Lineær algebra (LA)

anden del af kurset i beregningsteknik

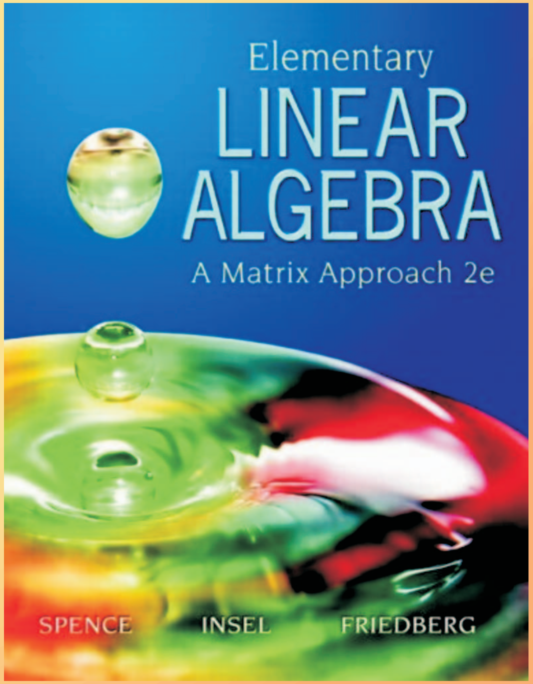
Aalborg Universitet

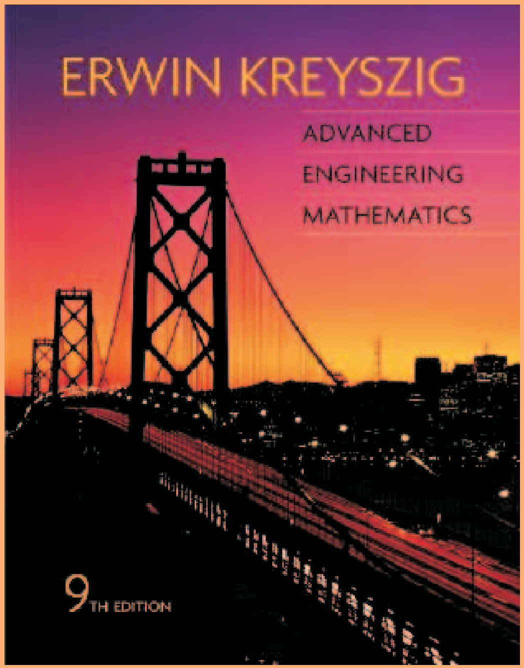
Troels B. Sørensen

tbs@es.aau.dk

Delvist baseret på slides venligst udlånt af Hans Ebert

BEREGNINGSTEKNIK INDENFOR ELEKTRONIKOMRÅDET
LINEÆR ALGEBRA





Spence, Insel & Friedberg:

Elementary Linear Algebra, 2nd ed.
A Matrix Approach

Pearson

ISBN 0131580345

Erwin Kreyszig:

Advanced Engineering Mathematics
9th. ed.

John Wiley 2006

ISBN 0-471-72897-1

OVERORDNET KURSUSPLAN

MM1 Repetition af matrixregning

Løsning af ligningssystemer, determinant, vektorregning, matrixoperationer, invertering af matrixer, rækkereducering, Echelonform.

MM2 Grundlæggende begreber

Vektorrum, rang, nulrum, nullitet, homogene ligninssystemer

MM3 Egenværdi

Egenværdiproblemet, karakteristisk matrix, determinant og ligning, egenværdi og -vektorer, multiplicitet. Nogle eksempler.

MM4 Kanonisk form

Prikprodukt, egenbase, lineær transformation, diagonalisering, kvadratisk form, kanonisk form

MM5 Komplexe matrixer

Diagonalisering, komplexe matrixer, terminologi, unitære systemer.

Anvendelseseksempler - i opgaver og i forelæsning

HØJDEPUNKTER I KURSET

- **Elementære matrixoperationer**
  Addition, multiplikation, skalar multiplikation, dimension
- **Beregning af determinat**
  Rækkereducering, Gaussisk elimination
- **Invertering af en matrix**
  Rækkereducering
- **Løsning af homogent ligningssystem**
  Rang
- **Finde egenværdi og -vektorer**
  Karakteristisk matrix, determinant og ligning. Algebraisk og geometrisk multiplicitet, spor/determinant
- **Lineær transformation**
  Grafiske afbildninger i planen, orthogonal afbildning
- **Vektorrum**
  Betingelser (4 a-regler og 4 s-regler), underrum, dimension, base
- **Diagonalisering**
  Similaritetstransformation, egenbase, ortonormalt system
- **Kanonisk form**
  Kvadratisk form, hovedakser

LINEÆR ALGEBRA

MM 1: Fredag 10. marts 2023
kl. 08.15 i B2-104

Emner: Indledning
Matrixregning
Rang og determinant
Invertering af matrixer
Løsning af ligningssystemer
Eksempler

Læsning: Erwin Kreyszig: Advanced Engineering Mathematics. 10th ed., John Wiley & Sons, 2011 [EK], s. 256 – 308 og s. 124 - 129 (grundlæggende vektorer og matrixer)

Der er mest tale om repetition fra jeres tidligere kursus i lineær algebra. Vi benytter her sædvanligvis at referere til matrix/matrixen, og angiver matrixer og vektorer ved fed kursiv: ***A***

ECHELONFORM

En matrix er på echelonform (er en trekantsmatrix) hvis

- alle nulrækker er nederst, og
- det første tal $\neq 0$ i hver række
  - står til højre for det første tal $\neq 0$ i rækken ovenover og
  - har kun nuller nedenunder.

