Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.
Métodos Numéricos

CIMAT

Tarea 09

José Miguel Saavedra Aguilar

Resumen

En esta tarea se exploran de interpolación por medio de Splines de continuidad 0, 1, y 2. Se compara el efecto del número de puntos interpolados y se compara con los métodos de interpolación por polinomios.

1. Metodología

1.1. Splines

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea $x_0, \ldots, x_n$. La interpolación por medio de Splines consiste en aproximar f por medio de una función $s(x)$ suma de funciones s_i llamadas *splines* tales que $s_i(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus [x_i, x_{i+1}]$ para $i = 0, \ldots, n-1$, es decir:

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n-1} s_i(x) \tag{1}$$

1.1.1. Splines lineales

Los splines lineales, o de continuidad $c = 0$ consiste en que los splines s_i sean una recta entre los puntos $(x_i, f(x_i))$ y $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Entonces, s_i está dado por:

$$s_i(x) = \begin{cases} f(x_i) + \frac{t_i}{h_i}(x - x_i), & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \text{E.O.C.} \end{cases} \tag{2}$$

donde $h_i = x_{i+1} - x_i$ y $t_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$. Nótese que $s_i(x_i) = f(x_i)$ y $s_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$.

1.1.2. Splines cuadráticos

Los splines cuadráticos, o de continuidad $c = 1$ consisten en que los splines s_i sean polinomios cuadráticos tales que $s_i(x_i) = f(x_i)$ cuya derivada sea una función continua que coincida $s_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}'(x_{i+1})$, de forma que $s(x)$ sea clase $C^1([x_0, x_n])$. Así, tenemos que para $x \in [x_i, x_{i+1}]$:

$$
\begin{aligned}
s_i(x) &= a_i(x-x_i)^2 + b_i(x-x_i) + f(x_i) \\
s_i'(x) &= 2a_i(x-x_i) + b_i
\end{aligned}
$$

Si llamamos $S_i' := s_i'(x_i)$, tenemos $b = S_i^{prime}$ y la condición deseada es:

$$
\begin{aligned}
s_i'(x_{i+1}) &= S_{i+1}' \\
2a_ih_i + S_i' &= S_{i+1}' \\
\implies a_i &= \frac{S_{i+1}' - S_i'}{2h_i}
\end{aligned}
$$

Por lo que los splines cuadráticos están dados por:

$$
s_i(x) = \begin{cases} f(x_i) + S_i'(x-x_i) + \frac{S_{i+1}'-S_i'}{2h_i}(x-x_i)^2, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \text{E.O.C.} \end{cases} \tag{3}
$$

Una vez que $s(x)$ es construida de clase $C^1([x_0, x_n])$, debe ser continua en x_{i+1}, es decir:

$$
\begin{aligned}
s_i(x_{i+1}) &= s_{i+1}(x_{i+1}) \\
f(x_i) + S_i'h_i + \frac{S_{i+1}' - S_i'}{2h_i}(h_i)^2 &= f(x_i+1) \\
\left(S_i' + \frac{S_{i+1}' - S_i'}{2}\right) h_i &= t_i \\
\left(\frac{S_{i+1}' + S_i'}{2}\right) h_i &= t_i
\end{aligned}
$$

Así, obtenemos el sistema $AS' = b$, donde:

$$
A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h_0 & h_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_1 & h_1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & h_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{n-1} \end{pmatrix} \tag{4}
$$

Este sistema tiene $n-1$ ecuaciones y n incógnitas, de forma que debemos agregar alguna condición lineal sobre S', por ejemplo, $S_i' = f'(x_i)$.

