

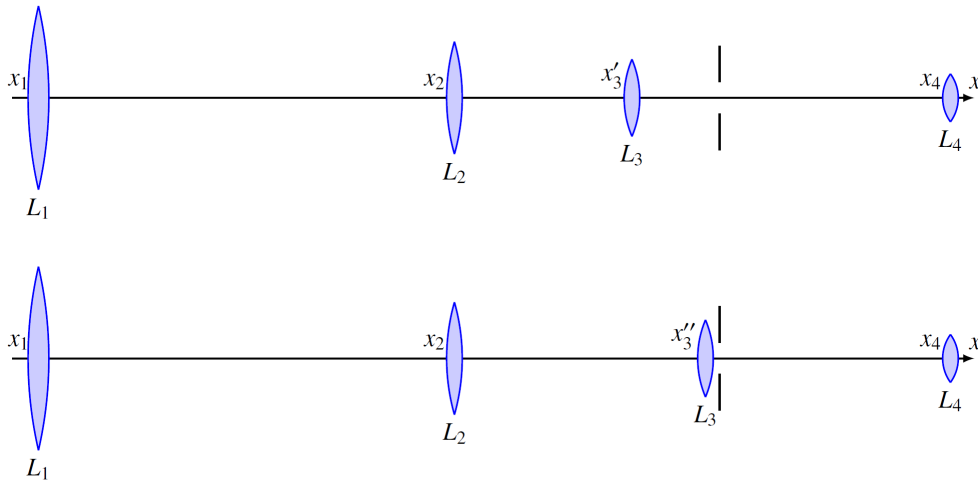
# Wettbewerb Matrixoptik

Alain Keller

November 26, 2019

## 1 Analyse Aufgabenstellung

Ziel der Aufgabe ist, ein Optisches System aus vier bi-konvexen Linsen zu analysieren und mit Hilfe der Matrixoptik zu berechnen.



Das ganze Optische System, wie in der Darstellung dargestellt, mit den Daten der Tabelle 1 lässt sich mit Hilfe der Matrixoptik berechnen. Das Verhalten eines Lichtstrahles, welcher durch dieses Optische System geht, lässt sich mit einer Transfermatrix beschreiben. Durch diese Matrix lässt sich der Ausgangswinkel und -Höhe eines einfallenden Lichtstrahles mit bekanntem Einfallswinkel, und -Höhe berechnen. Da in dieser Aufgabe das System nur angenähert berechnet wird, wird mit  $\sin(\theta) = \theta$  gerechnet.

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

1 Beispiel einer Transfermatrix multipliziert mit dem Lichtstrahl-Vektor wobei  $y$  die Höhe über der optischen Achse ( $x$  in der Abbildung) des Lichtstrahles und  $\theta$  den Winkel zur optischen Achse beschreibt

Brechungsindex $n$	Linse	Krümmungsradius $R$ [mm]	Dicke $d$ [mm]	Position $x$ [mm]
1.5	$L_1$	78.672364	4	$x_1 = 0$
1.5	$L_2$	39.603940	3	$x_2 = 80$
1.5	$L_3$	19.013503	3	$x'_3 = x_2 + 20 * (1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$
1.5	$L'_3$	19.013503	3	$x''_3 = x_2 + 20 * (1 + \sqrt{2})$
1.5	$L_4$	7.8042263	3	$x_4 = \text{Unbekannt}$

Das Ziel ist es eine solche Transfermatrix dieses optischen Systems zu berechnen.

## 2 Aufgabe 1 und 2

In dieser Aufgabe müssen wir die Position der letzten Linse  $L_4$  so berechnen, dass das System scharf abbildet. Dies ist, wie in der Aufgabenstellung schon beschrieben, der Fall wenn horizontal einfallende Strahlen wieder Horizontal austreten. Allgemein kann man sagen, dass eintretende Strahlen, welche zueinander parallel sind, wieder zueinander parallel austreten. Das bedeutet für die Transfermatrix, wenn ein Strahl mit  $\theta_1 = 0$  und  $y_1 \neq 0$  in das System kommt dieser wieder mit  $\theta_2 = 0$  austritt. Anders ausgedrückt:

$$C * y_1 + D * \theta_1 = 0$$

Da  $\theta_1 = 0$  und  $y_1 \neq 0$  kann man vereinfachen:

$$C = 0$$

Das heisst mit der Position C in der Transfermatrix können wir die gesuchte Position der Linse 4 berechnen.

