CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.
Métodos Numéricos

Tarea 06

José Miguel Saavedra Aguilar

Resumen

En esta tarea se explora el método de Jacobi para encontrar los eigenvalores y eigenvectores de una matriz.

1. Introducción

Recordamos la matriz para la aproximación por diferencias finitas de n nodos del problema parabólico, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dada por:

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

donde $h = \frac{1}{n+1}$.

2. Metodología

2.1. Método de Jacobi

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica. El teorema de Factorización Espectral nos indica que existen $Q, \lambda \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con Q ortogonal y Λ diagonal tales que $A = Q\Lambda Q^\top$. En el método de Jacobi

se aproxima $Q \approx R_m R_{m-1} \dots R_1$ con R_i matrices de rotación de la forma:

$$R_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cos(\theta_m) & \cdots & \sin(\theta_m) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\sin(\theta_m) & \cdots & \cos(\theta_m) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

De forma que si (j,k) es la entrada absolutamente más grande de $L_i = R_i \dots R_1 A R_1^\top \dots R_i^\top$, la entrada (j,k) de $R_{i+1} L_i R_{i+1}^\top$ sea cero. Para este fin notamos[1] que las entradas de $RLR^\top$ están dadas por:

$$\begin{aligned} RLR^\top_{j,j} &= L_{j,j}\cos^2(\theta) + L_{j,k}\sin(2\theta) + L_{k,k}\sin^2(\theta) \\ RLR^\top_{k,k} &= L_{j,j}\sin^2(\theta) - L_{j,k}\sin(2\theta) + L_{k,k}\cos^2/\theta) \\ RLR^\top_{j,k} &= L_{j,k}\cos(2\theta) + \frac{1}{2}(L_{k,k} - L_{j,j})\sin(2\theta) \\ RLR^\top_{l,j} &= L_{l,j}\cos(\theta) + L_{l,k}\sin(\theta), l \neq j,k \\ RLR^\top_{l,k} &= -L_{l,j}\sin(\theta) + L_{l,k}\cos(\theta), l \neq j,k \\ RLR^\top_{l,h} &= -L_{l,h}, l,h \neq j,k \end{aligned}$$

Entonces, $\theta_i = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2L_{j,k}}{L_{j,j}-L_{k,k}}\right)$. Cuando L_m es diagonal, $Q = R_m R_{m-1} \dots R_1$ y $\Lambda = L_m$.

