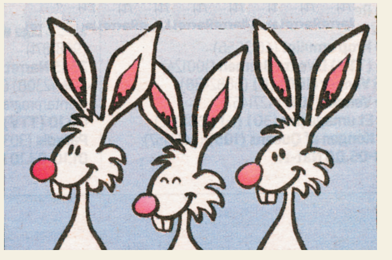
Fibonacci

Lederen af Pisas handelskontor i Bugia i Algier blev kaldt „Bonaccio“ - „den godmodige“. Hans rigtige navn kendes ikke. Dennes søn „Fibonacci“ („Den godmodiges søn“) eller Leonardo da Pisa (1180 - 1250) indførte arabertallene og nullet i Europa. Han skrev o. 1202 „Liber Abaci“ („Regnebogen“). Bogen er bevaret i dag i en andenudgave fra 1228.

Leonardo da Pisa stillede følgende opgave:



Fibonaccis kaniner

Hvor mange kaniner avles der på et år, når der begyndes med et enkelt par, hvis der hver måned fødes et par nye kaniner pr. par, og nyfødte kaniner først bliver avledygtige efter en måned?

(Antag at ingen kaniner dør)

Venligst udlånt af Hans Ebert, AAU

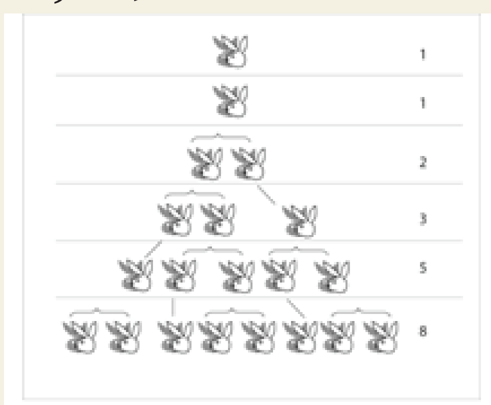
FIBONACCI

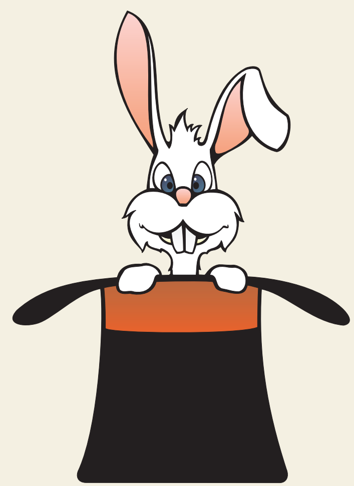
Dette gav anledning til Fibonacci-tallene, der kan bestemmes ved:

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}\,, \qquad \text{hvor } n \geq 2$$

Talrækken er:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233,. . .





FIBONACCI

For voksende tal, n, går forholdet mellem tallene F_{n-1} og F_n mod en fast værdi, som vi vil prøve at bestemme. Tallet kan findes som egenværdien, λ af nedenstående udtryk.

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{bmatrix}$$

Dette kan i matrixform skrives som:

$$\overline{F}_n = \overline{\overline{A}} \cdot \overline{F}_{n-1}$$

Egenværdien bestemmes via:

$$\overline{\overline{A}} \cdot \overline{F} = \lambda \cdot \overline{F}$$

$$\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

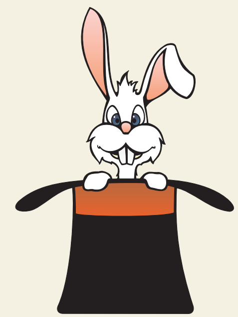
LØSNINGEN

Løsningen bliver:

$$\lambda = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0{,}618$$

$$\lambda^{-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618$$

(Den negative løsning kasseres)



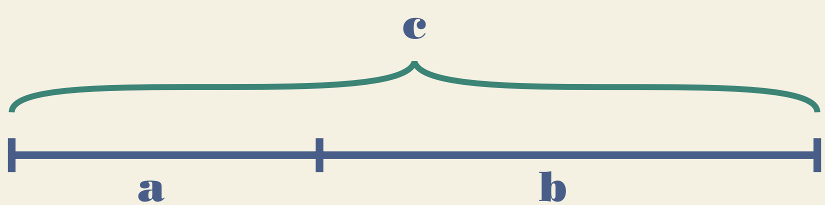
… 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, …

1,5   1,667   1,600   1,625   1,615   1,619   1,618   1,618

DET GYLDNE SNIT

Opgaven lyder:

Del et liniestykke i to dele, således at forholdet mellem den største del og den mindste del bliver lig med forholdet mellem hele liniestykket og den største del.



