Beregningsteknik indenfor elektronikområdet for EIT3

Skriftlig prøve i
Beregningsteknik indenfor elektronikområdet

Prøve 2. juni 2021 kl. 9.00 til kl. 13.00.

Ved bedømmelsen vægtes de 6 opgaver således:

- Opgave 1: 17% (Lineær algebra)
- Opgave 2: 16% (Lineær algebra)
- Opgave 3: 19% (Kompleks funktionsteori)
- Opgave 4: 14% (Kompleks funktionsteori)
- Opgave 5: 16% (Rækkeudvikling og Fouriertransformation)
- Opgave 6: 18% (Rækkeudvikling og Fouriertransformation)

Denne side skal afleveres sammen med opgavebesvarelsen.
Alle afleverede besvarelsesark til bedømmelse skal være påført navn og studienummer.
Opgaveteksten kan beholdes.

Påfør venligst herunder tydelig navn, studienummer og eksamensnummer. Hvis disse data ikke er korrekte og tydelige, kan opgavesættet ikke blive bedømt.

Navn:

Studienummer:

Eksamensnummer:

Praktiske bemærkninger

Generelle bemærkninger

Disse hjælpemidler er tilladte under eksamen: Lærebøger, formelsamlinger, notater, lommeregner og pc.

Pc og lommeregner må ikke kommunikere med omverdenen. Man kan ikke påregne at kunne få 230 V tilslutning under eksamen. Maskinerne må ikke støje, og skærmen skal vippes mindst 135 grader op i forhold til sammenklappet tilstand. Printerudskrifter accepteres ikke som besvarelse.

Eksamenssnyd behandles efter universitetets regler.

Angivelse af resultater

Besvarelsen skal afleveres på separate papirark for hver opgave. Mellemregninger skal medtages i det omfang, det er nødvendigt for at forstå eksaminandens tankegang i løsningsmetoden. Det er ikke nødvendigt at medtage alle detaljer.

Det giver ikke pluspoint at angive mange decimaler i resultatet. Det er en vurderingssag, hvor mange, der er nødvendige, men højst 3 decimaler er almindeligt.

Bedømmelsen af opgaverne

Besvarelserne udsættes for en helhedsvurdering om eksaminanden kan siges at opfylde kursusmålet. Man kan ikke bestå, hvis man er helt blank (under 10% point) i et af delområderne, idet man ikke opfylder det forud fastsatte kursusmål.

Helt simple regnefejl trækker ikke ned. Regnefejl, som giver et helt åbenlyst forkert resultat, trækker ned. Metodefejl trækker meget ned. Fejl tæller kun med 1 gang, selv om de bevirker at efterfølgende spørgsmål også vil blive besvaret forkert.

Det er vigtigt, at tankegangen i løsningen af opgaven klart fremgår af besvarelsen. Den blotte angivelse af et facit er ingen god besvarelse.

Derudover er det vigtigt, at man skriver med en tydelig og letlæselig håndskrift og laver en overskuelig opstilling af løsningen. Ting, som eksaminatoren ikke kan læse, kan man ikke få point for.

Opgave 1

Betragt matrixen $\boldsymbol{A}$ givet ved

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} j21 & 15 \\ -15 & -j10 \end{bmatrix}$$

1. Vil egenværdierne for $\boldsymbol{A}$ være reelle, imaginære eller generelt komplekse? Begrund dit svar.
2. Find en egenbase der danner et unitært system for $\boldsymbol{A}$, og verificer (vis efterfølgende) at den fundne egenbase opfylder betingelsen for et unitært system.
3. Tilhører vektoren
$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1,34 - j0,82 \\ -7,33 + j4,15 \end{bmatrix}$$
vektorrummet der udspændes af egenbasen (begrund dit svar)? I bekræftende fald, udtryk $\boldsymbol{v}$ ved egenbasen.

Opgave 2

Diagonaliser matrixen $\boldsymbol{A}$ givet ved

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

dvs. bestem matrixerne $\boldsymbol{U}$ og $\boldsymbol{D}$, således at $\boldsymbol{A}$ kan skrives som $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}^{-1}$.

1. Argumenter for at $\boldsymbol{A}$ kan diagonaliseres, og hvad der i så fald gælder for $\boldsymbol{U}$ henholdsvis $\boldsymbol{D}$?

Matrixerne $\boldsymbol{U}$ og $\boldsymbol{D}$ kan findes ved at løse et egenværdiproblem.

