punto 1

September 2023

Hacer pasos intermedios para regla de trapecio simple.
Podemos entender esta integral como la suma de dos figuras geométricas simples, un rectángulo y un triangulo. por lo que si la integral que queremos calcular va desde a hasta b quedaría como:

$$(b-a)\cdot(f(a)+\frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{2})$$
$$(b-a)\cdot((f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{2}))$$
$$(b-a)\cdot((f(a)-\frac{f(a)}{2}+\frac{f(b)}{2})$$
$$(b-a)\cdot(\frac{f(a)}{2}+\frac{f(b)}{2})$$
$$\frac{(b-a)}{2}\cdot(f(a)+f(b))$$

3. Hacer pasos intermedios para encontrar la regla de Simpson simple.

$$\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b p_2(x)dx = \frac{h}{3}(f(a) + 4f(x_m) + f(b))$$

$$f(x) \approx p_2(x) = \frac{(x-b)(x-x_m)}{(a-b)(a-x_m)}f(a) + \frac{(x-a)(x-b)}{(x_m-a)(x_m-b)}f(x_m) + \frac{(x-a)(x-x_m)}{(b-a)(b-x_m)}f(b)$$

$$x_m = \frac{a+b}{2}$$

$$h = x_m - a$$

$$h = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$$

$$2h = b - a$$

$$b = 2h + a$$

$$b = h + x_m$$

$$a = x_m - h$$

Entonces:

$$= \int_a^b \frac{(x-b)(x-x_m)}{(a-b)(a-x_m)}f(a) + \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{(x_m-a)(x_m-b)}f(x_m) + \int_a^b \frac{(x-a)(x-x_m)}{(b-a)(b-x_m)}f(b)$$

$$= \frac{f(a)}{(a-b)(a-x_m)}\int_a^b (x-b)(x-x_m)dx + \frac{f(x_m)}{(x_m-a)(x_m-b)}\int_a^b (x-a)(x-b)dx$$
$$+ \frac{f(b)}{(b-a)(b-x_m)}\int_a^b (x-a)(x-x_m)dx$$

$$= \frac{f(a)}{(a-b)(a-x_m)}\left[(x_m-a)\frac{(a-b)^2}{2} + \frac{(a-b)^3}{6}\right] + \frac{f(x_m)}{(x_m-a)(x_m-b)}\left[\frac{(a-b)^3}{6}\right]$$
$$+ \frac{f(b)}{(b-a)(b-x_m)}\left[(b-x_m)\frac{(b-a)^2}{2} - \frac{(b-a)^3}{6}\right]$$

$$= \frac{f(a)}{(a-b)(a-x_m)}\left[(h)\frac{(-2h)^2}{2} + \frac{(-2h)^3}{6}\right] + \frac{f(x_m)}{(x_m-a)(x_m-b)}\left[\frac{(-2h)^3}{6}\right]$$
$$+ \frac{f(b)}{(b-a)(b-x_m)}\left[(h)\frac{(2h)^2}{2} - \frac{(2h)^3}{6}\right]$$

$$= \frac{f(a)}{(a-b)(a-x_m)}\left[\frac{4h^3}{2} - \frac{8h^3}{6}\right] + \frac{f(x_m)}{(x_m-a)(x_m-b)}\left[-\frac{8h^3}{6}\right]$$
$$+ \frac{f(b)}{(b-a)(b-x_m)}\left[\frac{4h^3}{2} - \frac{8h^3}{6}\right]$$

$$= \frac{f(a)}{(a-b)(a-x_m)}\left[\frac{2h^3}{3}\right] + \frac{f(x_m)}{(x_m-a)(x_m-b)}\left[-\frac{4h^3}{3}\right] + \frac{f(b)}{(b-a)(b-x_m)}\left[\frac{2h^3}{3}\right]$$

$$= \frac{2h^3 f(a)}{3(a-b)(a-x_m)} - \frac{4h^3 f(x_m)}{3(x_m-a)(x_m-b)} + \frac{2h^3 f(b)}{3(b-a)(b-x_m)}$$

$$= \frac{2h^3 f(a)}{3(-2h)(-h)} - \frac{4h^3 f(x_m)}{3(h)(-h)} + \frac{2h^3 f(b)}{3(2h)(h)}$$

$$= \frac{2h^3 f(a)}{6h^2} + \frac{4h^3 f(x_m)}{3h^2} + \frac{2h^3 f(b)}{6h^2}$$

$$= \frac{h^3 f(a)}{3h^2} + \frac{4h^3 f(x_m)}{3h^2} + \frac{h^3 f(b)}{3h^2}$$

$$= \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f(x_m) + f(b)\right)$$