Lineær algebra (LA)

anden del af kurset i beregningsteknik

Aalborg Universitet

Troels B. Sørensen

tbs@es.aau.dk

Delvist baseret på slides venligst udlånt af Hans Ebert

LINEÆR ALGEBRA

MM 2: Tirsdag 14. marts 2023
kl. 08.15 i B2-104

Emner: Vektorrum
Underrum
Uddrivelse/fortrængning
Ligningssystemer
Eksempler på vektorrum

Læsning: [EK] s. 282 – 287, s. 309 – 313 (evt. 334-335 som optakt til LA3)

Vektorrum

Et vektorrum er en algebraisk struktur, der er lukket overfor to kompositionsregler kaldet hhv. „vektoraddition" og „skalarmultiplikation".

Spænd (alle vektorerne i et rum)

Alle mulige linearkombinationer af en given mængde af vektorer.

Dimension

Det største antal lineært uafhængige vektorer i et rum.

Base

En mængde af n uafhængige vektorer, hvor n er dimensionen af rummet.
En base udspænder et rum, dvs. alle rummets vektorer kan beskrives som en linearkombination af basens vektorer.

Underrum

En delmængde af et vektorrum, som selv udgør et vektorrum.

Lineær uafhængighed

En mængde vektorer er lineært uafhængige, hvis ingen af mængdens vektorer kan beskrives som en linearkombination af de øvrige.

$$\boxed{k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n = 0}$$

har ingen løsninger udover den trivielle.

k er skalarer, v og 0 er vektorer

Vektoraddition Associativ

A1 $(a+b)+c = a + (b+c)$

A2 $a+b = b+a$ ← Kommutativ

A3 $a + 0 = a$ ← Nulvektor

A4 $a + (-a) = 0$ ← Neg. vektor

Et vektorrum er en algebraisk struktur, hvor to kompositionsregler kaldet hhv. „vektoraddition" og „skalarmultiplikation" er defineret.

Skalarmultiplikation

S1 $k(a+b) = ka + kb$ ← Distributiv

S2 $(k+m)a = ka + ma$

S3 $k(ma) = (km)a$ ← Associativ

S4 $1a = a$ ← Identitet

a, b, c og 0 er vektorer
k, m og 1 er skalarer

ET SIGNALRUM / Vektorrum eksempel

Eksempel Et (diskret) signal er en “dobbelt uendelig” følge af reelle tal

$$\bar{x} = \{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}} = (\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots)$$

Signaler kan lægges sammen:

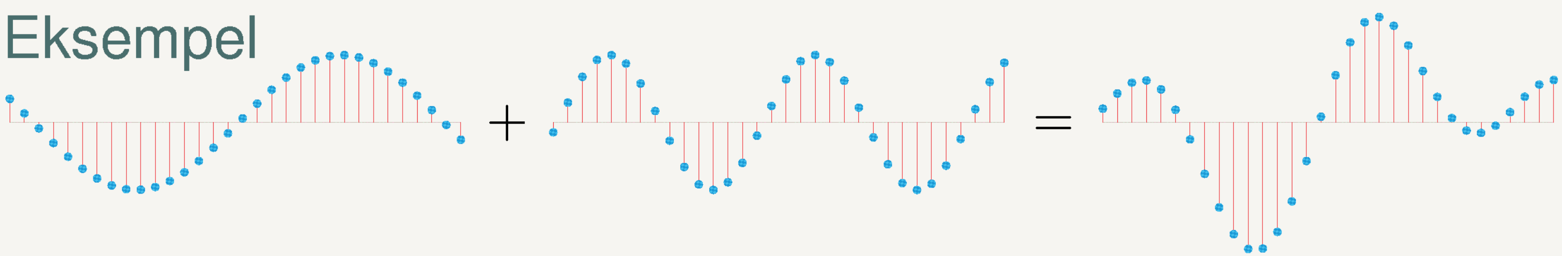
$$\{x_k\} + \{y_k\} = \{x_k + y_k\} = (\ldots, x_{-1} + y_{-1}, x_0 + y_0, x_1 + y_1, \ldots)$$

og ganges med skalarer (reelle tal):

