KF Lektion 2.3

Residue-regning og uegentlige integraler

Hvad har vi lært når lektionen er omme?

1. Residuer for simple poler
2. Residuer for polen af højere orden.
3. Hvordan residuum-sætningen anvendes til kompleks integration.
4. Anvendelse af residuer til at løse reelle uegentlige integraler.

Residuum

Laurent-rækken er givet ved

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}$$

med koefficienter

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\tau)}{(\tau - z_0)^{n+1}} d\tau \qquad b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\tau)}{(\tau - z_0)^{-n+1}} d\tau$$

1 (709)

Dermed har vi, at

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i b_1$$

Koefficient b_1 kaldes residuet

$$b_1 = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$$

2 (720)

Residuum for simpel pol

Residuet for funktion f med en simpel pol

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1 = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z)$$ 3 (721)

Beviset er på side 721. Hvis f kan skrives som en brøk

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \qquad q(z) \text{ har simpel nulpunkt i } z_0$$

Taylorrække: $$q(z) = q(z_0) + \frac{(z-z_0)}{1!} q'(z_0) + \frac{(z-z_0)^2}{2!} q''(z_0) + \cdots$$

Går ud

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{\boxed{(z-z_0)}\,p(z)}{\underbrace{\boxed{q(z_0)}}_{=0} + \boxed{(z-z_0)}\,q'(z_0) + q''(z_0)\,(z-z_0)^2/2 + \cdots}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{p(z)}{q'(z_0) + q''(z_0)\,(z-z_0)^1/2 + \cdots} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$ 4 (721)

Residuum for pol

Residuet for funktion f når polen i z_0 har orden m

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-z_0)^m f(z)\right)\right]$$

5 (722)

$$f(z) = \frac{50z}{(z+4)(z-1)^2}$$

Simpel pol i -4 og pol i 1 med orden 2.

$$\operatorname*{Res}_{z=-4} f(z) = \lim_{z\to -4} [(z+4)f(z)] = \left[\frac{50z}{(z-1)^2}\right]_{z=-4} = -8$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left((z-1)^2 f(z)\right) = \left[\frac{d}{dz}\frac{50z}{z+4}\right]_{z=1} = \left[\frac{50(z+4)-50z}{(z+4)^2}\right]_{z=1} = 8$$

$= 8$

Opgave 1

Bestem residuet for hver pol

$$f(z) = \frac{\sin z}{(z-\pi)^4}$$

Der er poler af orden ? i $z = ?$

$$\operatorname*{Res}_{z=?} f(z) = \lim_{z \to ?} \frac{1}{?} \left[\frac{d^?}{dz^?} (z \qquad)^? f(z) \right] = ?$$

Residuum-sætning

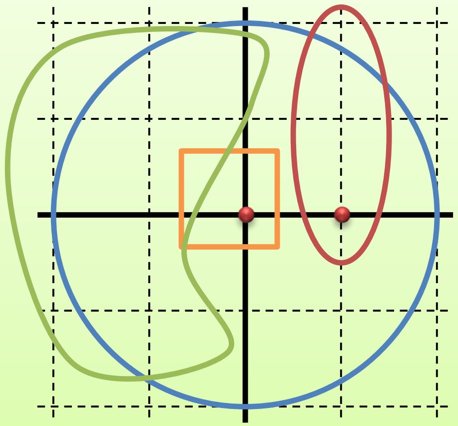
Lad f være analytisk inden for en simpel, lukket kurve C, undtaget i k forskellige singulære punkter z_1 til z_k. Så har vi at

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z)$$

6 (723)

Sætningen kaldes også Cauchy's Residue Theorem

$$f(z) = \frac{4-3z}{z^2-z} \qquad \text{Find } \oint_C f(z)dz \text{ for}$$



C_1: **0 og 1 er indenfor**

C_2: **0 udenfor/1 indenfor**

C_3: **0 og 1 er udenfor**

C_4: **0 indenfor/1 udenfor**

Residuum-sætningen anvendt

$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$

Find

$$\oint_C \frac{\tan z}{z^2 - 1} dz$$

Ex 6 (724)

når C er cirklen $|z| < 3/2$. Hvilke singulariteter ligger inden for?

Tangens har singulariteter $\pm\pi/2\,,\ \pm 3\pi/2\,, \ldots$ men de ligger uden for området.

Tilbage er simple poler i $+1$ og -1.

