Escola de Tecnologias e Arquitetura

Enunciado do 1º Trabalho de

Tópicos de Matemática para as Telecomunicações

2022/2023

(v.1.1)

Informações gerais:

- Grupos: formados por 3 estudantes (não é necessária pré-indicação dos nomes, e podem ser de turmas diferentes).
- A submissão é feita no Moodle (um elemento do grupo submete o trabalho do grupo em nome de todos).
- Data limite de entrega: 23h59 de Sexta-Feira 14 de Abril de 2023.

Instruções:

- Os trabalhos devem conter no topo da 1ª página a identificação do grupo com o nome e número dos três estudantes.
- As 6 questões devem ser respondidas apresentando um *script* em MATLAB para cada uma das respostas, o qual deve aparecer no documento em modo texto por forma a ser copiável e testável (não pode ser uma figura *bitmap* ou de outro formato).
- O trabalho deve ser em formato PDF com um máximo de 7 páginas (1 página para a capa e 1 página para as respostas cada uma faz 6 pergunta, incluindo o *script* MATLAB, as figuras geradas e comentários em cada resposta.

Critérios de avaliação:

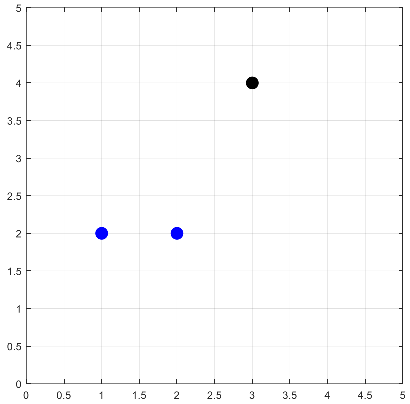
- Correção das respostas (10 valores);
- qualidade do código MATLAB (correcção / organização) (5 valores);
- qualidade da organização, apresentação e originalidade do relatório (5 valores).

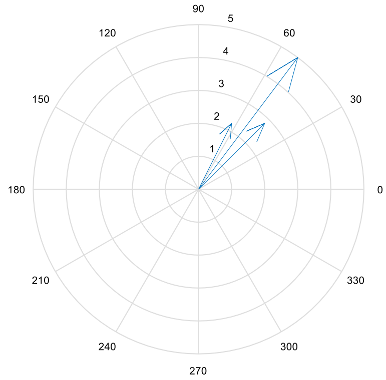
Pergunta 1 – Representação de funções reais de variável complexa

Considere dois números complexos à sua escolha, z_1 e z_2, assim como a sua soma $z_3 = z_1 + z_2$. Represente os três números

a) usando as suas representações algébricas (função `plot`);
b) usando as suas representações polares (função `compass`);

Exemplo:





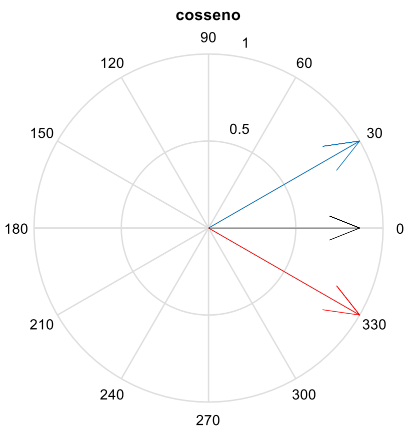
Pergunta 2 – Verificação geométrica das fórmulas de Euler

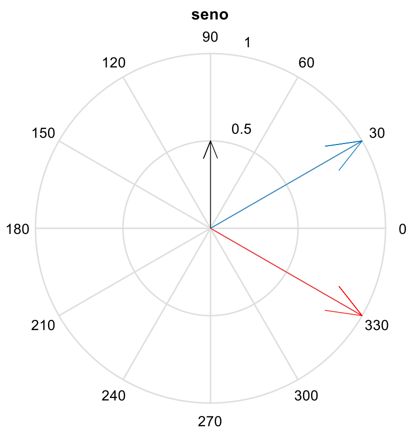
Considere um número complexo $z = e^{+i\theta}$ e represente-o no plano $\mathbb{C}$.
Construa uma representação gráfica que mostre, geometricamente, que as seguintes fórmulas de Euler se verificam.

a) $cos(\theta) = \frac{e^{+i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$;
b) $\text{sen}(\theta) = \frac{e^{+i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Deve representar cada um dos números complexos destacados a azul e a vermelho e depois mostrar como as fórmulas permitem obter os valores $cos(\theta)$ e $cos(\theta)$.

Exemplo para θ=30º:



