KF Lektion 2.4

Repetition

L'Hopitals regel

Uendelige summer

Hvad har vi lært når lektionen er omme?

1. Integraler af trigonometriske funktioner
2. Repetition af de vigtigste begreber
3. l’Hopitals regel
4. Uendelige summer

Rationelle funktioner med cos/sin

Vi kan løse integraler på følgende form med residue-regning:

$$J = \int_0^{2\pi} F(\cos\theta\,, \sin\theta)d\,\theta$$

1 (725)

hvor F er en rational funktion af cos og sin, der ikke bliver uendelig på integrations-intervallet.

Vi kan løse integraler som for eksempel

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2}-\cos\theta} d\,\theta \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5-4\cos\theta} d\,\theta$$

$$J = \int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)d\,\theta$$

Rationelle funktioner med cos/sin

Vi laver substitutionen $e^{i\theta} = z$ (så er integralkurven enhedscirklen)

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}$$

$$\frac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta} = iz \quad \Leftrightarrow \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

og lader $f(z)$ være den rationelle funktion, hvor vi har erstattet cos/sin med z.
Så får vi

$$J = \int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta = \oint_C \frac{f(z)}{iz}\,dz$$

3 (726)

hvor C er enhedscirklen.

Eksempel på cos/sin integration

Ex 1 (726)

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2}-\cos\theta}\,d\,\theta = \oint_C \frac{1 \;{\scriptstyle\times 2}}{\sqrt{2}_{\times 2} - (z+z^{-1})/2_{\times 2}} \frac{dz}{iz} = \frac{2}{i}\oint_C \frac{1}{2\sqrt{2}z-(z^2+1)}dz$$

$$= -\frac{2}{i}\oint_C \frac{1}{(z-\sqrt{2}-1)(z-\sqrt{2}+1)}dz$$

Der er to simple poler i $\sqrt{2}+1$ og $\sqrt{2}-1$. Kun den sidste er inden for enhedscirklen.
Vi bruger residue-regning:

$$\operatorname*{Res}_{z=\sqrt{2}-1} \frac{1}{(z-\sqrt{2}-1)\cancel{(z-\sqrt{2}+1)}} = \left[\frac{1}{z-\sqrt{2}-1}\right]_{z=\sqrt{2}-1} = -\frac{1}{2}$$

Så får vi

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2}-\cos\theta}\,d\,\theta = 2\pi i\left(-\frac{2}{i}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\pi$$

Laurent-rækker

Laurentrække er ”bare” en potensrække med både positive og negative potenser

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}$$

1 (709)

hvor koefficienterne udregnes som ved potensrækker

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\tau)}{(\tau - z_0)^{n+1}} d\tau$$

hvor C er en simpelt, lukket kurve i en annulus, der har centrum i z_0 og hvor f er analytisk.

