

# 医学图像重建入门

犹他大学, 曾更生

2009  
高等教育出版社

## 前言

我平生第一次接触到医学图像重建是我来到犹他大学做博士后的时候。当时 Grant Gullberg 博士和 Rolf Clackdoyle 博士开课讲授图像重建算法。我在课上很详细的记了笔记。这些笔记对我后来所从事的医学成像工作很有帮助。直到今天, 我还要时常翻阅那些笔记。这本书摘选了那些笔记中的一些内容, 并包含了最近的一些研究成果。

这是一本入门的书, 其宗旨是向读者介绍经典的和现代的图像重建方法。本书涵盖了二维(2D)平行光束和扇形束成像, 三维(3D)平行线, 平行面, 及锥形束成像。包括解析算法和迭代算法。本书还描述了这些算法在X光CT, SPECT, PET, 和 MRI 等医学影像中的应用。本书对最新的研究成果, 如使用截断的投影数据精确重建 ROI, Katsevich 的锥形束滤波反投影 (FBP) 算法, 以及利用  $l_0$  极小化方法来重建极度欠采样数据。

本书力图用深入浅出的方式介绍一些高深的理论。它尽量用图示和直观的方式来展开讨论。作者觉得用这种聊天的方式, 而不是用严紧的数学推导方式, 来介绍一门应用数学学科, 可以使读者不至于怯而止步。读者通过阅读本书可以对医学图像重建领域有个概括性的了解。希望读者朋友们能喜欢这本书。

在这里我要感谢我的启蒙老师 Grant Gullberg 博士和 Rolf Clackdoyle 博士, 以及我的同事们和同行们 (特别是华人学者尤江生, 梁正荣, 潘小川, 王革, 陈光红) 对我的大量帮助。我要感谢毛雁飞对书稿的校阅。最后, 我特别要感谢我的家人李亚, Andrew, Kathy, 和 Megan 的支持。

书中标有星号 “\*” 的章节, 读者第一次阅读时可以跳过, 而不会影响书的连贯性。

曾更生

2009年8月于美国犹他州盐湖城

# 目录

<b>第1章 断层成像的基本原理</b>	<b>1</b>
1.1 断层成像	1
1.2 投影	3
1.3 图像重建	6
1.4 反投影	9
1.5* 数学表达式	11
1.5.1 投影	11
1.5.2 反投影	12
1.5.3狄拉克 $\delta$ 函数	13
1.6 例题	16
1.7 小结	20
参考文献	21
<b>第2章 平行光束图像重建</b>	<b>23</b>
2.1 傅里叶变换	23
2.2 中心切片定理	24
2.3 重建算法	27
2.3.1 方法 1	27
2.3.2 方法 2	28
2.3.3 方法 3	29
2.3.4方法 4	30
2.3.5方法 5	30
2.4 计算机模拟例子	32
2.5* 利用截断的投影数据重建ROI	33
2.6* 数学表达式	39
2.6.1 傅里叶变换与卷积	39
2.6.2 希尔伯特变换与有限希尔伯特变换	39
2.6.3中心切片定理的证明	42
2.6.4 FBP (先滤波后反投影) 算法的推导	44
2.6.5 先卷积后反投影算法的数学表达式	45
2.6.6 拉东反演公式的数学表达式	45
2.6.7先反投影后滤波算法的推导	46
2.7 例题	47
2.8 小结	50
参考文献	51
<b>第3章 扇形束图像重建</b>	<b>53</b>
3.1 扇形束成像的几何描述及其点扩散函数	53
3.2 平行光束算法到扇形束算法的转换	56

3.3 短扫描 .....	59
3.4* 数学表达式 .....	62
3.4.1 扇形束FBP(先滤波后反投影)算法的推导 .....	62
3.4.2 扇形束的 DHB (Derivative, Hilbert Transform, Backprojection 求导, 希尔伯特变换, 反投影) 算法 .....	64
3.5 例题 .....	66
3.6 小结 .....	70
参考文献 .....	71
<b>第4章 透射型投影和发射型投影的断层成像 .....</b>	<b>73</b>
4.1 X光 CT (计算机断层成像) .....	73
4.2 PET (正电子发射断层成像) 和 SPECT (单光子发射计算机断层成像) .....	78
4.3 发射型断层成像的衰减修正 .....	82
4.4* 数学表达式 .....	86
4.5 例题 .....	88
4.6 小结 .....	90
参考文献 .....	91
<b>第5章 三维图像重建 .....</b>	<b>93</b>
5.1 平行的线积分数据 .....	93
5.1.1 先反投影后滤波算法 .....	96
5.1.2 先滤波后反投影 FBP 算法 .....	98
5.2 平行的面积分数据 .....	98
5.3 锥形束数据 .....	101
5.3.1 Feldkamp 算法 .....	102
5.3.2 Grangeat 算法 .....	103
5.3.3 Katsevich 算法 .....	105
5.4* 数学表达式 .....	110
5.4.1 平行的线积分数据的先反投影后滤波算法 .....	110
5.4.2 平行的线积分数据的先滤波后反投影算法 .....	111
5.4.3 三维拉东反演公式 (先滤波反投影算法) .....	113
5.4.4 三维拉东数据的先反投影后滤波算法 .....	113
5.4.5 Feldkamp算法 .....	114
5.4.6 Tuy 关系 .....	116
5.4.7 Grangeat 关系 .....	118
5.4.8 Katsevich 算法 .....	121
5.5 例题 .....	128
5.6 小结 .....	131
参考文献 .....	132
<b>第6章 迭代重建 .....</b>	<b>135</b>
6.1 解线性方程组 .....	135
6.2 代数重建算法 (英文是 ART = Algebraic Reconstruction Technique) .....	140
6.3 梯度下降算法 .....	142
6.4 ML-EM (利用求最大期望值来求最大似然函数) 算法 .....	146
6.5 OS-EM (分成有序的子集来求期望值的极大值) 算法 .....	147
6.6 噪声控制 .....	148
6.6.1 解析方法 — 加窗函数 .....	148
6.6.2 迭代方法 — 提前停止迭代 .....	149
6.6.3 迭代方法 — 选择像素模型 .....	149

6.6.4 迭代方法 — 精确建模 .....	152
6.7 噪声模型建于似然函数中 .....	153
6.8 利用先验知识 (贝叶斯法则) .....	156
6.9* 数学表达式 .....	157
6.9.1 ART .....	157
6.9.2 共轭梯度算法 .....	159
6.9.3 ML-EM .....	161
6.9.4 OS-EM .....	164
6.9.5 MAP (Green 的迟一步算法) .....	164
6.9.6 匹配的和匹配的投影运算与反投影运算对 .....	165
6.10* 利用 $l_0$ 极小化来重建极度欠采样数据 .....	167
6.11 例题 .....	170
6.12 小结 .....	182
参考文献 .....	183
<b>第7章 MRI 中的图像重建 .....</b>	<b>187</b>
7.1 磁 “M” .....	187
7.2 共振 “R” .....	189
7.3 成像 “I” .....	193
7.3.1 获取 $z$ 方向信息—层片选择 .....	193
7.3.2 获取 $x$ 方向信息—频率编码 .....	194
7.3.3 获取 $y$ 方向信息—相位编码 .....	196
7.4* 数学表达式 .....	199
7.5 例题 .....	203
7.6 小结 .....	204
参考文献 .....	205

# 第1章 断层成像的基本原理

## 1.1 断层成像

*断层成像*顾名思义就是要得到一个物体内部的截面图像。比如你想知道西瓜里面是什么样的，最简单的办法就是把西瓜切开 (图1.1)。显然对病人来说，这是万不可行之举。我们真想有个办法，不用动刀，就可把病人内部看得清清楚楚。



图 1.1 把西瓜切开，内部就一目了然。

让我们来看另一个例子。你想到一个美丽的街心公园去参观。可惜，公园正在维修，游人不得入内。你只好在公园的外围走走，拍几张照片。公园内有两棵参天大树，极为壮观。你在公园的东面和南面对公园拍了照 (图1.2左)，颇为满意。回到家后，你用你的得意照片，居然画出了公园地图，并确定了那两棵树的位置 (图1.2右)。其实，要确定那两棵树的位置并不难。你只要把那两张照片按原本的方位放好。从照片上的每棵树画出一条垂线。

2 第1章 断层成像的基本原理

这些线的交点就是大树的位置了。如果你有足够多的照片的话，画出个公园地图并非难事。

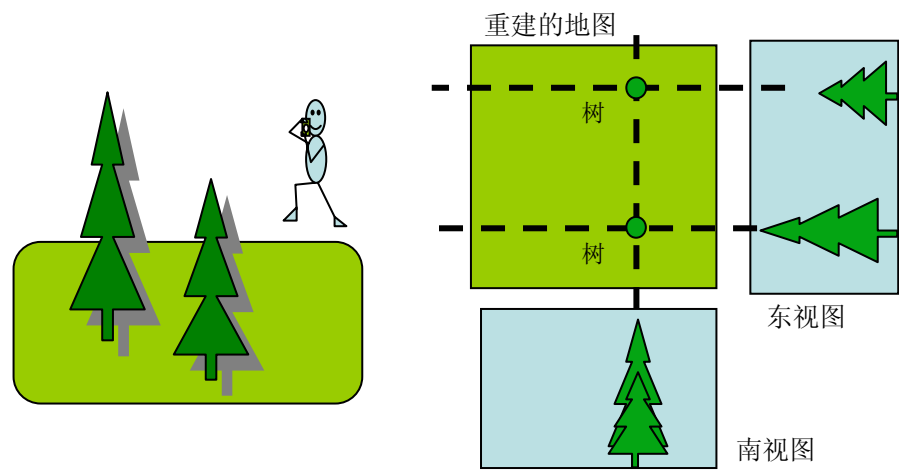


图 1.2 利用两张照片来重建公园地图。

断层成像是个数学问题。让我们一起做个有趣的数学习题吧。这里有个  $2 \times 2$  的矩阵。矩阵中的元素的数值暂时保密。我给你一些暗示：第一行的和是 5。第二行的和是 4。第一列的和是 7。第二列的和是 2 (图1.3)。你可以算出这个  $2 \times 2$  矩阵吗？

