Pregunta 6.39

6.39 Utilice la función gamma con $y = \sqrt{2x}$ para demostrar que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

6.41 Utilice la función gamma con $y = \sqrt{2x}$ para demostrar que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

RESPUESTA

6.41 Setting $\alpha = 1/2$ in the gamma distribution and integrating, we have

$$\frac{1}{\sqrt{\beta}\Gamma(1/2)} \int_0^\infty x^{-1/2} e^{-x/\beta}\, dx = 1.$$

Substitute $x = y^2/2$, $dx = y\, dy$, to give

$$\Gamma(1/2) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\beta}} \int_0^\infty e^{-y^2/2\beta}\, dy = 2\sqrt{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\beta}} \int_0^\infty e^{-y^2/2\beta}\, dy \right) = \sqrt{\pi},$$

since the quantity in parentheses represents one-half of the area under the normal curve $n(y; 0, \sqrt{\beta})$.

Pregunta 6.40

6.40 En cierta ciudad, el consumo diario de agua (en millones de litros) sigue aproximadamente una distribución gamma con $\alpha = 2$ y $\beta = 3$. Si la capacidad diaria de dicha ciudad es de 9 millones de litros de agua, ¿cuál es la probabilidad de que en cualquier día dado el suministro de agua sea inadecuado?

6.40 En cierta ciudad, el consumo diario de agua (en millones de litros) sigue aproximadamente una distribución gamma con $\alpha = 2$ y $\beta = 3$. Si la capacidad diaria de dicha ciudad es 9 millones de litros de agua, ¿cuál es la probabilidad de que en cualquier día dado el suministro de agua sea inadecuado?

RESPUESTA

6.40 $P(X > 9) = \frac{1}{9}\int_9^\infty x^{-x/3}\,dx = \left[-\frac{x}{3}e^{-x/3} - e^{-x/3}\right]\Big|_9^\infty = 4e^{-3} = 0.1992.$

Pregunta 6.41

6.41 Si una variable aleatoria X tiene una distribución gamma con $\alpha = 2$ y $\beta = 1$, calcule $P(1.8 < X < 2.4)$.

6.39 Si una variable aleatoria X tiene una distribución gamma con $\alpha = 2$ y $\beta = 1$, encuentre $P(1.8 < X < 2.4)$.

RESPUESTA

6.39 $P(1.8 < X < 2.4) = \int_{1.8}^{2.4} xe^{-x}\,dx = [-xe^{-x} - e^{-x}]\Big|_{1.8}^{2.4} = 2.8e^{-1.8} - 3.4e^{-2.4} = 0.1545.$

Pregunta 6.42

6.42 Suponga que el tiempo, en horas, necesario para reparar una bomba de calor es una variable aleatoria X que tiene una distribución gamma con los parámetros $\alpha = 2$ y $\beta = 1/2$. ¿Cuál es la probabilidad de que la siguiente llamada de servicio requiera

a) a lo sumo una hora para reparar la bomba de calor?

b) al menos dos horas para reparar la bomba de calor?

6.42 Suponga que el tiempo, en horas, que toma reparar una bomba de calor es una variable aleatoria X que tiene una distribución gamma con parámetros $\alpha = 2$ y $\beta = 1/2$. ¿Cuál es la probabilidad de que la siguiente llamada de servicio requiera

a) a lo más 1 hora para reparar la bomba de calor?

b) al menos 2 horas para reparar la bomba de calor?

RESPUESTA

6.42 (a) $P(X < 1) = 4\int_0^1 xe^{-2x}\,dx = [-2xe^{-2x} - e^{-2x}]|_0^1 = 1 - 3e^{-2} = 0.5940.$

(b) $P(X > 2) = 4\int_0^\infty xe^{-2x}\,dx = [-2xe^{-2x} - e^{-2x}]|_2^\infty = 5e^{-4} = 0.0916.$

Pregunta 6.43

6.43 *a*) Calcule la media y la varianza del consumo diario de agua del ejercicio 6.40.

b) De acuerdo con el teorema de Chebyshev, ¿hay por lo menos 3/4 de probabilidad de que el consumo de agua en cualquier día determinado caiga dentro de cuál intervalo?

6.43 *a*) Encuentre la media y la varianza del consumo diario de agua del ejercicio 6.40.

b) De acuerdo con el teorema de Chebyshev, ¿hay una probabilidad de al menos 3/4 de que el consumo de agua en cualquier día dado caiga dentro de un intervalo? ¿De cuál?

RESPUESTA

6.43 (a) $\mu = \alpha\beta = (2)(3) = 6$ million liters; $\sigma^2 = \alpha\beta^2 = (2)(9) = 18$.

