MS211 - Cálculo Numérico

Complemento da Aula 17 – Cálculo de um Spline Cúbica Natural.

Marcos Eduardo Valle

Splines Cúbicas

Dados nós $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, uma spline cúbica é uma função polinomial por partes $\mathcal{S}_3$ com as seguintes propriedades:

- S_3 é um polinômio de grau menor ou igual à 3 em cada um dos subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$.
- S_3 tem derivadas de primeira e segunda ordem contínuas em $[x_0, x_n]$.

Sendo um caso particular de polinômios cúbicos por partes, uma spline cúbica é da forma

$$\mathcal{S}_3(x) = \begin{cases} s_1(x), & x_0 \leq x \leq x_1, \\ \vdots & \\ s_k(x), & x_{k-1} \leq x \leq x_k, \\ \vdots & \\ s_n(x), & x_{n-1} \leq x \leq x_n, \end{cases}$$

em que

$$s_k(x) = a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k,$$

é um polinômio de grau pelo menos 3.

Note que uma spline cúbica é determinada por $4n$ parâmetros $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, \ldots, a_n, b_n, c_n, d_n$.

Como $\mathcal{S}_3$, $\mathcal{S}_3'$ e $\mathcal{S}_3''$ são contínuas, devemos ter

$$s_k(x_k) = s_{k+1}(x_k), \quad s_k'(x_k) = s_{k+1}'(x_k) \quad \text{e} \quad s_k''(x_k) = s_{k+1}''(x_k),$$

para todo $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Num problema de interpolação, devemos também ter $\mathcal{S}_3(x_k) = y_k$, ou seja,

$$s_1(x_0) = y_0 \quad \text{e} \quad s_k(x_k) = y_k, \quad \forall k = 1, \ldots, n.$$

Com isso, temos

$$3(n-1) + (n+1) = 4n - 2,$$

equações para determinar $4n$ incógnitas.

Logo, temos duas condições em aberto que podem ser impostas, por exemplo, de acordo com informações físicas sobre o problema.

Spline Cúbica Natural

A **spline cúbica natural** é obtida impondo as condições

$$\mathcal{S}_3''(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{S}_3''(x_n) = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$s_1''(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad s_n''(x_n) = 0.$$

Pode-se mostrar que a spline cúbica natural é aquela de menor curvatura.

Vamos mostrar que uma spline cúbica natural é determinada resolvendo um sistema linear tridiagonal

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Primeiro note que

$$
\begin{aligned}
s_k(x) &= a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k, \\
s_k'(x) &= 3a_k(x - x_k)^2 + 2b_k(x - x_k) + c_k, \\
s_k''(x) &= 6a_k(x - x_k) + 2b_k,
\end{aligned}
$$

para todo $k = 1, 2, \ldots, n$.

Da condição de interpolação, devemos ter

$$
s_1(x_0) = y_0 \quad \text{e} \quad s_k(x_k) = y_k, \quad \forall k = 1, \ldots, n.
$$

Analogamente, vamos escrever

$$
y_0' = s_1'(x_0) \quad \text{e} \quad y_k' = s_k'(x_k), \quad \forall k = 1, \ldots, n,
$$

e

$$
y_0'' = s_1''(x_0) \quad \text{e} \quad y_k'' = s_k''(x_k), \quad \forall k = 1, \ldots, n.
$$

Da expressão para s_k'' concluímos que

$$y_k'' = s_k''(x_k) = 2b_k \quad \Longrightarrow \quad b_k = \frac{y_k''}{2}, \quad \forall k = 1, \ldots, n.$$

Além disso, da continuidade de $\mathcal{S}_3''$, obtemos

$$y_{k-1}'' = s_{k-1}''(x_{k-1}) = s_k(x_{k-1}) = 6a_k(x_{k-1} - x_k) + 2b_k.$$

Denotando

$$h_k = x_k - x_{k-1}, \quad \forall k = 1, \ldots, n,$$

concluímos que

$$y_{k-1}'' = -6a_k h_k + 2b_k \quad \Longrightarrow \quad a_k = \frac{y_k'' - y_{k-1}''}{6h_k}, \quad \forall k = 1, \ldots, n.$$

Da condição de interpolação $\mathcal{S}_3(x_k) = y_k$, concluímos que

$$y_k = s_k(x_k) = d_k \quad \Longrightarrow \quad d_k = y_k, \quad \forall k = 1, \ldots, n.$$

Além disso, da continuidade de $\mathcal{S}_3$, temos

$$\begin{aligned} y_{k-1} &= s_{k-1}(x_{k-1}) = s_k(x_{k-1}) \\ &= a_k(x_{k-1} - x_k)^3 + b_k(x_{k-1} - x_k)^2 + c_k(x_{k-1} - x_k) + d_k \\ &= -a_k h_k^3 + b_k h_k^2 - c_k h_k + d_k, \end{aligned}$$

em que $h_k = x_k - x_{k-1}$. Isolando c_k, obtemos

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{h_k}\left[-a_k h_k^3 + b_k h_k^2 + d_k - y_{k-1}\right] \\ &= -a_k h_k^2 + b_k h_k + \frac{d_k - y_{k-1}}{h_k} \end{aligned}$$

Substituindo as expressões para a_k, b_k e d_k, concluímos que

$$c_k = \frac{h_k}{6}\left(2y_k'' + y_{k-1}''\right) + \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k}, \quad \forall k = 1, \ldots, n.$$

Concluindo, os coeficientes a_k, b_k, c_k e d_k em

$$s_k(x) = a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k,$$

da spline cúbica natural satisfazem

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{y''_k - y''_{k-1}}{6h_k}, \\
b_k &= \frac{y''_k}{2}, \\
c_k &= \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} + \frac{2h_k y''_k + y''_{k-1} h_k}{6}, \\
d_k &= y_k,
\end{aligned}$$

para todo $k = 1, \ldots, n$.

