Sistemas de EDO lineales

Vamos a centrarnos en la resolución de sistemas de EDO lineales de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \tag{1}$$

donde los a_{ij} son números reales. Podemos reescribir este sistema como una única ecuación diferencial matricial

$$X' = AX, \tag{2}$$

siendo

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Ya vimos en las clases de teoría que la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = C \end{cases} \tag{3}$$

es $X(t) = e^{tA}C$, y que la dificultad de la resolución de (3) está en calcular e^{tA}.

Recordemos que la exponencial de una matriz B se define como

$$e^B = \exp(B) = I + B + \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + \frac{1}{4!}B^4 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}B^k, \tag{4}$$

que no se puede calcular directamente a partir de esta definición, ya que involucra calcular infinitas matrices y sumarlas, con lo que necesitaremos alguna herramienta que permita hallar estas exponenciales sin necesidad de usar la fórmula (4). Aquí es donde entra en juego la diagonalización y triangularización de matrices.

En la parte de álgebra, para la matriz A en (3) vimos que existe una matriz S inversible tal que $S^{-1}AS = T$ es una matriz "sencilla" (es decir, diagonal o triangular superior). Se tiene en este caso que

$$e^{tA} = e^{S(tT)S^{-1}} = Se^{tT}S^{-1},$$

así que basta entender cómo son las posibles matrices T y sus respectivas exponenciales. Para matrices 2×2, hay tres casos:

1. **A es diagonalizable.** En este caso, se tiene que A tiene autovalores reales λ_1, λ_2 (que pueden ser iguales) y

   $$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

   Se cumple que

   $$e^{tT} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

   O sea, la exponencial de una matriz diagonal se obtiene tomando la exponencial de cada uno de los elementos de la diagonal.

2. **A tiene un autovalor real pero no es diagonalizable.** Aquí, A tendría un autovalor real único λ pero sólo habría un autovector asociado, con lo que A es triangularizable pero no diagonalizable. Se cumpliría aquí que

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & s \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

y su exponencial se calcula de la siguiente manera:

$$e^{tT} = \exp\begin{pmatrix} t\lambda & 0 \\ 0 & t\lambda \end{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} 0 & ts \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La primera exponencial está claro cómo se calcula, al ser una matriz diagonal. Respecto de la otra matriz, basta darse cuenta de que

$$\begin{pmatrix} 0 & st \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$$

así que usando la definición de la exponencial de matrices (4), obtenemos

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & st \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & st \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & st \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Combinando todo esto, llegamos a que

$$e^{tT} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & st \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & ste^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

3. **A no tiene autovalores reales.** Aquí, tendremos que A tiene dos autovalores **complejos** $\alpha + \beta i$, $\alpha - \beta i$, de modo que

$$T = \begin{pmatrix} \alpha + \beta i & 0 \\ 0 & \alpha - \beta i \end{pmatrix},$$

y aquí podemos usar la fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ para ver que

$$e^{tT} = \begin{pmatrix} e^{t\alpha + it\beta} & 0 \\ 0 & e^{t\alpha - it\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t}\cos(\beta t) + ie^{\alpha t}\sin(\beta t) & 0 \\ 0 & e^{\alpha t}\cos(\beta t) - ie^{\alpha t}\sin(\beta t) \end{pmatrix}.$$

Hay que tener especial cuidado al calcular e^{tA}, ya que al final tiene que tener todos sus coeficientes reales (las i desaparecen).

Veamos los dos últimos casos por medio de dos ejemplos.
Ejemplo 1: Consideramos el sistema

$$\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = x + y \end{cases} \tag{5}$$

La matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

con autovalor único $\lambda = 2$ y autoespacio correspondiente $\{(x, x) \colon x \in \mathbb{R}\}$. Utilizando las herramientas de triangularización de matrices, se ve que la matriz

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

permite triangularizar A, pues
$$T = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$
es triangular superior. Calculamos la matriz e^{tT} de la siguiente manera:
$$e^{tT} = \exp\begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix}\exp\begin{pmatrix} 0 & -t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & -te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix},$$
y
$$e^{tA} = S\begin{pmatrix} e^{2t} & -te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}S^{-1} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix}.$$

En definitiva, la solución general del sistema sería
$$X(t) = e^{tA}C = e^{2t}\begin{pmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix}C.$$

Ejemplo 2: Resolvemos el sistema $X' = AX$, siendo
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores son $1 \pm 2i$, siendo además $(1, i)$ un autovector para $1+2i$ y $(1, -i)$ un autovector para $1 - 2i$. Así, la matriz
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$
es tal que
$$T = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{pmatrix}$$
es una matriz diagonal. Podemos calcular ahora la exponencial e^{tT}, y quedaría
$$e^{tT} = \begin{pmatrix} e^t\cos(2t) + ie^t\sin(2t) & 0 \\ 0 & e^t\cos(2t) - ie^t\sin(2t) \end{pmatrix},$$
y con esto ya podemos hallar e^{tA}:
$$e^{tA} = S\begin{pmatrix} e^t\cos(2t) + ie^t\sin(2t) & 0 \\ 0 & e^t\cos(2t) - ie^t\sin(2t) \end{pmatrix}S^{-1} = e^t\begin{pmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ -\sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix}.$$
Concluimos así que la solución general de la ecuación $X' = AX$ es
$$X(t) = e^t\begin{pmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ -\sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix}C.$$