DETERMINAN SUATU MATRIKS

Wisnu Priyo Hutomo, MSi

Determinan matriks A : | A | = jumlah semua perkalian elementer matriks A.
Matriks yang dapat dihitung determinannya harus merupakan matriks bujur sangkar.
Matriks yang determinannya = 0, disebut matriks singular.

1.DETERMINAN MATRIKS ORDE DUA

$$\text{Contoh: Hitunglah determinan dari matriks: } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Jawab: } |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \text{biru - merah} = (1)(4) - (-2)(3) = 10$$

BEBERAPA SIFAT DETERMINAN

1.Jika salah satu baris/kolom dikalikan bilangan k, maka nilai determinannya juga dikalikan k.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = (1)(4) - (2)(3) = 4 - 6 = -2$$

Baris 1 dikalikan 2, maka :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = (2)(4) - (4)(3) = 8 - 12 = -4$$

2.Tiap kali terjadi pertukaran baris/kolom, nilai determinannya dikalikan dengan (-).

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = (3)(5) - (2)(4) = 15 - 8 = 7$$

Baris 1 ditukar dengan baris 2, maka :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = (4)(2) - (5)(3) = 8 - 15 = -7$$

3.Jika terdapat baris/kolom yang seluruh elemennya nol, maka nilai determinannya = 0.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = (5)(0) - (3)(0) = 0$$

4.Nilai determinan tidak berubah, jika salah satu baris/kolom ditambah dengan perkalian suatu bilangan k dengan baris/kolom lainnya.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = (2)(4) - (3)(1) = 8 - 3 = 5$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{b_2 + 2b_1} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = (2)(10) - (3)(5) = 20 - 15 = 5$$

2.DETERMINAN MATRIKS ORDE TIGA

Khusus orde tiga digunakan Aturan Sarrus.

$$\text{Contoh : Hitunglah determinan dari matriks : } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Jawab :

$$\left|\begin{matrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 3 & -6 \\ 2 & 6 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} |A| &= \{\text{biru}\} - \{\text{merah}\} \\ &= \{(0)(-6)(1) + (1)(9)(2) + (5)(3)(6)\} - \{(5)(-6)(2) + (0)(9)(6) + (1)(3)(1)\} \\ &= \{0 + 18 + 90\} - \{-60 + 0 + 3\} = 108 + 57 = 165 \end{aligned}$$

3.DETERMINAN MATRIKS ORDE EMPAT KEATAS

a.MENGGUNAKAN SIFAT-SIFAT

Dengan menggunakan OBE (Operasi Baris Elementer) matriksnya diubah menjadi matriks segitiga atas/bawah, kemudian seluruh elemen diagonal utama dikalikan.

$$\text{Contoh : Hitunglah determinan dari matriks : } A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Jawab:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{b_{12}} (-)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{b_2-3b_1 \\ b_3-2b_1 \\ b_4-3b_1}} (-)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{b_4+1b_2}$$

$$(-)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{b_4-3b_3} (-)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (-)(1)(-1)(3)(-6) = -18$$

Cara ini juga dapat diterapkan pada matriks ordo tiga maupun ordo dua, sbb. :

Ordo tiga :

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{b_{12}} = -\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{b_3-2b_1} = -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow{b_3-10b_2}$$

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix} = (-3)(-55)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-3)(-55)(1) = 165$$

Ordo dua :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{b_2-3b_1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = (1)(10) = 10$$

b.EKSPANSI LAPLACE/KOFAKTOR

Pilih baris/kolom yg angkanya paling kecil.

Dari contoh pada poin a diatas kita ekspansi baris 2 :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Gunakan rumus}: |A| = \sum (-1)^{i+j}\, M_{ij}$$

$$|A| = (-1)\begin{vmatrix} 5 & -2 & 6 \\ 4 & 1 & 5 \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} + (2)\begin{vmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 3 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(-78) + (2)(-42) + (1)(-12) + (1)(0) = 78 - 96 = -18$$

c.METODE CHIO

Syarat : $a_{11} \neq 0$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \frac{1}{(a_{11})^{n-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(3)^{4-2}} \begin{vmatrix} (3)(2)-(5)(1) & (3)(-1)-(-2)(1) & (3)(1)-(6)(1) \\ (3)(4)-(5)(2) & (3)(1)-(-2)(2) & (3)(5)-(6)(2) \\ (3)(7)-(5)(3) & (3)(5)-(-2)(3) & (3)(3)-(6)(3) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(3)^2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 7 & 3 \\ 6 & 21 & -9 \end{vmatrix} = \frac{1}{9} \left[\frac{1}{(1)^{3-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 21 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{9} \left[\frac{1}{1} \begin{vmatrix} (1)(7)-(-1)(2) & (1)(3)-(-3)(2) \\ (1)(21)-(-1)(6) & (1)(-9)-(-3)(6) \end{vmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{9} \begin{vmatrix} 9 & 9 \\ 27 & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{9}\{(9)(9)-(9)(27)\} = \frac{1}{9}\{81-243\} = \frac{1}{9}\{-162\} = -18$$

Soal-soal untuk dicoba sendiri :

1. Diketahui matriks : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & x \\ 4 & x & 4 \end{bmatrix}$

Jika A adalah matriks singular, berapakah nilai x yg mungkin ?

2. Carilah determinan matriks berikut ini :

$$D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

3. Hitunglah determinan dari matriks : $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$