

Demostración de Reglas Derivadas para el Cálculo de Enunciados como Sistema de Deducción Natural.

Arantxa Martín Santos

M.T: Modus Tollens: [M.T.]

$$A \rightarrow B$$

$$\neg B$$

$$\neg A$$

Demostración:

- | | | |
|----|-------------------|---------|
| 1. | $A \rightarrow B$ | Premisa |
| 2. | $\neg B$ | Premisa |
| 3. | A | |
| 4. | B | EI 1,3 |
| 5. | $\neg B \wedge B$ | IC 2,4 |
| 6. | $\neg A$ | IN 3-5 |

SIL. DISY.: Silogismo disyuntivo: [S.D.]

$$A \vee B$$

$$\neg A$$

$$B$$

$$A \vee B$$

$$\neg B$$

$$A$$

Demostración

- | | | |
|------|-------------------|-------------------|
| 1.- | $A \vee B$ | Premisa |
| 2.- | $\neg A$ | Premisa |
| 3.- | $\neg B$ | |
| 4.- | A | |
| 5.- | $A \wedge \neg A$ | I.C. 2,4 |
| 6.- | B | |
| 7.- | $\neg A$ | |
| 8.- | $B \wedge \neg B$ | I.C. 6,3 |
| 9.- | $\neg \neg A$ | I.N. 7-8 |
| 10.- | A | E.N. 9 |
| 11.- | $A \wedge \neg A$ | I.C. 10,2 |
| 12.- | $A \wedge \neg A$ | E.D. 1, 4-5, 6-11 |
| 13.- | $\neg \neg B$ | I.N. 3-12 |
| 14.- | B | E.N. 13 |

- | | | |
|------|-------------------|-------------------|
| 1.- | $A \vee B$ | Premisa |
| 2.- | $\neg B$ | Premisa |
| 3.- | A | |
| 4.- | $\neg A$ | |
| 5.- | $A \wedge \neg A$ | I.C. 3,4 |
| 6.- | $\neg \neg A$ | I.N. 4-5 |
| 7.- | A | E.N. 6 |
| 8.- | B | |
| 9.- | $\neg A$ | |
| 10.- | $B \wedge \neg B$ | I.C. 8,2 |
| 11.- | $\neg \neg A$ | I.N. 9-10 |
| 12.- | A | E.N. 11 |
| 13.- | A | E.D. 1, 3-7, 8-12 |

TRANS. C.: Transitividad del Condicional. [Sil.] $A \rightarrow B$ $B \rightarrow C$

 $A \rightarrow C$ **Demostración:**

- | | | |
|-------|-------------------|---------|
| 1.- | $A \rightarrow B$ | Premisa |
| 2.- | $B \rightarrow C$ | Premisa |
| [3.- | A | |
| 4.- | B | El 1,3 |
| 5.- | C | El 2,4 |
| 6.- | $A \rightarrow C$ | Il 3-5 |

CONT. C.: Contraposición del Condicional: [Cp.] $A \rightarrow B$

 $\neg B \rightarrow \neg A$ **Demostración:**

- | | | |
|------|-----------------------------|---------|
| 1. | $A \rightarrow B$ | Premisa |
| 2. | $\neg B$ | |
| [3. | A | |
| 4. | B | El 1,3 |
| 5. | $B \wedge \neg B$ | IC 4,2 |
| 6. | $\neg A$ | IN 3-5 |
| 7. | $\neg B \rightarrow \neg A$ | Il 2-6 |

I.: Identidad: [Id.]
$$\frac{A}{A}$$
Demostración

- | | | |
|-------|-------------------|----------|
| 1.- | A | Premisa |
| [2.- | $\neg A$ | |
| 3.- | $A \wedge \neg A$ | I.C. 1,2 |
| 4.- | $\neg \neg A$ | I.N. 2-3 |
| 5.- | A | E.N. 4 |

CPr.: Carga de Premisa

$$\frac{A}{B \rightarrow A}$$

Demostración

1.-	A	
2.-	B	
3.-	$\neg A$	
4.-	$A \wedge \neg A$	I.C. 1,3
5.-	$\neg\neg A$	I.N.3-4
6.-	A	E.N. 5
7.	$B \rightarrow A$	I.I. 2-6