Pivot

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P} & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{P} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{P} \end{bmatrix}$$

Pivot

En matrix er på reduceret echelonform hvis

- den er på echelonform, og
- det første tal $\neq 0$ i hver række

  er $= 1$ og

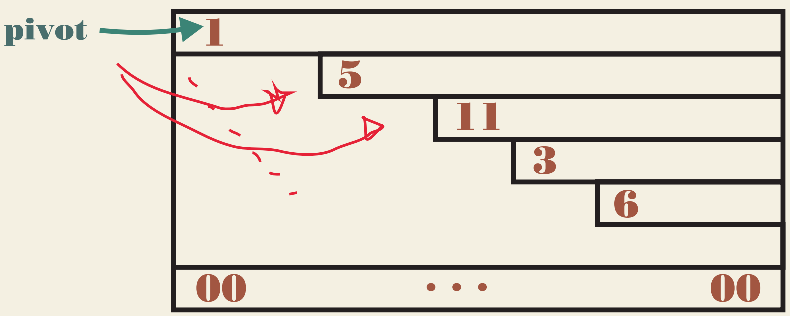
  har også kun nuller ovenover.

(P = 1)

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

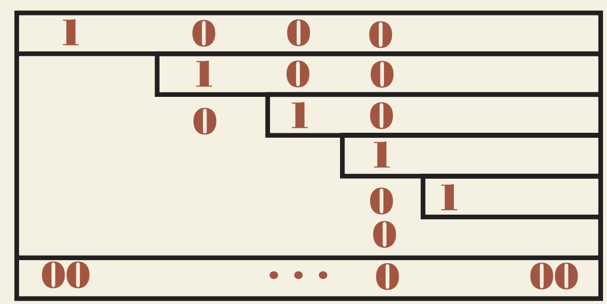
Echelonform

Kaldes også normal trappeform.
Echelon er en kampformation for krigere



Nuller under alle pivoter

Reduceret echelonform



Alle pivoter 1.
Nuller både over og under pivoter

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 7 & 7 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 & 13 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ELEMENTÆRE RÆKKEOPERATIONER

Praktisk (Gauss elim.*)

* Reduktion til echelonform

R1: **Multiplikation af rækker med en konstant (ikke 0)**

R2: **Ombytning af rækker i en matrix**

R3: **Addition af en vægtet sum af rækker til en række.**

Matrixer, der kan gøres identiske via R1, R2, R3 kaldes rækkeækvivalente.

Rækkeækvivalente matrixer har samme rang.
Hvis de repræsenterer ligningssystemer, har de samme løsninger

ELEMENTÆRE TRANSFORMATIONSMATRIXER (teoretisk)

E **1:** Multiplikation af rækker med en konstant (ikke 0)
E **2:** Ombytning af rækker i en matrix
E **3:** Addition af en vægtet sum af rækker til en række.

Elementær transformationsmatrix af 1. art
Multiplicerer en række med en konstant*

Elementær transformationsmatrix af 2. art
Ombytter to rækker*

Elementær transformationsmatrix af 3. art
Multiplicerer en række med en konstant og adderer den til en anden række*

*Kan også være flere rækker. Kan også være søjler

Præmultipliceret virker det på rækker. Postmultipliceret virker det på søjler. E-matrixerne er kvadratiske og skal passe i den aktuelle dimension af den matrix, de anvendes på.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ Ganger række 2 med 3.

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ Bytter række 1 og 2.

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$ Ganger række 2 med -3 og lægger den til række 3.

REGNEREGLER FOR DETERMINANT

Determinant $\Delta A = |A|$

- $\Delta A = \Delta A^T$ transponering giver samme Δ
- $\Delta(kA) = k^n \Delta A$
- **Hvis to rækker ombyttes, bliver Δ ganget med -1**
- **Hvis to rækker er ens, fås Δ=0.** (lineær afh.)
- Hvis en række består af 0'er er $\Delta A = 0$
- **Hvis en række ganges med k, bliver Δ ganget med k**
- **Hvis en række ganges med k og adderes til en anden række, bliver Δ uændret.**
- A har fuld rank hvis og kun hvis $\Delta A \neq 0$
- **A er invertibel hvis og kun hvis $\Delta A \neq 0$** $\left(A^{-1} = \frac{A^T_{cofak}}{\Delta A}\right)$
- $\Delta(A \cdot B) = \Delta(B \cdot A)$
- **$\Delta(A \cdot B) = \Delta A \cdot \Delta B$ (A og B begge n x n)**

Determinanter Δ

ALGORITME FOR DETERMINANT

Opskrift:

produkt af pivoter

Reducer A til echelonform

$$\Delta A = (-1)^{r} \cdot \prod_{i=1}^{n} p_i$$

hvor r er antallet af ombytninger

Hvis der opstår en 0-række, er $\Delta A = 0$.

