Beregningsteknik indenfor elektronikområdet for EIT4

Skriftlig prøve i
Beregningsteknik indenfor elektronikområdet

Prøve 10. august 2022 kl. 9.00 til kl. 13.00.

Ved bedømmelsen vægtes de 6 opgaver således:

- Opgave 1: 17% (Lineær algebra)
- Opgave 2: 16% (Lineær algebra)
- Opgave 3: 17% (Kompleks funktionsteori)
- Opgave 4: 16% (Kompleks funktionsteori)
- Opgave 5: 16% (Discete time systems and z-transform)
- Opgave 6: 18% (Discrete time systems and z-transform)

Denne side skal afleveres sammen med opgavebesvarelsen.
Alle afleverede besvarelsesark til bedømmelse skal være påført navn og studienummer.
Opgaveteksten kan beholdes.

Påfør venligst herunder tydelig navn, studienummer og eksamensnummer. Hvis disse data ikke er korrekte og tydelige, kan opgavesættet ikke blive bedømt.

Navn:

Studienummer:

Eksamensnummer:

Praktiske bemærkninger

Generelle bemærkninger

Disse hjælpemidler er tilladte under eksamen: Lærebøger, formelsamlinger, notater, lommeregner og pc.

Pc og lommeregner må ikke kommunikere med omverdenen. Man kan ikke påregne at kunne få 230 V tilslutning under eksamen. Maskinerne må ikke støje, og skærmen skal vippes mindst 135 grader op i forhold til sammenklappet tilstand. Printerudskrifter accepteres ikke som besvarelse.

Eksamenssnyd behandles efter universitetets regler.

Angivelse af resultater

Besvarelsen skal afleveres med hver opgave startende på ny side. Mellemregninger skal medtages i det omfang, det er nødvendigt for at forstå eksaminandens tankegang i løsningsmetoden. Det er ikke nødvendigt at medtage alle detaljer.

Det giver ikke pluspoint at angive mange decimaler i resultatet. Det er en vurderingssag, hvor mange, der er nødvendige, men højst 3 decimaler er almindeligt.

Bedømmelsen af opgaverne

Besvarelserne udsættes for en helhedsvurdering om eksaminanden kan siges at opfylde kursusmålet. Man kan ikke bestå, hvis man er helt blank (under 10% point) i et af delområderne, idet man ikke opfylder det forud fastsatte kursusmål.

Helt simple regnefejl trækker ikke ned. Regnefejl, som giver et helt åbenlyst forkert resultat, trækker ned. Metodefejl trækker meget ned. Fejl tæller kun med 1 gang, selv om de bevirker at efterfølgende spørgsmål også vil blive besvaret forkert.

Det er vigtigt, at tankegangen i løsningen af opgaven klart fremgår af besvarelsen. Den blotte angivelse af et facit er ingen god besvarelse.

Derudover er det vigtigt, at man skriver med en tydelig og letlæselig håndskrift og laver en overskuelig opstilling af løsningen. Ting, som eksaminatoren ikke kan læse, kan man ikke få point for.

Opgave 1

En matrix $\boldsymbol{A}$ er givet ved

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1. For hvert af følgende, angiv om udsagnet er korrekt: $\boldsymbol{A}$ er symmetrisk, $\boldsymbol{A}$ er skævsymmetrisk, $\boldsymbol{A}$ er ortogonal, $\boldsymbol{A}$ er normal; begrund dit svar.
2. Find egenværdier og egenvektorer for $\boldsymbol{A}$, med angivelse af algebraisk/geometrisk multiplicitet og dimension af egenrummet for de fundne egenværdiløsninger.
3. Begrund med baggrund i resultaterne fra 1) og 2) at $\boldsymbol{A}$ kan diagonaliseres, og eftervis dette ved beregning.
4. Udgør egenvektorerne i 2) et ortogonalt system?

