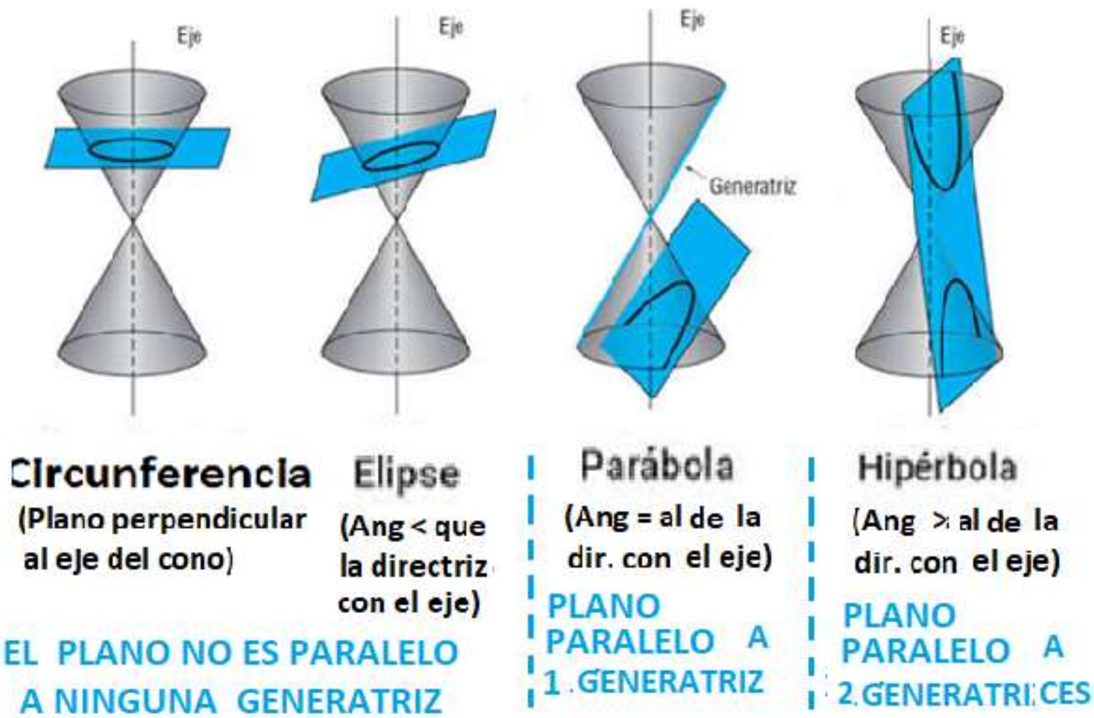
<u>SOBRE ELIPSE , CIRCULO, PARABOLA E HIPERBOLA</u>

(jlfj 12/2025)

<u>CONICAS</u>

Las cónicas son curvas que resultan de la intersección de un plano con un cono doble, y sus tipos principales son la **<u>elipse</u>**, la **<u>parábola</u>** y la **<u>hipérbola</u>**, siendo el **<u>círculo</u>** un caso especial de elipse, cada una definida por el ángulo de inclinación del plano respecto al eje del cono. Estas curvas son fundamentales en matemáticas, física y astronomía, describiendo órbitas planetarias y aplicaciones ópticas.
Gráficamente:



Sobre los nombres de las cónicas (Etimología de los mismos), podemos consultar el Apéndice 9 de este trabajo.