Determinanter Δ

Beregning af determinant

"Række-" "udvikling" $D = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} M_{jk}$ $\quad j = 1, \ldots, n$

(anvend hvilken som helst række)

M_{jk} er minor til a_{jk}

$(-1)^{j+k} \cdot M_{jk}$ er ko-faktor til a_{jk}

M_{jk} er determinant af orden $n-1$

Alternativt:

"Søjle-" "udvikling" $D = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} \cdot M_{jk}$ $\quad k = 1, \ldots, n$

(anvend hvilken som helst søjle)

LØSNINGSMETODER (ligningssystemer)

1. **Matrixinversion**

$Ax = b$

$x = \underline{A}^{-1} \cdot b$

A skal være kvadratisk og $\Delta A \neq 0$.

$\longrightarrow A^{-1}$

Gauss-Jordan (reduceret echelon-form)

2. **Gauss elimination**

Reducer til echelonform vha. rækkeækvivalente operationer.

og tilbagesubstituer

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(A^{2})^{-1} = (A^{-1})^{2}$$

3. **Cramers formel**

$$x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta A} \qquad \Delta_n = \begin{vmatrix} b & a \\ b & a \end{vmatrix}$$

n'te søjle

4. **LU-faktorisering**

$A = LU$

$Ax = LUx = b$

$Ux = y \qquad Ly = b$

Doolittle
Crout
Cholesky

$Ax = b$ inhomogent system	$Ax = 0$ homogent system

Matrix inversion vha. Gauss-Jordan metoden

Forudsat at $\bar{\bar{A}}^{-1}$ eksisterer ($\bar{\bar{A}}$ er ikke-singulær), dvs. $\text{rank}(\bar{\bar{A}}) = n \iff \Delta\bar{\bar{A}} \neq 0$, antag at $\bar{x}_{(i)} = [x_{1i}, x_{2i}, \ldots x_{ni}]^T$ for $1 \le i \le n$ er en løsning til

$$\bar{\bar{A}}\,\bar{x}_{(i)} = \bar{e}_{(i)} = \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}, \quad \text{hvor } e_j = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

"Stakker" vi alle n ligninger får vi

1) $$\bar{\bar{A}}\,[\bar{x}_{(1)}, \bar{x}_{(2)}, \ldots \bar{x}_{(n)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \bar{\bar{I}}$$

Da $\bar{\bar{A}}^{-1}$ eksisterer kan vi gange på begge sider

$$\bar{\bar{A}}^{-1}\bar{\bar{A}}\,[\bar{x}_{(1)} \ldots \bar{x}_{(n)}] = \bar{\bar{A}}^{-1}\bar{\bar{I}} \text{ eller } \bar{\bar{X}} = [\bar{x}_{(1)}, \ldots, \bar{x}_{(n)}] = \bar{\bar{A}}^{-1} \text{?}$$

Altså er $[\bar{x}_{(1)}, \ldots \bar{x}_{(n)}]$ den søgte inverse, og som også er $\longrightarrow$

($\bar{\bar{A}}$ matrix, $\bar{x}$ vektor) løsning til ligningssystemet i 1/. Dette lignings-system kan vi løse med Gauss elimination anvendt på 1/, altså reducér totalmatrixen $[\bar{\bar{A}}\ \bar{\bar{I}}]$ til echelon form.

Gauss eliminationen resulterer i $[\bar{\bar{U}}\ \bar{\bar{H}}]$, hvor $\bar{\bar{U}}$ er øvre triangulær. Reduceres denne yderligere til reduceret echelon form bliver $\bar{\bar{U}}$ til $\bar{\bar{I}}$, og $\bar{\bar{H}}$ til $\bar{\bar{K}}$ (i processen). Dette step giver metoden navnet Gauss-Jordan. Vi har altså

$$[\bar{\bar{A}}\ \bar{\bar{I}}] \rightarrow [\bar{\bar{U}}\ \bar{\bar{H}}] \rightarrow [\bar{\bar{I}}\ \bar{\bar{K}}]$$

Vender vi nu argumentet om den totale matrix $[\bar{\bar{I}}\ \bar{\bar{K}}]$, så er denne totalmatrix for ligningssystemet $\bar{\bar{I}}\bar{\bar{X}} = \bar{\bar{K}}$ eller $\bar{\bar{X}} = \bar{\bar{K}}$, og netop løsningen $\bar{\bar{X}} = \bar{\bar{A}}^{-1} = \bar{\bar{K}}$ vi søgte

Ene

0112