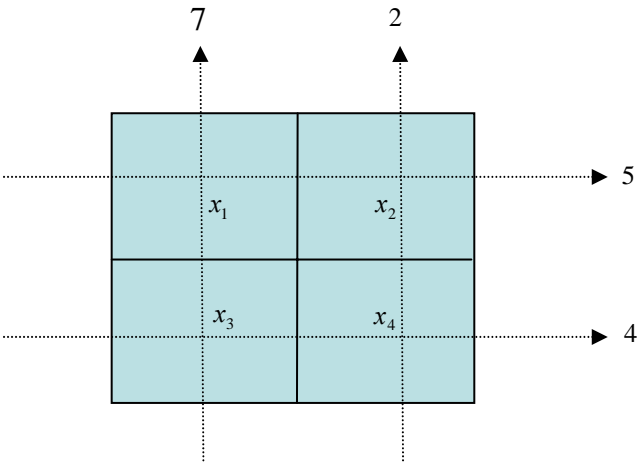


图 1.3 猜猜这个  $2 \times 2$  矩阵。

这个问题可以用解方程组的方法解决。设那些矩阵元素为未知数，列一个线性方程组：

$$x_1 + x_2 = 5, x_3 + x_4 = 4, x_1 + x_3 = 7, x_2 + x_4 = 2。$$

解这个方程组便得到，

$$x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 0。$$

祝贺你！你用数学方法解决了一个断层成像问题。一般来说，断层成像都是用数学计算的手段解决的。怪不得有CT (Computed Tomography 计算机断层成像，直译为： 计算出的断层成像) 这个词。通常为说话简捷起见，“计算出的”这几个字就略去不说了。矩阵每一行的和，每一列的和的概念可以推广为一个图像的射线和，线积分，和投影数据。从物体的投影数据来得到物体的内部断层成像的过程就称之为图像重建。

如果断层成像问题再复杂一点我们怎么办呢？比如说，公园里有很多很多树。仅靠两张照片就能画出一张公园地图吗？如果我们考虑的矩阵远远大于两行两列，仅仅靠知道每一行的和及每一列的和，我们能解出原矩阵吗？一般来说，不能。

我们需要更多的数据。这些数据从何而来呢？我们需要从更多不同的角度来采集数据。类似于上面谈到的“猜猜矩阵”的问题，我们需要从不同的角度对矩阵求和。这样一来，就需要用到更复杂的数学来解决一个实际的断层成像问题。

## 1.2 投影

为了体会出投影 (也就是射线和，线积分，及拉东变换) 的概念，我们在这里给出几个例子。

在第一个例子中，所考虑的物体是二维x-y平面中的一个均匀圆盘。圆盘的圆心在坐标原点。圆盘的线密度函数是个常数 $\rho$  (图1.4)。物体的投影值 (即线积分值) 就是弦长 $t$ 乘以线密度 $\rho$ 。其数学表达式为

$$\text{如果 } |s| < R, p(s) = \rho t = 2\rho\sqrt{R^2 - s^2}; \\ \text{否则的话, } p(s) = 0。$$

#### 4 第1章 断层成像的基本原理

在这个特例中，投影值  $p(s)$  对于所有的角度  $\theta$  来说都是一样的。这个角度  $\theta$  是探测器相对于物体的旋转角度。

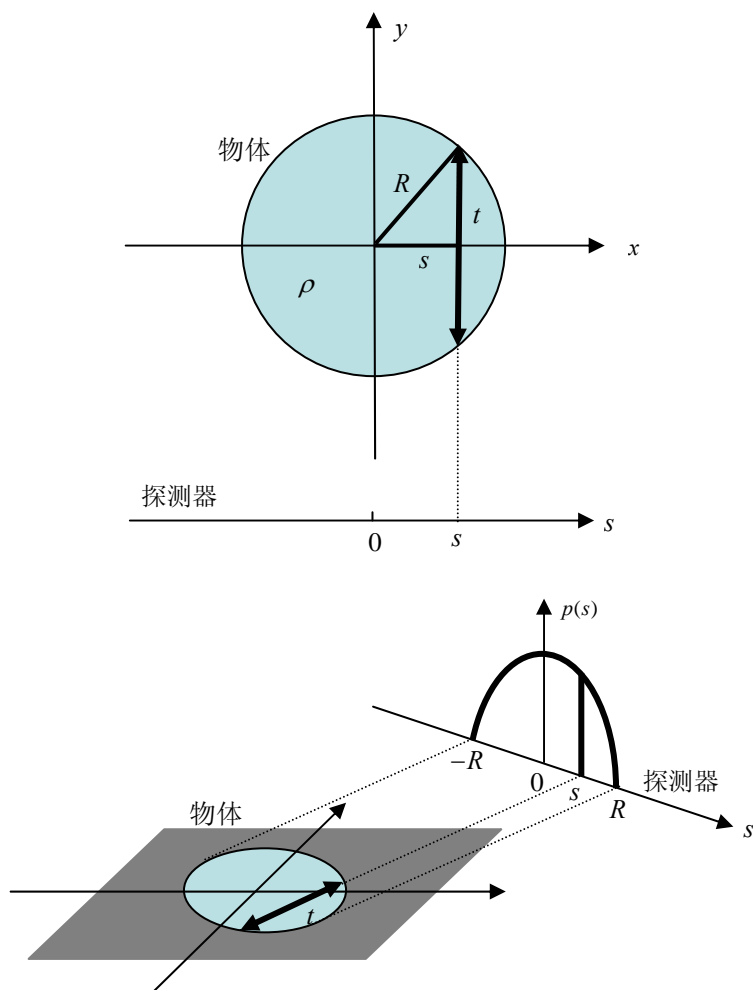


图 1.4 跨圆盘的线积分等于弦长乘以线密度。

如果物体相对于旋转中心没有对称性的话，物体的投影值  $p(s, \theta)$  则因角度  $\theta$  的不同而不同 (图1.5)。

下一个例子考虑  $y$  轴上的一个点源。我们来探讨投影值  $p(s, \theta)$  与角度  $\theta$  之间的奥妙关系 (图1.6)。请留意探测器上点源留下的“足迹”  $s$  的位置。该点源在探测器  $s$  的位置上产生了一个脉冲。该脉冲的位置  $s$  可以表达为



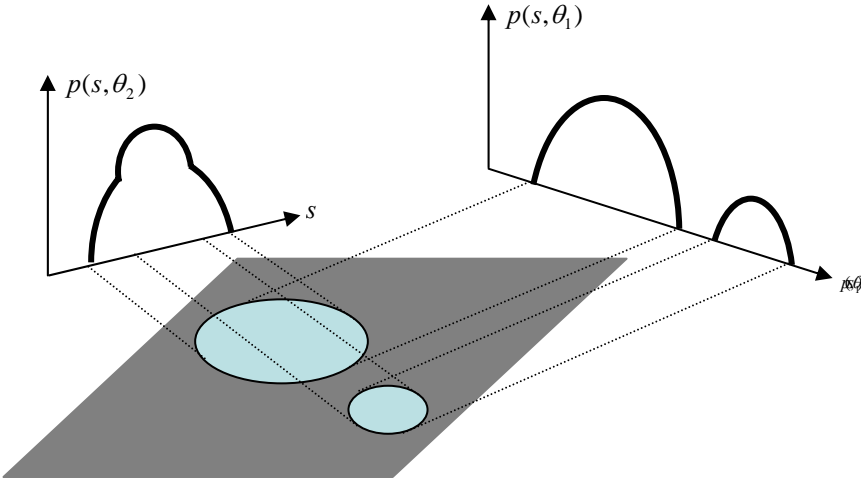


图 1.5 一般来说，物体的投影在不同的探测角度是不同的。

$$s = r \sin \theta。$$

你会发现，脉冲的位置  $s$  是角度  $\theta$  的正弦函数。如果你把投影数据  $p(s, \theta)$  显示在  $s-\theta$  坐标系中 (图1.6 右)，你就会看到一条优美的正弦曲线。难怪人们干脆就把投影数据称作 *正弦图*。

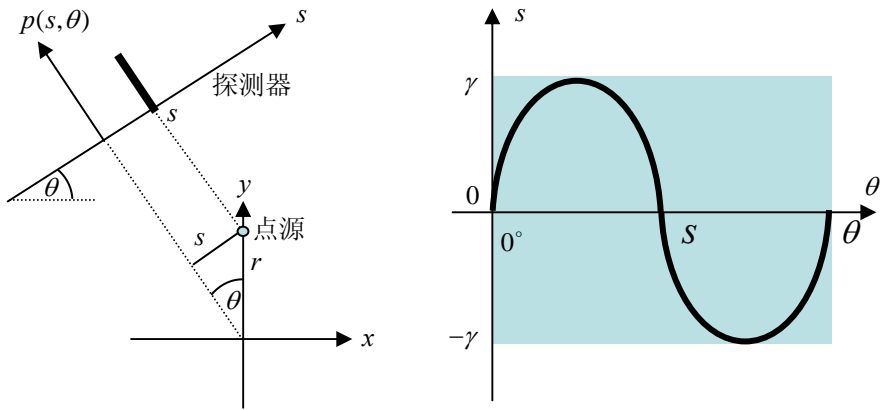


图 1.6 所谓正弦图就是把投影数据显示在  $s-\theta$  平面上。

第四个例子有点类似前面碰到过的  $2 \times 2$  矩阵 (图1.3) 问题。这里, 探测器是离散的, 它由四个离散的探测元组成 (图1.7)。这个  $2 \times 2$  矩阵是个连续的图像。每个矩阵元素代表一个均匀的像素。像素的数值  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 为第  $i$  个像素的线密度数值。这个矩阵图像的投影数据是图像线积分数值  $p(s, \theta)$ ,  $\theta$  为探测器旋转角。这个线积分的“线”在每个像素内的线段长度记为  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$  以及  $j = 1, 2, 3, 4$ )。下标  $i$  是探测元的编号。下标  $j$  是像素的编号。如果第  $i$  条线与第  $j$  个像素不相交, 则  $a_{ij} = 0$ 。这样一来, 投影值  $p(i, \theta)$  可以用下面的表达式算出

$$p(i, \theta) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4, \text{ 这里 } i = 1, 2, 3, 4。$$

