Lineær algebra (LA)

anden del af kurset i beregningsteknik

Aalborg Universitet

Troels B. Sørensen

tbs@es.aau.dk

Delvist baseret på slides venligst udlånt af Hans Ebert

LINEÆR ALGEBRA

MM 4: Tirsdag 21. marts 2023
kl. 08.15 i B2-104

Emner: Indledende sætninger
Egenbaser
Similaritetstransformation
Diagonalisering
Kvadratiske former
Transformation til hovedakser
Evt. anvendelseseksempel (Attitude kontrol)

Læsning: [EK] s. (313 – 317), 339 - 344

1.

En reel kvadratisk matrix er orthogonal HOKH søjlevektorerne (og dermed også rækkevektorerne) udgør et orthonormalt system.

$A^T A = I$ orthonormalitet af rækker/søjler

$A^{-1} A = I$ orthogonalitet $A^T = A^{-1}$

2.
En n x n matrix med n forskellige egenvær-dier har en egenbase.

3.

En symmetrisk matrix har en orthonormal egenbase.
(også selv om nogle af egenværdierne er dubleret)

HOKH= hvis og kun hvis

Similaritetstransformationer

Similare matrixer (= regulært ækvivalente) beskriver samme lineære transformation blot mht. forskellige koordinatsæt.
De har samme egenværdier, men ikke samme egenvektorer.

Similaritet er en ækvivalensrelation

$$A \sim A$$
$$A \sim B \Rightarrow B \sim A$$
$$A \sim B \wedge B \sim D \Rightarrow A \sim D$$

Regulær ækvivalens

$\hat{A}$ og A er regulært ækvivalente (similare), hvis der findes en regulær matrix P:

$$\hat{A} = P^{-1} A P$$

regulær (invertibel)

Hvis P består af egenvektorer for A, diagonaliserer den A

HOKH= hvis og kun hvis

Diagonalisering ($n \times n$ matrix $\bar{\bar{A}}$)

$\bar{\bar{A}}$ kan diagonaliseres til $\bar{\bar{D}}$ ved hjælp af $\bar{\bar{X}} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, --- \bar{x}_m]$ hvor $\bar{x}_i$ er $\bar{\bar{A}}$'s egenvektorer (egenbase) og $\bar{\bar{D}}$ er ækvivalent til $\bar{\bar{A}}$:

$\bar{\bar{D}} = \bar{\bar{X}}^{-1} \bar{\bar{A}} \bar{\bar{X}}$, hvor $\bar{\bar{D}}$ er en diagonal matrix med $\bar{\bar{A}}$'s egenværdier på diagonalen (svarende til $\bar{x}_i$ i $\bar{\bar{X}} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, ---, \bar{x}_m]$).

Alternativt kan vi skrive $\bar{\bar{A}}$ som $\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{X}} \bar{\bar{D}} \bar{\bar{X}}^{-1}$

Denne form kan bl.a. benyttes til at indse at:

$\Delta \bar{\bar{A}} = \Delta(\bar{\bar{X}} \bar{\bar{D}} \bar{\bar{X}}^{-1}) = \Delta \bar{\bar{X}} \cdot \Delta \bar{\bar{D}} \cdot \Delta \bar{\bar{X}}^{-1} = |\pm 1|^2 \cdot \prod_{i=1}^{m} \lambda_i$, da $\Delta \bar{\bar{X}} = \Delta \bar{\bar{X}}^T$ og $\bar{\bar{X}}$ er ortogonal (egenbase), hvorfor $\bar{\bar{X}}^{-1} = \bar{\bar{X}}^T$ og $|\Delta \bar{\bar{X}}| = 1$ ($\Delta \bar{\bar{X}} = \pm 1$), og da determinanten af en diagonalmatrix er lig med produktet af diagonalelementer.

Altså er $\Delta \bar{\bar{A}} = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i$ (produktet af egenværdier) som kan benyttes til "visuel" inspektion af egenværdier sammen med $\text{spor}(\bar{\bar{A}}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$.

Kvadratisk form

(koordinaterne)

$Q = \bar{x}^T \bar{\bar{A}} \bar{x}$ er en kvadratisk form i elementerne x_i og $\bar{\bar{A}}$ er formens koefficientmatrix. $\bar{\bar{A}}$ kan altid skrives som en symmetrix matrix da produkterne i Q som ikke resulterer fra diagonalelementer i $\bar{\bar{A}}$ vil optræde i par.
Generelt vil Q være reel for en symmetrisk matrix.

Vi kan betragte Q som en speciel funktion i $\bar{x}$; koordinaterne og skrive $Q = f(\bar{x})$, hvor f indeholder produkter af x_i op til 2. orden (kvadratisk med to indgående variabler i hvert led).
Indsigt i hvad den kvadratiske form reelt beskriver kan opnås ved at sætte den på kanonisk form.

