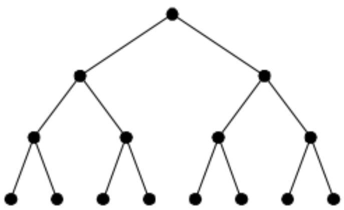
❖ **Árboles m-ario:**

Se tratan de árboles enraizados en donde todos sus vértices internos tienen m hijos. En concreto, se denomina árbol binario cuando m = 2 y árbol ternario cuando m = 3.

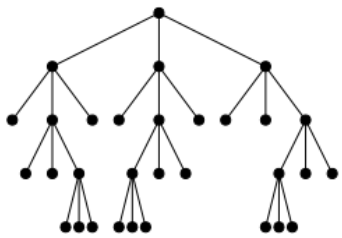


Cuando todas las hojas están al mismo nivel, entonces el **árbol m-ario es completo**.

Árbol binario completo



Árbol ternario (no completo)



Los árboles m-arios tienen las siguientes propiedades:

1) Sea T = (V, A) un árbol m-ario, de altura p y h hojas. Entonces se verifican las dos desigualdades siguientes (que son equivalentes):
   a) $p \geq \log_m h$
   b) $h \leq m^p$
2) Si T = (V, A) es un árbol m-ario con i vértices internos, su número total de vértices viene dado por n = m*i + 1

Como consecuencia de esta última propiedad, un árbol binario tiene un número impar de vértices, concretamente 2*i + 1 (i vértices internos e i + 1 hojas).

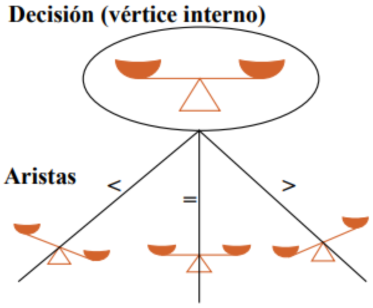
3. Árboles de decisión

Se tratan de árboles en donde los vértices internos representan decisiones, las aristas que van al siguiente nivel son los resultados de cada decisión y las hojas son los resultados finales del proceso.

El peso o altura de un árbol de decisión nos dice el mínimo número de decisiones que hace falta para llegar a una hoja cualquiera de dicho árbol.

Modelamos el siguiente problema como un grafo árbol de decisión:

Tenemos una moneda auténtica (0) y otras r monedas (1, 2, ..., r), indistinguibles de la auténtica por su apariencia. Se sospecha que una de estas monedas es falsa (demasiado ligera o demasiado pesada). ¿Cuál es el menor número de pesadas necesarias para determinar qué moneda es falsa, si es que hay alguna, y si es más ligera o más pesada que el resto?



Hojas (resultados del problema)

***B*: No hay moneda falsa**

***iP*: La moneda *i* es falsa (pesada)**

***iL*: La moneda *i* es falsa (ligera)**

En donde:

m = 3

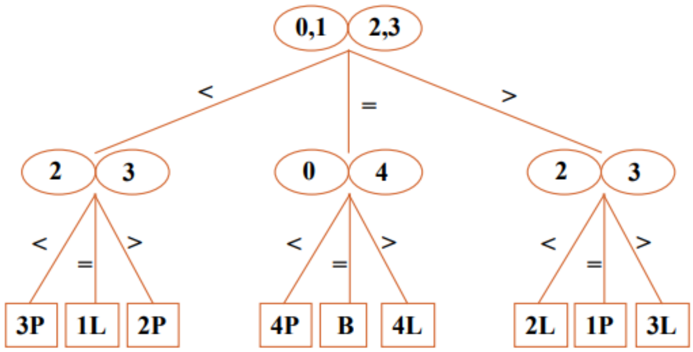
h = 2*r + 1

$p \geq \log_3 (2*r + 1)$

Por ejemplo, para r = 4:

h=9: B, 1P, 2P, 3P, 4P, 1L, 2L, 3L, 4L

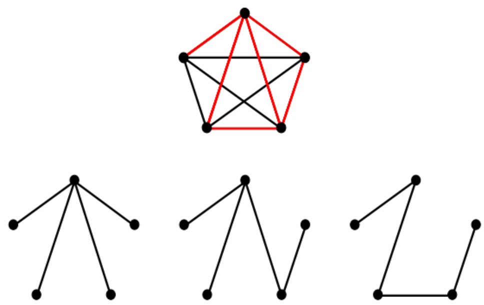
Altura del árbol: $p \geq \log_3 (9) = 2$



Por tanto, seré necesario al menos pesar 2 veces para determinar qué moneda es falsa, si es que hay alguna.

4. Árboles recubridores

Dado un grafo G = (V, A), **un árbol recubridor** de G es un árbol que es subgrafo recubridor de G (su conjunto de vértices es V). Además, G debe ser necesariamente conexo. Si el grafo G no es conexo, entones contiene algún **bosque recubridor**.



Existen 2 algoritmos de búsqueda de un árbol recubridor: **búsqueda en profundidad (DFS)** y **búsqueda en anchura (BFS)**.

❖ Búsqueda en profundidad (DFS):

<u>Algoritmo de búsqueda en profundidad (DFS):</u>

Dado un grafo simple, podemos obtener un árbol recubridor siguiendo los siguientes pasos:

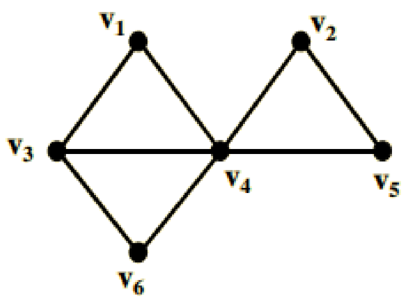
1) Se construye una lista L de vértices ordenados de menor a mayor.
2) Empezando por el primer vértice de la lista L y para cada vértice de dicha lista, se construye una pila observando qué vértices son adyacentes, de manera que se coloca siempre el menor adyacente no usado aún en la pila. Cuando el último vértice de la pila añadido ya no tenga más vértices adyacentes no usados en la pila, entonces se elimina este último vértice de la pila, y así sucesivamente hasta que la pila quede vacía.
3) Se construye el árbol recubridor a partir de las adyacencias dadas durante el paso 2.

Por ejemplo, dado el siguiente grafo, realizamos el algoritmo DFS:

1) L = {v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6}

2)

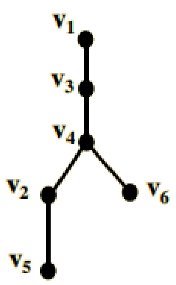
Pila
v_1
v_1, v_3
v_1, v_3, v_4
v_1, v_3, v_4, v_2
v_1, v_3, v_4, v_2, v_5
v_1, v_3, v_4, v_2
v_1, v_3, v_4
v_1, v_3, v_4, v_6
v_1, v_3, v_4
v_1, v_3
v_1
ϕ



Se añade v_3 porque es el siguiente menor de la lista adyacente a v_1.

Se elimina v_5 porque sus vértices adyacentes ya han sido usados en la pila.

3)



❖ **Búsqueda en anchura (BFS):**

Algoritmo de búsqueda en anchura (BFS):

Dado un grafo simple, podemos obtener un árbol recubridor siguiendo los siguientes pasos:

1) Se construye una lista L de vértices ordenados de menor a mayor.
2) Empezando por el primer vértice de la lista L, se construye una pila observando qué vértices son adyacentes a dicho vértice, de manera que se coloca siempre el menor adyacente no usado aún en la pila. Cuando ya no haya más vértices adyacentes para añadir, se elimina el primer vértice de la pila actual y se repite el proceso para los vértices adyacentes al vértice que ha quedado primero en la pila actual. Así sucesivamente hasta que la pila quede vacía.
3) Se construye el árbol recubridor a partir de las adyacencias dadas durante el paso 2 (el primer vértice de la pila actual será adyacente al último vértice de la pila actual, siempre que dicha pila actual no contenga por primera vez v_i como el primero de la pila actual).

