

武汉大学计算机学院  
2009-2010学年第二学期2008级  
《离散数学》期末考试试卷 (A)

学号: \_\_\_\_\_ 姓名: \_\_\_\_\_ 专业: \_\_\_\_\_ 成绩: \_\_\_\_\_

(注: ①考试时间为120分钟; ②所有的解答必须写在答题纸上, 并注明题号。)

一、 试求下述命题公式 $G$ 的主析取和主合取范式: (10分)

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow R$$

二、 写出下列结论的证明序列: (20分, 10+10)

(1) 前提:  $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, \neg R \wedge S$ .  
结论:  $\neg P$ ;

(2) 前提:  $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x)), \forall x(Q(x) \vee R(x)), \exists x \neg R(x)$ .  
结论:  $\exists x \neg P(x)$ .

三、 设有函数  $f: A \rightarrow B$ , 定义函数  $g: \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A), \forall S \in \mathcal{P}(B)$   
(注:  $\mathcal{P}(A)$  为集合  $A$  的幂集合), 有 (20分, 10+5+5)

$$g(S) = \{a \mid a \in A \wedge f(a) \in S\} \text{ (即 } f^{-1}(S)\text{)}$$

(1) 试证明, 如果  $f$  是单射, 则  $\forall X \subseteq A, f^{-1}(f(X)) = X$ ;

(2) 试证明, 当  $f$  是单射时,  $g$  是满射;

(3) 试以集合  $A = \{a, b\}$  到  $B = \{c, d\}$  上的函数为例说明当  $f$  不是单射时,  $g$  不是是满射.

四、 设  $A$  为集合, 集合  $P$  是集合  $A$  上所有的划分组成的集合, 即  $P = \{S \mid S \text{ 是 } A \text{ 的划分}\}$ , 定义关系  $R \in P \times P, \forall S, T \in P, \langle S, T \rangle \in R$  iff 若  $\forall u \in S$ , 则存在  $v \in T$ , 使得  $u \subseteq v$ . 如  $A = \{a, b, c\}$ , 设  $S = \{\{a\}, \{b, c\}\}$ ,  $T = \{\{a, b, c\}\}$ , 则  $\langle S, T \rangle \in R$ : (15分, 5+5+5)

(1) 设  $A = \{a, b, c\}$ , 试用枚举法表示集合  $A$  上所有的划分组成的集合  $P$ ;

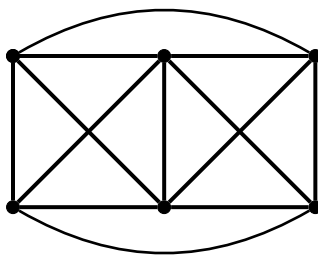
(2) 证明:  $R$  是偏序关系;

(3) 试用性质法表示集合  $P$  的最大元素和最小元素.

五、 设 $\langle G, *, e \rangle$ 是群， $H, K$ 是其子群，在 $G$ 上定义二元关系 $R: \forall a, b \in G, aRb$  iff 存在 $h \in H, k \in K$ ，使得 $b = h * a * k$ . 证明： (20分，每小题5分)

- (1)  $R$ 是 $G$ 上的等价关系;
- (2) 试证明 $\forall h, h' \in H, k, k' \in K, hRh', kRk'$ ;
- (3) 试证明 $\forall a, b \in H \cup K, aRb$ ;
- (4) 若 $|H| = m, |K| = n, |G| = mn, m$ 与 $n$ 互素， $[a]_R$ 是 $R$ 的某个等价类，且 $[a]_R$ 是 $G$ 的一个子群，则 $R = G \times G$ .

六、 设判别下面的简单无向图是否为平面图： (8分)



七、 设无向图 $G(n, m)$ 是树，其结点最大度数为 $k(k \geq 2)$ ，证明： $G$ 中至少有 $k$ 片树叶. (7分)

# 武汉大学计算机学院2009-2010学年第一学期

## 2008级《离散数学》考试标准答案

一、试求下述命题公式 $G$ 的主析取和主合取范式: (10分)

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow R$$

主析取范式:  $(P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$ ;

主合取范式:  $(\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$ .

二、写出下列结论的证明序列: (20分, 10+10)

(1) 前提:  $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, \neg R \wedge S$ .

结论:  $\neg P$ ;

**证明:**

① $\neg R \wedge S$	引入前提	④ $\neg Q$	② + ③ + MT
② $\neg R$	化简规则	⑤ $P \rightarrow Q$	引入前提
③ $Q \rightarrow R$	引入前提	⑥ $\neg P$	④ + ⑤ + MT

(2) 前提:  $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x)), \forall x(Q(x) \vee R(x)), \exists x \neg R(x)$ .

