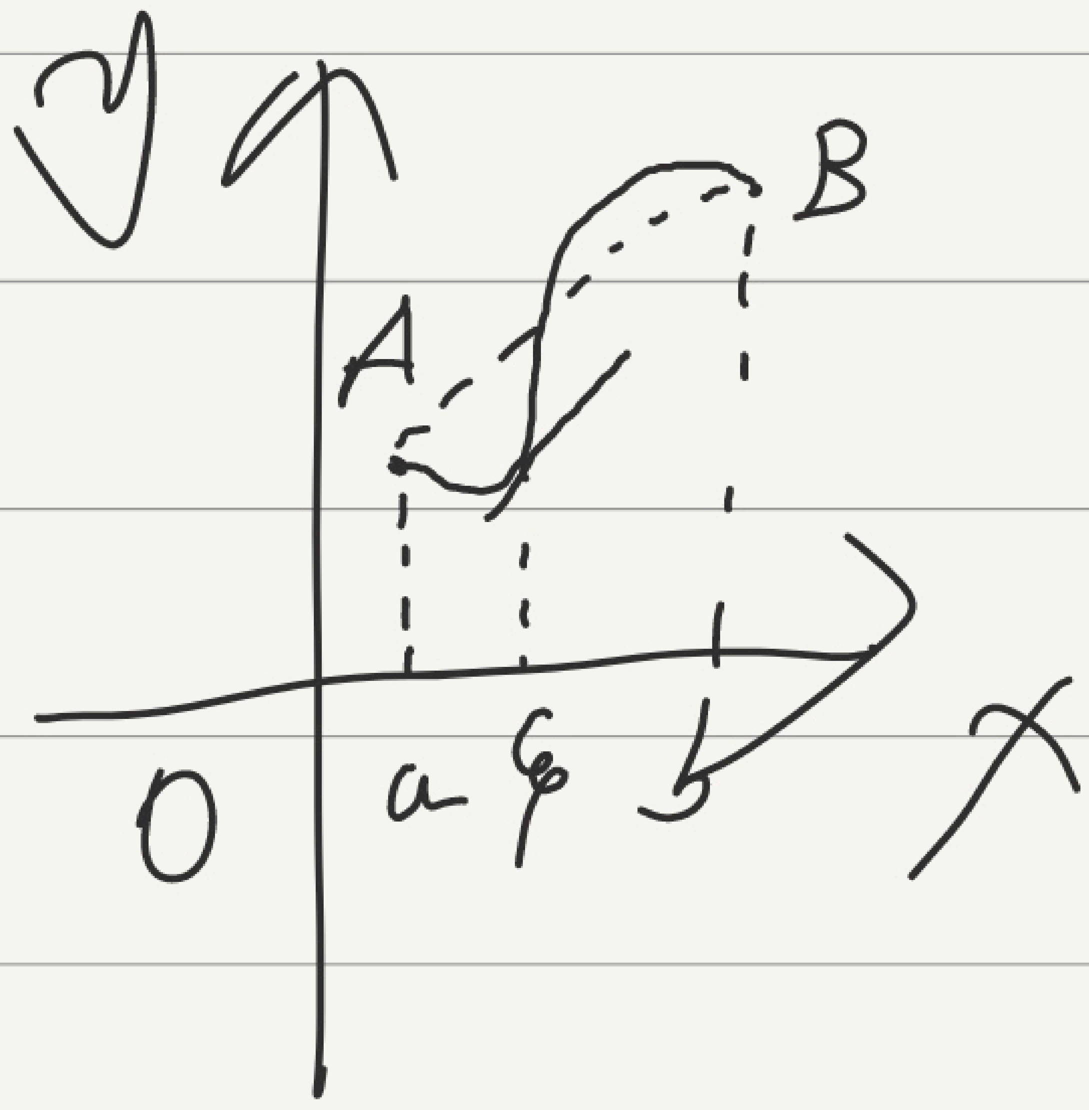
If ① $f(x) \in C[a,b]$;
② $f(x)$ 在 (a,b) 内可导;