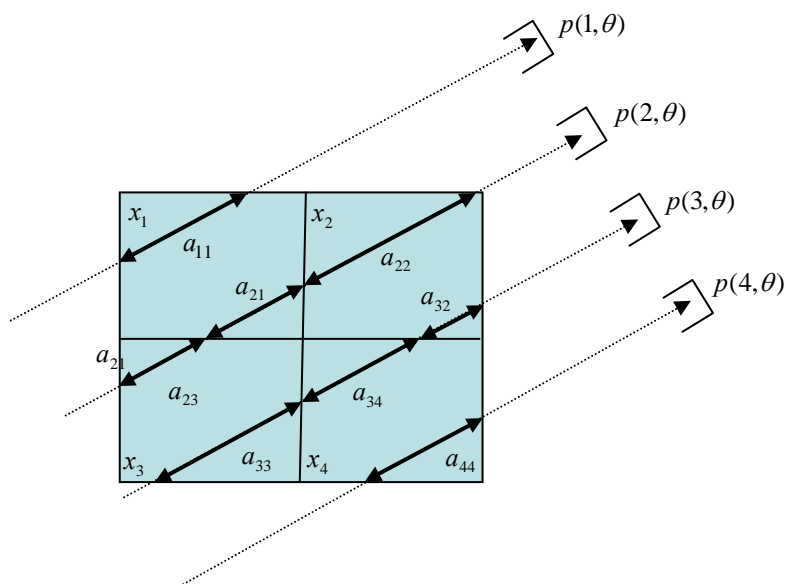


图 1.7 投影值实际上是像素值的加权和。权函数是“线”在像素内的线段长度。

### 1.3 图像重建

在这一节里, 我们来探索重建一个点源的步骤及策略。这些步骤和策略可以推而广之, 来解决一般的图像重建问题。我们首先在二维  $x$ - $y$  坐标系中随便放一个点源。点源的位置不一定要在坐标系的原点 (图1.8)。我们设想

有一个探测器绕着坐标系的原点旋转。旋转角为  $\theta$ 。这个探测器可以是架照相机。探测器测到的投影数据为  $p(s, \theta)$ ，这里  $s$  是探测器上的一维坐标。

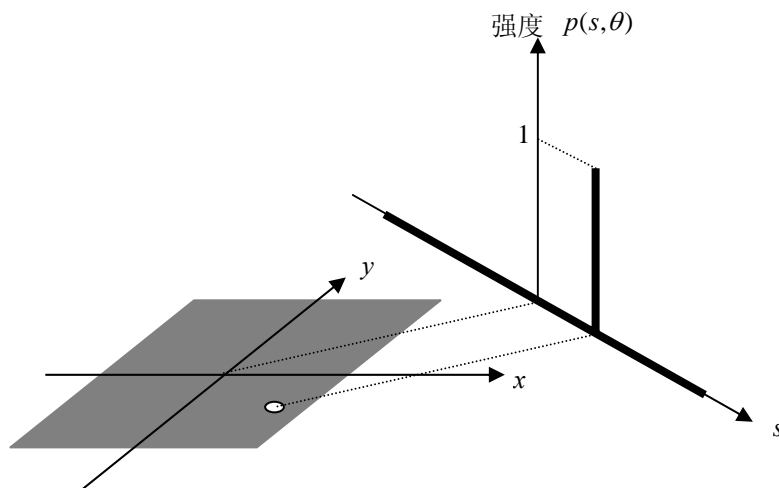


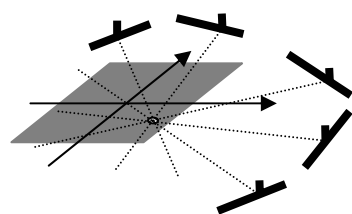
图 1.8 点源物体投影数据的采集。

为了计算投影数据  $p(s, \theta)$ ，我们可以画出一条条垂直于探测器的直线。然后沿着这些直线对物体求线积分。对于点源物体，投影数据  $p(s, \theta)$  可以简单地得到。这只需在  $x$ - $y$  平面上过该点源向探测器作一条垂线。这条垂线与探测器的交点位置  $s$  有一个高度为 1 的脉冲。若垂线不经过点源，线积分的值  $p(s, \theta)$  则为零。

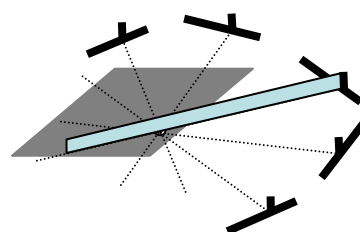
算出投影数据  $p(s, \theta)$  后，我们就可以着手重建图像了。我们的策略与在第 1.1 节中寻找大树位置的策略相似：沿着照片上的大树画垂线，每张照片给出一组垂线，再寻找这些垂线的交点。点源图像重建的任务包含两个方面：一是找出点源的位置，二是找出它的数值。

图 1.9(A) 准备好了一组从不同角度获得的点源的投影数据。下面我们一步一步地重建这个点源图像。

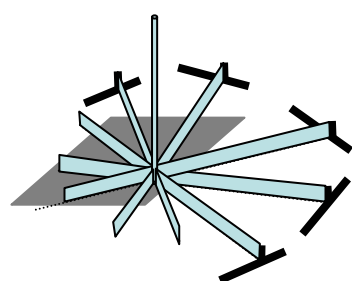
在每个角度  $\theta$ ，投影数据  $p(s, \theta)$  有一个高度为一的脉冲。这个脉冲是投影“路径”上所有数值的总和。搞图像重建就必须把这个脉冲的数值重新分布在原来的投影路径上。好像你手里提着一袋种子，你要把种子撒在投影的路径上。但是，在这条路径上什么地方应该多撒一些，在什么地方应该少撒一些呢？不知道。没有别的高招，只好均匀地撒吧（图 1.9B）。对多个探测角度重复这个“撒种子”工作便可得到如图 1.9(C) 所示的图形。基于线性叠加的效果，在  $x$ - $y$  平面上原来点源的位置，可得到一个高高的脉冲。



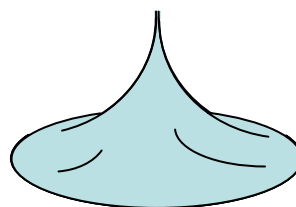
(A) 对点源做投影



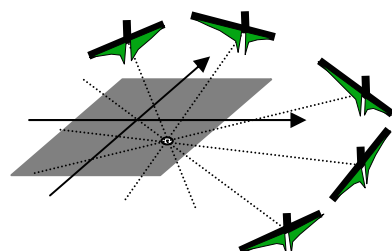
(B) 从一个角度的反投影



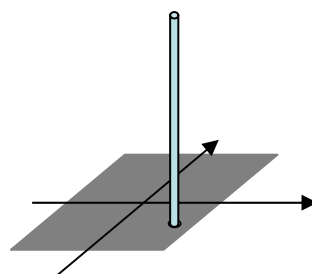
(C) 多个角度的反投影



(D) 所有角度的反投影



(E) 加上一对负值的“翅膀”



(F) 对修正过的数据做反投影

图 1.9 反投影原始数据和靠反投影滤波后的数据来重建点源图像。

其实，你刚才做的“撒种子”劳动是个很平常的数学运算，叫做反投影。如果你做  $360^\circ$  的反投影，你会得到像图1.9(D)所示的分布图形。

做了反投影之后，所得的图像确实变得有模有样了。但是与原本的图像比较起来还是不一样。它的边缘模糊不清。为了让图像变得清晰，我们人为地在投影数据脉冲的两边添了一对负值的“翅膀”（图1.9E），然后再做反投影。结果，这一招得出了出人意料的好图像（图1.9F）。

添了两个负值“翅膀”的运作叫做滤波。这个先滤波再做反投影的图像重建算法叫 FBP 算法。FBP 是英文 Filtered Backprojection（先滤波再做反投影）的缩写。FBP 算法极其有名，在图像重建领域里无人不晓。

## 1.4 反投影

反投影的定义取决于投影是如何定义的。我们必须明确指出反投影运算并不是投影运算的逆运算。用数学语言说，反投影算子不是投影算子的逆算子。仅仅靠反投影是不能重建图像的。对原始数据做反投影还得不到原本的图像。我们现在用一个  $2 \times 2$  矩阵的例子（图1.10）来演示这一点。

原本的图像定义为  $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 0$ 。从这个给定的图像可算出一组投影数据： $p(1, 0^\circ) = 7, p(2, 0^\circ) = 2, p(1, 270^\circ) = 5, p(2, 270^\circ) = 4$ 。这些投影数据是按逐个投影方向分别算出的（图1.10）。反投影图像也是按逐个投影方向分别算出的。最终的反投影图像是这些单方向的反投影图像的总和（图1.11）。请注意，这个汇总的反投影图像和原本的图像不一样。