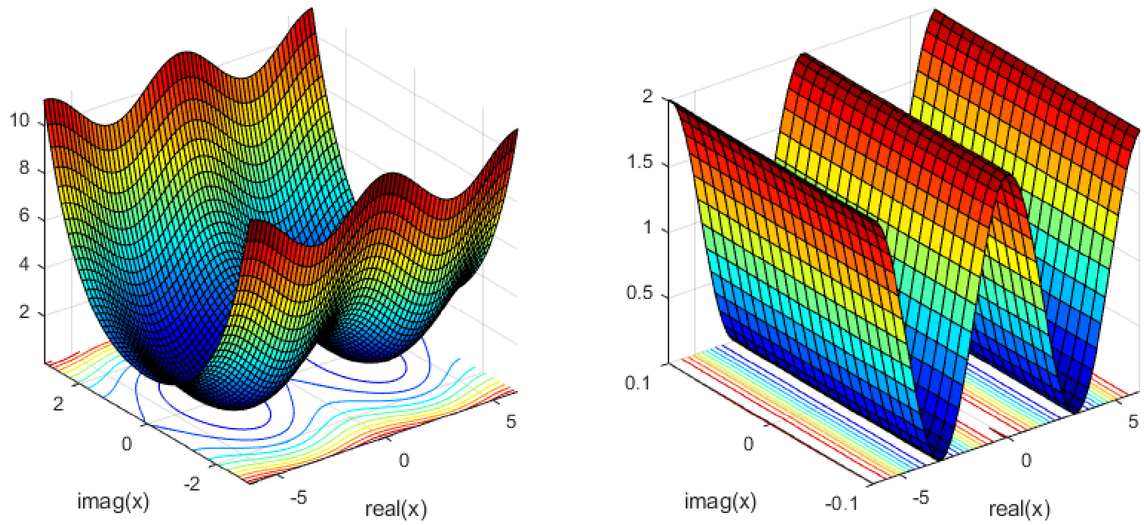


Pergunta 3 – Representação do módulo de uma função complexa de variável complexa

Considere a função $f(z) = \cos(z) + 1$, sendo $z = x + iy$.

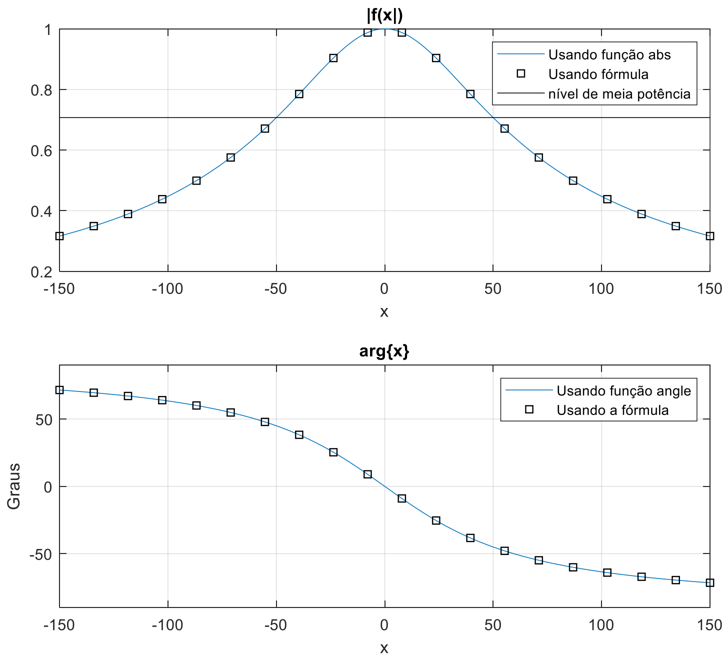
- **a)** Represente graficamente $|f(z)|$ na região $x \in [-2\pi,\ +2\pi],\ y \in [-3,\ +3]$.
- **b)** Represente graficamente $|f(z)|$ numa "fatia" em torno da reta real (isto é com $y \in [-\delta,\ +\delta]$) e explique o que observa.

Exemplo de representação:



Pergunta 4 – Representação do módulo e argumento de uma função complexa de variável complexa

Represente o módulo e o argumento da função $f(x) = \frac{1}{1+i\left(\frac{x}{B}\right)}$, com *B*=50 usando as funções `module` e `angle`.



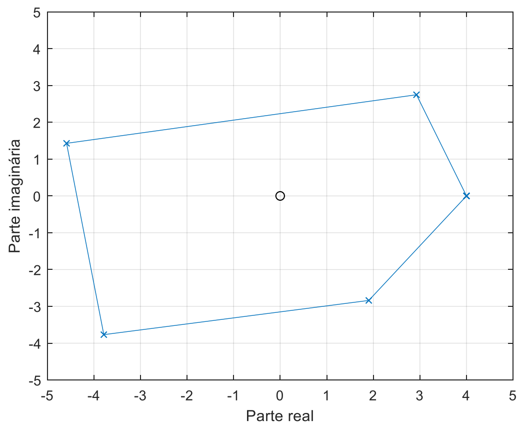
Pergunta 5 – Integral curvilíneo

Considere a função $f(z) = \frac{1}{2\pi z}$, com $z = x + iy$.

a) Calcule o integral ao longo de um caminho fechado aleatório $\gamma(t)$ composto pela concatenação de 5 semiretas definidas por 5 pontos, sendo um deles um ponto fixo e os restantes quatro gerados aleatoriamente:
- ponto fixo: $z_0 = 4 + 0i$;
- pontos aleatórios: $z_1 \in$ 1^{o}quadrante de $\mathbb{C}$, $z_2 \in$ 2^{o}quadrante de $\mathbb{C}$ $z_3 \in$ 3^{o}quadrante de $\mathbb{C}$, $z_4 \in$ 4^{o}quadrante de $\mathbb{C}$.

[Ajuda: use a função `integral` com a opção de definição do caminho via *waypoints* e considere z_0 o sendo ponto inicial e o ponto final do caminho fechado.]

b) Comente o resultado que obtém para o integral quando corre várias vezes o programa, sempre com posições diferentes dos pontos aleatórios nos 4 quadrantes.



Pergunta 6 – Teorema de Cauchy-Goursat

Considere a função $f(z) = \frac{1}{2\pi z}$, com $z = x + iy$ e um caminho $\gamma(t)$ que é uma circunferência de raio $\rho = 2$ centrada num ponto aleatório $z_0 = x_0 + iy_0$, com coordenadas $x_0 \in [-2,\ +2]$, $y_0 \in [-2,\ +2]$ (considere que qualquer coordenada neste domínio é equiprovável).

a) Calcule o integral de $f(z)$ para diferentes caminhos $\gamma(t)$, isto é, circunferências centradas em pontos aleatórios.

b) Comente os resultados do integral que se obtêm dependendo da posição da circunferência.