1.1.3. Splines cúbicos

Los splines cúbicos, o de continuidad $c = 2$ consisten en que los splines s_i sean polinomios cúbicos cuya segunda derivada evaluada en x_i coincida con el valor S_i'' y evaluada en x_{i+1}

con S''_{i+1}, de forma que $s(x)$ sea clase $C^2([x_0, x_n])$. Así, tenemos que para $x \in [x_i, x_{i+1}]$:

$$\begin{aligned}
s''_i(x) &= S''_i \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + S''_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i} \\
s'_i(x) &= -S''_i \frac{(x_{i+1} - x)^2}{2h_i} + S''_{i+1} \frac{(x - x_i)^2}{2h_i} + a_i \\
s_i(x) &= S''_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + S''_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + a_i x + b_i
\end{aligned}$$

Una vez que deseamos que $s(x)$ sea continua, se tiene:

$$\begin{aligned}
s_i(x_i) &= f(x_i) \\
S''_i \frac{(h_i)^2}{6} + a_i x_i + b_i &= f(x_i)
\end{aligned}$$

Igualmente,

$$\begin{aligned}
s_i(x_{i+1}) &= f(x_{i+1}) \\
S''_{i+1} \frac{(h_i)^2}{6} + a_i x_{i+1} + b_i &= f(x_{i+1})
\end{aligned}$$

De esta forma,

$$\begin{aligned}
(S''_{i+1} - S''_i) \frac{(h_i)^2}{6} + a_i h_i = f(x_{i+1}) - f(x_i) &= t_i \\
a_i h_i &= t_i - (S''_{i+1} - S''_i) \frac{(h_i)^2}{6} \\
a_i &= \frac{t_i}{h_i} - (S''_{i+1} - S''_i) \frac{h_i}{6}
\end{aligned}$$

Sustituyendo a_i,

$$\begin{aligned}
f(x_i) &= S''_i \frac{(h_i)^2}{6} + \left(\frac{t_i}{h_i} - (S''_{i+1} - S''_i) \frac{h_i}{6} \right) x_i + b_i \\
b_i &= f(x_i) - S''_i \frac{(h_i)^2}{6} - \left(\frac{t_i}{h_i} - (S''_{i+1} - S''_i) \frac{h_i}{6} \right) x_i
\end{aligned}$$

Sustituyendo a_i y b_i en $s_i(x)$, tenemos

$$\begin{aligned}
s_i(x) = S''_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + S''_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + \\
\left(\frac{f(x_{i+1})}{h_i} - S'_{i+1} \frac{h_i}{6} \right) (x - x_i) + \left(\frac{f(x_i)}{h_i} - S'_i \frac{h_i}{6} \right) (x_{i+1} - x)
\end{aligned} \tag{5}$$

Ahora, evaluando para que $s(x)$ sea clase $C^2([x0, x_n])$, tenemos que $s'_i(x_{i+1}) = s'_{i+1}(x_{i+1})$, de forma que:

$$\begin{aligned}
s'_i(x_{i+1}) &= S''_{i+1} \frac{h_i}{3} + \frac{t_i}{h_i} + S''_i \frac{h_i}{6} \\
s'_{i+1}(x_{i+1}) &= -S''_{i+1} \frac{h_{i+1}}{3} + \frac{t_{i+1}}{h_{i+1}} - S''_{i+2} \frac{h_{i+1}}{6}
\end{aligned}$$

De forma que tenemos la siguiente ecuación para $i = 0, \dots, n-2$.

$$S_i'' \frac{h_i}{6} + S_{i+1}'' \left(\frac{h_i}{3} + \frac{h_{i+1}}{3} \right) + S_{i+2}'' \frac{h_{i+1}}{6} = \frac{t_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{t_i}{h_i} \tag{6}$$

Esto forma el sistema $AS'' = b$, donde:

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & h_{n-1} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \frac{t_1}{h_1} - \frac{t_0}{h_0} \\ \frac{t_2}{h_2} - \frac{t_1}{h_1} \\ \frac{t_3}{h_3} - \frac{t_2}{h_2} \\ \vdots \\ \frac{t_n}{h_n} - \frac{t_{n-1}}{h_{n-1}} \end{pmatrix} \tag{7}$$

Para resolver este sistema, es necesario dar dos condiciones lineales sobre S'', por ejemplo $S_i'' = f''(x_i)$ y $S_j'' = f''(x_j)$ para $i \neq j$.