纵使反投影图像和原本的图像不同，它们之间有着密切的联系。在下一章，我们要重点讨论它们之间的关系。

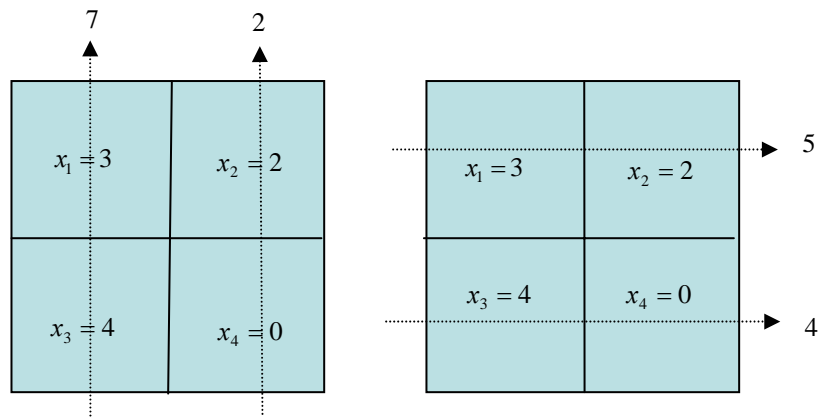


图 1.10 逐个投影方向分别计算投影数据。

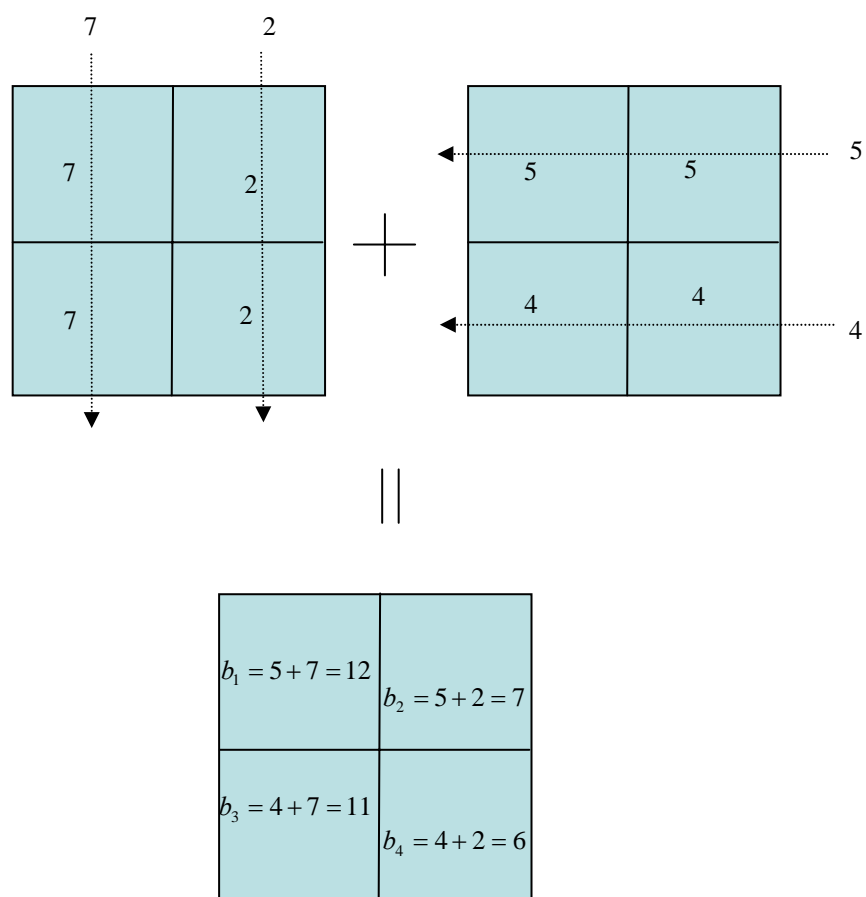


图 1.11 逐个投影方向分别计算反投影，其总和即为最终的反投影图像。

## 1.5\* 数学表达式

### 1.5.1 投影

设  $f(x, y)$  为  $x$ - $y$  平面上定义的密度函数, 其投影函数(即射线和, 线积分, 及 拉东变换)  $p(s, \theta)$  有下面不同的等价表达式:

$$p(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy ,$$

$$p(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(\bar{x} \cdot \bar{\theta} - s) dx dy ,$$

$$p(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - t \sin \theta, s \sin \theta + t \cos \theta) dt ,$$

$$p(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \bar{\theta} + t \bar{\theta}^{\perp}) dt ,$$

$$p(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\theta}(s, t) dt ,$$

其中  $\bar{x} = (x, y)$ ,  $\bar{\theta} = (\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $\bar{\theta}^{\perp} = (-\sin \theta, \cos \theta)$ ,  $\delta$  是狄拉克  $\delta$  函数, 图像  $f$  旋转角度  $\theta$  后记为  $f_{\theta}$ 。我们假设探测器按逆时针方向绕物体旋转。这等价于探测器不动, 而物体按顺时针做旋转。有关的坐标系如图1.12所示。

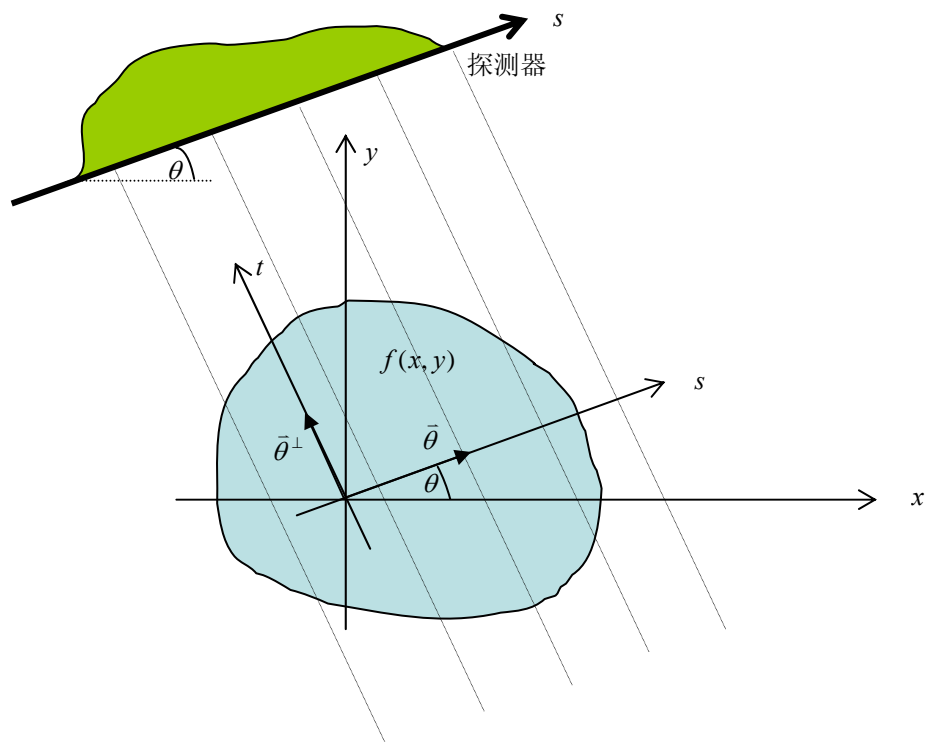


图 1.12 描述二维平行光束成像的坐标系。

### 1.5.2 反投影

反投影算子是投影算子的伴随算子。“伴随”是个数学上的术语。例如，对于一个实数矩阵  $A$  来说，其伴随矩阵就是转置矩阵  $A^T$ 。

在第1.4节，我们讨论过了一个离散的投影问题。它可以描述为矩阵的乘积：

$$P = AX,$$



这里  $X$  是用列向量 (即列矩阵) 的形式表达一个图像。对于一个  $2 \times 2$  图像来说, 它的列向量表现形式是 (见图1.3 或 1.10):

$$X = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T。$$

上面的列矩阵  $P$  代表投影数据。如果用图1.10的例子, 这个列矩阵  $P$  就是

$$P = [p(1, 0^\circ), p(2, 0^\circ), p(1, 270^\circ), p(2, 270^\circ)]^T = [7, 2, 5, 4]^T。$$

矩阵  $A$  实际上是投影算子。其矩阵元素  $a_{ij}$  在图1.7中给了定义。利用图1.10所描述的例子, 数据  $P$  的反投影可用乘以矩阵  $A$  的转置矩阵  $A^T$  来得到:

$$B = A^T P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ 11 \\ 6 \end{bmatrix},$$

这个结果和图1.11中用“作图方法”得到的结果相同。

对于连续的情况, 反投影图像  $b(x, y)$  有下面几种等价的表达方式:

$$b(x, y) = \int_0^\pi p(s, \theta) \big|_{s=x \cos \theta + y \sin \theta} d\theta,$$

$$b(x, y) = \int_0^\pi p(s, \theta) \big|_{s=\bar{x} \cdot \bar{\theta}} d\theta,$$

$$b(x, y) = \int_0^\pi p(\bar{x} \cdot \bar{\theta}, \theta) d\theta,$$

$$b(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta。$$

### 1.5.3 狄拉克 $\delta$ 函数

狄拉克  $\delta$  函数并不象一个正常的函数那样把定义域中的一个值映射到值域中的一个值。狄拉克  $\delta$  函数实际上是一个广义函数 (或称为分布函数), 它可

以用不同的方式来定义。在这里我们用一个高斯函数序列来定义它。在这个高斯函数序列中，每一个高斯函数（图1.13）曲线下的面积都是一。当参数  $n$  增大时，曲线变得越来越窄，而且越来越高（图1.13）：

$$\left(\frac{n}{\pi}\right)^{1/2} e^{-nx^2}。$$

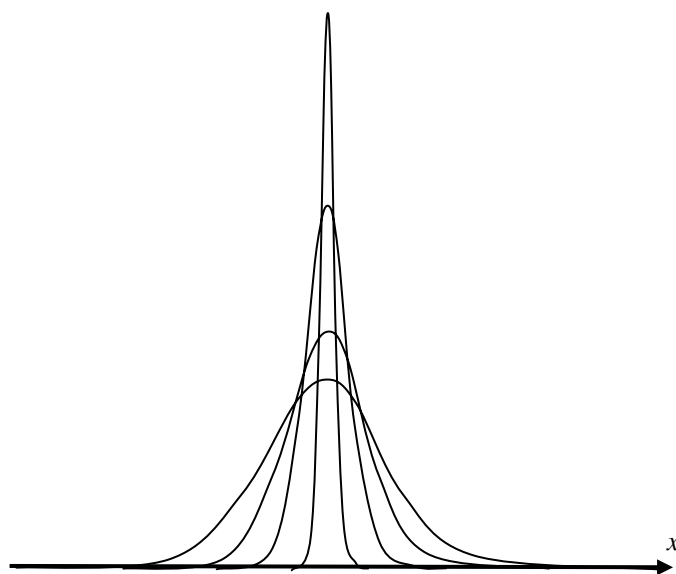


图 1.13 用一个高斯函数序列来定义狄拉克  $\delta$  函数。

令  $f(x)$  是一个平滑的函数，它的任何阶导数处处存在，而且对任何整数  $N$  有  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^N f(x) = 0$ 。狄拉克  $\delta$  函数就可以这样隐涵地定义为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{n}{\pi}\right)^{1/2} e^{-nx^2} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)。$$