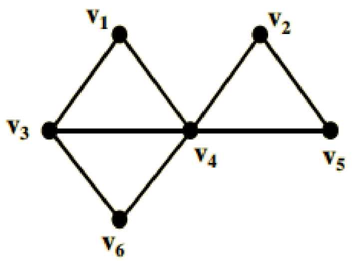
Por ejemplo, dado el siguiente grafo, realizamos el algoritmo BFS:

1) $L = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$
2)

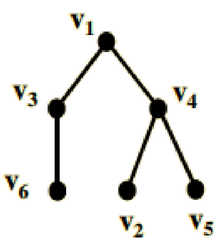
Pila
v_1
v_1, v_3
v_1, v_3, v_4
v_3, v_4
v_3, v_4, v_6
v_4, v_6
v_4, v_6, v_2
v_4, v_6, v_2, v_5
v_6, v_2, v_5
v_2, v_5
v_5
ϕ

Se añaden v_3 y v_4 porque son los siguientes, de menor a mayor, adyacentes a v_1 no usados en la pila aún.

Se elimina v_1 porque ya están en la pila todos sus vértices adyacentes.



3)



La búsqueda tanto en profundidad como en anchura para los digrafos se aplica de la misma manera que para los grafos simples. Además, podemos averiguar las componentes fuertemente conexas de un digrafo usando el algoritmo de Tarjan a partir de la búsqueda en profundidad, como veremos a continuación.

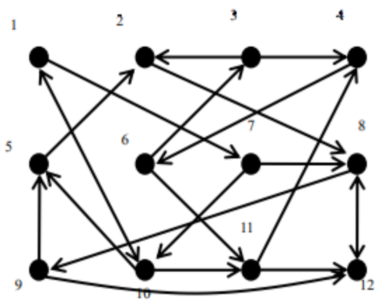
❖ Algoritmo de Tarjan:

<u>Algoritmo de Tarjan:</u>

Dado un grafo simple dirigido, podemos obtener las componentes fuertemente conexas siguiendo los siguientes pasos (se recomiendo realizar su tabla de adyacencias):

1) Se realiza la búsqueda en profundidad (DFS) sobre el digrafo, creando una lista L en la que se van añadiendo los vértices conforme se quedan sin vecinos no visitados (es decir, según se van eliminando de la pila).
2) Se obtiene la tabla de adyacencias traspuesta. Para ello, se observa la tabla de adyacencias original buscando en las adyacencias los vértices de menor a mayor y viendo a cuál sería adyacente si lo viéramos de manera inversa.
3) Se crea una lista L' con el orden inverso a como aparecen en la lista L y se realiza la búsqueda en profundidad (DFS) empezando por el principio de la lista L' y observando qué vértices son adyacentes en la tabla de adyacencias transpuesta, de manera que se generará tantas pilas como componentes fuertemente conexas haya.
4) Finalmente se dibuja comparando las adyacencias de las pilas obtenidas con la tabla de adyacencias del grafo original.

Por ejemplo, realizamos el algoritmo de Tarjan sobre el siguiente grafo:



Su tabla de adyacencia sería la siguiente:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
7 10	8	2 4	6	2	3 11	8 10	9 12	5 12	1 5 11	4 12	8

1)

Pila
1
1, 7
1, 7, 8
1, 7, 8, 9
1, 7, 8, 9, 5
1, 7, 8, 9, 5, 2
1, 7, 8, 9, 5
1, 7, 8, 9
1, 7, 8, 9, 12
1, 7, 8, 9
1, 7, 8
1, 7
1, 7, 10
1, 7, 10, 11
1, 7, 10, 11, 4

L = {2, 5, 12, 9, 8, 3, 6, 4, 11, 10, 7, 1}

1, 7, 10, 11, 4, 6
1, 7, 10, 11, 4, 6, 3
1, 7, 10, 11, 4, 6
1, 7, 10, 11, 4
1, 7, 10, 11
1, 7, 10
1, 7
1
ϕ

2) Tabla de adyacencias original:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
7 10	8	2 4	6	2	3 11	8 10	9 12	5 12	1 5 11	4 12	8

Observamos por ejemplo que para el vértice 2, sus adyacentes en la tabla de adyacencia transpuesta ahora serán el 3 y el 5.

Tabla de adyacencias transpuesta:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10	3 5	6	3 11	9 10	4	1	2 7 12	8	1 7	6 10	8 9 11

3) L' = {1, 7, 10, 11, 4, 6, 3, 8, 9, 12, 5, 2}

Observamos que L' empieza por 1, luego la primera pila empieza por 1

Nos vamos fijando en las adyacencias de la tabla de adyacencias transpuesta.

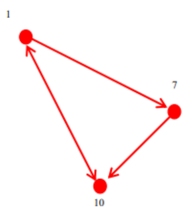
Pila
1
1, 10
1, 10, 7
1, 10
1
ϕ

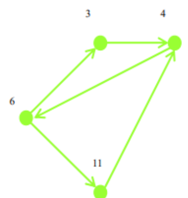
Pila
11
11, 6
11, 6, 4
11, 6, 4, 3
11, 6, 4
11, 6
11
ϕ

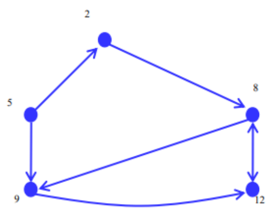
Pila
8
8, 2
8, 2, 5
8, 2, 5, 9
8, 2, 5
8, 2
8
8, 12
8
ϕ

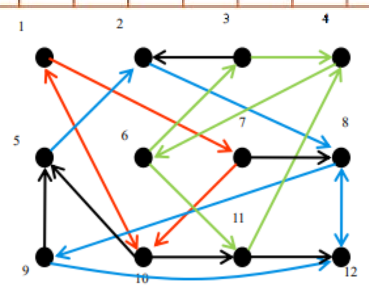
4) Observamos que como nos ha quedado 3 pilas, tendremos 3 componentes fuertemente conexas en el grafo original. Comparamos esas pilas con la tabla de adyacencias original para representar dicchas componentes fuertemente conexas:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
7 10	8	2 4	6	2	3 11	8 10	9 12	5 12	1 5 11	4 12	8









5. Grafos ponderados:

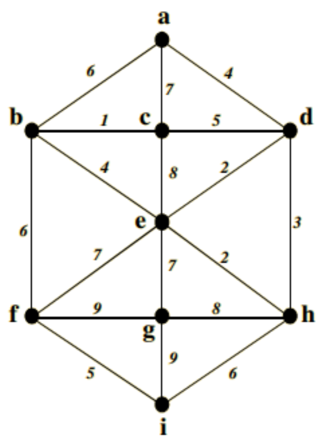
❖ **Algoritmo de Kruskal (árbol recubridor de peso mínimo):**

<u>Algoritmo de Kruskal:</u>

Dado un grafo conexo con n vértices, de forma que cada arista a lleva asociado un peso p(a):

1) Realizamos una lista de aristas para cada peso del grafo.
2) Dibujamos los vértices del grafo sin aristas y vamos añadiendo aristas empezando por la de menor peso. En el caso de que al añadir una arista se generase un ciclo, entonces no se añade y se pasa a la siguiente arista.
3) Cuando el número de aristas sea n - 1 (o simplemente, cuando acabemos de recorrer todas las aristas), se suman los pesos de las aristas que se han añadido y el resultado será el peso mínimo, mientras que el grafo obtenido será el árbol recubridor de peso mínimo.

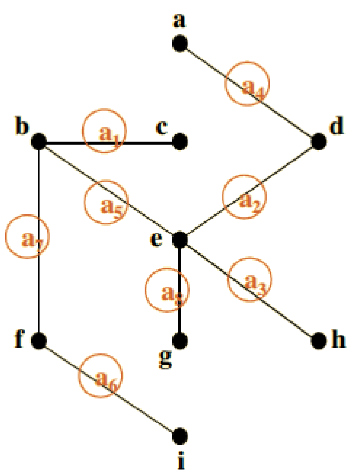
Por ejemplo, realizamos el algoritmo de Kruskal sobre el siguiente grafo:



1)

Peso	Aristas
1	{b, c}
2	{d, e}, {e, h}
3	{d, h}
4	{a, d}, {b, e}
5	{c, d}, {f, i}
6	{a, b}, {b, f}, {h, i}
7	{a, c}, {e, f}, {e, g}
8	{c, e}, {g, h}
9	{f, g}, {g, i}

2)



3)

Peso mínimo = 1 + 2 + 2 + 4 + 4 + 5 + 6 + 7 = 31

❖ Algoritmo de Dijkstra (árbol de camino más corto):

Con este algoritmo se pretende buscar el camino más corto desde un vértice cualquiera hasta todos los demás en un único grafo árbol.

