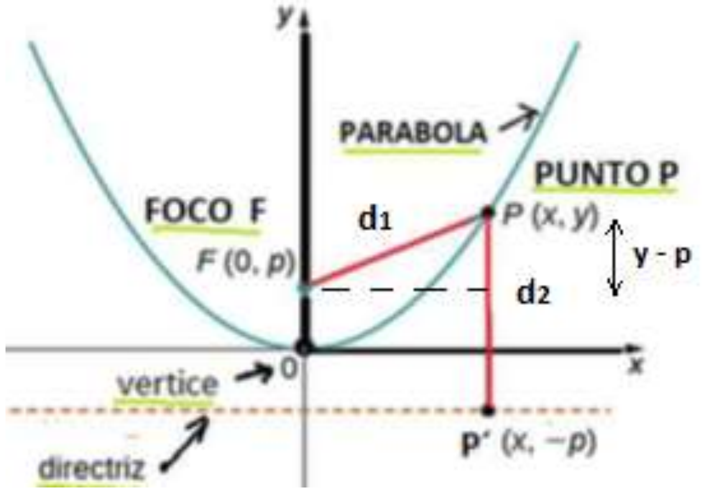
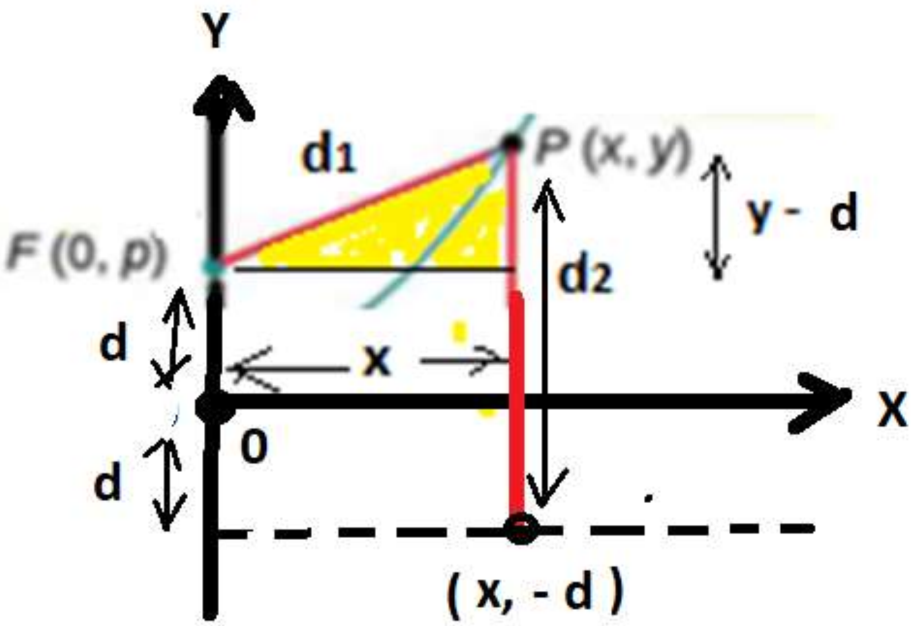
APENDICE 2

(Fórmula Parábola y reflexión)

Recordemos la definición geométrica de la parábola:
La parábola se define como el conjunto de puntos de un plano, equidistantes de un punto fijo del mismo plano (FOCO) y de una recta también del mismo plano (directriz).
Con los ejes elegidos para simplificar la demostración, tenemos lo siguiente:



De esa figura observamos el siguiente triángulo amarillo en que podemos aplicar Pitágoras y calcular la distancia d1.