狄拉克  $\delta$  函数有如下的性质：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x+a) dx = f(a)，$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax)f(x)dx = \frac{1}{|a|}f(0),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x)f(x)dx = (-1)^n f^{(n)}(0) \text{ [第 } n \text{ 阶导数]},$$

$$\delta(g(x))f(x) = \sum_n \frac{1}{|g'(\lambda_n)|} \delta(x - \lambda_n), \text{ 其中 } \lambda_n \text{ 为 } g(x) \text{ 的零点.}$$

狄拉克 $\delta$ 函数在二维和三维的情形的定义分别是,  $\delta(\bar{x}) = \delta(x)\delta(y)$  和  $\delta(\bar{x}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ 。这时, 在上面的最后性质中,  $|g'|$  要分别被

$$|\text{grad}(g)| = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} \text{ 和 } |\text{grad}(g)| = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2} \text{ 取代。}$$

在二维成像中, 我们通常用 $\delta$ 函数 $\delta(\bar{x} - \bar{x}_0)$ 来表示位于 $\bar{x} = \bar{x}_0$ 的点源。函数 $f(\bar{x}) = \delta(\bar{x} - \bar{x}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)$ 的拉东变换就是

$$p(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x})\delta(\bar{x} \cdot \bar{\theta} - s)d\bar{x},$$

$$p(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s)dx dy,$$

$$p(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y - y_0) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)\delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s)dx \right] dy,$$

$$p(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y - y_0)\delta(x_0 \cos \theta + y \sin \theta - s)dy,$$

$$p(s, \theta) = \delta(x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta - s),$$

这个投影函数所对应的正弦图与图1.6所示的正弦图很相似。

## 1.6 例题

**例题 1** 如图 1.14 所示，在那两张照片中都可以看到两棵不重叠的大树。你可以唯一地画出那两棵树的地图吗？若不行的话，你也许需要多照些照片。如果你只允许再多照一张照片，选个什么角度照呢？

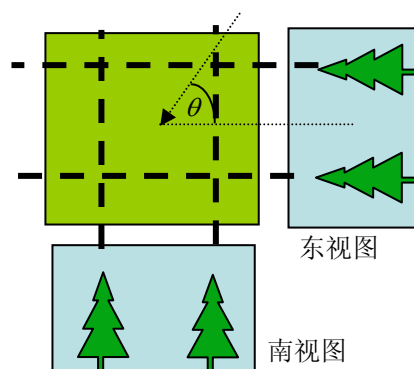


图 1.14 每张照片上都可看到两棵树。

解

下面的两种情况都满足这两张照片所能决定的大树的分布：

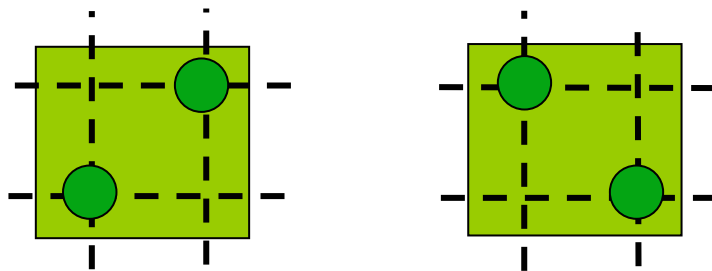


图 1.15 地图问题的两个可能的答案。

如果我们在 $45^\circ$ 角的方向再拍一张照片就可以解决这个模棱两可的问题了。

**例题 2** 试求一均匀圆盘的投影函数。圆盘的圆心与探测器旋转中心不重合。

解

在前面我们已经知道当圆盘的圆心与探测器旋转中心重合时，圆盘的投影函数的表达式是

$$\begin{aligned} \text{当 } |s| < R, \quad p(s, \theta) &= 2\rho\sqrt{R^2 - s^2}; \\ \text{否则的话,} \quad p(s, \theta) &= 0. \end{aligned}$$

不失一般性，我们可以假设圆盘的圆心在  $x$  轴的正方向  $(r, 0)$  处。

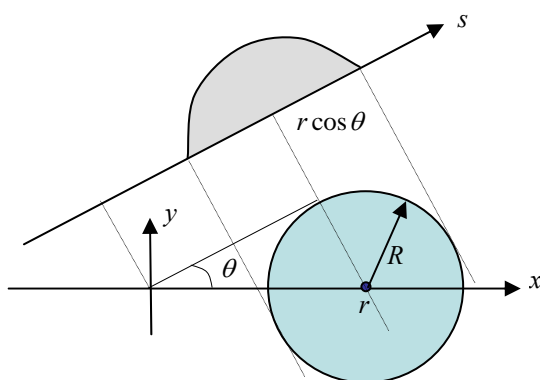


图 1.16 求偏离中心的圆盘投影函数。

注意到，物体的位移等价于投影数据在探测器  $s$  轴上的位移。在  $s$  轴上的位移距离是  $r \cos \theta$ 。那么，

$$\begin{aligned} \text{当 } |s - r \cos \theta| < R, \quad p(s, \theta) &= 2\rho\sqrt{R^2 - (s - r \cos \theta)^2}; \\ \text{否则的话,} \quad p(s, \theta) &= 0. \end{aligned}$$

**例题 3\*** 试证明平行光束投影数据为冗余数据的 (即相同数据) 的条件是： $p(s, \theta) = p(-s, \theta + \pi)$ 。

*证明*

利用第1.5 节的投影的定义，可得

$$p(-s, \theta + \pi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos(\theta + \pi) + y \sin(\theta + \pi) - (-s)) dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(-x \cos \theta - y \sin \theta + s) dx dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(-(x \cos \theta + y \sin \theta - s)) dx dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy \\
&= p(s, \theta) \quad [\text{因为} \delta \text{ 函数是偶函数}]
\end{aligned}$$

**例题 4\*** 证明投影/反投影算子的点扩散函数是  $1/r$ ，其中  $r = \|\bar{x} - \bar{x}_0\|$ 。点源物体的表达式是  $f(\bar{x}) = \delta(\bar{x} - \bar{x}_0)$ 。

*证明*

利用反投影的定义，我们有

$$b(\bar{x}) = \int_0^{\pi} p(\bar{x} \cdot \bar{\theta}, \theta) d\theta = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f((\bar{x} \cdot \bar{\theta})\bar{\theta} + t\bar{\theta}^{\perp}) dt d\theta。$$

我们注意到  $\int_{-\infty}^{\infty} f((\bar{x} \cdot \bar{\theta})\bar{\theta} + t\bar{\theta}^{\perp}) dt$  是沿着  $\bar{\theta}^{\perp}$  方向并过点  $\bar{x}$  的线积分（图 1.17）。这个线积分还可写成

$$\int_{-\infty}^{\infty} f((\bar{x} \cdot \bar{\theta})\bar{\theta} + t\bar{\theta}^{\perp}) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x} - \hat{t}\bar{\theta}^{\perp}) d\hat{t}。$$

所以，该点源经过投影和反投影后得到的图像是

$$b(\bar{x}) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x} - \hat{t}\bar{\theta}^{\perp}) d\hat{t} d\theta。$$

令  $\hat{\bar{x}} = \hat{t}\bar{\theta}^{\perp}$ 。我们有  $\|\hat{\bar{x}}\| = |\hat{t}|$  及  $d\hat{\bar{x}} = |\hat{t}| d\hat{t} d\theta$ 。上面的表达式则变为

$$b(\bar{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\bar{x} - \hat{\bar{x}})}{\|\hat{\bar{x}}\|} d\hat{\bar{x}}。$$

令  $f(\bar{x}) = \delta(\bar{x} - \bar{x}_0)$ ，那么就可得到投影/反投影算子的点扩散函数：

$$b(\bar{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\bar{x} - \bar{x}_0 - \hat{\bar{x}})}{\|\hat{\bar{x}}\|} d\hat{\bar{x}} = \frac{1}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} = \frac{1}{r}。$$

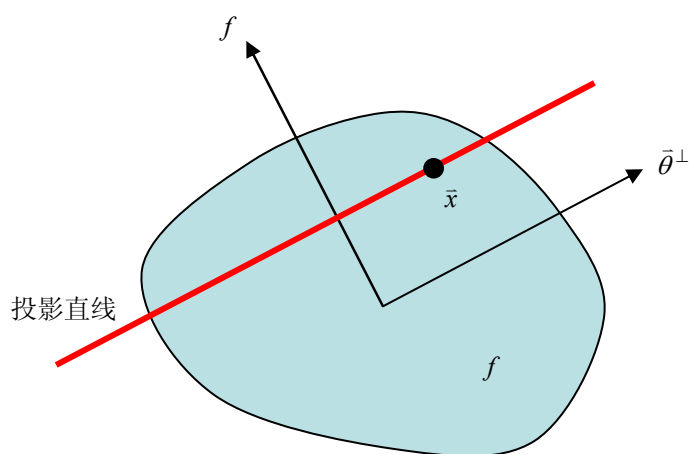


图 1.17 这个线积分的积分路径是过反投影点的一条直线。

**例题 5\*** 计算  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(e^{2(x-3)(x+4)} - 1) f(x) dx$ 。

解

令

$$g(x) = e^{2(x-3)(x+4)} - 1。$$

解方程  $g(x) = e^{2(x-3)(x+4)} - 1 = 0$ ，我们便得到函数  $g(x)$  的零点

$$\lambda_1 = 3 \text{ 和 } \lambda_2 = -4。$$

对函数  $g(x)$  求导，得到

$$g'(x) = 2[(x-3) + (x+4)]e^{2(x-3)(x+4)} = 2(2x+1)e^{2(x-3)(x+4)}。$$

那么，在两个零点处

$$g'(3) = 14 \text{ 和 } g'(-4) = -14。$$

我们就有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(e^{2(x-3)(x+4)} - 1) f(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x-3)}{|14|} f(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x+4)}{|14|} f(x) dx \\ &= \frac{f(3) + f(-4)}{14}。 \end{aligned}$$