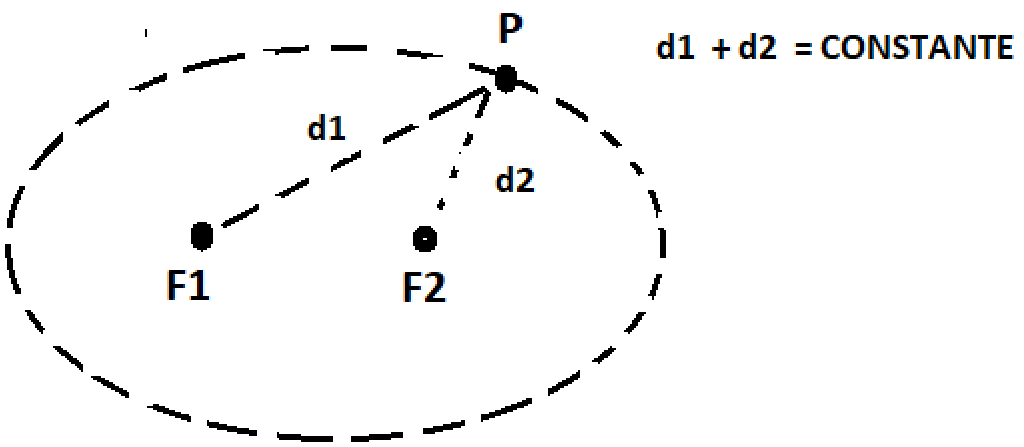
Veremos ahora las definiciones y expresiones algebraicas de dichas curvas.

CIRCUNFERENCIA

Def.:“Es el conjunto de puntos de un plano equidistantes de un punto fijo del mismo (Centro O), y llamamos radio (R) a la distancia de cada punto al centro “
Al estudiar la elipse, veremos que el círculo es un caso especial de elipse.
Resultará la fórmula $\mathbf{x^2 + y^2 = R^2}$

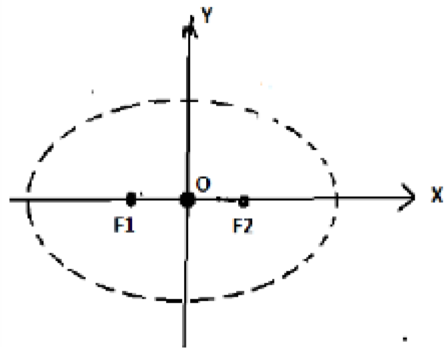
ELIPSE

Def.: “ Es el conjunto de puntos de un plano cuya **suma** de distancias a dos puntos fijos del mismo (FOCOS F1 y F2) es constante y mayor que la distancia entre ellos,”



FORMULA ANALITICA:

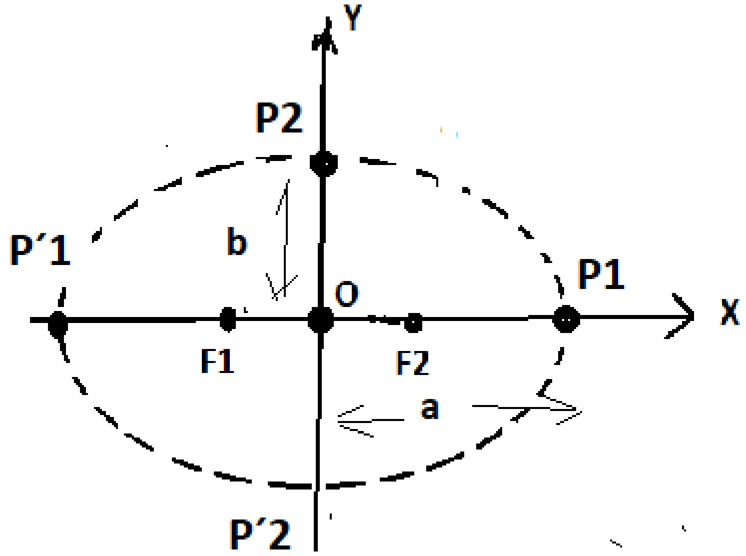
Para evitar expresiones muy complicadas, consideramos los puntos fijos (focos) sobre el eje OX, simétricos respecto al origen de coordenadas cartesianas.



Puede demostrarse que la elipse de la ilustración se describe exactamente mediante la fórmula (ver apéndices de este trabajo):

$$x^2/a^2 \quad + \quad y^2/b^2 = 1$$

Veremos que a y b son los semiejes mayor y menor de la elipse.