Para ello se define l(x) como la longitud del camino más corto para ir desde el vértice elegido v hasta otro vértice cualquiera x de la siguiente manera: l(x) = min {l(x), l(v) + w(v, x)}, donde w es el peso de la arista {v, x}.

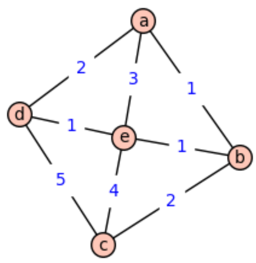
Cuando no exista en el grafo la arista {v, x}, entonces se pondrá un valor K equivalente a un valor muy grande (∞).

Algoritmo de Dijkstra:

Dado un grafo conexo con n vértices, de forma que cada arista a lleva asociado un peso p(a):

- Realizamos una tabla que tenga tantas filas y columnas como vértices haya, de manera que las celdas representan la longitud del camino más corto l(x) = min {l(x), l(v) + w(v, x)}, donde x será el vértice de la columna actual y v el vértice elegido como padre (que será el vértice elegido como longitud mínima anterior), que irá cambiando en cada fila. Además, una vez usado ese vértice padre, no se usará para la siguiente fila como x.
  También, se añaden además 2 columnas que serán el vértice x elegido como longitud mínima y la arista l(x) elegida, teniendo en cuenta que el vértice de origen puede ser de la fila o filas anteriores en el caso de que tuviera el mismo valor en la celda.
- Dicha tabla tendrá en la primera fila, para el vértice elegido como raíz, el valor 0 y en el resto de celdas de la fila los valores K, siendo el vértice x mínimo elegido obviamente la raíz y ninguna arista l(x) al ser el vértice raíz.
- La segunda fila tendrá tachado el vértice raíz y se comprobará cuál es la longitud de camino más corto para cada celda.
- La tercera fila tendrá tachado el vértice raíz y el vértice elegido como en la segunda fila como longitud mínima.

Por ejemplo, realizamos el algoritmo de Dijkstra sobre el siguiente grafo:



a	b	c	d	e	Vértice mínimo	Arista mínima
0	K	K	K	K	a	-
-						
-						
-						
-						

Calculamos para la segunda fila cuál es la longitud mínima para x ∈ b, c, d, e:

l(b) = min {l(b), l(a) + w(a, b)} = min {K, 0 + 1} = 1
l(c) = min {l(c), l(a) + w(a, c)} = min {K, 0 + K} = K
l(d) = min {l(d), l(a) + w(a, d)} = min {K, 0 + 2} = 2
l(e) = min {l(e), l(a) + w(a, e)} = min {K, 0 + 3} = 3

a	b	c	d	e	Vértice mínimo	Arista mínima
0	K	K	K	K	a	-
-	1	K	2	3	b	{a, b}
-	-					
-	-					
-	-					

Calculamos para la tercera fila cuál es la longitud mínima para x ∈ c, d, e:

l(c) = min {l(c), l(b) + w(b, c)} = min {K, 1 + 2} = 3
l(d) = min {l(d), l(b) + w(b, d)} = min {2, 1 + K} = 2
l(e) = min {l(e), l(b) + w(b, e)} = min {3, 1 + 1} = 2

La arista mínima es {a, d} porque la longitud del camino más corto es 2 y dicho valor ya estaba en la fila anterior, luego se coge de vértice origen el anterior, que sería a.

a	b	c	d	e	Vértice mínimo	Arista mínima
0	K	K	K	K	a	-
-	1	K	2	3	b	{a, b}
-	-	3	2	2	d	{a, d}
-	-		-			
-	-		-			

Calculamos para la cuarta fila cuál es la longitud mínima para x ∈ c, e:

l(c) = min {l(c), l(d) + w(d, c)} = min {3, 2 + 5} = 3
l(e) = min {l(e), l(d) + w(d, e)} = min {2, 2 + 1} = 2

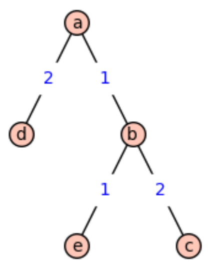
a	b	c	d	e	Vértice mínimo	Arista mínima
0	K	K	K	K	a	-
-	1	K	2	3	b	{a, b}
-	-	3	2	2	d	{a, d}
-	-	3	-	2	e	{b, e}
-	-		-	-		

Calculamos para la quinta fila cuál es la longitud mínima para x ∈ c:

l(c) = min {l(c), l(e) + w(e, c)} = min {3, 2 + 4} = 3

a	b	c	d	e	Vértice mínimo	Arista mínima
0	K	K	K	K	a	-
-	1	K	2	3	b	{a, b}
-	-	3	2	2	d	{a, d}
-	-	3	-	2	e	{b, e}
-	-	3	-	-	c	{b, c}

Por tanto, el árbol de camino más corto será el compuesto por las aristas mínimas:



TEMA 4

Transversalidad en grafos

1. Grafos eulerianos

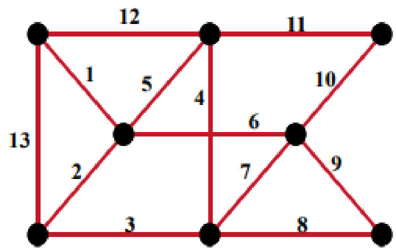
Dado un grafo G = (V, A), estudiar su **carácter euleriano** consistirá en:

- Comprobar si existe un **recorrido euleriano**: se trata de todo recorrido que contenga a todas las aristas del grafo.
- Comprobar si existe un **circuito euleriano**: se trata de todo circuito (recorrido cerrado) que contenga a todas las aristas del grafo.

Tanto en el recorrido euleriano como en el circuito euleriano no pueden repetirse las aristas, aunque sí pueden repetirse los vértices

Si el grafo G admite un circuito euleriano, entonces se tratará de un **grafo euleriano**.

El grafo de ejemplo de la derecha admite un recorrido euleriano porque podemos obtener un recorrido que contenga todas las aristas del grafo (como se muestra numerado), sin embargo, no se trata de un grafo euleriano porque no admite un circuito euleriano.



❖ **Teorema de Euler:**

Dado un grafo G = (V, A) conexo, **será euleriano si**, y sólo si, **todos los vértices de dicho grafo son de grado par**. Si es euleriano entonces como consecuencia existirá un circuito euleriano.

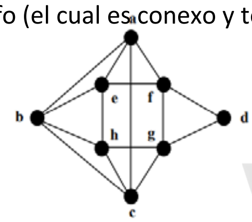
❖ **Algoritmo de Euler (para obtener un ciclo euleriano):**

<u>**Algoritmo de Euler:**</u>

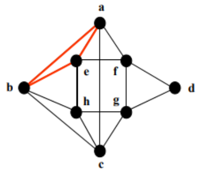
Sea un grafo G conexo donde todos sus vértices son de grado par, entonces podemos obtener un ciclo euleriano de la siguiente forma:

1) C = {v}, siendo v un vértice cualquiera de G.
2) Mientras que en G queden aristas:
    a. Se elige un vértice v de C, no aislado en G (es decir, que ese vértice v sigue conectado mediante a alguna arista a otro vértice de G).
    b. Se elige un ciclo D empezando por ese vértice v.
    c. Se elimina de G las aristas de D.
    d. Se sustituye en C el vértice v por el conjunto de vértices del ciclo D.
3) Se retorna C, que será el ciclo euleriano.

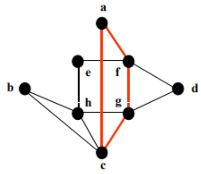
Por ejemplo, si aplicamos el algoritmo de Euler al siguiente grafo (el cual es conexo y todos sus vértices tienen grado par), obtendremos un ciclo euleriano.