Damit wir die die oben genannte Rechnung durchführen können benötigen wir die Transfermatrix  $T$ , berechnet mit der unbekannten  $x_4$ .

### 2.1 Berechnung von T

Die Transfermatrix des gesamten Systems besteht aus den jeweiligen Transfermatrizen der einzelnen Linsen und Räume zwischen den Linsen. Für jeden Raum, und Mediumswechsel, welcher ein Lichtstrahl durchquert gibt es eine Transfermatrix. In verkehrter Reihenfolge, wie sich der Lichtstrahl bewegt, multipliziert ergeben sie die Transfermatrix des gesamten Systems.

$$T_l = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$T_{a1} \approx \begin{pmatrix} 1 & 76.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T_{a2} (L_3 \text{ bei } x'_3) \approx \begin{pmatrix} 1 & 31.1421 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{a22} (L_3 \text{ bei } x''_3) \approx \begin{pmatrix} 1 & 45.2843 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T_{a3} \approx \begin{pmatrix} 1 & x_4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Matrix um einen Lichtstrahl, welcher sich durch einen Raum aus einem Medium bewegt, beschreibt.  $l$  ist die Länge dieses Raumes.

$$B(n_1, n_2, R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R}(\frac{n_1}{n_2} - 1) & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \quad (3)$$

3 Transfermatrix um eine Brechung an einer gekrümmten Oberfläche zu berechnen.  $n_1$  ist der Brechungsindex des Mediums von dem der Lichtstrahl kommt und  $n_2$  derjenige des Mediums in das der Lichtstrahl geht. Der Radius  $R$  ist bei einem Übergang an einer konvexen Oberfläche positiv und bei einer konkaven negativ. Die Brechungsmatrix basiert auf dem Brechungsgesetz von Snellius.

Will man nun beschreiben wie sich ein Lichtstrahl durch eine Linse bewegt braucht man drei Transfermatrizen, die Brechung beim Eintritt, wie sich der Strahl durch die Linse bewegt, und die Brechung beim Austritt. Die Transfermatrix erfolgt nun aus der Multiplikation dieser drei Matrizen. Für eine symmetrische bi-konvexe Linse sieht das wie folgt aus:

$$B(n_2, n_1, -R) * T_l * B(n_1, n_2, R) = T$$

$$T_{L1} \approx \begin{pmatrix} 0.9831 & 2.6667 \\ -0.0126 & 0.9831 \end{pmatrix} \quad T_{L2} \approx \begin{pmatrix} 0.9831 & 2.6667 \\ -0.0126 & 0.9831 \end{pmatrix}$$

$$T_{L3} \approx \begin{pmatrix} 0.9831 & 2.6667 \\ -0.0126 & 0.9831 \end{pmatrix} \quad T_{L4} \approx \begin{pmatrix} 0.9831 & 2.6667 \\ -0.0126 & 0.9831 \end{pmatrix}$$

Hat man nicht nur eine sondern zwei Linsen mit einem Abstand  $a$  dazwischen muss man diesen in die Rechnung miteinbeziehen. Die Rechnung würde dann wie folgt aussehen:

$$T_2 * T_a * T_1 = T \quad (4)$$

Auf das System der Aufgabe angewandt sieht die Berechnung der Transfermatrix so aus:

$$T = T_{L4}T_{a3}T_{L3}T_{a2}T_{L2}T_{a1}T_{L1} \quad (5)$$

$$\text{T für } L_3 \text{ bei } x'_3 \quad T \approx \begin{pmatrix} 0.0075 x_4 - 0.3388 & 30.6137 - 2.9219 x_4 \\ 0.0565 - 0.0010 x_4 & 0.4019 x_4 - 8.0548 \end{pmatrix}$$

$$\text{T für } L_3 \text{ bei } x''_3 \quad T' \approx \begin{pmatrix} 0.0156 x'_4 - 0.4693 & 20.5528 - 2.3011 x'_4 \\ 0.0850 - 0.0021 x'_4 & 0.3165 x'_4 - 5.8542 \end{pmatrix}$$

5 Die Matrizen  $T_{a1}, T_{a2}, T_{a3}$  beschreiben den Abstand zwischen den Linsen. Dabei ist zu beachten, dass bei  $T_{a3}$  die Distanz noch Unbekannt ist, und bei den bekannten Distanzen die Dicken der Linsen subtrahiert werden, um die Distanz zwischen den Linsenoberflächen zu erhalten. Die Matrizen  $T_{L1}, T_{L2}, T_{L3}, T_{L4}$  beschreiben die Transfermatrizen der Linsen. Diese wurden nach dem oben erwähnten Prinzip berechnet, wobei für den Brechungsindex  $a_1$  1 verwendet wurde, da in der Aufgabe die Linsen von Luft, für welches  $n = 1$  gilt, umgeben sind. Die Transfermatrix für das System wurde mit einem Matlab Skript berechnet. Die Matrix hat jedoch noch eine Unbekannte, die Distanz zwischen  $L_3$  und  $L_4$ . Diese Unbekannte lässt sich nach dem oben genannten Prinzip Berechnen (die Zahl in Zeile 2 und Spalte 1 muss null sein).

