

# Matrices

Juan Manuel Rivas Castillo

UNMSM

9 de septiembre de 2024

# Matrices

- Una `matrix` es un arreglo rectangular de números denotados por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}$$

Ingrese la siguiente matriz en Rstudio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

---

```
A = matrix(c(1,5,6,2,6,8,7,1,8), nrow=3,byrow=TRUE)
```

# Matrices

- Un **vector fila** es una matriz con una sola fila; mientras que un **vector columna** es una matriz con una sola columna
- La **dimensión** de una matriz es el número de filas y columnas que esta contiene, si el número de filas es igual al número de columnas se dice que la matriz es cuadrada. Dentro de esta familia de matrices se identifican a las siguientes:
  - La **simétrica** aquella que es igual a su transpuesta
  - La **diagonal** aquella cuyos elementos distintos de cero aparecen en la diagonal
  - La **escalar** los elementos de la diagonal son iguales
  - La **identidad** los elementos de la diagonal son unos
  - La **triangular** si los ceros se encuentran por encima de la diagonal es triangular inferior de lo contrario triangular superior

# Manipulación de Matrices

- **Igualdad de Matrices** Dos matrices son iguales si tienen la misma dimensión y los mismos elementos en las posiciones correspondientes  $A = B$  si y solo si  $a_{ik} = b_{ik}$  para todo  $i$  y  $k$

---

$A == A$ ;  $A != A$

$A > A$ ;  $A < A$ ;  $A >= A$ ;  $A <= A$

$A == A \ \& \ A != A$

$A == A \ | \ A != A$

---

- **Transposición** Significa intercambiar filas por columnas. Una matriz es simétrica si es igual a su transpuesta.  $(A')' = A$ .  $(AB)' = B'A'$ . La transpuesta de un vector fila es un vector columna.

---

$$B = t(A)$$

# Manipulación de Matrices

- **Suma de Matrices** Para sumar matrices estas deben tener las mismas dimensiones. La matriz cero juega el mismo rol que la suma escalar

$$C = A + B = [a_{ik} + b_{ik}]$$

$$C = A - B = [a_{ik} - b_{ik}]$$

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$(A + B)' = A' + B'$$

# Manipulación de Matrices

- **Multiplicación de Vectores** Para multiplicar vectores empleamos producto interno que significa multiplicar filas por columnas  $a'b = b'a$
- **Multiplicación de Matrices y Multiplicación Escalar** Para una matriz A de dimensión  $n \times K$  y una matriz B de dimensión  $K \times M$ , el producto matricial  $C = AB$  es una matriz de dimensión  $n \times M$  cuyos elementos se obtienen del producto interno de las filas de A y las columnas de B.  
**Conformables para la multiplicación.** La multiplicación de matrices por lo general es no conmutativa  $AB$  puede existir pero no necesariamente  $BA$ , y si existe puede tener diferentes resultados o dimensiones. **La multiplicación escalar** consiste en multiplicar cada elemento de la matriz por un escalar dado.

# Manipulación de Matrices

Hallar  $A + B$ ,  $2A$  y  $2A-3B$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

---

```
A = matrix(c(1,-2,3,4,5,-6),nrow=2, byrow=TRUE)
```

```
B = matrix(c(3,0,2,-7,1,8), nrow=2, byrow=TRUE)
```

```
A+B
```

```
2*A
```

```
2*A-3*B
```

# Manipulación de Matrices

Ingresa la siguiente matriz al Rstudio y multipliquela por la matriz A inicial

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

---

```
A = matrix(c(1,5,6,2,6,8,7,1,8),nrow=3,byrow=TRUE)
B = matrix(c(2,8,1,0,8,1),nrow=3, byrow=TRUE)
C = A %*% B
```

---

Algunas reglas generales que se cumplen para la multiplicación de matrices

- Ley Asociativa:  $(AB)C = A(BC)$
- Ley Distributiva:  $A(B + C) = AB + AC$
- Transpuesta de un Producto:  $(AB)' = B'A'$  y  $(ABC)' = C'B'A'$



# Suma de Valores

Sea un vector  $\mathbf{i}$  que es una columna de unos, entonces:

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n = \mathbf{i}'\mathbf{x}$$



## Ejercicio 1

Cargar la base de datos Data1.dat en Rstudio en la cual se encuentran 5 columnas ( $x_1, x_2, x_3, x_4$  y  $x_5$ ), obtenga el estadístico de suma para  $x_1$

---

```
setwd('F:\\UNMSM\\EI')  
Da1 = read.csv('Data1.dat',header=FALSE, sep = ",")  
Unos = matrix(rep(1,dim(Da1)[1]))  
x1 = as.matrix(Da1$V1)  
Sx1 = t(Unos) %*% x1
```

---

# Suma de Valores

Si todos los elementos en  $x$  son iguales a la misma constante  $a$ , entonces  $x = ai$

$$\sum_{i=1}^n x_i = i'(ai) = a(i' i) = na$$

Para cualquier constante  $a$

$$\sum_{i=1}^n ax_i = a \sum_{i=1}^n x_i = ai'x$$

# Suma de Valores

Si  $a = \frac{1}{n}$  podemos obtener la media arimética

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} i' x$$



## Ejercicio 2

Empleando la base de datos anterior obtenga el promedio para x1

---

```
1/dim(Da1)[1]*t(Unos) %* %x1
```

---

Si extendemos este resultados tenemos:

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = x' x; \sum_{i=1}^n x_i y_i = x' y$$



