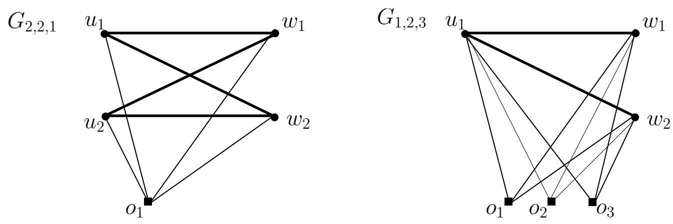
I. Software - Matemática Discreta

21-6-2019

IMPORTATE: Todas las respuestas han de ser justificadas utilizando los contenidos de la asignatura que se han desarrollado a lo largo del curso.

EJERCICIO 1 [4.5 puntos]

El grafo $G_{s,m,n}$, con $s, m, n \geq 1$, se define como la suma de los siguientes grafos: un grafo bipartito completo, $K_{s,m}$, y el grafo O_n formado por n vértices aislados. Para ilustrarlo, en la figura se muestran los grafos $G_{2,2,1}$ y $G_{1,2,3}$



Contesta **razonadamente** las siguientes cuestiones:

1. **Calcula el número de vértices, lista de grados y número de aristas del grafo $G_{s,m,n}$.**

   a) Número de vértices:

   Consta de s vértices en uno de los conjuntos de vértices del $K_{s,m}$ y m en el otro conjunto. Por otra parte, contiene n vértices procedentes del subgrafo O_n.

   En total, el número de vértices es $n = s + m + n$.

   b) Lista de grados:

   Cada vértice del tipo u_i es adyacente a los m vértices del tipo w_j y a los n vértices del 0_n, por lo que su valencia será $m + n$. Hay s vértices de este tipo.

   Del mismo modo, cada vértice del tipo w_i tendrá valencia $s + n$. Hay m vértices de este tipo.

   Cada vértice del tipo o_i es adyacente a todos los vértices del $k_{s,m}$, por lo que su valencia será $s + m$. Hay n vértices de este tipo.

   De esta forma, la lista de grados será:

   $$(\underbrace{m+n, \cdots, m+n}_{s} \quad \underbrace{s+n, \cdots, s+n,}_{m} \quad \underbrace{s+m, \cdots, s+m}_{n})$$

   c) Número de aristas:

   Aplicando el lema del apretón de manos, $2a = \sum \delta(v)$.

   $a = \frac{s(m+n)+m(s+n)+n(s+m)}{2} = sm + sn + mn$

2. **Estudia el carácter euleriano del grafo $G_{s,m,n}$.**

   Dado que el grafo es conexo, se puede decir que será euleriano si y sólo si todos los vértices tienen valencia par. Para que esto ocurra es necesario que $m + n$, $s + n$ y $s + m$ sean pares, es decir, que el grafo será euleriano si s, m y n tiene los tres la misma paridad.

   Para que sea semi-euleriano, teniendo en cuenta que se trata de un grafo conexo, debe tener exactamente 2 vértices de valencia impar. Esto ocurrirá cuando dos de los parámetros s, m, n tengan el valor 1 y el tercero de ellos sea par, ya que, es ese caso, los dos vértices correspondiente a los parámetros de valor 1 serán adyacentes al otro vértice correspondiente al otro parámetro 1 y a los vértices correspondientes al parámetro par, dando para estos dos vértices una valencia impar y para los vértices correspondientes al parámetro par, la valencia será 2 (par), puesto que sólo son adyacentes a los dos vértices correspondientes a los parámetro con valor 1.

A partir de aquí, el resto de apartados se refieren al grafo $G_{2,2,n}$.

3. **Estudia si es hamiltoniano o no para los distintos valores de n.** Para $n \leq 4$ el grafo es hamiltoniano, puesto que se puede encontrar un ciclo hamiltoniano:

   a) Para $n = 1$ el ciclo es:$\{u_1, w_1, o_1, u_2, w_2, u_1\}$

   b) Para $n = 2$ el ciclo es:$\{u_1, o_1, w_1, o_2, u_2, w_2, u_1\}$

   c) Para $n = 3$ el ciclo es:$\{u_1, o_1, w_1, o_2, u_2, o_3 w_2, u_1\}$

   d) Para $n = 4$ el ciclo es:$\{u_1, o_1, w_1, o_2, u_2, o_3 w_2, o_4, u_1\}$

   Para $n > 4$ el grafo no puede ser hamiltoniano, puesto que si se eliminan los 4 vértices de $K_{2,2}$, quedan aislados los n vértices de O_n, quedando más componentes conexas que vértices eliminados.