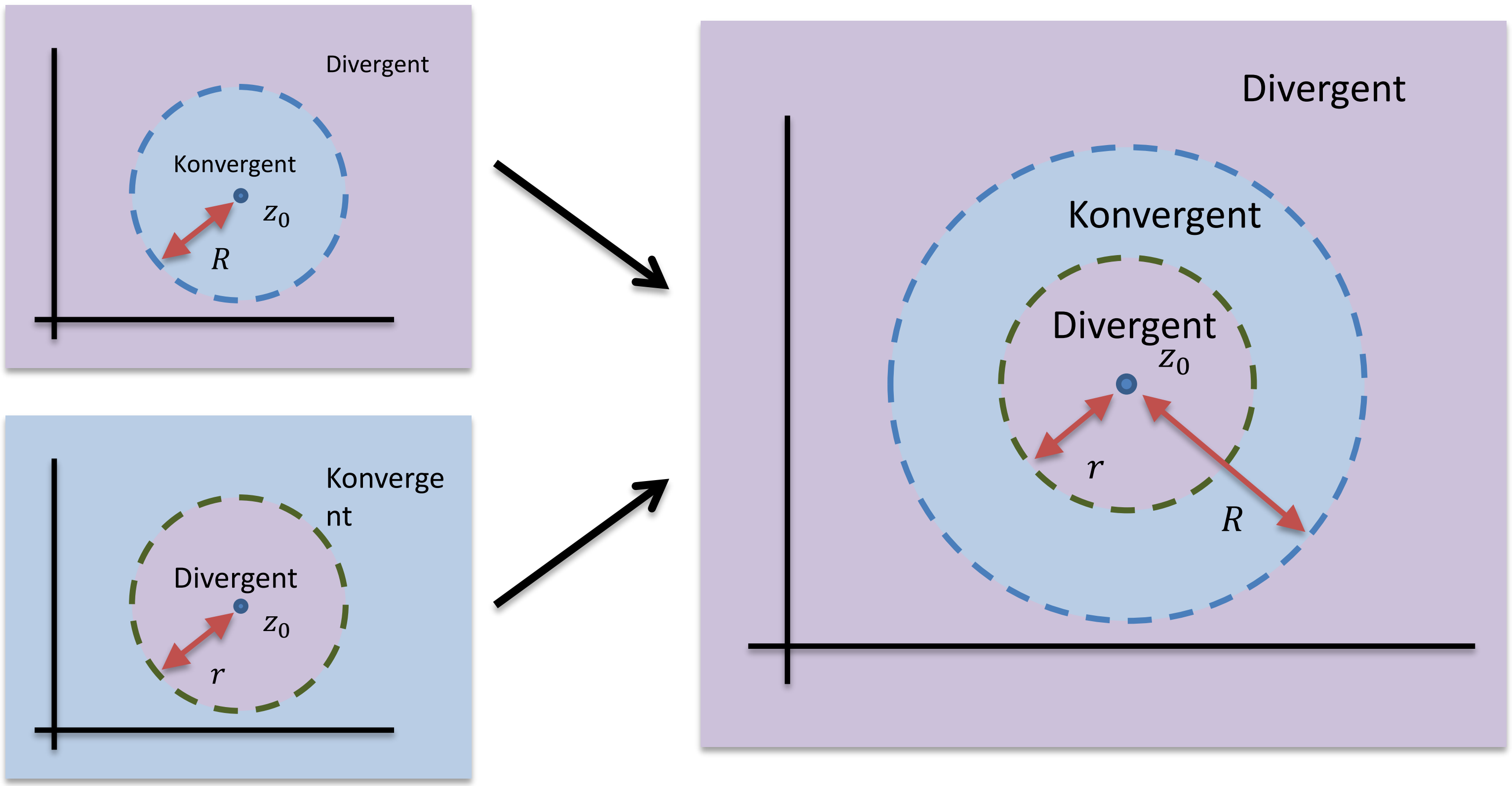
Konvergensradii for Laurentrækker

Vi kombinerer de to potensrækker, med positive og negative potenser, og får netop en annulus:

$$r < |z - z_0| < R$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}$$



Eksempel på Laurent-række

Find Laurentrækken for $z^2 e^{1/z}$ med centrum i 0.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad \Leftrightarrow \quad e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}$$

$$z^2 e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n+2} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} z^{-1} + \frac{1}{24} z^{-2} + \cdots$$

Funktionen er defineret for alle z undtaget 0.

$$0 < |z| < \infty \quad \Leftrightarrow \quad |z| > 0$$

Ex 2 (712)

Singularitet

En funktion $f(z)$ har en singularitet i z_0, hvis

1. både f ikke er analytisk i z_0, og
2. enhver omegn af z_0 indeholder punkter hvor f er analytisk.

Vi har undersøgt tre forskellige slags singulariteter:

A. Removable singulariteter
B. Pol-singulariteter
C. Essentielle singulariteter

Pol-singulariteter (type B)

Hvis Laurentrækken for $f(z)$ har endelig principal-del, det vil sige kun endeligt mange b_n led (igen i et bestemt punkt z_0)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{m} b_n (z - z_0)^{-n}$$

2 (715)

så siger vi, at $f(z)$ har pol i z_0 af orden m. Poler med orden 1 kaldes simple poler.

$$\frac{z-2}{(z-2i)(z+1)^3}$$

Simpel pol i $z = 2i$ og pol af orden 3 i $z = -1$

Tidligere i studiet

$$\frac{1}{z(z-2)^5} + \frac{3}{(z-2)^2}$$

Simpel pol i $z = 0$, og pol af **orden 5** i $z = 2$

Ex 1 (715)