Agora, $y_0, y_1, \ldots, y_n$ são dados num problema de interpolação.

Resta determinar $y''_0, y''_1, \ldots, y''_n$.

Na spline natural, $y''_0 = 0$ e $y''_n = 0$. Os valores $y''_1, y''_2, \ldots, y''_{n-1}$ são determinados da continuidade de $\mathcal{S}'_3$.

Com efeito, da condição

$$s'_k(x_k) = s'_{k+1}(x_k), \quad \forall k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

deduzimos

$$\begin{aligned} c_k &= 3a_{k+1}(x_k - x_{k+1})^2 + 2b_{k+1}(x_k - x_{k+1}) + c_{k+1} \\ &= 3a_{k+1}h_{k+1}^2 - 2b_{k+1}h_{k+1} + c_{k+1}, \quad \forall k = 1, \ldots, n-1, \end{aligned}$$

em que $h_{k=1} = x_{k+1} - x_k$.

Substituindo as expressões para $c_k, a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}$ e agrupando os termos, encontramos

$$h_k y''_{k-1} + 2(h_k + h_{k+1})y''_k + h_{k+1}y''_{k+1} = 6\left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k}\right),$$

para $k = 1, \ldots, n-1$.

Equivalentemente, temos o sistema linear tridiagonal $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, com $n-1$ equações, em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2(h_1+h_2) & h_2 & & & \\ h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & & \\ & h_3 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & & h_{n-1} \\ & & & h_{n-1} & 2(h_{n-1}+h_n) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \\ \vdots \\ y_{n-1}'' \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = 6 \begin{bmatrix} \frac{y_2-y_1}{h_2} - \frac{y_1-y_0}{h_1} \\ \frac{y_3-y_2}{h_3} - \frac{y_2-y_1}{h_2} \\ \vdots \\ \frac{y_n-y_{n-1}}{h_n} - \frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-1}} \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, encontramos os valores $y_1'', \ldots, y_{n-1}''$.

Exemplo 1

Determine a spline cúbica natural $\mathcal{S}_3$ que interpola a tabela

x	0	$1/4$	$1/2$	$3/4$	1
y	1	2	1	0	1

e calcule $\mathcal{S}_3(0.35)$.

Exemplo 1

Determine a spline cúbica natural $\mathcal{S}_3$ que interpola a tabela

x	0	1/4	1/2	3/4	1
y	1	2	1	0	1

e calcule $\mathcal{S}_3(0.35)$.

Resposta: Primeiro, resolvemos o sistema linear

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -48 \\ 0 \\ 48 \end{bmatrix}$$

cuja solução fornece

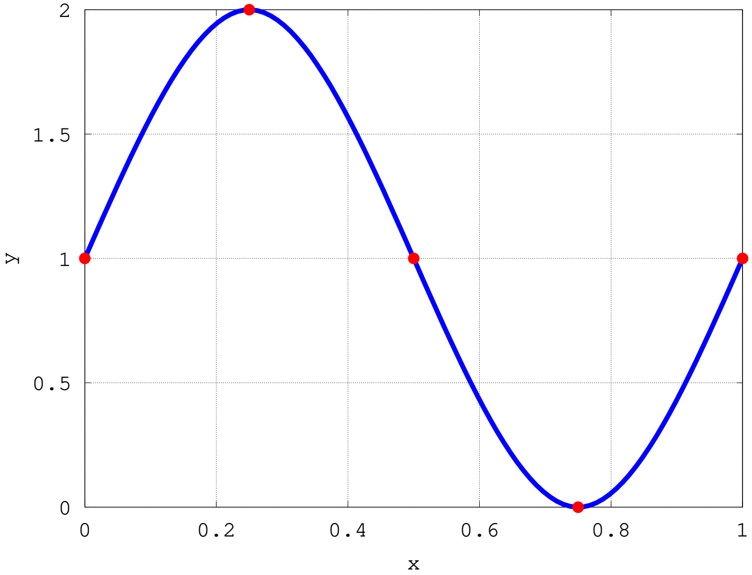
$$y_0'' = 0, \quad y_1'' = -48, \quad y_2'' = 0, \quad y_3'' = 48 \quad \text{e} \quad y_4'' = 0.$$

Com esses valores, concluímos que a spline cúbina natural que interpola a tabela é

$$\mathcal{S}_3(x) = \begin{cases} -32(x-\frac{1}{4})^3 - 24(x-\frac{1}{4})^2 + 2, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ 32(x-\frac{1}{2})^3 - 6(x-\frac{1}{2}) + 1, & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 32(x-\frac{3}{4})^3 + 24(x-\frac{3}{4})^2, & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}, \\ -32(x-1)^3 + 6(x-1) + 1, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Finalmente, como $0.35 \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, temos que

$$\mathcal{S}_3(0.35) = 32(-0.15)^3 - 6(-0.15) + 1 = 1.792.$$


2
1.5
1
0.5
0
y
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x