Løsning til opgave KF 2.4.1

Løsning til (A):

Laurentrækken for e^z er

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \ ,$$

og substitution med $1/z$ giver os

$$z^3 e^{1/z} = z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{3-n} \ .$$

Løsning til (B):

Der er en singularitet i $z = 0$ og da Laurentrækken har uendelig mange $b_n \neq 0$ er den essentiel.

Løsning til (C):

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = b_1 = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24} \ .$$

Løsning til (D):

Integralet kan deles i to og da $\sin z$ er analytisk i hele det komplekse plan får vi

$$\oint_C \sin z + z^3 e^{1/z} dz = \oint_C \sin z + \oint_C z^3 e^{1/z} dz = 0 + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \frac{2\pi i}{24} = \frac{\pi i}{12} \ .$$

Løsning til opgave KF 2.4.2

Løsning til (A):

Da $\sin$ ikke har singulariteter findes alle singulariteterne for $f(z)$ ved at løse

$$(z + \pi)\big(z - \frac{\pi}{2}\big) = 0 \ ,$$

hvilket giver singulariteter i $z = -\pi$ og $z = \pi/2$. Singulariteten $z = \pi/2$ er en simpel pol. Da både $\sin z$ og $z + \pi$ har et simpelt nulpunkt i $-\pi$, så er singulariteten $z = -\pi$ removable.

Løsning til (B):

De to residuer

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{Res}_{z=-\pi} f(z) = b_1 = 0 \\
&\operatorname*{Res}_{z=\pi/2} f(z) = \lim_{z\to\pi/2} \big(z - \frac{\pi}{2}\big) \frac{\sin z}{(z+\pi)(z-\frac{\pi}{2})} = \frac{\sin z}{z+\pi}\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+\pi} = \frac{2}{3\pi} \ .
\end{aligned}$$

Løsning til (C):

Kun den ene singularitet ligger inden for C_1, så vi får

$$\oint_{C_1} f(z) dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\pi/2} f(z) = 2\pi i \frac{2}{3\pi} = \frac{4}{3} i \ .$$

Begge singulariteter ligger inden for C_2, og da residuet for $z = \pi$ er 0 så får det andet integral samme værdi

$$\oint_{C_2} f(z) dz = \frac{4}{3} i \ .$$

Løsning til opgave KF 2.4.3

Løsning til (A):

Polerne er nulpunkter i nævneren

$$\begin{aligned}
&z^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z = \pm 1 && \text{(simple poler)} \\
&z^2 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = -4 \quad \Leftrightarrow \quad z = \pm 2i && \text{(simple poler)}
\end{aligned}$$

Løsning til (B):

For at finde residuerne for alle fire poler bemærker vi først at

$$f(z) = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)(z+2i)(z-2i)} \ .$$

Så får vi at

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) &= \frac{z^2}{(z+1)(z+2i)(z-2i)}\Big|_{z=1} = \frac{1}{2\cdot(1^2+2^2)} = \frac{1}{10} \\
\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) &= \frac{z^2}{(z-1)(z+2i)(z-2i)}\Big|_{z=-1} = \frac{1}{-2\cdot 5} = -\frac{1}{10} \\
\operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) &= \frac{z^2}{(z+1)(z-1)(z+2i)}\Big|_{z=2i} = \frac{-4}{\big(-(1^2+2^2)\big)\cdot 4i} = \frac{1}{5i} = -\frac{i}{5} \\
\operatorname*{Res}_{z=-2i} f(z) &= \frac{z^2}{(z+1)(z-1)(z-2i)}\Big|_{z=-2i} = \frac{-4}{-4i\cdot(-5)} = -\frac{1}{5i} = \frac{i}{5}
\end{aligned}$$

Løsning til (C):

Samtlige poler ligger inden for C, så vi får at

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i\Big(\frac{1}{10} - \frac{1}{10} + \frac{i}{5} - \frac{i}{5}\Big) = 0 \ .$$

Løsning til (D):

Singulariteterne i funktionen under integralet har kun simple poler på den reelle akse, og graden af tælleren er 2, mens graden af nævneren er 4 (og altså 2 større), så betingelserne for Cauchys hovedværdisætning er opfyldte. Vi finder at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2-1)(x^2+4)} dz = 2\pi i \sum_{\substack{\text{Øvre}\\ \text{halvplan}}} \operatorname{Res} f(z) + \pi i \sum_{\substack{\text{Reelle}\\ \text{akse}}} \operatorname{Res} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{-i}{5} + \pi i\Big(\frac{1}{10} - \frac{1}{10}\Big) = \frac{2\pi}{5} \ .$$