$$c\{x_k\} = \{c\,x_k\} = (\ldots, cx_{-1}, cx_0, cx_1, \ldots)$$

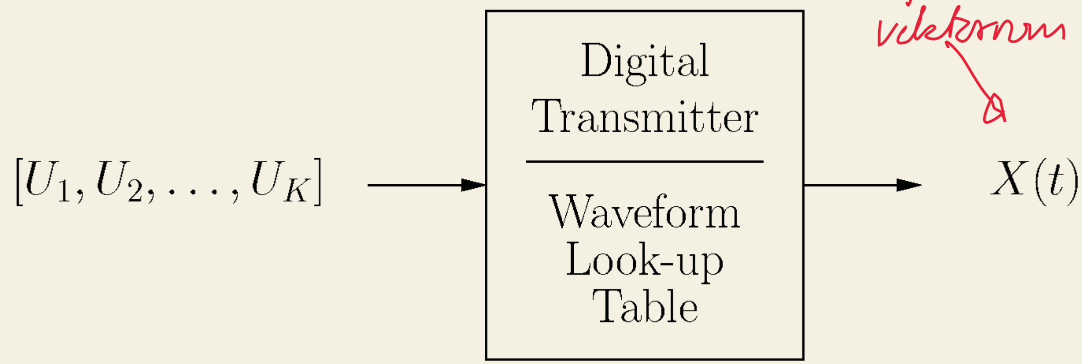
Mængden $\mathbb{S}$ af signaler er et vektorrum.

Eksempel



For an arbitrary digital transmitter, we have the following:

definerer et vektorrum



Input Binary vectors of length K from the input set $\mathbb{U}$:

$$[U_1, U_2, \dots, U_K] \in \mathbb{U} := \{0,1\}^K.$$

The "duration" of one binary symbol U_k is T_b.

Output Waveforms of duration T from the output set $\mathbb{S}$:

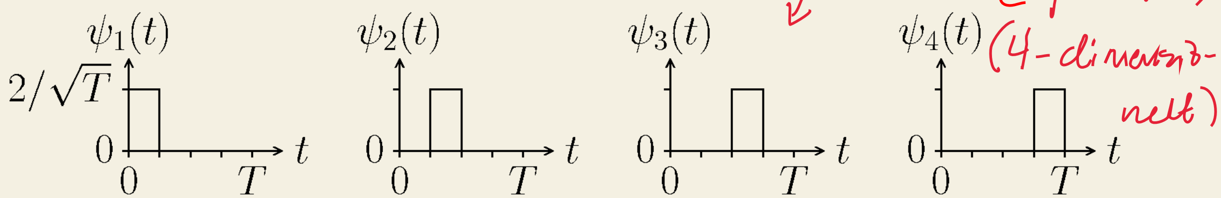
$$x(t) \in \mathbb{S} := \{s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)\}.$$

Waveform duration T means that for $m = 1, 2, \dots, M$,

$$s_m(t) = 0 \text{ for } t \notin [0, T].$$

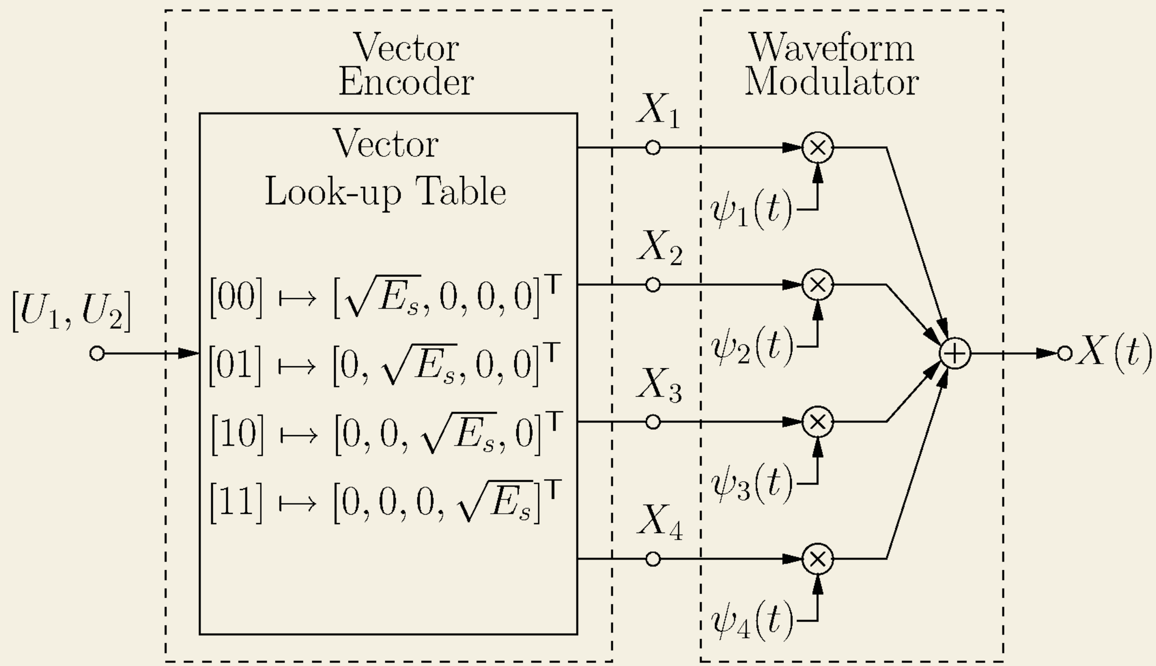
The four orthonormal basis functions are