Tendremos el siguiente desarrollo:

$$d_1 = \sqrt{x^2 + (y - d)^2} \qquad d_2 = y + d$$

Deben ser iguales, y también su cuadrado

$$x^2 + (y - d)^2 = (y + d)^2$$

$$x^2 + \cancel{y^2} - 2yd + \cancel{d^2} = \cancel{y^2} + 2yd + \cancel{d^2}$$

$$x^2 = 4yd$$

O sea : $y = (1/4d).x^2 =$

$$\boxed{y = K.x^2}$$

Y esta es precisamente la ecuación de la parábola en estos ejes. Si aplicamos un desplazamiento horizontal y otro vertical de los ejes coordenados, podemos llegar a la expresión general de la ecuación de segundo grado:

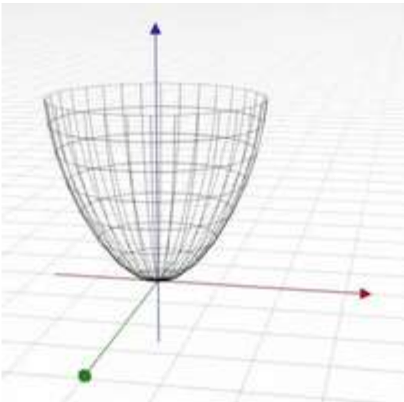
$$y = a x^2 + bx + c$$

En esta ecuación a, b, c son constantes y en otra parte de los apéndices vemos su resolución.

REFLEXION EN PARABOLOIDE

Tratamos este tema, por ser de suma importancia y muy frecuente al revisar los usos y aplicaciones de las cónicas.

DEFINICION DE PARABOLOIDE

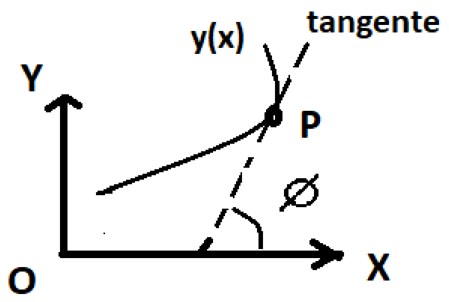


El paraboloide es simplemente una superficie determinada por la rotación de una parábola alrededor de su propio eje.
Nos interesamos en esta superficie, ya que si la misma es reflectora de rayos que inciden sobre la ella, podemos demostrar que **todos los rayos incidentes de dirección paralela al eje del paraboloide, se reflejan de tal forma que todos pasan por el foco** del paraboloide (foco de la parábola giratoria).
El rayo incidente paralelo al eje, siempre tocará a la parábola que gira en alguna de sus posiciones, por lo que podemos considerar un único plano para la reflexión.

Pasaremos a demostrar que todos los rayos incidentes paralelos al eje, al reflejarse pasan por el foco.
Esto es muy importante en muchas aplicaciones .

NOTA: En la demostración utilizamos dos conceptos que no siempre están incluidos en la matemática básica de secundaria.
Siguen tales conceptos.

1) Tangente a una función en un punto de la misma.



$\mathrm{tg}\ \varnothing = dy/dx$

Se ve que el ángulo que forma la recta tangente a la función es tal que su tangente trigonométrica es igual al valor de la derivada de la función:
$\mathrm{tg}\ \Theta = dy/dx$.

La derivada de la función $y=ax^2$ es $dy/dx = 2ax$.

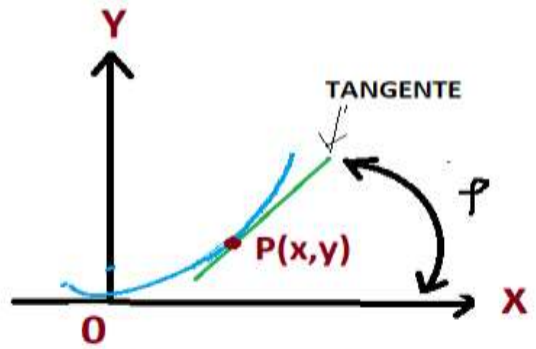
2) Expresión de la tangente de un ángulo 2ϕ

Puede demostrarse por geometría elemental, que se cumple:

$$\mathrm{tg}\,(2\phi) = 2\mathrm{tg}(\phi) / (1 - \mathrm{tg}^2\,\phi)$$

Aplicaremos lo visto al caso de la parábola y los rayos incidentes paralelos a su eje.

