HW3 - PART2 | João Neto, A22200558

Exemplo 3

3.1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-2,3) \cdot (1,3) = -2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = -2 + 9 = 7$

3.2) $\vec{AB} = B - A = (0-(-2), 2-(-1)) = (2,3)$
$\vec{AB} \cdot \vec{u} = (2,3) \cdot (-2,3) = 2 \times (-2) + 3 \cdot 3 = -4 + 9 = 5$

3.3) $(\vec{i} - 3\vec{j}) \cdot 2\vec{v}$
$(\vec{i} - 3\vec{j}) \cdot 2\vec{v} = (1,-3) \cdot 2(1,3) = (1,-3) \cdot (2,6) = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 6 = -16$

3.4) $\vec{u} \hat{\ } \vec{v}$:
$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$
$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u} \hat{\ } \vec{v}) = \sqrt{13} \cdot \sqrt{10} \cos(\vec{u} \hat{\ } \vec{v}) = \sqrt{130} \cos(\vec{u} \hat{\ } \vec{v})$
Sabe-se que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7$:
$\sqrt{130} \cos(\vec{u} \hat{\ } \vec{v}) = 7$
$\cos(\vec{u} \hat{\ } \vec{v} = 7/\sqrt{130}$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos^{-1}(7/\sqrt{130})$
$\cos^{-1}(7/\sqrt{130}) = 52.1°$

Exemplo 5

5.1) $\vec{AB} = B - A = (1,0) - (-1,3) = (2,-3)$
Declive $m = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$
$90° < a < 180°$
$a = tg^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right) \approx -56°$
$\therefore a \approx 180° - 56° = 124°$

5.2) AB é do tipo $y = -\frac{3}{2}x + b$
$0 = -\frac{3}{2} \times 1 + b$
$\hookrightarrow \frac{3}{2}$
a eq reduzida
de AB é $y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$

EXEMPLO 6

REDUZIDA DE r PERPENDICULAR A AB QUE PASSA NO PONTO $C(0,1)$

$\overrightarrow{AB} \rightsquigarrow A(2,3)$ & $B(5,1)$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (5,1) - (2,3) = (3,-2)$

Declive de $\overrightarrow{AB}$ e $m = -\frac{2}{3}$

A reduzida de AB é da forma $y = -\frac{2}{3}x + b$:

$3 = -\frac{2}{3} \times 2 + b \Rightarrow b = 3 + \frac{4}{3} \Rightarrow b = \frac{13}{3}$

Reduzida de AB é $y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$

AB tem declive $m_r = -\frac{1}{m_{AB}} = \frac{-1}{\frac{-2}{3}} = \frac{3}{2}$

Reduzida de r é: $y = \frac{3}{2}x + 1$

EXEMPLO 7

$M\left(\frac{-5+0}{2}, \frac{2+(-4)}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}, -1\right)$

$\overrightarrow{MP} = P - M = (x, y) - \left(-\frac{5}{2}, -1\right) = \left(x + \frac{5}{2}, y + 1\right)$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (0,-4) - (-5, 2) = (5, -6)$

$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{5}{2}, y+1\right) \cdot (5,-6) = 0$

$\left(x + \frac{5}{2}\right) \times 5 + (y+1) \times (-6) = 0$

$5x + \frac{25}{2} - 6y - 6 = 0$

$-6 = -5x - \frac{13}{2} \Rightarrow y = \frac{5x}{6} + \frac{13}{12}$

Reduzida da mediatriz do segmento de reta de [AB] é:

$y = \frac{5x}{6} + \frac{13}{12}$

EXEMPLO 14

EQUAÇÕES CARTESIANAS DA RETA r COM DIREÇÃO DO VETOR $\vec{u}=(1,-3,4)$ QUE PASSA POR $A(-2,0,1)$. OBTENHA O OUTRO PONTO DESSA RETA.

$$\frac{x-(-2)}{1} = \frac{y-0}{-3} = \frac{z-1}{4} = x+2 = \frac{-y}{3} = \frac{z-1}{4}$$

OU

$$\begin{cases} x+2 = -\dfrac{y}{3} \\ x+2 = \dfrac{z-1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+y = -6 \\ 4x-z = -9 \end{cases}$$

DETERMINANDO O OUTRO PONTO

$$\begin{cases} 3\times 0 + y = -6 \\ 4\times 0 - y = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -6 \\ z = 9 \end{cases}$$

$P(0,-6,9)$

EXEMPLO 16

Seja $\vec{u} = (-1,2,-2)$ NUM PLANO α QUE PASSA NO PONTO $I(6,2,0)$. DETERMINAR A EQUAÇÃO DO PLANO α.