Basta hallar los puntos de corte de la función con los ejes, haciendo sucesivamente y=0 y x =0.

Corte con OX (y=0) -> $x^2/a^2 + 0 = 1$

O sea: $x = a$ Y $x = -a$

Idénticamente para el corte con OY:

$0 + y^2/b^2 = 1$ -> y =b e y = - b

Por tanto, el semieje mayor es a y el semieje menor es b.

Aplicando la definición de la elipse al punto P1 vemos que la suma de distancias P1_F1 + P1_F2 = 2 a

(Por simetría P´1_F1 = P1F2)

O sea que la suma de distancias a los focos, para cualquier punto es igual a 2a.

Llamaremos c a la distancia de cada foco al origen de coordenadas.

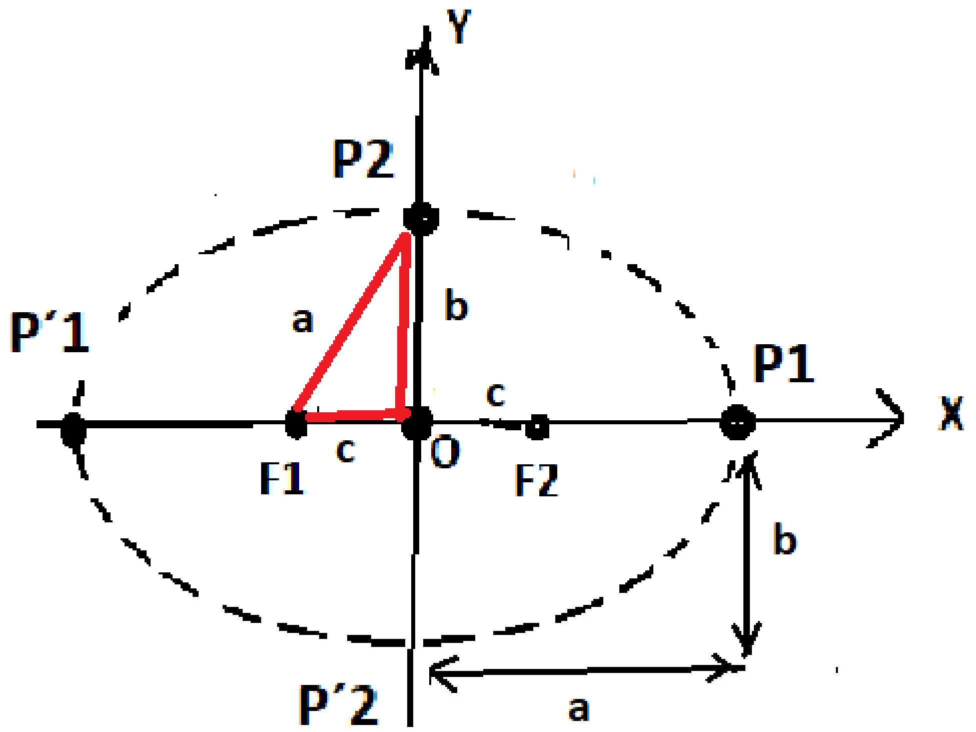
Como P2 pertenece a la elipse, F1_P2 y P2_F2 deben

Sumar 2a; y como por simetría son iguales, cada uno de ellos debe medir a.

