Institut for elektroniske systemer 2023 TBS
EIT4 /23

LINEÆR ALGEBRA

MM 4: Tirsdag 21. marts 2023
kl. 08.15 i B2-104

Emner: Indledende sætninger
Egenbaser
Similaritetstransformation
Diagonalisering
Kvadratiske former
Transformation til hovedakser
Evt. anvendelseseksempel (Attitude kontrol)

Læsning: [EK] s. (313 – 317), 339 - 344

Som en hjælp er svaret til hver opgave angivet med grøn skrift efter opgaverne.

Med venlig hilsen
Troels

Opgaver:

Opgave 4.1

Matrixen A anvendes i en lineær transformation $y = Ax$. Find hovedretningerne og de tilhørende strækfaktorer.
Hovedretningerne er egenvektorerne, og strækfaktorerne er egenværdierne.

$$A = \begin{Bmatrix} 2{,}5 & 1{,}5 \\ 1{,}5 & 6{,}5 \end{Bmatrix}$$

Opgave 4.2

Find en egenbase (en base af egenvektorer) og diagonaliser matrixen A.

$$A = \begin{Bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{Bmatrix}$$

Opgave 4.3

Find en matrix A, der kan bruges i den kvadratiske form $Q = x^T A x$, hvor:

$$Q = (x_1 - 3x_2)^2$$

Find også en symmetrisk matrix, der kan bruges i stedet for A. Prøv at gætte egenværdierne for den symmetriske matrix.

Opgave 4.4

Find koefficientmatrixen $\mathbf{A}$ til den kvadrastiske form $Q = -2x_1^2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 - 9x_3^2$.
Bestem også den tilsvarende symmetriske matrix.

Opgave 4.5

Vi betragter en kvadratisk form:, Q

$$Q = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2$$

a. Find en symmetrisk matrix $\boldsymbol{A}$ således, at $Q = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, hvor $\boldsymbol{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$.
b. Find hvilken kurve $Q = 9$ repræsenterer, idet Q transformeres til hovedakserne, $\boldsymbol{y}$.
c. Find sammenhængen mellem de gamle koordinater $\boldsymbol{x}$ og de nye $\boldsymbol{y}$.

Opgave 4.6

Vi betragter en kvadratisk form, Q:

$$Q = 1{,}09x_1^2 - 0{,}06x_1x_2 + 1{,}01x_2^2$$

a. Find en symmetrisk matrix $\boldsymbol{A}$ således, at $Q = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, hvor $\boldsymbol{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$.
b. Omskriv Q til kanonisk form i $\boldsymbol{y}$.
c. Find sammenhængen mellem de gamle koordinater $\boldsymbol{x}$ og de nye $\boldsymbol{y}$.
d. Vis at similaritetstransformationen defineret ved matrixen $\boldsymbol{B}$, hvis søjler er egenvektorerne for $\boldsymbol{A}$, diagonaliserer $\boldsymbol{A}$

Opgave 4.7

Vi betragter en kvadratisk form, Q:

$$Q = 3x_1^2 - 3x_2^2 + 8x_1x_2$$

a. Find en symmetrisk matrix $\boldsymbol{A}$ således, at $Q = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, hvor $\boldsymbol{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$.
b. Omskriv Q til kanonisk form i $\boldsymbol{y}$.
c. Find sammenhængen mellem de gamle koordinater $\boldsymbol{x}$ og de nye $\boldsymbol{y}$.
d. Vis at similaritetstransformationen defineret ved matrixen $\boldsymbol{B}$, hvis søjler er egenvektorerne for $\boldsymbol{A}$, diagonaliserer $\boldsymbol{A}$

Opgave 4.8

Givet den kvadrastiske form $Q = 7x_1^2 + 6x_1x_2 + 7x_2^2 = 200$ bestem hvilken kanonisk form der er tale om og bestem hovedretninger, herunder hovedretningernes rotation i forhold til den positive x_1 akse

Facitliste

Opgave 4.1: Stræk 7, retning $\varphi = 71{,}57°$, stræk 2, retning $\varphi = 161{,}57°$

Opgave 4.2: $\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{Bmatrix}$

Opgave 4.3: $\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 9 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{Bmatrix}$

Egenværdierne er 0 og 10, da summen skal give 10 og produktet 0.

Opgave 4.4: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -9 \end{bmatrix}$

Opgave 4.5: a. $\begin{Bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Bmatrix}$

b. $3y_1^2 + y_2^2$ Q = 9, ellipse med halvakser kvadratrod 3, og 3

c. $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2,\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2$

Opgave 4.6: a. $\begin{Bmatrix} 1{,}09 & -0{,}03 \\ -0{,}03 & 1{,}01 \end{Bmatrix}$.

b. $1{,}1y_1^2 + y_2^2 = 1$

c. $x_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3y_1 + y_2),\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(y_1 + 3y_2)$

d. $\begin{Bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{Bmatrix}$

Opgave 4.7: a. $\begin{Bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{Bmatrix}$

b. $y_1^2 - y_2^2 = 1$

c. $x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2y_1 + y_2),\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(y_1 - 2y_2)$

d. $\begin{Bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{Bmatrix}$

Opgave 4.8: Ellipse: $4y_1^2 + 10y_2^2 = 200$ med halvakser $\sqrt{50}$ og $\sqrt{20}$ og hovedretninger respektiv -45 og +45 grader i forhold til den positive x_1 akse.