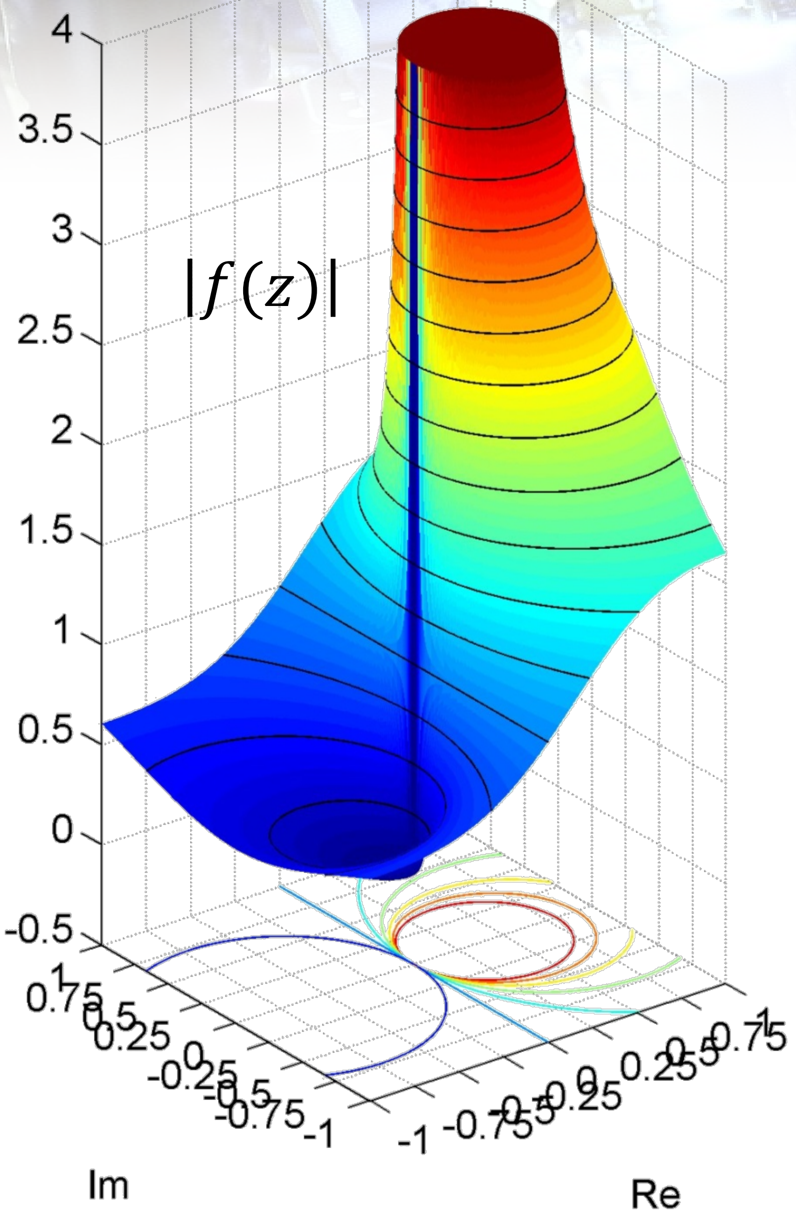
Essentiel singularitet

Funktionen

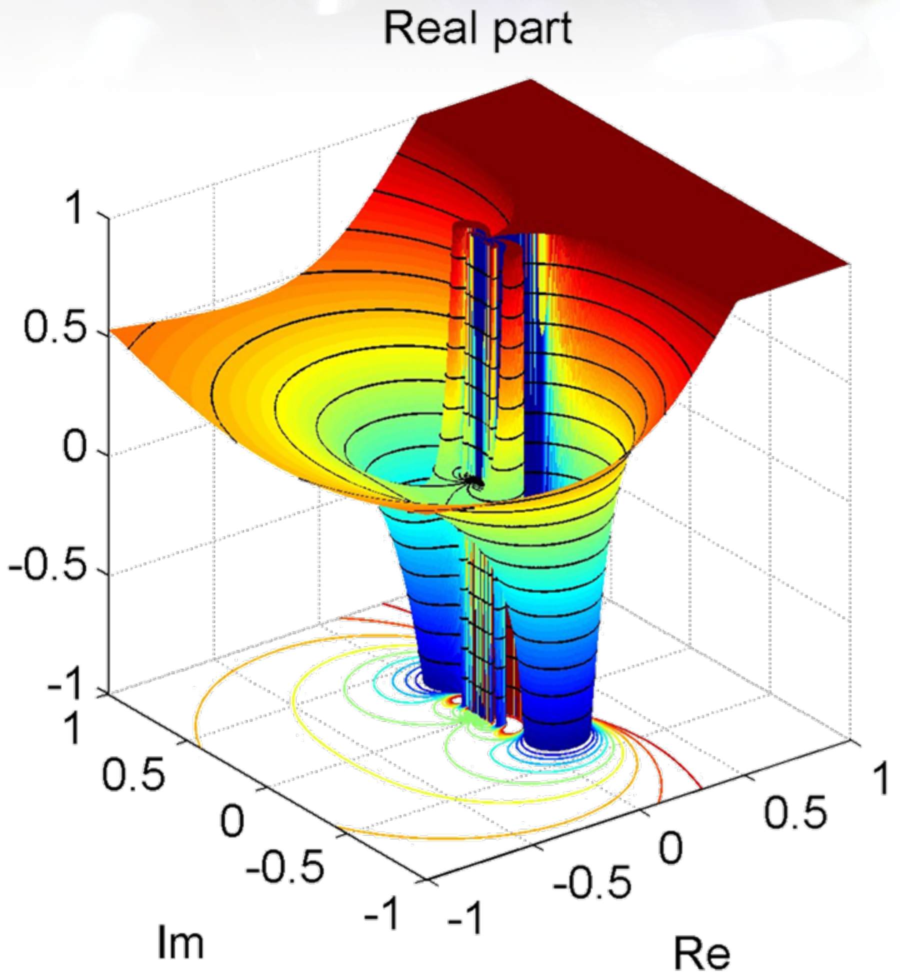