2. Forklar sammenhængen mellem egenværdiproblemet og matrixerne $\boldsymbol{U}$ og $\boldsymbol{D}$.
3. Hvad er nulliteten af matrixen $\boldsymbol{A}$?
4. Løs egenværdiproblemet for bestemmelse af $\boldsymbol{U}$ og $\boldsymbol{D}$ og angiv herunder både algebraisk og geometrisk multiplicitet for de fundne egenværdiløsninger.
5. Verificer at $\boldsymbol{A}$ kan skrives som $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}^{-1}$
6. Er $\boldsymbol{U}$ et ortonormalt system?

Opgave 3

Vis ved induktion, at

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{4n^3-n}{3}$$

Hint: $4(m-1)^3-(m-1)+3(2m-1)^2 = 4m^3-m$

Opgave 4

Bestem konvergensradius for Taylorrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{2(n+1)!}z^n$$

Opgave 5

Calculate the z-transform and the region of convergence (ROC) of the following sequences:

1. $x[n] = (\frac{1}{2})^{n-1}u[-n]$
2. $x[n] = 3\delta[n] + 2^n u[n] - 5(3)^n u[-n-1]$

Opgave 6

Calculate the impulse response $h[n]$ of a stable LTI system whose transfer function $H(z)$ is given by

$$H(z) = \frac{7}{1 - 2z^{-1}} + \frac{z}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

Løsning til opgave 1

$$\bar{\bar{A}} = \begin{bmatrix} j21 & 15 \\ -15 & -j10 \end{bmatrix}$$

1) Matrixen er skævhermetisk idet

$$\bar{\bar{A}}^{*T} = \begin{bmatrix} -j21 & -15 \\ 15 & j10 \end{bmatrix} = -\bar{\bar{A}}$$ og egenværdierne

vil derfor generelt være imaginære (0 inkl.). Der eksisterer derfor en egenbase.

2) Egenbase: Betragt egenværdiproblemet

$$(\bar{\bar{A}} - \lambda \bar{\bar{I}})\bar{x} = \bar{0}$$

egenværdier:

$$\begin{vmatrix} j21-\lambda & 15 \\ -15 & -j10-\lambda \end{vmatrix} = -(j21-\lambda)(j10+\lambda) + 15^2 = 0$$

$\Updownarrow$

$$\lambda^2 - j11\lambda + 435 = 0$$

$\Updownarrow$

$$\lambda = \frac{+j11 \pm \sqrt{-121 - 1740}}{2} = \begin{cases} +j27{,}1 \\ -j16{,}1 \end{cases}$$

Kontrol: imaginære egenværdier $\checkmark$

egenvektorer:

$$\begin{bmatrix} j21-j27{,}1 & 15 \\ -15 & -j10-j27{,}1 \end{bmatrix}\bar{x} = \begin{bmatrix} -j6{,}1 & 15 \\ -15 & -j37{,}1 \end{bmatrix}\bar{x} = \bar{0}$$

$$-j6{,}1 \cdot x_1 + 15x_2 = 0 \iff x_2 = j0{,}41\,x_1$$

$$\bar{U}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ j0{,}41 \end{bmatrix} \iff \bar{U}_{1N} = \begin{bmatrix} 0{,}93 \\ j0{,}38 \end{bmatrix}$$

tilsv.

$$\bar{U}_{2N} = \begin{bmatrix} j0{,}38 \\ 0{,}93 \end{bmatrix}$$

$\bar{U}_{1N}, \bar{U}_{2N}$ udgør et unitært system idet

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_{1N} & \bar{U}_{2N} \end{bmatrix}^{*T} \begin{bmatrix} \bar{U}_{1N} & \bar{U}_{2N} \end{bmatrix} = \bar{\bar{I}}$$

3) Vektoren $\bar{v} = \begin{bmatrix} 1{,}34 - j0{,}82 \\ -7{,}33 + j4{,}15 \end{bmatrix}$ tilhører rummet der udspændes af basen $\bar{U}_{1N}, \bar{U}_{2N}$ hvis der findes (komplekse) k_1, k_2 sådan at

$$\bar{v} = k_1 \bar{U}_{1N} + k_2 \bar{U}_{2N}$$

$$k_1 = \langle \bar{U}_{1N}, \bar{v} \rangle = \bar{U}_{1N}^{T*} \cdot \bar{v} \quad , \quad k_2 = \langle \bar{U}_{2N}, \bar{v} \rangle$$