## 1.7 小结

- 断层成像的过程包括采集投影数据并把这些数据转变成截面的图像。投影数据需要从多个角度采集。
- 投影数据是对物体的线积分（或称射线和，拉东变换）。投影数据是用探测器采集的。探测器上所成的像是物体叠加后的图像。
- 反投影是一个求和的过程，它把所有角度上的数据都加在一起。它把投影域中的数据沿着原来的投影路径“涂抹”回去，但不改变数据的值。
- 图像重建是一个数学工序，它的目的是把投影数据中的叠加效应除去，并营造出一个无重叠的原本物体的截面图像。这个数学工序叫做算法。
- 在研发各种算法时通常用狄拉克  $\delta$  函数来当作点源。
- 在阅读了本章之后，读者应最起码对什么是投影什么是反投影有所了解。



## 参考文献

- Barrett H, Swindell W (1988) Radiological Imaging, Academic, New York
- Bracewell RN (1955) Two-Dimensional Imaging, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ
- Bushberg JT, Seibert JA, Leidoldr EM, Boone JM (2002) The Essential Physics of Medical Imaging, 2<sup>nd</sup> ed., Lippincott Williams and Wilkins, Philadelphia
- Carlton RR, Adler AM (2001) Principles of Radiographic Imaging: An Art and a Science, 3<sup>rd</sup> ed., Delmar, Albany, NY
- Cho ZH, Jones JP, Signh M (1993) Foundations of Medical Imaging, Wiley, New York
- Cormack AM (1963) Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications. J Appl Phys 34:2722-2727
- Herman G (1981) Image Reconstruction from Projections: The Fundamentals of Computerized Tomography, Academic Press, New York
- Kak AC, Stanley M (1987) Principles of Computerized Tomography, IEEE Press, Piscataway, NJ
- Macovski A (1983) Medical Imaging Systems, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ
- Natterer F (1986) The Mathematics of Computerized Tomography, Wiley-Teubner, New York
- Prince JL, Links JM (2006) Medical Imaging Signals and System. Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ
- Shung KK, Smith MB, Tsui BMW (1992) Principles of Medical Imaging, Academic Press, San Diego, CA
- Zeng GL (2001) Image reconstruction — a tutorial. Computerized Medical Imaging and Graphics 25:97-103

## 第2章 平行光束图像重建

### 2.1 傅里叶变换

对于一个给定的函数  $p(s)$ ，它总能用不同频率  $\omega$  的正弦函数和余弦函数的加权和来表示。这个加权和的权函数记为  $P(\omega)$ 。这就是傅里叶变换的理论基础。你可以用棱镜把太阳光分解为不同颜色的光谱。你还可以把这个五颜六色的光谱重新合成，并还原成原本的光线 (图2.1)。

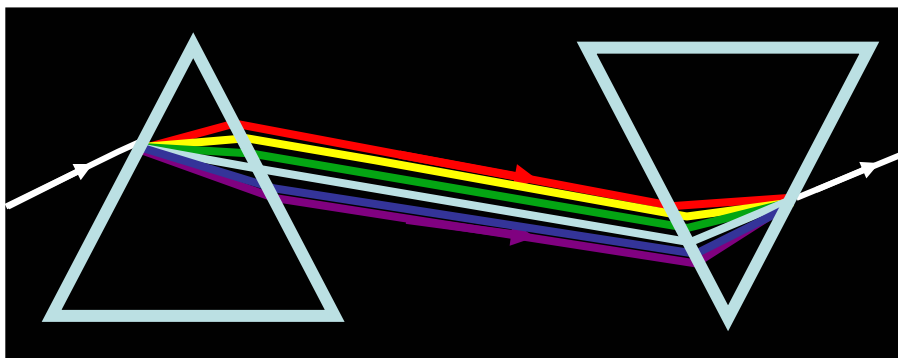


图 2.1 白光能分解为一组有色光。这一组有色光也能还原成白光。

上面提到的以变量为频率  $\omega$  的权函数  $P(\omega)$  就是函数  $p(s)$  的傅里叶变换。人们可以利用数学公式轻而易举地算出函数  $p(s)$  的傅里叶变换  $P(\omega)$ ，或从傅里叶变换  $P(\omega)$  算出原来的函数  $p(s)$  (即  $P(\omega)$  的反傅里叶变换)。不管是  $p(s)$  还是  $P(\omega)$ ，只要你知道其中一个，你就可以算出另一个。它们是一对儿。其中一个用小写字母标记并用  $s$  为自变量，而另一个用大写字母标记并用  $\omega$  为自变量。

图2.2给出了一个傅里叶变换对，其中  $P(\omega)$  是  $p(s)$  的傅里叶变换。函数  $P(\omega)$  的图形告诉我们那个三角形函数  $p(s)$  有丰富的低频分量，因为  $P(\omega)$  主峰比旁瓣高。随着频率  $|\omega|$  的升高，旁瓣的幅度逐渐减小。我们还注意到函数  $P(\omega)$  有一些零值谷点，这些谷点所对应的频率在那个三角形函数  $p(s)$  中不存在。利用傅里叶变换，我们可以发现一些内在的数学关系，这些关系不用傅里叶变换则很难看到。

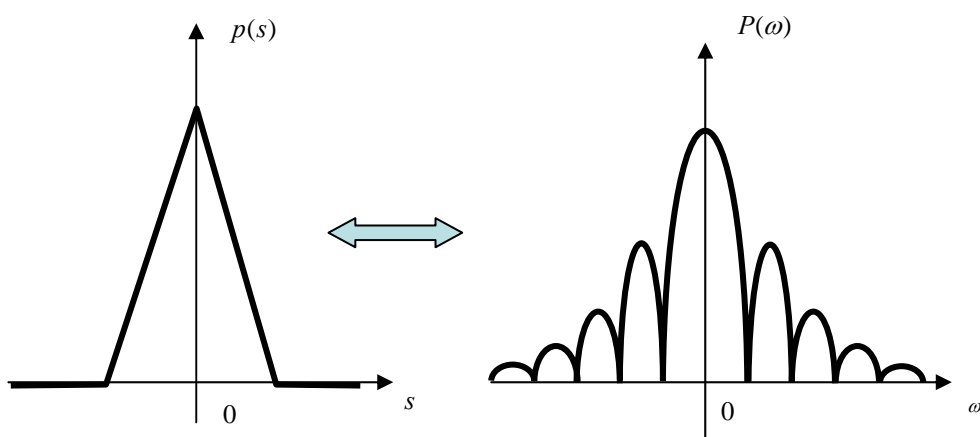


图 2.2 傅里叶变换对。

对于二元和多元也可以定义傅里叶变换。我们记二元函数  $f(x, y)$  的傅里叶变换为  $F(\omega_x, \omega_y)$ ，这里， $\omega_x$  是  $x$  方向上的频率， $\omega_y$  是  $y$  方向上的频率。

## 2.2 中心切片定理

中心切片定理是断层成像的理论基础。这个定理还有其它的称谓，如投影切片定理和傅里叶中心切片定理。二维图像的中心切片定理指出：二维函数  $f(x, y)$  的投影  $p(s)$  之傅里叶变换  $P(\omega)$  等于函数  $f(x, y)$  的傅里叶变换  $F(\omega_x, \omega_y)$  沿与探测器平行的方向过原点的片段。

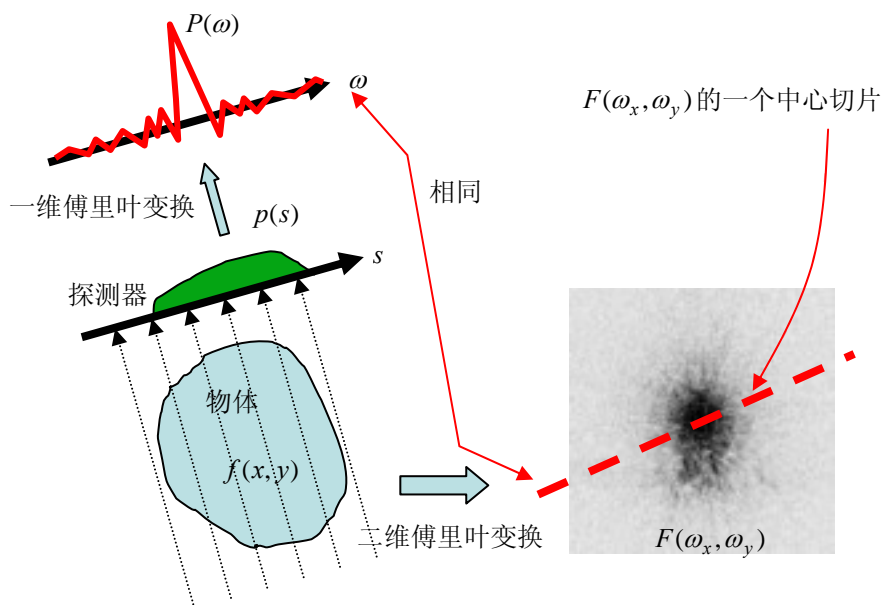


图 2.3 二维成像的中心切片定理。

如果探测器绕物体旋转至少  $180^\circ$ ，物体的二维傅里叶变换  $F(\omega_x, \omega_y)$  所对应于探测器方向的中心片段就能覆盖整个傅里叶空间，即  $\omega_x$ - $\omega_y$  平面 (图 2.4)。换句话说，探测器绕物体旋转  $180^\circ$  就能测到完整的傅里叶变换函数  $F(\omega_x, \omega_y)$ 。一旦函数  $F(\omega_x, \omega_y)$  为已知函数，原本的图像函数  $f(x, y)$  就可以用称为二维傅里叶反变换的数学手段轻易获得。

