

# LINEÆR ALGEBRA

MM 5: Fredag 24. marts 2023  
kl. 08.15 i B2-107

Emner: Diagonalisering, fortsat  
Kanonisk form, afslutning  
Komplekst vektorrum  
Matrixers taxonomi  
Unitære systemer  
Evt. anvendelseseksempel (MIMO transmission)

Læsning: [EK] s. 346 – 351, 607 – 618 (komplekse tal)

Som en hjælp er svaret til hver opgave angivet med grøn skrift efter opgaverne.

Med venlig hilsen  
Troels

## Opgaver:

### Opgave 5.1

Undersøg for hver af de to matrixer  $C$  og  $D$  om de er hermitiske, skævhhermitiske eller unitære og bestem deres spektrum og spektral radius

$$C = \begin{Bmatrix} 4 & j \\ -j & 2 \end{Bmatrix} \quad D = \begin{Bmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{Bmatrix}$$

### Opgave 5.2

Find længden af vektoren  $\mathbf{a}$ , som er givet ved:

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} 1 \\ (1 + j2) \end{Bmatrix}$$

### Opgave 5.3

Betragt de to vektorer  $a$  og  $b$ :

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} -j \\ 1 \end{Bmatrix} \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} j \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

- a. Udgør  $a$  og  $b$  et unitært system?
- b. Er matrixen  $C$  normal?

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} -j & j \\ 1 & 1 \end{Bmatrix}$$

### Opgave 5.4

Betragt matrixen  $A$ , givet ved:

$$A = \begin{Bmatrix} j & 1 \\ -1 & j \end{Bmatrix}$$

- a. Find ud af om  $A$  er hermitisk, skævhhermitisk eller unitær.
- b. Find en egenbase, der danner et unitært system for  $A$ .
- c. Find en matrix  $B$ , der diagonaliserer  $A$  ( $D = B^{-1}AB$ )

### Opgave 5.5

Betragt matrixen  $A$ , givet ved:

$$A = \begin{Bmatrix} j3 & 2+j \\ -2+j & -j \end{Bmatrix}$$

- a. Find ud af om  $A$  er hermitisk, skævhhermitisk eller unitær.
- b. Find en egenbase, der danner et unitært system for  $A$ .
- c. Find en matrix  $B$ , der diagonaliserer  $A$

### Opgave 5.6

Betragt matrixen  $A$ , givet ved:

$$A = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & j \\ 0 & 2 & 0 \\ -j & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

- a. Find ud af om  $A$  er hermitisk, skævhhermitisk eller unitær.
- b. Find en egenbase, der danner et unitært system for  $A$ .
- c. Find en matrix  $B$ , der diagonaliserer  $A$

### Opgave 5.7

Find en unitær matrix  $B$ , som diagonaliserer matrixen  $A$ , givet ved:

$$A = \begin{Bmatrix} -1 & j & 1+j \\ -j & 1 & 0 \\ 1-j & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

Facitliste

Opgave 5.1:  $\mathbf{C}$  hermitisk,  $\mathbf{D}$  skævhhermitisk . Spektrum  $3 \pm \sqrt{2}$  (4.41) og  $\pm j$  (1)

Opgave 5.2:  $\sqrt{6} = 2,45$

Opgave 5.3: a. ja b. ja

Opgave 5.4: a. Skævhhermitisk.

$$\text{b. } \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} -j \\ 1 \end{Bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} j \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

$$\text{c. } \begin{Bmatrix} -j & j \\ 1 & 1 \end{Bmatrix}$$

Opgave 5.5: a. Skævhhermitisk.

$$\text{b. } \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{Bmatrix} 5 \\ 1 + j2 \end{Bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{Bmatrix} 1 - j2 \\ -5 \end{Bmatrix}.$$

$$\text{c. } \begin{Bmatrix} 5 & 1 - j2 \\ 1 + j2 & -5 \end{Bmatrix}$$

Opgave 5.6: a. Hermitisk.

$$\text{b. } \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} -j \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} j \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

$$\text{c. } \begin{Bmatrix} -j & j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Opgave 5.7: } \begin{Bmatrix} 0 & \frac{1+j}{\sqrt{8}} & \frac{-3-j3}{\sqrt{24}} \\ \frac{-1+j}{\sqrt{3}} & \frac{1-j}{\sqrt{8}} & \frac{1-j}{\sqrt{24}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{8}} & \frac{2}{\sqrt{24}} \end{Bmatrix}$$