Lineær algebra for EIT4+ITC4/14

140321HEb

Opgaveløsninger MM5

Opgaver:

Opgave 5.1

Undersøg for hver af de to matrixer $\boldsymbol{C}$ og $\boldsymbol{D}$ om de er hermitiske, skævhermitiske eller unitære., og bestem deres spektrum og spektral radius

$$\boldsymbol{C} = \begin{Bmatrix} 4 & j \\ -j & 2 \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{Bmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{Bmatrix}$$

Opgave 5.2

Find længden af vektoren $\mathbf{a}$, som er givet ved:

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} 1 \\ (1 + j2) \end{Bmatrix}$$

Opgave 5.3

Betragt de to vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} -j \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} j \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

a. Udgør $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ et unitært system?
b. Er matrixen $\boldsymbol{C}$ normal?

$$\boldsymbol{C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} -j & j \\ 1 & 1 \end{Bmatrix}$$

Opgave 5.4

Betragt matrixen $\boldsymbol{A}$, givet ved:

$$\boldsymbol{A} = \begin{Bmatrix} j & 1 \\ -1 & j \end{Bmatrix}$$

a. Find ud af om $\boldsymbol{A}$ er hermitisk, skævhermitisk eller unitær.
b. Find en egenbase, der danner et unitært system for $\boldsymbol{A}$.
c. Find en matrix $\boldsymbol{B}$, der diagonaliserer $\boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{D} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$)

Opgave 5.5

Betragt matrixen $\boldsymbol{A}$, givet ved:

$$\boldsymbol{A} = \begin{Bmatrix} j3 & 2 + j \\ -2 + j & -j \end{Bmatrix}$$

a. Find ud af om $\boldsymbol{A}$ er hermitisk, skævhermitisk eller unitær.
b. Find en egenbase, der danner et unitært system for $\boldsymbol{A}$.
c. Find en matrix $\boldsymbol{B}$, der diagonaliserer $\boldsymbol{A}$

Opgave 5.6

Betragt matrixen $\boldsymbol{A}$, givet ved:

$$\boldsymbol{A} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & j \\ 0 & 2 & 0 \\ -j & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

a. Find ud af om $\boldsymbol{A}$ er hermitisk, skævhermitisk eller unitær.
b. Find en egenbase, der danner et unitært system for $\boldsymbol{A}$.
c. Find en matrix $\boldsymbol{B}$, der diagonaliserer $\boldsymbol{A}$

Opgave 5.7

Find en unitær matrix $\boldsymbol{B}$, som diagonaliserer matrixen $\boldsymbol{A}$, givet ved:

$$\boldsymbol{A} = \begin{Bmatrix} -1 & j & 1 + j \\ -j & 1 & 0 \\ 1 - j & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

Opgave 5.1

$$C = \begin{bmatrix} 4 & j \\ -j & 2 \end{bmatrix}$$

Spekter λ:
$3+\sqrt{2}$, $3-\sqrt{2}$
Radius 4,41

$$C^{T*} = \begin{bmatrix} 4 & j \\ -j & 2 \end{bmatrix}$$

=> Hermitisk

$$D = \begin{bmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{bmatrix}$$

Spekter λ:
j, $-j$
Radius 1

$$D^{T*} = \begin{bmatrix} 0 & -j \\ -j & 0 \end{bmatrix}$$

=> Skewhermitisk

Opgave 5.2

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ (1+j2) \end{bmatrix}$$

$$a^* \cdot a^T = \begin{bmatrix} 1 & (1-j2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ (1+j2) \end{bmatrix}$$

$$= 1^2 + (1-j2)(1+j2)$$

$$= 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$$

$$\sqrt{a \bullet a} = \sqrt{6} = 2{,}45$$

Opgave 5.3

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -j \\ 1 \end{bmatrix} \qquad b = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} j \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a \bullet b = \frac{1}{2}(-1+1) = 0$$

$$a \bullet a = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

Ja

$$A A^{T*} = A^{T*} A$$

$$C^{T*} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} j & 1 \\ -j & 1 \end{bmatrix}$$

$$C \cdot C^{T*} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -j & j \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j & 1 \\ -j & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^{T*} \cdot C = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} j & 1 \\ -j & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -j & j \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ja

