Exercicio 12. Sobre a esfera $\mathbb{X}(\theta, \varphi) = (r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta)$ parametrizada en termos da latitude (θ) e lonxitude (φ) considérase a circunferencia $\theta = \theta_0$.

- Calculade a curvatura xeodésica desa circunferencia nun punto arbitrario.
- Comprobade se o campo de vectores tanxentes a esa circunferencia é paralelo ao longo da mesma.
- En caso negativo, se consideramos o vector tanxente á circunferencia nun punto p e o trasladamos paralelamente ao longo da mesma, obterase de novo un vector en p que formará un ángulo ϕ co vector de partida. Cal será ese ángulo ϕ?

Solución. Como é habitual, comezaremos dando unha orientación sobre a esfera S. En vista da nosa parametrización, esta é a esfera centrada na orixe e de raio r, que vén dada pola ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Así, se consideramos a función diferenciable $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, vemos que $S = f^{-1}(r^2)$ e o seu gradiente $\nabla f = 2(x, y, z)$ non se anula nos puntos da esfera. Polo tanto, en virtude do teorema do valor regular, o campo de vectores

$$\vec{N}(x, y, z) = \frac{\nabla f(x, y, z)}{||\nabla f(x, y, z)||} = \frac{1}{r}(x, y, z)$$

é un campo normal unitario definido globalmente na esfera.

Consideremos pois a circunferencia $\theta = \theta_0$, que podemos parametrizar coa aplicación

$$\alpha(t) = \mathbb{X}(\theta_0, t) = (r\cos\theta_0\cos t, r\cos\theta_0\sin t, r\sin\theta_0).$$

A curvatura xeodésica de α no punto $\alpha(t)$ está dada pola expresión $\kappa_g^\alpha(t) = \det(\alpha'(t), \alpha''(t), \vec{N}(\alpha(t)))/||\alpha'(t)||^3$. Agora ben,

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= (-r\cos\theta_0\sin t, r\cos\theta_0\cos t, 0), \\ \alpha''(t) &= (-r\cos\theta_0\cos t, -r\cos\theta_0\sin t, 0), \\ \vec{N}(\alpha(t)) &= (\cos\theta_0\cos t, \cos\theta_0\sin t, \sin\theta_0), \end{aligned}$$

e $||\alpha'(t)|| = r\cos\theta_0$ é constante (isto é, α está parametrizada proporcionalmente ao parámetro lonxitude de arco). Polo tanto,

$$\kappa_g^\alpha(t) = \frac{1}{r^3\cos^3\theta_0}\begin{vmatrix} -r\cos\theta_0\sin t & -r\cos\theta_0\cos t & \cos\theta_0\cos t \\ r\cos\theta_0\cos t & -r\cos\theta_0\sin t & \cos\theta_0\sin t \\ 0 & 0 & \sin\theta_0 \end{vmatrix} = \frac{\sin\theta_0}{r\cos\theta_0}.$$

Pasemos a ver cando o campo de vectores tanxente a $\theta = \theta_0$ é paralelo. Por definición, esa condición é equivalente a que a curva α sexa unha xeodésica, así que dito campo é paralelo se e soamente se κ_g^α é identicamente nula. En vista da expresión de κ_g^α, a curvatura xeodésica será nula se e soamente se $\sin\theta_0 = 0$, que se corresponde con $\theta_0 = 0$.

Para $\theta_0 \neq 0$, a determinación do ángulo ϕ será equivalente ao cálculo do transporte paralelo $\mathcal{P}_{t_0}^{t_0+2\pi}$ ao longo de α desde un punto arbitrario $p = \alpha(t_0)$ ata volver ao mesmo. Polo tanto, a dificultade do problema estará en atopar un campo de vectores paralelo ao longo de α. Neste caso, como α non é xeodésica e non hai ningún campo de vectores paralelo "evidente" (por exemplo, un podería probar co campo coordenado $\mathbb{X}_1$, mais non é paralelo), a única opción que temos é escribir a ecuación diferencial dos campos paralelos e ver se somos capaces de atopar solucións a esta.

Recordemos que, dada unha curva da forma $\alpha(t) = \mathbb{X}(u(t), v(t))$, os campos tanxentes ao longo de α son da forma

$$\vec{V}(t) = a(t)\mathbb{X}_1(u(t), v(t)) + b(t)\mathbb{X}_2(u(t), v(t)),$$

sendo a e b funcións diferenciables. O campo $\vec{V}$ descrito anteriormente é paralelo se e soamente se se satisfai o seguinte sistema de EDOs:

$$\begin{cases} a' + au'\Gamma_{11}^1 + (av' + bu')\Gamma_{12}^1 + bv'\Gamma_{22}^1 = 0, \\ b' + au'\Gamma_{11}^2 + (av' + bu')\Gamma_{12}^2 + bv'\Gamma_{22}^2 = 0. \end{cases}$$

Neste caso, $u(t) = \theta_0$ e $v(t) = t$. Ademais, os símbolos de Christoffel da esfera (calculados a partir da primeira forma fundamental) son