$$f(z) = e^{1/z}$$

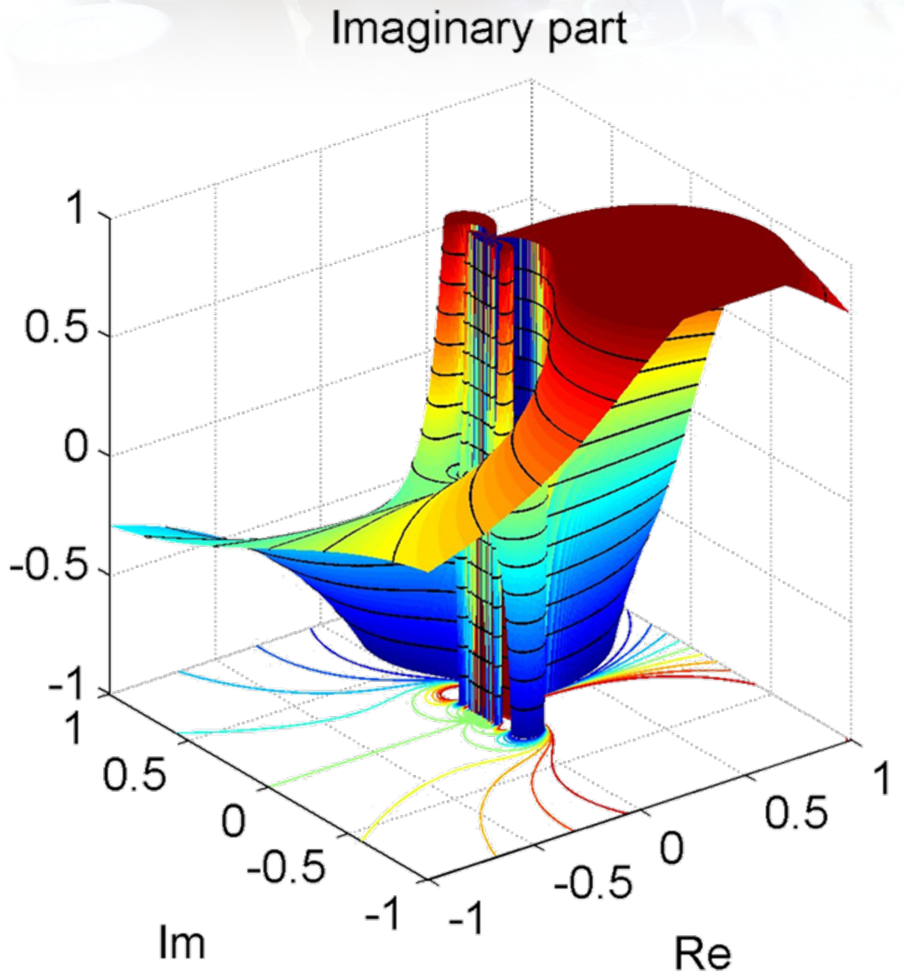
antager (næsten) alle komplekse værdier i nærheden af singulariteten.