(b) Water consumption on any given day has a probability of at least 3/4 of falling in the interval $\mu \pm 2\sigma = 6 \pm 2\sqrt{18}$ or from -2.485 to 14.485. That is from 0 to 14.485 million liters.

Pregunta 6.44

6.44 En cierta ciudad el consumo diario de energía eléctrica, en millones de kilowatts-hora, es una variable aleatoria X que tiene una distribución gamma con media $\mu = 6$ y varianza $\sigma^2 = 12$.

a) Calcule los valores de α y β.

b) Calcule la probabilidad de que en cualquier día dado el consumo diario de energía exceda los 12 millones de kilowatts-hora.

6.44 En cierta ciudad, el consumo diario de energía eléctrica, en millones de kilowatts-hora, es una variable aleatoria X que tiene una distribución gamma con media $\mu = 6$ y varianza $\sigma^2 = 12$.

a) Encuentre los valores de α y β.

b) Encuentre la probabilidad de que en cualquier día dado el consumo de energía diario exceda los 12 millones de kilowatts-hora.

RESPUESTA

6.44 (a) $\mu = \alpha\beta = 6$ and $\sigma^2 = \alpha\beta^2 = 12$. Substituting $\alpha = 6/\beta$ into the variance formula we find $6\beta = 12$ or $\beta = 2$ and then $\alpha = 3$.

(b) $P(X > 12) = \frac{1}{16}\int_{12}^{\infty} x^2 e^{-x/2}\, dx$. Integrating by parts twice gives

$$P(X > 12) = \frac{1}{16}\left[-2x^2e^{-x/2} - 8xe^{-x/2} - 16e^{-x/2}\right]\Big|_{12}^{\infty} = 25e^{-6} = 0.0620.$$

Pregunta 6.45

6.45 El tiempo necesario para que un individuo sea atendido en una cafetería es una variable aleatoria que tiene una distribución exponencial con una media de 4 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sea atendida en menos de 3 minutos en al menos 4 de los siguientes 6 días?

6.45 La longitud de tiempo para que un individuo sea atendido en una cafetería es una variable aleatoria que tiene una distribución exponencial con una media de 4 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sea atendida en menos de 3 minutos en, al menos, 4 de los siguientes 6 días?

RESPUESTA

6.45 $P(X < 3) = \frac{1}{4}\int_0^3 e^{-x/4}\, dx = -e^{-x/4}\Big|_0^3 = 1 - e^{-3/4} = 0.5276.$
Let Y be the number of days a person is served in less than 3 minutes. Then
$P(Y \geq 4) = \sum_{x=4}^{6} b(y; 6, 1 - e^{-3/4}) = \binom{6}{4}(0.5276)^4(0.4724)^2 + \binom{6}{5}(0.5276)^5(0.4724)$
$+ \binom{6}{6}(0.5276)^6 = 0.3968.$

Pregunta 6.46

6.46 La vida, en años, de cierto interruptor eléctrico tiene una distribución exponencial con una vida promedio de $\beta = 2$. Si 100 de estos interruptores se instalan en diferentes sistemas, ¿cuál es la probabilidad de que, a lo sumo, fallen 30 durante el primer año?

6.46 La vida, en años, de cierto interruptor eléctrico tiene una distribución exponencial con una vida promedio de $\beta = 2$. Si 100 de estos interruptores se instalan en diferentes sistemas, ¿cuál es la probabilidad de que a lo más 30 fallen durante el primer año?

RESPUESTA

6.46 $P(X < 1) = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x/2}\, dx = -e^{-x/2}\Big|_0^1 = 1 - e^{-1/2} = 0.3935$. Let Y be the number of switches that fail during the first year. Using the normal approximation we find $\mu = (100)(0.3935) = 39.35$, $\sigma = \sqrt{(100)(0.3935)(0.6065)} = 4.885$, and $z = (30.5 - 39.35)/4.885 = -1.81$. Therefore, $P(Y \leq 30) = P(Z < -1.81) = 0.0352$.

Pregunta 6.47

6.47 Suponga que la vida de servicio de la batería de un auxiliar auditivo, en años, es una variable aleatoria que tiene una distribución de Weibull con $\alpha = 1/2$ y $\beta = 2$.

6.47 Suponga que la vida de servicio, en años, de la batería de un aparato para reducir la sordera es una variable aleatoria que tiene una distribución de Weibull con $\alpha = 1/2$ y $\beta = 2$.

a) ¿Cuánto tiempo se puede esperar que dure tal batería?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tal batería esté en operación después de 2 años?