Así queda determinado el triángulo P2_F1_O en el que aplicando la relación de Pitágoras obtenemos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

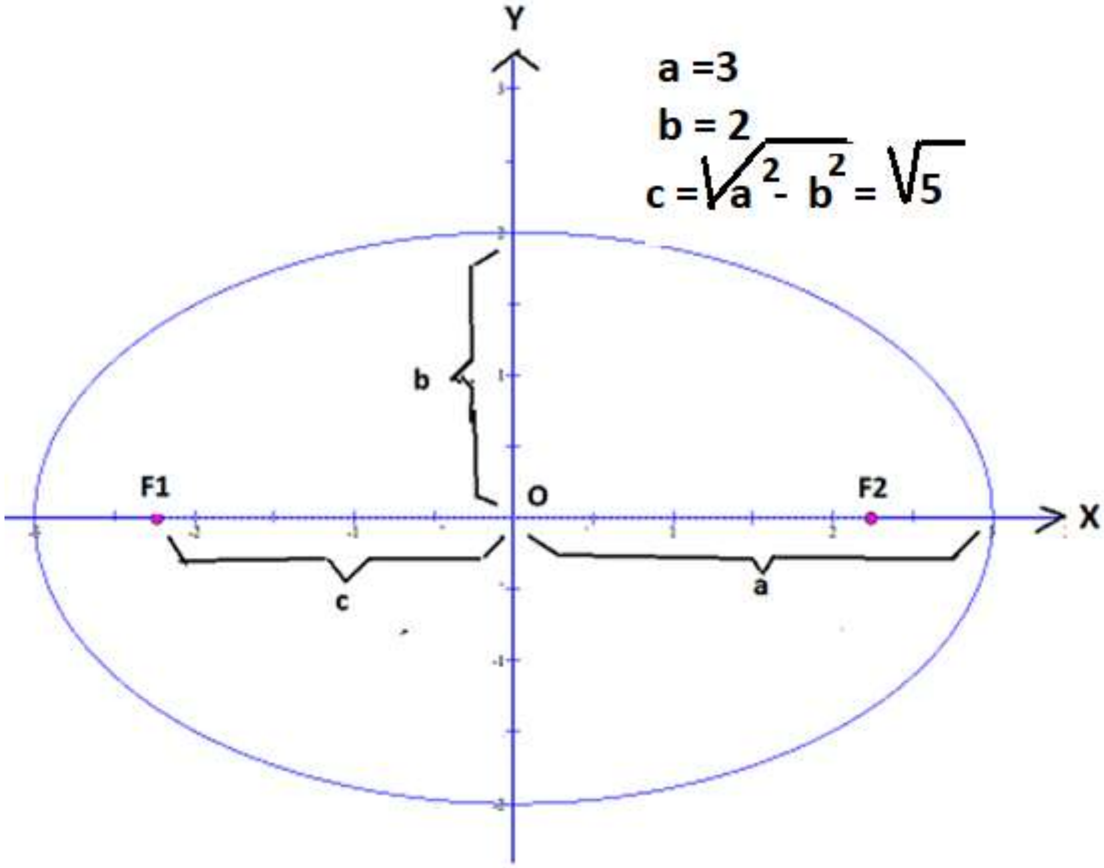
Se deduce: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$



Veremos luego la importancia de dicha relación.

A continuación, un ejemplo de elipse representada gráficamente, con indicación de los parámetros-

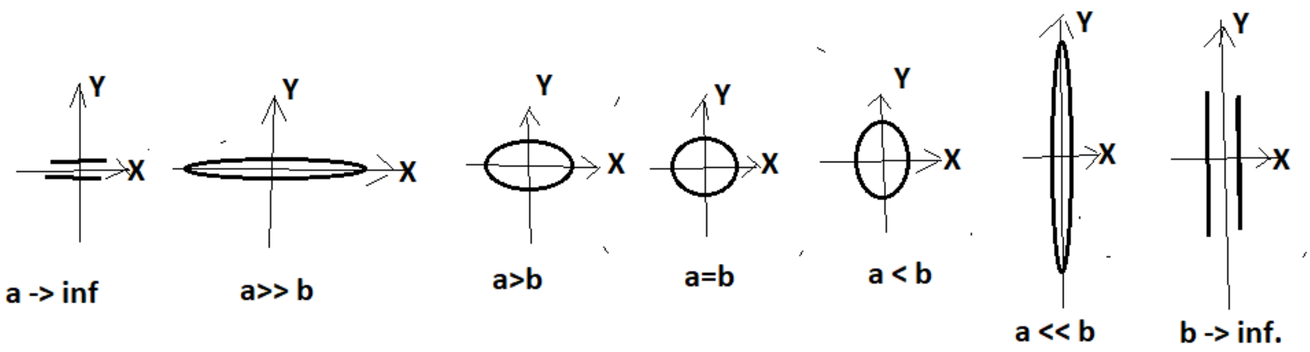
REPRESENTACION GRAFICA DE UNA ELIPSE :



