

OPERASI ALJABAR MATRIKS

Wisnu Priyo Hutomo, MSi

ILUSTRASI PENGGUNAAN MATRIKS :

Gugus tempur laut yang terdiri dari KRI RE Martadinata (sebagai Flagship), KRI Usman Harun, KRI Sultan Iskandar Muda, KRI Nagapasa, KRI Banda Aceh, mendapat tugas operasi khusus ke Marawi. Lewat tengah malam, komandan operasi yang berada diatas flagship menerima perintah dari Mabes TNI dalam bentuk pesan sandi (chipertext) sbb. :

$$E \text{ (Enkripsi)} = \begin{bmatrix} 14 & 5 & 5 \\ -10 & 3 & 12 \\ -5 & 1 & 10 \\ -11 & 5 & -7 \\ 4 & -12 & 9 \end{bmatrix}$$

Komandan operasi mengubahnya menjadi pesan asli (plaintext) menggunakan kunci :

$$K \text{ (Key)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Caranya adalah mengalikan matriks E dengan matriks K, yaitu :

$$D \text{ (Dekripsi)} = \begin{bmatrix} 14 & 5 & 5 \\ -10 & 3 & 12 \\ -5 & 1 & 10 \\ -11 & 5 & -7 \\ 4 & -12 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 5 & 47 \\ 2 & 21 & -27 \\ 5 & 19 & -14 \\ -18 & -19 & -28 \\ 13 & 30 & 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian digunakan modulus 29, yaitu : angka > 29 dikurangi 29, sedangkan angka negatif ditambah 29. Sehingga diperoleh hasil akhir :

$$D \text{ (Dekripsi)} = \begin{bmatrix} 19 & 5 & 18 \\ 2 & 21 & 2 \\ 5 & 19 & 15 \\ 11 & 10 & 1 \\ 13 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Apa bunyi perintah dari Mabes TNI tersebut ?

Catatan :

Digunakan modulus 29

DEKRIPSI : $P = D(C) = C K$

ENKRIPSI : $C = E(P) = P K^{-1}$

DEFINISI MATRIKS :

Adalah bilangan-bilangan yang disusun menurut baris dan kolom sehingga berbentuk segi empat/bujur sangkar, dan diletakkan diantara dua tanda kurung, kemudian diberi simbol dengan huruf besar.

BENTUK UMUM MATRIKS :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Dimana :

a_{ij} = elemen baris ke-i dan kolom ke-j

m = jumlah baris suatu matriks

n = jumlah kolom suatu matriks

m x n disebut sebagai **ordo** (ukuran) dari suatu matriks.

KESAMAAN MATRIKS

Matriks A disebut sama dengan matriks B, jika :

1. Ordonya sama.
2. Elemen yang seletak sama.

Contoh :

Diketahui matriks :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & x \\ 5 & 7 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} ; C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

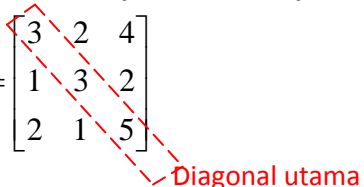
Maka :

1. Jika $x = 3$, maka matriks $A =$ matriks B .
2. Jika $x \neq 3$, maka matriks $A \neq$ matriks B .
3. Untuk nilai x berapapun juga, maka matriks $A \neq$ matriks B .

MATRIKS BUJUR SANGKAR

Adalah matriks, dimana jumlah baris = jumlah kolom.