Para la demostración, es conveniente poder determinar previamente la **tangente a un punto de la parábola.**

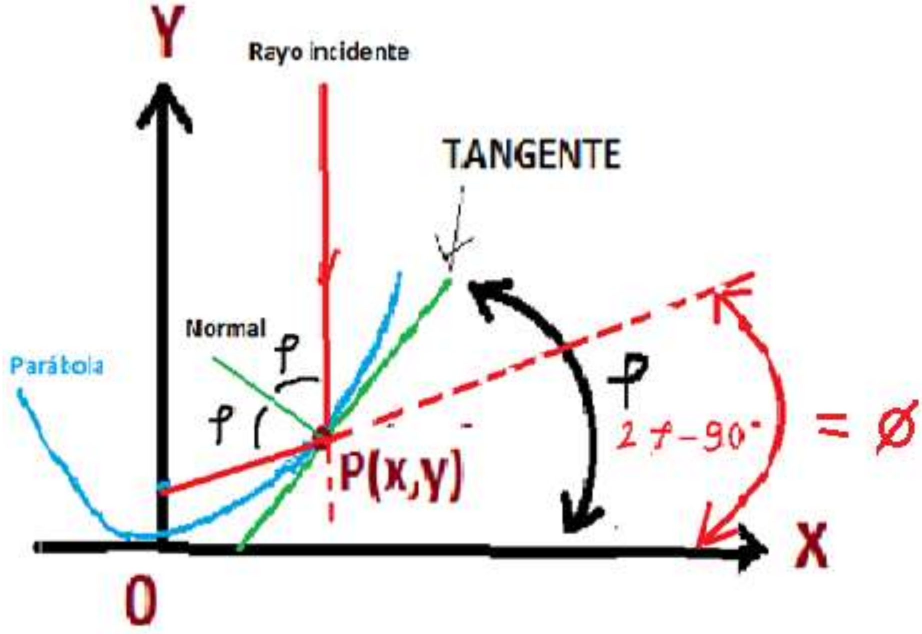


Ec. Parábola: $y = ax^2$

Derivada : $dy = 2\,a\,x\,dx$

Pendiente de la tangente = 2ax
o sea : $\varphi = \mathrm{Artg}(2ax)$

Consideremos la parábola vertical, con el vértice en el centro de coordenadas.
En un punto P cualquiera de la parábola, trazamos la tangente a la misma , que tendrá una inclinación respecto al eje OX igual al ángulo cuya tangente coincide con la derivada de la función que determina la parábola (como vimos antes).
Como vemos en la ilustración: Θ = Artg (dy/dx) =Artg (2ax) .
Trazamos ahora la normal a la parábola en ese punto, y el rayo incidente paralelo al eje de la parábola



Vemos que el rayo reflejado forma un ángulo φ con la normal a la parábola (Ley de Snell de la reflexión).
También vemos en la figura que el rayo reflejado forma un ángulo con OX de 2 φ – 90º. (Complementario de 180-2 φ)

Pero por la propiedad de la derivada, la tangente de este ángulo debe ser igual a la derivada de la función de la parábola.

tg (ϕ) = dy/dx = 2ax (como vimos más arriba)

Vemos que el rayo reflejado forma un ángulo φ con la normal a la parábola (Ley de Snell de la reflexión).
También vemos en la figura que el rayo reflejado forma un ángulo con OX de pendiente Artg 2 φ – 90º.