RESPUESTA

6.47 (a) $E(X) = \int_0^\infty x^2 e^{-x^2/2}\, dx = -xe^{-x^2/2}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x^2/2}\, dx$
$= 0 + \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2/2}\, dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1.2533.$

(b) $P(X > 2) = \int_2^\infty xe^{-x^2/2}\, dx = -e^{-x^2/2}\Big|_2^\infty = e^{-2} = 0.1353.$

Pregunta 6.49

6.49 Suponga que la variable aleatoria X tiene una distribución beta con $\alpha = 1$ y $\beta = 3$.

a) Determine la media y la mediana de X.

b) Determine la varianza de X.

c) Calcule la probabilidad de que $X > 1/3$.

6.49 Suponga que la variable aleatoria X tiene una distribución beta con $\alpha = 1$ y $\beta = 3$.

a) Determine la media y la mediana de X.

b) Determine la varianza de X.

c) Calcule la probabilidad de que $X > 1/3$.

RESPUESTA

6.49 The density function is $f(x) = 3(1-x)^2$, for $0 < x < 1$.

(a) $\mu = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$. To compute median, notice the c.d.f. is $F(x) = 1-(1-x)^3$, for $0 < x < 1$. Hence, solving $1-(1-m)^3 = \frac{1}{2}$ we obtain $m = 0.206$.

(b) $\sigma^2 = \frac{(1)(3)}{(1+3)^2(1+3+1)} = 0.0375$.

(c) $P\left(X > \frac{1}{3}\right) = (1-1/3)^3 = 0.2963$.

Pregunta 6.50

6.50 Si la proporción de una marca de televisores que requiere servicio durante el primer año de operación es una variable aleatoria que tiene una distribución beta con $\alpha = 3$ y $\beta = 2$, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 80% de los nuevos modelos de esta marca que se vendieron este año requieran servicio durante su primer año de operación?

6.50 Si la proporción de una marca de televisores que requiere servicio durante el primer año de operación es una variable aleatoria que tiene una distribución beta con $\alpha = 3$ y $\beta = 2$, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 80% de los nuevos modelos de esta marca que se vendieron este año requieran servicio durante su primer año de operación?

RESPUESTA

6.50 The density function is $f(x) = 12x^2(1-x)$, for $0 < x < 1$. Hence,

$$P(X > 0.8) = 12\int_{0.8}^{1} x^2(1-x)dx = 0.1808.$$

Pregunta 8.44

8.44 *a*) Calcule $t_{0.025}$ cuando $v = 14$.
b) Calcule $-t_{0.10}$ cuando $v = 10$.
c) Calcule $t_{0.995}$ cuando $v = 7$.

8.44 *a*) Calcule $t_{0.025}$ cuando $v = 14$.
b) Calcule $-t_{0.10}$ cuando $v = 10$.
c) Calcule $t_{0.995}$ cuando $v = 7$.

RESPUESTA

8.44 (a) 2.145.
(b) -1.372.
(c) -3.499.

Pregunta 8.45

8.45 *a*) Calcule $P(T < 2.365)$ cuando $v = 7$.
b) Calcule $P(T > 1.318)$ cuando $v = 24$.
c) Calcule $P(-1.356 < T < 2.179)$ cuando $v = 12$.
d) Calcule $P(T > -2.567)$ cuando $v = 17$.

8.45 *a*) Calcule $P(T < 2.365)$ cuando $v = 7$.
b) Calcule $P(T > 1.318)$ cuando $v = 24$.
c) Calcule $P(-1.356 < T < 2.179)$ cuando $v = 12$.
d) Calcule $P(T > -2.567)$ cuando $v = 17$.

RESPUESTA

8.45 (a) $P(T < 2.365) = 1 - 0.025 = 0.975$.

(b) $P(T > 1.318) = 0.10$.

(c) $P(T < 2.179) = 1 - 0.025 = 0.975$, $P(T < -1.356) = P(T > 1.356) = 0.10$. Therefore, $P(-1.356 < T < 2.179) = 0.975 - 0.010 = 0.875$.

(d) $P(T > -2.567) = 1 - P(T > 2.567) = 1 - 0.01 = 0.99$.

Pregunta 8.46

8.46 *a*) Calcule $P(-t_{0.005} < T < t_{0.01})$ para $v = 20$.
b) Calcule $P(T > -t_{0.025})$.

8.46 *a*) Calcule $P(-t_{0.005} < T < t_{0.01})$ para $v = 20$.
b) Calcule $P(T > -t_{0.025})$.

RESPUESTA

8.46 (a) Since $t_{0.01}$ leaves an area of 0.01 to the right, and $-t_{0.005}$ an area of 0.005 to the left, we find the total area to be $1 - 0.01 - 0.005 = 0.985$ between $-t_{0.005}$ and $t_{0.01}$. Hence, $P(-t_{0.005} < T < t_{0.01}) = 0.985$.

(b) Since $-t_{0.025}$ leaves an area of 0.025 to the left, the desired area is $1 - 0.025 = 0.975$. That is, $P(T > -t_{0.025}) = 0.975$.

