Løsning til opgave KF 2.6.1

Løsning til (A):

Løsningerne til $z^2 + 1 = 0$ og $z^2 + 4 = 0$ er henholdsvis $z = \pm i$ og $z = \pm 2i$. Dermed kan vi skrive

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-i)(z+2i)(z-2i)} \ .$$

Løsning til (B):

Residualerne findes som

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) &= \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}\frac{1}{(z+i)(z^2+4)} = \frac{1}{(i+i)(-1+4)} = \frac{1}{6i} = -\frac{i}{6} \\
\operatorname*{Res}_{z=-i} f(z) &= \lim_{z\to -i}(z+i)f(z) = \lim_{z\to -i}\frac{1}{(z-i)(z^2+4)} = \frac{1}{(-i-i)(-1+4)} = -\frac{1}{6i} = \frac{i}{6} \\
\operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) &= \lim_{z\to 2i}(z-2i)f(z) = \lim_{z\to 2i}\frac{1}{(z^2+1)(z+2i)} = \frac{1}{(-4+1)(2i+2i)} = -\frac{1}{12i} = \frac{i}{12} \\
\operatorname*{Res}_{z=-2i} f(z) &= \lim_{z\to -2i}(z+2i)f(z) = \lim_{z\to -2i}\frac{1}{(z^2+1)(z-2i)} = \frac{1}{(-4+1)(-2i-2i)} = \frac{1}{12i} = -\frac{i}{12}
\end{aligned}$$

Løsning til (C):

Alle 4 singulariteter ligger inden for C, så

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{\text{Alle 4 poler}} \operatorname{Res} f(z) = 2\pi i\Big(\frac{i}{6} - \frac{i}{6} + \frac{i}{12} - \frac{i}{12}\Big) = 0 \ .$$

Løsning til (D):

Vi bruger nu kun de poler, der ligger i det øvre halvplan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{z=i,\ z=2i} = 2\pi i\Big(-\frac{i}{6} + \frac{i}{12}\Big) = \frac{-2\pi i^2}{12} = \frac{\pi}{6} \ .$$

Løsning til opgave KF 2.6.2

Basistrin: $1 = f(1)^2 = f(1) \cdot f(2) = 1 \cdot 1$.
Induktionstrin: Vi antager, at det gælder for n og viser, at så gælder det også for $m = n + 1$.

$$\begin{aligned}
f(1)^2 + f(2)^2 + \cdots + f(n+1)^2 &= f(n)f(n+1) + f(n+1)^2 \\
&= f(n+1)\big(f(n) + f(n+1)\big) \\
&= f(n+1)f(n+2) \\
&= f(m)f(m+1) \ .
\end{aligned}$$

Løsning til opgave KF 2.6.3

Løsning til (A):

Da cos ikke har singulariteter er det kun nævneren lig 0, der giver singularitet. Dermed er $z = 0$ en pol, og den har orden 3.

Løsning til (B):

Vi bruger formlen for poler af højere orden til at finde residuet.

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) &= \frac{1}{(m+1)!}\lim_{z\to z_0}\Big(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-z_0)^m f(z)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\Big(\frac{d^2}{dz^2} z^3 \frac{\cos z}{z^3}\Big) = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\big(-\cos z\big) = -\frac{1}{2}\cos 0 = -\frac{1}{2} \ .
\end{aligned}$$

Løsning til (C):

Vi har

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 2\pi i\Big(-\frac{1}{2}\Big) = -\pi i \ .$$

Løsning til opgave KF 2.6.4

Basistrin: $f(1) = 1 = 1^2$ og $f(2) = 4 = 2^2$. Induktionstrin: Vi antager, at påstanden holder for n, og viser, at den holder for $m = n + 1$.

$$\begin{aligned} f(m) &= f(n+1) = 2 + 2f(n) - f(n-1) = 2 + 2n^2 - (n-1)^2 = 2 + 2n^2 - n^2 + 2n - 1 \\ &= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 = m^2 \ . \end{aligned}$$

Løsning til opgave KF 2.6.5

Basistrin:

$$f_5 = 8 > \frac{3^5}{2^5} = \frac{243}{32} \approx 7.59 \ .$$

Induktionstrin: Vi antager relationen holder for $n \geq 5$. For $m = n + 1$ får vi

$$f_m = f_{m-1} + f_{m+2} > \Big(\frac{3}{2}\Big)^{m-1} + \Big(\frac{3}{2}\Big)^{m-2} = \frac{2}{3}\Big(\frac{3}{2}\Big)^m + \Big(\frac{2}{3}\Big)^2\Big(\frac{3}{2}\Big)^m = \frac{10}{9}\Big(\frac{3}{2}\Big)^m > \Big(\frac{3}{2}\Big)^m \ .$$

Løsning til opgave KF 2.6.6

Løsning til (A):

Funktionen har poler for $z^2 + 1 = 0$, hvilket giver $z = \pm i$. Det er simple poler.

Løsning til (B):

Vi får

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) &= \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}\frac{z}{z+i} = \frac{i}{i+i} = \frac{1}{2} \\ \operatorname*{Res}_{z=-i} f(z) &= \lim_{z\to -i}(z+i)f(z) = \lim_{z\to -i}\frac{z}{z-i} = \frac{-i}{-i-i} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Løsning til (C):

Da ingen af polerne ligger inden for cirklen er integralet ifølge Cauchys integralsætning lig 0.

Løsning til (D):

Begge poler ligger inden for cirklen, så

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i\big(\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-i} f(z)\big) = 2\pi i\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Big) = 2\pi i \ .$$