Löst man die Gleichung für  $x_4$  und  $x'_4$  auf bekommt man die jeweiligen Abstände zur Linse 3. Addiert man nun die Bekannten Abstände und die Linsendicken, kommt man auf das Ergebnis, dass die Linse 4 nur um 0.8 mm verschoben werden muss, damit das System in beiden Positionen scharf abbildet. Dies ist sogleich die Antwort auf die Zweite Frage.

Position der vierten Linse, wenn die Dritte Linse bei  $x'_3$  ist: 171.8567847673568127905970695569mm  
Position der vierten Linse, wenn die Dritte Linse bei  $x''_3$  ist: 171.01342515747323965389575288258mm

$$T \approx \begin{pmatrix} 0.0718 & -129.2555 \\ 0 & 13.9355 \end{pmatrix}$$

$$T' \approx \begin{pmatrix} 0.1488 & -70.8665 \\ 0 & 6.7207 \end{pmatrix}$$

### 3 Aufgabe 3 und 4

Da das Linsensystem bei Position  $x''_3$  eine Blende hat, wird die Vergrößerung mit einem Lichtstrahl berechnet, der diese Blende durchquert. Eigentlich sollte die Blende keinen Einfluss auf die Vergrößerung eines Optischen Systems haben, sondern lediglich die Menge des durchquerenden Lichtes beschreiben (Helligkeit).

Um herauszufinden welche Lichtstrahlen die Position  $(x''_3, 0)$  durchqueren brauchen wir eine Transfermatrix, die bis zu diesem Punkt geht, also ohne die vierte Linse und deren Abstand zur

dritten Linse. Da das System zwei verschiedene Positionen für die dritte Linse erlaubt, wird für jede Position eine Transfermatrix benötigt.

$$\begin{aligned} \text{Transfermatrix von } x_1 \text{ bis } x_3'' \text{ für } L_3 \text{ bei } x_3' \quad T &\approx \begin{pmatrix} -0.2995 & 0.4330 \\ 0.0086 & -3.3512 \end{pmatrix} \\ \text{Transfermatrix von } x_1 \text{ bis } x_3'' \text{ für } L_3 \text{ bei } x_3'' \quad T &\approx \begin{pmatrix} -0.5818 & 31.4878 \\ 0.0017 & -1.2401 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### 3.1 Vergrößerung 1

Entscheidend dafür, ob ein Lichtstrahl durch einen bestimmten Punkt geht, ist das Verhältnis zwischen Abstand und Winkel zur optischen Achse. Mit Hilfe der Transfermatrix von  $x_1$  nach  $x_3''$  und einem Lichtvektor mit Variablen, lässt sich ausrechnen in welchen Verhältnis die beiden Variablen des Lichtvektors sein müssen um die Blende zu durchqueren (Der berechnete Vektor muss einen y-Wert von 0 haben). Das berechnete Verhältnis ist:  $y : \theta \approx 1 : 0.6916$  Mit dem Ermittelten Ergebnis wurde ein Lichtstrahl erstellt, welcher die Blende durchquert. Die Transfermatrix wird nun mit diesem Multipliziert.

Die Vergrößerung eines Optischen Systems lässt sich mit dem Verhältnis vom Einfallswinkel zum Ausfallswinkel berechnen.

$$(T) \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ v * \theta_1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

6 Lichtvektor multipliziert mit einer Transfermatrix.  $v$  stellt hierbei den Vergrößerungsfaktor dar.

Zur Berechnung der Vergrößerung wird ein Lichtvektor mit dem berechneten Verhältnis verwendet. Hierbei wird für den Winkel eine Variable, und für den Offset zur optischen Achse eine Funktion (Verhältnis) des Winkels genommen, da sich der Winkel am Ende wegekürzen lässt. Die Transfermatrix des gesamten Systems wird nun mit diesem Vektor multipliziert. Vom berechneten Vektor wird nun der Wert in der zweiten Spalte durch den Winkel geteilt, und man bekommt das Verhältnis, welches auch die Vergrößerung darstellt.

$$(T) \begin{pmatrix} 1.4459 \theta_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -129.1517 \theta_1 \\ 13.9355 \theta_1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Anhand des Vektors kann man Ablesen, dass der Vergrößerungsfaktor ungefähr 13.9355 ist.