Det fremgår tildels fra figuren, som "kun" er absolut værdi!



Essentiel singularitet (KF 2)





Real- og imaginær-delene er ikke kønne!

Test af singularitet

1. Opskrive Laurentrækken (kan nogen gange være svært)

2. Hvis $f(z)$ er analytisk og har en pol i $z = z_0$, så har vi

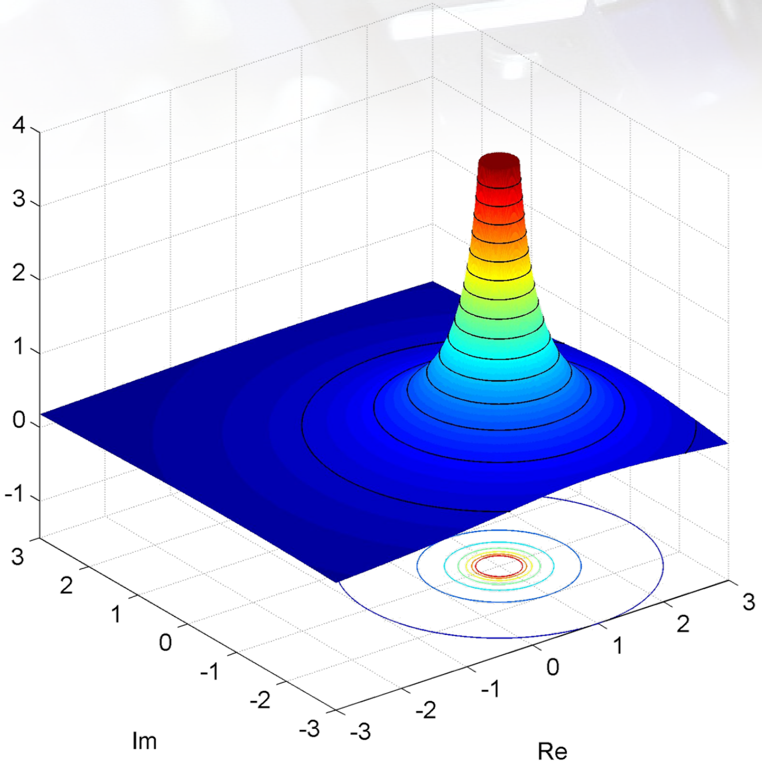
$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| \to \infty$$

Theorem 1 (716)

Og her kan z nærme sig z_0 fra enhver retning!
<u>Det omvendte gælder også.</u>

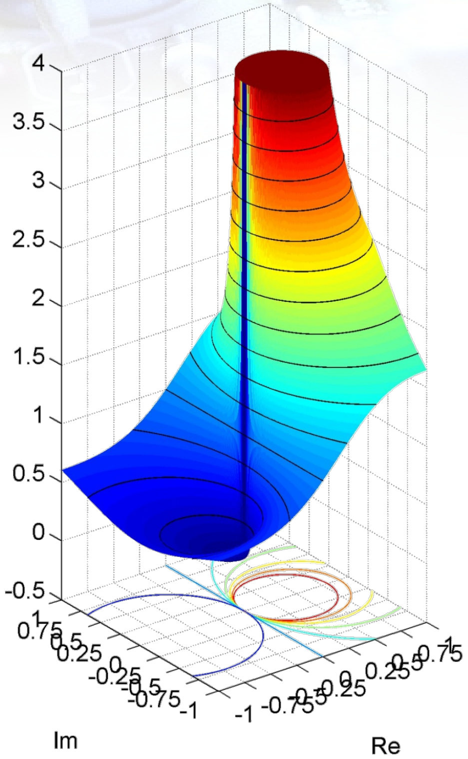
3. Erfaring ...

