Løsning til opgave KF 2.2.1

Løsning til (A):

Der er singulariteter, når nævneren er 0, så

$$4 + z^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = -4 \quad \Leftrightarrow \quad z = \pm 2i \ ,$$

og det er simple poler (altså af type B).

Løsning til (B):

Igen er der singulariteter, når nævneren er 0, så

$$(z^2 - 1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z = \pm 1 \ ,$$

og det er poler af orden 2. Og typen er igen B.

Løsning til (C):

Da

$$\frac{1}{\tan z} = \frac{\cos z}{\sin z}$$

må vi undersøge $\sin z = 0$. Der er ikke andre singulariteter, da både $\cos$ og $\sin$ i sig selv ikke har singulariteter.

$$\sin z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z} \ .$$

Ifølge slide 13 (sætning om poler) er singulariteterne poler (og simple), da

$$\left| \frac{1}{\tan z} \right| \to \infty \quad \text{for } z \to 0$$

uanset retningen. Det samme gælder for $z \to 2\pi n$ for alle andre n også.

Løsning til (D):

Laurentrækken er

$$e^{-1/z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{-2n}$$

og da vi kan finde $b_n \neq 0$ for vilkårligt stort n, så har principal-delen uendeligt mange led og så er singulariteten essentiel.

Løsning til opgave KF 2.2.3

I alle tre tilfælde er der en singularitet i 0, og alle tre integranter er analytiske for $0 < |z| < \infty$. Dermed kan vi i alle tre tilfælde bruge Laurentrækken for integranten, da vi ved at integralerne alle er lig $2\pi i b_1$ for de respektive b_1'er.

Løsning til (A):

Laurentrækken for $e^{1/z}$ fås ved at erstattet z med $1/z$ i rækken for e^z, altså

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} \ .$$

Og så har vi at

$$\oint_C e^{1/z} dz = 2\pi i b_1 = 2\pi i \frac{1}{1!} = 2\pi i \ .$$

Løsning til (B):

Igen opskriver vi Laurentrækken (som vi finder i løsningen til opgave 7.2(B))

$$z \cos(1/z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{1-2n} \ .$$

Og så har vi at ($n = 1$ giver koefficienten b_1)

$$\oint_C z \cos(1/z) dz = 2\pi i b_1 = 2\pi i \frac{-1}{2!} = -\pi i \ .$$

Løsning til (C):

Endnu en gang opskriver vi Laurentrækken

$$\frac{\sin z}{z^3} = z^{-3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-2} \ .$$

Koefficienten for z^{-1} er 0, så

$$\oint_C \frac{\sin z}{z^3} dz = 2\pi i \cdot 0 = 0 \ .$$