武汉大学计算机学院

2012——2013 学年第一学期

《 离散数学 》期末考试试题（A）

一．求下列公式的主析取范式和主合取范式：　　　　（10 分）

$(P \rightarrow Q \wedge R) \wedge (\neg P \rightarrow (\neg Q \wedge \neg R))$

二．分别证明下列结论的有效性（写出证明序列）：　　　　（8+8=16 分）

（1）前提：$P \wedge Q \rightarrow R$，$\neg R \vee S$，$\neg S$

结论：$\neg P \vee \neg Q$

（2）前提：$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$，$\exists x(R(x) \wedge \neg Q(x))$

结论：$\neg \forall x(R(x) \rightarrow P(X))$

三．设 A，B 为集合，$A \neq \emptyset$，$<B, \leqslant>$为偏序集，集合 $B^A = \{f \mid f: A \rightarrow B\}$，定义关系 R 如下：

fRh　fRg　gRh　f

$R \subseteq B^A \times B^A$，$\forall f$，$g \in B^A$，$f R g \Leftrightarrow f(x) \leqslant g(x)$　$(\forall x \in A)$。

证明：R 为 B^A 上的偏序关系。自反 反对称 传递　　　　（12 分）

四．设集合 $S = \{1, 2, \ldots, n\}$，$G = \{p \mid p: S \rightarrow S$，且 p 为双射$\}$，定义 S 上的二元关系 R 如下：

|A|=|B|

$\forall i, j \in S$，$i R j \Leftrightarrow \exists f \in G$，$f(i) = j$

完成下列各题：（4+6+2=12 分）

（1）设∘为函数的合成运算，证明：<G, ∘>构成群；

（2）证明：关系 R 为 S 上的等价关系；

（3）求集合 S 关于关系 R 的商集 S/R.

五、循环群 $<N_6, +_6>$，其中 $N_6=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$，$\forall a, b \in N_6$，$a +_6 b = (a+b) \bmod 6$，试完成下列各题：（6+6+2+2=16 分）

（1）求群 $<N_6, +_6>$ 的每个元素的阶；

（2）求群 $<N_6, +_6>$ 的所有子群和生成元；

（3）设函数 h：$N_6 \to N_6$ 是 $<N_6, +_6>$ 上的自同构（同态映射且为双射），求出所有满足以上条件的函数 h；$f(x)= p \times x \bmod 6$ $p: 0\sim5$

（4）写出同构意义下所有的 6 阶群。

六、设 f 和 g 都是群 $<G, *, e_G>$ 到 $<H, \cdot, e_H>$ 的同态映射，且 $G1=\{x \mid x \in G \wedge f(x)=g(x)\}$。完成下列各题：（7+7=14 分）

（1）试证：$\forall x \in G, f(x^{-1})=f(x)^{-1}$；

（2）试证：$<G1, *>$ 是 $<G, *>$ 的子群。

七、设 $G(n, m)$ 是简单平面图，且 $n=7$，$m=15$. 证明：（6+6=12 分）

（1）图 G 是连通的；

（2）图 G 的每个面均有 3 条边围成.

八、设 G 是简单连通赋权图，$e=(u, v)$ 是 G 中的一条边，且对图 G 的任意一条异于 e 的边 e'，均有：e 的权值小于 e' 的权值，证明：G 的任意一个最小生成树必含有边 e。（8 分）