KF Lektion 2.5

Induktion

Rekursion

Hvad har vi lært når lektionen er omme?

1. Induktionprincippet som bevisteknik
2. Rekursive definitioner
3. Fibonacci-tal

Induktion

Vi vil gerne bruge ”induktion” til at bevise følgende påstand:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Vi kan se, at det holder for

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} \qquad 1 + 2 = \frac{2 \cdot (2+1)}{2} \qquad 1 + 2 + 3 = \frac{3 \cdot (3+1)}{2}$$

Vi kan vise, at det gælder for n så stor som vi gider regne.

Men i stedet for regne hver sum ud, så lad os nu antage, at det holder for n,
og så vise, at det gælder også for $m = n + 1$

Induktion

Antager at det holder for n, og at $m = n + 1$

$$\sum_{k=1}^{m} k = 1 + \cdots + n + m = \overbrace{1 + \cdots + n}^{=\frac{n(n+1)}{2}} + (n + 1)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{m(m+1)}{2}$$

$$= \frac{m(m+1)}{2}$$

Så holder det også for m, og dermed altid for een højere.

Induktionsprincip

Hvis en påstand $P(n)$ holder for et tal n

$$\overbrace{\sum_{k=1}^{n} n = \frac{n(n+1)}{2}}^{P(n)}$$

$P(n)$ $P(n+1)$ $P(n+2)$ $P(n+3)$

Vi beviser

Samme bevis

Samme bevis

Samme bevis

Første led skal holde!

Så har vi et induktionsbevis.

Induktionsprincip

Lad $P(n)$ være et udsagn om tallet n . Hvis vi ved at

1. $P(1)$ er sand
2. Hvis $P(n)$ er sand, så er $P(\overset{=m}{n + 1})$ også sand.

Da er $P(n)$ sand for alle naturlige tal.

Vi betegner de to betingelser (eller trin)

1. Basistrin
2. Induktionstrin

Eksempel

Vis at

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1. Basistrin $\quad P(n=1): 1^2 = \dfrac{1 \cdot (1+1)(2+1)}{6}$

2. Induktionstrin (lad $m = n + 1$)

$$\sum_{k=1}^{m} k^2 = \overbrace{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}^{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

$(n+2)($ $\quad$ $)$

$m \quad m+1 \quad 2m+1$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

Opgave 1

Vis at

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

1. Basistrin: Vis at det gælder for $n = 0$

2. Induktionstrin: Skriv alle antagelser og udregn.

1. $m = n+1$

2. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^n}$

$\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2^k} =$ udregn $=$ udregn $=$

$= \quad = \quad 2 - \frac{1}{2^m}$

Rekursion

Induktionsprincippet er tæt knyttet til rekursiv definition af funktion. Eksempelvis

$$f(n) = nf(n-1), \quad f(0) = 1$$

som er $f(n) = n!$ Vi kan bruge induktion til at bevise forskrift.

Vi har $f(1) = \frac{1}{2}$ $\quad f(n+1) = f(n) + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

Vis at $f(n) = \frac{n}{n+1}$ $\qquad$ Antag det gælder for n. Vis for $m = n + 1$

Her bruger vi at det holder for n

$$f(m) \overset{\text{def}}{=} f(n) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$1 \quad (+n)$

$$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n\cancel{(n+1)} + \cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)}(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{m}{m+1}$$

Tower of Hanoi

Flyt skiverne fra een søjle til en anden,
og skiverne skal ligge efter størrelse.

Hvor mange flytninger kan man "nøjes" med for n skiver?

Lad $F(n)$ være antallet. Så må vi kunne flytte alle undtaget den nederste med $F(n-1)$. Derefter den nederste med 1 og så resten oven på den nederste med igen $F(n-1)$.

$$F(1) = 1 \qquad F(n) = 2F(n-1) + 1$$

Opgave 2

Vis at for Tower of Hanoi gælder

$$F(n) = 2^n - 1$$

1. Basistrin: Vis at det gælder for $n = 1$

2. Induktionstrin: Antag $m = n + 1$ og vis så at

$$F(m) = 2^m - 1$$

2 1

(1) $m = n + 1$

$= $ udregn $= $ udregn $= $ udregn

(2)

$= 2^m - 1$

General induktion

Lad $P(n)$ være et udsagn om tallet n . Hvis vi ved at

1. $P(k)$ er sand for et fast, kendt k.
2. Hvis $P(j)$ er sand for alle j, hvor $k < j < m$, så er $P(m)$ også sand.

Da er $P(n)$ sand for alle $n > k$.

Dermed kan $P(n)$ referere til andet end $n - 1$, altså andet end blot den forrige i rækken.

Fibonacci

“Liber Abaci” (år 1202) by Leonardo of Pisa (også kaldet Fibonacci):

En nyfødt han- og nyfødt hunkanin sættes i et bur. Efter en måned parrer de sig og efter endnu en måned kommer der en ny han og ny hun. De er kønsmodne efter 1 måned. Sådan fortsætter det. Ingen kaniner dør. Hvor mange par er der efter 12 måneder?