结论:  $\exists x \neg P(x)$ .

**证明**

① $\exists x \neg R(x)$	引入前提	⑥ $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$	引入前提
② $R(a)$	① + ES	⑦ $P(a) \rightarrow \neg Q(a)$	⑥ + US
③ $\forall x(Q(x) \vee R(x))$	引入前提	⑧ $\neg P(a)$	⑦ + ⑤ + MT
④ $Q(a) \vee R(a)$	③ + US	⑨ $\exists x \neg P(x)$	⑧ + EG
⑤ $Q(a)$	④ + 析取三段论		

三、设有函数  $f: A \rightarrow B$ , 定义函数  $g: \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A), \forall S \in \mathcal{P}(B)$  (注:  $\mathcal{P}(A)$  为集合  $A$  的幂集合), 有 (20分, 10+5+5)

$$g(S) = \{a \mid a \in A \wedge f(a) \in S\} \text{ (即 } f^{-1}(S)\text{)}$$

(1) 试证明, 如果  $f$  是单射, 则  $\forall X \subseteq A, f^{-1}(f(X)) = X$ ;

**证明:** 由定理有  $X \subseteq f^{-1}(f(X))$ , 现需证  $f^{-1}(f(X)) \subseteq X$ , 设  $x \in f^{-1}(f(X))$ , 则  $f(x) \in f(X)$ , 即  $\exists x' \in X, f(x) = f(x')$ .  $\because f$  是单射,  $\therefore x = x'$ , 即  $x \in X$ . 故  $f^{-1}(f(X)) \subseteq X$ .

(2) 试证明, 当  $f$  是单射时,  $g$  是满射;

**证明:**  $\forall X \in \mathcal{P}(A)$ , 由(1)有  $f^{-1}(f(X)) = X$ , 即  $g(f(X)) = X, \therefore g(\mathcal{P}(B)) = \mathcal{P}(A)$ . 故  $g$  是满射.

(3) 试以集合  $A = \{a, b\}$  到  $B = \{c, d\}$  上的函数为例说明当  $f$  不是单射时,  $g$  不是满射.

**解:** 设  $f(a) = f(b) = c$ , 则  $g(\mathcal{P}(B)) = \{\emptyset, \{a, b\}\} \subsetneq \mathcal{P}(A)$ , 故  $g$  不是满射.

四、 设 $A$ 为集合, 集合 $P$ 是集合 $A$ 上所有的划分组成的集合, 即 $P = \{S \mid S \text{ 是 } A \text{ 的划分}\}$ , 定义关系 $R \in P \times P, \forall S, T \in P, \langle S, T \rangle \in R$  iff 若 $\forall u \in S$ , 则存在 $v \in T$ , 使得 $u \subseteq v$ . 如 $A = \{a, b, c\}$ , 设 $S = \{\{a\}, \{b, c\}\}$ ,  $T = \{\{a, b, c\}\}$ , 则 $\langle S, T \rangle \in R$ : (15分, 5+5+5)

(1) 设 $A = \{a, b, c\}$ , 试用枚举法表示集合 $A$ 上所有的划分组成的集合 $P$ ;

**解:**

$$P = \{\{\{a, b, c\}\}, \{\{a, b\}, \{c\}\}, \{\{b, c\}, \{a\}\}, \{\{a, c\}, \{b\}\}, \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}\}$$

(2) 证明:  $R$ 是偏序关系;

**证明:**

① 自反性:  $\forall S \in P, \forall u \in S, u \subseteq u, \therefore \langle S, S \rangle \in R$ ;

② 反对称性: 设 $\langle S, T \rangle \in R \wedge \langle T, S \rangle \in R$ , 需证明集合 $S$ 和 $T$ 相等. 设 $u \in S, \therefore \exists v \in T, u \subseteq v, \therefore \langle T, S \rangle \in R, \therefore \exists u' \in S, v \subseteq u',$  这样 $u \subseteq u'$ , 而 $u$ 和 $u'$ 同属于一个划分 $S$ , 所以它们均非空且 $u \cap u' \neq \emptyset, \therefore u = u',$  而 $u \subseteq v \subseteq u', \therefore u = v$ , 故 $S \subseteq T$ . 同理可证 $T \subseteq S. \therefore S = T$ .

③ 传递性: 设 $\langle S, T \rangle \in R \wedge \langle T, W \rangle \in R$ , 则 $\forall u \in S, \exists u \in T, u \subseteq v, \therefore \langle T, W \rangle \in R, \therefore \exists w \in W, v \subseteq w$ , 这样 $u \subseteq w$ , 故 $\langle S, W \rangle \in R$ .