Hvis $Q > 0$ kaldes $\bar{\bar{A}}$ positiv definit
Er $Q \geq 0$ kaldes $\bar{\bar{A}}$ positiv semi-definit

Eksempel (identifikation af symmetrisk matrix)

Givet en kvadratisk form $Q = \bar{x}^T \bar{\bar{A}} \bar{x}$

$$Q = -3x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2 + 2x_1x_3 - 5x_3^2$$

Inspektion giver

$$\bar{\bar{A}} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Den tilsvarende symmetriske matrix fås af $\bar{\bar{R}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{A}} + \bar{\bar{A}}^T)$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

"Er $\Delta\bar{\bar{R}} = \Pi\lambda_i$ og $\text{spor}(\bar{\bar{R}}) = \Sigma\lambda_i$ anvendelig her til at bestemme λ_i?" (jf. pencast)

Transformering af kvadratisk til kanoniske form

Skriver vi $\bar{\bar{A}}$ som $\bar{\bar{X}}\,\bar{\bar{D}}\,\bar{\bar{X}}^{-1}$ kan vi skrive Q som

$$Q = \bar{x}^T \bar{\bar{A}} \bar{x} = \bar{x}^T \bar{\bar{X}}\,\bar{\bar{D}}\,\bar{\bar{X}}^{-1} \bar{x} = (\bar{\bar{X}}^T \bar{x})^T \bar{\bar{D}} (\bar{\bar{X}}^{-1} \bar{x}) = (\bar{\bar{X}}^T \bar{x})^T \bar{\bar{D}} (\bar{\bar{X}}^T \bar{x})$$

da $\bar{\bar{X}}$ er ortogonal. Altså kan Q også skrives som en kvadratisk form i $\bar{y} = \bar{\bar{X}}^T \bar{x}$ (eller $\bar{x} = \bar{\bar{X}} \bar{y}$ da $\bar{\bar{X}}$ er ortogonal).

Vi kan opfatte $\bar{y} = \bar{\bar{X}}^T \bar{x}$ som en transformation af $\bar{x}$ der bevarer det indre produkt - prikproduktet / længder.

Denne form udtrykker den "indre struktur" af den kanoniske form da

ingen kobling i koordinater!

$$Q = (\bar{\bar{X}}^T \bar{x})^T \bar{\bar{D}} (\bar{\bar{X}}^T \bar{x}) = \bar{y}^T \bar{\bar{D}} \bar{y} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i^2,$$

altså formen "opløst" i egenværdier og tilhørende principelle akser svarende til de tilhørende egenvektorer. (retninger)

Egenvektorerne / retningerne udgør et koordinatsystem for 'y' variablen. De tilhørende 'x' værdier er givet som $\bar{x} = \bar{\bar{X}} \bar{y}$.

--- (fortsat)

Transformationen til et andet koordinatsystem, indrettet efter den "indre struktur", simplificerer mange matematiske problemer i og med at den fjerner koblingen mellem koordinaterne og afslører "essensen".

Et typisk problem kunne være at maksimere $\langle \bar{\bar{A}}\bar{x}, \bar{x} \rangle = \bar{x}^T \bar{\bar{A}} \bar{x} = Q_A(\bar{x})$ (kvadratisk form)

Maksimum under betingelsen $\|\bar{x}\|_2 = 1$ (længden af $\bar{x}$ fastlåst) er lig med den største egenværdi af $\bar{\bar{A}}$, og den maksimerende vektor er den tilhørende egenvektor $\bar{x}_A$ [Minimax princippet i lineær algebra]

.... altså "hovedretningen".

Lidt opgaveinspiration vedr. koniske snit -->

CIRKEL & ELLIPSE

Cirkel

$$x^2 + y^2 = R^2$$

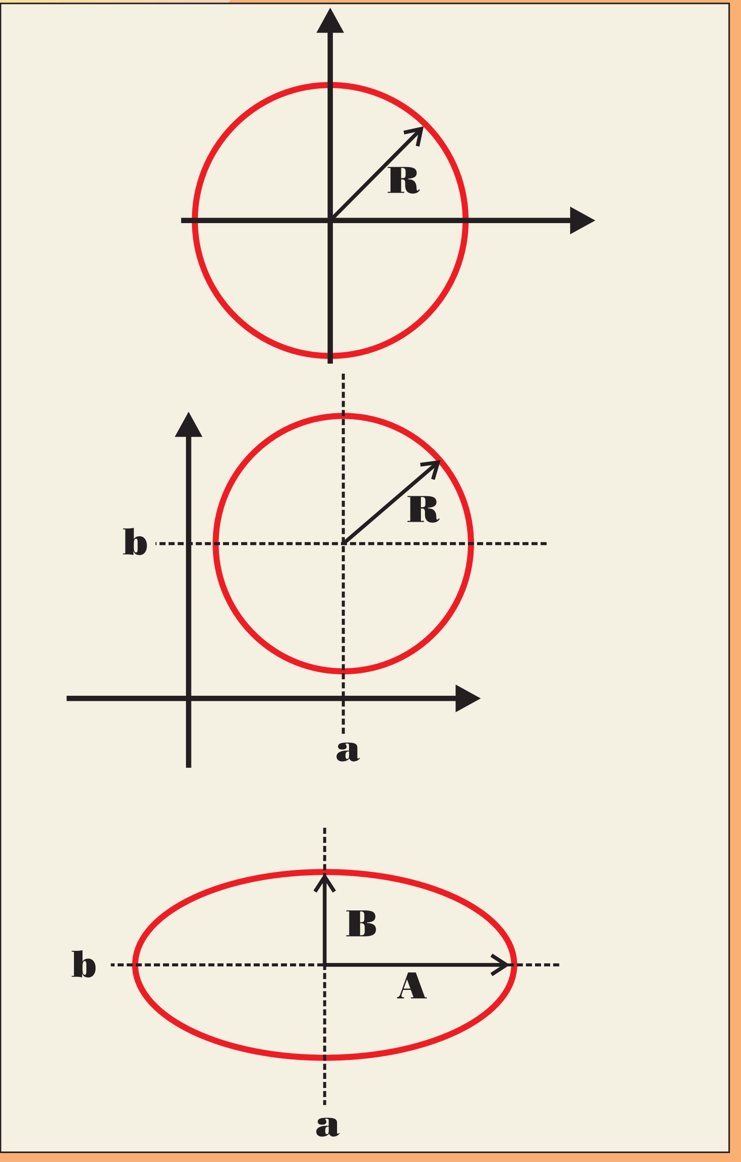
$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1$$