Test af singulariteter

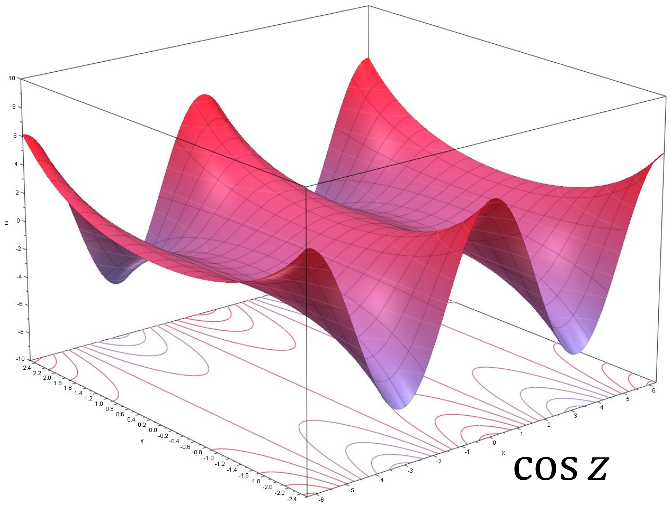


$$f(z) = \frac{1}{z - 1 + i}$$

$$f(z) = e^{1/z}$$



$$f(z) = \frac{z}{1 - \cos z}$$



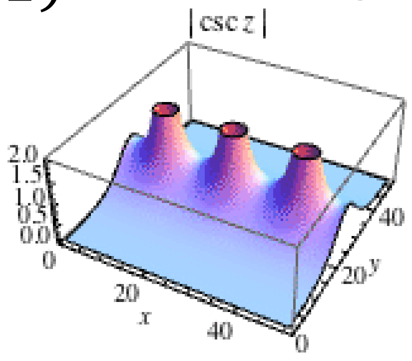
Opgave 1

Bestem typen af singularitet

$$\frac{z}{z^2(z+1)} \qquad \frac{1}{1+\cos z} \qquad z^{-4}e^{z/4} \qquad \frac{\sin(\pi z)}{z\cos(\pi z)}$$

$$\tan\frac{1}{z} \qquad \frac{\sin^2 z}{\arctan z} \qquad \tan z \cdot \cos z \qquad \csc(3z)$$

$$\frac{2z}{\sin z} \qquad \frac{1}{e^{2z}} \qquad \cos(\sin z) \qquad \sin\frac{(z^2+1)}{(z+i)}$$



Residuum

Laurent-rækken er givet ved

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}$$

med koefficienter

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\tau)}{(\tau - z_0)^{n+1}} d\tau \qquad b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\tau)}{(\tau - z_0)^{-n+1}} d\tau$$

$n=1$ $\quad$ $n=1$ $\quad$ $=0$ $\quad$ $=1$

1 (709)

Dermed har vi, at

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i b_1$$

Koefficient b_1 kaldes residuet

$$b_1 = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$$

2 (720)

Residuer for singulariteter

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}$$

1 (709)

A. Removable singulariteter

$b_n = 0$

$\mathrm{Res}\, f(z) = 0$

B. Pol-singulariteter (af orden m)

$b_n = 0 \quad \text{for } n > m$

$$\mathrm{Res}\, f(z) = \begin{cases} \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) \\ p(z_0)/q'(z_0) \\ b_1 \end{cases}$$

C. Essentielle singulariteter

$b_n \neq 0 \quad \text{for vilkårligt stort } n$

$\mathrm{Res}\, f(z) = b_1$

Desværre ingen "genvej" eller "nem" metode for essentielle singulariteter.

Residuum-sætning

Lad f være analytisk inden for og på en simpel, lukket kurve C, undtaget i k forskellige singulære punkter z_1 til z_k. Så har vi at

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z)$$

6 (723)

Sætningen kaldes også Cauchy's Residue Theorem

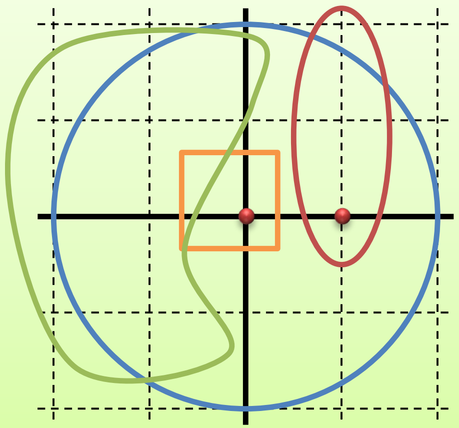
$$f(z) = \frac{4-3z}{z^2-z} \qquad \text{Find } \oint_C f(z)dz \text{ for}$$