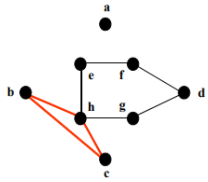
v	C	D
a	{a}	{a, b, e , a}
	{a, b, e, a}	



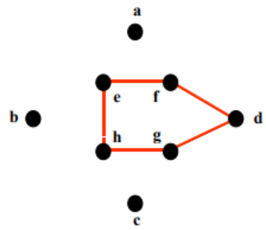
v	C	D
a	{a}	{a, b, e , a}
	{a, b, e, a}	
a	{a, b, e, a}	{a, c, g, f, a}
	{ a, c, g, f, a, b, e, a}	

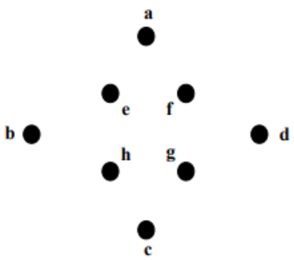


v	C	D
a	{a}	{a, b, e , a}
	{a, b, e, a}	
a	{a, b, e, a}	{a, c, g, f, a}
	{a, c, g, f, a, b, e, a}	
c	{a, c, g, f, a, b, e, a}	{c, b, h, c}
	{a, c, b, h, c, g, f, a, b, e, a}	



v	C	D
a	{a}	{a, b, e , a}
	{a, b, e, a}	
a	{a, b, e, a}	{a, c, g, f, a}
	{a, c, g, f, a, b, e, a}	
c	{a, c, g, f, a, b, e, a}	{c, b, h, c}
	{a, c, b, h, c, g, f, a, b, e, a}	
h	{a, c, b, h, c, g, f, a, b, e, a}	{h, e, f, d, g, h}
	{a, c, b, h, e, f, d, g, h, c, g, f, a, b, e, a}	



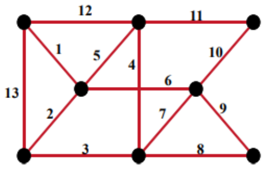


Ya no quedan aristas en el grafo, por lo que un circuito euleriano será C = {a, c, b, h, e, f, d, g, h, c, g, f, a, b, e, a}

❖ Teorema de Euler-1:

Un grafo conexo **admite un recorrido euleriano (pero no un circuito euleriano)** si, y sólo si, todos **sus vértices son de grado par, excepto dos de ellos**.

Si volvemos al ejemplo del principio, observamos que todos los vértices son de grado par, excepto 2 de ellos (los de la izquierda del todo), es por ello que admite un recorrido euleriano, pero no un circuito euleriano.



❖ **Algoritmo de Euler-1 (para obtener un recorrido euleriano):**

Algoritmo de Euler-1:

Sea un grafo G conexo donde todos sus vértices son de grado par, excepto 2 de ellos, entonces podemos obtener un recorrido euleriano de la siguiente forma:

1) Añadir un vértice x y las aristas {x, a} y {x, b}, formando un nuevo grafo G', de manera que ahora todos los vértices tienen grado par.
2) Aplicar el algoritmo de Euler al nuevo grafo G' empezando por el vértice x añadido.
3) Retornar C – {x}, es decir, el ciclo obtenido en el nuevo grafo G' quitándole el vértice x para que entonces lo retornado sea el recorrido euleriano.

❖ **Teorema de Euler para digrafos:**

Un digrafo G = (V, A) débilmente conexo es **euleriano** si, y sólo si, **todos sus vértices tienen el mismo grado de entrada que de salida**:

$$\forall v \in V \text{ , } \delta_e(v) = \delta_s(v)$$

Por tanto, también contendrá un **circuito euleriano**.

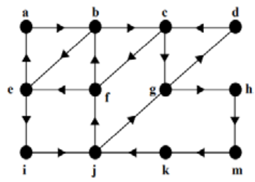
Un digrafo G = (V, A) débilmente conexo admite un **recorrido euleriano** si, y sólo si, **todos sus vértices tienen el mismo grado de entrada que de salida, excepto dos de ellos, uno en el que el grado de salida es una unidad superior que el de entrada y otro en el que ocurre lo contrario**:

$$\forall v \in V\text{-}\{a, b\} \text{ , } \delta_e(v) = \delta_s(v) \text{ , } \delta_e(a) = \delta_s(a)+1,\ \delta_s(b) = \delta_e(b)+1$$

El algoritmo de Euler se aplica de la misma manera que para los grafos no dirigidos, pero en este caso siguiendo la orientación de las aristas a la hora de elegir los ciclos D.

Por ejemplo, para el digrafo de la derecha, observamos que todos sus vértices tienen mismo grado de entrada que de salida.

Un circuito euleriano sería {a, b, c, g, h, m, k, j, f, e, i, j, g, d, c, f, b, e, a}.



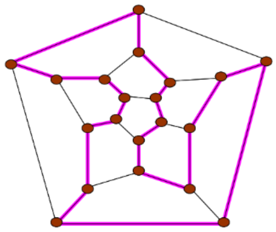
2. Grafos hamiltonianos

Dado un grafo G = (V, A), estudiar su **carácter hamiltoniano** consistirá en:

- Comprobar si existe un **camino hamiltoniano**: se trata de todo camino simple que contenga a todos los vértices del grafo.
- Comprobar si existe un **ciclo hamiltoniano**: se trata de todo ciclo (camino simple cerrado) que contenga a todos los vértices del grafo.

Tanto en el camino hamiltoniano como en el ciclo hamiltoniano no pueden repetirse los vértices, y como consecuencia tampoco las aristas.

Si el grafo G admite un ciclo hamiltoniano, entonces se tratará de un **grafo hamiltoniano**.



El grafo de ejemplo de la derecha admite un ciclo hamiltoniano (y como consecuencia un camino hamiltoniano) porque podemos obtener un ciclo que contenga todos los vértices del grafo.

Por tanto, dicho grafo es hamiltoniano.

No existe un algoritmo para averiguar un ciclo hamiltoniano, por lo que para saber si un grafo es hamiltoniano, hay que guiarse por las condiciones de a continuación.

❖ **Condiciones necesarias de un grafo hamiltoniano:**

Si un grafo G = (V, A) es hamiltoniano entonces:

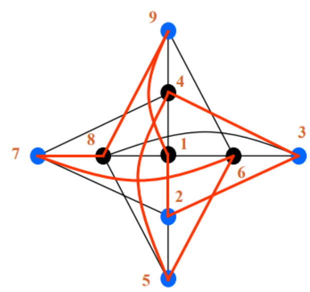
- Es conexo.
- No tiene vértices de corte.
- $\delta(G) \geq 2$.
- Al eliminar un conjunto de corte de c vértices (c > 1), no pueden obtenerse más de c componentes conexas.

En el caso de incumplirse alguna de esas condiciones, entonces el grafo no será hamiltoniano, pero si se cumplen no significa que necesariamente sea hamiltoniano

❖ **Condición suficiente de un grafo hamiltoniano:**

Teorema de Dirac:

Si un grafo G = (V, A) de **n vértices (siendo n ≥ 3) verifica que δ(G) ≥ n/2**, entonces es un **grafo hamiltoniano**.



El hecho de que no se cumpla esta condición no implica que entonces no sea un grafo hamiltoniano.

El grafo de ejemplo de la derecha no cumple dicha condición y sin embargo sí es un grafo hamiltoniano (además cumple las condiciones necesarias):

$\delta(G) \geq 9/2 = 4{,}5$

$\delta(1) = 5 \geq 4{,}5$	$\delta(4) = 5 \geq 4{,}5$	$\delta(7) = 4 \geq 4{,}5$
$\delta(2) = 4 \geq 4{,}5$	$\delta(5) = 4 \geq 4{,}5$	$\delta(8) = 5 \geq 4{,}5$
$\delta(3) = 4 \geq 4{,}5$	$\delta(6) = 5 \geq 4{,}5$	$\delta(9) = 4 \geq 4{,}5$

Observamos que los grados de los vértices de color azul no cumplen la condición suficiente, sin embargo, hay un ciclo hamiltoniano (aristas naranjas).

❖ **Condiciones necesarias para la existencia de un camino hamiltoniano:**

Si un grafo G = (V, A) admite camino hamiltoniano entonces:

- Es conexo.
- No puede haber más de dos vértices que tenga valencia igual a 1.

