



Tarea 10

José Miguel Saavedra Aguilar

Resumen

En esta tarea se explora el método de interpolación por medio de Elementos Finitos y el método de integración en regiones simples por Monte Carlo.

1. Metodología

1.1. Elementos Finitos

Sea $x, y \in \mathbb{R}^m$ observaciones tales que $x_i \in (a, b)$ y sea $w \in \mathbb{R}^n$ una partición de $[a, b]$. El método de elementos finitos consiste en aproximar $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $y_i \approx f(x_i)$ considerando que y_i tiene un error de observación. Sea $N(\xi)$ tal que $N(\xi) = 0$ para todo ξ tal que $|\xi| > 1$, entonces la aproximación por elementos finitos de f está dada por:

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^n N_i(x) \phi_i \quad (1)$$

Donde $N_i(x)$ es $N(\xi_i(x))$.

1.1.1. Elementos finitos lineales

En este caso, tomaremos $N(\xi)$ de la siguiente forma:

$$N(\xi) = \begin{cases} \frac{1-|\xi|}{2}, & \xi \in [-1, 1] \\ 0, & \text{E.O.C.} \end{cases} \quad (2)$$

Y $\xi_i(x)$ está definida implícitamente por la ecuación:

$$x = \frac{w_{i+1} + w_i}{2} + \frac{w_{i+1} - w_i}{2} \xi_i \quad (3)$$

Nótese que $\xi_i(x) \in [-1, 1]$ si y solamente si $x \in [w_i, w_{i+1}]$, de forma que $N_p(x) = 0$ para todo $p \notin \{i, i+1\}$.

Para encontrar $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)^\top$, definimos una función de error con penalización para los valores observados (x_k, y_k) :

$$E(\phi, \lambda) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m (\varphi(x_k) - y_k)^2 + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} \nabla \phi^\top \nabla \phi \, dx \quad (4)$$

Para minimizar el error tomamos el gradiente respecto a ϕ_i y ϕ_{i+1} para $i = 1, \dots, n-1$:

$$\left[\frac{\partial E}{\partial \phi_i} \right] = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} N_i(x_k) \\ N_{i+1}(x_k) \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} N_i(x_k) & N_{i+1}(x_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_{i+1} \end{bmatrix} - y_k \right) + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial \phi_i} \right] \nabla \phi^\top \nabla \phi \, dx$$

Notamos que $\nabla \phi = \frac{dN_i(x)}{dx} \phi_i + \frac{dN_{i+1}(x)}{dx} \phi_{i+1} = \frac{dN}{d\xi}(\xi_i(x)) \frac{d\xi_i(x)}{dx} \phi_i + \frac{dN}{d\xi}(\xi_{i+1}(x)) \frac{d\xi_{i+1}(x)}{dx} \phi_{i+1}$, de forma que:

$$\frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial \phi_i} \right] \nabla \phi^\top \nabla \phi \, dx = \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{d\xi_i(x)}{dx} \right) \left(\frac{d\xi_{i+1}(x)}{dx} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_{i+1} \end{bmatrix} \, dx$$

Sea $l_i = x_{i+1} - x_i$, entonces $\frac{d\xi_i(x)}{dx} = \frac{2}{l_i}$. Suponiendo $l_i = l_{i+1}$, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial \phi_i} \right] \nabla \phi^\top \nabla \phi \, dx &= \lambda \int_{\Omega} \frac{1}{l_i^2} \, dx \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_{i+1} \end{bmatrix} \\ \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial \phi_i} \right] \nabla \phi^\top \nabla \phi \, dx &= \lambda \int_0^{l_i} \frac{1}{l_i^2} \, dx \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_{i+1} \end{bmatrix} \\ \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial \phi_i} \right] \nabla \phi^\top \nabla \phi \, dx &= \frac{\lambda}{l_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_{i+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Luego entonces, igualando $\frac{\partial E}{\partial \phi_i} = 0$ y $\frac{\partial E}{\partial \phi_{i+1}} = 0$ tenemos:

$$\left(\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} N_i^2 & N_i N_{i+1} \\ N_i N_{i+1} & N_{i+1}^2 \end{bmatrix} (x_k) + \frac{\lambda}{l_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_{i+1} \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^n y_k \begin{bmatrix} N_i(x_k) \\ N_{i+1}(x_k) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Ahora, si definimos:

$$\begin{aligned} A_i &= \sum_{k=0}^n N_i^2(x_k) + \frac{\lambda}{l_i} \\ B_i &= \sum_{k=0}^n N_i(x_k) N_{i+1}(x_k) - \frac{\lambda}{l_i} \\ C_i &= \sum_{k=0}^n N_{i+1}^2(x_k) + \frac{\lambda}{l_i} \\ a_i &= \sum_{k=0}^n y_k N_i(x_k) \\ b_i &= \sum_{k=0}^n y_k N_{i+1}(x_k) \end{aligned}$$

