Løsning til opgave KF 2.1.1

Løsning til (A):

Cauchy-Hadamard på side 683 i Kreyszig siger, at

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| .$$

så derfor er

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{1} \right| = 1 ,$$

Løsning til (B):

Hvis vi først antager, at potensen på z er n og ikke $2n$ får vi

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{n(n-1)}{2^n}}{\frac{(n+1)((n+1)-1)}{2^{n+1}}} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)}{2^n} \frac{2^{n+1}}{(n+1)((n+1)-1)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)}{1} \frac{2}{n+1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Da R netop er udtryk for den største værdi z kan antage, således at rækken stadig konvergerer, så får vi, at når potensen på z er dobbelt så stort ($2n$ i stedet for n), så bliver løsningen til opgaven

$$R = \sqrt{2}$$

da $z^{2n} = (z^n)^2$.

Løsning til opgave KF 2.1.2

Løsning til (A):

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^4 - z^5} = \frac{1}{z^4(1-z)} = z^{-4} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-4} \\ &= \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^1} + 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots \end{aligned}$$

Den geometriske række $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ er konvergent for $|z| < 1$ (se Theorem 6 side 675), dvs. $R = 1$.

Løsning til (B):

$$\begin{aligned} f(z) &= z \cos z^{-1} = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{-2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{-2n+1} \\ &= z - \frac{1}{2} z^{-1} + \frac{1}{24} z^{-3} - \cdots \end{aligned}$$

Konvergensradius for $\cos z$ er $|z| < \infty$. Når z erstattes med $1/z$ så bliver konvergensradius den samme, bortset fra at 0 ikke længere er tilladt. At gange med z ændrer ikke på om funktionen konvergerer.

$$0 < |z| < \infty .$$

Løsning til (C):

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\cos z}{(z-\pi)^4} = \frac{\cos(w+\pi)}{w^4} = -\frac{\cos w}{w^4} = -w^{-4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} w^{2n} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} w^{2n-4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} (z-\pi)^{2n-4} . \end{aligned}$$

Da $\cos w$ er konvergent for $|w| < \infty$ så er $\cos(z-\pi)$ konvergent for $|z-\pi| < \infty$. Med divisionen med w^4 er $f(z)$ ikke konvergent i $z - \pi = w = 0$, så konvergensområdet bliver samlet set

$$0 < |z - \pi| < \infty \ .$$

Løsning til (D):

$$f(z) = \frac{z^2-4}{z-1} = \frac{(w+1)^2-4}{w} = \frac{w^2+w-3}{w} = w + 2 - 3w^{-1} = z + 1 - \frac{3}{z-1} \ .$$

Det er en endelig række, så den er konvergent overalt undtagen i $z = 1$, hvor funktionen ikke er defineret. Altså har vi

$$0 < |z - 1| < \infty \ .$$

Løsning til opgave KF 2.1.3

Løsningen er næsten magen til løsning til klasseopgave 7.2. Det vil sige, at vi erstatter z med z^3 på følgende måde. Vi har først, at

$$\frac{1}{1-z} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n & \text{for } |z| < 1 \ , \\ \displaystyle -\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} & \text{for } |z| > 1 \ . \end{cases}$$

Ved at erstatte z med z^3 får vi

$$\frac{1}{1-z^3} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{3n} & \text{for } |z| < 1 \ , \\ \displaystyle -\sum_{n=0}^{\infty} z^{-3n-3} & \text{for } |z| > 1 \ . \end{cases}$$