### 3.2 Vergrößerung 2

Um die Vergrößerung des Systems zu berechnen wenn die dritte Linse bei der Position  $x_3''$  ist, lässt sich fast gleich wie die vorherige Vergrößerung berechnen. Der einzige Unterschied ist die Transfermatrix für die Berechnung eines Lichtstrahles, der durch den Punkt  $(x_3'', 0)$  geht. Da sich die Blende an der Position  $x_3''$  befindet, ist sie in diesem Fall in der Mitte der dritten Linse. Dafür wird für die Dritte Linse eine zusätzliche Transfermatrix berechnet, welche die halbe Linse beschreibt. Mit dieser wird dann die Transfermatrix von  $x_1$  bis  $x_3''$  berechnet. Berechnet man nun wieder das Verhältnis zwischen Winkel und Höhe eines Lichtstrahles kommt man auf das Ergebnis:  $y_1 : \theta_1 \approx 1 : 0.01848$  Die restlichen Schritte sind die selben wie schon für die erste Vergrößerung angewendet wurden.

$$(T) \begin{pmatrix} 54.1189 \theta_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -62.8139 \theta_2 \\ 6.7207 \theta_2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Auch hier kann man den Vergrößerungsfaktor im Rechten Vektor ablesen. Er beträgt ungefähr: 6.7207

$x_4$ wenn $x_3 = x'_3$	171.8567847673568127905970695569mm
$x_4$ wenn $x_3 = x''_3$	171.01342515747323965389575288258mm
Vergrößerung wenn Linse 3 bei $x'_3$	13.935473269228034340293197061854
Vergrößerung wenn Linse 3 bei $x''_3$	6.720669697666777330755532059945
Unterschied zu Kepler-Teleskop	BlaBluBla

### 3.3 Unterschied zum Keplerteleskop

Ein wesentlicher Unterschied, welcher beim berechnen des Systems aufgefallen ist die Vergrößerung. Ein Kepler-Teleskop hat eine Negative Vergrößerung, das heisst, das Bild ist "auf dem Kopf". Bei unserem System ist die Vergrößerung Positiv, also wird das Bild in der gleichen Ausrichtung Projiziert. Dies kann auch mit einem parallel zur optischen Achse einfallenden Strahl gezeigt werden. Dieser verlässt das System wieder auf der selben Seite, wie er eingefallen ist. Dieser Unterschied ist für den Gebrauch des Systems nützlich, da die Ausrichtung auf ein Ziel natürlicher ist.

## Matlab Code

```

1 syms l1 l2 l3 d1 d2 d3;
2 syms y1 y2 r1 r2 r3;
3 syms alpha1 n1 n2 alpha2;
4 syms x1 x2 x22 x3 x4;
5 syms dl1 dl2 dl3 dl4; %Dicken der Linsen
6 syms Rl1 Rl2 Rl3 Rl4; %Radien der Linsen
7
8 x1 = 80 - 2 - 1.5;
9 x2 = 20 * (1 + 1/sqrt(2)) - 3;
10 x22 = 20 * (1 + sqrt(2)) - 3;
11 x31x32 = 20 * (1 + sqrt(2)) - 20 * (1 + 1/sqrt(2)); %Distanz
    zwischen x'3 und x''3
12 dl1 = 4;
13 dl2 = 3;
14 dl3 = 3;
15 dl4 = 3;
16 Rl1 = 78.672364;
17 Rl2 = 39.603940;
18 Rl3 = 19.013503;
19 Rl4 = 7.804226;
20 n1 = 1;
21 n2 = 1.5;
22 % Transfermatrix Linse1
23 BL1e = [1, 0; (1/Rl1)*((n1/n2)-1), n1/n2];
24 BL1a = [1, 0; (-1/Rl1)*((n2/n1)-1), n2/n1];
25 Tl1 = [1, dl1; 0, 1];
26 Tl1 = BL1a * Tl1 * BL1e
27
28 % Transfermatrix Linse 2

