Institut for elektroniske systemer 2023 TBS
EIT4 /23

LINEÆR ALGEBRA

MM 2: Tirsdag 14. marts 2023
kl. 08.15 i B2-104

Emner: Vektorrum
Underrum
Uddrivelse/fortrængning
Ligningssystemer
Eksempler på vektorrum

Læsning: [EK] s. 282 – 287, s. 309 – 313 (evt. 334-335 som optakt til LA3)

Som en hjælp er svaret til hver opgave angivet med grøn skrift efter opgaverne.

Med venlig hilsen
Troels

Opgaver:

Opgave 2.1

Matrixen A er givet ved:

$$A = \begin{Bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

a. Vis at vektoren $\mathrm{a} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 4 \end{Bmatrix}$ tilhører nulrummet for A.

b. Hvad er rangen og nulliteten af A?

c. Find nulrummet for A.

d. Gentag alle de ovenstående spørgsmål for matrixen B, som er givet ved:

$$B = \begin{Bmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 0 \end{Bmatrix}$$

Opgave 2.2

Matrixen $\boldsymbol{A}$ er givet ved:

$$\boldsymbol{A} = \left\{ \begin{matrix} 5 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\}$$

a. Find rangen af $\boldsymbol{A}$.
b. Find nulliteten af $\boldsymbol{A}$ (dimensionen af nulrummet).
c. Find determinanten for $\boldsymbol{A}$.
d. Undersøg om de tre vektorer $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$ og $(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ tilhører nulrummet for $\boldsymbol{A}$. Vektorerne er givne ved:

$$\mathbf{a} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{matrix} \right\} \qquad \mathbf{b} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1{,}5 \end{matrix} \right\}$$

e. Gentag alle de ovenstående spørgsmål for matrixen $\boldsymbol{B}$, som er givet ved:

$$\boldsymbol{B} = \{ 5 \quad -3 \quad 2 \}$$

Opgave 2.3

Betragt alle vektorer i $\mathcal{R}^3$, hvorom det gælder, at $5x - 3y + 2z = 0$

$\mathcal{R}^3$ står for sæt af 3 reelle tal. Dvs. det kunne være det 3-dimensionelle rum, der beskrives. Symbolerne x,y,z står for komposanterne i de angivne vektorer.

a. Vis at de angivne vektorer udgør et vektorrum.
b. Find dimensionen.
c. Find en base.

Opgave 2.3b

Givet følgende tre sæt af vektorer, angiv i hvert tilfælde om der er tale om et vektorrum og begrund hvorfor/hvorfor ikke. I fald der er tale om et vektorrum, angiv dimensionen heraf og en base for vektorrummet:

1) alle vektorer i $\mathbb{R}^2$ hvorom det gælder at $|x| < 1, |y| < 1$, dvs. hvor komposanternes absolutte værdi er mindre end 1.
2) alle vektorer i $\mathbb{R}^3$ hvorom det gælder at $2x + 3z = 0$.
3) alle vektorer i $\mathbb{R}^1$

Opgave 2.4

Betragt alle vektorer i $\mathcal{R}^5$, hvorom det gælder, at de 3 første komposanter er 0.

a. Vis at de angivne vektorer udgør et vektorrum.
b. Find dimensionen.
c. Find en base.

Opgave 2.5
Betragt alle vektorer i $\mathcal{R}^3$, hvorom det gælder, at $2x + 3y - z = 0$ samt $x - 4y + z = 0$.

- **a.** Vis at de angivne vektorer udgør et vektorrum.
- **b.** Find dimensionen.
- **c.** Find en base.

Opgave 2.6
Matrixen $\boldsymbol{A}$ er givet ved:

$$\boldsymbol{A} = \begin{Bmatrix} -2 & -5 & 8 & 0 & -17 \\ 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 3 & 11 & -19 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & -13 & 5 & -3 \end{Bmatrix}$$

- **a.** Rækkereducér $\boldsymbol{A}$ til echelonform.
- **b.** Find rangen af $\boldsymbol{A}$.
- **c.** Find en base for rækkerummet.
- **d.** Find en base for søjlerummet.
- **e.** Find en base for nulrummet.
- **f.** Angiv dimensionerne af de tre rum og relatér dem til antallet af søjler i $\boldsymbol{A}$.

Opgave 2.7
Matrixen $\boldsymbol{A}$ er givet ved:

$$\boldsymbol{A} = \begin{Bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

- **a.** Find rangen af $\boldsymbol{A}$.
- **b.** Find nulliteten af $\boldsymbol{A}$ (dimensionen af nulrummet).
- **c.** Find determinanten for $\boldsymbol{A}$.
- **d.** Undersøg om de tre vektorer $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$ og $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ tilhører nulrummet for $\boldsymbol{A}$. Vektorerne er givne ved:

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ 11 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 6 \\ 22 \end{Bmatrix}$$

Opgave 2.8
Matrixen $\boldsymbol{A}$ er givet ved:

$$\boldsymbol{A} = \begin{Bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{Bmatrix}$$

- **a.** Rækkereducér $\boldsymbol{A}$ til echelonform.
- **b.** Find rangen og nulliteten af $\boldsymbol{A}$.
- **c.** Find en base for nulrummet.

Facitliste

Opgave 2.1: OK, r=1, nul.=1, $k \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$ $\boldsymbol{B}$ giver det samme som $\boldsymbol{A}$.

Opgave 2.2: r=1, nul.=2, $\Delta A = 0$, Ja,ja,ja Samme undtagen determinant, som ikke er defineret.

Opgave 2.3: Ja, dim=2, Eksempelvis: $\begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ (-5) \end{Bmatrix}$ og $\begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$

Opgave 2.3b:

1) ja? nej?
2) ja, dim = 2, {[3, 0, -2], [0, 1, 0]}
3) ja, dim = 1, 1

Opgave 2.4: Ja, dim=2, Eksempelvis: $\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ og $\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$

Opgave 2.5: a:OK b: dim=1 c, eksempelvis: $\begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ 11 \end{Bmatrix}$

Opgave 2.6: a: $\begin{Bmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$ b: r=3

c, eksempelvis:

$\boldsymbol{u}_1 = \{1 \quad 3 \quad -5 \quad 1 \quad 5\}$ $\boldsymbol{u}_2 = \{0 \quad 1 \quad -2 \quad 2 \quad -7\}$ $\boldsymbol{u}_3 = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad -4 \quad 20\}$

d, eksempelvis:

$\boldsymbol{u}_1 = \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$ $\boldsymbol{u}_2 = \begin{Bmatrix} -5 \\ 3 \\ 11 \\ 7 \end{Bmatrix}$ $\boldsymbol{u}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \\ 5 \end{Bmatrix}$

e, eksempelvis:

$\boldsymbol{u}_1 = \begin{Bmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ -10 \\ -2 \end{Bmatrix}$ $\boldsymbol{u}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ -5 \\ -1 \end{Bmatrix}$

f: dim(rækkerum)= 3, dim(søjlerum)=3, dim(nulrum)=2, rang(A)=3, antal søjler=5.