De forma que tenemos el sistema $H\phi = d$, donde

$$H = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ B_1 & C_1 + A_2 & B_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & C_2 + A_3 & B_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 & C_3 + A_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{n-2} + A_{n-1} & B_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & B_{n-1} & C_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$d = (a_1 \quad b_1 + a_2 \quad b_2 + a_3 \quad b_3 + a_4 \quad \cdots \quad b_{n-2} + a_{n-1} \quad b_{n-1})^\top$$

1.2. Integración por el Método de Monte Carlo

Sea $D = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ una región simple y sea $f : R^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrable en D . Por el criterio de Lebesgue, f está acotada por arriba por $f_+ \in \mathbb{R}$ y por abajo por $f_- \in \mathbb{R}$. El método de Monte Carlo para integrar f en D consiste en simular m puntos aleatorios uniformes en D , $x_i \sim U(D)$ para $i = 1, \dots, m$ y m puntos aleatorios uniformes en (f_-, f_+) , $y_i \sim U(f_-, f_+)$, de forma que aproximamos la integral de $f - f_-$ en D por:

$$\int_D (f(x) - f_-) dx \approx \frac{\#\{y_i \mid y_i \leq f(x_i)\}}{m} \int_D (f_+ - f_-) \quad (6)$$

Luego, podemos aproximar $\int_D f(x) dx$ por la siguiente identidad:

$$\int_D f(x) dx = \int_D (f(x) - f_-) dx + \int_D f_- dx \quad (7)$$

En el caso $n = 1$, $\int_D (f_+ - f_-) dx$ es el área del rectángulo definido por $D \times [f_-, f_+]$ y $\int_D f_- dx$ es el área del rectángulo definido por $D \times [0, f_-]$, mientras que para $n = 2$, $\int_D (f_+ - f_-) dx$ es el volumen del paralelepípedo definido por $D \times [f_-, f_+]$ y $\int_D f_- dx$ es el volumen del paralelepípedo definido por $D \times [0, f_-]$.

2. Pseudocódigo

Algoritmo 1: Aproximación por elementos finitos.

```

Entrada:  $z, x, y, w, \lambda$ 
Salida:  $\varphi(z)$ 
1 inicializar  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ;
2 inicializar  $d \in \mathbb{R}^n$ ;
3 para  $i = 1$  hasta  $n - 1$  hacer
4    $H_{i,i} \leftarrow H_{i,i} + \frac{\lambda}{l_i}$ ;
5    $H_{i,i+1} \leftarrow H_{i,i+1} - \frac{\lambda}{l_i}$ ;
6    $H_{i+1,i} \leftarrow H_{i+1,i} - \frac{\lambda}{l_i}$ ;
7    $H_{i+1,i+1} \leftarrow H_{i+1,i+1} + \frac{\lambda}{l_i}$ ;
8   para  $x_k \in [w_i, w_{i+1})$  hacer
9      $H_{i,i} \leftarrow H_{i,i} + N_i^2(x_k)$ ;
10     $H_{i,i+1} \leftarrow H_{i,i+1} + N_i(x_k)N_{i+1}(x_k)$ ;
11     $H_{i+1,i} \leftarrow H_{i+1,i} + N_i(x_k)N_{i+1}(x_k)$ ;
12     $H_{i+1,i+1} \leftarrow H_{i+1,i+1} + N_{i+1}^2(x_k)$ ;
13     $d_i \leftarrow y_k N_i(x_k)$ ;
14     $d_{i+1} \leftarrow y_k N_{i+1}(x_k)$ ;
15   fin
16 fin
17 resolver  $H\phi = d$  ( $H$  es S.P.D. tridiagonal);
18 para  $j = 1$  hasta  $r$  hacer
19   determinar  $i$  tal que  $z_j \in [w_i, w_{i+1}]$ ;
20    $\varphi(z_j) = N_i(z_j)\phi_i + N_{i+1}(z_j)\phi_{i+1}$ 
21 fin