则 $\exists\, \xi \in (a,b)$，使

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Notes: ① $\xi \in (a,b)$，ξ 至少一个
② If $f(a)=f(b)$，$L \Rightarrow R$
③ 等价形式

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

$$\Rightarrow f(b)-f(a) = f'[a+\theta(b-a)](b-a)$$

$$(0<\theta<1)$$

④ L 用法
- $f(b)-f(a)$ 或 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$: L
- $f(a), f(c), f(b)$: 2L
- $f \Rightarrow f'$

型三L用法

例1：$\lim_{x\to\infty} f'(x)=e$，且

$\lim_{x\to\infty}[f(x+2)-f(x)]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$，求 a

解：① $f(x+2)-f(x)=f'(\xi)(x+2-\cancel{x})$

$=2f'(\xi) \quad (x<\xi<x+2)$

左 $=2\lim_{x\to\infty} f'(\xi)=2e$

② 右 $=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right]^{x\cdot\frac{2a}{x-a}}$

$=e^{2a\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-a}}=e^{2a}=2e$

$\Rightarrow 2a=\ln 2+1$

$\therefore a=\frac{1}{2}(\ln 2+1)$

例2. $f''(x)>0$，比较 $f'(0)$，$f'(1)$，$f(1)-f(0)$ 大小

解：① $f(1)-f(0)=f'(c)(1-0)$

$=f'(c) \quad (0<c<1)$

② $f''(x)>0 \Rightarrow f'(x)$ ↗

$\because\ 0<c<1$，

$\therefore\ f'(0) < f'(c) < f'(1)$

即 $f'(0) < f(1)-f(0) < f'(1)$

例3 $f''(x)>0$，$f(0)=0$

证 $2f(1) < f(2)$

解：$f(1) = f(1)-f(0)$

$= f'(a) \quad (0<a<1)$

$f(2) = f(2)-f(1) = f'(b) \quad (1<b<2)$

$\because\ f''(x)>0 \quad \therefore\ f'(x)\nearrow$

又 $\because\ a<b$，$\therefore\ f'(a) < f'(b)$

$\Rightarrow f(1)-f(0) < f(2)-f(1)$

$\because\ f(0)=0 \quad \therefore\ 2f(1) < f(2)$

例4. $f(x)$ 二阶可导，$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$，$f(1)=1$

证：① $\exists\ \xi\in(0,1)$，使 $f''(\xi)=0$

② $\exists\ \eta\in(0,1)$，使 $f''(\eta)-f'(\eta)+1=0$

解：$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1 \Rightarrow f(0)=0,\ f'(0)=1$

① $\exists\ c\in(0,1)$ 使 $f'(c)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$

$\because f'(0)=f'(c)=1$

$\therefore \exists\ \xi\in(0,c)\in(0,1)$，使 $f''(\xi)=0$

② 分析：$f''(x)-f'(x)+1=0$

$$\underbrace{[f'(x)-1]}_{g(x)}'-[f(x)-1]=0$$

$g'(x)-g(x)=0$

$$\frac{g'(x)}{g(x)}-1=0 \to [\ln g(x)]'+(\ln e^{-x})'=0$$

令 $\varphi(x)=e^{-x}[f(x)-1]$

$\because f'(0)=1,\ f'(c)=1$

$\therefore \varphi(0)=0,\ \varphi(c)=0$

$\exists\, \eta \in (0, c) \subset (0,1)$，使 $\varphi'(\eta) = 0$

而 $\varphi'(x) = -e^{-x}[f'(x) - 1] + e^{-x} f''(x)$

$= e^{-x}[f''(x) - f'(x) + 1]$

$\therefore e^{-\eta}[f''(\eta) - f'(\eta) + 1] = 0$

$\because e^{-\eta} \neq 0 \quad \therefore f''(\eta) - f'(\eta) + 1 = 0$