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos\theta\sin\theta \\ 0 & -\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} & 0 \end{pmatrix}.$$

En definitiva, o campo de vectores $\vec{V}$ será paralelo ao longo da curva $\theta = \theta_0$ se e soamente se

$$\begin{cases} a' = -b\cos\theta_0\sin\theta_0, \\ b' = a\dfrac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0}. \end{cases}$$

Posto que só necesitamos calcular un campo paralelo ao longo de α, imos buscar tal campo de xeito que en $t = 0$ este sexa a velocidade da curva $\vec{V}(0) = \alpha'(0) = \mathbb{X}_2(\theta_0, 0)$. Esta condición inicial correspóndese con $a(0) = 0$ e $b(0) = 1$. Resolvamos pois este problema de valor inicial.

Derivando a primeira ecuación, e tendo en conta que $a'(0) = -b(0)\cos\theta_0\sin\theta_0$, vemos que a función $a(t)$ satisfai

$$\begin{cases} a'' = -a\sin^2\theta_0, \\ a(0) = 0, \;\; a'(0) = -\cos\theta_0\sin\theta_0, \end{cases}$$

que é unha ecuación diferencial linear de segunda orde con coeficientes constantes. A solución desta ecuación é

$$a(t) = -\cos\theta_0\sin(t\sin\theta_0).$$

Por outra banda, $b(t)$ cumpre a ecuación diferencial

$$\begin{cases} b' = -\sin\theta_0 \sin(t\sin\theta_0), \\ b(0) = 1, \end{cases}$$

cuxa solución é

$$b(t) = \cos(t\sin\theta_0).$$

En definitiva, o campo paralelo $\vec{V}(t)$ ao longo de α con condición inicial $\vec{V}(0) = \alpha'(0)$ será

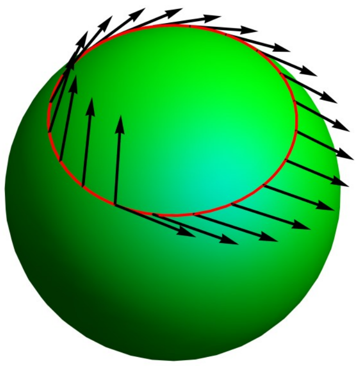
$$\vec{V}(t) = -\cos\theta_0 \sin(t\sin\theta_0)\mathbb{X}_1(\theta_0, t) + \cos(t\sin\theta_0)\mathbb{X}_2(\theta_0, t).$$

Para rematar, calculemos o ángulo que forman $\vec{V}(t_0)$ e $\vec{V}(t_0 + 2\pi)$. Sen perda de xeneralidade, podemos supoñer que $t_0 = 0$, o que implica que

$$\begin{aligned} \vec{V}(0) &= \mathbb{X}_2(\theta_0, 0) = (0, r\cos\theta_0, 0), \\ \vec{V}(2\pi) &= -\cos\theta_0 \sin(2\pi\sin\theta_0)\mathbb{X}_1(\theta_0, 2\pi) + \cos(2\pi\sin\theta_0)\mathbb{X}_2(\theta_0, 2\pi) \\ &= (r\sin\theta_0\cos\theta_0\sin(2\pi\sin\theta_0), r\cos\theta_0\cos(2\pi\sin\theta_0), -r\cos^2\theta_0\sin(2\pi\sin\theta_0)) \end{aligned}$$

O ángulo (orientado) que forman $\vec{V}(0)$ e $\vec{V}(2\pi)$ coincide co que forman $\vec{e}_1 = (0, 1, 0)$ e $\vec{V}(2\pi)$, xa que $\cos\theta_0 > 0$. Para calculalo, estendemos $\{\vec{e}_1\}$ a unha base ortonormal de orientación positiva de T_pS engadindo o vector $\vec{e}_2 = J\vec{e}_1 = (-\sin\theta_0, 0, \cos\theta_0)$. Tense pois que

$$\begin{aligned} \langle \vec{V}(2\pi), \vec{e}_1 \rangle &= r\cos\theta_0\cos(2\pi\sin\theta_0), \\ \langle \vec{V}(2\pi), \vec{e}_2 \rangle &= -r\cos\theta_0\sin(2\pi\sin\theta_0), \end{aligned}$$



e como a norma de $\vec{V}$ é $r\cos\theta_0$, concluímos finalmente que o ángulo que forman $\vec{V}(0)$ e $\vec{V}(2\pi)$ é

$$\boxed{\phi = -2\pi\sin\theta_0}$$

Observación. Existen métodos alternativos para determinar o transporte paralelo ao longo da curva pedida (ou máis xeneralmente, ao longo de curvas pechadas) sen necesidade de resolver unha ecuación diferencial. Véxase por exemplo *Differential geometry: a first course in curves and surfaces* (Theodore Shifrin; Exercicio 2.4.8) ou *Un curso de geometría diferencial* (Hernández Cifre, Pastor González; Sección 6.1.2), onde se ilustra o cálculo de ϕ empregando o concepto de *holonomía*.