Da $\bar{U}_{1N}, \bar{U}_{2N}$ udspænder et 2-dimensionalt vektorrum i C^2 vil den 2-dimensionale vektor $\bar{v}$ også tilhøre rummet.

$$k_1 = 2{,}82 + j2{,}02$$
$$k_2 = -7{,}13 + j3{,}35$$

Løsning til opgave 2

Opgave

$$\bar{\bar{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

1) Matrixen $\bar{\bar{A}}$ er symmetrisk, dvs. $\bar{\bar{A}}^T = \bar{\bar{A}}$, og $\bar{\bar{A}}$ kan derfor diagonaliseres med en orthogonal matrix $\bar{\bar{U}}$, hvor $\bar{\bar{U}}^T = \bar{\bar{U}}^{-1}$, $\bar{\bar{U}}^T \bar{\bar{U}} = \bar{\bar{I}}$ og $\bar{\bar{D}}$ er diagonal.

2) Egenværdiproblemet finder en egenbase for $\bar{\bar{A}}$ hvor egenværdierne udgør diagonalelementerne i $\bar{\bar{D}}$ og de tilhørende egenvektorer udgør søjlevektorerne i $\bar{\bar{U}}$.

3) Matrix $\bar{\bar{A}}$ har nullitet $= 2$ idet rk. $2 = -1 \times$ rk. 1 og rk. $3 = 1 \times$ rk. 1, eller anvendt rang af $\bar{\bar{A}}$ er 1 og derfor nullitet $=$ dimension $-$ rang $= 3 - 1 = 2$.

4) Egenværdiproblemet er
$(\bar{\bar{A}} - \lambda \bar{\bar{I}})\bar{x} = \bar{0}$
Egenværdierne kan findes på sædvanlig vis ($\det(\bar{\bar{A}} - \lambda\bar{\bar{I}}) = 0$) eller alternativt ved at observere at spor $(\bar{\bar{A}}) = \sum_i \lambda_i$, dvs. summen af egenværdier er lig 3. Da nulliteten af $\bar{\bar{A}}$ angiver dimensionen af nulrummet $\bar{\bar{A}}\bar{x} = \bar{0} = 0\bar{x}$ må der altså være mindst to egenværdier lig 0. Dog, da summen er 3 er den sidste ikke 0, men 3. Hermed

$\lambda_{1,2} = 0$, $M_\lambda = 2$ algebraisk multipl.
$\lambda_3 = 3$, $M_\lambda = 1$

$\underline{\lambda_{1,2} = 0}$: Den resulterende ligning er $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ og vi kan da vælge f. eks

$$\bar{v}_{1'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og } \bar{v}_{2'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ der

begge opfylder ligningen. Som det ses er de ikke (helt) orthogonale idet $\langle \bar{v}_{2'}, \bar{v}_{1'} \rangle = \bar{v}_{2'}^T \cdot \bar{v}_{1'} = 1$.

Vælger vi $\bar{v}_1 = \frac{\bar{v}_{1'}}{|\bar{v}_{1'}|}$ kan vi finde $\bar{v}_2$ ved at trække den del fra som er "langs" $\bar{v}_1$:

$$\bar{v}_{2'} - \langle \bar{v}_{2'}, \bar{v}_1 \rangle \bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$ og derefter normalisere

$$\bar{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$ ($m_\lambda = 2$ geometriske multipl.)

$\underline{\text{Check}}$: $\langle \bar{v}_1, \bar{v}_2 \rangle = \bar{v}_1^T \cdot \bar{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{6}} (-1 + 1 + 0)$
$= \underline{\underline{0}}$

$\underline{\lambda_3 = 3}$

Vi finder at de resulterende ligninger er $x_2 = -x_3$ og $x_1 = x_3$ og vælger $v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ hvor normaliseringen er medregnet.
($m_\lambda = 1$ geometriske multiplicitet)

5) $\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{U}} \bar{\bar{D}} \bar{\bar{U}}^{-1}$, $\bar{\bar{U}} = [\bar{v}_1 \; \bar{v}_2 \; \bar{v}_3]$

$$\bar{\bar{U}}\bar{\bar{D}} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(\bar{\bar{U}}\bar{\bar{D}})\bar{\bar{U}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -3/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 3/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

6) Ja, idet $\bar{\bar{U}} \cdot \bar{\bar{U}}^{-1} = \bar{\bar{U}} \cdot \bar{\bar{U}}^T = \bar{\bar{I}}$

dvs. orthonormalt – orthogonal og normaliseret.