4. **Determina su radio, diámetro, centro y periferia.** Para determinar el radio y el diámetro es necesario calcular la excentricidad de todos los vértices.

   a) Para $n \geq 2$:

   El grafo tiene tres tipos de vértices: u_i, w_j, o_k. Pero todos ellos se comportan de la misma manera, ya que son adyacentes a todos los vértices de los otros dos tipos y no son adyacentes entre sí. Eso hace que el vértice más alejado a cualquier vértice diste 2. Por tanto, la excentricidad de cada vértices es 2.

   Como el radio es la menor de las excentricidades y el diámetro la mayor de ellas, en este caso se tiene que tanto el radio como el diámetro coinciden y valen 2.

   El centro está formado por todos los vértices cuya excentricidad es la menor y la periferia está formada por todos los vértices cuya excentricidad es la mayor. Esto hace que para estos grafos todos los vértices forman el centro y la periferia.

   b) Para $n = 1$

   Los vértices u_i y w_j se comportan de la misma manera que se ha descrito en el caso de $n \geq 2$, por lo que su excentricidad es 2. Pero el vértice o_1 tiene la peculiaridad de ser adyacente a todos los demás vértices, por lo que su excentricidad es 1.

   En este caso el radio es 1 y el diámetro es 2, de manera que el centro está formado sólo por el vértice o_1 y la periferia por todos los demás vértices.

5. **Estudia su conectividad por vértices y su conectividad lineal.**

   a) Para $n = 1$ eliminando 3 vértices: $\{u_1, u_2, o_1\}$ se desconecta el grafo, quedando los otros dos vértices aislados. Por lo que $k(G_{2,2,1}) \leq 3$. Además, se puede comprobar que eliminando 2 vértices, el grafo no se desconecta. Básicamente hay dos formas de quitar dos vértices: la primera es eliminar dos vértices del $K_{2,2}$, en cuyo caso los vértices restantes quedan conectados por el vértice o_1; Y la segunda forma es eliminar un vértice de $K_{2,2}$ y el vértice o_1, y en este caso los tres vértices del $K_{2,2}$ que quedan estarán conectados a través del vértice del conjunto de vértices que ha quedado con un sólo vértice. Por tanto, la conectivad por vértices debe ser 3.

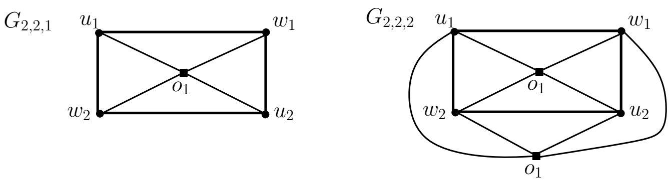
   Por el teorema de Whitney, como $3 = k(G_{2,2,1}) \leq \lambda(G_{2,2,1}) \leq \delta_{min} = 3$, se tiene que $\lambda(G_{2,2,1}) = 3$.

   b) Para $n \geq 2$, eliminando los 4 vértices de $K_{2,2}$ se desconecta el grafo, quedando n vértices aislados. Por lo que $k(G_{2,2,n}) \leq 4$. Además, se puede comprobar que eliminando 3 vértices, el grafo no se desconecta. Básicamente hay dos formas de quitar 3 vértices: la primera es eliminar tres vértices del $K_{2,2}$, en cuyo caso los vértices restantes quedan conectados por el vértice de $K_{2,2}$ que no se ha elimnado; Y la segunda forma es eliminar dos vértice de $K_{2,2}$ y el vértice o_1, y, en este caso, los vértices o_i son todos adyacentes a los vértices de $K_{2,2}$ que quedan. Por tanto, la conectivad por vértices debe ser 4.