- Efter en måned: 1 par
- Efter to måneder: 2 par (gammelt + nyt)
- Efter tre måneder: 3 par (helt gammelt + gammelt + nyt)
- Efter fire måneder: 5 par (de to ældste har fået et par hver)

Antallet af kaniner $F(n)$ i måned n må være antallet af nye par $F(n-2)$ plus antallet af gamle par måneden før $F(n-1)$.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

$$F(n) = F(n-2) + F(n-1)$$

Fibonacci

Finde en forskrift for $$F(n) = c_1 F(n-1) + c_2 F(n-2)$$

$$z^2 = c_1 z^1 + c_2 z^0$$

1. Opskriv det karakteristiske polynomium:

$$z^2 - c_1 z - c_2 = 0, \qquad \text{med} \qquad c_1 = 1 \text{ og } c_2 = 1$$

2. Find rødderne:

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

3. Skriv løsning med potenser af rødderne (kan bevises med Taylorrækker)

$$F(n) = a\phi^n + b\psi^n$$

4. Find a og b fra startbetingelserne

$$F(0) = a + b = 0 \quad \text{og} \quad F(1) = a\phi + b\psi = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{\phi - \psi} = \frac{1}{\sqrt{5}} = -b$$

5. Så har vi

$$F(n) = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} \qquad\qquad F(n) = \left\lfloor \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Michaelmas daisies

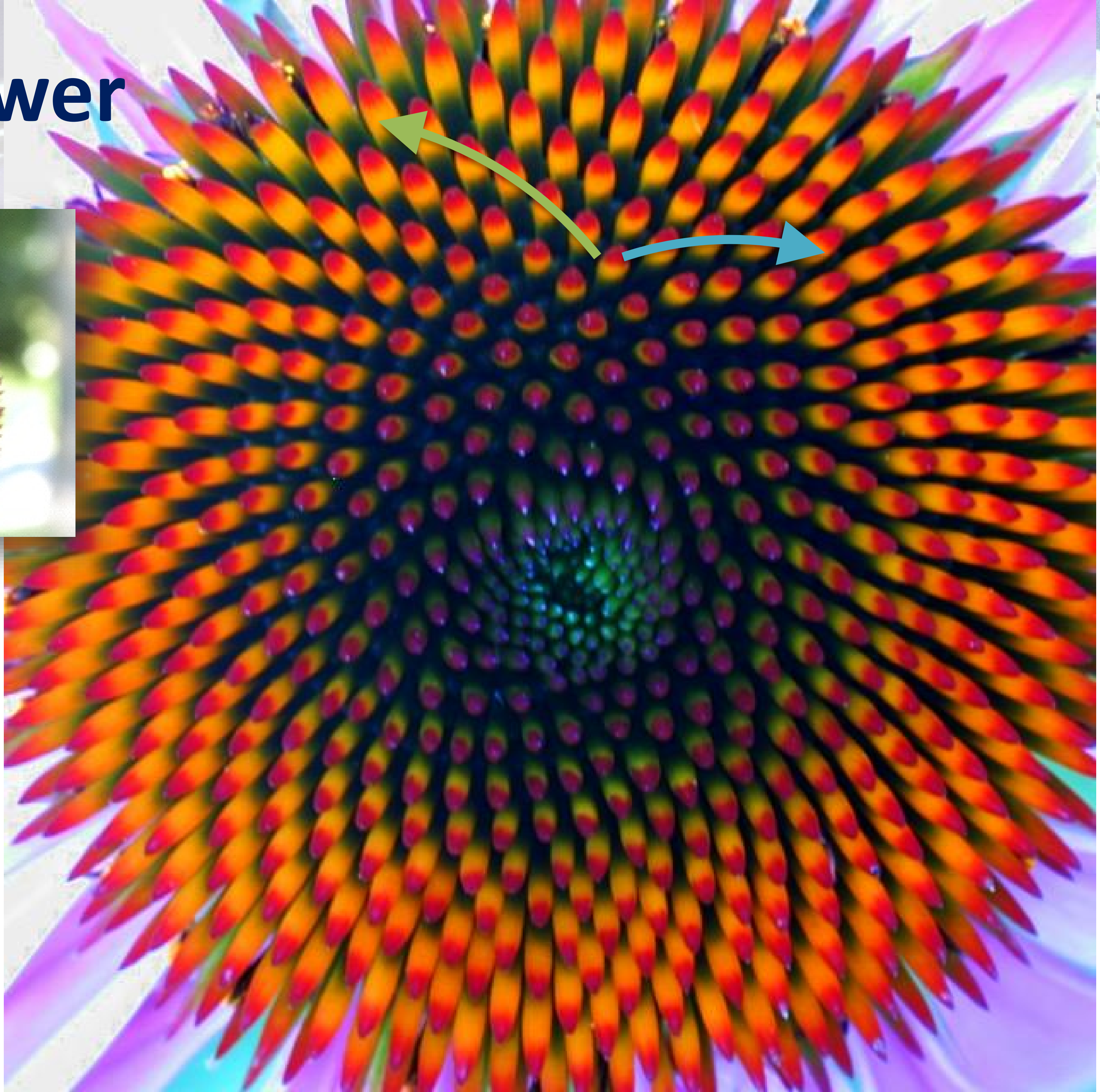
$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Man kan vise, at den gyldne snit er løsning til en række optimalitets-problemer – f.eks blades placering for maksimalt sollys.

Derfor ser man ofte den gyldne snit og afledte konsekvenser i naturen.

Michaelmas daisies

Coneflower



34

55

Fibonacci

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

Laurentrækken (Taylorrækken) hvor $a_n = F_n$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n = \underset{=0}{F_0} + \underset{=1}{F_1} z + \sum_{n=2}^{\infty} F_n z^n$$

$$= z + \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-2} + F_{n-1}) z^n$$

$$= z + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} z^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} z^n$$

$$= z + z^2 \overbrace{\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n}}^{=f(z)} + z \overbrace{\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} F_n z^n}}^{=f(z)} = z + z^2 f(z) + z f(z)$$

$$f(z) - z^2 f(z) - z f(z) = z$$

$$f(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}, \quad |z| <?$$

Opgave 3

Bestem konvergensradius for Taylorrækken

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

Hint:

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{F(n)}{F(n+1)}$$

Taylorrækken må ikke have poler.