$\rightarrow$ É DO TIPO $ax+by+cz+d=0$

$-x+2y-2z+d=0$

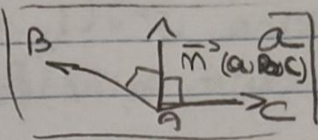
$-6+2\times 2-2\times 0+d=0 \Rightarrow d=2$

A EQUAÇÃO GERAL DO PLANO α É:

$-x+2y-2z+2=0$

EXEMPLO 18

DETERMINE UMA EQUAÇÃO DO PLANO ABC, SENDO $A(-2,1,-1)$, $B(3,0,2)$ e $C(1,-3,1)$



$\vec{AB} = B - A = (3,0,2) - (-2,1,-1) = (5,-1,3)$
$\vec{AC} = C - A = (1,-3,-1) - (-2,1,-1) = (3,-4,0)$

$\vec{m} \cdot \vec{AB} = 0 \wedge \vec{m} \cdot \vec{AC} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (a,b,c)\cdot(5,-1,3) = 0 \\ (a,b,c)\cdot(3,-4,0) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 5a - b + 3c = 0 \\ 3a - 4b = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 5 \times \frac{4}{3} b - b + 3c = 0 \\ a = \frac{4}{3} b \end{cases}$

$\begin{cases} c = -\frac{17}{9} b \\ a = \frac{4}{3} b \end{cases}$

$\therefore \vec{m} = \left(\frac{4}{3}b, b, \frac{17}{9}b\right)$

COM $b = 9$:

$\vec{m} = (12, 9, 17)$

COMO A EQUAÇÃO DO PLANO ABC É DO TIPO $12x + 9x - 17z + d = 0$

$\therefore 12 \times (-2) + 9 \times 1 - 17 \times (-1) + d = 0 \rightarrow d = -2$

A PERTENCE AO PLANO

A EQUAÇÃO PLANO ABC VIRA:

$12x + 9y - 17z - 2 = 0$

A EQUAÇÃO GERAL DO PLANO É:

$ax + by + cz + d = 0$

$d = -ax_A - by_A - cz_A$

exemplo 19

DETERMINE UMA EQUAÇÃO DO PLANO β DEFINIDO PELO PONTO $A(0,-1,-1)$ E PELA RETA π DE EQUAÇÃO $\frac{x-2}{2}=y=z-3$

VETOR DIRETOR $\vec{u}=(2,1,1)$ e PONTO $B(2,0,3)$

$\overrightarrow{AB}=B-A=(2,1,4)$

Seja $\vec{m}$ PERPENDICULAR a β:

$\vec{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \wedge \vec{m}\cdot\vec{u}=0$ $\begin{cases}(a,b,c)\cdot(2,1,4)=0\\(a,b,c)\cdot(2,1,1)=0\end{cases}$

$\begin{cases}2a+b+4c=0\\2a+b+c=0\end{cases}$

$\begin{cases}2a=-b\\c=0\end{cases}$

$a=1 \rightsquigarrow \vec{m}=(1,-2,0)$

$\therefore$ EQUAÇÃO DO PLANO É DO TIPO:

$x-2y+d=0$

$\hookrightarrow B(2,0,3)$ PERTENCE a β, $2-2\times0+d=0 \rightsquigarrow d=-2$

A EQUAÇÃO DO PLANO β É $x-2y-2=0$

EXEMPLO 21

NUM REFERÊNCIA o.n Oxyz CONSIDERE α DEFINIDO POR
$3x - y + z = 1$

21.1) DETERMINAR UMA EQUAÇÃO DE UMA RETA r QUE PASSA PELO PONTO $(-2, 0, 1)$ E É PARALELA AO PLANO α

SE r É PARALELA AO PLANO α ∴ QUALQUER VETOR PERPENDICULAR AO VETOR $\vec{n}$ É DIRETOR DA RETA r, EXISTINDO UMA INFINIDADE DE VETORES POSSÍVEIS:
ex $\vec{r} = (0, 1, 1)$
UMA EQUAÇÃO DE UMA RETA r QUE PASSA PELO PONTO A E É PARALELA A α É: $x = -2 \wedge y = z - 1$

21.2) DETERMINAR A INTERSEÇÃO DA RETA s, DEFINIDA POR $x = z \wedge \frac{y+1}{4} = \frac{z-1}{2}$ COM O PLANO α

ATRAVÉS DA EQ. VETORIAL DA RETA s
$s: x = z \wedge \frac{y+1}{4} = \frac{z-1}{2} \Rightarrow s: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-1}{2}$

UMA EQUAÇÃO VETORIAL DA RETA s É:
$(x, y, z) = (1, -1, 1) + k(2, 4, 2),\ k \in \mathbb{R}$
SENDO $P(1+2k, -1+4k, 1+2k),\ k \in \mathbb{R}$ UM PONTO EM s
DETERMINANDO O PONTO DE INTERSEÇÃO DA RETA s ⇔ DETERMINAR k COM P PERTENCENTE AO PLANO α, ∴ SUBSTITUINDO AS COORDENADAS POR P NA EQUAÇÃO DE α:
$3(1+2k) - (-1+4k) + 1 + 2k = 1$
$3 + 6k + 1 - 4k + 1 + 2k = 1 \Rightarrow 4k = -4 \Rightarrow k = 1$
∴ AS COORDENADAS DO PONTO DE INTERSEÇÃO SÃO:
$P(1 + 2(-1), -1 + 4(-1), 1 + 2(-1)) = (-1, -5, -1)$

EXEMPLO 22: DETERMINE A POSIÇÃO RELATIVA DOS PLANOS DEFINIDOS POR:

$\alpha: 3x - z = 1$
$\beta: -x - y = 0$
$\pi: x - 2y + z = 1$

$$\begin{cases} 3x - z = 1 \\ -x - y = 0 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 1 = z \\ -x = y \\ x - 2\cdot(-x) + 3x - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 1 = z \\ -x = y \\ x + 2x + 3x = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 \cdot 1/3 - 1 = z \\ -1/3 = y \\ x = 1/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = -1/3 \\ x = 1/3 \end{cases}$$

R: OS 3 PLANOS SE INTERSECTAM NO PONTO:

$$\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right)$$