Opgave 2

En matrix $\boldsymbol{A}$ er givet ved

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -0.5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Find en basis for henholdsvis række- og søjlerum for $\boldsymbol{A}$
2. Hvad er rang og nullitet af $\boldsymbol{A}$?
3. Bestem nulrummet til $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ og angiv nulliteten.

Opgave 3

Følgende ligning skal bevises:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \; .$$

(A) Opskriv basistrin og det første skridt i induktionstrinnet.

(B) Færdiggør beviset for induktionstrinnet.

Opgave 4

Givet den komplekse funktion

$$f(z) = \frac{e^{(z+1)}}{z + 3\pi}$$

(A) Bestem funktionens singulariteter (placering og orden) og angiv deres art.

(B) Beregn herefter residuerne for $f(z)$. Ingen af residuerne er nul.

(C) Beregn integralet

$$\oint_C f(z)dz$$

hvor C er en cirkel med centrum i $-30i$ og radius 100.

Opgave 5

Given the following z-transform expression:

$$X(z) = 5 + \frac{12z}{1 - 2z^{-1}} + \frac{3z^{-1}}{2 - 8z^{-1}},$$

find the possible regions of convergence and calculate for each of them the corresponding inverse z-transform.

Opgave 6

Calculate the impulse response $h[n]$ of a stable LTI system whose output is

$$y[n] = 6\delta[n-3] + 12\delta[n-1]$$

when the input is $x[n] = 3\delta[n] - 2\delta[n-1]$.

Write the difference equation that characterizes the system.

Løsning til opgave 1 (besvarelsen er reduceret)

Matrix givet ved

$$\bar{\bar{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1) Check af $\bar{\bar{A}}^T = ?$

$$\bar{\bar{A}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Symmetrisk : $\bar{\bar{A}}^T = \bar{\bar{A}} \longrightarrow$ nej, ved inspektion

Skævsymm. : $\bar{\bar{A}}^T = -\bar{\bar{A}} \longrightarrow$ – " –

Ortogonal : $\bar{\bar{A}}^T = \bar{\bar{A}}^{-1} \longrightarrow$ nej, jf.

$$\bar{\bar{A}}^{-1} = \frac{1}{\Delta\bar{\bar{A}}} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$, hvor A_{ij} er ko-faktorer

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ -1/3 & 1/3 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Normal : $\bar{\bar{A}}\bar{\bar{A}}^T = \bar{\bar{A}}^T\bar{\bar{A}} \longrightarrow$ nej, jf.

$$\bar{\bar{A}}\bar{\bar{A}}^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 9 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}, \quad \bar{\bar{A}}^T\bar{\bar{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 14 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

2) Der løses for $|\bar{\bar{A}} - \lambda\bar{\bar{I}}| = 0$

$0 = (1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)$

og heraf egenvektorer $(\bar{\bar{A}} - \lambda\bar{\bar{I}})\bar{x} = \bar{0}$

$\lambda_1 = 1$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 = -2x_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \bar{v}_1 = k_1 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad M_{\lambda_1} = 1$, $m_{\lambda_1} = 1$ og

dimension af egenrummet $\bar{v}_1$ (inkl. $\bar{0}$) lig 1.

$\lambda_2 = 3$: $\bar{U}_2 = k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ d.o.

$\lambda_3 = 2$: $\bar{U}_3 = k_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ d.o.

3) $\bar{\bar{A}}$ er kvadratisk med distinkte egenværdier og har derfor en egenbase der kan diagonalisere $\bar{\bar{A}}$:

$\bar{\bar{D}} = \bar{\bar{U}}^{-1} \bar{\bar{A}} \bar{\bar{U}}$ hvor $\bar{\bar{D}}$ er diag. med $\bar{\bar{A}}$'s egenværdier, og $\bar{\bar{U}}$ består af de tilhørende egenvektorer.