Pregunta 8.47

8.47 Dada una muestra aleatoria de tamaño 24 de una distribución normal, calcule k tal que

a) $P(-2.069 < T < k) = 0.965$;

b) $P(k < T < 2.807) = 0.095$;

c) $P(-k < T < k) = 0.90$.

8.47 Dada una muestra aleatoria de tamaño 24 de una distribución normal, calcule k tal que

a) $P(-2.069 < T < k) = 0.965$;

b) $P(k < T < 2.807) = 0.095$;

c) $P(-k < T < k) = 0.90$.

RESPUESTA

8.47 (a) From Table A.4 we note that 2.069 corresponds to $t_{0.025}$ when $v = 23$. Therefore, $-t_{0.025} = -2.069$ which means that the total area under the curve to the left of $t = k$ is $0.025 + 0.965 = 0.990$. Hence, $k = t_{0.01} = 2.500$.

(b) From Table A.4 we note that 2.807 corresponds to $t_{0.005}$ when $v = 23$. Therefore the total area under the curve to the right of $t = k$ is $0.095 + 0.005 = 0.10$. Hence, $k = t_{0.10} = 1.319$.

(c) $t_{0.05} = 1.714$ for 23 degrees of freedom.

Pregunta 8.48

8.48 Una empresa que fabrica juguetes electrónicos afirma que las baterías que utiliza en sus productos duran un promedio de 30 horas. Para mantener este promedio se prueban 16 baterías cada mes. Si el valor t calculado cae entre $-t_{0.025}$ y $t_{0.025}$, la empresa queda satisfecha con su afirmación. ¿Qué conclusiones debería sacar la empresa a partir de una muestra que tiene una media de $\bar{x} = 27.5$ horas y una desviación estándar de $s = 5$ horas? Suponga que la distribución de las duraciones de las baterías es aproximadamente normal.

8.48 Una empresa que fabrica juguetes electrónicos afirma que las baterías que utiliza en sus productos duran un promedio de 30 horas. Para mantener este promedio se prueban 16 baterías cada mes. Si el valor t calculado cae entre $-t_{0.025}$ y $t_{0.025}$, la empresa queda satisfecha con su afirmación. ¿Qué conclusiones debería sacar la empresa a partir de una muestra que tiene una media de $\bar{x} = 27.5$ horas y una desviación estándar de $s = 5$ horas? Suponga que la distribución de las duraciones de las baterías es aproximadamente normal.

RESPUESTA

8.48 From Table A.4 we find $t_{0.025} = 2.131$ for $v = 15$ degrees of freedom. Since the value

$$t = \frac{27.5 - 30}{5/4} = -2.00$$

falls between -2.131 and 2.131, the claim is valid.

Pregunta 8.49

8.49 Una población normal con varianza desconocida tiene una media de 20. ¿Es posible obtener una muestra aleatoria de tamaño 9 de esta población con una media de 24 y una desviación estándar de 4.1? Si no fuera posible, ¿a qué conclusión llegaría?

8.49 Una población normal con varianza desconocida tiene una media de 20. ¿Es posible obtener una muestra aleatoria de tamaño 9 de esta población con una media de 24 y una desviación estándar de 4.1? Si no fuera posible, ¿a qué conclusión llegaría?

RESPUESTA

8.49 $t = (24 - 20)/(4.1/3) = 2.927$, $t_{0.01} = 2.896$ with 8 degrees of freedom. Conclusion: no, $\mu > 20$.

Pregunta 8.50

8.50 Un fabricante de cierta marca de barras de cereal con bajo contenido de grasa afirma que el contenido promedio de grasa saturada en éstas es de 0.5 gramos. En una muestra aleatoria de 8 barras de cereal de esta marca se encontró que su contenido de grasa saturada era de 0.6, 0.7, 0.7, 0.3, 0.4, 0.5, 0.4 y 0.2. ¿Estaría de acuerdo con tal afirmación? Suponga una distribución normal.

8.50 Un fabricante de cierta marca de barras de cereal con bajo contenido de grasa afirma que el contenido promedio de grasa saturada en éstas es de 0.5 gramos. En una muestra aleatoria de 8 barras de cereal de esta marca se encontró que su contenido de grasa saturada era de 0.6, 0.7, 0.7, 0.3, 0.4, 0.5, 0.4 y 0.2. ¿Estaría de acuerdo con tal afirmación? Suponga una distribución normal.

8.50 $\bar{x} = 0.475$, $s^2 = 0.0336$ and $t = (0.475 - 0.5)/0.0648 = -0.39$. Hence

$$P(\bar{X} < 0.475) = P(T < -0.39) \approx 0.35.$$

So, the result is inconclusive.