Forskudt cirkel

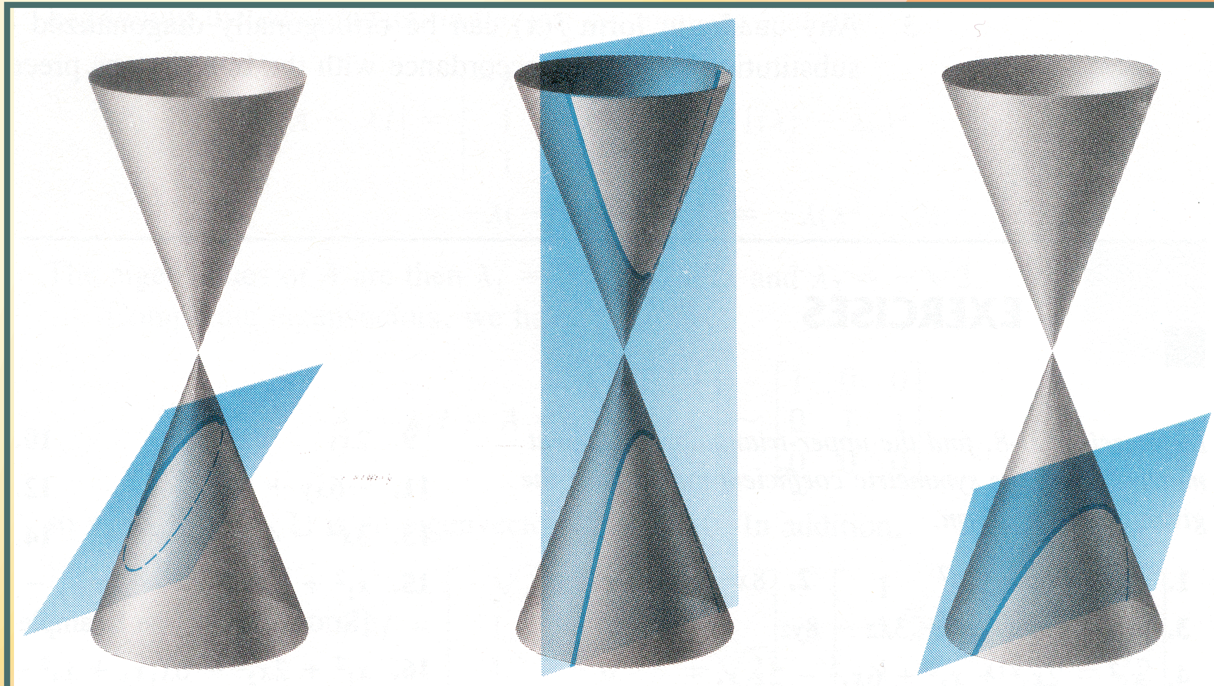
$$\frac{(x-a)^2}{R^2} + \frac{(y-b)^2}{R^2} = 1$$

Forskudt ellipse

$$\frac{(x-a)^2}{A^2} + \frac{(y-b)^2}{B^2} = 1$$



KONISKE SNIT



Ellipse

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

Hyperbel

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$$

Parabel

$$Ax^2 + Bx + Cy = 0$$

Generel formel

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy = E$$

Lidt info omkring 2x2 matrixer -->

2 x 2 MATRIXER

For 2×2 matrixer

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Betingelse for orthogonalitet:

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11} &= a_{22} \\ a_{12} &= -a_{21} \\ \Delta A &= 1 \end{aligned}}$$

En 2×2 matrix kan kun være én af følgende:

- symmetrisk
- skævsymmetrisk
- orthogonal

Undtagelsen:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$\theta = 90^\circ$

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -A$$

A er skævsymmetrisk

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = A^T$$

A er orthogonal

En matrix, der er skævsymmetrisk og orthogonal.

En matrix, der er symmetrisk og orthogonal.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B$$

B er symmetrisk

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B^T$$

B er orthogonal