(metode som i 1))

$$\bar{\bar{U}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad \bar{\bar{U}}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 2\tfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \bar{\bar{U}}^{-1} \bar{\bar{A}} \bar{\bar{U}} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 2\tfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

4) Hvis egenbasen $\bar{\bar{U}}$ udgør et ortogonalt system gælder der at $\bar{\bar{U}}^T \bar{\bar{U}}$ er en diagonal matrix ($\bar{U}_i^T \bar{U}_j = 0$ for $i \neq j$)

$$\bar{\bar{U}}^T \bar{\bar{U}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -3 \\ -5 & -3 & 11 \end{bmatrix}$$

$\neq$ diagonal

Altså $\bar{\bar{U}}$ udgør ikke et ortogonalt system.

Løsning til opgave 2 (besvarelsen er reduceret)

Matrix givet ved

$$\bar{\bar{A}} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1/2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

1) Basis for rækkerum, baseret på rækkeop. på $\bar{\bar{A}}^T$:

$$\bar{\bar{A}}^T = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \curvearrowright \begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pivots i søjle 1 og 3, svarende til række 1 og 3 i $\bar{\bar{A}}$

$$\Rightarrow [8\ 0\ 2\ 0\ 4],\ [0\ 2\ -1/2\ 4\ 0]$$

Basis for søjlerum, baseret på rækkeop. direkte på $\bar{\bar{A}}$:

$$\bar{\bar{A}} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1/2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \curvearrowright \begin{bmatrix} 8 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1/2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

pivots i søjle 1 og 2, dvs. basis er

$$[8\ 4\ 0]^T,\ [0\ 0\ 2]^T$$

2) Rang af $\bar{\bar{A}}$ er lig med 2, jf. 1), dvs. antallet af lineært uafh. række (eller søjle) vektorer i $\bar{\bar{A}}$, og lig med dimensionen af henholdsvis række- og søjle rum.

Nullitet er $\dim(\bar{\bar{A}})_{søjler} - \text{rang}(\bar{\bar{A}}) = 5 - 2 = 3$

3) Nulrummet er løsninger til

$\bar{\bar{A}}\,\bar{x} = \bar{0}$, altså jf. 1)

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1/2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_3 = -4x_1 - 2x_5 \\ x_2 = -x_1 - \frac{1}{2}x_5 - 2x_4 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 - 2x_4 - x_5/2 \\ -4x_1 - 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Der er tre frie variabler der kan vælges arbitrært, og dermed uendelig mange løsninger.

Nulrummet kan derfor skrives som:

$$\bar{v}_0 = k_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(inkl. $\bar{0}$ med $k_i = 0$) og har dermed nullitet (dimension) på 3.

Løsning til opgave 3

A) For basistrinnet ($n = 1$) har vi

$$\frac{1}{1 \cdot (1+1)} = 1 - \frac{1}{1+1} \; .$$

Første skridt i induktionstrinnet er at antage $m = n + 1$ og

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{m(m+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m(m+1)} \; .$$

B) Vi fortsætter med induktionsbeviset.

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m(m+1)} &= 1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{m(m+1)} \\ &= 1 - \frac{m+1}{m(m+1)} + \frac{1}{m(m+1)} \\ &= 1 + \frac{-(m+1)+1}{m(m+1)} \\ &= 1 - \frac{m}{m+1} \end{aligned}$$

Løsning til opgave 4

A) Hverken tæller eller nævner har singulariteter. Derfor er eneste singularitet, når nævneren er 0. Det sker for $z = -3\pi$, og det er en pol-singularitet af 1. orden.

