Institut for elektroniske systemer 2023 TBS
EIT4 /23

LINEÆR ALGEBRA

MM 1: Fredag 10. marts 2023
kl. 08.15 i B2-104

Emner: Indledning
Matrixregning
Rang og determinant
Invertering af matrixer
Løsning af ligningssystemer
Eksempler

Læsning: Erwin Kreyszig: Advanced Engineering Mathematics. 10th ed., John Wiley & Sons, 2011 [EK], s. 256 – 308 og s. 124 - 129 (grundlæggende vektorer og matrixer)

Der er mest tale om repetition fra jeres tidligere kursus i lineær algebra. Vi benytter her sædvanligvis at referere til matrix/matrixen, og angiver matrixer og vektorer ved fed kursiv: ***A***

Som en hjælp er svaret til hver opgave angivet med grøn skrift efter opgaverne.

Med venlig hilsen
Troels

Opgaver:

Opgave 1.1

Beregn determinanten for matrixerne $\boldsymbol{A}$ og $\boldsymbol{B}$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{Bmatrix} 1{,}0 & 0{,}2 & 1{,}6 \\ 3{,}0 & 0{,}6 & 1{,}2 \\ 2{,}0 & 0{,}8 & 0{,}4 \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{Bmatrix} 2 & 8 & 0 & 0 \\ 9 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \end{Bmatrix}$$

Opgave 1.2

Beregn vha. Gauss-Jordan-metoden den inverse matrix af $\boldsymbol{A}$ og $\boldsymbol{B}$ for så vidt, de eksisterer. Hvis de ikke eksisterer, så forklar hvorfor.

$$\boldsymbol{A} = \left\{\begin{matrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{matrix}\right\} \qquad \boldsymbol{B} = \left\{\begin{matrix} 2 & 8 & 0 & 0 \\ 9 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \end{matrix}\right\}$$

Opgave 1.3

Find rangen af $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ og $\boldsymbol{C}$.

$$\boldsymbol{A} = \left\{\begin{matrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{matrix}\right\} \qquad \boldsymbol{B} = \left\{\begin{matrix} 30 & -70 & 50 \\ -36 & 84 & -60 \end{matrix}\right\} \qquad C = \left\{\begin{matrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 21 & -21 & 0 & -15 \end{matrix}\right\}$$

Opgave 1.4

Løs ligningssystemet vha. Gauss-elimination og bagefter vha. Cramers formel.

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 3y & - & 2z & = & 7 \\ 3x & & & + & 3z & = & -3 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & -1 \end{array}$$

Opgave 1.5

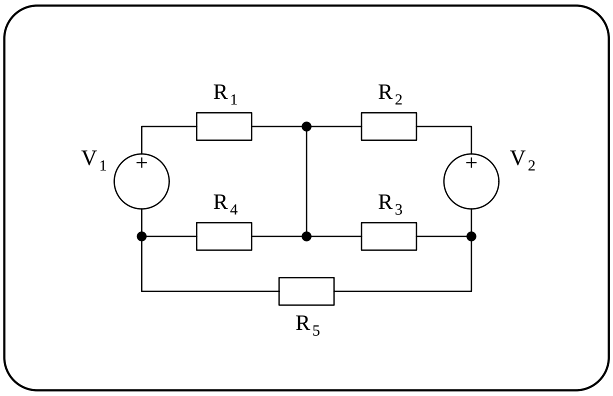
Løs ligningssystemet vha. Gauss-elimination og bagefter vha. Cramers formel.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 5y & + & 3z & = & 1 \\ -x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

Opgave 1.7

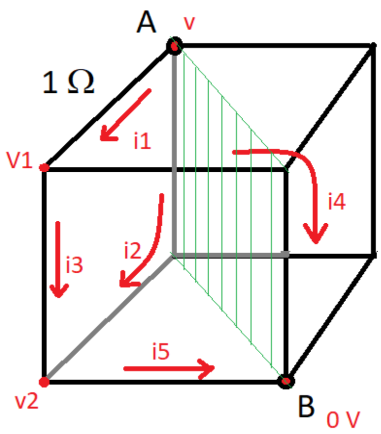
Beregn strømmen igennem R3. Plusretningen er til højre på figuren. Opstil kredsløbsligningerne vha. Kirchoffs maskeligninger og løs ligningssystemet fx vha. gaussisk elimination. Generatorer og modstande har følgende værdier:

$$V_1 = 1\ \text{V} \quad R_1 = 1\ \Omega \quad R_3 = 3\ \Omega \quad R_5 = 5\ \Omega$$
$$V_2 = 2\ \text{V} \quad R_2 = 2\ \Omega \quad R_4 = 4\ \Omega$$



Opgave 1.8

Fra ugebladet Ingeniørens Tænkeboks: Givet nedenstående kubiske terning opbygget af 12 modstandstråde, hver med resistansen 1 Ohm, find resistansen mellem punkt A og B (eller generelt mellem diametralt modsatte hjørner).



I Ingeniørens løsning anvendtes symmetri: Fra punkt A, og tilsvarende fra B pga. symmetri, kan strømmen løbe ad tre veje med lige stor modstand (og til punkter med samme potentiale pga. symmetrien), der hver deler sig i to veje med lige stor modstand; den samlede resistans er derfor 1/3 + (1/2)/3 + 1/3 Ω= 5/6 Ω.

Opgaven er at verificere denne løsning ved at løse det underliggende ligningssystem. Anvend symmetri, men nu ved at dele terningen diagonalt i to halvdele (ved den grønne skærm), sådan at den samlede modstand fremkommer som parallelforbindelsen. Vi kan derfor nøjes med at analysere den venstre halvdel ved at påtrykke v = 1 V i punkt A i forhold til B (0 V) og løse for den resulterende strøm, her i1 + i2 og deraf modstanden R = 1 V / (i1 + i2), eller samlet R/2.

Bestem det "halve kredsløb" og opstil ligningssystemet med de fem ubekendte strømme og to ubekendte spændinger, dvs. $\overline{x}$ = [i1, i2, i3, i4, i5, v1, v2], og bestem deraf R/2.

Facitliste

Opgave 1.1: 1,44 og 1.600

Opgave 1.2: $\begin{Bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} 0{,}05 & 0{,}10 & 0 & 0 \\ 0{,}1125 & -0{,}025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}05 \\ 0 & 0 & 0{,}3 & -0{,}35 \end{Bmatrix}$

Opgave 1.3: 1, 1, 2

Opgave 1.4: 2, 1, -3

Opgave 1.5: -1, 0, 1

Opgave 1.7: 377,14 mA

Opgave 1.8: 5/6 Ω