definerer en base for X(t) (4-dimensionelt)



The canonical decomposition of the receiver is the following, where $\sqrt{E_s} = A \cdot \sqrt{T}/2$.

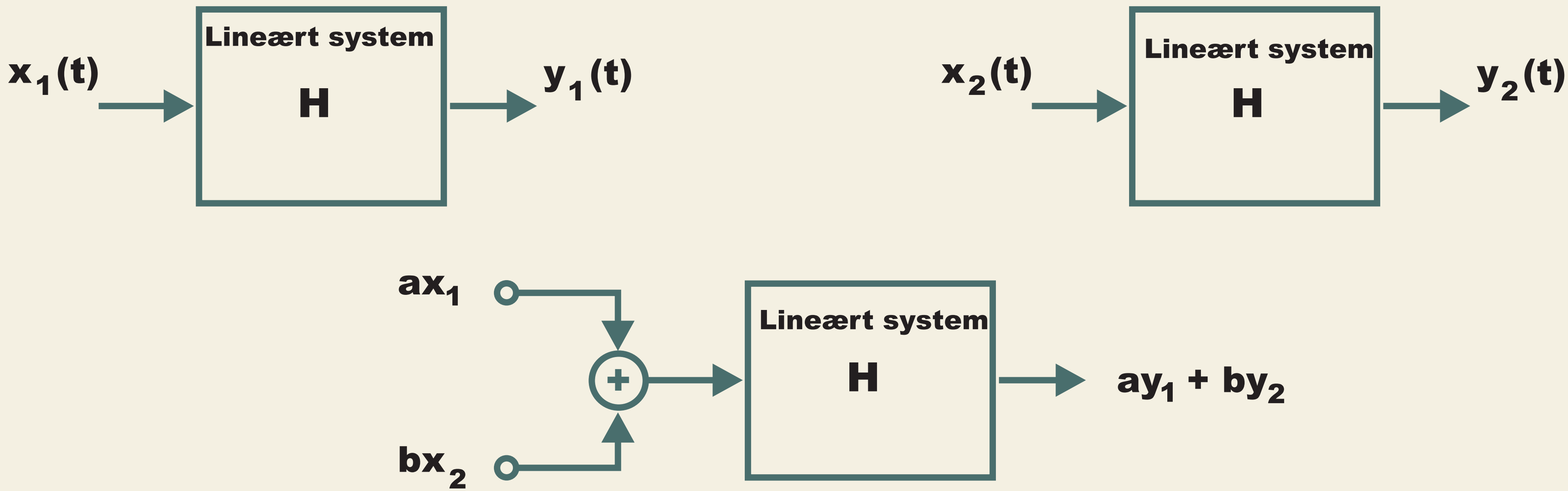
.... hvorfra alle X(t) kan genereres



LINEÆRE SYSTEMER / Lineære signaler

For lineære systemer gælder disse to principper:

1. **Superposition**
2. **Homogenitet (proportionalitet)**



Eller:

Lineære signaler er vægtede summer (eller linearkombinationer) af signaler.

RÆKKERUM – en base baseret på rækkevektorer (echelonform)

Eksempel Find en basis for Row $\begin{bmatrix} -2 & -5 & 8 & 0 & -17 \\ 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 3 & 11 & -19 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & -13 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -2 & -5 & 8 & 0 & -17 \\ 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 3 & 11 & -19 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & -13 & 5 & -3 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ basis for rækkerummet: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ 20 \end{bmatrix} \right\}$

kunne derfor også have valgt tre første rækker af oprindelig matrix

Hvorfor? Fordi rækkeoperationer danner *linearkombinationer* af rækker $\Rightarrow$ rækkeoperationer laver ikke om på rækkerummet.