Opgave 5.4

a) $A = \begin{bmatrix} j & 1 \\ -1 & j \end{bmatrix}$ $\qquad A^{T*} = \begin{bmatrix} -j & -1 \\ 1 & -j \end{bmatrix} = -A$

A er skævhermitisk og dermed normal og har dermed en egenbase, der er et unitært system

b) Vi finder egenvektorerne og normerer dem og får derved et unitært system.

Karakteristisk matrix:

$$M = A - \lambda I = \begin{bmatrix} j-\lambda & 1 \\ -1 & j-\lambda \end{bmatrix}$$

Karakteristisk determinant:

$$\Delta M = (j-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 1 - 2j\lambda + 1 = \lambda^2 - 2j\lambda$$

Karakteristisk ligning:

$$\lambda^2 - 2j\lambda = 0$$

$$(\lambda - j2)\lambda = 0$$

Rødder (egenværdier)

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_1 = 2j & M = 1 \\ \lambda_2 = 0 & M = 1 \end{array}\right\} \text{Algebraisk multiplicitet}$$

Egenvektorer:

For $\lambda_1 = 2j$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} j-2j & 1 \\ -1 & j-2j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j & 1 \\ -1 & -j \end{bmatrix}$$

Rækkereduktion:

$$\begin{bmatrix} -j & 1 \\ -1 & -j \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -j & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -jx_1 + x_2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -jx_2$$

Egenvektor:

$$u_1 = \begin{bmatrix} -j \\ 1 \end{bmatrix} \qquad m = 1 \quad \text{Geometrisk multiplicitet}$$

Normering:

$$u_1 \bullet u_1 = \begin{bmatrix} -j & 1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} -j \\ 1 \end{bmatrix} = 1+1 = 2$$

$$|u_1| = \sqrt{u_1 \bullet u_1} = \sqrt{2}$$

$$u_{1,norm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -j \\ 1 \end{bmatrix}$$

For $\lambda_2 = 0$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} j & 1 \\ -1 & j \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} j & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow jx_1 + x_2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = jx_2$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} j \\ 1 \end{bmatrix} \qquad u_{2,norm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} j \\ 1 \end{bmatrix} \qquad m = 1$$

c) Matrixen B skal indeholde egenvektorer som søjler, (ikke nødvendigvis normerede egenvektorer).

Vi kan bruge:

$$B = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j & j \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Efterprøvning:

$$D = B^{-1} A \cdot B$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\Delta B}\begin{bmatrix} 1 & -j \\ -1 & -j \end{bmatrix} = \frac{1}{-2j}\begin{bmatrix} 1 & -j \\ -1 & -j \end{bmatrix} = \frac{1}{2j}\begin{bmatrix} -1 & j \\ 1 & j \end{bmatrix}$$

$$D = \frac{1}{2j}\begin{bmatrix} -1 & j \\ 1 & j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j & 1 \\ -1 & j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -j & j \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2j}\begin{bmatrix} -2j & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -j & j \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2j}\begin{bmatrix} -2-2 & 2-2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2j}\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} j2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Opgave 5.5

a)

$$A = \begin{bmatrix} j3 & 2+j \\ -2+j & -j \end{bmatrix} \qquad A^{T*} = \begin{bmatrix} -j3 & -2-j \\ 2-j & j \end{bmatrix} = -A$$

A er skævhermitiske, og dermed normal. Der findes en unitær egenbase.

b) Vi finder egenvektorerne og normerer dem. Disse danner et Unitært system.