2. Pseudocódigo

Algoritmo 1: Cálculo de splines de continuidad $c = 0$.

Entrada: z, x, y
Salida: $s(z)$
para $k = 1, \dots, m$ **hacer**
  Determinar i tal que $z_k \in [x_i, x_{i+1})$;
  $s(z_k) \leftarrow y_i + \frac{t_i}{h_i}(z_k - x_i)$;
fin

Algoritmo 2: Cálculo de splines de continuidad $c = 1$.

Entrada: $z, x, y, f'(x_j)$
Salida: $s(z)$
Construir A, b como en (4);
Añadir la ecuación $S_j^{prime} = f'(x_j)$;
Resolver $AS' = b$;
para $k = 1, \dots, m$ **hacer**
  Determinar i tal que $z_k \in [x_i, x_{i+1})$;
  $s(z_k) = y_i + S_i'(z_k - x_i) + \frac{S_{i+1}' - S_i'}{2h_i}(z_k - x_i)^2$
fin

Algoritmo 3: Cálculo de splines de continuidad $c = 2$.

Entrada: $z, x, y, f'(x_a), f'(x_b)$
Salida: $s(z)$
Construir A, b como en (7);
Añadir la ecuación $S_a^{prime} = f'(x_a)$;
Añadir la ecuación $S_b^{prime} = f'(x_b)$;
Resolver $AS' = b$;
para $k = 1, \ldots, m$ **hacer**
  Determinar i tal que $z_k \in [x_i, x_{i+1})$;
  $s(z_k) = S_i'' \frac{(x_{i+1} - z_k)^3}{6h_i}$;
  $s(z_k) += S_{i+1}'' \frac{(z_k - x_i)^3}{6h_i}$;
  $s(z_k) += \left(\frac{f(x_{i+1})}{h_i} - S_{i+1}' \frac{h_i}{6}\right)(z_k - x_i)$ $s(z_k) += \left(\frac{f(x_i)}{h_i} - S_i' \frac{h_i}{6}\right)(x_{i+1} - z_k)$
fin

3. Algoritmos

Previo a la ejecución de los algoritmos se debe correr una vez:

```
julia runFirst.jl
```

Para asegurar tener instaladas las librerías `Plots.jl` y `LaTeXStrings`, por lo que si se instalaron la semana pasada, hacer caso omiso a la instrucción anterior.
Para ejecutar los algoritmos simplemente se debe correr la siguiente linea desde la Terminal:

```
julia main.jl
```

desde la carpeta del problema. A continuación se muestra la ejecución de los algoritmos para los problemas de la tarea.

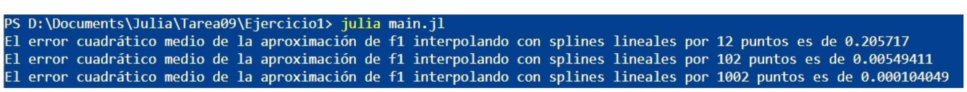


Figura 1: Ejecución del algoritmo 1

Figura 2: Ejecución del algoritmo 2

```
PS D:\Documents\Julia\Tarea09\Ejercicio3> julia main.jl
El error cuadrático medio de la aproximación de f1 interpolando con splines cúbicos por 12 puntos es de 0.532628
El error cuadrático medio de la aproximación de f1 interpolando con splines cúbicos por 102 puntos es de 0.000241111
El error cuadrático medio de la aproximación de f1 interpolando con splines cúbicos por 1002 puntos es de 1.10585e-07
```

Figura 3: Ejecución del algoritmo 3

```
PS D:\Documents\Julia\Tarea09\Ejercicio4> julia main.jl
El error cuadrático medio de la aproximación de f1 interpolando con polinomio de grado 29 es de 122.704
El error cuadrático medio de la aproximación de f1 interpolando con polinomio de Lagrange por 30 puntos es de 0.073735
El error cuadrático medio de la aproximación de f1 interpolando con polinomio de Newton por 30 puntos es de 0.000987703
El error cuadrático medio de la aproximación de f1 interpolando con splines lineales por 30 puntos es de 0.12454
El error cuadrático medio de la aproximación de f1 interpolando con splines cuadráticos por 30 puntos es de 0.0830426
El error cuadrático medio de la aproximación de f1 interpolando con splines cúbicos por 30 puntos es de 0.0657024
```

