دانشگاه تهران

پردیس دانشکده‌های فنی

دانشکده مهندسی عمران

محاسبات عددی

پروژه برنامه‌نویسی

نام نویسندگان:

...

نام گروه:

...

تابستان ۱۴۰۳

فهرست

قسمت اصلی

این قسمت اصلی پروژه است که در آن بار گسترده ثابت ۸ تن بر متر فرض شده است.

پارامترها

در این قسمت ابتدا پارامترهایی که باید فرض میشدند یا واحد آن ها SI نبود توضیح داده شده است.

مدول الاستیسیته

برای پارامتر مدول الاستیسیته فرض شده ۲۰۰ گیگا پاسکال است. با توجه به جنس مطرح شده مدول الاستیسیته انواع فولاد بین ۱۹۵ تا ۲۱۹ مگاپاسکال است که در این پروژه عدد ۲۰۰ مگاپاسکال فرض شده است.

مش‌بندی

در قسمت پارمترها مش بندی نیز از کاربر دریافت میشود به این صورت که کاربر تعداد برش هایی که قرار است تیر داشته باشد را در ابتدای اجرا به برنامه میدهد و سپس بر اساس عدد وارد شده تیر تقسیم شده و باقی محاسبات انجام میشود.

بار گسترده

برای تبدیل واحد بارگسترده به SI آن را در g (شتاب گرانش زمین) یعنی $9.80665\frac{m}{s^2}$ و 1000 ضرب میکنیم تا به واحد نیوتن بر متر برسیم.

مساحت

همانطور که در صورت پروژه گفته شده است مساحت از یک معادله درجه ۲ پیروی میکند. با دانستن مساحت تیر در سه نقطه میتوان سه معادله سه مجهول حل کرد و ضرایب را به دست آورد:

$$A(0) = c = 1600 \times 10^{-4}$$

$$A(5) = a(5)^2 + b(5) + c = 400 \times 10^{-4}$$

$$A(10) = a(10)^2 + b(10) + c = 100 \times 10^{-4}$$

که با حل دستگاه بالا نتجیه میشود:

$$a = 0.0009 \quad (\text{بعد بدون})$$

$$b = -0.024\, m$$

$$c = 0.16\, m^2$$

حل دقیق

این قسمت در هیچ یک از خواسته های پروژه نبوده و نویسنده جهت نشان دادن اختلاف پاسخ حل عددی خود با پاسخ دقیق این قسمت را اضافه کرده است.

در این قسمت با استفاده از دستور dsolve پاسخ دقیق معادله دیفرانسیل به دست آمده است.

هم در قسمت حل دقیق هم در قسمت محاسبه عددی بخش شرایط مرزی وجود دارد که در ادامه توضیح داده خواهد شد.

شرایط مرزی

برای حل معادله دیفرانسیل مرتبه دو نیاز به دو شرط مرزی است. با توجه به فیزیک مسئله، شرایط مرزی به صورت زیر هستند:

$$u(0) = 0$$

$$\frac{du}{dx}|_{u=10} = 0$$

شرط مرزی اول به این دلیل است که تیر یک سر گیر دار است و در محل اتصال جابه جایی ندارد در غیر این صورت تیر یک سر گیر دار نبود.

شرط مرزی دوم از این مسئله منتج میشود که:

$$\sigma = E.\epsilon$$

$$\frac{F}{A} = E.\frac{du}{dx}$$

چون بار متمرکزی در انتهای تیر نیست و تنها یک dF وجود دارد که مقدار نهایی F را در رابطه بالا در $x=10$ صفر میکند میتوان نتیجه گرفت که کرنش در انتهای تیر برابر صفر است و شرط مرزی دوم ساخته میشود.

حل عددی

در این قسمت با استفاده از روش FDM (Finite Difference Method) به حل معادله دیفرانسل میپردازیم.

در انتها باید ماتریس ضرایب A، ماتریس مجهولات u_fdm و ماتریس مقادیر معلوم B را به دست آوریم.

معادلات ما با استفاده از بسط اویلر به صورت تفاضل مرکزی و به شکل زیر در می‌آید:

$$\frac{du}{dx} = \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{U_{i+1} + U_{i-1} - 2U_i}{h^2}$$

با تغییر دادن معادله دیفرانسل اصلی و به دست اوردن ترم های $\frac{du}{dx}$ و $\frac{d^2u}{dx^2}$ خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dx}\left(E.A.\frac{du}{dx}\right) + q = 0$$

$$E.\frac{d}{dx}\left(A.\frac{du}{dx}\right) + q = 0$$

$$E\left[A'.\frac{du}{dx} + A.\frac{d^2u}{dx}\right] + q = 0$$

$$(2ax + b).\frac{du}{dx} + (ax^2 + bx + c).\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{q}{E}$$

با مشخص بودن A و A' و جایگذاری مشتقات u میتوان ضرایب U_{i+1}، U_i و U_{i-1} را به دست آورد. این ضرایب در ماتریس ضرایب در سطر i و ستون i+1، i و i-1 قرار میگیرند:

$$A(i, i-1) = 2c - bh + 2bx_i + 2ax_i^2 - 2ahx_i$$

$$A(i,i) = -4ax_i^2 - 4bx_i - 4c$$

$$A(i,i+1) = 2c + bh + 2bx_i + 2ax_i^2 + 2ahx_\mathrm{i}$$

برای ماتریس مقادیر معلوم چون با اندیس i تغییر نمیکند کل ردیف های آن ثابت و برابر با $-\frac{q}{E}$ است.