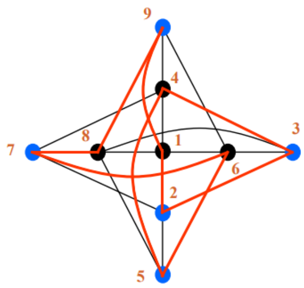
- No puede tener un vértice de corte cuya eliminación de lugar a más de dos componentes conexas.
- Al eliminar un conjunto de corte de c vértices no pueden aparecer más de c+1 componentes conexas.

En el caso de incumplirse alguna de esas condiciones, entonces el grafo no admitirá camino hamiltoniano, pero si se cumplen no significa que necesariamente admitan camino hamiltoniano.

❖ **Condición suficiente de existencia de un camino hamiltoniano:**

Si un grafo G = (V,A) de **n vértices (n ≥ 3) verifica que δ(G) ≥ (n-1)/2** entonces admite un **camino hamiltoniano**.

El hecho de que no se cumpla esta condición no implica que entonces no exista camino hamiltoniano en el grafo.



El grafo de ejemplo de la derecha cumple dicha condición y, por tanto, admite un camino hamiltoniano (además cumple las condiciones necesarias):

δ(G) ≥ (9-1)/2 = 4

δ(1) = 5 ≥ 4	δ(4) = 5 ≥ 4	δ(7) = 4 ≥ 4
δ(2) = 4 ≥ 4	δ(5) = 4 ≥ 4	δ(8) = 5 ≥ 4
δ(3) = 4 ≥ 4	δ(6) = 5 ≥ 4,	δ(9) = 4 ≥ 4

Observamos que todos los grados de los vértices cumplen la condición suficiente y que, por tanto, existe un camino hamiltoniano.

TEMA 5

Coloreado y emparejamiento

1. Coloreado de vértices

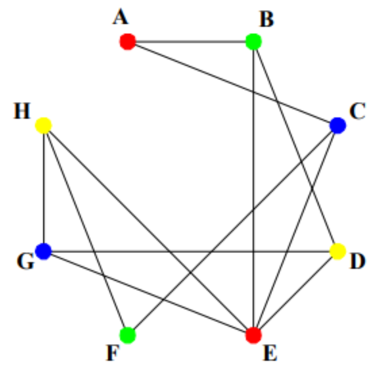
Dado un grafo G = (V, A), se llama **vértice-coloración** de G a la asignación de los vértices de G con los colores tal que dos vértices que compartan la misma arista tengan colores diferentes:

$$c(u) \neq c(v) \text{ si } \{u, v\} \in A.$$

Para que sea más comprensible, trataremos los diferentes colores como números diferentes.

El número diferentes de colores utilizados se llama **k-vértice-coloración**: $|c(V)| = k$.

Una vértice-coloración de un grafo efectúa una partición del grafo en conjuntos independientes de vértices, es decir, se forman conjuntos independientes de vértices con un mismo color.



4-vértice-coloración

$V = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$

$V_1 = \{ A,E \}$

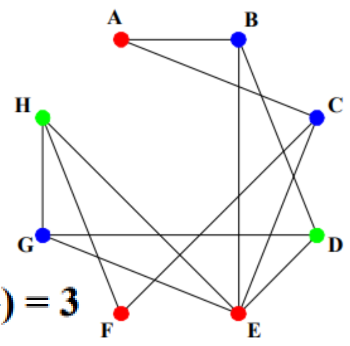
$V_2 = \{ B,F \}$

$V_3 = \{ C,G \}$

$V_4 = \{ D,H \}$

Llamamos **número cromático (χ(G))** al menor número de colores que se necesita para realizar una vértice-coloración. No existe un algoritmo que devuelva el número cromático en un tiempo eficiente.

Observamos que en el grafo anterior se ha hecho una 4-vértice-coloración, pero, sin embargo, sólo podemos verificar que $\chi(G) \leq 4$. Si observamos el grafo, existen 3 vértices mutuamente adyacentes: B-E-D, luego podemos verificar que el número cromático no es 4, si no que, $\chi(G) = 3$.



$\chi(G) = 3$

❖ **Propiedades del número cromático:**

- Un grafo tiene $\chi(G) = 1$, si, y solo si, G es un grafo trivial (n vértices aislados).
- Si G es un grafo con n vértices, entonces $1 \leq \chi(G) \leq n$.
- Si G' es un subgrafo de G, entonces $\chi(G') \leq \chi(G)$.
- Si $G_1, G_2, \ldots, G_c$ son las componentes conexas del grafo G, entonces $\chi(G) = \max \{\chi(G1), \chi(G2), \ldots, \chi(Gc)\}$.

En particular, para el grafo completo K_n se verifica que $\chi(K_n) = n$ y para el grafo ciclo C_n se verifica que $\chi(C_n) = 2$, si n es par, y $\chi(C_n) = 3$, si n es impar.

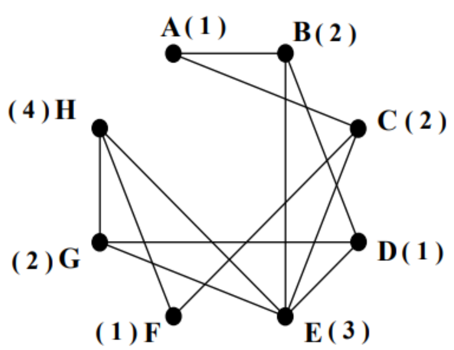
❖ Algoritmo voraz de coloración de vértices:

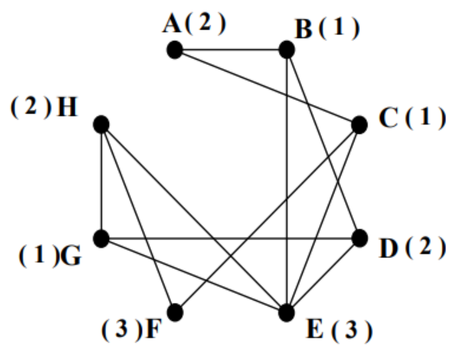
<u>Algoritmo voraz de coloración de vértices:</u>

Sea un grafo con n vértices:

1) Ordenar los vértices del grafo mediante una de las n! posibles ordenaciones.
2) Comenzando con el primer vértice, y de forma ordenada, asignar a cada vértice el primer color no asignado a sus vértices adyacentes anteriores.

Por ejemplo, para un grafo con las siguientes ordenaciones: {A, B, C, D, E, F, G, H} y {G, H, E, D, B, A, C, F}, respectivamente, tendremos las siguientes vértices-coloraciones:





Como podemos observar, tenemos 2 vértices-coloraciones diferentes en la que una $|c(V)| = 4$ y en otra $|c(V)| = 3$, por lo que de momento podemos verificar que $\chi(G) \leq 3$ (aunque ya sabemos que es $\chi(G) = 3$ porque es el mismo ejemplo que usamos antes).

❖ Teorema de Brooks (acotaciones del número cromático):

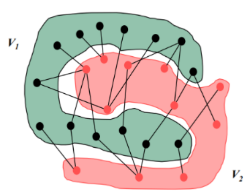
Sea G = (V, A) un grafo conexo con grado máximo Δ ($\delta(v) \leq \Delta$, $\forall v \in V$), entonces:

1) **$\chi(G) \leq \Delta$ si no es un grafo completo (K_n) ni un grafo ciclo impar (C_{2n-1}).**
2) **$\chi(G) \leq 1 + \Delta = n$, si es un grafo completo (K_n)**, como ya sabemos.
3) **$\chi(G) \leq 1 + \Delta = 3$, si es un grafo ciclo impar (C_{2n-1})**, como ya sabemos.

❖ Caracterización de los grafos bipartitos:

Dado un grafo G:

- G es bipartito si, y solo si, $\chi(G) = 2$.
- G es bipartito si, y solo si, G no admite ciclos de longitud impar.