Por el teorema de Whitney, como $4 = k(G_{2,2,n}) \leq \lambda(G_{2,2,n}) \leq \delta_{min} = 4$, se tiene que $\lambda(G_{2,2,n}) = 4$.

6. **Estudia si es plano o no para los distintos valores de n.**

   a) Para $n \leq 2$ el grafo es plano, puesto que se puede encontrar una inmersión en el plano como se muestra en la figura siguiente:



   b) Para $n > 2$ el grafo no puede ser plano, ya que en este caso se puede comprobar que no pasa el test de planaridad.

$$a = sm + sn + mn = 4 + 2n + 2n = 4 + 4n$$

$$v = s + m + n = 2 + 2 + n = 4 + n$$

   Si $n \geq 3$, $4 + 4n > 3(4 + n) - 6 = 3n + 6$

   Nota: También se puede comporbar que no es plano haciendo uso del teorema de Kuratowsky o del teorema de Wagner.

7. **Calcula cuál es su número de independencia y su número de clique.**

   El número de independencia es el tamaño del conjunto de vértices más grande que se puede formar, de manera que los vértices de dicho conjunto no sean adyacentes entre sí.

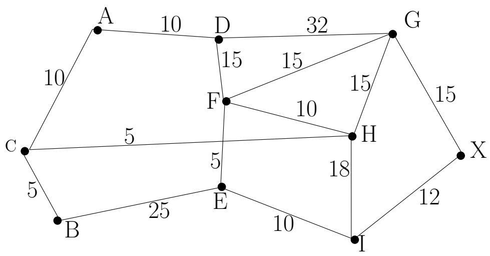
   a) Si $n = 1$ se pueden tomar por ejemplo los vértices u_1, u_2. Dichos vértices forman un conjunto independiente de vértices, puesto que no son adyacentes entre sí. Además, no se puede conseguir ningún conjunto independiente mayor, puesto que cualquier conjunto de tres vértices que se elija tendrá vértices adyacentes. En este caso, el número de independencia es 2

   b) Si $n \geq 2$, se puede tomar como conjunto independiente todos los vértices de O_n, dándo como resultado que el número de independencia en este caso es n

   Por otra parte, el número de clique para cualquier valor de n es 3, puesto que el grafo completo más grande que contiene es K_3, que viene dado por los vértice $\{u_1, w_1, o_1\}$ Por inspección se puede deducir que no puede contener ningún clique mayor.

EJERCICIO 2 [1.5 puntos]

El siguiente esquema representa las carreteras que conectan las distintas urbanizaciones de una región rural. Los vértices indican las zonas urbanizadas y las aristas las conexiones terrestres, siendo sus pesos las distancias (en tiempo) entre las zonas urbanizadas que conectan. En A y B se encuentran sendos hospitales. Cuando se produce una urgencia en una urbanización, el hospital más cercano a la urbanización manda una ambulancia.



1. **Si se produce una urgencia en X, ¿qué hospital mandará la ambulancia? ¿Cuánto tiempo tardará la ambulancia en llegar a X?**

2. **¿Qué camino seguirá la ambulancia hasta llegar a X? ¿Es único dicho camino?**

Para responder a las preguntas planteadas en este problema debemos hacer uso del algoritmo de Dijkstra partiendo del vértice X, para ver cuál es la distancia del vértice X a los vértices A y B.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	X	Base	arista
									0		
						$15, X$		$12, X$	$-$	I	$\{X, I\}$
				$22, I$		$15, X$	$30, I$	$-$	$-$	G	$\{X, G\}$
			$47, G$	$22, I$	$30, G$	$-$	$30, I, G*$	$-$	$-$	E	$\{I, E\}$
	$47, E$		$47, G$	$-$	$27, E$	$-$	$30, I, G*$	$-$	$-$	F	$\{E, F\}$
	$47, E$		$42, F$	$-$	$-$	$-$	$30, I, G*$	$-$	$-$	H	$\{I, H\}$ó$\{G, H\}$
	$47, E$	$35, H$	$42, F$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	C	$\{H, C\}$
$45, C$	$40, C$	$-$	$42, F$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	B	$\{C, B\}$

A partir de la tabla se puede responder a todas las preguntas:
El hospital que enviará la ambulancia será el situado en B, puesto que tardará menos tiempo en llegar que si la envían desde A. El tiempo que tardará la ambulacia de B a X es de 40 unidades de tiempo, mientras que de A a X, aún sin terminar la tabla se puede asegurar que será mayor, puesto que el vértice base en el que hemos dejado de hacer la tabla es el B, eso quiere decir que a los vértices que quedan por averiguar su distancia a X distarán más de 40 unidades de tiempo.
El camino que seguirá la ambulancia será:$\{B, C, H, I, X\}$. Como se puede apreciar en la tabla, el camino no es único. Un camino alternativo es $\{B, C, H, G, X\}$.

