武汉大学计算机学院 2015-2016 学年第一学期
2014 级《离散数学》考试试题（A 卷）

学号：____________ 姓名：___________ 成绩：_________

注意：所有答案请一律写在试卷纸上并请注明题目序号！计算题要求有计算过程！

一．求下列命题公式的主析取范式和主合取范式：$\neg P\wedge Q\rightarrow R$ （10分）

二．将下列语句用谓词公式进行符号化，并构造下面推理的形式证明（写出证明序列，论域为实数集）：（12分）

“如果存在偶数，则所有的有理数都可以表示为分数。如果存在素数，则存在有理数。因此，如果存在偶素数，则存在分数。”

『**提示**：使用如下的谓词符号：

$E(x)$：x 为偶数； $Q(x)$：x 为有理数；

$D(x)$：x（可表示）为分数； $P(x)$：x 为素数 』

三．设 A 为非空集合，集合 $A^A=\{ f \mid f : A\rightarrow A \}$为 A 上的函数的集合，完成下列各题：（3+3+6+4=16分）

（1）设 $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$，构造函数 $g\in A^A$，满足 $g\neq I_A$，且 $g\circ g = I_A$（I_A为 A 上的恒等函数）；

（2）若 A 为有限集，$|A| = n\ (n \in \mathbb{N}_+)$，分别求 A^A中的单射、满射、双射的个数；

（3）若 A 为有限集，$f: A\rightarrow A$，证明：f 为单射，当且仅当 f 为满射；

（4）证明：若对任何 $f: A\rightarrow A$，均存在 B，$\varnothing\neq B\subset A$，使得 $f(B)\subseteq B$，则 A 是无限集。

四．设群$<H, *>$是群$<G, *>$的子群，二元关系 $R \subseteq G\times G$ 定义为：

$$\forall a, b \in G, a\,R\,b，\text{当且仅当}\ \exists h\in H,\ \text{使得}\ a = b*h，$$

证明：R 为等价关系。

五．设代数系统$<A, *>$，其中集合 $A = \{ a, b, c, d \}$，二元运算 $*$ 的运算表如下，完成下列各题：（4+4+4+4=16分）

*	a	b	c	d

a	*b*	*a*	*c*	*d*
b	*a*	*b*	*c*	*d*
c	*c*	*c*	*c*	*c*
d	*d*	*d*	*c*	*d*

（1）判断运算 $*$ 是否为可结合的、可交换的？
（2）指出关于运算 $*$ 的幺元、零元、幂等元；

（3）哪些元素有逆元？并求出其逆元；

（4）代数系统$<A, *>$是否是半群？是否是群？并说明原因。

六．设 h 是群$<G_1, *>$到群$<G_2, \circ>$的同态，完成下列各题：（6+6=12分）

（1） 设 H 是 G_1的子群 $H \leq G_1$，证明：$h(H) \leq G_2$

（2） 设 $H \leq G_1, K \leq G_1$，证明：$h(H \cap K) \leq G_2$

七．设集合 $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ $(n \geqslant 2)$，R 是 A 上的拟序关系，图 G 为关系 R 的关系图，证明：图 G 中**不存在**回路。（10分）

八．设 G 是连通的简单无向赋权图，T 是 G 的最小生成树，C 是图 G 中的任意一条基本回路，证明：C 中权值最大的边 e 一定**不**在 T 中。（9分）