$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$

$$ac = b^2$$

$$b^2 = a\cdot(a+b)$$

$$\vdots$$

$$b = a\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ a$$

Det Gyldne Snit

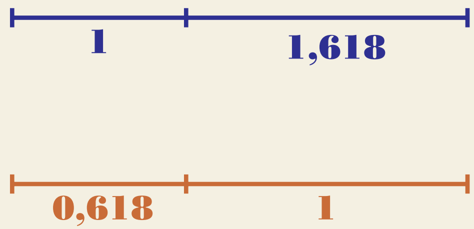
Forholdet 1: 1,618 kaldes Det Gyldne Snit

DET GYLDNE SNIT

Det ses at:

$$\frac{1}{0{,}618} = \frac{1{,}618}{1} = \frac{2{,}618}{1{,}618}$$

eller: $x + 1 = \frac{1}{x}$

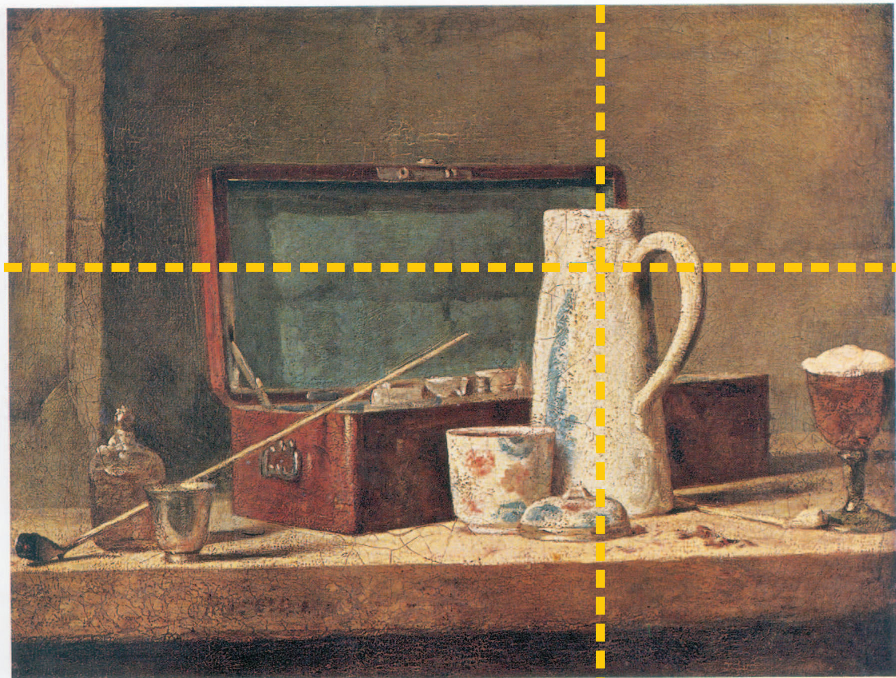


Det Gyldne Snit kan også findes som grænseværdien for udtrykket:

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}$$

Det Gyldne Snit

DET GYLDNE SNIT

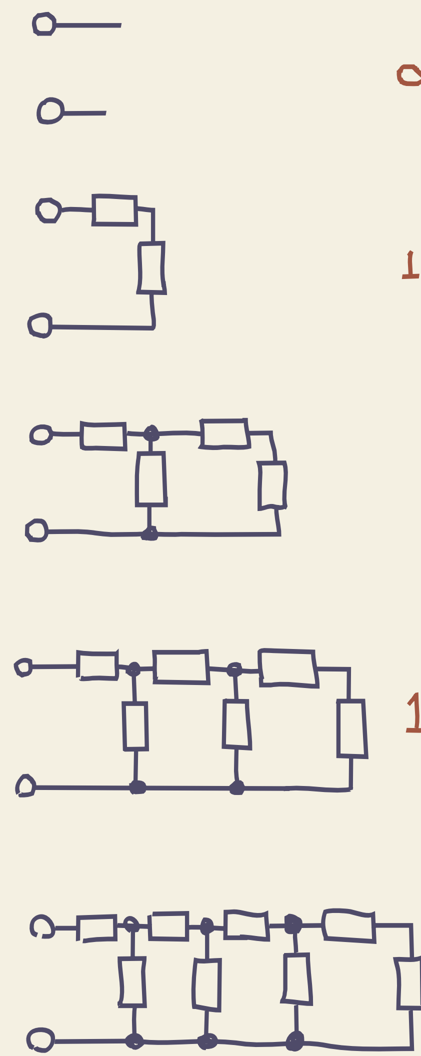


Jean-Baptiste-Siméon Chardin, *Still Life with Pipe*, Louvre, Paris.

Hiroshige, print of Ishiyakushi, a scene from *The 53 Stations on the Tōkaidō Highway*, Musée Guimet, Paris.

FIBONACCIRÆKKEN

Hvad giver 1 Ω i serie med 1 Ω i parallel med 1 Ω i serie med 1 Ω i parallel med 1 Ω i serie med 1 Ω i parallel med...?



$\frac{1}{0}$ $\quad \infty$

$\frac{2}{1}$ $\quad 1+1 = 2$

$\frac{5}{3}$ $\quad 1 + (1 \| (1+1)) = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

$\frac{13}{8}$ $\quad 1 + (1 \| (1 + (1 \| (1+1)))) = 1 + \frac{5}{8} = \frac{13}{8}$

$\frac{34}{21}$ $\quad 1 + (1 \| (1 + (1 \| (1 + (1 \| (1+1)))))) = 1 + \frac{13}{21} = \frac{34}{21}$

Fibonaccirækken

0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233

FIBONACCI I NATUREN

SOLSIKKER PÅ TAL. Alle levende væsener er underlagt et fundament af matematik. Især Det Gyldne Snit, logaritmiske spiraler og de såkaldte Fibonaccital er populære og nemme at finde i naturen.