B) Da vi har en pol-singularitet af 1. orden, så kan vi bruge p/q metoden:

$$\operatorname*{Res}_{z=-3\pi} f(z) = \left.\frac{p(z)}{q'(z)}\right|_{z=-3\pi} = \left.\frac{e^{(z+1)}}{1}\right|_{z=-3\pi} = e^{(1-3\pi)} \; .$$

C) Da singulariteten ligger inden for cirklen, så får vi

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi \operatorname*{Res}_{z=-3\pi} f(z) = 2\pi \operatorname*{Res}_{z=-3\pi} f(z) = 2\pi e^{(1-3\pi)} \approx 0.0014 \; .$$

Løsning til opgave 5 og opgave 6

Opgave 5

$$X(z) = 5 + \frac{12z}{1-2z^{-1}} + \frac{3z^{-1}}{2-8z^{-1}} =$$

$$= 5 + \frac{12z}{1-2z^{-1}} + \frac{\frac{3}{2}z^{-1}}{1-4z^{-1}}$$

$X(z)$ has 2 poles: $z=2$, $z=4$

Possible regions of convergence are then

- $|z|<2$
- $2<|z|<4$
- $|z|>4$

Let us consider first $|z|<2$:

$\frac{12z}{1-2z^{-1}}$ ROC: $|z|<2$ → left-sided sequence

$\frac{\frac{3}{2}z^{-1}}{1-4z^{-1}}$ ROC: $|z|<2$ → right-sided sequence

We therefore have

$$x[n] = 5\delta[n] - 12(2)^{n+1}u[-(n+1)-1] + -\frac{3}{2}(4)^{n-1}u[-(n-1)-1] =$$

$$= 5\delta[n] - 12(2)^{n+1}u[-n-2] - \frac{3}{2}(4)^{n-1}u[-n]$$

Let us consider now $2<|z|<4$:

$\frac{12z}{1-2z^{-1}}$ ROC: $2<|z|<4 \rightarrow$ right-sided sequence

$\frac{\frac{3}{2}z^{-1}}{1-4z^{-1}}$ ROC: $2<|z|<4 \rightarrow$ left-sided sequence

We therefore obtain:

$$x[n] = 5\delta[n] + 12(2)^{n+1}u[n+1] - \frac{3}{2}(4)^{n-1}u[-n]$$

Finally, let us consider $|z|>4$:

$\frac{12z}{1-2z^{-1}}$ ROC: $|z|>4$ right-sided sequence

$\frac{\frac{3}{2}z^{-1}}{1-4z^{-1}}$ ROC: $|z|>4$ right-sided sequence

We therefore obtain:

$$x[n] = 5\delta[n] + 12(2)^{n+1}u[n+1] + \frac{3}{2}(4)^{n-1}u[n-1]$$

Opgave 6

Let us z-transform both sequences

$x[n] = 3\delta[n] - 2\delta[n-1] \longrightarrow X(z) = 3 - 2z^{-1}$

$y[n] = 6\delta[n-3] + 12\delta[n-1] \rightarrow Y(z) = 6z^{-3} + 12z^{-1}$

The z-transform of the impulse response $h[n]$ is therefore given by:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{6z^{-3}+12z^{-1}}{3-2z^{-1}} = \frac{2z^{-3}+4z^{-1}}{1-\frac{2}{3}z^{-1}} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}z^{-1}} \cdot z^{-3} + 4 \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}z^{-1}} z^{-1}$$

$H(z)$ has a pole in $z = \frac{2}{3}$. Since the LTI system is stable, the ROC must include the unit circle. Therefore, ROC: $|z| > \frac{2}{3}$.

The inverse z-transform is then:

$$h[n] = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3} u[n-3] + 4\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} u[n-1]$$

Since

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{6z^{-3} + 12z^{-1}}{3 - 2z^{-2}}$$

$$\Rightarrow \quad Y(z)(3 - 2z^{-2}) = X(z)(6z^{-3} + 12z^{-1})$$

$$3Y(z) - 2Y(z)z^{-2} = 6X(z)z^{-3} + 12X(z)z^{-1}$$

$$\Downarrow \; Z^{-1}$$

$$3y[n] - 2y[n-2] = 6x[n-3] + 12x[n-1]$$

difference equation characterizing the system