PLA 19

물리학과 2017160111 Ahn Jinmo

1

1.1

1.1.1

Trial solution $x(t) = Ae^{\lambda t}$를 방정식에 대입하면 다음과 같다.

$$m\lambda^2 + b\lambda + k = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma \pm i\omega. \tag{1.1}$$

각 부호에 해당하는 overall coefficient $A_\pm$를 도입해서 일반식을 작성할 수 있다. $x(0) = x_0$와 $\dot{x}(0) = 0$을 대입하면 다음과 같다.

$$A_+ + A_- = x_0, \quad -\gamma x_0 + i\omega(A_+ - A_-) = 0. \tag{1.2}$$

Eq. (1.2)의 해는 다음과 같다.

$$A_\pm = \pm \frac{i(\gamma \pm i\omega)}{2\omega} x_0. \tag{1.3}$$

$A_= A_+^*$임을 알 수 있다. 새로운 수 c를 다음과 같이 정의하자.

$$c \equiv \frac{2A_+}{x_0} \cos\phi = -\frac{i(\gamma + i\omega)}{\omega} \cos\phi = \cos\phi(1 + i\tan\phi) = e^{i\phi}. \tag{1.4}$$

이를 이용하여 일반해를 쓰면 다음과 같다.

$$x(t) = \frac{x_0}{2\cos\phi} e^{-\gamma t}(ce^{i\omega t} + c^* e^{-i\omega t}) = \frac{x_0}{\cos\phi} e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi) = ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi). \tag{1.5}$$

이는 underdamping condition이 적용된 damped harmonic oscillator이다.

1.1.2

Total energy $E = K + U$를 구하기 위해 kinetic energy를 계산해보자.

$$K = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 = \frac{m}{2} a^2 e^{-2\gamma t} \left[\gamma^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \omega^2 \sin^2(\omega t + \phi) + 2\gamma\omega \cos(\omega t + \phi) \sin(\omega t + \phi)\right]. \tag{1.6}$$

이때, $\omega \gg \gamma$일 때 2ω로 진동하는 항들은 모두 0으로 근사할 수 있다. 이 근사를 이용하기 위해 다음 관계들을 이용하자.

$$\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\omega t)) \approx \frac{1}{2}, \tag{1.7}$$

$$\sin^2(\omega t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\omega t)) \approx \frac{1}{2}, \tag{1.8}$$

$$\cos(\omega t) \sin(\omega t) = \frac{1}{2} \sin(2\omega t) \approx 0. \tag{1.9}$$

따라서 다음과 같다.

$$K \approx \frac{1}{4}ma^2e^{-2\gamma t}(\gamma^2+\omega^2) = \frac{1}{4}ma^2\omega_0^2e^{-2\gamma t}. \tag{1.10}$$

마찬가지로 potential energy는 다음과 같다.

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}ka^2e^{-2\gamma t}\cos^2(\omega t+\phi) \approx \frac{1}{4}ka^2e^{-2\gamma t}. \tag{1.11}$$

따라서 다음과 같다.

$$E(t) = K(t)+U(t) = \frac{1}{4}a^2e^{-2\gamma t}(m\omega_0^2+k) = \frac{1}{2}a^2ke^{-2\gamma t}. \tag{1.12}$$

이를 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\gamma a^2ke^{-2\gamma t} = -(2\gamma)\times E(t) = -\Gamma E(t). \tag{1.13}$$

1.2

식을 다음과 같이 고쳐쓰자.

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx = f_0e^{-i\omega t}. \tag{1.14}$$

실제 해는 eq. (1.14)를 풀어서 나온 해의 real part이다. Steady state에서 입자는 더이상 에너지를 잃지 않고 driven force를 따라 운동한다. 따라서 trial solution으로 $x(t) = Be^{-i\omega t}$를 대입해서 정리하면 다음과 같다.

$$-m\omega^2-ib\omega+k = \frac{f_0}{B} \quad\Rightarrow\quad B = \frac{f_0}{-m\omega^2+k-ib\omega}. \tag{1.15}$$

B를 우리가 원하는 형태로 변환해주면 다음과 같다.

$$B = \frac{f_0}{mA}\frac{(\omega_0^2-\omega^2)+2i\gamma\omega}{A} = \frac{f_0}{mA}(\cos\phi-i\sin\phi) = \frac{f_0}{mA}e^{-i\phi}. \tag{1.16}$$

따라서 다음과 같다.

$$x'(t) = \frac{f_0}{mA}e^{-i(\omega t+\phi)} \quad\Rightarrow\quad x(t) = \mathrm{Re}[x'(t)] = \frac{e}{m}\frac{1}{[(\omega_0-\omega)^2+4\gamma^2\omega^2]^{1/2}}E_0\cos(\omega t+\phi). \tag{1.17}$$

1.3

1.3.1

다음을 계산해야 한다.

$$\langle W_{E1}\rangle = -\langle p(t)E(t)\rangle = -\frac{e^2E_0^2}{m}\frac{1}{[(\omega_0-\omega)^2+4\gamma^2\omega^2]^{1/2}}\langle\cos(\omega t+\phi)\cos(\omega t)\rangle. \tag{1.18}$$

이때, 다음과 같다.

$$\cos(\omega t+\phi)\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left[\cos(2\omega t+\phi)+\cos\phi\right]. \tag{1.19}$$

따라서 다음과 같다.

$$\langle W_{E1}\rangle = -\frac{e^2E_0^2}{2m}\frac{\langle\cos\phi\rangle}{[(\omega_0-\omega)^2+4\gamma^2\omega^2]^{1/2}} = -\frac{e^2E_0^2}{2m}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}. \tag{1.20}$$

