

SISTEM PERSAMAAN ALJABAR LINIER

Wisnu Priyo Hutomo, MSi

ILUSTRASI SPL (Sistem Persamaan Aljabar Linier) :

PT. "PINDAD" memproduksi tank dan panzer. Tabel produksinya adalah sebagai berikut :

Bagian	Jumlah hari produksi tank	Jumlah hari produksi panzer	Total jumlah hari yang terpakai
Manufaktur	4	3	300
Integrasi turret	2	2	200

Buatlah persamaan matematikanya !

Jawab :

Misal : x = tank dan y = panzer

Persamaan matematikanya :

$$4x + 3y = 300$$

$$2x + 2y = 200$$

Secara umum untuk mencari solusi SPL (Sistem Persamaan Aljabar Linier) dapat digunakan :

I. METODE LANGSUNG :

1. ATURAN CRAMER

2. ELIMINASI GAUSS

3. ELIMINASI GAUSS-JORDAN

4. INVERS MATRIKS

5. DEKOMPOSISI LU (LOWER-UPPER)

II. METODE TIDAK LANGSUNG/ITERASI :

1. ITERASI JACOBI

2. ITERASI GAUSS-SEIDEL

I.1. ATURAN CRAMER

Contoh soal :

Carilah penyelesaian SPL (Sistem Persamaan Linier) berikut dg aturan Cramer :

$$2X_1 + X_2 - X_3 = 2$$

$$X_1 - X_2 + X_3 = 1$$

$$-X_1 + 2X_2 - X_3 = 3$$

Jawab : bentuk matriksnya:

$$A X = B$$

A = matriks koefisien

X = matriks variabel

B = Matriks suku tetap (ruas kanan)

B = 0 → disebut SPL homogen

B ≠ 0 → disebut SPL non homogen

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \{ (2)(-1)(-1) + (1)(1)(-1) + (-1)(2)(1) \} - \{ (-1)(-1)(-1) + (1)(1)(-1) + (2)(2)(1) \} = -3$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \{ (2)(-1)(-1) + (1)(1)(3) + (-1)(2)(1) \} - \{ (-1)(-1)(3) + (1)(1)(-1) + (2)(2)(1) \} = -3$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \{ (2)(1)(-1) + (2)(1)(-1) + (-1)(3)(1) \} - \{ (-1)(1)(-1) + (2)(1)(-1) + (2)(3)(1) \} = -12$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-12}{-3} = 4$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \{ (2)(-1)(3) + (1)(1)(-1) + (2)(2)(1) \} - \{ (2)(-1)(-1) + (1)(1)(3) + (2)(2)(1) \} = -12$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-12}{-3} = 4$$

1.2.ELIMINASI GAUSS

Mengubah matriks lengkap menjadi matriks segitiga atas atau segitiga bawah.

Contoh soal :

Carilah solusi dari SPL berikut ini menggunakan eliminasi Gauss:

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 16$$

Jawab: notasi matriksnya: $A X = B$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 10 \\ 16 \end{bmatrix} \rightarrow \text{matriks lengkapnya:}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 16 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & 3 & 16 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{b_2 - \frac{3}{2}b_1 \\ b_3 - \frac{1}{2}b_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 16 \\ 0 & 1/2 & -5 & -14 \\ 0 & 5/2 & 1 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow{b_3 - 5b_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 16 \\ 0 & 1/2 & -5 & -14 \\ 0 & 0 & 26 & 78 \end{array} \right]$$

Jadi solusinya :

$$26x_3 = 78 \rightarrow x_3 = 78/26 = 3$$

$$\frac{1}{2}x_2 - 5x_3 = -14 \rightarrow \frac{1}{2}x_2 - 5(3) = -14 \rightarrow x_2 = 2$$

$$2x_1 + 2 + 4(3) = 16 \rightarrow x_1 = 1$$

I.3.ELIMINASI GAUSS-JORDAN

Mengubah matriks lengkap menjadi matriks identitas.

Contoh 1 : dari contoh eliminasi Gauss di atas, maka (tinggal melanjutkan) :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 16 \\ 0 & 1/2 & -5 & -14 \\ 0 & 0 & 26 & 78 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{b_2(2) \\ b_3(1/26)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 16 \\ 0 & 1 & -10 & -28 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{b_1 - 4b_3 \\ b_2 + 10b_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{b_1 - b_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{b_1(1/2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Jadi solusinya : $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$

Contoh 2 :

Selesaikan SPL berikut ini menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan :

$$2x_1 + x_2 + 2x_4 = 12$$

$$-2x_1 + x_3 - x_4 = -3$$

$$x_2 + x_3 - x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_4 = 9$$

Jawab : notasi matriksnya : $A X = B$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -3 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix} \rightarrow \text{matriks lengkapnya:}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & | & 12 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & | & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & | & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{b_{41} \\ b_{32}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & | & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & | & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{b_3+2b_1 \\ b_4-2b_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & | & 15 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & | & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{b_2-b_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & | & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & | & 15 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & | & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{b_4-b_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & | & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & | & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{b_4(1/2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & | & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & | & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{b_1-2b_4 \\ b_2+4b_4 \\ b_3-3b_4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Jadi solusinya : } x_1 = 1 ; x_2 = 2 ; x_3 = 3 ; x_4 = 4$$

I.4.INVERS MATRIKS

$$A X = B$$

$$A^{-1} A X = A^{-1} B \rightarrow \text{Jadi : } X = A^{-1} B$$

Contoh :

Dari ilustrasi produksi tank dan panser PT."PINDAD", hitung komposisi produksinya.

Jawab:

$$4x + 3y = 300$$

$$2x + 2y = 200$$

Notasi matriksnya:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \end{bmatrix} \rightarrow A X = B \rightarrow \text{Sehingga } |A| = (4)(2) - (3)(2) = 8 - 6 = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3/2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} B = \begin{bmatrix} 1 & -3/2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 - 300 \\ -300 + 400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Jadi: Banyaknya tank yg diproduksi: x = 0 unit.

Banyaknya panser yg diproduksi: y = 100 unit.

SOAL –SOAL UNTUK DIKERJAKAN SENDIRI :

1. Diketahui sistem persamaan linier :

$$5a + 2b + c = 1$$

$$3a - b + c = 8$$

$$7a - 2b + 2c = 2$$

Tentukan nilai a, b dan c yang memenuhi menggunakan eliminasi Gauss.

2. Diberikan sistem persamaan linier :

$$-3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = -4$$

$$x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 4$$

Tentukan solusi dari sistem persamaan linier di atas menggunakan eliminasi Gauss-Jordan.

3. Carilah penyelesaian sistem persamaan linier berikut ini menggunakan aturan Cramer :

$$X_1 + X_2 + 2X_3 = 8$$

$$-X_1 - 2X_2 + 3X_3 = 1$$

$$3X_1 - 7X_2 - 4X_3 = 10$$