EJERCICIO 3 [3 puntos]

En un laboratorio de biología quieren almacenar algunas bacterias para hacer experimentos. Cada tipo de bacterias se guarda en un recipiente específico y dichos recipientes se almacenan en neveras. Para evitar alteraciones en los resultados experimentales, determinados tipos de bacterias no deben situarse en la misma nevera que otros. Llamando $\{0, 1, \cdots, 8\}$ a los tipos de bacterias, la siguiente tabla indica qué bacterias no pueden almacenarse en la misma nevera:

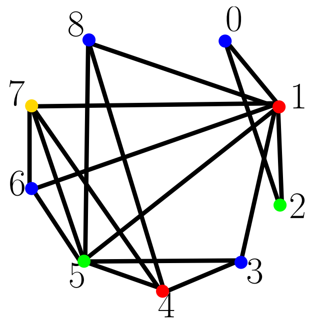
0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	1	3	1	1	1	1
2	2	1	4	5	3	5	4	2
	3	8	5	7	4	7	5	4
	5			8	6		6	5
	6				7			
	7				8			
	8							

1. **¿Cuál es el menor número de neveras necesarias para conseguir almacenar las bacterias, siguiendo las indicaciones dadas?**

   El menor número de neveras necesarias para conseguir almacenar las bacterias vendrá dado por el número cromático del grafo de incompatibilidades que viene dado por la tabla de adyacencias, en el que los vértices (tipos de bacterias) son adyacentes si no pueden almacenarse en la misma nevera.

   Se puede ver que el grafo de incompatibilidades contiene un K_4 formado por los vértices: $\{1,5,6,7\}$. Por tanto, el número cromático será mayor o igual que 4.

   Por otra parte, es puede hacer una vértice coloración con 4 colores, como se puede apreciar en la siguiente figura:

   Como conclusión, el número cromático es 4, es decir, se necesitan 4 neveras.

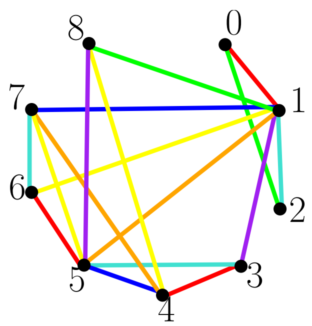
2. **Se van a realizar varias tandas de experimentos. En cada tanda se pretende hacer convivir dos a dos distintos tipos de bacterias incompatibles según la tabla anterior. Pero cada tipo de bacterias sólo puede aparecer una vez en los experimentos de una tanda (aunque cada tipo de bacterias puede aparecer en experimentos de distintas tandas) ¿Cuál es el menor número de tandas de experimentos necesarias para cubrir todos los experimentos posibles?**

   En cada tanda de experimentos habrá uno o varios experimentos, así que se trata de agrupar de manera óptima experimentos de pares de tipos de bacterias (aristas) y que, según el enunciado, no involucren a un mismo tipo de bacterias en una misma tanda (que no compartan vértice). Es decir, se trata de encontrar el índice cromático del grafo.

   Según el teorema de Vizing se tiene que $\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1$. En el caso del grafo que correspondiente al ejercicio:

   $$7 \leq \chi'(G) \leq 8$$

   Es fácil comprobar que admite una arista coloración con 7 colores, un ejemplo se tiene en la figura siguiente:

   En definitiva, el menor número de tandas de experimentos necesarias es 7.