3. Resultados

3.1. Pseudocódigo

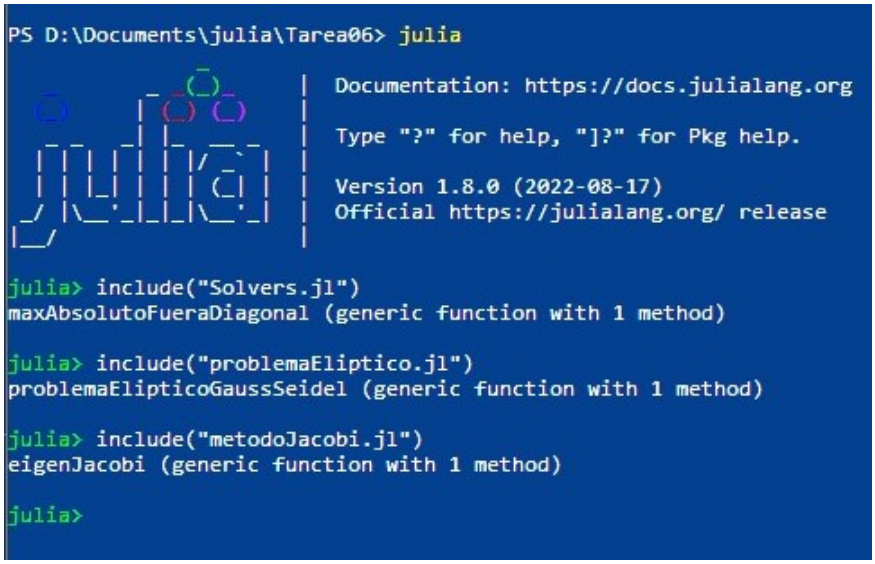
Algoritmo 1: Método de la Potencia

Entrada: $A, maxIter, tol$
Salida: P, Λ

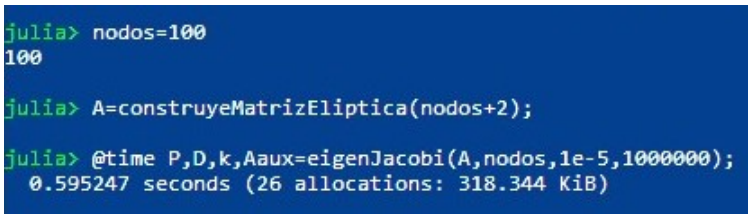
$L^0 \leftarrow A$;
$B^0 \leftarrow I$;
$j, k \leftarrow \text{argmáx}\left\{\left|L^0_{l,h}\right| : l \neq h\right\}$;
$\theta_1 \leftarrow \frac{1}{2}\text{arctan2}\left(\frac{2L^0_{j,k}}{L^0_{j,j}-L^0_{k,k}}\right)$;
$i \leftarrow 1$;
mientras $i < maxIter$ **y** $|L_{j,k}| > tol$ **hacer**
    $R^{i+1} \leftarrow \text{Rot}(\theta_i, j, k)$;
    $L^{i+1} \leftarrow {R^{i+1}}^\top L^i R^{i+1}$;
    $B^{i+1} \leftarrow R^{i+1} B^i$;
    $j, k \leftarrow \text{argmáx}\left\{\left|L^{i+1}_{l,h}\right| : l \neq h\right\}$;
    $\theta_i \leftarrow \frac{1}{2}\text{arctan2}\left(\frac{2L^{i+1}_{j,k}}{L^{i+1}_{j,j}-L^{i+1}_{k,k}}\right)$;
    $i \leftarrow i + 1$;
fin
$P \leftarrow$;
$\lambda_n \leftarrow \lambda$;

3.2. Algoritmos

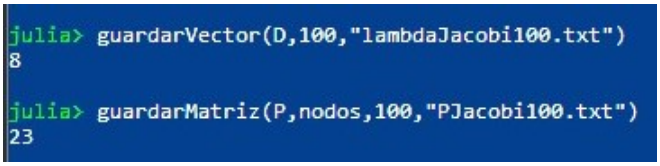
Para la ejecución de los algoritmos, debemos ejecutar `julia` desde la carpeta donde se encuentren los archivos `metodoJacobi.jl`, `Solvers.jl` y `problemaEliptico.jl`. Una vez en julia, debemos incluir estos archivos.



Posteriormente, debemos crear una matriz. En nuestro caso, tomamos la matriz del problema elíptico para 100 nodos $A \in \mathbb{R}^{100\times 100}$. Vamos a obtener los eigenpares con el método de Jacobi.



Finalmente, guardamos la matriz P y los eigenvalores Λ de A.



3.3. Problemas de la tarea

A forma de prueba, se utilizó el método de Jacobi generalizados para obtener todos los eigenpares de (1) para $n = 100$. Los resultados se encuentran en la tabla 1. Los parámetros utilizados son $tol = 10^{-10}$ y $maxIter = 150000$.

n	$\lvert\lambda_i - \tilde{\lambda}_i\rvert$	$\lVert v_i - \tilde{v}_i \rVert_2$
1	5.77494×10^{-12}	1.31562×10^{-13}
1000	7.27596×10^{-11}	1.92087×10^{-12}
peor caso	4.29281×10^{-10}	2.11823×10^{-12}
mejor caso	0	6.89577×10^{-15}

Tabla 1: Error de aproximación para los eigenpares de (1) para $n = 100$

Así mismo, se obtuvieron los eigenpares de (1) para $n = 1000$. Se presentan los errores de aproximación en la tabla 2. Para esta matriz, los parámetros utilizados son $tol = 10^{-5}, maxIter = 8000000$.

n	$\lvert\lambda_i - \tilde{\lambda}_i\rvert$	$\lVert v_i - \tilde{v}_i \rVert_2$
1	3.87777×10^{-10}	7.01244×10^{-8}
1000	3.11993×10^{-8}	1.46764×10^{-6}
peor caso	1.93715×10^{-7}	1.46764×10^{-6}
mejor caso	0	1.69453×10^{-9}

Tabla 2: Error de aproximación para los eigenpares de (1) para $n = 1000$

4. Conclusiones

Notamos que el método de Jacobi para encontrar los eigenpares de la matriz dada en (1) no es tan preciso como otros métodos, como el de la potencia o potencia inversa, además que para el caso $n = 1000$ no es práctico en términos de tiempo, pues el número de rotaciones necesarias crece de forma que toma horas para converger. Sin embargo, para matrices pequeñas funciona bien y las iteraciones necesarias son relativamente pocas. Esto se refleja en las tablas 1 y 1, donde notamos que para $n = 100$, en menos de 150000 iteraciones converge para $tol = 10^{-10}$, mientras que para $n = 1000$ en 8000000 de iteraciones no logra converger a $tol < 10^{-5}$, tomando además un tiempo impráctico.

Referencias

[1] R. Kress, *Numerical Analysis*. Springer New York, NY, 12 2012.