Løsning til opgave KF 2.3.1

Løsning til (A):

Først finder vi singulære punkter

$$4 + z^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = -4 \quad \Leftrightarrow \quad z = \pm 2i \ ,$$

som begge er simple poler. Residuet for $2i$ er da givet ved (vi vælger her metoden i (3) side 721)

$$\operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) = \lim_{z\to 2i}(z-2i)f(z) = \lim_{z\to 2i}\frac{z-2i}{(z-2i)(z+2i)} = \lim_{z\to 2i}\frac{1}{z+2i} = \frac{1}{4i} = -\frac{1}{4}i$$

og residuet for $-2i$ er da givet ved (vi vælger her metoden i (4) side 721)

$$\operatorname*{Res}_{z=-2i} f(z) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} = \frac{1}{2z}\Big|_{z=-2i} = \frac{1}{-4i} = \frac{1}{4}i \ .$$

Løsning til (B):

Singulære punkter er

$$(z^2-1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \pm 1 \ ,$$

og ordenen er 2 for begge poler. Residuerne er da givet ved (vi bruger (5) side 722)

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) &= \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left((z-1)^2\frac{1}{(z-1)^2(z+1)^2}\right)\\ &= \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\frac{1}{(z+1)^2} = \lim_{z\to 1}\frac{-2}{(z+1)^3} = \frac{-2}{2^3} = -\frac{1}{4} \ ,\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) &= \lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left((z+1)^2\frac{1}{(z-1)^2(z+1)^2}\right)\\ &= \lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\frac{1}{(z-1)^2} = \lim_{z\to -1}\frac{-2}{(z-1)^3} = \frac{-2}{(-2)^3} = \frac{1}{4} \ .\end{aligned}$$

Løsning til (C):

Laurentrækken for funktionen er

$$e^{-1/z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^{-2n}$$

og eneste singulære punkt er i 0, som er en essentiel singularitet (se opgave KF 2.1(D)). Vi finder residuet i 0 ved

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = b_1 = 0 \ .$$

Løsning til opgave KF 2.3.2

Først finder vi singulære punkter for

$$\tan(\pi z) = \frac{\sin(\pi z)}{\cos(\pi z)}$$

så vi løser

$$\cos(\pi z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \pi z = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{1}{2} + n,\ n \in \mathbb{Z}$$

Kun $z = \pm 1/2$ ligger inden for C (som er enhedscirklen), så vi finder residuerne for disse to (simple) poler.

$$\operatorname*{Res}_{z=1/2} f(z) = \frac{p(z}{q'(z)}\Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{\sin(\pi z)}{-\pi\sin(\pi z)}\Big|_{z=\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\pi} \ ,$$

og

$$\operatorname*{Res}_{z=-1/2} f(z) = \frac{p(z}{q'(z)}\Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{\sin(\pi z)}{-\pi\sin(\pi z)}\Big|_{z=-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\pi} \ ,$$

Så har vi at

$$\oint_C \tan(\pi z)dz = 2\pi i\Big(\operatorname*{Res}_{z=1/2} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-1/2} f(z)\Big) = 2\pi i\Big(-\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi}\Big) = -4i \ .$$

Løsning til opgave KF 2.3.3

For at løse integralet finder vi først de singulære punkter for $f(z)$, dvs. vi løser

$$z^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \pm i \; ,$$

og polerne er simple. Så finder vi residuet for alle singulære punkter i det øvre halvplan, altså for i.

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z \to i} (z - i) \frac{1}{(z - i)(z + i)} = \lim_{z \to i} \frac{1}{z + i} = \frac{1}{2i} \; .$$

Nu kan vi finde integralet med formel (6) side 723

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f(z) = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi \; .$$

Løsning til opgave KF 2.3.4

Løsning til (A):

Polerne i $f(z)$ er givet som løsningerne til

$$1 - \cos z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \; .$$

Løsning til (B):

Det er kun $z = 0$ der ligger inden for integralkurven. Vi udregner residuet

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{z^2}{1 - \cos z} \; .$$

I modsætning til de fleste tilfælde, hvor vi udregner residuet, så skal $\lim$ faktisk regnes ud her,da både tæller og nævner går mod 0 for $z \to 0$. Vu bruger l'Hopitals regel to gange og får

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{z^2}{1 - \cos z} = \lim_{z \to 0} \frac{2z}{\sin z} = \lim_{z \to 0} \frac{2}{\cos z} = 2 \; .$$

Løsning til (C):

Vi kan nu udregne integralet som

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 2\pi i 2 = 4\pi i \; .$$