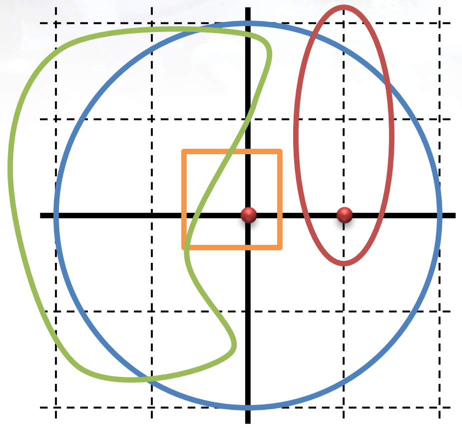
$$\oint_C \frac{\tan z}{z^2 - 1} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{2} \operatorname*{Res}_{z=z_j} \frac{\tan z}{z^2 - 1} = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=1} \frac{\tan z}{z^2 - 1} + \operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{\tan z}{z^2 - 1} \right)$$

Med metode (4) (integration af $q(z)$ når $f(z)$ er en brøk)

$$= 2\pi i \left(\left.\frac{\tan z}{2z}\right|_{z=1} + \left.\frac{\tan z}{2z}\right|_{z=-1} \right) = \pi i(\tan(1) - \tan(-1)) = 9.79i$$

Opgave 2

Bestem de fire værdier fra eksemplet,
dvs. de fire integraler for de fire farvede kurver:



Find først residuerne for hver singularitet:
(hvilken metode er bedst?)

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{4-3z}{z(z-1)} = \,?$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\,?} f(z) = \,?$$

$$\oint_{C_n} f(z)dz = \begin{cases} ? & \text{for } C_1 \\ ? & \text{for } C_2 \\ ? & \text{for } C_3 \\ ? & \text{for } C_4 \end{cases}$$

Residuer for singulariteter

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}$$

1 (709)

A. Removable singulariteter

$$b_n = 0 \qquad\qquad \operatorname{Res} f(z) = 0$$

B. Pol-singulariteter (af orden m)

$$b_n = 0 \quad \text{for } n > m \qquad\qquad \operatorname{Res} f(z) = \begin{cases} \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) \\ p(z_0)/q'(z_0) \\ b_1 \end{cases}$$

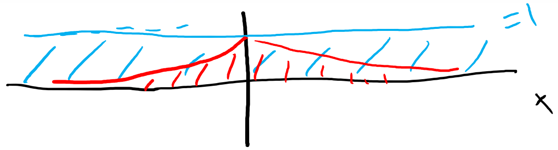
C. Essentielle singulariteter

$$b_n \neq 0 \quad \text{for vilkårligt stort } n \qquad\qquad \operatorname{Res} f(z) = b_1$$

Desværre ingen "genvej" eller "nem" metode for essentielle singulariteter.

Uegentlige integraler

Vi kan også løse uegentlige integraler, dvs af formen

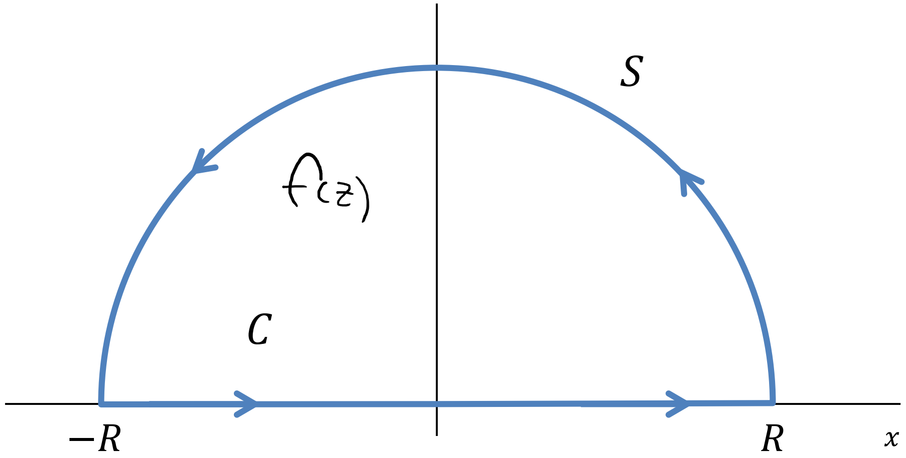


$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx$$

4 (726)

når $f(x)$ er uden singulariteter og en rationel funktion med $|f(x)| \leq kx^{-2}$, altså går tilstrækkeligt hurtigt mod nul.

Ideen er at lave en halv-cirkel C, der kan integreres med residueregning, og hvor cirkeldelen S går mod 0 for stigende radius.