Contoh : $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$



TRACE SUATU MATRIKS

Adalah jumlah seluruh elemen diagonal utama suatu matriks bujur sangkar.

$$\text{Contoh : } A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ 7 & -8 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Trace}(A) = 3 + 1 + 4 + 7 = 15$$

MATRIKS SEGITIGA ATAS

Adalah matriks bujur sangkar, dimana seluruh elemen di bawah diagonal utamanya harus nol, sedangkan elemen yang lain boleh ada yang tidak nol.

$$\text{Contoh : } A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

MATRIKS SEGITIGA BAWAH

Adalah matriks bujur sangkar, dimana seluruh elemen di atas diagonal utamanya harus nol, sedangkan elemen yang lain boleh ada yang tidak nol.

$$\text{Contoh : } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

MATRIKS DIAGONAL

Adalah matriks segitiga atas sekaligus segitiga bawah.

$$\text{Contoh : } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

MATRIKS IDENTITAS (I)

Adalah matriks bujur sangkar yang seluruh elemen diagonal utamanya harus = 1, sedangkan yang lainnya harus nol.

$$\text{Contoh : } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRIKS TRANSPOSE (A^T)

Adalah matriks yang seluruh barisnya diubah menjadi kolom.

$$\text{Contoh : } A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{maka}} A^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

OPERASI ALJABAR MATRIKS

1. OPERASI PENJUMLAHAN DAN PENGURANGAN

Syarat : ordonya harus sama.

Contoh : diketahui matriks A, B dan C sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Karena A dan B ordonya sama, maka bisa dilakukan operasi penjumlahan maupun pengurangan sbb.:

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad A - B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -5 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 11 & -5 \end{bmatrix}$$

Sedangkan C ordonya tidak sama dengan A maupun B, sehingga tidak bisa dilakukan operasi penjumlahan maupun pengurangan.

2. OPERASI PERKALIAN DENGAN BILANGAN SKALAR

Contoh : diketahui matriks A, B dan C sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Maka :

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}, \quad (-1)B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{3}C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

3. OPERASI PERKALIAN

Secara umum dapat dituliskan :

$$\mathbf{A_{p \times q} \cdot B_{q \times s} = C_{p \times s}}$$

Contoh : diketahui matriks A dan B sbb. :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Hitunglah : $C = AB$

Jawab :

$$A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 4} = C_{2 \times 4}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1k_1 & b_1k_2 & b_1k_3 & b_1k_4 \\ b_2k_1 & b_2k_2 & b_2k_3 & b_2k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

Bagaimana jika : $B_{3 \times 4} A_{2 \times 3} = ?$ tidak memenuhi syarat perkalian, tidak terdefinisi. Jadi tidak komutatif.

4. OPERASI GABUNGAN (CAMPURAN)

Contoh 1 :

$$\text{Jika diketahui : } P = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix} ; Q = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} ; R = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Hitunglah : a. $3P + 2(QR)^T$

$$\text{b. } 3R^2 - R^{-2} + 2I$$

Jawab :

$$\text{a. } 3 \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} + 2 \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \right\}^T = \begin{bmatrix} 3 & 12 & 6 \\ 9 & 15 & 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 35 & -10 \\ -14 & 5 \end{bmatrix}^T =$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 12 & 6 \\ 9 & 15 & 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 & 35 & -14 \\ 0 & -10 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 12 & 6 \\ 9 & 15 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 70 & -28 \\ 0 & -20 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 82 & -22 \\ 9 & -5 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\text{b. } 3 \left\{ \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \right\} - \left\{ \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \right\}^2 + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 55 & -16 \\ -24 & 7 \end{bmatrix} - \left\{ \frac{1}{7-6} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \right\}^2 + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 165 & -48 \\ -72 & 21 \end{bmatrix} - \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 165 & -48 \\ -72 & 21 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 16 \\ 24 & 55 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 160 & -64 \\ -96 & -32 \end{bmatrix}$$

Contoh 2 :

$$\text{Diketahui : } M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \text{ dan } f(x) = 2x^3 - 4x + 5$$

Hitunglah : $f(M) = ?$

$$\begin{aligned}
 \text{Jawab: } f(M) &= 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= 2 \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 16 & -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\
 &= 2 \begin{bmatrix} -7 & 30 \\ 60 & -67 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 16 & -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -14 & 60 \\ 120 & -134 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 16 & -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -13 & 52 \\ 104 & -117 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

SOAL UNTUK DICoba SENDIRI

Diketahui matriks :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hitunglah :

a. $A^2 - 3B + 2I$

b. $(3A - B)(2B - A)$