Figura 4: Ejecución del ejercicio 4

4. Resultados

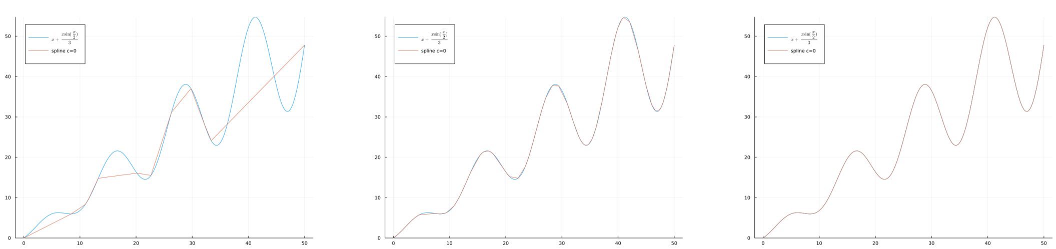
Se considera la función:

$$f(x) = x + \frac{x \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{3}$$

en el intervalo $[0, 50]$. Se aproxima por medio de Splines de continuidad $c = 0$, $c = 1$ y $c = 2$. Para verificar el funcionamiento, se consideran $n = 12$, $n = 102$ y $n = 1002$ puntos por los que se interpola, donde $n - 2$ puntos son aleatorios, y los 2 restantes son $x_0 = 0$ y $x_n = 50$. El Error Cuadrático Medio de cada uno de los casos se encuentra en la tabla 1. Las interpolaciones resultantes se encuentran en las figuras 5, 6 y 7.

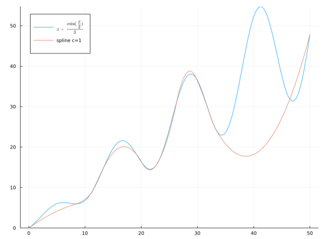
n	$c = 0$	$c = 1$	$c = 2$
12	2.05717E-01	3.59233E-01	5.32628E-01
102	5.49411E-03	3.72832E-03	2.41111E-04
1002	1.04049E-04	1.18041E-05	1.10585E-07

Tabla 1: Resultados para splines de $f(x)$ de continuidad $c = 0$, $c = 1$ y $c = 2$

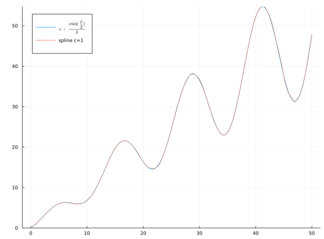


(a) $m = 12$ (b) $m = 102$ (c) $m = 1002$

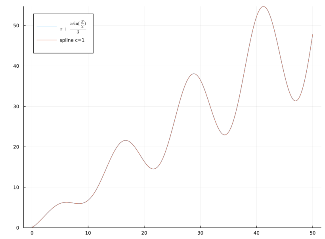
Figura 5: Mínimos cuadrados de f_1 para distintos valores de m



(a) $m = 12$

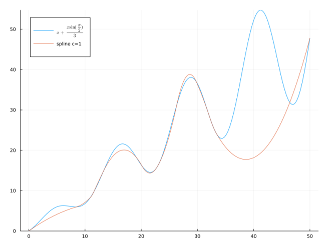


(b) $m = 102$

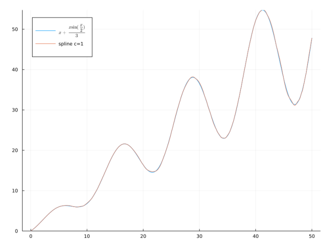


(c) $m = 1002$

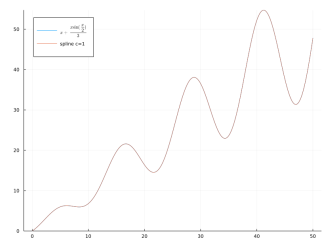
Figura 6: Mínimos cuadrados de f_1 para distintos valores de m