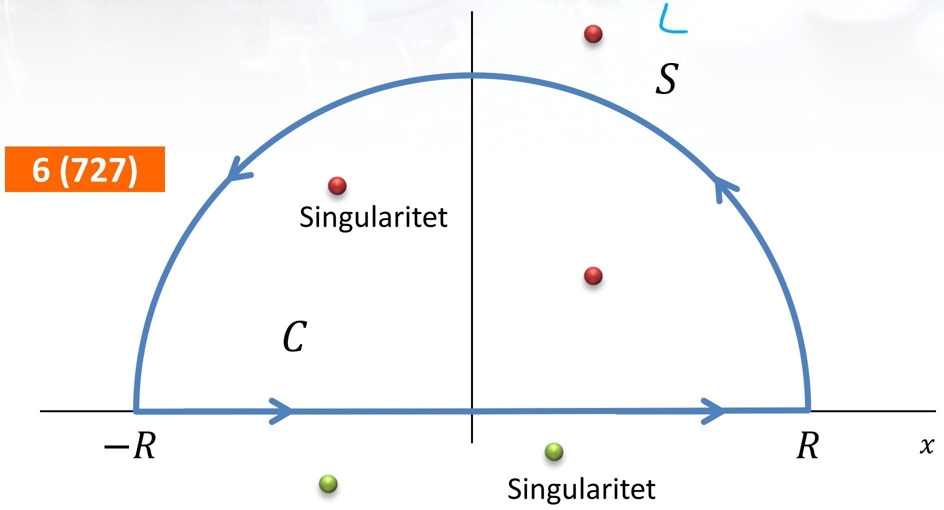


$$\oint_C f(z)dz = \int_S f(z)dz + \int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\text{Inden for C}} \operatorname{Res} f$$

Uegentlige integraler

Vi har nu $$\int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\substack{\text{Inden}\\ \text{for C}}} \text{Res}\ f - \int_S f(z)dz$$

6 (727)



og $$\left|\int_S f(z)dz\right| \le \overbrace{\frac{k}{R^2}}^{M}\overbrace{\pi R}^{L} = \frac{k\pi}{R}$$

Så $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx$$

$$= \lim_{R\to\infty} 2\pi i \sum_{\substack{\text{Inden}\\ \text{for C}}} \text{Res}\ f - \lim_{R\to\infty} \int_S f(z)dz$$

$$= 2\pi i \sum_{\substack{\text{Øvre}\\ \text{halvplan}}} \text{Res}\ f$$

7 (728)

$$\left|\int_S f(z)dz\right| \le ML$$

$$|f(z)| \le M$$

L længden af S

13 (650)

Eksempel på uegentlige integral

Ex 2 (728)

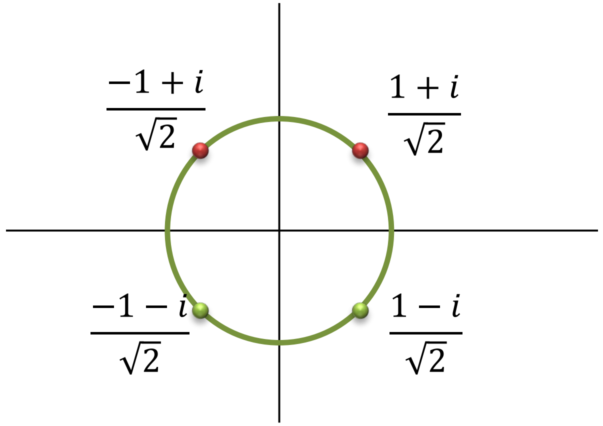
Vi vil finde

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\,dx$$

$1 + x^4 = 0$

$x^4 = -1$

$x = \sqrt[4]{-1}$



Der er 4 poler, to inden for C.

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1+z^4} = \left[\frac{1}{4z^3}\right]_{z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{-1+i}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1+z^4} = \left[\frac{1}{4z^3}\right]_{z=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}}{1+i}$$

Sætte i 3. potens svarer til at flytte 3 gange så langt på enhedscirklen!

Eksempel på uegentlige integral

Nu får vi at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=z_1} f + \operatorname*{Res}_{z=z_2} f\right) = \frac{2\pi i}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{i-1} + \frac{\sqrt{2}}{i+1}\right)$$

$$= \frac{2\pi i}{4}\left(\frac{\sqrt{2}(-i-1)}{2} + \frac{\sqrt{2}(-i+1)}{2}\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\pi i}{4}\left(\frac{-2i}{2}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{2\sqrt{2}\,\pi i\,(-2i)}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i(-i) = \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}}\pi i(-i)$$

