Lineær algebra (LA)
anden del af kurset i beregningsteknik

Aalborg Universitet

Troels B. Sørensen

tbs@es.aau.dk

Delvist baseret på slides venligst udlånt af Hans Ebert

LINEÆR ALGEBRA

MM 5: Fredag 24. marts 2023
kl. 08.15 i B2-107

Emner:
Diagonalisering, fortsat
Kanonisk form, afslutning
Komplekst vektorrum
Matrixers taxonomi
Unitære systemer
Evt. anvendelseseksempel (MIMO transmission)

Læsning: [EK] s. 346 – 351, 607 – 618 (komplekse tal)

Sætninger om isometriske matrixer

1.
En reel kvadratisk matrix er orthogonal HOKH søjlevektorerne (og dermed også rækkevektorerne) udgør et orthonormalt system.

$A^T A = I$ orthonormalitet af rækker/søjler

$A\,A^T = I$ orthogonalitet $A^T = A^{-1}$

...dratisk matrix er unitær ...torerne (og dermed også rækkevektorerne) udgør et unitært system.

$U^{T*}U = I$ rækker/søjler unitært system

$U\,U^{T*} = I$ unitær matrixbetingelse $U^{T*} = U^{-1}$

HOKH= hvis og kun hvis

Sætninger om isometriske matrixer

2.

En komplex kvadratisk matrix er unitær HOKH søjlevektorerne (og dermed også rækkevektorerne) udgør et unitært system.

$U^{T*}U = I$	rækker/søjler unitært system
$U\,U^{T*} = I$	unitær matrixbetingelse $U^{T*} = U^{-1}$

HOKH= hvis og kun hvis

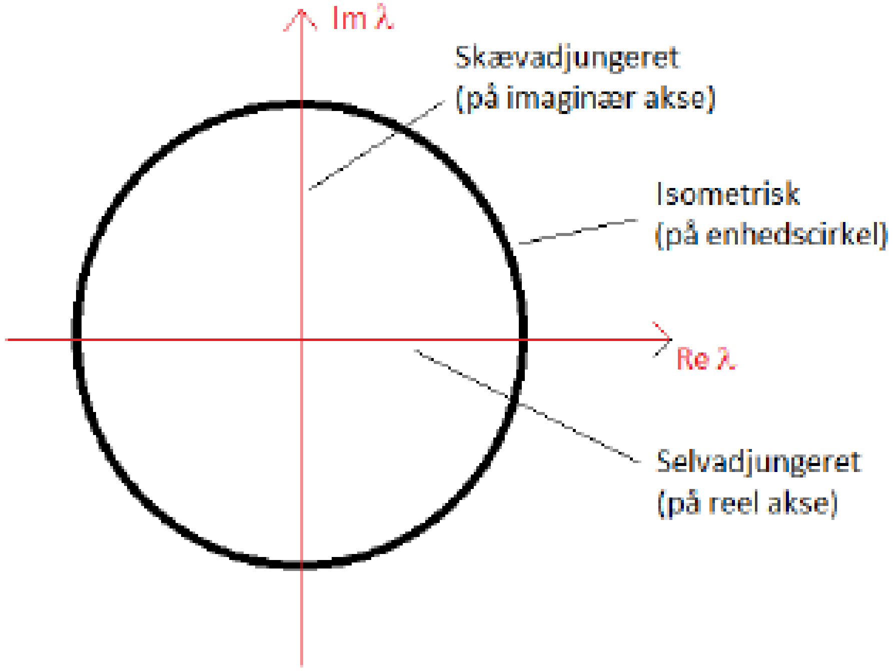
Taxonomi for normale (kvadratiske) matrixer

Reel matrix	Kompleks matrix	Generel	Normal[2]	Egenværdier
Symmetrisk $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$	Hermitesk (diagonal er reel) $\boldsymbol{A}^{*\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$	Selvadjungeret[1]	Ja	Reelle (inkl. 0)
Skævsymmetrisk (diagonal = 0) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A}$	Skævhermitesk (diagonal imaginær eller 0) $\boldsymbol{A}^{*\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A}$	Skævadjungeret	Ja	Imaginære (inkl. 0)
Ortogonal ($\Delta\boldsymbol{A} = \pm 1$) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{-1}$	Unitær ($\lvert\Delta\boldsymbol{A}\rvert = 1$) $\boldsymbol{A}^{*\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{-1}$	Isometrisk	Ja	Absolut værdi 1