(3) 试用性质法表示集合 $P$ 的最大元素和最小元素.

**解:** 最大元素 $\{P\}$ ; 最小元素 $\{\{a\} \mid a \in A\}$ .

五、 设 $\langle G, *, e \rangle$ 是群,  $H, K$ 是其子群, 在 $G$ 上定义二元关系 $R: \forall a, b \in G, aRb$  iff 存在 $h \in H, k \in K$ , 使得 $b = h * a * k$ . 证明: (20分, 每小题5分)

(1)  $R$ 是 $G$ 上的等价关系;

**证明:**

① 自反性:  $\because H, K \leq G, \therefore e \in H \cap K$ . 这样 $\forall a \in G, a = e * a * e$

② 对称性: 设 $aRb$ , 即 $\exists h \in H, k \in K, b = h * a * k$ , 即 $a = h^{-1} * b * k^{-1}$ , 而 $h^{-1} \in H, k^{-1} \in K$ , 故 $bRa$ .

③ 传递性: 设 $aRb \wedge bRc$ , 即 $\exists h, h' \in H, k, k' \in K, b = h * a * k \wedge c = h' * b * k'$ , 这样 $c = (h' * h) * a * (k * k')$ . 而 $h' * h \in H \wedge k * k' \in K$ , 故 $aRc$ .

(2) 试证明 $\forall h, h' \in H, k, k' \in K, hRh', kRk'$ ;

**证明:**  $h' = (h' * h^{-1}) * h * e$ , 而 $h, h' \in H$ , 根据子群运算的封闭性有 $h' * h^{-1} \in H$ , 又 $e \in K$ , 故 $hRh'$ . 同理可证 $kRk'$ .

(3) 试证明 $\forall a, b \in H \cup K, aRb$ ;

**证明:** 如果 $a, b \in H \vee a, b \in K$ , 这由题(2)有 $aRb$ .

设 $a \in H \wedge b \in K, \therefore e \in H \cap K$ , 由题(2),  $aRe \wedge eRb$ , 由于 $R$ 是传递关系, 故 $aRb$ .

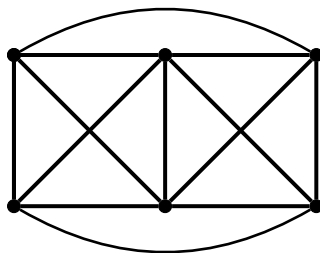
(4) 若 $|H| = m, |K| = n, |G| = mn, m$ 与 $n$ 互素,  $[a]_R$ 是 $R$ 的某个等价类, 且 $[a]_R$ 是 $G$ 的一个子群, 则 $R = G \times G$ .

**证明:**  $\because [a]_R \leq G, \therefore e \in [a]_R$ . 这样 $eRa$ , 由(2),  $\forall h \in H, eRh, \therefore$

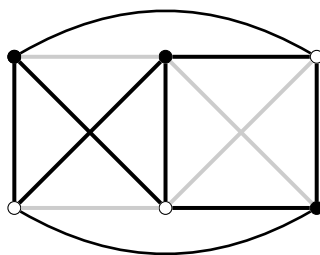
$hRa$ , 即  $h \in [a]_R$ , 由此  $H \subseteq [a]_R$ ,  $\therefore H \leq [a]_R$ . 根据Lagrange定理,  $|H| \mid |[a]_R|$ , 即  $m$  是  $|[a]_R|$  的因子. 同理  $n$  也是  $|[a]_R|$  的因子. 而  $m$  和  $n$  互素, 这样  $mn$  是  $|[a]_R|$  的因子.  $\therefore mn = |G| \geq |[a]_R| \geq mn$ . 故  $[a]_R = G$ .

六、 设判别下面的简单无向图是否为平面图:

(8分)



解: 不是平面图, 因为其子图与  $K_{3,3}$  同构:



七、 设无向图  $G(n, m)$  是树, 其结点最大度数为  $k (k \geq 2)$ , 证明:  $G$  中至少有  $k$  片树叶. (7分)

**证明 (反证法):** 设仅有  $k-1$  个结点为树叶, 这样图  $G$  有 1 个结点的度数  $\geq k$ ,  $n-k$  个结点的度数  $\geq 2$ ,  $k-1$  个结点的度数为 1.  $\therefore$  所有结点的度数之和不小于下式:

$$k + 2(n - k) + k - 1$$

即  $2n - 1$ . 但是  $n$  个结点的无向树的边数  $m = n - 1$ , 其度数之和为  $2n - 2 < 2n - 1$ . 故矛盾. 同理对叶结点数小于  $k-1$  的情况也有上述矛盾.