Karakteristiske matrix:

$$M = A - \lambda I = \begin{bmatrix} j3-\lambda & 2+j \\ -2+j & -j-\lambda \end{bmatrix}$$

Karakteristiske determinant:

$$\Delta M = (j3-\lambda)(-j-\lambda) - (-2+j)(2+j)$$
$$= \lambda^2 - j2\lambda + 8$$

Egenværdier:

$$\lambda = \frac{j2 \pm \sqrt{-4-32}}{2} = \frac{j2 \pm \sqrt{-36}}{2} = j\,\frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} j4 \\ -j2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_1 = j4 & M = 1 \\ \lambda_2 = -j2 & M = 1 \end{array}\right\} \text{Algebraiske multiplicitet}$$

Egenvektorer:

For $\lambda_1 = j4$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} j3-j4 & 2+j \\ -2+j & -j-j4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j & 2+j \\ -2+j & -j5 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -j & 2+j \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -jx_1 + (2+j)x_2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = (1-j2)\,x_2$$

Egenvektor

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1-j2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{eller} \quad U_1' = \begin{bmatrix} 5 \\ 1+j2 \end{bmatrix} \quad \left(\begin{matrix}\text{Gang med} \\ (1+j2)\end{matrix}\right)$$

Normering:

$$\sqrt{U_1 \bullet U_1} = \sqrt{\begin{bmatrix} 1+j2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-j2 \\ 1 \end{bmatrix}} = \sqrt{1^2+2^2+1^2} = \sqrt{6}$$

$$\sqrt{U_1' \bullet U_1'} = \sqrt{5^2+1^2+2^2} = \sqrt{30}$$

Normerede egenvektorer:

$$U_{1,norm} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1-j2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$m = 1$

Geometriske multiplicitet

eller

$$U'_{1,norm} = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix} 5 \\ 1+j2 \end{bmatrix}$$

For $\lambda_2 = -j2$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} j3+2j & 2+j \\ -2+j & -j+j2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j5 & 2+j \\ -2+j & j \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} j5 & 2+j \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad j5x_1 + (2+j)x_2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \left(\frac{-1+j2}{5}\right) x_2$$

Egenvektor:

$$U_2 = \begin{bmatrix} \frac{-1+j2}{5} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{eller} \quad U_2' = \begin{bmatrix} 1-j2 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \left(\begin{matrix}\text{Gang} \\ \text{med} \\ -5\end{matrix}\right)$$

Normering:

$$U_2^{T*} \bullet U_2 = \sqrt{\frac{6}{5}} \qquad U_2'^{T*} \bullet U_2' = \sqrt{30}$$

Normerede egenvektorer:

$$U_{2,norm} = \sqrt{\frac{5}{6}} \begin{bmatrix} \frac{-1+j2}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$m = 1$
Geometriske multiplicitet

eller

$$U'_{2,norm} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 1-j2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Jeg vælger som unitær egenbase:

$$U_1' = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 5 \\ 1+j2 \end{bmatrix}$$

$$U_2' = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 1-j2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

c) Matrixen B indeholder egenvektorer som søjler:

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 1-j2 \\ 1+j2 & -5 \end{bmatrix}$$

Efterprøv i Matlab at $\bar{\bar{D}}$.

$$\bar{\bar{D}} = \bar{\bar{B}}^{-1} \bar{\bar{A}} \bar{\bar{B}}$$

er diagonal med A's egenværdier på diagonalen!

Alternativt at $\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}} \bar{\bar{D}} \bar{\bar{B}}^{-1}$ hvor $\bar{\bar{D}}$ indeholder $\bar{\bar{A}}$'s egenværdier på diagonalen (i rækkefølge med egenvektorerne i $\bar{\bar{B}}$!)

Opgave 5.6

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & j \\ 0 & 2 & 0 \\ -j & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{T*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & j \\ 0 & 2 & 0 \\ -j & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$$

A er hermitisk og dermed normal. Dermed findes der en egenbase, som er et unitært system.

b) Vi finder egenvektorerne og normerer dem. Disse udgør et unitært system.

