SISTEM PERSAMAAN ALJABAR LINIER

Wisnu Priyo Hutomo, MSi

ILUSTRASI SPL (Sistem Persamaan Aljabar Linier) :

PT. "PINDAD" memproduksi tank dan panser . Tabel produksinya adalah sebagai berikut :

Bagian	Jumlah hari produksi tank	Jumlah hari produksi panser	Total jumlah hari yang terpakai
Manufaktur	4	3	300
Integrasi turret	2	2	200

Buatlah persamaan matematiknya !

Jawab :

Misal : x = tank dan y = panser

Persamaan matematiknya :

$4x + 3y = 300$

$2x + 2y = 200$

Secara umum untuk mencari solusi SPL (Sistem Persamaan Aljabar Linier) dapat digunakan :

I.METODE LANGSUNG :

1.ATURAN CRAMER

2.ELIMINASI GAUSS

3.ELIMINASI GAUSS-JORDAN

4.INVERS MATRIKS

5.DEKOMPOSISI LU (LOWER-UPPER)

II.METODE TIDAK LANGSUNG/ITERASI :

1.ITERASI JACOBI

2.ITERASI GAUSS-SEIDEL

I.5.DEKOMPOSISI LU

Adalah menguraikan matriks koefisien SPL menjadi matriks segitiga bawah dan segitiga atas.

Contoh :

Gunakan dekomposisi LU untuk mencari solusi SPL berikut ini :

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 8 \\ 8x_2 + 2x_3 &= -7 \\ 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 &= 26 \end{aligned}$$

Jawab:

SPL ditulis dalam bentuk notasi matriks: A X = B

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ 26 \end{bmatrix}$$

$$\text{Dekomposisi}: A = L\,U \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

Hasil perkalian ruas kanan = nilai di ruas kiri :

$U_{11} = 3$

$U_{12} = 5$

$U_{13} = 2$

$L_{21} U_{11} = 0 \rightarrow L_{21} = 0$

$L_{21} U_{12} + U_{22} = 8 \rightarrow U_{22} = 8$

$L_{21} U_{13} + U_{23} = 2 \rightarrow U_{23} = 2$

$L_{31} U_{11} = 6 \rightarrow L_{31} = 6/3 = 2$

$L_{31} U_{12} + L_{32} U_{22} = 2 \rightarrow L_{32} = (2 - 10)/8 = -1$

$L_{31} U_{13} + L_{32} U_{23} + U_{33} = 8 \rightarrow U_{33} = 8 - 4 - (-2) = 6$

Sehingga matriks dekomposisinya menjadi :

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Misalkan : L Y = B, maka :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ 26 \end{bmatrix} \rightarrow \text{diperoleh}: Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Misalkan : U X = Y, maka :

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow \text{diperoleh}: X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Jadi solusinya : $x_1 = 4$; $x_2 = -1$; $x_3 = ½$

II.2.ITERASI GAUSS-SEIDEL

Carilah penyelesaian SPL berikut ini menggunakan iterasi Gauss-Seidel , sampai dengan iterasi ke 6 :

$x + 4y + 2z = 15$

5x + y – z = 4

x – 2y + 5z = 12

Dengan pendekatan awal : x = y = z = 0

Jawab :

Ubah susunan persamaan menjadi berbentuk ”diagonal dominan” :

$$5x + y - z = 4 \xrightarrow{\text{koefisien terbesar}: 5x} x = \frac{4 - y + z}{5}$$

$$x + 4y + 2z = 15 \xrightarrow{\text{koefisien terbesar}: 4y} y = \frac{15 - x - 2z}{4}$$

$$x - 2y + 5z = 12 \xrightarrow{\text{koefisien terbesar}: 5z} z = \frac{12 - x + 2y}{5}$$

Iterasi 1:

$$x^1 = \frac{4 - 0 + 0}{5} = 0{,}8$$

$$y^1 = \frac{15 - 0{,}8 - 2(0)}{4} = 3{,}55$$

$$z^1 = \frac{12 - 0{,}8 + 2(3{,}55)}{5} = 3{,}66$$

Iterasi 2:

$$x^2 = \frac{4 - 3{,}55 + 3{,}66}{5} = 0{,}822$$

$$y^2 = \frac{15 - 0{,}822 - 2(3{,}66)}{4} = 1{,}7145$$

$$z^2 = \frac{12 - 0{,}822 + 2(1{,}7145)}{5} = 2{,}9214$$

Iterasi 3:

$$x^3 = \frac{4 - 1{,}7145 + 2{,}9214}{5} = 1{,}04138$$

$$y^3 = \frac{15 - 1{,}04138 - 2(2{,}9214)}{4} = 2{,}028955$$

$$z^3 = \frac{12 - 1{,}04138 + 2(2{,}028955)}{5} = 3{,}003306$$

Iterasi 4:

$$x^4 = \frac{4 - 2{,}028955 + 3{,}003306}{5} = 0{,}99487$$

$$y^4 = \frac{15 - 0{,}99847 - 2(3{,}00336)}{4} = 1{,}999629$$

$$z^4 = \frac{12 - 0{,}99847 + 2(1{,}999629)}{5} = 3{,}000878$$

Iterasi 5:

$$x^5 = \frac{4 - 1{,}999629 + 3{,}000878}{5} = 1{,}00025$$

$$y^5 = \frac{15 - 1{,}00025 - 2(3{,}000878)}{4} = 1{,}999499$$

$$z^5 = \frac{12 - 1{,}00025 + 2(1{,}999499)}{5} = 2{,}99975$$

Iterasi 6:

$$x^6 = \frac{4 - 1{,}999499 + 2{,}99975}{5} = 1{,}00005$$

$$y^6 = \frac{15 - 1{,}00005 - 2(2{,}99975)}{4} = 2{,}0001133$$

$$z^6 = \frac{12 - 1{,}00005 + 2(2{,}000113)}{5} = 2{,}99975$$

X = 1,00005 ≈ 1

Y = 2,0001133 ≈ 2

Z = 2,99975 ≈ 3

Bagaimana dengan Iterasi Jacobi ?
Pada Iterasi Jacobi, iterasi sekarang menggunakan seluruh data iterasi sebelumnya.
Pada iterasi Gauss-Seidel, iterasi sekarang menggunakan data terbaru sekarang juga.

Bagaimana cara menghentikan iterasi ?
1.Mencantumkan jumlah iterasi yg diinginkan pada soal, seperti contoh di atas.
2.Membatasi jumlah desimal yg digunakan.
3.Menetapkan selisih dua iterasi berurutan ≤ bilangan tertentu (ε).
4.Dua iterasi yg berurutan menghasilkan bilangan yg sama.

SOAL UNTU DICOBA SENDIRI :
1.Carilah penyelesaian dari sistem persamaan linier berikut ini menggunakan dekomposisi LU :
$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3$
$3x_1 + 8x_2 + 14x_3 = 13$
$2x_1 + 6x_2 + 13x_3 = 4$

2.Gunakan iterasi Gauss-Seidel sampai dengan iterasi ke 4 untuk mencari solusi dari :
$10x_1 + 2x_2 + x_3 = 13$
$2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13$
$2x_1 + x_2 + 10x_3 = 13$