(a) $m = 12$



(b) $m = 102$



(c) $m = 1002$

Figura 7: Mínimos cuadrados de f_1 para distintos valores de m

Ahora, se comparan todos los métodos de interpolación estudiados en la Tarea 08 y los splines de continuidad $c = 0$, $c = 1$ y $c = 2$ para la interpolación de $f(x)$ en 30 puntos, 28 aleatorios uniformes en (0,50) y los extremos $x_0 = 50$ y $x_{30} = 50$. Las interpolaciones se muestran en la Figura 8 y el Error Cuadrático Medio de cada uno de los algoritmos en 2.

Método	ECM
Polinomio Interpolado	1.22704E+02
Polinomio de Lagrange	7.37350E-02
Polinomio de Newton	9.87703E-04
Splines $c = 0$	1.24540E-01
Splines $c = 1$	8.30426E-02
Splines $c = 2$	6.57024E-02

Tabla 2: ECM de los métodos para interpolar $f(x)$ con $n = 30$

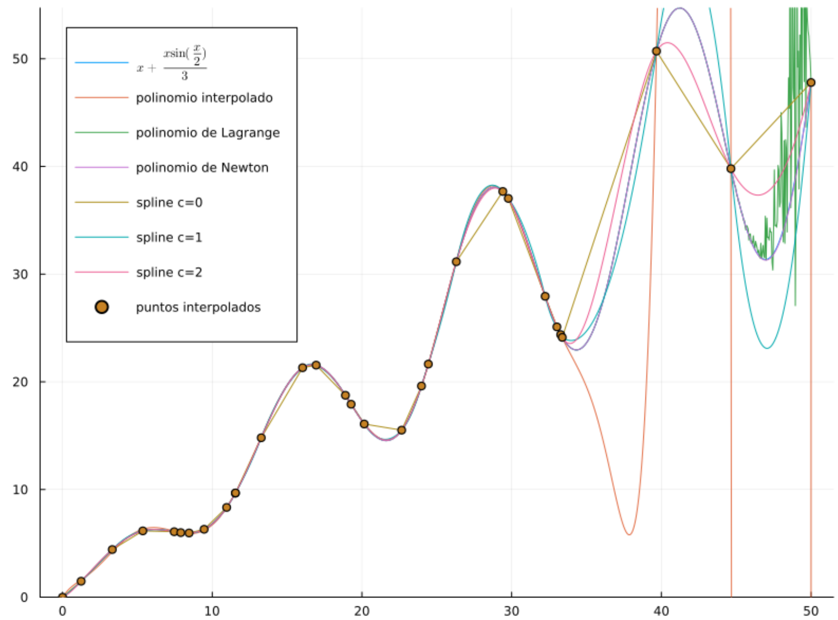


Figura 8: Métodos para interpolar $f(x)$ con $n = 30$

5. Conclusiones

Notamos que en contraste con los algoritmos de interpolación por polinomios, los Splines se benefician por tener muchos puntos. Así mismo, notamos que tomar puntos aleatorios no es óptimo, pues en este caso la concentración de los puntos es mayor en $(0, 35)$, lo que genera un buen ajuste en este intervalo, y malo en $(35, 50)$. Notamos que los métodos de polinomios interpolados y polinomio de Lagrange son los que tienen mayor error con respecto a la función $f(x)$, como se espera según se indica en [1]. Los splines tienen mayor ECM debido a la baja densidad de puntos en $(35, 50)$, sin embargo, si aumentamos el número de puntos interpolados, los splines reducen el ECM, mientras que los polinomios tendrán mayores oscilaciones, lo que resulta en mayor Error.

Referencias

[1] R. Kress, *Numerical Analysis.* Springer New York, NY, 12 2012.