C_1: **0 og 1 er indenfor**

C_3: **0 og 1 er udenfor**

C_2: **0 udenfor/1 indenfor**

C_4: **0 indenfor/1 udenfor**



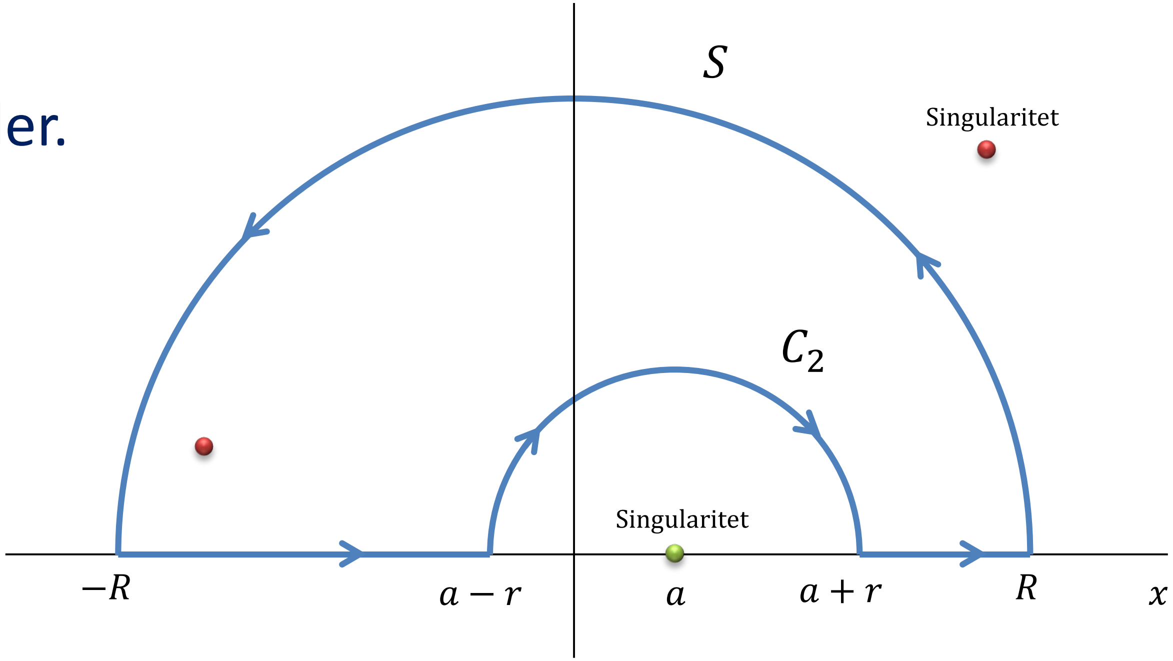
Cauchys hovedværdi-sætning

Hvis $f(x)$ er en rational funktion med $|f(x)| \leq k|x|^{-2}$ og med simple poler på den reelle akse, så er

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\substack{\text{Øvre}\\\text{halvplan}}} \operatorname{Res} f(z) + \pi i \sum_{\substack{\text{Reelle}\\\text{akse}}} \operatorname{Res} f(z)$$

14 (732)

Figuren skitserer, hvorfor det holder.



L'Hopitals regel

Ikke i bogen

Lad $f(z)$ og $g(z)$ være analytisk i et område, der indholder z_0 og antag at for $m > 0$

$$f^{(m-1)}(z_0) = g^{(m-1)}(z_0) = 0 \qquad \text{og} \qquad g^{(m)}(z_0) \neq 0$$

Så gælder der at

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(m)}(z_0)}{g^{(m)}(z_0)}$$

For $m = 1$ giver det

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

Opgave 2

Bestem

$$\lim_{z\to 0}\frac{2z}{\sin z}$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{2\sin z-\sin 2\,z}{z-\sin z}$$

ved hjælp af l'Hopitals regel

Uendelige summer

Lad $f(z)$ analytisk for $z =$ alle heltal, og i øvrigt opfylde betingelserne for Cauchys hovedværdisætning, så har vi

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi \sum_{\substack{\text{Poler} \\ \text{for } f}} \operatorname{Res}\left(f(z)\frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}\right)$$

og

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = -\pi \sum_{\substack{\text{Poler} \\ \text{for } f}} \operatorname{Res}\left(f(z)\frac{1}{\sin \pi z}\right)$$

Opgave 3

Bestem

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Brug

$$\cot z = \frac{1}{\tan z} = \frac{\cos z}{\sin z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}$$

hvor

$$B_0 = 1 \quad B_1 = -\frac{1}{2} \quad B_2 = \frac{1}{6} \quad B_3 = 0 \quad B_4 = -\frac{1}{30}$$