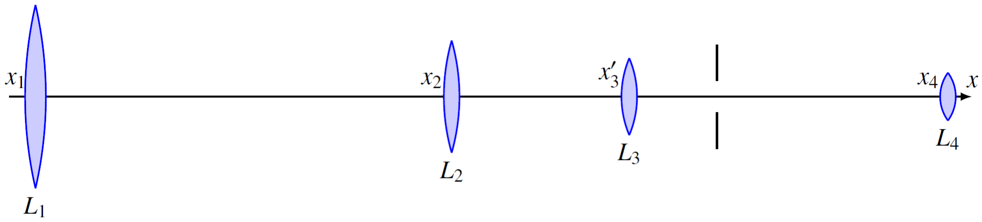
Wettbewerb Matrixoptik

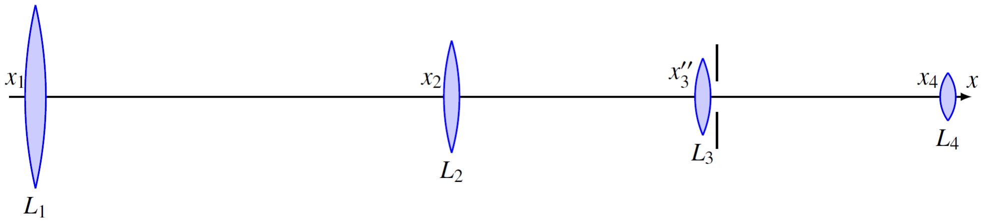
Alain

November 16, 2019

1 Analyse Aufgabenstellung

Ziel der Aufgabe ist, ein Optisches System aus vier bi-konvexen Linsen zu analysieren und mit Hilfe der Matrixoptik zu berechnen.





Das ganze Optische System, wie in der Darstellung dargestellt, mit den Daten der Tabelle 1 lässt sich mit Hilfe der Matrixoptik berechnen. Das Verhalten eines Lichtstrahles, welcher durch dieses Optische System geht, lässt sich mit einer Transfermatrix beschreiben. Durch diese Matrix lässt sich der Ausgangswinkel und -Höhe eines einfallenden Lichtstrahles mit bekanntem Einfallswinkel, und -Höhe berechnen. Da in dieser Aufgabe das System nur angenähert berechnet wird, wird mit $sin(\theta) = \theta$ gerechnet.

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

1 Beispiel einer Transfermatrix multipliziert mit dem Lichtstrahl-Vektor wobei y die Höhe über der optischen Achse (x in der Abbildung) des Lichtstrahles und θ den Winkel zur optischen Achse beschreibt

Brechungsindex n	Linse	Krümmungsradius R [mm]	Dicke d [mm]	Position x [mm]
1.5	L_1	78.672364	4	$x_1 = 0$
1.5	L_2	39.603940	3	$x_2 = 80$
1.5	L_3	19.013503	3	$x'_3 = x_2 + 20 * (1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$
1.5	L'_3	19.013503	3	$x''_3 = x_2 + 20 * (1 + \sqrt{2})$
1.5	L_4	7.8042263	3	$x_4 =$ Unbekannt

Das Ziel ist es eine solche Transfermatrix dieses optischen Systems zu berechnen.

2 Aufgabe 1 und 2

In dieser Aufgabe müssen wir die Position der letzten Linse L_4 so berechnen, dass das System scharf abbildet. Dies ist, wie in der Aufgabenstellung schon beschrieben, der Fall wenn horizontal einfallende Strahlen wieder Horizontal austreten. Allgemein kann man sagen, dass eintretende Strahlen, welche zueinander parallel sind, wieder zueinander parallel austreten. Das bedeutet für die Transfermatrix, wenn ein Strahl mit $\theta_1 = 0$ und $y_1 \neq 0$ in das System kommt dieser wieder mit $\theta_2 = 0$ austritt. Anders ausgedrückt:

$$C * y_1 + D * \theta_1 = 0$$

Da $\theta_1 = 0$ und $y_1 \neq 0$ kann man vereinfachen:

$$C = 0$$

Das heisst mit der Position C in der Transfermatrix können wir die gesuchte Position der Linse 4 berechnen.
Damit wir die die oben genannte Rechnung durchführen können benötigen wir die Transfermatrix T, berechnet mit der unbekannten x_4.