Karakteristisk matrix:

$$M = A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & j \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -j & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Karakteristisk determinant

$$\Delta M = (1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) + j(j(2-\lambda)) = -\lambda(\lambda-2)^2$$

Rødder (egenværdier):

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \qquad & M &= 1 \\ \lambda_2 &= 2, \qquad & M &= 2 \end{aligned}\right\} \text{Algebraisk multiplicitet}$$

Egenvektorer

For $\lambda_1 = 0$

$$M = A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & j \\ 0 & 2 & 0 \\ -j & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & j \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 + j x_3 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_1 = -j x_3$$

Egenvektor:

$$U_1 = \begin{bmatrix} -j \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad m = 1 \qquad \text{Geometrisk multiplicitet}$$

For $\lambda_2 = 2$

$$M = A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-2 & 0 & j \\ 0 & 2-2 & 0 \\ -j & 0 & 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & j \\ 0 & 0 & 0 \\ -j & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & j \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -x_1 + j x_3 = 0$$

x_2 er fri og x_1 eller x_3

dvs. 2 frihedsgrader

$$\Rightarrow x_1 = j x_3$$

Egenvektorer: (valg)

$$U_2 = \begin{bmatrix} j \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad U_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$m = 2$

Geometrisk multiplicitet.

($m \leq M$ generelt)

Normering af vektorer:

$$\sqrt{U_1 \bullet U_1} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{U_2 \bullet U_2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{U_3 \bullet U_3} = \sqrt{1^2} = 1$$

$$U_{1,norm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -J \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$U_{2,norm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} J \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$U_{3norm} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Matrixen B har egenvektorer som søjler:

$$B = \begin{bmatrix} -J & J & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Eftervis i Matlab

Opgave 5.7

Vi undersøger først om A er normal (dvs. hermitisk, skævhermitisk eller unitær). Derefter finder vi egenværdier og egenvektorer og danner et unitært system. Egenbasen af normerede egenvektorer anvendes som søjler i matrixen B.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & j & 1+j \\ -j & 1 & 0 \\ 1-j & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{T*} = \begin{bmatrix} -1 & j & 1+j \\ -j & 1 & 0 \\ 1-j & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$$

A er hermitisk og dermed normal. Derfor findes der et unitært system af egenvektorer.

Vi finder nu egenværdierne.
Karakteristisk matrix

$$M = A - \lambda I = \begin{bmatrix} -1-\lambda & j & 1+j \\ -j & 1-\lambda & 0 \\ 1-j & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Karakteristisk determinant:

$$\Delta M = (-1-\lambda)(1-\lambda)^2 + j \cdot j(1-\lambda) + (1+j)(-(1-j)(1-\lambda))$$
$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda - 4$$

Karakteristisk ligning:

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

Vi gætter en rod. $\lambda = 1$ vil efter inspektion være et godt gæt, så ligningen indeholder $(\lambda - 1)$ som faktor.

Polynomiedivision giver dernæst:

$$\begin{array}{l} \lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4 : (\lambda - 1) = \underbrace{\lambda^2 - 4}_{\to\ \lambda = \pm 2} \\ \underline{\lambda^3 - \lambda^2} \\ \quad 0 - 4\lambda + 4 \\ \quad \underline{\ \ -4\lambda + 4} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Vi får derved de 3 egenværdier:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = -2 \end{array}\right\} M = 1 \quad \text{Algebraisk multiplicitet}$$

<u>Dernæst findes egenvektorerne</u>

For $\lambda_1 = 1$

$$M = A - \lambda I = \begin{bmatrix} -1-1 & j & 1+j \\ -j & 1-1 & 0 \\ 1-j & 0 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & j & 1+j \\ -j & 0 & 0 \\ 1-j & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} -2 & j & 1+j \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(1-j) \\ 1-j & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -2 & j & 1+j \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(1-j) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -2 & j & 1+j \\ 0 & j & 1+j \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} -2x_1 + jx_2 + (1+j)x_3 &= 0 \\ jx_2 + (1+j)x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= -(1-j)x_3 \end{aligned}$$