شرایط مرزی در حل عددی

شرط مرزی اول یک معادله به معادلات اضافه خواهد کرد:

$$U_1 = 0$$

نتیجه این معادله در ماتریس ضرایب و ماتریس مقادیر معلوم میشود:

$$A(1,1) = 1$$

$$B(1,1) = 0$$

یعنی سطر اول ستون اول ماتریس ضرایب و ماتریس مقادیر معلوم به صورت بالا میشود.

برای مرز دوم طبق بسط اویلر برای مشتق تابع پس‌رو خواهیم داشت:

$$\frac{2}{h^2}[U_N - U_{N+1}] = B_{N+1} - \frac{2C}{h}$$

که در آن U_{N+1} اخرین مجهول و B_{N+1} اخرین مقدار معلوم و C مقدار مشتق در انتهای تیر است که در مسئله ما برابر صفر میباشد. نتیجه شرط مرزی بالا در ماتریس ضرایب به صورت زیر است:

$$A(N+1,N) = \frac{2}{h^2}$$

$$A(N+1,N+1) = -\frac{2}{h^2}$$

ماتریس مقادیر معلوم به علت صفر بودن C بدون تغییر باقی میماند.

تابع LU

در انتهای کد تابع‌ای تعریف شده است (LU) که برای حل دستگاه معادلات استفاده شده است. در این تابع

همانطور که خواسته پروژه بوده است، از هیچ یک از توابع داخلی متلب استفاده نشده است.

این تابع در چهار قسمت اصلی نوشته شده است. در قسمت اول و ابتدای کار ماتریس پایینی و بالایی را تعریف میکنیم (L و U). ماتریس بالایی را بالای قطر و ماتریس پایینی را شامل قطر در نظر میگیریم برای همین قطر ماتریس L باید ۱ باشد و قطر ماتریس U صفر است. به همین جهت در اینجا، ماتریس L به عنوان یک ماتریس واحد (Identity Matrix) و ماتریس U به عنوان یک ماتریس صفر مقداردهی اولیه می‌شوند.

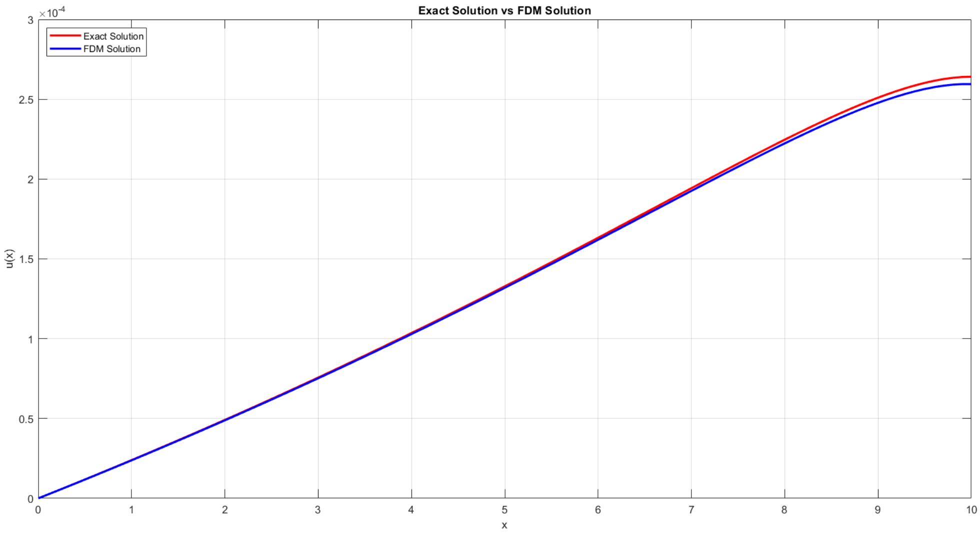
در قسمت دوم تجزیه LU انجام میشود یعنی در این بخش، ماتریس A به دو ماتریس مثلثی پایین L و مثلثی بالا U تجزیه می‌شود. در حلقه اول، عناصر ماتریس U محاسبه می‌شوند و در حلقه دوم، عناصر ماتریس L محاسبه می‌شوند.

در بخش سوم، دستگاه معادلات مثلثی پایین ($LY = B$) با استفاده از روش جایگذاری پیشرو (Forward Substitution) حل می‌شود تا بردار Y به دست آید.

در بخش چهارم و نهایی، دستگاه معادلات مثلثی بالا ($UX = Y$) با استفاده از روش جایگذاری پسرو (Backward Substitution) حل می‌شود تا بردار X به دست آید.

مقایسه حل دقیق و حل عددی

برای صحت سنجی پاسخ به دست آمده کد اجرا شده و با مش بندی 100 ران شده است. نتایج حل دقیق و حل عددی روی یک نمودار رسم شده اند تا قابل مقایسه باشند:



شکل ۱: مقایسه حل عددی و حل دقیق

همانطور که میبینیم نتایج به خوبی باهم همخوانی دارند و در صورت اضافه کردن مش‌بندی و دقیق تر کردن حل عددی اختلاف نتایج کمتر نیز خواهد شد.