2.1 Berechnung von T

Die Transfermatrix des gesamten Systems besteht aus den jeweiligen Transfermatrizen der einzelnen Linsen und Räume zwischen den Linsen. Für jeden Raum, und Mediumswechsel, welcher ein Lichtstrahl durchquert gibt es eine Transfermatrix. In verkehrter Reihenfolge, wie sich der Lichtstrahl bewegt, multipliziert ergeben sie die Transfermatrix des gesamten Systems.

$$T_l = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$T_{a1} \approx \begin{pmatrix} 1 & 76.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T_{a2}\ (L_3 \text{ bei } x_3') \approx \begin{pmatrix} 1 & 31.1421 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$T_{a22}\ (L_3 \text{ bei } x_3'') \approx \begin{pmatrix} 1 & 45.2843 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T_{a3} \approx \begin{pmatrix} 1 & x_4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Matrix um einen Lichtstrahl, welcher sich durch einen Raum aus einem Medium bewegt, beschriebt. l ist die Länge dieses Raumes.

$$B(n_1, n_2, R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R}(\frac{n_1}{n_2} - 1) & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \tag{3}$$

3 Transfermatrix um eine Brechung an einer gekrümmten Oberfläche zu berechnen. n_1 ist der Brechungsindex des Mediums von dem der Lichtstrahl kommt und n_2 derjenige des Mediums in das der Lichtstrahl geht. Der Radius R ist bei einem Übergang an einer konvexen Oberfläche positiv und bei einer konkaven negativ. Die Brechungsmatrix basiert auf dem Brechungsgesetz von Snellius.
Will man nun beschreiben wie sich ein Lichtstrahl durch eine Linse bewegt braucht man drei Transfermatrizen, die Brechung beim eintritt, wie sich der Strahl durch die Linse bewegt, und die Brechung beim Austritt. Die Transfermatrix erfolgt nun aus der Multiplikation dieser drei Matrizen. Für eine symmetrische bi-konvexe Linse sieht das wie folgt aus:

$$B(n_2, n_1, -R) * T_l * B(n_1, n_2, R) = T$$

$$T_{L1} \approx \begin{pmatrix} 0.9831 & 2.6667 \\ -0.0126 & 0.9831 \end{pmatrix} \quad T_{L2} \approx \begin{pmatrix} 0.9831 & 2.6667 \\ -0.0126 & 0.9831 \end{pmatrix}$$
$$T_{L3} \approx \begin{pmatrix} 0.9831 & 2.6667 \\ -0.0126 & 0.9831 \end{pmatrix} \quad T_{L4} \approx \begin{pmatrix} 0.9831 & 2.6667 \\ -0.0126 & 0.9831 \end{pmatrix}$$

Hat man nicht nur eine sondern zwei Linsen mit einem Abstand a dazwischen muss man diesen in die Rechnung miteinbeziehen. Die Rechnung würde dann wie folgt aussehen:

$$T_2 * T_a * T_1 = T \tag{4}$$

Auf das System der Aufgabe angewandt sieht die Berechnung der Transfermatrix so aus:

$$T = T_{L4} T_{a3} T_{L3} T_{a2} T_{L2} T_{a1} T_{L1} \tag{5}$$

$$\text{T für } L_3 \text{ bei } x_3' \; T \approx \begin{pmatrix} 0.0075\,x_4 - 0.3388 & 30.6137 - 2.9219\,x_4 \\ 0.0565 - 0.0010\,x_4 & 0.4019\,x_4 - 8.0548 \end{pmatrix}$$
$$\text{T für } L_3 \text{ bei } x_3'' \; T' \approx \begin{pmatrix} 0.0156\,x_4' - 0.4693 & 20.5528 - 2.3011\,x_4' \\ 0.0850 - 0.0021\,x_4' & 0.3165\,x_4' - 5.8542 \end{pmatrix}$$

5 Die Matrizen T_{a1}, T_{a2}, T_{a3} beschrieben den Abstand zwischen den Linsen. Dabei ist zu beachten, dass bei T_{a3} die Distanz noch Unbekannt ist, und bei den bekannten Distanzen die Dicken der Linsen subtrahiert werden, um die Distanz zwischen den Linsenoberflächen zu erhalten. Die Matrizen $T_{L1}, T_{L2}, T_{L3}, T_{L4}$ beschrieben die Transfermatrizen der Linsen. Diese wurden nach dem oben erwähnten Prinzip berechnet, wobei für den Brechungsindex a_1 1 verwendet wurde, da in der Aufgabe die Linsen von Luft, für welches n = 1 gilt, umgeben sind. Die Transfermatrix für das System wurde mit einem Matlab Skript berechnet. Die Matrix hat jedoch noch eine Unbekannte, die Distanz zwischen L_3 und L_4. Diese Unbekannte lässt sich nach dem oben genannten Prinzip Berechnen (die Zahl in Zeile 2 und Spalte 1 muss null sein).

Löst man die Gleichung für x_4 und x_4' auf bekommt man die jeweiligen Abstände zur Linse 3. Addiert man nun die Bekannten Abstände und die Linsendicken, kommt man auf das Ergebnis, dass die Linse 4 nur um 0.8 mm verschoben werden muss, damit das System in beiden Positionen scharf abbildet. Dies ist sogleich die Antwort auf die Zweite Frage.
Position der vierten Linse, wenn die Dritte Linse bei x_3' ist: 171.85678476735681279059706955569mm
Position der vierten Linse, wenn die Dritte Linse bei x_3'' ist: 171.01342515747323965389575288258mm

$$T \approx \begin{pmatrix} 0.0718 & -129.2555 \\ 0 & 13.9355 \end{pmatrix}$$
$$T' \approx \begin{pmatrix} 0.1488 & -70.8665 \\ 0 & 6.7207 \end{pmatrix}$$

