Løsning til opgave KF 2.5.1

Basistrin: For $n = 1$ fås

$$\begin{aligned} 2^0 + 2^1 &= 2^2 - 1 \\ 1 + 2 &= 4 - 1 \\ 3 &= 3 \end{aligned}$$

Induktionstrin: Antag at relationen gælder for $n = k$, dvs.

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1 \ ,$$

så har vi for $n = k + 1$

$$\begin{aligned} 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{k+1} &= \underbrace{2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k}_{\text{antagelse} \quad =2^{k+1}-1} + 2^{k+1} \\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \\ &= 2 \cdot 2^{k+1} - 1 \\ &= 2^{k+2} - 1 \\ &= 2^{(k+1)+1} - 1 \end{aligned}$$

Løsning til opgave KF 2.5.2

Basistrin: For $n = 1$ fås $1^2 + 2 \cdot 1 = 3$, hvilket er delelig med 3.
Induktionstrin: Antag nu at $k^3 + 2k$ er delelig med 3, så får vi for $n = k + 1$

$$n^3 + 2n = (k+1)^3 + 2(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2 = (k^3 + 2k) + 3\big(k^2 + (k+3)\big)$$

hvilket er delelig med 3.

Løsning til opgave KF 2.5.3

Basistrin: For $n = 4$ har vi at $2^4 = 16 < 4! = 24$.
Induktionstrin: Antag at formlen gælder for k og lad $n = k + 1$. Så får vi

$$2^n = 2^{k+1} = 2 \cdot 2^k < 2 \cdot k! < (k+1)k! = (k+1)! = n!$$

Løsning til opgave KF 2.5.4

Opskrivning af induktionstrin med formlen fra 2):

$$f(n+1) = 2f(n) + 1$$

og med den foreslåede forskrift

$$f(n+1) = a2^{n+1} + b$$

dermed har vi at

$$a2^{n+1} + b = f(n+1) = 2f(n) + 1 = 2(a2^n + b) + 1 = a2^{n+1} + 2b + 1 \ .$$

Derfor må b opfylde $2b + 1 = b$, og derfor er $b = -1$. Indsættes dette i formlen fra 1) fås

$$f(1) = 2 = 2a + b = 2a - 1$$

følger det at $a = 3/2$.