## Ejercicio 3

Empleando la base de datos anterior obtenga el promedio para x1

---

```
t(x1) %* %x1; x2 = as.matrix(Da1$V2); t(x1) %* %x2
```

---

# Una Matriz Idempotente Útil

La matriz centrada es aquella que se emplea para transformar una data en sus desviaciones respecto a la media

$$[x - i\bar{x}] = [x - \frac{1}{n}ii'x] = [I - \frac{1}{n}ii']x = M^0x$$

## Matriz de Varianzas y Covarianzas

$$S = \begin{pmatrix} \text{var}(X_1) & \text{cov}(X_1, X_2) & \dots & \text{cov}(X_1, X_k) \\ \text{cov}(X_2, X_1) & \text{var}(X_2) & \dots & \text{cov}(X_2, X_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{cov}(X_k, X_1) & \text{cov}(X_k, X_2) & \dots & \text{cov}(X_k, X_k) \end{pmatrix}$$

Esta matriz cuenta con las siguientes características:

- Cuadrada
- Simétrica
- Definida Positiva

# Varianzas y Covarianzas

La matriz de varianzas y covarianzas poblacional ( $S$ ) la obtenemos a partir de la siguiente expresión:

$$S = X' M^0 X$$

Tomar en cuenta que el cálculo con un conjunto de datos nos conduce a trabajar con una matriz de varianzas y covarianzas muestral.

$$S = \frac{1}{n-1} X' M^0 X$$



## Ejercicio 4

Empleando la base de datos eurosec.xlsx obtenga la matriz de varianzas y covarianzas

```
eurosec = read_excel("eurosec.xlsx")
X = as.matrix(eurosec[,2:10])
F = dim(X)[1]
C = dim(X)[2]
Unos = matrix(1,F,1)
Mo = diag(F) - 1/F * Unos %*% t(Unos)
S = 1/(F-1) * t(X) %*% Mo %*% X
cov(X)
var(X[,1])
```

# Matriz de Correlaciones

Un problema que tiene la matriz S es que conserva las unidades de medida de las variables empleadas; por lo que una solución es la de trabajar con la matriz de correlaciones

$$-1 \leq Rho = \frac{cov(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} \leq 1$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & Rho(X_1, X_2) & .... & Rho(X_1, X_k) \\ Rho(X_2, X_1) & 1 & .... & Rho(X_2, X_k) \\ ..... & ..... & .... & ..... \\ Rho(X_k, X_1) & Rho(X_k, X_2) & .... & 1 \end{pmatrix}$$

- Esta matriz cuenta con las siguientes características:  
Cuadrada, Simétrica, Traza de la matriz  $R = C$
- Para obtener la matriz R a partir de la matriz S realizamos la siguiente operación:

$$R = D^{-\frac{1}{2}} S D^{-\frac{1}{2}}$$

# Matriz de Correlaciones



## Ejercicio 5

Empleando la matriz de covarianzas anterior obtenga la matriz de correlaciones

---

```
D = diag(S)
for(i in 1: C) {
  D[i]= D[i]^(-1/2)
}
D = diag(D)
D
R = D %* %S %* %D
R
cor(X)
```

---

# Determinante de una Matriz

El determinante de una matriz se define para matrices cuadradas. El determinante de una matriz es no cero si y solo si es de rango completo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = ad - bc$$

- A es inversible si y solo si  $\det(A) \neq 0$
- Si  $\det(A) \neq 0$ , entonces:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$



# Autovalores y Autovectores

**Autovalores:** Son los valores escalares ( $\lambda$ ) que satisfacen la ecuación característica de una matriz ( $A$ ), es decir,  $(A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v})$ . Aquí, ( $\mathbf{v}$ ) es un vector no nulo y ( $\lambda$ ) es el autovalor correspondiente.

**Autovectores:** Son los vectores ( $\mathbf{v}$ ) que, cuando se multiplican por la matriz ( $A$ ), resultan en un múltiplo escalar de sí mismos, es decir,  $(A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v})$ . En otras palabras, la dirección del autovector no cambia tras la transformación por la matriz ( $A$ ), solo su magnitud se escala por el autovalor ( $\lambda$ ).



## Ejercicio 6

Empleando la matriz de correlaciones obtenga sus autovalores y autovectores; demuestre que la suma de los mismos es igual a la traza y la multiplicación es igual a su determinante

---

```
AV = eigen(R)
Autovalores = AV$values
Autovectores = AV$vectors
sum(Autovalores)
sum(diag(Autovalores))
det(R)
prod(Autovalores)
```

---

# Inversa de Matrices

La inversa de una matriz es una matriz que, cuando se multiplica por la matriz original, da como resultado la matriz identidad. Para una matriz ( $A$ ), su inversa se denota como ( $A^{-1}$ ) y cumple la siguiente condición:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

donde ( $I$ ) es la matriz identidad.

Condiciones para que una matriz tenga inversa:

- Debe ser cuadrada: El número de filas y columnas debe ser el mismo.
- Debe ser no singular: Su determinante debe ser diferente de cero ( $\det(A) \neq 0$ ).

# Inversa de Matrices



## Ejercicio 7

Empleando la base de datos KT.dat y considerando las explicaciones en el archivo readme.txt desarrolle el siguiente cálculo:  $(X'X)^{-1}X'Y$ , en el que Y es Log Hourly Wage y en X se encuentra una columna de unos y la variable educación y experiencia

---

```
KT = read.csv('KT.dat', header=FALSE, sep = ",")
Y = as.matrix(KT[,3])
KT$unos = rep(1,dim(KT)[1])
X = as.matrix(KT[,c(2:4,6)])
solve(t(X) %* %X) %* %t(X) %* %Y
```

---