3 Aufgabe 3 und 4

Da das Linsensystem bei Position x_3'' eine Blende hat, wird die Vergrösserung mit einem Lichtstrahl berechnet, der diese Blende durchquert. Eigentlich sollte die Blende keinen Einfluss auf die Vergrösserung eines Optischen Systems haben, sondern lediglich die Menge des durchquerendes Lichtes beschrieben(Helligkeit).
Um herauszufinden welche Lichtstrahlen die Position $(x_3'', 0)$ durchqueren brauchen wir eine Transfermatrix, die bis zu diesem Punkt geht, also ohne die vierte Linse und deren Abstand zur

dritten Linse. Da das System zwei verschiedene Positionen für die dritte Linse erlaubt, wird für jede Position eine Transfermatrix benötigt.

$$\text{Transfermatrix von } x_1 \text{ bis } x_3'' \text{ für } L_3 \text{ bei } x_3' \; T \approx \begin{pmatrix} -0.2995 & 0.4330 \\ 0.0086 & -3.3512 \end{pmatrix}$$

$$\text{Transfermatrix von } x_1 \text{ bis } x_3'' \text{ für } L_3 \text{ bei } x_3'' \; T \approx \begin{pmatrix} -0.5818 & 31.4878 \\ 0.0017 & -1.2401 \end{pmatrix}$$

3.1 Vergrösserung 1

Entscheidend dafür, ob ein Lichtstrahl durch einen bestimmten Punkt geht, ist das Verhältnis zwischen Abstand und Winkel zur optischen Achse. Mit Hilfe der Transfermatrix von x_1 nach x_3'' und einem Lichtvektor mit Variablen, lässt sich ausrechnen in welchen Verhältnis die beiden Variablen des Lichtvektors sein müssen um die Blende zu durchqueren. Das berechnete Verhältnis ist: $y : \theta \approx 1 : 0.6916$ Mit dem Ermittelten Ergebnis wurde ein Lichtstrahl erstellt, welcher die Blende durchquert. Die Transfermatrix wird nun mit diesem Multipliziert.
Die Vergrösserung eines Optischen Systems lässt sich mit dem Verhältnis vom Einfallswinkel zum Ausfallswinkel berechnen.

$$(T) \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} y_2 \\ v * \theta_1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

6 Lichtvektor multipliziert mit einer Transfermatrix. v stellt hierbei den Vergrösserungsfaktor dar.
Zur Berechnung der Vergrösserung wird ein Lichtvektor mit dem berechneten Verhältnis verwendet. Hierbei wird für den Winkel eine Variable, und für den Offset zur optischen Achse eine Funktion(Verhältnis) des Winkels genommen, da sich der Winkel am Ende wegkürzen lässt. Die Transfermatrix des gesamten Systems wird nun mit diesem Vektor multipliziert. Vom berechneten Vektor wird nun der Wert in der zweiten Spalte durch den Winkel geteilt, und man bekommt das Verhältnis, welches auch die Vergrösserung darstellt.

$$(T) \begin{pmatrix} 1.4459\,\theta_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -129.1517\,\theta_1 \\ 13.9355\,\theta_1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

3.2 Vergrösserung 2

Um die Vergrösserung des Systems zu berechnen wenn die dritte Linse bei der Position x_3'' ist, lässt sich fast gleich wie die vorherige Vergrösserung berechnen. Der einzige unterschied ist die Transfermatrix für die Berechnung eines Lichtstrahles, der durch den Punkt $(x_3'', 0)$ geht. Da sich die Blende an der Position x_3'' befindet, ist sie in diesem Fall in der Mitte der dritten Linse. Dafür wird für die Dritte Linse eine zusätzliche Transfermatrix berechnet, welche die halbe Linse beschreibt. Mit dieser wird dann die Transfermatrix von x_1 bis x_3'' berechnet. Die restlichen schritte sind die selben wie schon für die erste Vergrösserung angewendet wurden.

3.3 Unterschied zum Keplerteleskop

Ein wesentlicher Unterschied, welcher beim berechnen des Systems aufgefallen ist die Vergrösserung. Ein Kepler-Teleskop hat eine Negative Vergrösserung, das heisst, das Bild ist "auf dem Kopf". Bei unserem System ist die Vergrösserung Positiv, also wird das Bild in der gleichen Ausrichtung Projiziert. Dies kann auch mit einem parallel zur optischen Achse einfallenden Strahl gezeigt werden. Dieser verlässt das System wieder auf der Selben Seite, wie er eingefallen ist.

x_4 wenn $x_3 = x_3'$	171.8567847673568127905970695569mm
x_4 wenn $x_3 = x_3''$	171.01342515747323965389575288258mm
Vergrösserung wenn Linse 3 bei x_3'	13.935473269228034340293197061854
Vergrösserung wenn Linse 3 bei x_3''	6.7206696976667773330755532059945
Unterschied zu Kepler-Teleskop	BlaBluBla