Løsning til opgave 3

Først basistrinnet. For $n = 1$ får vi, at

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1)^2 = (2-1)^2 = 1 = \frac{4 \cdot 1^3 - 1}{3} \ .$$

For induktiontrinnet antager vi, at $m = n + 1$ og at

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{4n^3 - n}{3}$$

gælder til og med n. Vi skriver nu

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m}(2k-1)^2 &= (2 \cdot 1 - 1)^2 + (2 \cdot 2 - 1)^2 + \cdots + (2n-1)^2 + (2m-1)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 + (2m-1)^2 \\
&= \frac{4n^3 - n}{3} + (2m-1)^2 \\
&= \frac{4(m-1)^3 - (m-1)}{3} + \frac{3(2m-1)^2}{3} \\
&= \frac{4(m-1)^3 - (m-1) + 3(2m-1)^2}{3} \\
&= \frac{4m^3 - m}{3}
\end{aligned}$$

Det andet lighedstegn følger fra antagelsen ovenfor, og det sidste lighedstegn følger fra hintet givet i opgaven.

Løsning til opgave 4

Vi bruger Hadamards formel

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-3)^n}{2(n+1)!}}{\frac{(-3)^{n+1}}{2(n+2)!}}\right|$$

Vi flytter den nederste brøk op over brøkstregen og "vender den om", så vi kun har en enkelt brøk. Vi tager samtidig numerisk værdi af det hele, hvilket fjerner minus-tegnene, og det giver

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{2(n+1)!} \cdot \frac{2(n+2)!}{3^{n+1}} \ .$$

Vi bemærker, at

$$\frac{2(n+2)!}{2(n+1)!} = \frac{(n+2)!}{(n+1)!} = \frac{(n+2)(n+1)(n)(n-1)\cdots 2 \cdot 1}{(n+1)(n)\cdots 2 \cdot 1} = n + 2 \ ,$$

så

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{3}\ .$$

Grænseværdien går nu tydeligvis mod uendelig, og konvergensradius er derfor også uendelig, altså hele det komplekse plan.

Ex. 5

1. $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[-n]$

$$u[-n] = \begin{cases} 1 & -n \geq 0 \rightarrow n \leq 0 \\ 0 & -n < 0 \rightarrow n > 0 \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} z^{-n} =$$

$$= 2 \sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} z^{-n} \underset{q=-n}{=} 2 \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-q} z^{q} =$$

ROC

$$= 2 \sum_{q=0}^{\infty} (2z)^{q} = \frac{2}{1-2z} \quad \text{if } |2z| < 1 \rightarrow |z| < \frac{1}{2}$$

we use the property of geometric series

$$\sum_{q=0}^{\infty} m^{q} = \begin{cases} \frac{1}{1-m} & \text{if } |m| < 1 \\ \infty & \text{if } |m| \geq 1 \end{cases}$$

2. $x[n] = 3\delta[n] + 2^n u[n] - 5(3)^n u[-n-1]$

$$3\delta[n] \xrightarrow{Z} 3 \quad \forall z$$

$$2^n u[n] \xrightarrow{Z} \frac{1}{1-2z^{-1}} \quad |z|>2$$ right-sided exponential sequence

$$-5(3)^n u[-n-1] \xrightarrow{Z} \frac{5}{1-3z^{-1}} \quad |z|<3$$ left-sided exponential sequence

Given the linearity property of z-transform, we obtain

$$X(z) = 3 + \frac{1}{1-2z^{-1}} + \frac{5}{1-3z^{-1}}$$

Since all the three components must converge, we have

$$\text{ROC}: \; 2 < |z| < 3$$

Ex. 6

$$H(z) = \frac{7}{1-2z^{-1}} + \frac{z}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

The possible choices for the region of convergence are $|z| < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < |z| < 2$, $|z| > 2$

Since the system is deemed to be stable, the ROC ~~sh~~must include the unit circle. We therefore calculate the inverse z-transform assuming ROC: $\frac{1}{2} < |z| < 2$

$$\frac{7}{1-2z^{-1}} \xrightarrow{z^{-1}} -7(2)^n u[-n-1]$$ left-sided sequence

$$\frac{z}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \xrightarrow{z^{-1}} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+1]$$ right-sided sequence

Therefore we obtain

$$h[n] = -7(2)^n u[-n-1] + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+1]$$