INFLUENCIA DE LOS PARAMETROS

La elipse queda completamente determinada al fijar los valores de las cantidades a y b.
Veamos cómo afectan la forma y orientación de la elipse.
Por lo pronto, si **a = b** tenemos el caso especial de la elipse con c=0 que resulta ser una circunferencia.
Si **a>b** c es positivo y la orientación de la elipse es horizontal, según el eje Ox.
Por lo contrario, si **a<b** se intercambian los ejes y la orientación de la elipse es vertical, según el eje OY.
Si **a>>b** ó **b>>a** la elipse se asemeja cada vez más a dos segmentos paralelos a los ejes (horizontal o vertical)

FORMA DE LA ELIPSE



EXCENTRICIDAD DE LA ELIPSE

Definiremos un parámetro de la elipse que nos dará idea de cuán "achatada" está la elipse, o sea cuánto difiere de la circunferencia.

Lo llamaremos "**excentricidad"** de la elipse y lo definiremos como **e = c/a.**

Con e=0 tendremos que la elipse no difiere de una circunferencia, y con valores mayores diferirá cada vez más de una circunferencia.

Podemos expresar e en función de a y b.

$$e = c/a = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a} = \sqrt{1 - b^2/a^2} \qquad \text{(Para a>b)}$$

o bien :

$$e = \sqrt{1 - a^2/b^2} \qquad \text{(Para a<b)}$$

CAMBIO DE EJES COORDENADOS

Si queremos la ecuación de una elipse en una posición cualquiera de los ejes coordenados, será necesario hacer un cambio de variable x,y a x´y´ con las traslaciones y rotaciones que corresponda.

Por supuesto, la expresión algebraica resultará mucho más compleja.

PARABOLA

Como vimos anteriormente, la parábola es una de las curvas resultantes de seccionar un un cono, con un plano paralelo a una de las generatrices del mismo.

Veremos la expresión algebraica de la parábola y luego la utilización de la misma en la resolución de ecuaciones de segundo grado

DEFINICIÓN

Definimos la parábola como el conjunto de puntos de un plano, equidistantes de un punto fijo del mismo (Llamado **FOCO**) y de una recta también del mismo plano, llamada **DIRECTRIZ.**

ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA

Ver “apéndice” de este trabajo (también para la fórmula general de resolución de ecuación de 2º grado).

La ecuación es: $Y = ax^2 + bx + c$

Excentricidad de la parábola

La **excentricidad de una parábola** es el cociente entre la distancia de un punto de la parábola a un punto fijo (foco) y la distancia perpendicular de dicho punto a una línea fija (directriz), que es igual a uno.

El valor de la excentricidad de una parábola es igual a uno, y se puede obtener utilizando la definición de parábola.

La fórmula para la excentricidad de una sección cónica es c/a, donde c es la distancia del centro al foco y a es la distancia del centro a la directriz. En el caso de una parábola, tenemos c = a, y por lo tanto, la excentricidad de la parábola se convierte en c/a, que es igual a 1.

Se deduce que todas las parábolas tienen igual forma, salvo un factor de escala, lo que nos hace creer que las parábolas son distintas

---

HIPERBOLA

DEFINICIÓN Geométrica:

"Es el conjunto de puntos de un plano cuya **diferencia** de distancias a dos puntos fijos del mismo (FOCOS F1 y F2) es constante y menor que la distancia entre ellos,"