IDN.: Introducción de la Doble Negación

$$\frac{A}{\neg\neg A}$$

Demostración

1.-	A	
2.-	$\neg A$	
4.-	$A \wedge \neg A$	I.C. 1,2
5.-	$\neg\neg A$	I.N.2-3

ECQ.: Ex Contradictione Quolibet

$$\frac{A \wedge \neg A}{B}$$

Demostración

1.-	$A \wedge \neg A$	
2.-	$\neg B$	
3.-	A	E.C.1
4.-	$\neg A$	E.C. 1
5.-	$A \wedge \neg A$	I.C.3-4
6.-	$\neg\neg B$	I.N. 2-5
7.	B	E.N. 6

PTE: Principio de Tercio Excluido

$$\vdash A \vee \neg A$$
Demostración

1.-	$\neg(A \vee \neg A)$	
2.-	A	
3.-	$A \vee \neg A$	ID ₁ 2
4.-	$(A \wedge \neg A) \wedge \neg(A \vee \neg A)$	IC, 3, 1
5.-	$\neg A$	IN, 2-4
6.-	$A \vee \neg A$	ID ₂ 5
7.-	$(A \vee \neg A) \wedge \neg(A \vee \neg A)$	IC, 6, 1
8.-	$\neg\neg(A \vee \neg A)$	IN, 1-7

PNC: Principio de No Contradicción

$$\vdash \neg(A \wedge \neg A)$$
Demostración

1.-	$A \wedge \neg A$	
2.-	A	EC ₁ , 1
3.-	$\neg A$	EC ₂ , 1
4.-	$A \wedge \neg A$	IC, 2, 3
5.-	$\neg(A \wedge \neg A)$	IN, 1-4

CONM. C.: Conmutatividad de la Conjunción [CC.]

$$A \wedge B$$

$$B \wedge A$$
Demostración

1.-	$A \wedge B$	Premisa
2.-	A	E.C. 1
3.-	B	E.C. 1
4.-	$B \wedge A$	I.C. 2,3
5.-	$B \wedge A$	Premisa
6.-	B	E.C. 5
7.-	A	E.C. 5
7.	$A \wedge B$	II.C. 6,7

CONM. D.: Conmutatividad de la Disyunción [CD.]

$$A \vee B$$

$$B \vee A$$

Demostración

1.- $A \vee B$	Premisa
2.- A	
3.- $B \vee A$	I.D. 2
4.- B	
5.- $B \vee A$	I.D. 4
6.- $B \vee A$	E.D.1, 2-3, 4-5
7.- $B \vee A$	Premisa
8.- B	
9.- $A \vee B$	I.D. 8
10.- A	
11.- $A \vee B$	I.D. 8
7. $A \vee B$	E.D.7, 8-9, 10-11

Imp: Importación

$$A \rightarrow (B \rightarrow C)$$

$$(A \wedge B) \rightarrow C$$

Demostración

1.- $A \rightarrow (B \rightarrow C)$	
2.- $A \wedge B$	
3.- A	E.C. 2
4.- $B \rightarrow C$	E.I. 1,3
5.- B	E.C. 2
6.- C	E.I. 4-5
7. $(A \wedge B) \rightarrow C$	I.I. 2-6

Exp: Exportación

$$\frac{(A \wedge B) \rightarrow C}{A \rightarrow (B \rightarrow C)}$$

Demostración

- | | | |
|-----|-----------------------------------|----------|
| 1.- | $(A \wedge B) \rightarrow C$ | |
| 2.- | A | |
| 3.- | B | |
| 4.- | $A \wedge B$ | I.C. 2,3 |
| 5.- | C | E.I. 1,4 |
| 6.- | $B \rightarrow C$ | I.I. 3-5 |
| 7.- | $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ | I.I. 2-6 |

Def. D : Definición de la Disyunción [DfD₁]

<u><u>A ∨ B</u></u>					
$\neg A \rightarrow B$					
1.-	$A \vee B$	Premisa	15.-	$\neg A \rightarrow B$	Premisa
2.-	$\neg A$		16.-	$\neg(A \vee B)$	
3.-	A		17.-	$\neg A$	
4.-	$\neg B$		18.-	B	E.I. 15,17
5.-	$A \wedge \neg A$	IC. 2,3	19.-	$A \vee B$	I. D. 18
6.-	$\neg \neg B$	IN. 4-5	20.-	$(A \vee B) \wedge \neg(A \vee B)$	I. C. 19-15
7.-	B	EN. 6	21.-	$\neg \neg A$	I.N. 17-20
8.-	B		22.-	A	E.N. 21
9.-	$\neg B$		23.-	$A \vee B$	ID. 22
10.-	$B \wedge \neg B$	IC. 8,9	24.-	$(A \vee B) \wedge \neg(A \vee B)$	IC. 23-16
11.-	$\neg \neg B$	IN. 9-10	25.-	$\neg \neg(A \vee B)$	I.N.16-24
12.-	B	EN. 11	26.-	$A \vee B$	E.N. 25
13.-	B	ED. 1, 2-7 y 8-12			
14.-	$\neg A \rightarrow B$	I.I 2-13			

