武汉大学 2015 – 2016 学年第一学期期末考试

数学与统计学院　信息与计算科学、数学与应用数学等专业

《离散数学》 试题 (A 卷)

注意事项:

(1) 本试卷共 12 道试题, 满分 100 分, 考试时间 120 分钟.

(2) 请将答案全部写在**武汉大学试卷纸**上, 写在其他位置无效.

一、集合论 (本题满分 25 分)

1. (9 分) 设 $\mathbb{N}$ 是自然数集, 定义 $\mathbb{N}$ 上的二元关系 $R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{N} \wedge x + y \text{ 是偶数}\}$.
   (1) 证明 R 是一个等价关系;
   (2) 求商集 $\mathbb{N}/R$.

2. (10 分) 设 $A = \{a, b, c, d\}$, A 上的二元关系 R_1 和 R_2 定义如下:
$$R_1 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, a\rangle\},$$
$$R_2 = I_A \cup \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, c\rangle\}.$$
   其中 I_A 是 A 上的恒等关系.
   (1) 试分别指出 R_1 和 R_2 所具有的性质 (即是否具有自反性, 反自反性, 对称性, 反对称性和传递性);
   (2) 试求出 R_1^2, R_2^2, $R_1 \circ R_2$, R_1^+ 和 R_2^+ (传递闭包).

3. (6 分) 从 1, 2, 3, $\cdots$, 100 这 100 个数中任意挑出 51 个数. 用抽屉原理证明: 在这 51 个数中, 一定有: (1) 2 个数互质; (2) 2 个数的差为 50.

二、代数结构 (本题满分 25 分)

4. (9 分) 设 $G = \{1, -1, i, -i\}$, 其中 $i \times i = -1$, 运算 $\times$ 是普通乘法. 证明 $\langle G, \times\rangle$ 是循环群.

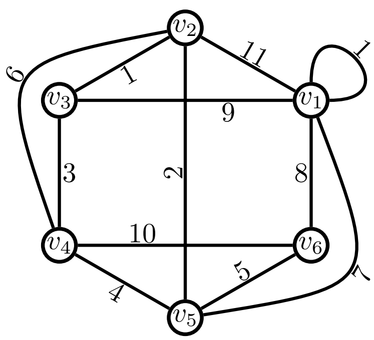
5. (9 分) 设 $V = \langle \mathscr{P}(B), \cap\rangle$ 是代数系统, B 是集合, 试判断 V 是否为半群、独异点、群? 为什么? 并求 $\mathscr{P}(B)$ 中的任意元素 x 的 n 次幂 ($n \in \mathbb{N}$).

6. (7 分) 列举你所知道的各种类型的格, 并画图表示它们之间的关系.

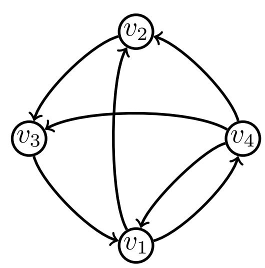
三、图论 (本题满分 25 分)

7. (8 分) 设有 a, b, c, d, e, f, g 七个人, 已知 a 会讲英语; b 会讲英语、汉语; c 会讲英、俄语; d 会讲日、汉语; e 会讲德语、俄语; f 会讲法语、日语; g 会讲法语、德语. 试用图论方法安排圆桌座位, 使每人都能与其身边的人交谈.

8. (8 分) 设有 6 个村庄 $v_i, i=1,2,\cdots,6$, 欲修建道路使村村可通. 现已有修建方案如下带权无向图所示, 其中边表示道路, 边上的数字表示修建该道路所需费用, 问应选择修建哪些道路可使得任意两个村庄之间是可达的且总的修建费用最低? 要求写出求解过程, 画出符合要求的费用最低的道路网络图, 并计算其费用.



9. (9 分) 设 4 个城市 v_1, v_2, v_3, v_4 有航班如下图所示. 问从一个城市起飞, 可否达到其余 3 个城市? 试给出下图的邻接矩阵, 并用 Warshall 算法求可达性矩阵来证明你的答案.



四、数理逻辑 (本题满分 25 分)

10. (8 分) 甲、乙、丙、丁四人参加考试后, 有人问他们, 谁的成绩最好, 甲说:“不是我”, 乙说:“是丁”, 丙说:“是乙”, 丁说:“不是我”. 四人的回答只有一人符合实际. 问成绩最好的是哪一个人?

11. (8 分) 证明 $A \to (B \to C)$, $\neg D \vee A$, B 重言蕴含 $D \to C$.

12. (9 分) 将下列推理形式化, 并对正确的推理给出推理过程, 要指明所设命题或谓词的含义.

每个喜欢微信的人都不喜欢看报纸, 每个人或者喜欢看报纸或者喜欢上网, 并非每个人都喜欢上网, 因而有人不喜欢微信.

2015−2016 学年第一学期期末考试《离散数学》参考答案 · 卷 (A)

1. (1) 验证关系 R 满足自反性、对称性、传递性即可.

(2) $\mathbb{N}/R = \big\{\{1,3,5,7,\cdots\}, \{0,2,4,6,\cdots\}\big\}$.