Por tanto, podemos decir que son equivalentes el hecho de que un grafo G sea bipartito, que su número cromático sea $\chi(G) = 2$ y que ningún ciclo impar esté contenido en el grafo G:

G es bipartito ↔ $\chi(G) = 2$ ↔ G no admite ciclos de longitud impar

2. Coloreado de aristas

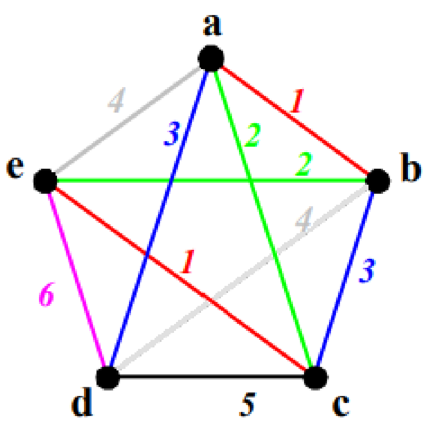
Dado un grafo G = (V, A), se llama **arista-coloración** de G a la asignación de las aristas de G con los colores tal que dos aristas que compartan algún vértice tengan colores diferentes:

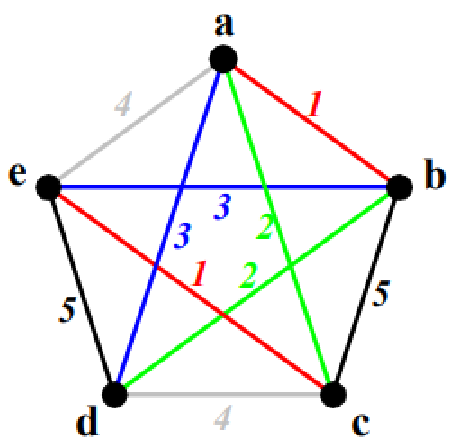
$$c_a(a) \neq c_a(a') \text{ si } \{a, a'\} \in A \text{ con algún vértice en común.}$$

Para que sea más comprensible, trataremos los diferentes colores como números diferentes.

El número diferentes de colores utilizados se llama **k-arista-coloración**: $|c_a(A)| = k$.

Llamamos **índice cromático ($\chi^1(G)$)** al menor número de colores que se necesita para realizar una arista-coloración. No existe un algoritmo que devuelva el índice cromático en un tiempo eficiente.





Observamos que en el grafo anterior se ha hecho una 6-arista-coloración, por lo que podemos verificar que $\chi^1(G) \leq 6$, sin embargo, para el mismo grafo también hemos hecho una 5-arista-coloración, por lo que $\chi^1(G) \leq 5$ (además, en concreto es $\chi^1(G) = 5$ como veremos más adelante).

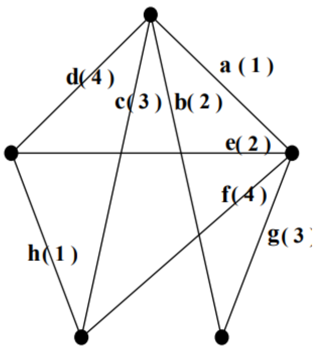
❖ **Algoritmo voraz de coloración de aristas:**

<u>Algoritmo voraz de coloración de aristas:</u>

Sea un grafo con n aristas:

1) Ordenar las aristas del grafo mediante una de las n! posibles ordenaciones.
2) Comenzando con la primera arista, y de forma ordenada, asignar a cada arista el primer color no asignado a sus aristas incidentes anteriores.

Por ejemplo, para un grafo con la siguiente ordenación: {a, b, c, d, e, f, g, h}, tendremos la siguiente arista-coloración:

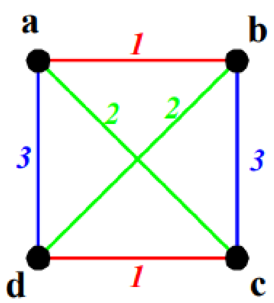


❖ Teorema de Vizing (acotaciones del índice cromático):

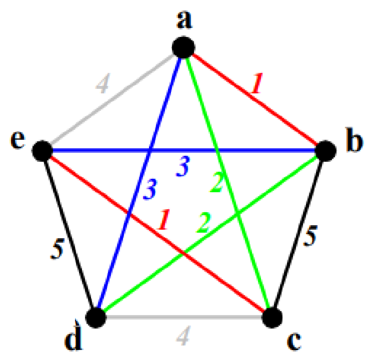
Si un grafo G=(V,A) tiene un vértice de valencia k, entonces $\chi^1(G) \geq k$.

> Sea G = (V, A) un grafo conexo con grado máximo Δ ($\delta(v) \leq \Delta$, $\forall v \in V$), entonces:
>
> $$\Delta \leq \chi^1(G) \leq 1 + \Delta$$

Comprobamos en los siguientes ejemplos que se verifica el teorema de Vizing:



$\chi^1(K_4) = \Delta = 3$



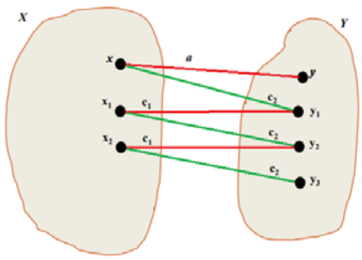
$\chi^1(K_5) = 1 + \Delta = 5$

❖ Teorema con grafos bipartitos (acotaciones del índice cromático):

> Sea G = (V, A) un grafo bipartito con grado máximo Δ ($\delta(v) \leq \Delta$, $\forall v \in V$), entonces:
>
> $$\chi^1(G) = \Delta$$

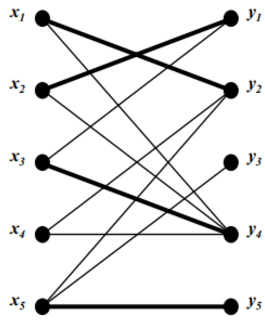
Comprobamos en el siguiente ejemplo que se verifica dicho teorema:

Observamos que el grado máximo del grafo bipartito es 2, por lo que el índice cromático es 2.



3. Emparejamiento

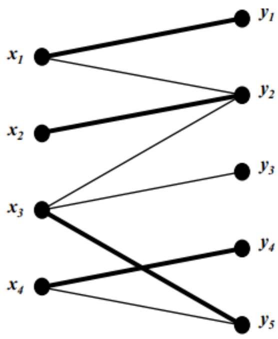
Dado un grafo $G = (X \cup Y, A)$ bipartito, llamamos **emparejamiento** a todo subconjunto $M \subseteq A$ de aristas, de forma que dos aristas de M no tienen vértices en común. Por ejemplo, en el grafo de la derecha, $M = \{(x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_3, y_4), (x_5, y_5)\}$



Si $\{x,y\} \in M$ se dice que x e y están **emparejados**, por ejemplo, en el grafo de la derecha, x_1 está emparejado con y_2.

Un emparejamiento se dice que es un **emparejamiento máximo** si ningún otro emparejamiento tiene mayor cardinal.

Un emparejamiento M se dice que es un **emparejamiento completo** si $|M|=|X|$. Como es obvio, si es completo, entonces también será máximo. Por ejemplo, para el siguiente emparejamiento, tenemos un emparejamiento completo y por tanto también máximo:



❖ **Teorema de Hall:**

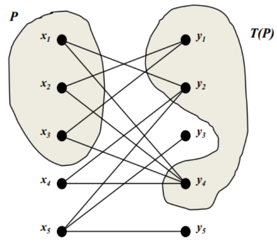
Un grafo bipartito $G = (X \cup Y , A)$ admite un emparejamiento completo M si, y sólo si, verifica la condición de Hall:

<u>Condición de Hall</u>:

$|T(P)| \geq |P|$ para todo $P \subseteq X$

En donde $P \subseteq X$, es decir, es un subconjunto del primer conjunto de vértices, y $T(P) =\{ y\in Y \mid \{x, y\}\in A$ para algún $x\in P \}$, es decir, es un subconjunto del segundo conjunto de vértices de manera que esos vértices deben tener al menos una arista incidente a los vértices del conjunto P.

Como observamos en el siguiente ejemplo:



- Si elegimos $P = \{x_1, x_2, x_3\}$, tendremos entonces $T(P) = \{y_1, y_2, y_4\}$, luego $|T(P)| \geq |P|$, ya que $|P| = 3$ y $|T(P)| = 3$.
- Si probamos a elegir $P = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, tendremos entonces $T(P) = \{y_1, y_2, y_4\}$, luego $|T(P)| < |P|$, ya que $|P| = 4$ y $|T(P)| = 3$, por tanto, hemos encontrado un subconjunto P que no verifica la condición y, por tanto, no admite un emparejamiento completo.