(1) Den (komplekst) konjugerede transponerede, $\boldsymbol{A}^{*\mathrm{T}}$, kaldes for den adjungerede til $\boldsymbol{A}$ (og deraf betegnelsen selvadjungeret i dette tilfælde); mere formelt kaldes den komplekst konjugerede transponerede for den hermitesk adjungerede, hvor hermitesk adjungering er analogt til kompleks konjugering.

(2) En normal matrix er en (generelt) kompleks kvadratisk matrix der kommuterer med sin adjungerede, dvs. opfylder $\boldsymbol{A}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*\mathrm{T}}$.

Egenværdier i det komplekse plan:



Unitær ækvivalens

$\hat{A}$ og A er unitært ækvivalente, hvis der findes en unitær matrix U:

$$\hat{A} = U^{-1} A\, U$$

unitær matrix

Hvis U består af egenvektorer for A diagonaliserer den A

Unitær diagonaliserbarhed

En kvadratisk matrix er unitært diagonalisabel HOKH den er en normal matrix

$$D = U^{-1} A\, U$$

En matrix er diagonalisabel HOKH den algebraiske multiplicitet er lig med den geometriske multiplicitet for alle egenværdier.

HOKH= hvis og kun hvis

Egenbaser og diagonalisering

Sætning: En normal matrix har en egenbase der er et unitært system; en Hermetisk, skævhermetisk og unitær matrix har derfor en unitær egenbase $\in \mathbb{C}^n$

Sætning: En matrix $\bar{\bar{A}}$ er unitært diagonaliserbar HOKM $\bar{\bar{A}}$ er normal $(\bar{\bar{A}}\bar{\bar{A}}^{*T} = \bar{\bar{A}}^{*T}\bar{\bar{A}})$

$\bar{\bar{D}} = \bar{\bar{U}}^{-1}\bar{\bar{A}}\bar{\bar{U}}$ hvor $\bar{\bar{U}}$ indeholder $\bar{\bar{A}}$ egenvektorer (unitært system) og $\bar{\bar{U}}\bar{\bar{U}}^{*T} = \bar{\bar{U}}^{*T}\bar{\bar{U}} = \bar{\bar{I}}$

Enhver normal matrix kan altså diagonaliseres med en unitær matrix dannet af matrixens egenvektorer. Det gælder specielt ved adskilte egenværdier, men også med repeterede. Generelt kræver vi at den algebraiske multiplicitet er lig den geometriske multiplicitet for alle egenværdier $m_\lambda = M_\lambda$.

Bemærk at diagonaliseringen med en unitær egenbase er knyttet til at $\bar{\bar{A}}$ er normal:

$$\bar{\bar{A}}\,\bar{\bar{A}}^{*T} = \bar{\bar{A}}^{*T}\bar{\bar{A}}$$

altså en matrix som kommuterer med sin adjungerede (kompleks konjugerede transponerede).

Da de komplekse kvadratiske matrixer er generaliseringer af de reelle og da de alle er normale (jf. taxonomien), gælder det også for den kvadratiske reelle matrix $\bar{\bar{A}}$ at den kan diagonaliseres af en orthogonal matrix $\bar{\bar{U}}$ hvis søjlevektorer udgør en orthonormal base. F.eks. gælder at

$$\bar{\bar{A}} \text{ symmetrisk} \iff \bar{\bar{A}} = \bar{\bar{U}}\,\bar{\bar{D}}\,\bar{\bar{U}}^{-1}$$

hvor $\bar{\bar{U}}$ er orthogonal/normal dvs.

$$\bar{\bar{U}}\,\bar{\bar{U}}^T = \bar{\bar{U}}^T\bar{\bar{U}} = \bar{\bar{I}}.$$