1.3.2

$$\begin{aligned}
-\frac{e^2E_0^2}{2m}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2} &= -\frac{e^2E_0^2}{2m}\frac{(\omega_0+\omega)/(\omega_0-\omega)}{(\omega_0+\omega)^2+4\gamma^2\omega^2/(\omega_0-\omega)^2}, &(1.21)\\
&\approx -\frac{e^2E_0^2}{2m}\frac{1}{(\omega_0+\omega)(\omega_0-\omega)} \approx \frac{e^2E_0^2}{4m\omega}\frac{1}{\omega-\omega_0} \quad (\omega+\omega_0\approx 2\omega). &(1.22)
\end{aligned}$$

2

2.1

Two level AC Stark shift는 다음과 같다.

$$U_{AC}(\Psi_0) = \frac{\langle\Psi_0|\mathbf{p}\cdot\mathcal{E}_0^*|\Psi_1\rangle\,\langle\Psi_1|\mathbf{p}\cdot\mathcal{E}_0|\Psi_0\rangle}{4\hbar(\omega_0-\omega_1+\omega)} + \frac{\langle\Psi_0|\mathbf{p}\cdot\mathcal{E}_0|\Psi_1\rangle\,\langle\Psi_1|\mathbf{p}\cdot\mathcal{E}_0^*|\Psi_0\rangle}{4\hbar(\omega_0-\omega_1-\omega)}. \tag{2.1}$$

이때 rotating wave approximation을 적용하면 resonance frequency $\omega_1-\omega_0$과 driving frequency ω의 차이에 해당하는 항만 기여도록 근사할 수 있다. 즉, 다음과 같다.

$$U_{AC}(\Psi_0) \approx -\frac{\langle\Psi_0|\mathbf{p}\cdot\mathcal{E}_0^*|\Psi_1\rangle\,\langle\Psi_1|\mathbf{p}\cdot\mathcal{E}_0|\Psi_0\rangle}{4\hbar(\omega_1-\omega_0-\omega)} \tag{2.2}$$

2.2

$\omega_1-\omega_0-\omega=\Delta=2\pi\times10^{12}$이라고 하자.

2.2.1

에너지 E와 온도 T는 Boltzmann constant k_B에 대해 $E=k_BT$의 관계를 가지고 있다. z axis에서 1 mK의 well을 가져야 하므로 Stark shift는 음수여야 한다. 따라서 다음과 같다.

$$1\text{ mK} = -\frac{U_{AC}(\Psi_0)}{k_B} = \frac{9e^2a_0^2}{4\hbar\Delta k_B}\mathcal{E}_0^2 \quad\Rightarrow\quad \mathcal{E}_0^2 = 5.66\times10^{10}\ \text{N}^2/\text{C}^2. \tag{2.3}$$

따라서 이때 필요한 laser intensity는 다음과 같다.

$$I = \frac{1}{2}c\epsilon_0\mathcal{E}_0^2 = 7.51\times10^7\ \text{W/m}. \tag{2.4}$$

2.2.2

x axis에서 Stark shift는 다음과 같다.

$$U_{AC,x}(\Psi_0) = -\frac{9e^2a_0^2}{4\hbar\Delta}\mathcal{E}_0^2e^{-x^2/w_0^2}. \tag{2.5}$$

Restoring force는 다음과 같다.

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{9e^2a_0^2\mathcal{E}_0^2}{2\hbar\Delta w_0^2}xe^{-x^2/w_0^2}. \tag{2.6}$$

이는 $x=w_0/\sqrt{2}$에서 최댓값을 가진다. 이를 대입하고 eq. (2.3)에서 구한 전기장의 세기를 대입하면 다음과 같다.

$$F_{max} = \frac{9}{2\sqrt{2}}\times\frac{e^2a_0^2\mathcal{E}_0^2}{\hbar\Delta w_0}\exp\left(-\frac{1}{2}\right) = 5.93\times10^{-22}\ \text{N}. \tag{2.7}$$

2.2.3

주어진 상황에서 Rabi frequency Ω는 다음과 같다.

$$\Omega = \frac{\langle\Psi_1|\mathbf{p}\cdot\mathcal{E}_0|\Psi_0\rangle}{\hbar} = \frac{3ea_0\mathcal{E}_0}{\hbar}. \tag{2.8}$$

Photon scattering rate는 다음과 같다.

$$R = \Gamma\eta_{22} = \frac{\Gamma}{2}\frac{|\Omega|^2/2}{\Delta^2+\Gamma^2/4+|\Omega|^2/2} \approx 700\ /\text{s}. \tag{2.9}$$

3

Longitudinal frequency를 계산하기 위해 $x = y = 0$이라고 하자. 그럼 다음과 같다.

$$U_L = -U_0 \cos^2(kz) \quad \rightarrow \quad F_L = -\frac{\partial U_L}{\partial z} = -kU_0 \sin(2kz) = -2k^2 U_0 z + \mathcal{O}(z^3). \tag{3.1}$$

따라서 다음과 같다.

$$\omega_L = \sqrt{\frac{2k^2 U_0}{m}}. \tag{3.2}$$

좌표계를 회전시켜서 transverse direction을 x axis로 정하자. $z = y = 0$에서 다음과 같다.

$$U_T = -U_0 e^{-2x^2/w_0^2} \quad \rightarrow \quad F_T = -\frac{\partial U_T}{\partial x} = -\frac{4U_0}{w_0^2} x e^{-2x^2/w_0^2} = -\frac{4U_0}{w_0^2} x + \mathcal{O}(x^3). \tag{3.3}$$

따라서 다음과 같다.

$$\omega_T = \sqrt{\frac{4U_0}{m w_0^2}}. \tag{3.4}$$

SI unit에서 문제에서 주어진 값들을 대입하여 numerical value를 구하면 ω_L, ω_T 각각 3×10^6, 3×10^4 Hz이다.