❖ **Camino alternado:**

Dado un grafo bipartito $G = (X \cup Y, A)$ y un emparejamiento M, el camino $x_0, y_1, x_1, y_2, x_2, \ldots, x_{k-1}, y_k$ se dice que es un **camino alternado** en M si:

- Los vértices x_0 e y_k no están emparejados en M.
- Las aristas $\{y_i, x_i\}$ están en el emparejamiento M.
- Las aristas $\{x_{i-1}, y_i\}$ no están en el emparejamiento M.

Si un emparejamiento de dicho grafo bipartito no es máximo, entonces G admite un camino alternado en M. Para obtener dicho camino alternado se usa el siguiente algoritmo de emparejamiento:

<u>**Algoritmo de emparejamiento:**</u>

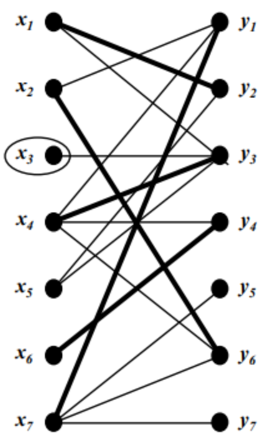
Sea un grafo $G = (X \cup Y, A)$ y un emparejamiento M no completo (o que se desconoce si es máximo):

1) Buscar un camino alternado para M mediante el árbol de camino alternado. Dicho árbol se construye de la siguiente manera:
    a. En el nivel 0 estará un vértice x_i no emparejado del conjunto X.
    b. En el siguiente nivel estarán los vértices del conjunto Y adyacentes al vértice x_i elegido en el paso anterior.
    c. Si alguno de estos vértices del conjunto Y elegidos en el paso anterior no tiene pareja en M, entonces es un camino alternado y paramos la construcción del árbol. En caso contrario, en el siguiente nivel estarán los vértices del conjunto X emparejados de M con los vértices del conjunto Y elegidos, y se repite la construcción del árbol volviendo al paso b (sin repetir vértices del conjunto Y) hasta encontrar un camino alternado o no pode seguir construyendo el árbol.
2) Si se ha hallado un camino alternado para M, se construye un nuevo emparejamiento M de manera que dejan las parejas que no han cambiado y se añaden las nuevas parejas del camino alternado encontrado (posiblemente eliminando parejas anteriores que ya no lo serán en el nuevo M).
3) En el caso de que M sea completo, finaliza el algoritmo, siendo entonces M máximo y completo. En caso contrario, se repite el algoritmo desde el paso 1 con el nuevo emparejamiento M. Si no se encuentra un nuevo emparejamiento, entonces el emparejamiento actual M será máximo.

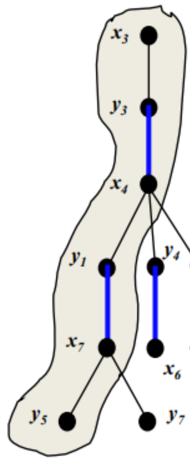
Por ejemplo, para el siguiente grafo cuyo emparejamiento M es el siguiente:

$M = \{\{x_1, y_2\}, \{x_2, y_6\}, \{x_4, y_3\}, \{x_6, y_4\}, \{x_7, y_1\}\}$

Elegimos el vértice x_3, ya que no tiene pareja en M y construimos el árbol de camino alternado:



- Observamos que x_3 es adyacente a y_3 en el grafo, por tanto, se añade 1 arista hacia el siguiente nivel. Como y_3 tiene pareja en M, seguimos construyendo el árbol añadiendo una arista hacia x_4, ya que es su pareja en M.
- Observamos que x_4 es adyacente a y_1, y_3, y_4 e y_6, pero como y_3 ya fue añadida, no se tendrá en cuenta, por tanto, se añaden 3 aristas hacia el siguiente nivel. Como y_1, y_4 e y_6 tienen pareja en M, seguimos construyendo el árbol añadiendo una arista hacia x_7, hacia x_6 y hacia x_2, respectivamente, ya que son sus parejas en M.
- Observamos que x_6 y x_2 tienen adyacencia hacia vértices del conjunto Y que ya han sido añadidas, luego no se sigue construyendo el árbol por esas ramas. Observamos que x_7 es adyacente a y_1, y_5, y_6 e y_7, pero como y_1 e y_6 ya fueron añadidas, no se tendrán en cuenta, por tanto, se añaden 2 aristas hacia el siguiente nivel. Como y_5 e y_7 no tienen pareja en M, cualquiera de estos dos hasta el vértice raíz del árbol, formará un camino alternado, por ejemplo, desde x_3 hasta y_5.

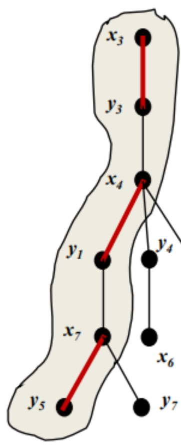


En el nuevo emparejamiento M se tienen que eliminar las parejas del anterior M $\{x_4, y_3\}$ y $\{x_7, y_1\}$ (las marcadas en azul en el camino alternado) y se tienen que añadir las parejas $\{x_3, y_3\}$, $\{x_4, y_1\}$ y $\{x_7, y_5\}$ (las marcadas en rojo en el camino alternado). El resto de parejas se mantiene igual.

Por tanto, el nuevo emparejamiento M será:

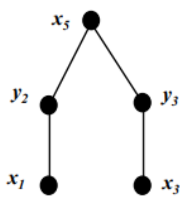
M = $\{\{x_1, y_2\}, \{x_2, y_6\}$, ~~$\{x_4, y_3\}$~~, $\{x_6, y_4\}$, ~~$\{x_7, y_1\}$~~$\}$ = $\{\{x_1, y_2\}, \{x_2, y_6\}, \{x_3, y_3\}, \{x_4, y_1\}, \{x_6, y_4\}, \{x_7, y_5\}\}$

M = $\{\{x_1, y_2\}, \{x_2, y_6\}, \{x_3, y_3\}, \{x_4, y_1\}, \{x_6, y_4\}, \{x_7, y_5\}\}$



Elegimos el vértice x_5, ya que no tiene pareja en M y construimos el árbol de camino alternado:

- Observamos que x_5 es adyacente a y_2 e y_3 en el grafo, por tanto, se añaden 2 aristas hacia el siguiente nivel. Como y_2 e y_3 tienen pareja en M, seguimos construyendo el árbol añadiendo una arista hacia x_1 y hacia x_3 respectivamente, ya que son sus parejas en M.
- Observamos que x_1 y x_3 tienen adyacencia hacia vértices del conjunto Y que ya han sido añadidas, luego no se sigue construyendo el árbol por esas ramas.
- No podemos seguir construyendo el árbol, por tanto, no podemos obtener un camino alterno a partir de x_5.



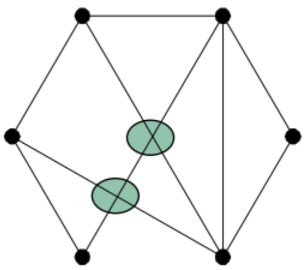
Como ya no tenemos más x_i no emparejados de M, entonces dicho emparejamiento M será máximo: M = $\{\{x_1, y_2\}, \{x_2, y_6\}, \{x_3, y_3\}, \{x_4, y_1\}, \{x_6, y_4\}, \{x_7, y_5\}\}$.

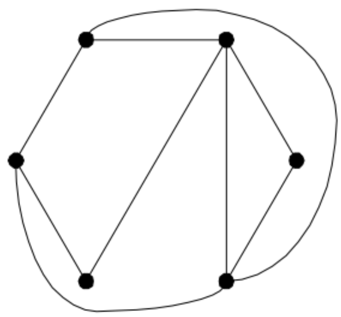
TEMA 6

Planaridad

1. Grafos planos

Se considera una **inmersión en el plano** a toda representación gráfica de un grafo en una superficie, de manera que dos aristas no se cortan en puntos que no sean vértices del grafo.