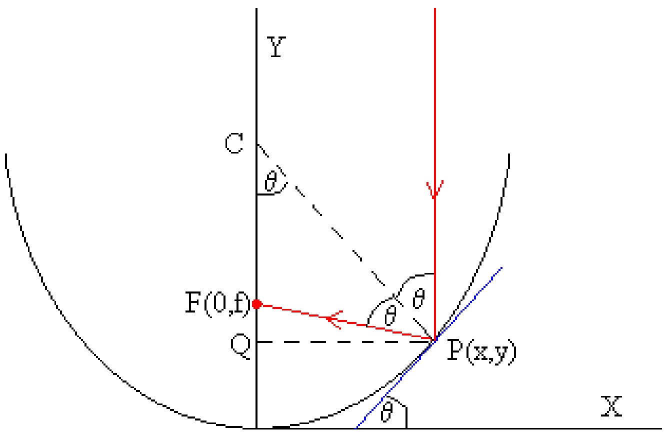
ESPEJO PARABOLICO

En esta página, vamos a mostrar que los rayos de luz que inciden paralelamente al eje de una parábola se reflejan en su superficie y pasan por su foco F.

Consideremos la parábola descrita por la ecuación $\boldsymbol{y=ax^2}$.
La pendiente en cada punto será:

dy/dx=2ax

Veremos que el foco *f* es independiente de *x*. Todos los rayos paralelos al eje Y pasan por el foco F después de reflejarse en el espejo.

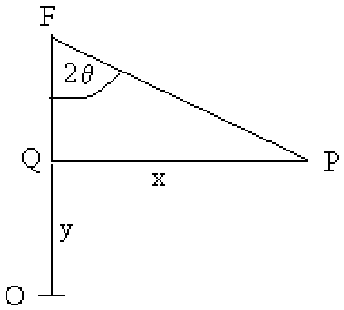


Consideremos la superficie de un espejo descrita por la curva $y(x)$ que es simétrica $y(x)=y(-x)$ siendo el eje Y el eje de simetría. Trazamos un rayo de luz paralelo al eje Y, que corta a la superficie del espejo en el punto P de coordenadas (x,y).

El ángulo de incidencia, formado por el rayo de luz incidente y la normal a la superficie es θ. De acuerdo con la ley de la reflexión, el ángulo formado por el rayo reflejado y la normal es también θ. El rayo reflejado corta al eje Y en el punto $F(0,f)$.

El ángulo θ es el ángulo de la recta tangente a la curva $y(x)$ en el punto P de abscisa x.

tanθ=dy/dx



En el triángulo FPQ, el ángulo QFP es 2θ, por lo que el lado FQ vale $x/\tan(2\theta)$, así pues la posición f es

$$f = y + \frac{x}{\tan(2\theta)}$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$f = y + \frac{x(1-\tan^2\theta)}{2\tan\theta} = y + \frac{x\left(1-(dy/dx)^2\right)}{2(dy/dx)}$$

sustituímos y , dy/dx

$$f = ax^2 + \frac{\cancel{x}\left(1-(2ax)^2\right)}{2(2a\cancel{x})} = \cancel{ax^2} + \frac{1}{4a} - \cancel{ax^2}$$

$$\boxed{f = \frac{1}{4a}}$$

Comprobamos que esa es la posición del foco, porque el vértice V pertenece a la parábola y está a igual distancia de la directriz y del foco.

Ya lo vimos al demostrar la ecuación de la parábola, que su ecuación era :

$$y = (1/4d)\, x^2$$

siendo d la distancia del vértice de la parábola, tanto al foco como a la recta directriz (Ver al principio de este apéndice)-

Vemos, pues, que el punto por el que pasa el rayo reflejado (F) ,es independiente de x , o sea que :

TODOS LOS RAYOS QUE LLEGAN A LA PARABOLA PARALELAMENTE A SU EJE, LUEGO DE REFLEJARSE PASAN POR EL FOCO DE LA MISMA.

Lo mismo sucede con el paraboloide, ya que el eje y el rayo incidente y reflejado están todos en el plano de una única parábola.

Queda así demostrada la propiedad de reflexión de la parábola y del paraboloide.