2. (1) R_1 和 R_2 的关系矩阵分别为

$$M_{R_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_{R_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1	否	是	否	是	否
R_2	是	否	是	否	是

(2) 由

$$M_{R_1^2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

知 $R_1^2 = \big\{\langle a,c\rangle, \langle b,d\rangle, \langle c,a\rangle, \langle d,b\rangle\big\}$.

同理, $R_2^2 = R_2$, $R_1 \circ R_2 = \big\{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle b,d\rangle, \langle c,c\rangle, \langle c,d\rangle, \langle d,a\rangle, \langle d,b\rangle\big\}$.

$$M_{R_1}^{+} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

R_2 已经满足传递性, 其传递闭包就是自己. 即 $R_2^+ = R_2$.

3. (1) 这 100 个数分为 50 组互质的数:

$$\{1,2\}, \{3,4\}, \cdots, \{99,100\}.$$

在选出的 51 个数中, 必有 2 个数属于同一组, 故它们是互质的.

(2) 这 100 个数分为 50 组差为 50 的数:

$$\{1,51\}, \{2,52\}, \cdots, \{50,100\}.$$

在选出的 51 个数中, 必有 2 个数属于同一组, 故它们的差为 50.

4. 1 是幺元; 1, -1 的逆元是自身; i, $-i$ 互为逆元.

由 $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, 知 i 是生成元.

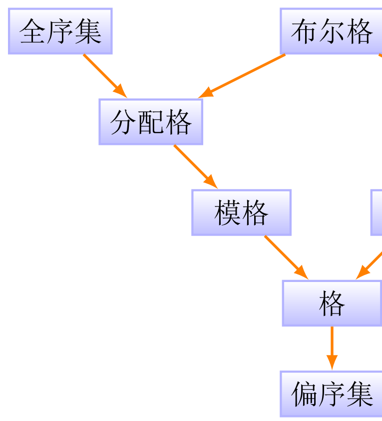
由 $(-i)^2 = -1$, $(-i)^3 = i$, $(-i)^4 = 1$, 知 $-i$ 也是生成元.

5. 代数系统 $V=\langle \mathscr{P}(B), \cap \rangle$ 是半群, 因为集合的 $\cap$ 运算满足结合律.

代数系统 $V=\langle \mathscr{P}(B), \cap \rangle$ 是独异点, 因为代数系统 $V=\langle \mathscr{P}(B), \cap \rangle$ 是半群, 且 $\forall x \in \mathscr{P}(B)$, 均有 $x \subseteq B \Rightarrow x \cap B = B \cap x = x$. 因此, B 是幺元.

代数系统 $V=\langle \mathscr{P}(B), \cap \rangle$ 不是群, 因为: 如果 $x \subset B$, 则不存在 $y \in \mathscr{P}(B)$ 使得 $x \cap y = B$

$$x^n = \overbrace{x \cap x \cap \cdots \cap x}^{n} = x$$

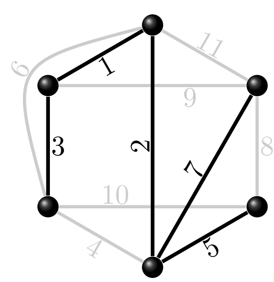


6.

7. 构造回路得依次座位为

$$a, b, d, f, g, e, c, a$$

8. Kruskal 算法求解: 从边权最小的边所关联的两个结点出发, 逐步选取边权最小的边, 但始终保持连通性且无回路, 直到边数达到 $n-1$ 条为止.



费用最少为 18.

9. 图 G 的邻接矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

用 Warshall 算法计算: 逐列进行. 在第 i 列中若有 $a_{ji}=1$, 则把第 i 行叠加到第 j 行.

$$M := \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{i=1} := \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{i=2}$$

$$:= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{i=3} := \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{i=4} = P.$$

10. 列出命题公式, 在四种赋值 1000, 0100, 0010, 0001 中, 只有第一个使得命题为真. 即成绩最好的是甲.

11. 使用 CP 规则证明：

(1)	D	P (附加前提)
(2)	$\neg D \vee A$	P
(3)	A	T(1),(2) I
(4)	$A \to (B \to C)$	P
(5)	$(B \to C)$	T(3),(4) I
(6)	B	P
(7)	C	T(5),(6) I
(8)	$D \to C$	CP

12. 个体域: 全体人的集合. 设谓词 $A(x)$: x 喜欢微信; $B(x)$: x 喜欢看报纸; $C(x)$: x 喜欢上网, 则推理形式化为:

前提: $\forall x\big(A(x) \to \neg B(x)\big)$; $\forall x\big(B(x) \vee C(x)\big)$; $\neg\forall x C(x)$.

结论: $\exists x \neg A(x)$.

下面给出证明:

(1)	$\neg\forall x C(x)$	P
(2)	$\exists x \neg C(x)$	T(1) E
(3)	$\neg C(c)$	T(2) ES
(4)	$\forall x\big(B(x) \vee C(x)\big)$	P
(5)	$B(c) \vee C(c)$	T(4) US
(6)	$B(c)$	T(3),(5) I
(7)	$\forall x\big(A(x) \to \neg B(x)\big)$	P
(8)	$A(c) \to \neg B(c)$	T(7) US
(9)	$\neg A(c)$	T(6),(8) I
(10)	$\exists x \neg A(x)$	T(9) EG