Matrices

Juan Manuel Rivas Castillo

UNMSM

9 de septiembre de 2024

Matrices

- Una matrix es un arreglo rectangular de números denotados por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2k} \\ ... & ... & .... & ... \\ ... & ... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nk} \end{pmatrix}$$

Ingrese la siguiente matriz en Rstudio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

```
A = matrix(c(1,5,6,2,6,8,7,1,8), nrow=3,byrow=TRUE)
```

Matrices

- Un vector fila es una matriz con una sola fila; mientras que un vector columna es una matriz con una sola columna
- La dimensión de una matriz es el número de filas y columnas que esta contiene, si el número de filas es igual all número de columnas se dice que la matriz es cuadrada. Dentro de esta familia de matrices se identifican a las siguientes:
  - La simétrica aquella que es igual a su transpuesta
  - La diagonal aquella cuyos elementos distintos de cero aparecen en la diagonal
  - La escalar los elementos de la diagonal son iguales
  - La identidad los elementos de la diagonal son unos
  - La triángular si los ceros se encuentran por encima de la diagonal es triángular inferior de lo contrario triángular superior

Manipulación de Matrices

- Igualdad de Matrices Dos matrices son iguales si tienen la misma dimensión y los mismos elementos en las posiciones correspondientes $A = B$ si y solo si $a_{ik} = b_{ik}$ para todo i y k

```
A==A; A!=A
A>A; A<A; A>=A; A<=A
A==A & A!=A
A==A | A!=A
```

- Transposición Significa intercambiar filas por columnas. Una matriz es simétrica si es igual a su transpuesta. $(A')' = A$. $(AB)' = B'A'$. La transpuesta de un vector fila es un vector columna.

B = t(A)

Manipulación de Matrices

- Suma de Matrices Para sumar matrices estas deben tener las mismas dimensiones. La matriz cero juega el mismo rol que la suma escalar

$$C = A + B = [a_{ik} + b_{ik}]$$

$$C = A - B = [a_{ik} - b_{ik}]$$

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$(A + B)' = A' + B'$$

Manipulación de Matrices

- Multiplicación de Vectores Para multplicar vectores empleamos producto interno que significa multiplicar filas por columnas $a'b = b'a$
- Multiplicación de Matrices y Multiplicación Escalar Para una matriz A de dimensión n x K y una matriz B de dimensión K x M, el producto matricial C = AB es una matriz de dimensión n x M cuyos elementos se obtienen del producto interno de las filas de A y las columnas de B. Conformables para la multiplicación. La multiplicación de matrices por lo general es no comutativa AB puede existir pero no necesariamente BA, y si existe puede tener diferentes resultados o dimensiones. La multiplicación escalar consiste en multiplicar cada elemento de la matriz por un escalar dado.

Manipulación de Matrices

```
Hallar A + B, 2A y 2A-3B
```

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

```
A = matrix(c(1,-2,3,4,5,-6),nrow=2, byrow=TRUE)
B = matrix(c(3,0,2,-7,1,8), nrow=2, byrow=TRUE)
A+B
2*A
2*A-3*B
```

Manipulación de Matrices

Ingrese la siguiente matriz al Rstudio y multipliquela por la matriz A inicial

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

```
A = matrix(c(1,5,6,2,6,8,7,1,8),nrow=3,byrow=TRUE)
B = matrix(c(2,8,1,0,8,1),nrow=3, byrow=TRUE)
C = A%*%B
```

Algunas reglas generales que se cumplen para la multiplicación de matrices

- Ley Asociativa: $(AB)C = A(BC)$
- Ley Distributiva: $A(B + C) = AB + AC$
- Transpuesta de un Producto: $(AB)' = B'A'$ y $(ABC)' = C'B'A'$

Suma de Valores

Sea un vector i que es una columna de unos, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + ... + x_n = \mathtt{i}'\mathtt{x}$$

Ejercicio 1

Cargar la base de datos Data1.dat en Rstudio en la cual se encuentran 5 columnas (x1, x2, x3, x4 y x5), obtenga el estadístico de suma para x1

```
setwd('F:\\UNMSM\\EI')
Da1 = read.csv('Data1.dat',header=FALSE, sep = "")
Unos = matrix(rep(1,dim(Da1)[1]))
x1 = as.matrix(Da1$V1)
Sx1 = t(Unos)%*%x1
```

Suma de Valores

Si todos los elementos en x son iguales a la misma constante a, entonces $x = ai$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = i'(ai) = a(i'i) = na$$

Para cualquier constante a

$$\sum_{i=1}^{n} ax_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i = ai'x$$

Suma de Valores

Si a $=\frac{1}{n}$ podemos obtener la media arimética

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n} i' x$$

Ejercicio 2

Empleando la base de datos anterior obtenga el promedio para x1

```
1/dim(Da1)[1]*t(Unos) %* %x1
```

Si extendemos este resultados tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x'x; \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x'y$$

Ejercicio 3

Empleando la base de datos anterior obtenga el promedio para x1

```
t(x1) %* %x1; x2 = as.matrix(Da1$V2); t(x1) %* %x2
```