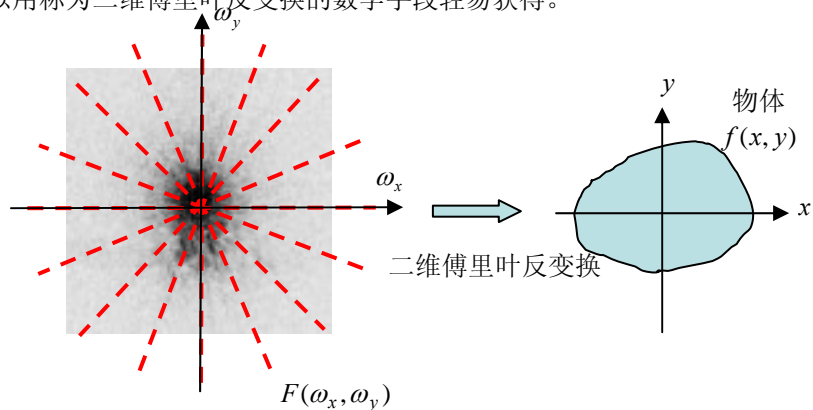


图 2.4 探测器在每个探测方向上向傅里叶空间添入一条线。当这些线覆盖了整个傅里叶空间后，原本图像可由二维傅里叶反变换获得重建。

在一个方向上的反投影等价于向  $F(\omega_x, \omega_y)$  所在的  $\omega_x\text{-}\omega_y$  平面(即傅里叶平面)添加一个中心片段。做  $180^\circ$  的反投影就可以完完全全地得到二维傅里叶变换函数  $F(\omega_x, \omega_y)$ 。根据傅里叶变换对的性质, 原本图像函数  $f(x, y)$  就被确定了。

在第1章里我们反复强调光靠反投影是不能得到原本图像的, 只能得到一个模糊的图像。这与我们刚才的讨论有没有矛盾呢? 其实没有矛盾。让我们仔细再看一下图2.4所示的  $\omega_x\text{-}\omega_y$  平面。当我们往  $\omega_x\text{-}\omega_y$  平面里一条一条地添加“中心片段”时, 中心片段在  $\omega_x\text{-}\omega_y$  平面的原点的密度高于在远离原点的区域的密度。在傅里叶空间原点附近的区域是低频区域。对低频分量的过分加权导致图像变得模糊。

为了消除模糊的效果, 我们对傅里叶空间要进行加权矫正, 使其密度均匀。我们注意到, 做了反投影后, 傅里叶空间的密度正比于  $1/\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$ , 我们可提出两个矫正的方案。

第一个方案是在  $\omega_x\text{-}\omega_y$  空间把所得到的傅里叶“图像”乘以  $\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$ , 这个乘积就是  $F(\omega_x, \omega_y)$ 。对  $F(\omega_x, \omega_y)$  做二维傅里叶反变换便得到原本的图像  $f(x, y)$ 。

第二个方案是把投影数据  $p(s, \theta)$  的一维傅里叶变换  $P(\omega, \theta)$  乘以  $|\omega|$ 。然后, 再对乘积  $|\omega| P(\omega, \theta)$  做一维傅里叶反变换。对投影数据做了处理(即滤波)之后, 把处理后(即滤波后)的数据做反投影。这样就得到了重建的图像  $f(x, y)$ 。我们要提一下, 在前面的讨论中(图2.3), 我们故意略去了  $P(\omega, \theta)$  和  $p(s, \theta)$  中的第二个变量  $\theta$ , 让读者把注意力放在第一个变量上。

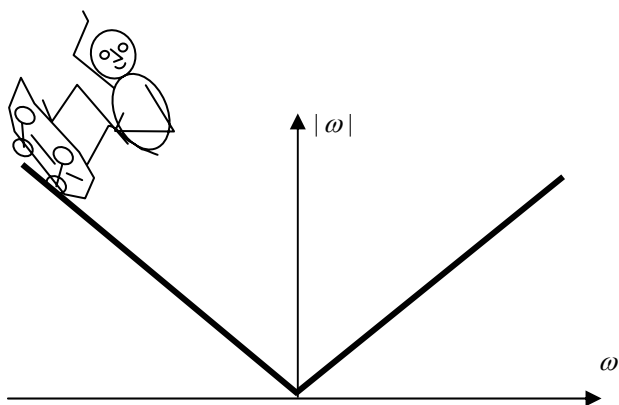


图 2.5 一维斜坡滤波器的传递函数。

在本书的后面章节中，这两个方案还将常常碰到。这第二个方案通常被称作处理FBP (Filtered Backprojection 先滤波后反投影) 算法。第二个方案比第一个方案知名度高得多。在断层成像领域里，函数 $|\omega|$ 被称作斜坡滤波器 (图2.5)。看上去象吧？在第一章中，我们在投影数据的脉冲旁加上一对负值的“双翅”正是第二个方案里斜坡滤波的结果。

## 2.3 重建算法

反投影完成了图像重建中最艰巨的工作。它把从不同角度测得的投影数据做成了一幅图像。这个图像与我们想要得到的图像相差不多，只是模糊了一些。这模糊的效果是因为在二维傅里叶空间(即 $\omega_x$ - $\omega_y$ 平面)里有个非均匀的 $1/|\omega|$  密度分布，这里  $|\omega| = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$ 。矫正这个  $1/|\omega|$  密度分布函数可以通过对投影数据  $p(s, \theta)$  或其一维傅里叶变换  $P(\omega, \theta)$  进行斜坡滤波 (即在频率域乘以  $|\omega|$ ) 完成。对滤波后的数据施行反投影就可得到精确的图像。

### 2.3.1 方法1

具体地说，这个FBP(先滤波再反投影)算法可按图2.6所示步骤来实现，其中，斜坡滤波的步骤如下：

- (i) 求投影数据  $p(s, \theta)$  的以  $s$  为变量的一维傅里叶变换，得到  $P(\omega, \theta)$ 。
- (ii) 对  $P(\omega, \theta)$  乘以斜坡滤波器的传递函数  $|\omega|$ ，得到  $Q(\omega, \theta)$ 。
- (iii) 求  $Q(\omega, \theta)$  的以  $\omega$  为变量的一维傅里叶反变换，得到  $q(s, \theta)$ 。

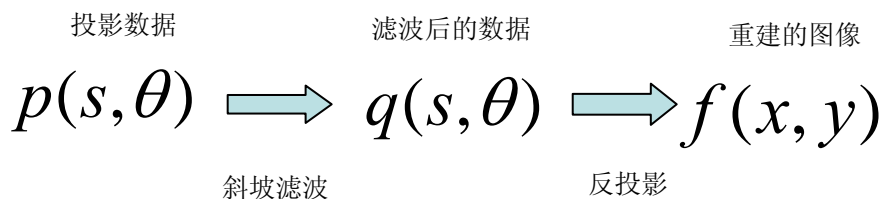


图 2.6 FBP算法的实现步骤。

## 2.3.2 方法2

斜坡滤波有不只一种实现方法。实际上，我们根本不需要用傅里叶变换来做斜坡滤波。根据傅里叶变换理论，在  $\omega$  域中做乘法等价于在  $s$  域中做卷积 (图2.7)。

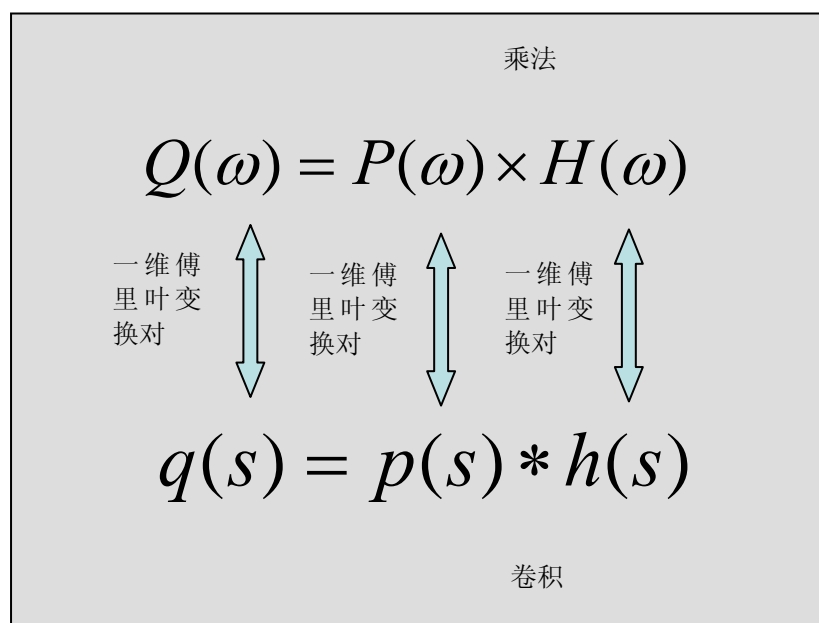


图 2.7 傅里叶变换有个重要性质：在一个域中做乘法等价于在另一个域中做卷积。

方法1中的三个步骤 (i), (ii), (iii) 等价于一个叫做 *卷积* 的数学运算。斜坡滤波后的数据  $q(s, \theta)$  可以通过卷积而得到：

$$q(s, \theta) = p(s, \theta) * h(s),$$

这里“\*”是卷积运算的记号，这个卷积运算是以  $s$  为变量的积分运算。其中  $h(s)$  是卷积积分中的卷积核，它是  $H(\omega) = |\omega|$  的一维傅里叶反变换。

下面我们给个卷积的例子，希望它能帮助你对卷积产生一个直观的概念。如果卷积核  $h(s)$  不是偶函数，首先要对它进行左右翻转，变成  $h(-s)$ 。然后，我们可以把函数  $p(s)$  分解成一组垂直的脉冲(即狄拉克  $\delta$  函数)。接下来，把每个脉冲由  $h(-s)$  替代。具体地说，把  $h(-s)$  的  $s = 0$  的位置上，放在

脉冲的位置并用该脉冲的“高度”来乘以  $h(-s)$ 。这个“高度”可以是负值。最后，把这些不同位置不同高度的  $h(-s)$  统统加起来，这就得到了  $q(s)$  (图2.8)。