Fibonaccitallene er opkaldt efter den italienske matematiker Leonardo Fibonacci, der levede i 11-1200-tallet og var tidens største, europæiske matematiker.

Den bestemte talrække, han selv har defineret og lagt navn til, er karakteriseret ved, at man får det næste tal i talrækken ved at lægge de to foregående tal i rækken sammen.

Altså: (0), 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 .. osv. i det uendelige.

Nummer 100 i den talrække løber op i 254.224.848.179.261.915.075. Det er altså et tal af størrelsesordenen flere hundrede milliarder milliarder.

Ved et nærstudie af solsikkens mange, tætsiddende frø midt i blomsten viser det sig, at frøene oftest danner et spiralmønster med præcis 21 kurver den ene vej og 34 den anden vej.

Der er altså tale om to sidestillede Fibonaccital, ligesom hos ananasen, der har 8 spiraler i den ene retning og 13 i den anden.

Noget tilsvarende gælder for kronbladene i okseøje, rosenkål, artiskokker, palmer og tusindfryd, som for det meste gør sig i 34, 55 eller 89 af den slags kulørte blade.

Ved at anbringe de botaniske smådele på netop denne måde udnytter diverse planter pladsen bedst. Også den fidus har mennesket kopieret.

I sin simpleste anvendelse kan Fibonaccitallene bruges til at regne ud, hvordan man bruger det mindste antal fliser til et bestemt mønster på f.eks. en havegang, eller hvordan man mest effektivt beklæder en rumraket med et varmeskjold af keramikfliser.

ET SNIT AF SKØNHED. Fibonaccitallene er i nær familie med både de logaritmiske spiraler og Det Gyldne Snit.

Dette klassiske snit er i virkeligheden et tal. Et forholdstal.

Det kan illustreres ved hjælp af en linie, hvorpå der er et punkt, som deler linien i to stykker, så forholdet mellem længden af de to nye liniestykker er det samme som forholdet mellem det største af disse to stykker og hele stykket.

Nu hvor foråret så sagte kommer, kan vi om kort tid ikke alene nyde skønheden i de spæde knopper på træerne, men også opleve den matematiske orden i afstanden mellem de nye skud.

For de springer frem på grenene i en skruelinie med mellemrum nogenlunde fordelt efter forholdet i Det Gyldne Snit.

På træerne udnytter forårsknopperne den begrænsede plads, safterne og lyset bedst, når de popper op på grene og kviste på netop den måde.

Rent æstetisk påviste allerede de gamle grækere ved et rundspørge, at de fleste mennesker pr. intuition vælger noget nær Det Gyldne Snit, hvis de skal dele en linie, et rektangel eller et rum efter harmoniske eller skønne kriterier.

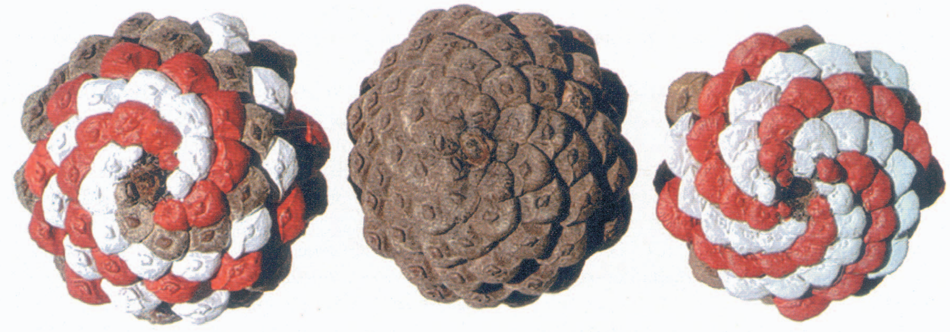
Desuden indgår Det Gyldne Snit i konstruktionen af en ligesidet femkant og den tilhørende femtakkede stjerne.

Også disse figurer ses overalt i dyre- og planteriget. F.eks. hos søstjerner, i kronblade og i kernehuse.

Forholdet mellem diagonalen og siden i en regulær femkant er helt præcis Det Gyldne Snit.

Det gigantiske, amerikanske forsvarsministerium, Pentagon, er bygget som en ligesidet femkant, som den også har sit græske navn efter.

Let genkendelige mønstre og symmetriske former i almindelighed er centrale begreber for attraktion overalt i naturen. Fra biernes forkærlighed for de mest ligedannede blomster til menneskets skønhedsidealer omkring ansigtsform og kropsbygning.



Det gyldne snit og Fibonaccirækker findes mange steder i naturen. Her er det fyrrekogler med kogleskæl i spiraler. Otte spiraler drejer mod højre, fem spiraler mod venstre

Fra Samvirke april 2005