 – en base baseret på søjlevektorer (echelon form)

Eksempel Find en basis for $\mathrm{Col}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & -9 \\ -2 & -2 & 2 & -8 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 11 & -8 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & -9 \\ -2 & -2 & 2 & -8 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 11 & -8 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & -9 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ (7)\ \checkmark \\ (-1)\ \times \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & & & \uparrow \end{array}$$

$\Rightarrow$ basis: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -9 \\ 2 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix} \right\}$

Hvorfor? Fordi rækkeoperationer ikke ændrer på *lineære afhængigheder* mellem søjlerne.

Opskrift for uddrivelse

Opskrift på at finde en base for vektorerne $v_1 \cdots v_n$

1. Start i venstre side med v_1, som beholdes.

2. Gå mod højre. Hvis den næste vektor er en linear-kombination af de foregående, bortkastes den. Check med fx Gaussisk elimination.

3. Der fortsættes mod højre indtil v_n .

4. Den tilbageværende mængde af vektorer udgør en base for de givne vektorer.

LIGNINGSSYSTEMER

matrixer og vektorer

Lineært system

$$\begin{Bmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{Bmatrix}$$

Vektorligning

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \cdots + x_n\bar{a}_n = \bar{b}$$

Matrixligning

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

Totalmatrix

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \bar{b} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

LØSNINGSMETODER

1. **Matrixinversion**

$$Ax = b$$
$$x = A^{-1} \cdot b$$

A skal være kvadratisk og $\Delta A \neq 0$.

2. **Gaussisk elimination**

Reducer til echelonform vha. rækkeækvivalente operationer.

Gauss: Tilbagesubstitution

Gauss-Jordan: Reducer totalmatrix til reduceret echelon

3. **Cramers formel**

$$x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta A} \qquad \Delta_n = \begin{vmatrix} b & a \\ b & a \end{vmatrix}$$

n'te søjle

4. **LU-faktorisering**

$A = LU$
$Ax = LUx = b$
$Ux = y \qquad Ly = b$

Doolittle
Crout
Cholesky

$Ax = b$ inhomogent system

$Ax = 0$ homogent system

Løsninger til ligningssystem

Inhomogent system

$$4x + 7y = 89$$
$$7x + 3y = 54$$

$$\bar{\bar{A}}\,\bar{x} = \bar{b}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \bar{x} = \begin{bmatrix} 89 \\ 54 \end{bmatrix}$$

$$\Delta A = 12 - 49 = -37$$

Løsning: $x = 3$, $y = 11$

$\text{rang}(\bar{\bar{A}}) = 2$

$\text{rang}(\tilde{A}) = 2$

Antal søjler $= 2$

Nullitet $= 2 - 2 = 0$

$$\bar{\bar{A}} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 89 \\ 7 & 3 & 54 \end{bmatrix}$$

Løsninger til ligningssystem

Homogent system

$$4x + 7y = 0$$
$$7x + 3y = 0$$

$$\bar{\bar{A}}\bar{x} = \bar{0}$$

Ingen løsning bortset fra $x=0$, $y=0$.

Men hvis $\text{rang}(\bar{\bar{A}}) < 2$ har vi løsninger.

Homogent system

Løsninger til ligningssystem

$$4x + 7y = 0$$
$$8x + 14y = 0$$

$$\bar{\bar{A}}\bar{x} = \bar{0}$$
$$\Delta\bar{\bar{A}} = 56 - 56 = 0$$

Rækkereducering:

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{rang}(\bar{\bar{A}}) = 1 \\ \text{nullitet}(\bar{\bar{A}}) = 1 \end{array}$$

Nulrummet (som er løsningerne) er et 1-dimensionelt vektorrum.

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 4x + 7y = 0 \\ y = -\frac{4}{7}x \end{array}$$

Alle vektorer af formen:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

er løsninger.

Dette er et vektorrum af dimension 1.

Hvor mange løsninger?

$r = \text{rang}(\mathbf{A})$, rangen af $\mathbf{A}$

$\tilde{r} = \text{rang}(\tilde{\mathbf{A}})$, rangen af totalmatrixen

n = antallet af søjler i $\mathbf{A}$

Totalmatrix:

$\tilde{\mathbf{A}} = [\mathbf{A}|\mathbf{b}]$