```

Algoritmo 2: Cálculo de splines de continuidad $c = 1$.	
Entrada: f, D, f_+, f_-, m, tol	
Salida: $\int_D f(x) dx$	
1	$i \leftarrow 0;$
2	$I[0] \leftarrow 1;$
3	$r \leftarrow 1$ mientras $\left \frac{I_i - I_{i-1}}{I_i} \right > tol$ hacer
4	para $j = 1$ hasta m hacer
5	$x \leftarrow \text{randUnif}(D);$
6	$y \leftarrow \text{randUnif}(f_-, f_+);$
7	si $y \leq f(x)$ entonces $r \leftarrow r + 1;$
8	fin
9	$I[i] \leftarrow \frac{r}{mi};$
10	$i \leftarrow i + 1;$
11	fin
12	$h \leftarrow \prod_{j=1}^n (b_j - a_j);$
13	$\int_D f(x) dx \leftarrow h(f_+ - f_-)I[i] + hf_-;$

3. Algoritmos

Para ejecutar los algoritmos simplemente se debe correr la siguiente linea desde la Terminal:

```
julia main.jl
```

desde la carpeta del problema. A continuación se muestra la ejecución de los algoritmos para los problemas de la tarea.

```
PS D:\Documents\Julia\Tarea10\Ejercicio2> julia main.jl
El error cuadrático medio de la aproximación por elementos finitos con  $\lambda=0.5$  es de 0.00200717
El error cuadrático medio de la aproximación por elementos finitos con  $\lambda=1.5$  es de 0.00383984
El error cuadrático medio de la aproximación por elementos finitos con  $\lambda=3.5$  es de 0.00641943
```

Figura 1: Ejecución del algoritmo 1

```
PS D:\Documents\Julia\Tarea10\Ejercicio3> julia main.jl
El valor aproximado de la integral es de 1.28528
El error absoluto de integración por el método de Monte Carlo es de 0.000113963
El error relativo de integración por el método de Monte Carlo es de 8.866e-05
```

Figura 2: Ejecución del algoritmo 2 para f_1

```

PS D:\Documents\Julia\Tarea10\Ejercicio4> julia main.jl
El valor aproximado de la integral es de 2.66603
El error absoluto de integración por el método de Monte Carlo es de 0.000634667
El error relativo de integración por el método de Monte Carlo es de 0.000238

```

Figura 3: Ejecución del algoritmo 2 para f_2

4. Resultados

Para el método de elementos finitos, se considera x una partición uniforme de $[-5, 5]$ con 501 puntos, y y está dada por:

$$y_k = \sin(\pi x_k) + u_k$$

donde $u_k \sim U(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Se aproxima por medio de elementos finitos en la malla w uniforme en $[-5, 5]$ con $n=101$ puntos. Para comparar el efecto de λ , tomamos valor de $\lambda = 0.5, 1.5$ y 3.5 . Las aproximaciones resultantes se encuentran en la figura 4, y el Error Cuadrático Medio con respecto a $\sin(\pi x)$ se encuentran en la tabla 1.

