KF Lektion 2.6 opgaver

Opgave KF 2.6.1 [Tidligere eksamensopgave]

Den komplekse funktion $f(z)$ er givet ved

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)} \ .$$

(A) Bestem funktionens singulariteter og deres art.

(B) Beregn residuerne for $f(z)$ i hver singularitet.

(C) Beregn

$$\oint_C f(z)dz$$

hvor C er cirklen $|z| = 5$ gennemløbet mod uret. 0

(D) Vis under anvendelse af ovenstående, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \frac{\pi}{6} \ .$$

Opgave KF 2.6.2 [Tidligere eksamensopgave]

Fibonaccitallene er defineret rekursivt som summen af de to foregående tal

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1$$

$$f(n+1) = f(n-1) + f(n)$$

Vis at Fibonaccitallene opfylder følgende relation

$$f(1)^2 + f(2)^2 + f(3)^2 + \cdots + f(n)^2 = f(n)f(n+1)$$

for $n \geq 1$.

Opgave KF 2.6.3 [Tidligere eksamensopgave]

Givet den komplekse funktion

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^3}$$

(A) Bestem funktionens singulariteter og angiv deres art.

(B) Beregn residuerne for $f(z)$.

(C) Beregn integralet

$$\oint_C f(z)dz$$

hvor C er cirklen med centrum i 0 og radius 1. $-\pi i$

Opgave KF 2.6.4 [Tidligere eksamensopgave]

En funktion $f(n)$ er givet rekursivt ved

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 4, \quad f(n) = 2 + 2f(n-1) - f(n-2) \ .$$

Bevis ved induktion, at $f(n) = n^2$.

Opgave KF 2.6.5 [Tidligere eksamensopgave]

Fibonacci-tallene er defineret ved

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad \text{for} \geq 3$$

og

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 2$$

Vis ved induktion at for $n \geq 5$ gælder der

$$f_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Opgave KF 2.6.6 [Tidligere eksamensopgave]

Givet den komplekse funktion

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$$

(A) Bestem funktionens singulariteter og angiv deres art.

(B) Beregn residuerne for $f(z)$.

(C) Beregn integralet

$$\oint_C f(z)dz$$

hvor C er cirklen med centrum i 0 og radius $1/2$. 0

(D) Beregn integralet

$$\oint_C f(z)dz$$

hvor C er cirklen med centrum i 0 og radius 2. $2\pi i$