Def D.: Definición de la Disyunción [DfD₂]

$$A \vee B$$

$$\neg(\neg A \wedge \neg B)$$

Demostración

1.- $A \vee B$	Premisa	15.- $\neg(\neg A \wedge \neg B)$	
2.- $\neg A \wedge \neg B$		16.- $\neg(A \vee B)$	
3.- $\neg A$	EC.2	17.- A	
4.- $\neg B$	EC.2	18.- $A \vee B$	ID. 17
5.- A		19.- $(A \vee B) \wedge \neg(A \vee B)$	IC. 18,16
6.- $A \wedge \neg A$	IC. 5,3	20.- $\neg A$	IN. 17-19
7.- B		21.- B	
8.- $\neg A$		22.- $A \vee B$	ID. 21
9.- $B \wedge \neg B$	IC. 7,4	23.- $(A \vee B) \wedge \neg(A \vee B)$	IC. 22, 16
10.- $\neg\neg A$	IN. 8-9	24.- $\neg B$	IN. 21-23
11.- A	EN.10	25.- $\neg A \wedge \neg B$	IC. 20,24
12.- $A \wedge \neg A$	I.C. 11,3	26.- $(\neg A \wedge \neg B) \wedge \neg(\neg A \wedge \neg B)$	IC. 25-15
13.- $A \wedge \neg A$	ED.1,5-6, 7-11	27.- $\neg\neg(A \vee B)$	IN. 16-26
14.- $\neg(\neg A \wedge \neg B)$	IN. 2-13	28.- $A \vee B$	EN. 27

Def. C: Definición del Condicional [DfC₁]

$$A \rightarrow B$$

$$\neg(A \wedge \neg B)$$

Demostración

1.- $A \rightarrow B$	Premisa	8.- $\neg(A \wedge \neg B)$	Premisa
2.- $A \wedge \neg B$		9.- A	
3.- A	EC.2	10.- $\neg B$	
4.- B	EI. 1,3	11.- $A \wedge \neg B$	IC. 9,10
5.- $\neg B$	EC. 2	12.- $(A \wedge \neg B) \wedge \neg(A \wedge \neg B)$	IC. 11,8
6.- $B \wedge \neg B$	IC 4,5	13.- $\neg\neg B$	IN. 10-12
7.- $\neg(A \wedge \neg B)$	IN. 2-6	14.- B	EN. 13
		15.- $A \rightarrow B$	II. 8-14

Def. C: Definición del Condicional [DI₂]

$$\frac{A \rightarrow B}{\neg A \vee B}$$

Demostración

1.- $A \rightarrow B$	Premisa	12.- $\neg A \vee B$	Premisa
2.- $\neg(\neg A \vee B)$		13.- A	
3.- A		14.- $\neg A$	
4.- B	El. 1,3	15.- $\neg B$	
5.- $\neg A \vee B$	ID. 4	16.- $A \wedge \neg A$	IC 13,14
6.- $(\neg A \vee B) \wedge \neg(\neg A \vee B)$	IC. 5,2	17.- B	IN 15-16
7.- $\neg A$	IN 3-6	18.- B	
8.- $\neg A \vee B$	ID. 7	19.- $\neg B$	
9.- $(\neg A \vee B) \wedge \neg(\neg A \vee B)$	IC. 8,2	20.- $B \wedge \neg B$	IC. 18, 19
10.- $\neg A \vee B$	IN. 2-9	21.- B	IN. 19-20
		22.- B	ED.12,14-17, 18-21
		23.- $A \rightarrow B$	II. 13-22

Def. C.: Definición de la Conjunción [DfC₁]

$$\frac{A \wedge B}{\neg(A \rightarrow \neg B)}$$

Demostración

1.- $A \wedge B$	Premisa	8.- $\neg(A \rightarrow \neg B)$	
2.- A	EC.1	9.- $\neg(A \wedge B)$	
3.- B	EC.1	10.- A	
4.- $A \rightarrow \neg B$		11.- B	
5.- $\neg B$	El. 4,2	12.- $A \wedge B$	IC. 10,11
6.- $B \wedge \neg B$	IC. 3,5	13.- $(A \wedge B) \wedge \neg(A \wedge B)$	IC. 12,9
7.- $\neg(A \rightarrow \neg B)$	IN. 4-6	14.- $\neg B$	IN. 11-13
		15.- $A \rightarrow \neg B$	II. 10-14
		16.- $(A \rightarrow \neg B) \wedge \neg(A \rightarrow \neg B)$	IC. 15, 8
		17.- $A \wedge B$	IN. 9-16

