Tema 5 - Apuntes.pdf

MD Apuntes Completos Temario

Tema 9 - Transversalidad en Grafos

- **Teorema de Euler**

G (conexo) es euleriano ↔ Todos los vértices tienen grado par

Algoritmo de Euler:

Entrada: grafo G conexo con todos los vértices pares

P.1: Cirkuito euleriano C = {v}, siendo v un vértice de G. Este debe empezar y terminar en el vértice

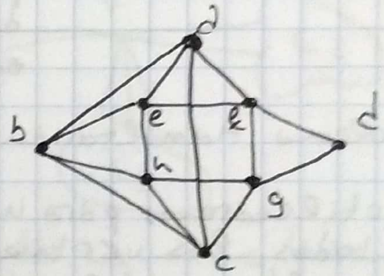
P.2: Mientra que siga habiendo aristas en G

P.2.1: Sea v un vértice de C, no aislado en G y sea D un ciclo empezado en v
P.2.2: Eliminamos de G las aristas de D
P.2.3: Sustituimos en C el vértice v por el ciclo D

Salida: Circuito C

Ejemplo:

a	b	c	d	e	f	g	h
b	a	a	f	a	a	c	b
c	c	b	g	b	d	d	c
e	e	g		f	e	f	e
f	h	h		h	g	h	g



v	C	D
a	{a}	{a, b, e, a}
a	{a, b, e, a}	{a, c, g, f, a}
c	{a, c, g, f, a, b, e, a}	{c, b, h, c}
h	{a, c, b, h, c, g, f, a, b, e, a}	{h, e, f, d, g, h}

Explicación: Comenzamos con el vértice a y añadiendo en D un ciclo con el vértice a como inicio y fin.

Sigo usando a como vértice pues queda aristas por quitar, además añadimos a C el ciclo que teníamos en D.

Una vez terminamos con a, pasamos a otro vértice y estamos pendientes que aristas ya hemos recorrido

El resultado final es: C = {a, c, b, h, e, f, d, g, h, c, g, f, a, b, e, a}

Teorema: Un grafo conexo admite un recorrido euleriano (pero no un circuito) si, y sólo si, todos sus vértices son pares excepto dos de ellos.

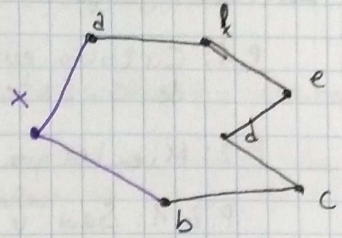
Algoritmo de Euler 1

Entrada: Grafo G con todos los vértices pares excepto a y b.

P.1: Añadir un vértice x y las aristas $\{x, a\}$ y $\{x, b\}$

P.2: Aplicar Euler normal

Salida: $C - \{x\}$



¿Y en digrafos? → Para un circuito euleriano debemos comprobar que el digrafo es débilmente conexo y todos sus vértices tengan el mismo grado de entrada que de salida.

→ Para un recorrido euleriano deberá ser débilmente conexo y todos sus vértices pares excepto uno en el que el grado de salida es una unidad mayor que el de entrada y otro vértice al revés.

- Problema Hamiltoniano

Lo utilizaremos para hallar un camino simple que pase por todos los vértices. Distinguiremos entre grafo hamiltoniano (G admite un ciclo hamiltoniano) y camino hamiltoniano. El ciclo hamiltoniano no es más que un camino simple cerrado que contenga todos los vértices.

Condiciones necesarias de grafo hamiltoniano

→ Si un grafo es hamiltoniano entonces es conexo.

→ Si un grafo es hamiltoniano entonces $\delta(G) \geq 2$

→ Si un grafo es hamiltoniano entonces es conexo y no tiene vértices de corte.

→ Si un grafo es hamiltoniano entonces al eliminar un conjunto de corte de c vértices ($c > 1$) no pueden obtenerse más de c componentes conexas.

Condiciones suficientes de grafo Hamiltoniano:

→ Si un grafo de n vértices ($n \geq 3$) verifica que $\delta(G) \geq n/2$ entonces es hamiltoniano → Teorema de Dirac

Condiciones necesarias para la existencia de camino hamiltoniano:

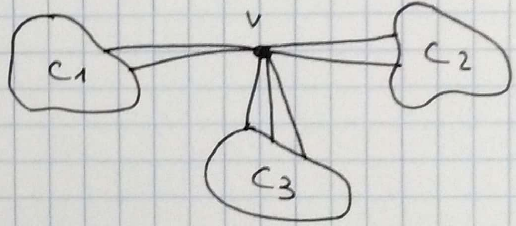
→ Si G admite camino hamiltoniano entonces es conexo.

→ " " " " " " entonces no puede haber más de 2 vértices con valencia no superior a 1.

→ " " " " " " entonces no puede tener un vértice de corte cuya eliminación de lugar a más de 2 componentes conexas. } ⍺

→ " " " " " " entonces de eliminar un conjunto de corte de c vértices no pueden aparecer más de c+1 componentes conexas.

⍺ Un ejemplo sería el siguiente grafo



Condición suficiente de existencia de camino hamiltoniano:

→ Si un grafo G de n vértices ($n \geq 3$) verifica que $\delta(G) \geq (n-1)/2$ entonces admite un camino hamiltoniano.