Da funktionen er lige (ens for pos og neg x), så får vi umiddelbart

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Uegentlige integraler

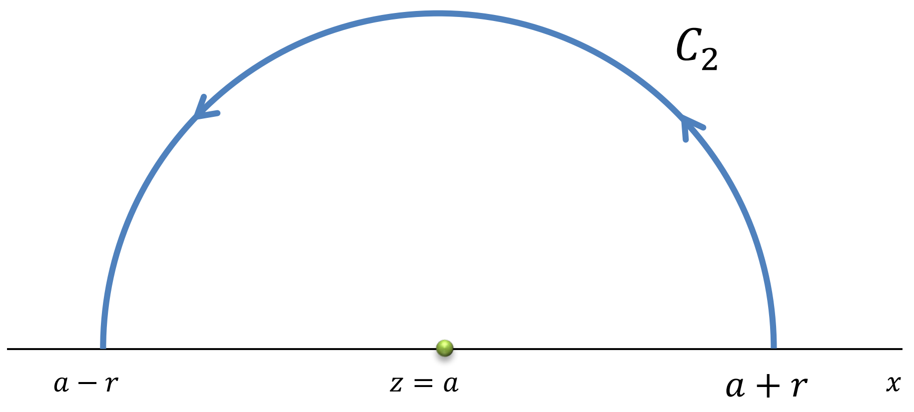
Vi vil nu gerne integrere funktioner med simpel pol på den reelle akse.

Hvis $f(z)$ har en simpel pol $z = a$ på den reelle akse, så

Theorem 1 (731)

$$\lim_{r \to 0} \int_{C_2} f(z)dx = \pi i \operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$$

Så vi kan ”køre udenom”, og det vil vi udnytte.
Beviset står side 731.



Cauchys hovedværdi-sætning

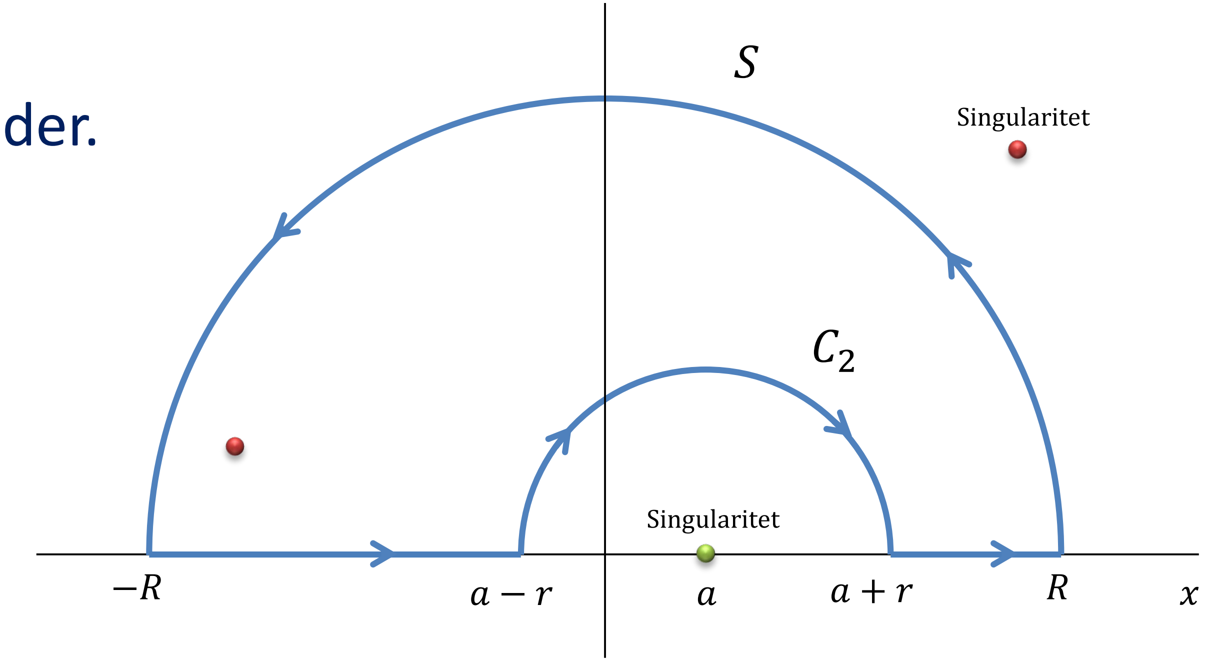
Hvis $f(x)$ er en rational funktion med $|f(x)| \leq k|x|^{-2}$ og med simple poler på den reelle akse, så er

Når $r \to 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\substack{\text{Øvre}\\ \text{halvplan}}} \operatorname{Res} f(z) + \pi i \sum_{\substack{\text{Reelle}\\ \text{akse}}} \operatorname{Res} f(z)$$

14 (732)

Figuren skitserer, hvorfor det holder.



Opgave 3

Bestem integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x-3)(x^2+1)}\,dx$$

Bestem først polernes placering og orden.

Bestem hvilke poler, der har betydning.

Bestem residuet for hver pol.

Sæt residuerne sammen til resultatet.