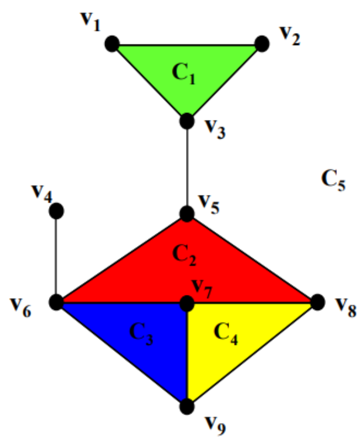
En los grafos anteriores, el primer grafo no sería una inmersión en el plano porque hay aristas que se cortan en puntos que no son los vértices. Sin embargo, el segundo grafo sí que sería una inmersión en el plano.

Todo grafo que acepte una inmersión en el plano puede ser denominado **grafo plano**.

El mayor grafo completo K_n que es plano es el K_4, a partir de este (K_5, K_6, …), el grafo no será plano.

Un grafo plano está compuesto de **caras**, que son las zonas limitadas por las aristas, incluyendo la zona externa (llamada **cara externa**). Las aristas podrán ser:

- **Aristas fronteras**: aquellas que delimitan 2 caras diferentes.
- **Aristas puentes**: aquellas que solo delimitan a la cara externa.



En el grafo de la derecha, C_i son las caras, siendo C_5 la cara externa y por ejemplo la arista $\{v_1, v_2\}$ es una arista frontera y la arista $\{v_3, v_5\}$ es una arista puente.

❖ **Propiedades de los grafos planos:**

Sea G = (V, A) un grafo plano:

- Las aristas fronteras de cada cara interior o acotada forman un ciclo.
- Si se elimina una arista a de un ciclo, el grafo G - a tiene una cara menos.
- Si una arista forma parte de un ciclo, es frontera de dos caras exactamente.
- En la frontera de cada cara hay al menos tres aristas.
- Si G tiene c caras y a aristas, entonces se cumple que $3c \leq 2a$.
- Si G tiene c caras y a aristas (de las cuales f son frontera, es decir, separan dos caras) y cada cara tiene al menos d aristas en la frontera, entonces se cumple que $dc \leq 2f \leq 2a$.

❖ Fórmula de Euler para grafos conexos:

Si G = (V, A) es un grafo plano conexo, con c caras, a aristas y v vértices, entonces se cumple:

v + c = a + 2

❖ Fórmula de Euler para grafos no conexos:

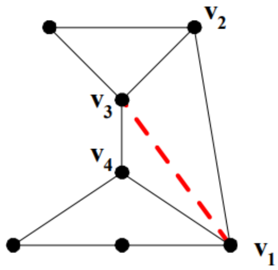
Si G = (V, A) es un grafo plano no conexo, con c caras, a aristas, v vértices y d componentes conexas, entonces se cumple:

v + c = a + d + 1

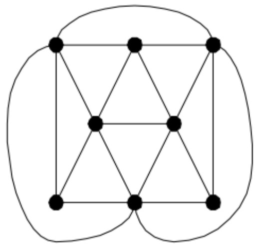
❖ Grafo plano maximal:

Un grafo plano G = (V, A) se dice que es un **grafo plano maximal** si al añadir una arista entre dos vértices no adyacentes cualesquiera, deja de ser plano.

Si un grafo plano G = (V, A) es maximal (y tiene al menos dos caras), las caras están limitadas por triángulos (ciclos de longitud 3).



grafo plano NO maximal



grafo plano maximal

Por tanto, sea G=(V,A) un grafo plano maximal, con a aristas y v vértices ($v \geq 3$), entonces:

$$\mathbf{a = 3v - 6}$$

Si G=(V,A) un grafo plano maximal no conexo con d componentes conexas, con a aristas y v vértices ($v \geq 3$), entonces:

$$\mathbf{a = 3v - 6 \cdot d}$$

❖ Test de planaridad:

Cualquier grafo plano cumplirá que $a \leq 3v - 6$. Es decir, si $a > 3v - 6$, entonces el grafo no es plano.

Por ejemplo, sabemos que el grafo completo K_5 no es plano. Lo verificamos con dicho test:

Como tenemos 5 vértices y 10 aristas, entonces: $10 \leq 3 \times 5 - 6 \rightarrow 10 \leq 9$ no se cumple, por tanto K_5 no es plano.

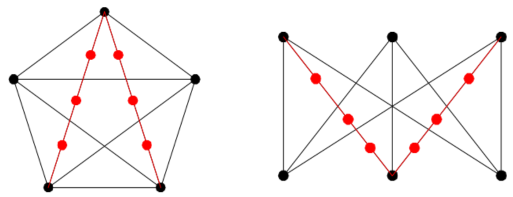
Sin embargo, **el hecho de que se cumpla $a \leq 3v - 6$, no implica que entonces el grafo sea plano**.

Por ejemplo, el grafo bipartito completo $K_{3,3}$ verifica el test de planaridad, ya que tenemos 6 vértices y 9 aristas: $9 \leq 3 \times 6 - 6 \rightarrow 10 \leq 12$. Sin embargo, no es plano, porque según la fórmula de Euler para grafos conexos: $v + c = a + 2 \rightarrow 6 + c = 9 + 2 \rightarrow c = 5$, y como al tratarse de un grafo bipartito sabemos que no contiene ciclos C_3 y como consecuencia cada cara tiene al menos 4 aristas, entonces: $4c \leq 2a \rightarrow 4\times5 \leq 2\times9 \rightarrow 20 \leq 18$ no se cumple, por tanto $K_{3,3}$ no es plano.

❖ **Teorema de Kuratowski:**

Dado un grafo G = (V, A) se llama **subdivisión del grafo** G al nuevo grafo G’ obtenido subdividiendo alguna(s) arista(s) de G.

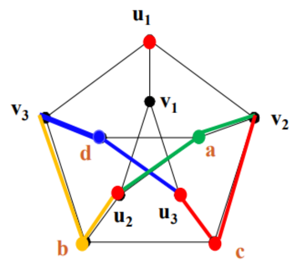
Por ejemplo, para los grafos K_5 y $K_{3,3}$ una subdivisión de ellos serían los mostrados a la derecha. Se han elegido 2 aristas (las marcadas en rojo) y se han dividido en 4 aristas cada una, añadiendo entre ellas 3 vértices.



El **teorema de Kuratowski** describe que un grafo es plano si, y sólo si, no contiene ningún subgrafo isomorfo a K_5, ni a $K_{3,3}$ ni a subdivisiones de ellos.

Por ejemplo, el grafo de Petersen (grafo de la derecha) no es plano, ya que contiene una subdivisión de $K_{3,3}$. Observamos que el grafo de Petersen podemos separarlo en 2 conjuntos diferentes: $V_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ y $V_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$, de manera que tendremos las siguientes aristas:

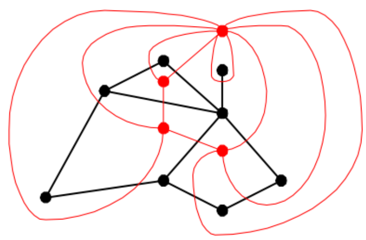
{u1, v1}, {u1, v2}, {u1, v3}, {u2, v1}, {u2, a, v2}, {u2, b, v3}, {u3, v1}, {u3, c, v2} y {u3, d, v3}, formando entonces una subdivisión de $K_{3,3}$.



2. Grafos duales

Dado un grafo plano G = (V, A) y una inmersión en el plano, definiremos el **grafo dual de G** (respecto de la inmersión), representado por G* = (V*, A*) como el grafo donde cada cara de G se identifica con un vértice de G* y cada arista a de G da lugar a una arista de G*, entre los dos vértices identificados por las caras que separa la arista a.

En el grafo de ejemplo de la derecha G sería el representado por el color negro y G* sería el representado por el color rojo.



❖ **Propiedades de los grafos duales:**

Sea G = (V, A) un grafo plano y G* = (V*, A*) el grafo dual de G:

- G tiene tantas aristas como G*.
- G* es un grafo plano.
- G puede ser un grafo simple y en cambio G* un multigrafo.
- G* contiene un lazo si, y sólo si, G tiene una arista puente.
- Si G tiene c caras, a aristas y v vértices, y G* tiene c* caras, a* aristas y v* vértices, entonces: v* = c, c* = v y a* = a.

❖ **Teorema de los cuatro colores:**

Todo grafo plano es 4-coloreable: $\chi(G) \leq 4$.