1.

a. La definición que se nos da de modelo de un programa es la siguiente:

M es un modelo de un programa Π si es un conjunto minimal que satisface que para cada regla Head $\leftarrow$ Tail $\in \Pi$ tal que Tail $\subseteq$ M, se cumple que Head $\cap$ M $\neq \emptyset$.

Supondremos que M es modelo de Π. Luego, habrán dos alternativas posibles.

I. Si p $\subseteq$ M, entonces la regla { $\leftarrow$ p } tendría su Tail incluida en M, lo que significa que su Head también debe pertenecer a M. Sin embargo, el Head vacía de la regla indica una contradicción lógica, lo que significa que M no puede contener a p.

II. Si p $\not\subset$ M, entonces M = $\emptyset$, pues no hay otras constantes en ni variables en Π. Luego, como la regla { p } tiene Tail vacío, entonces se cumple Head (p). Para terminar, notamos que {p} $\cap$ $\emptyset$ = $\emptyset$, lo que incumple la regla Head $\cap$ M $\neq \emptyset$, por lo tanto, hemos llegado a una contradicción.

En ambos casos hemos llegado a una contradicción. Entonces, podemos concluir que el programa Π = {p, $\leftarrow$ p} no tiene modelos.

b. La definición que se nos da de modelo de un programa con negación es la siguiente:

X es un modelo de un programa con negación Π ssi X es un modelo para Π^{X} .

Tenemos el programa:

Π = { p $\leftarrow$ not q,
q $\leftarrow$ not p }

y el conjunto XP = { p } y XQ = { q }. La reducción Π^{XP} y Π^{XQ} de Π relativa a XP y XQ respectivamente se calcula como:

1- Inicialmente, Π^{XP} := Π^{XQ} := Π := { p $\leftarrow$ not q, q $\leftarrow$ not p }

2- Borramos la regla {p} $\leftarrow$ not({q}) de Π^{XQ} ya que {q}$\cap$ Π^{XQ} $\neq$ ø
Borramos la regla {q} $\leftarrow$ not({p}) de Π^{XP} ya que {p}$\cap$ Π^{XP} $\neq$ ø

3- Reemplazamos la regla {q} $\leftarrow$ not({p}) en Π^{XQ} por {q} $\leftarrow$ {} porque {p}$\cap$ Π^{XQ} = ø
Reemplazamos la regla {p} $\leftarrow$ not({q}) en Π^{XP} por {p} $\leftarrow$ {} porque {q}$\cap$ Π^{XP} = ø

De esta manera, la reducción Π^{XP} corresponde a:

p.

y la reducción Π^{XQ} corresponde a:

q.

como XP = { p } es modelo de Π^{XP} y XQ = { q } es modelo de Π^{XQ}, entonces ambas son modelos de Π.

2.

La definición que se nos da de modelo de un programa es la siguiente:

> M es un modelo de un programa Π si es un conjunto minimal que satisface que para cada regla Head $\leftarrow$ Tail $\in \Pi$ tal que Tail $\subseteq$ M, se cumple que Head $\cap$ M $\neq \emptyset$.

Supongamos que Π y Π' son programas sin negación, con reglas de la forma Head $\leftarrow$ Body donde |Head| = 1 y no hay reglas con cabeza vacía. Demostraremos por inducción que:

> si Π y Π' son dos programas tales que $\Pi \subseteq \Pi'$ y M es un modelo de Π, entonces existe un modelo M′ de Π' tal que M $\subseteq$ M′.

Caso Base: Π no tiene reglas, o sea que sólo tiene predicados o hechos. De esta forma, M corresponde al conjunto de todos los hechos de Π. Si Π' tiene más hechos y reglas (o la misma cantidad), entonces se va a cumplir que M es subconjunto de cualquier modelo M' de Π'.