Def C.: Definición de la Conjunción [DfC₂]

$$A \wedge B$$

$$\neg(\neg A \vee \neg B)$$

Demostración

1.- $A \wedge B$	Premisa	14.- $\neg(\neg A \vee \neg B)$	
2.- A	EC.1	15.- $\neg A$	
3.- B	EC.1	16.- $\neg A \vee \neg B$	ID. 15
4.- $\neg A \vee \neg B$		17.- $(\neg A \vee \neg B) \wedge \neg(\neg A \vee \neg B)$	IC 16,14
5.- $\neg A$		18.- $\neg\neg A$	IN. 15-17
6.- $A \wedge \neg A$	IC. 2,5	19.- A	EN. 18
7.- $\neg B$		20.- $\neg B$	
8.- A		21.- $\neg A \vee \neg B$	ID. 20
9.- $B \wedge \neg B$	IC 3,7	22.- $(\neg A \vee \neg B) \wedge \neg(\neg A \vee \neg B)$	IC. 21, 14
10.- $\neg A$	IN. 8-9	23.- $\neg\neg B$	IN 20-22
11.- $A \wedge \neg A$	IC. 2,10	24.- B	EN. 23
12.- $A \wedge \neg A$	ED. 4, 5-6 B 7-11	25.- $A \wedge B$	IC. 19-24
13.- $\neg(\neg A \vee \neg B)$	IN. 4-12		

De MORGAN.: [DM₁]

$$\neg(A \wedge B)$$

$$\neg A \vee \neg B$$

Demostración

1.- $\neg(A \wedge B)$	Premisa	15.- $\neg A \vee \neg B$	Premisa
2.- $\neg(\neg A \vee \neg B)$		16.- $\neg A$	
3.- A		17.- $A \wedge B$	
4.- B		18.- A	EC. 17
5.- $A \wedge B$	IC. 3,4	19.- $A \wedge \neg A$	IC. 18,16
6.- $(A \wedge B) \wedge \neg(A \wedge B)$	IC. 5,3	20.- $\neg(A \wedge B)$	IN. 17-19
7.- $\neg B$	IN 4-6	21.- $\neg B$	
8.- $\neg A \vee \neg B$	ID 7	22.- $A \wedge B$	ID. 21
9.- $(\neg A \vee \neg B) \wedge \neg(\neg A \vee \neg B)$	IC. 11,2	23.- B	EC. 22
10.- $\neg A$	IN. 3-9	24.- $B \wedge \neg B$	IC. 23,21
11.- $\neg A \vee \neg B$	ID.10	25.- $\neg(A \wedge B)$	IN 22-24
12.- $(\neg A \vee \neg B) \wedge \neg(\neg A \vee \neg B)$	I.C. 11,2	26.- $\neg(A \wedge B)$	ED. 15, 16-20, 21-25
13.- $\neg\neg(\neg A \vee \neg B)$	IN.12		
14.- $\neg A \vee \neg B$	EN. 13		

De MORGAN.: [DM₂]

$$\neg(A \vee B)$$

$$\neg A \wedge \neg B$$

Demostración

1.- $\neg(A \vee B)$	Premisa	11.- $\neg A \wedge \neg B$	
2.- A		12.- $\neg A$	EC. 11
3.- $A \vee B$	ID.2	13.- $\neg B$	EC. 11
4.- $(A \vee B) \wedge \neg(A \vee B)$	IC.1,3	14.- $A \vee B$	
5.- $\neg A$	IN 2-4	15.- A	
6.- B		16.- $A \wedge \neg A$	IC. 15,12
7.- $A \vee B$	ID. 6	17.- B	
8.- $(A \vee B) \wedge \neg(A \vee B)$	IC. 7,1	18.- $\neg A$	
9.- $\neg B$	IN. 6-8	19.- $B \wedge \neg B$	IC. 17-13
10.- $\neg A \wedge \neg B$	IC.5,9	20.- $\neg\neg A$	IN. 18-19
		21.- A	EN. 20
		22.- $A \wedge \neg A$	IC.-21,12
		23.- $A \wedge \neg A$	ED. 14, 15-16 y 17-22
		24.- $\neg(A \vee B)$	IN. 14-23