Egenvektor:

$$U_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1+j \\ 1 \end{bmatrix} \qquad m = 1$$

For $\lambda_2 = 2$

$$M = A - \lambda I = \begin{bmatrix} -1-2 & j & 1+j \\ -j & 1-2 & 0 \\ 1-j & 0 & 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & j & 1+j \\ -j & -1 & 0 \\ 1-j & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -3 & j & 1+j \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}(1-j) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -3 & j & 1+j \\ 0 & -2 & 1-j \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow -2x_2 + (1-j)x_3 = 0 \\ &\Rightarrow x_2 = \tfrac{1}{2}(1-j)x_3 \\ &-3x_1 + jx_2 + (1+j)x_3 = 0 \\ &x_1 = \tfrac{1}{2}(1+j)x_3 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} x_3 &= 1 \quad \text{(Scettes)} \\ x_2 &= \tfrac{1}{2}(1-j) \\ x_1 &= \tfrac{1}{2}(1+j) \end{aligned}$$

Egenvektor

$$U_2' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+j) \\ \frac{1}{2}(1-j) \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{eller} \quad U_2 = \begin{bmatrix} 1+j \\ 1-j \\ 2 \end{bmatrix} \quad m=1$$

For $\lambda_3 = -2$

$$M = A - \lambda I = \begin{bmatrix} -1+2 & j & 1+j \\ -j & 1+2 & 0 \\ 1-j & 0 & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & j & 1+j \\ -j & 3 & 0 \\ 1-j & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & j & 1+j \\ 0 & 2 & -1+j \\ 1-j & 0 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & j & 1+j \\ 0 & 2 & -1+j \\ 0 & -1-j & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & j & 1+j \\ 0 & 2 & -1+j \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \; 2x_2 + (-1+j)x_3 = 0$

$\Rightarrow \; x_2 = \frac{1}{2}(1-j)x_3$

$\Rightarrow \; x_1 + jx_2 + (1+j)x_3 = 0$

$\Rightarrow \; x_1 = -\frac{3}{2}(1+j)x_3$

Egenvektor:

$$U_3' = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}(1+j) \\ \frac{1}{2}(1-j) \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{eller} \quad U_3 = \begin{bmatrix} -3(1+j) \\ 1-j \\ 2 \end{bmatrix}$$

$m = 1$

Vi har nu:

$$U_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1+j \\ 1 \end{bmatrix} \qquad U_2 = \begin{bmatrix} 1+j \\ 1-j \\ 2 \end{bmatrix} \qquad U_3 = \begin{bmatrix} -3(1+j) \\ 1-j \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 2 \qquad \lambda_3 = -2$$

$$M = m = 1 \qquad M = m = 1 \qquad M = m = 1$$

Normalisering:

$$\sqrt{U_1 \bullet U_1} = \sqrt{3} \qquad \sqrt{U_2 \bullet U_2} = \sqrt{8} \qquad \sqrt{U_3 \bullet U_3} = \sqrt{24}$$

og dermed fås det unitære system:

$$U_{1,norm} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1+j \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$U_{2,norm} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1+j \\ 1-j \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$U_{3,norm} = \frac{1}{\sqrt{24}} \begin{bmatrix} -3(1+j) \\ 1-j \\ 2 \end{bmatrix}$$

Den søgte unitære matrix B, som diagonaliserer A er derved givet ved:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1+j}{\sqrt{8}} & \frac{-3(1+j)}{\sqrt{24}} \\ \frac{-1+j}{\sqrt{3}} & \frac{1-j}{\sqrt{8}} & \frac{1-j}{\sqrt{24}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{8}} & \frac{2}{\sqrt{24}} \end{bmatrix}$$

Eftervis i Matlab