3. **Los alumnos, $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$, van a realizar sus trabajos de investigación sobre un tipo de bacterias. Cada uno de ellos ha indicado cuáles de las 9 bacterias prefieren, como se indica en la tabla siguiente:**

A	B	C	D	E	F	G	H
2	1	1	5	3	5	1	1
7	3	8	8	6	8	5	5
9	4			7		9	
				8			

En base a sus preferencias, el coordinador pretende asignar a cada alumno un tipo de bacterias, sin que se repita ninguno. Inicialmente se ha considerado el siguiente reparto:

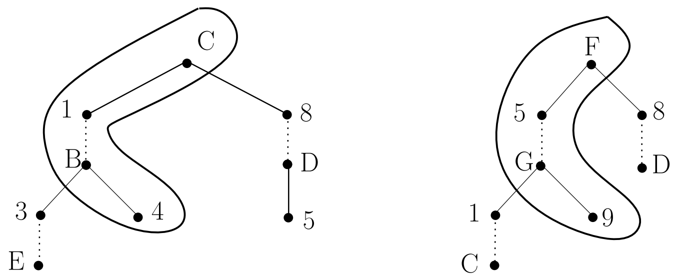
$$M = \{\{A, 7\}, \{B, 1\}, \{D, 8\}, \{E, 3\}, \{G, 5\}\}$$

a) **¿Es posible asignar a cada alumno un tipo de bacterias distinto atendiendo a sus intereses?** Se está preguntando si se puede hacer un emparejamiento completo. La respuesta es negativa, no es posible asignar a cada alumno un trabajo distinto atendiendo a los intereses de los alumnos, haciendo uso de la condición de Hall:

Si se toma $P = \{C, D, F, H\}$ tendrá asociado el conjunto $T(P) = \{1, 5, 8\}$. De manera que $4 = |P| > T(P) = 3$. Por tanto, no verifica la condición de Hall, por lo que no existe un emparejamiento completo.

b) **Encuentra una forma para que el mayor número de alumnos tenga asignado un tema distinto atendiendo a la sus preferencias y partiendo de la distribución inicialmente propuesta por el profesor. Indica qué algoritmo has utilizado y cómo lo aplicas.**

Para resolver este apartado se requiere hacer uso del algoritmo de árbol de camino alternado:



Atendiendo al primer árbol de camino alternado, conseguimos aumentar en una unidad el emparejamiento, quedando de la siguiente forma:

$$M' = \{\{A, 7\}, \{B, 4\}, \{C, 1\}, \{D, 8\}, \{E, 3\}, \{G, 5\}\}$$

Teniendo en cuenta este nuevo emparejamiento, se hace el segundo árbol de camino alternado y se obtiene un nuevo emparejamiento, en esta ocasión máximo, ya que se sabe por el apartado anterior que no puede tener un emparejamiento completo. El emparejamiento máximo es:

$$M'' = \{\{A, 7\}, \{B, 4\}, \{C, 1\}, \{D, 8\}, \{E, 3\}, \{F, 5\}, \{G, 9\}\}$$

De esta manera, el alumno A hará su trabajo de investigación con las bacterias del tipo 7, B con las del 4, C con las del 1, D con las del 8, E con las del 3, F con las del 5, y G con las del tipo 9.

EJERCICIO 4 [1 punto]

Sea H un grafo simple conexo de 10 vértices con número cromático $\chi(H) = 2$. Sabiendo que su índice cromático es $\chi'(H) = 6$ y que su valencia mínima es 4. Determina el número de aristas que tiene y justifica si se trata de un grafo plano.

Como el grafo tiene número cromático $\chi(H) = 2$, se trata de un grafo bipartito. Al ser bipartito, su índice cromático coincide con su valencia máxima, que será 6. Como H tiene 10 vértices y es un grafo bipartito con valencia máxima 6 y mínima 4, se trata del grafo $K_{6,4}$, ya que todos los vértices del primer conjunto han de ser adyacentes a los 4 vértices del segundo conjunto (si no, la valencia mínima sería menor).

Una vez que sabemos de qué grafo se trata, es fácil contar su número de aristas a partir del lema del apretón de manos, llegándose a que el número de aristas es

$$a = \frac{\Sigma\delta(v)}{2} = mn = 6 \cdot 4 = 24$$

Por otra parte, no puede ser plano, puesto que contiene a $K_{3,3}$