Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.
Métodos Numéricos

Tarea 12

José Miguel Saavedra Aguilar

Resumen

En esta tarea se presenta el método de integración por cuadratura Gaussiana.

1. Metodología

1.1. Cuadratura Gaussiana

Sea $w : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función de peso continua y positiva tal que $\int_a^b w(x)\,\mathrm{d}x$ existe. Una fórmula de cuadratura

$$\int_a^b w(x)f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} a_k f(x_k)$$

se dice que es una cuadratura Gaussiana si integra polinomios de grado P_{2n+1} exactamente[1]. En nuestro caso, nos centraremos en la cuadratura de Gauss-Legendre, con función de peso:

$$w(x) = 1, x \in [-1, 1]$$

Para la cuadratura de Gauss-Legendre, no existe una fórmula cerrada para los pesos $a_0, \ldots, a_n$ ni para los puntos de cuadratura $x_0, \ldots, x_n$, sin embargo, pueden obtenerse resolviendo el sistema:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_k^i = \int_{-1}^{1} x^i\,\mathrm{d}x, \qquad i = 0, \ldots, 2n+1$$

Por ejemplo, para $n = 0$,

$$a_0 = 2 \qquad x_0 = 0$$

para $n = 1$,

$$a_0 = 1 \qquad x_0 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$$a_1 = 1 \qquad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

y para $n = 2$,

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{5}{9} & x_0 &= \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \\
a_0 &= \frac{8}{9} & x_1 &= 0 \\
a_2 &= \frac{5}{9} & x_2 &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ integrable. La integral de f puede expresarse por:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} f(x(u))\,\mathrm{d}u \\
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} f\left(a + \frac{(b-a)(u+1)}{2}\right)\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

De forma que podemos aproximar $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ por cuadraturas de Gauss-Legendre por la siguiente fórmula:

$$
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2} \sum_{k=0}^{n} a_k f\left(a + \frac{(b-a)(x_k+1)}{2}\right)
$$

Si dividimos el intervalo $[a, b]$ en $m + 1$ intervalos equidistantes, definimos $h = \frac{b-a}{m}$, una vez que se cumple

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{j=0}^{m} \int_{a+(j-1)h}^{a+jh} \\
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{j=0}^{m} \frac{h}{2} \int_{-1}^{1} f\left(a + \frac{h}{2}(u + 2j - 1)\right)\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

Obtenemos una cuadratura de Gauss-Legendre compuesta:

$$
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{m} \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{n} f\left(a + \frac{h}{2}(x_k + 2j - 1)\right) + \mathcal{O}(h^{2n})
$$

2. Pseudocódigo

Algoritmo 1: Integral por el cuadratura de Gauss-Legendre.

Entrada: f, a, b, n, m

Salida: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

$h \leftarrow \frac{b-a}{m}$;

$I \leftarrow 0$;

para $i = 0$ ***hasta*** m **hacer**

  para $k = 0$ ***hasta*** n **hacer**

    $I \leftarrow I + \frac{h}{2} f\left(a + \frac{h}{2}(x_k + 2j - 1)\right)$;

  fin

fin

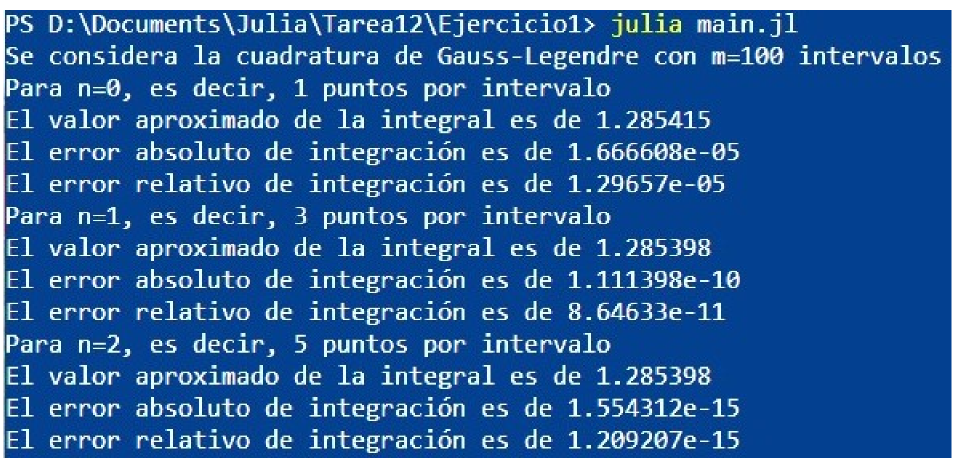
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leftarrow I$;

3. Algoritmos

Para ejecutar los algoritmos simplemente se debe correr la siguiente linea desde la Terminal:

```
julia main.jl
```

desde la carpeta del problema. A continuación se muestra la ejecución del algoritmo de esta tarea.



```
PS D:\Documents\Julia\Tarea12\Ejercicio1> julia main.jl
Se considera la cuadratura de Gauss-Legendre con m=100 intervalos
Para n=0, es decir, 1 puntos por intervalo
El valor aproximado de la integral es de 1.285415
El error absoluto de integración es de 1.666608e-05
El error relativo de integración es de 1.29657e-05
Para n=1, es decir, 3 puntos por intervalo
El valor aproximado de la integral es de 1.285398
El error absoluto de integración es de 1.111398e-10
El error relativo de integración es de 8.64633e-11
Para n=2, es decir, 5 puntos por intervalo
El valor aproximado de la integral es de 1.285398
El error absoluto de integración es de 1.554312e-15
El error relativo de integración es de 1.209207e-15
```

Figura 1: Ejecución del algoritmo 1 para (1) con $m = 100$ intervalos equiespaciados.

4. Resultados

Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

en el dominio $[-1, 1]$, cuya integral está dada por:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi + 2}{4} \tag{1}$$

Se aproxima la integral $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ por cuadratura de Gauss-Legendre por $m = 10$, $m = 100$ y $m = 1000$ intervalos equiespaciados y $n = 0, 1, 2$ puntos por intervalo. Los resultados se presentan en la tabla 1, los errores absolutos de aproximación en la tabla 2 y los errores relativos en la tabla 3.

m	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
10	1.287059	1.285399	1.285398
100	1.285415	1.285398	1.285398
1000	1.285398	1.285398	1.285398

Tabla 1: Aproximación de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ por cuadratura de Gauss-Legendre

m	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
10	1.66071E-03	1.13867E-06	1.84738E-09
100	1.66661E-05	1.11140E-10	1.55431E-15
1000	1.66667E-07	8.88178E-15	3.99680E-15

Tabla 2: Error absoluto de aproximación de las aproximaciones de la tabla 1

m	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
10	1.29198E-03	8.85849E-07	1.43720E-09
100	1.29657E-05	8.64633E-11	1.20921E-15
1000	1.29662E-07	6.90975E-15	3.10939E-15

Tabla 3: Error relativo de aproximación de las aproximaciones de la tabla 1

5. Conclusiones

El método de integración por cuadratura gaussiana tiene como mayor ventaja respecto a los métodos de integración estudiados en las tareas anteriores el menor número de evaluaciones de la función que se desea integrar, mientras que los resultados son comparables con la cuadratura de Newton-Cotes.

Referencias

[1] R. Kress, *Numerical Analysis.* Springer New York, 1998. [Online]. Available: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0599-9