REGLAS DERIVADAS DEL CÁLCULO CUANTIFICACIONAL**Def. Λ : DEFINICIÓN DEL GENERALIZADOR. [DG.]**

$$\frac{\Lambda x Px}{\neg \forall x \neg Px}$$

Demostración

1.- $\Lambda x Px$	Premisa	11.- $\neg \forall x \neg Px$	Premisa
2.- Pa	E. Λ 1	12.- $\neg Pa$	EC. 11
3.- $\forall x \neg Px$		13.- $\forall x \neg Px$	I.V. 12
4.- $\neg Pa$		14.- $\forall x \neg Px \wedge \neg \forall x \neg Px$	IC 13,11
5.- $\Lambda x Px$		15.- $\neg\neg Pa$	IN. 12-14
6.- $Pa \wedge \neg Pa$	IC. 2, 4	16.- Pa	EN. 15
7.- $\neg \Lambda x Px$	IN. 5-6	17.- $\Lambda x Px$	I. Λ . 16
8.- $\neg \Lambda x Px$	E.V 3,4-7		
9.- $\Lambda x Px \wedge \neg \Lambda x Px$	IC. 1,8		
10.- $\neg \forall x \neg Px$	IN. 3-9		

Def. V: DEFINICIÓN DEL PARTICULARIZADOR. [DP.]

$$\frac{Vx Px}{\neg \wedge x \neg Px}$$

Demostración

1.- $Vx Px$	Premisa	11.- $\neg \wedge x \neg Px$	Premisa
2.- $\wedge x \neg Px$		12.- $\neg Vx Px$	
3.- $\neg Pa$	E.Λ. 2	13.- Pa	
4.- Pa		14.- $Vx Px$	I.V 13
5.- $Vx Px$		15.- $Vx Px \wedge \neg Vx Px$	IC. 14,12
6.- $Pa \wedge \neg Pa$	IC. 4,3	16.- $\neg Pa$	EN. 15
7.- $\neg Vx Px$	IN. 5-6	17.- $\wedge x \neg Px$	I.Λ. 16
8.- $\neg Vx Px$	E.V 1,4-7	18.- $\wedge x \neg Px \wedge \neg \wedge x \neg Px$	I.C. 17,11
9.- $Vx Px \wedge \neg Vx Px$	IC. 1,8	19.- $\neg \neg Vx Px$	IN. 12-18
10.- $\neg \wedge x \neg Px$	IN. 3-9	20.- $Vx Px$	E.N. 19

Neg. Λ: NEGACIÓN DEL GENERALIZADOR. [NG.]

$$\frac{\neg \wedge x Px}{Vx \neg Px}$$

Demostración

1.- $\neg \wedge x Px$	Premisa	12.- $Vx \neg Px$	Premisa
2.- $\neg Vx \neg Px$		13.- $\neg Pa$	
3.- $\neg Pa$		14.- $\wedge x Px$	
4.- $Vx \neg Px$	I.V. 3	15.- Pa	E.Λ 14
5.- $Vx \neg Px \wedge \neg Vx \neg Px$	I.C. 4,2	16.- $Pa \wedge \neg Pa$	IC. 15,13
6.- $\neg \neg Pa$	IN. 3-5	17.- $\neg \wedge x Px$	IN. 14-16
7.- Pa	E.N. 6	18.- $\neg \wedge x Px$	E.V. 12, 13-17
8.- $\wedge x Px$	I.Λ.7		
9.- $\wedge x Px \wedge \neg \wedge x Px$	IC. 8,1		
10.- $\neg \neg Vx \neg Px$	IN. 2-9		
11.- $Vx \neg Px$	IN. 3-9		

Neg. V: NEGACIÓN DEL PARTICULARIZADOR. [NP.]

$$\frac{\neg \forall x Px}{\forall x \neg Px}$$

Demostración

1.- $\neg \forall x Px$	Premisa	7.- $\forall x \neg Px$	Premisa
2.- Pa		8.- $\neg Pa$	E. \wedge 7
3.- $\forall x Px$	I.V. 2	9.- $\forall x Px$	
4.- $\forall x \neg Px \wedge \neg \forall x \neg Px$	I.C. 3,1	10.- Pa	E. \wedge 14
5.- $\neg Pa$	IN. 2-4	11.- $\forall x Px$	
6.- $\forall x \neg Px$	I. \wedge 5	12.- $Pa \wedge \neg Pa$	IC. 10-8
		13.- $\neg \forall x \neg Px$	I.N. 11-12
		14.- $\neg \forall x \neg Px$	E.V 9,10-13
		15.- $\forall x \neg Px \wedge \neg \forall x \neg Px$	I.C. 7, 14
		16.- $\neg \forall x Px$	I.N. 9-15