```

```

29 BL2e = [1 , 0;(1/Rl2)*((n1/n2)-1) , n1/n2];
30 BL2a = [1 , 0;(-1/Rl2)*((n2/n1)-1) , n2/n1];
31 TlL2 = [1 , dl2;0 , 1];
32 Tl2 = BL2a * TlL2 * BL2e
33
34 % Transfermatrix Linse 3
35 BL3e = [1 , 0;(1/Rl3)*((n1/n2)-1) , n1/n2];
36 BL3a = [1 , 0;(-1/Rl3)*((n2/n1)-1) , n2/n1];
37 TlL3 = [1 , dl3;0 , 1];
38 TlL3B = [1 , dl3/2;0 , 1];
39 Tl3 = BL3a * TlL3 * BL3e
40 Tl3B = TlL3B * BL3e; % Transfermatrix fuer die Halbe Linse 3 zur
    berechnung der Vergroesserung
41
42 % Transfermatrix Linse 4
43 BL4e = [1 , 0;(1/Rl4)*((n1/n2)-1) , n1/n2];
44 BL4a = [1 , 0;(-1/Rl4)*((n2/n1)-1) , n2/n1];
45 TlL4 = [1 , dl4;0 , 1];
46 Tl4 = BL4a * TlL4 * BL4e
47
48 % Transfermatrizen fuer Distanzen zwischen den Linsen
49 Tx1 = [1 , x1;0 , 1]
50 Tx2 = [1 , x2;0 , 1]
51 Tx22 = [1 , x22;0 , 1]
52 Tx3 = [1 , x3;0 , 1]
53
54 % Berechnung des Abstandes x3 (Zwischen Linse 3 und 4), damit system
    scharf abbildet.
55 T = Tl4 * Tx3 * Tl3 * Tx2 * Tl2 * Tx1 * Tl1;
56 T2 = Tl4 * Tx3 * Tl3 * Tx22 * Tl2 * Tx1 * Tl1;
57 vpa(T);
58 vpa(T2);
59 eqd1 = T(2,1);
60 eqd2 = T2(2,1);
61 Dx2 = solve(eqd1 , x3);
62 Dx3 = solve(eqd2 , x3);
63
64 % Ausrechnen der Absoluten Position der Linse 4
65 vpa(Dx2);
66 vpa(Dx3);
67 Dtotal1 = Dx2 + x1 + x2 + 9.5;
68 Dtotal2 = Dx3 + x1 + x22 + 9.5;
69 pos1 = vpa(Dtotal1)
70 Pos2 = vpa(Dtotal2)
71
72 % Transfermatrix des gesamten Systems
73 x3 = Dx2;
74 Tx3 = [1 , x3;0 , 1];
75 T = Tl4 * Tx3 * Tl3 * Tx2 * Tl2 * Tx1 * Tl1;

```

```

76
77 %Berechnung der Vergroesserung 1
78 syms Ytest;
79 Tx31x32 = [1,x31x32-1.5;0,1];
80 vpa(T);
81 Tv1 = Tx31x32 * Tl3 * Tx2 * Tl2 * Tx1 * Tl1;
82 vpa(Tv1);
83 light = [Ytest, alpha1]';
84 lightOut = Tv1 * light
85 eq = lightOut(1);
86 winkl = solve(eq,alpha1) / Ytest;
87 vpa(winkl);
88 light2 = [alpha2/winkl,alpha2]';
89 vpa(light2);
90 V1 = T * light2;
91 vpa(V1);
92 VergrFrac1 = V1(2)/alpha2';
93 Vergr1 = vpa(VergrFrac1)
94
95 % Berechnung der Vergroesserung 2
96 x3 = Dx3;
97 Tx3 = [1,x3;0,1];
98
99 T2 = Tl4 * Tx3 * Tl3 * Tx22 * Tl2 * Tx1 * Tl1;
100 vpa(T2);
101 Tv2 = Tl3B * Tx22 * Tl2 * Tx1 * Tl1;
102 vpa(Tv2);
103 light = [Ytest, alpha1]';
104 lightOut = Tv2 * light;
105 eq = lightOut(1);
106 winkl = solve(eq,alpha1) / Ytest;
107 vpa(winkl);
108 light2 = [alpha2/winkl,alpha2]';
109 vpa(light2)
110 V2 = T2 * light2;
111 vpa(V2)
112 VergrFrac2 = V2(2)/alpha2';
113 Vergr2 = vpa(VergrFrac2)
114
115 % Lichtsrathl zum zeigen, dass System das Bild nicht "Verkehrt"
    abbildet.
116 licht = [1,0]'
117 outlicht = T * licht

```