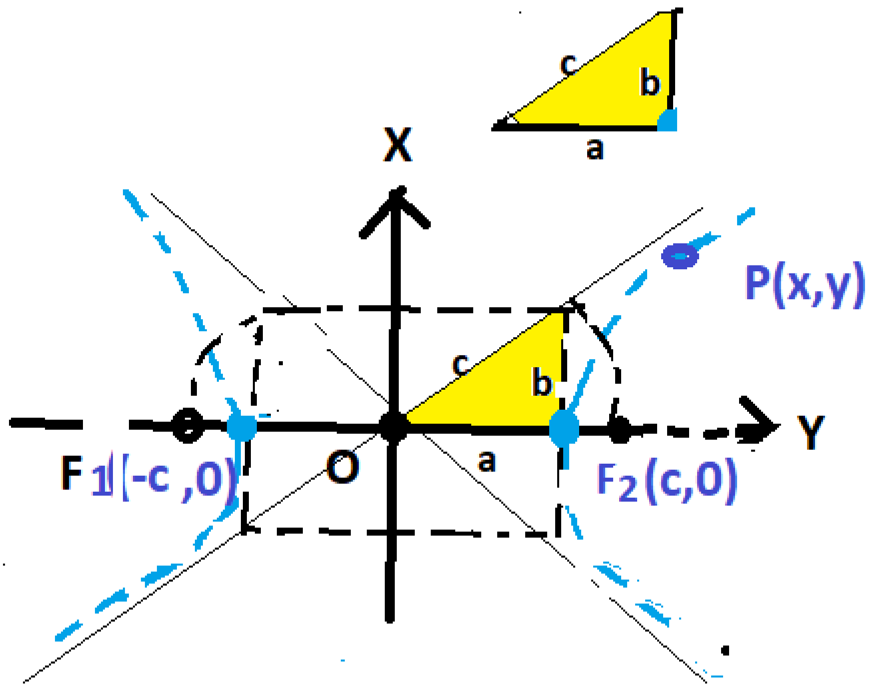
ECUACION DE LA HIPERBOLA

(jlfj 12/2025)

Partimos de un esquema con los ejes coordenados y las variables como queremos que resulte.
Gráficamente:



Las coordenadas de los focos serían c, 0 y -c, 0.

P(x, y) representa un punto cualquiera de la hipérbola.
Por definición de la hipérbola, calcularemos la diferencia de distancias del punto P a los focos, que nos resultará constante e igual a 2a.

Por geometría (Pitágoras, etc.) tenemos:

$$(PF2)^2 = y^2 + (x-c)^2 \qquad (PF1)^2 = y^2 + (x+c)^2$$

$$PF2 = \sqrt{y^2 + (x-c)^2} \qquad PF1 = \sqrt{y^2 + (x+c)^2}$$

$$PF1 - PF2 = \sqrt{y^2 + (x+c)^2} - \sqrt{y^2 + (x-c)^2}$$

Ahora pasaremos a demostrar que esa diferencia es igual a 2a

$$PF1 - PF2 = \sqrt{y^2 + (x+c)^2} - \sqrt{y^2 + (x-c)^2} = 2a$$

Trasponiendo términos y elevando al cuadrado:

$$\sqrt{y^2 + (x+c)^2} = 2a + \sqrt{y^2 + (x-c)^2}$$

$$y^2 + (x+c)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{y^2 + (x-c)^2} + y^2 + (x-c)^2$$

Desarrollando y simplificando:

$$\cancel{y^2} + x^2 + 2xc + c^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{y^2 + (x-c)^2} + \cancel{y^2} + (x-c)^2$$

$$\cancel{x^2} + 2xc + \cancel{c^2} = 4a^2 + 4a\sqrt{y^2 + (x-c)^2} + \cancel{x^2} - 2xc + \cancel{c^2}$$

Trasponiendo y simplificando:

$$\cancel{4}xc = \cancel{4}a^2 + \cancel{4}a\sqrt{y^2 + (x-c)^2}$$

$$(xc - a^2)^2 = a^2\left(y^2 + (x-c)^2\right)$$

$$x^2c^2 - \cancel{2xca^2} + a^4 = a^2y^2 + a^2(x^2 - \cancel{2xc} + c^2)$$

$$\textbf{uso } c^2 = a^2 + b^2$$

$$x^2(\cancel{a^2} + b^2) + \cancel{a^4} = a^2y^2 + \cancel{a^2x^2} + a^2(\cancel{a^2} + b^2)$$

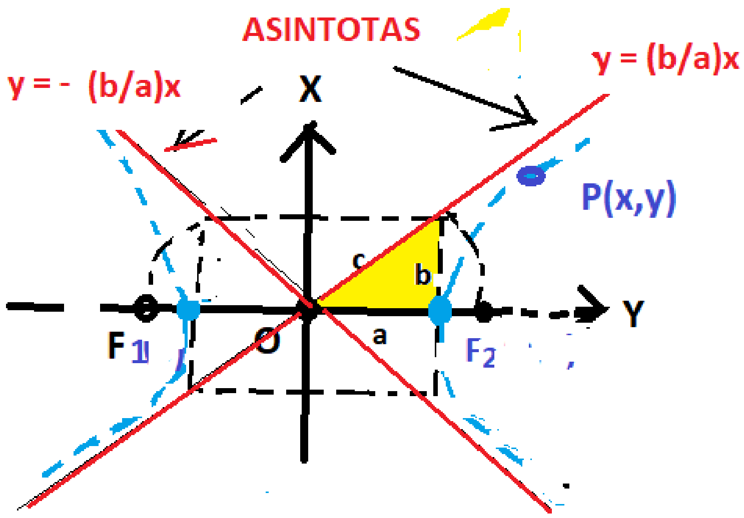
$$x^2b^2 = a^2y^2 + a^2b^2$$

$$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Esta es la ecuación de la hipérbola referida al centro de los ejes coordenados. Cambiar ejes para tener la ecuación general.

Notemos la gráfica de los parámetros:



Si en la fórmula hacemos y=0 (corte con OX) y resolvemos x resulta x = +a y x = - a , lo que confirma la posición de los vértices de la hipérbola.

Veamos ahora la ecuación de las asíntotas.

Son dos rectas que pasan por el orígen y cuyo ángulo respecto al eje OX podemos hallarlo como el límite del ángulo del ángulo cuya tangente es y/x.

Hallemos dicho límite.

tg fi = lim y/x

Por su parte: (de la fórmula) sale :

$x^2/ a^2 = 1 + y^2/b^2$

En el límite, o sea cuando x e y tienden a infinito, podemos despreciar el 1 y resulta:

$$y^2 / x^2 = b^2/a^2$$

Despejando y tenemos las dos soluciones (rectas asíntotas)

y = bx/a y también y = - bx/a

Haciendo x = a ó x = -a nos resulta y = b ó y = -b tal cual muestra la figura.

==