Una Matriz Idempotente Útil

La matriz centrada es aquella que se emplea para transformar una data en sus desviaciones respecto a la media

$$[x - i\overline{x}] = [x - \frac{1}{n} ii'x] = [I - \frac{1}{n} ii']x = M^0 x$$

Matriz de Varianzas y Covarianzas

$$S = \begin{pmatrix} var(X_1) & cov(X_1, X_2) & .... & cov(X_1, X_k) \\ cov(X_2, X_1) & var(X_2) & .... & cov(X_2, X_k) \\ .... & .... & .... & .... \\ cov(X_k, X_1) & cov(X_k, X_2) & .... & cov(X_k, X_k) \end{pmatrix}$$

Esta matriz cuenta con las siguientes características:

- Cuadrada
- Simétrica
- Definida Positiva

Varianzas y Covarianzas

La matriz de varianzas y covarianzas poblacional (S) la obtenemos a partir de la siguiente expresión:

$$S = X' M^0 X$$

Tomar en cuenta que el cálculo con un conjunto de datos nos conduce a trabajar con una matriz de varianzas y covarianzas muestral.

$$S = \frac{1}{n-1} X' M^0 X$$

Ejercicio 4

Empleando la base de datos eurosec.xlsx obtenga la matriz de varianzas y covarianzas

```
eurosec = read_excel("eurosec.xlsx")
X = as.matrix(eurosec[,2:10])
F = dim(X)[1]
C= dim(X)[2]
Unos = matrix(1,F,1)
Mo = diag(F)-1/F*Unos%*%t(Unos)
S = 1/(F-1)*t(X)%*%Mo%*%X
cov(X)
var(X[,1])
```

Matriz de Correlaciones

Un problema que tiene la matriz S es que conserva las unidades de medida de las variables empleadas; por lo que una solución es la de trabajar con la matriz de correlaciones

$$-1 \leq Rho = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} \leq 1$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & Rho(X_1, X_2) & .... & Rho(X_1, X_k) \\ Rho(X_2, X_1) & 1 & .... & Rho(X_2, X_k) \\ .... & .... & .... & .... \\ Rho(X_k, X_1) & Rho(X_k, X_2) & .... & 1 \end{pmatrix}$$

- Esta matriz cuenta con las siguientes características: Cuadrada, Simétrica, Traza de la matriz R = C
- Para obtener la matriz R a partir de la matriz S realizamos la siguiente operación:

$$R = D^{-\frac{1}{2}} S D^{-\frac{1}{2}}$$

Matriz de Correlaciones

Ejercicio 5

Empleando la matriz de covarianzas anterior obtenga la matriz de correlaciones

```
D = diag(S)
for(i in 1: C) {
    D[i]= D[i]^(-1/2)
}
D = diag(D)
D
R = D %*% S %*% D
R
cor(X)
```

Determinante de una Matriz

El determinante de una matriz se define para matrices cuadradas. El determinante de una matriz es no cero si y solo si es de rango completo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$det(A) = ad - bc$$

- A es inversible si y solo si $det(A) \neq 0$
- Si $det(A) \neq 0$, entonces:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Autovalores y Autovectores

Autovalores: Son los valores escalares (λ) que satisfacen la ecuación característica de una matriz (A), es decir, ($A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$). Aquí, ($\mathbf{v}$) es un vector no nulo y (λ) es el autovalor correspondiente.

Autovectores: Son los vectores ($\mathbf{v}$) que, cuando se multiplican por la matriz (A), resultan en un múltiplo escalar de sí mismos, es decir, ($A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$). En otras palabras, la dirección del autovector no cambia tras la transformación por la matriz (A), solo su magnitud se escala por el autovalor (λ).

Ejercicio 6

Empleando la matriz de correlaciones obtenga sus autovalores y autovectores; demuestre que la suma de los mismos es igual a la traza y la multiplicación es igual a su determinante

```
AV = eigen(R)
Autovalores = AV$values
Autovectores = AV$vectors
sum(Autovalores)
sum(diag(Autovalores))
det(R)
prod(Autovalores)
```

Inversa de Matrices

La inversa de una matriz es una matriz que, cuando se multiplica por la matriz original, da como resultado la matriz identidad. Para una matriz (A), su inversa se denota como (A^{-1}) y cumple la siguiente condición:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

donde (I) es la matriz identidad.

Condiciones para que una matriz tenga inversa:

- Debe ser cuadrada: El número de filas y columnas debe ser el mismo.
- Debe ser no singular: Su determinante debe ser diferente de cero ($\det(A) \neq 0$).

Inversa de Matrices

Ejercicio 7

Empleando la base de datos KT.dat y considerando las explicaciones en el archivo readme.txt desarrolle el siguiente cálculo: $(X'X)^{-1}X'Y$, en el que Y es Log Hourly Wage y en X se encuentra una columna de unos y la varaible educación y experiencia

```
KT = read.csv('KT.dat',    header=FALSE, sep = "")
Y = as.matrix(KT[,3])
KT$unos = rep(1,dim(KT)[1])
X = as.matrix(KT[,c(2:4,6) ])
solve(t(X)%*%X)%*%t(X)%*%Y
```