HI: supongamos que tenemos un programa Π' con n reglas que cumple que $\Pi \subseteq \Pi'$, y un modelo M del programa Π, entonces existe un modelo M′ de Π' tal que M $\subseteq$ M′.

Supongamos ahora que a Π' se le suma una nueva regla de la forma Head $\leftarrow$ Body, o sea que Π' queda con n+1 reglas. Siendo M un modelo de Π, hay dos posibles casos con la nueva regla de Π':

I. Si Body $\subseteq$ M′, entonces Head debe agregarse a M′ (a menos que ya esté) para que sea modelo de Π'. De esta forma, sigue siendo verdad que M $\subseteq$ M′, pues solamente agregamos un elemento a M′.
II. Si Body $\not\subset$ M′, entonces no se agrega nada a M′ y este sigue siendo modelo de Π', mientras que se sigue cumpliendo que M $\subseteq$ M′, pues no ha cambiado ninguno de los dos conjuntos.

Como en ambos casos encontramos un M′ tal que fuera modelo de Π' y que cumpliera M $\subseteq$ M′, podemos concluir que al agregar una nueva regla, se sigue cumpliendo la hipótesis de inducción. Luego, por el principio de inducción queda demostrado que para todo número de reglas n$\in$N, se cumple que si $\Pi \subseteq \Pi'$ y M es un modelo de Π, entonces existe un modelo M′ de Π' tal que M $\subseteq$ M′.

3.

La definición que se nos da de modelo de un programa es la siguiente:

> M es un modelo de un programa Π si es un conjunto minimal que satisface que para cada regla Head $\leftarrow$ Tail $\in \Pi$ tal que si Tail $\subseteq$ M, se cumple que Head $\cap$ M $\neq \emptyset$.

Supongamos un programa Π con reglas de la forma Head $\leftarrow$ Body, sin negación, y con $|Head| \leq 1$. Demostraremos que Π tiene a lo más un modelo.

Caso Base: Π no tiene reglas, o sea que sólo tiene predicados o hechos. De esta forma, M corresponde al conjunto de todos los hechos de Π y es un solo modelo, pues todas los hechos son verdaderos y deben estar en el modelo.

HI: supongamos que tenemos un programa Π con n reglas de la forma Head $\leftarrow$ Body con $|Head| \leq 1$, y un único modelo M del programa Π.

Supongamos ahora que a Π se le suma una nueva regla de la forma Head $\leftarrow$ Body con $|Head| \leq 1$, o sea que Π queda con n+1 reglas. Existen 4 posibles casos para el M resultante.

I. Si Body $\subseteq$ M y $|Head| = 1$, entonces Head debe agregarse a M (a menos que ya esté) para que siga siendo modelo de Π. De esta forma, sigue existiendo un único modelo M que resuelve Π.
II. Si Body $\not\subset$ M y $|Head| = 1$, entonces no se agrega nada a M y este sigue siendo el único modelo de Π.
III. Si Body $\subseteq$ M y $|Head| = 0$, entonces habrá una contradicción en el modelo, pues el Head vacío significa que Body genera una contradicción en el modelo (Body no puede estar en M), sin embargo lo estaba, por lo tanto, ya no hay ningún modelo que resuelva Π.
IV. Si Body $\not\subset$ M y $|Head| = 0$, no cambiará el modelo M, pues Body no está en el modelo y tampoco puede estarlo porque generaría una contradicción. De esta forma sigue habiendo un único modelo M para Π.

Como en los cuatro casos llegamos a que quedaba un único modelo M o ninguno para Π, podemos concluir que al agregar una nueva regla de la forma Head $\leftarrow$ Body con $|Head| \leq 1$, está nunca agregará un nuevo modelo, sino que podría sacarlo, modificarlo o mantenerlo. Luego, por principio de inducción, queda demostrado que todo programa que tiene reglas de la forma Head $\leftarrow$ Body, sin negación, y con $|Head| \leq 1$ tiene a lo más un modelo