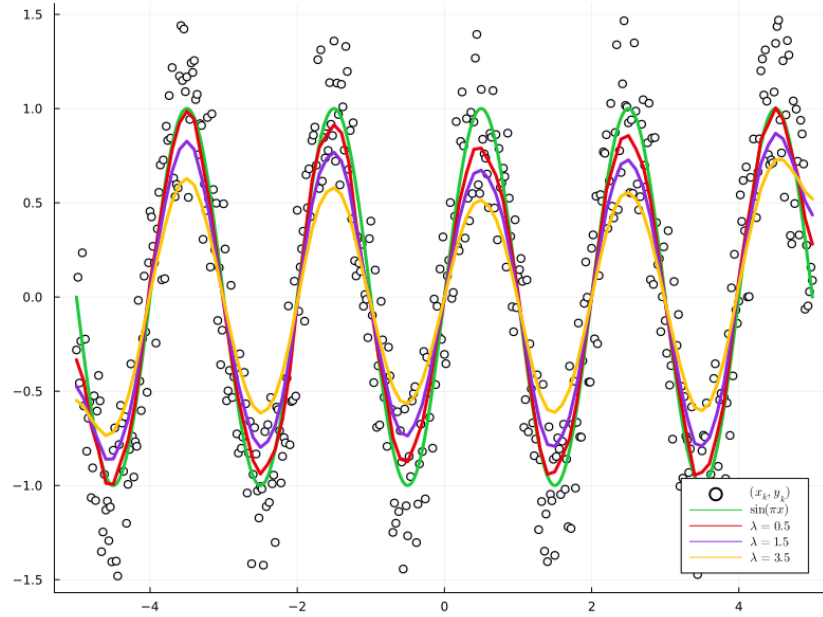


Figura 4: Aproximación por elementos finitos de los puntos (x_k, y_k) para diferentes valores de λ

λ	0.5	1.5	3.5
ECM	2.00717E-03	3.83984E-03	6.41943E-03

Tabla 1: Error Cuadrático Medio para distintos valores de λ

Para el método de integración por el método de Monte Carlo, se consideran las siguientes funciones:

$$f_1(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

$$f_2(x, y) = |x + y|$$

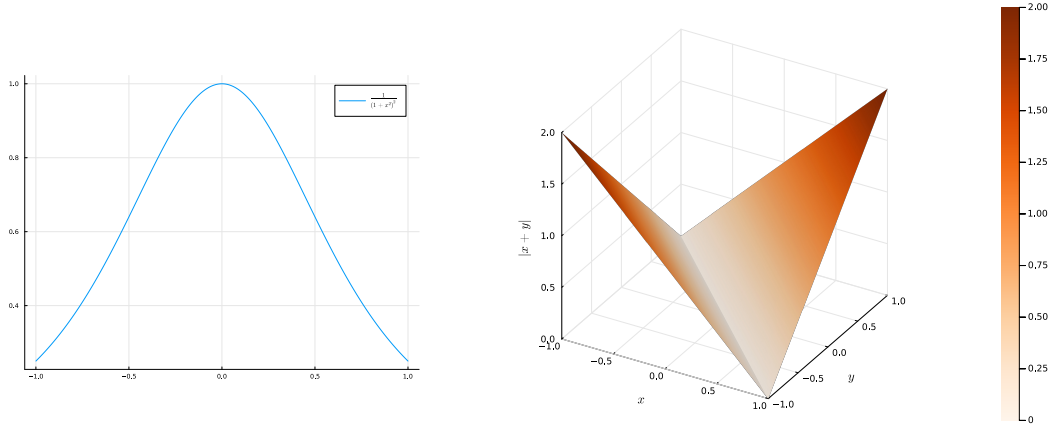


Figura 5: f_1 y f_2 en sus respectivas regiones de integración

El dominio de integración para f_1 es $D = [-1, 1]$, y para f_2 es $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Es fácil verificar:

$$\int_{-1}^1 f_1(x) dx = \frac{\pi + 2}{4}$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_2(x, y) dx dy = \frac{8}{3}$$

Los resultados de la integral de f_1 y f_2 en sus respectivas regiones de integración obtenidas por el método de Monte Carlo y sus respectivos errores de aproximación se presentan en la tabla 2

$f(x)$	$\int_D f(x) dx$	E_{abs}	E_{rel}
$f_1(x)$	1.2852842	1.13963E-04	8.86600E-05
$f_2(x)$	2.666032	6.34667E-04	2.38000E-04

Tabla 2: Resultados de integración por el método de Monte Carlo

5. Conclusiones

Notamos que el Error Cuadrático Medio de la aproximación por el método de elementos finitos es bueno considerando el error aleatorio inducido en y_k , además el efecto de penalización de λ es correcto, pues se suaviza la aproximación y se reduce en valor absoluto el valor máximo y mínimo que alcanza $\phi(x)$. Si bien, la función $s(x)$ no es diferenciable, podemos tomar los puntos $s(w_i)$ y tomar un spline de mayor continuidad.

La aproximación de las integrales por el método de Monte Carlo no es muy buena, con errores relativos del orden de 10^{-4} , además que requiere muchas evaluaciones de la función integrada, por lo que será mejor estudiar otros algoritmos de integración numérica.