NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

Wisnu Priyo Hutomo, MSi

Jika suatu matriks bujur sangkar A yang tidak singular dioperasikan terhadap suatu $\text{vektor}\,\overline{\text{X}}$ di ruang vektor R^n, dan menghasilkan suatu nilai skalar tertentu (λ), maka $\text{vektor}\,\overline{\text{X}}$ tersebut dinamakan sebagai vektor eigen, dan skalar (λ) yang dihasilkan dinamakan sebagai nilai eigen.

Operasi tersebut secara matematis dituliskan :

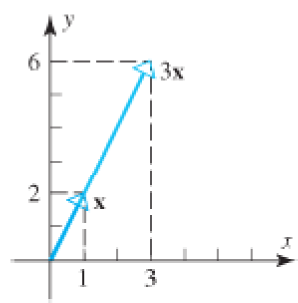
$$\text{A}\overline{\text{X}} = \lambda\overline{\text{X}}$$

Misalkan matriks $\text{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ dioperasikan terhadap vektor $\overline{\text{X}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, maka ditulis :

$$\text{A}\overline{\text{X}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3\overline{\text{X}}$$

Jadi skalar yang dihasilkan : λ = 3.   Apa artinya ?

Secara geometri, artinya vektor X memanjang 3 kali lipat, seperti gambar dibawah ini :



Contoh :

Diketahui matriks : $\text{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

Tentukan :

a.Persamaan karakteristik.

b.Nilai eigen.

c.Vektor eigen.

Jawab:

$$\begin{array}{lll} \text{Persamaan} & : & \text{A}\overline{\text{X}} = \lambda\overline{\text{X}} \\ \text{Dapat ditulis} & : & \text{A}\overline{\text{X}} = \lambda\text{I}\overline{\text{X}} \\ \text{Bentuk implisitnya} & : & \lambda\text{I}\overline{\text{X}} - \text{A}\overline{\text{X}} = 0 \\ \text{Atau} & : & (\lambda\text{I} - \text{A})\overline{\text{X}} = 0 \end{array}$$

Ruas kanan nol disebut SPL homogen yang syarat penyelesaiannya adalah : $\det(\lambda\text{I} - \text{A}) = 0.$

$$(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}) = \lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3 & 0\\ 8 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda - 3 & 0\\ -8 & \lambda + 1\end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}) = 0$$

$$\begin{vmatrix}\lambda - 3 & 0\\ -8 & \lambda + 1\end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

a. Persamaan karakteristik : $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$

b. Nilain eigen : $\lambda_1 = 3$ dan $\lambda_2 = -1.$

c. Vektor eigen $(\overline{\mathrm{X}})$:

Untuk: $\lambda_1 = 3 \rightarrow (\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})\overline{\mathrm{X}} = \begin{pmatrix}3-3 & 0\\ -8 & 3+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{X}_1\\ \mathrm{X}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \rightarrow -8\mathrm{X}_1 + 4\mathrm{X}_2 = 0 \rightarrow \mathrm{X}_2 = 2\mathrm{X}_1$

Jadi : $\overline{\mathrm{X}} = \begin{pmatrix}\mathrm{X}_1\\ \mathrm{X}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{X}_1\\ 2\mathrm{X}_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}\mathrm{X}_2 \approx \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$

Untuk: $\lambda_2 = -1 \rightarrow (\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})\overline{\mathrm{X}} = \begin{pmatrix}-1-3 & 0\\ -8 & -1+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{X}_1\\ \mathrm{X}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \rightarrow -4\mathrm{X}_1 = 0 \rightarrow \mathrm{X}_1 = 0$

Jadi : $\overline{\mathrm{X}} = \begin{pmatrix}\mathrm{X}_1\\ \mathrm{X}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \mathrm{X}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\mathrm{X}_2 \approx \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$

SOAL UNTUK DICOBA SENDIRI :

1. Diketahui matriks : $\mathrm{A} = \begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$, carilah :

   a. Persamaan eigen.

   b. Eigenvalue .

   c. Eigenvector.

2. Tentukanlah persamaan karakteristik, nilai karakteristik dan vektor karakteristik dari matriks :

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix}7 & -4\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$