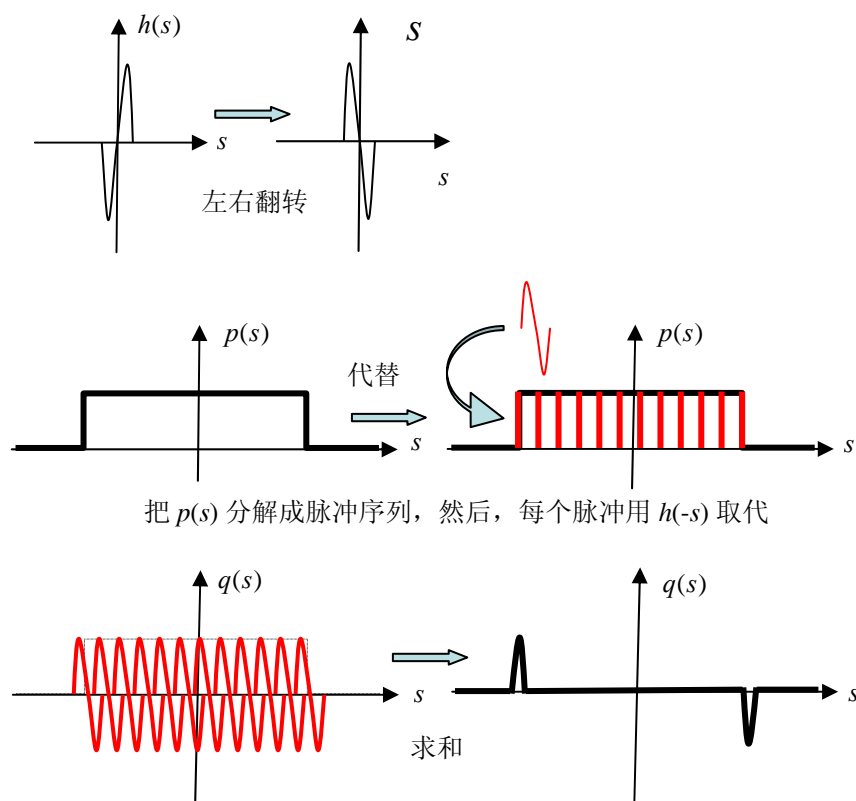


图 2.8 卷积的步骤。

### 2.3.3 方法3

这里介绍实现斜坡滤波的第三个方法。我们先把斜坡滤波器的传递函数分解成两部分：

$$H(\omega) = |\omega| = i2\pi\omega \times \frac{1}{i2\pi} \text{sgn}(\omega),$$



这里  $i = \sqrt{-1}$ ，当  $\omega > 0$ ， $\text{sgn}(\omega) = 1$ ，当  $\omega < 0$ ， $\text{sgn}(\omega) = -1$ ，当  $\omega = 0$ ， $\text{sgn}(\omega) = 0$ 。我们要用到傅里叶变换的两个性质。

性质 1：在傅里叶域 (即  $\omega$  域) 中乘以  $i2\pi\omega$  相当于在空间域 (即  $s$  域) 中求导数。

性质 2：函数  $-i \text{sgn}(\omega)$  的傅里叶反变换是  $1/(\pi s)$ 。与  $1/(\pi s)$  做卷积叫做希尔伯特变换

利用图2.7中给出的关系，斜坡滤波就可以这样实现：

$$q(s, \theta) = \frac{dp(s, \theta)}{ds} * \frac{-1}{2\pi^2 s},$$

它是由求导数和希尔伯特变换的组合来完成任务的。

#### 2.3.4 方法4

如果我们改变斜坡滤波和反投影的次序，我们就可得到另一个图像重建的方法—先反投影后滤波算法。在做了反投影后，我们会得到个模糊的二维图像  $b(x, y)$ 。下一步是应用一个二维的滤波器来使图像变得清晰。下面是一个做二维滤波的步骤：

- (i) 对反投影得到的图像  $b(x, y)$  求二维傅里叶变换，得到  $B(\omega_x, \omega_y)$ 。
- (ii) 对  $B(\omega_x, \omega_y)$  乘以斜坡滤波器的传递函数  $|\omega| = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$ ，得到  $F(\omega_x, \omega_y)$ 。
- (iii) 对  $F(\omega_x, \omega_y)$  求二维傅里叶反变换，得到  $f(x, y)$ 。

#### 2.3.5 方法5

前面讨论过的方法3是求导，希尔伯特变换，和反投影三部曲。如果我们改变一下它们的执行次序就可得到一个新的重建算法：

- (i) 对投影数据  $p(s, \theta)$  以变量  $s$  求导 (实际上是求偏导)，得到  $dp(s, \theta) / ds$ 。

- (ii) 对  $dp(s, \theta) / ds$  做  $180^\circ$  的反投影。
- (iii) 对反投影得到的图像逐行的做(一维的)希尔伯特变换。其方向是与探测器在  $90^\circ$  角的位置相平行。

你可能已经注意到了，我们在玩儿改变次序的游戏，并由此以得到越来越多的重建算法。我们改变斜坡滤波和反投影的次序得到一个新的重建算法，改变求导，希尔伯特变换，和反投影的次序又得到了一个新的重建算法。如果我们“颠三倒四”地把这个游戏继续玩儿下去，我们还真的可以得出不少图像重建算法呢(图2.9)。其中每个算法都有它的长处和短处。

虽然图2.9已经列出了不少图像重建算法，但是还没有穷尽所有的可能性。例如，希尔伯特变换可以在空间域中做卷积来实现，也可以在傅里叶域中做乘法来实现。除此以外，希尔伯特变换还可以在空间域中做积分来实现，这个积分并非卷积，而是在有限区间上的积分。这个有限积分的希尔伯特变换在处理不完整的(即截断的)投影数据时有着重要的应用。

方法	第一步	第二步	第三步
1	利用傅里叶变换做一维斜坡滤波	反投影	
2	利用卷积做一维斜坡滤波	反投影	
4	反投影	利用傅里叶变换做二维斜坡滤波	
	反投影	利用二维卷积做二维斜坡滤波	
3	求导	希尔伯特变换	反投影
5	求导	反投影	希尔伯特变换
	反投影	求导	希尔伯特变换
	希尔伯特变换	求导	反投影
	希尔伯特变换	反投影	求导
	反投影	希尔伯特变换	求导

图 2.9 平行光束图像重建解析算法一览表。

你也可能注意到了在图2.9列出的所有算法中，所有算法都包含着反投影。其实，反投影也不是必不可少的。没有反投影照样可以重建图像。可以利用中心切片定理把投影数据的傅里叶变换数据  $P(\omega, \theta)$  嵌入  $\omega_x-\omega_y$  平面中的适当的位置。这个方法实际上是反投影在傅里叶域中的实现。话又说回来，这个在傅里叶域中实现的反投影并不常用，因为这个方法是基于从极坐

标系  $(\omega, \theta)$  到直角坐标系  $(\omega_x, \omega_y)$  的插值运算，而插值运算可能要引入比较大的误差。

## 2.4 计算机模拟例子

在图2.10中，我们一步一步地显示FBP算法是如何工作的。原本图像函数  $f(x, y)$  显示在图2.10的右下角。原本图像由一个大圆盘和四个小圆盘组成。投影数据  $p(s, \theta)$  是用计算机软件利用解析的方法算出的。在投影数据的显示图像 (即  $s$ - $\theta$  坐标系所示的正弦图) 中，那两个靠外侧的小圆盘所形成的两条正弦曲线清晰可见。

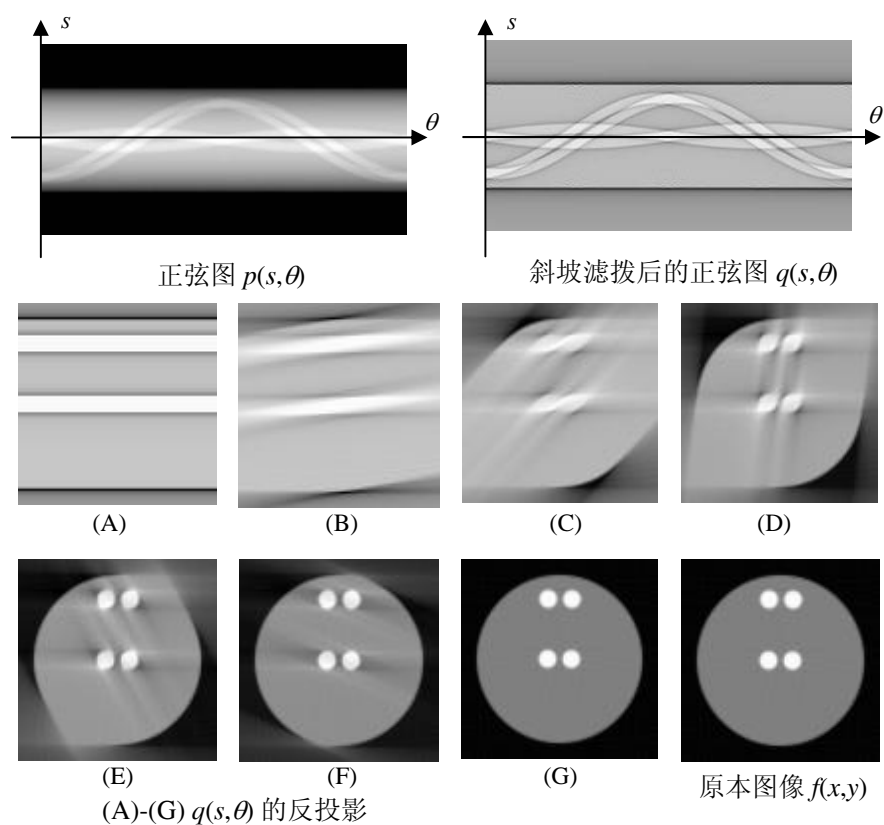


图 2.10 运行中的FBP算法：滤波及逐渐增加角度的反投影。

当投影数据  $p(s, \theta)$  经过斜坡滤波之后，由于斜坡滤波的效果，滤波后的数据  $q(s, \theta)$  清晰多了。斜坡滤波器其实是个高通滤波器，它抑制低频成分，增强高频成分。在每个大小圆盘投影后的像的边缘清楚可见更深色的“花边”。这些更深色的花边就是我们在第一章提到的负值的“双翅”。

在图2.10中，(A)是对  $q(s, \theta)$  一个角度的反投影。在这第一个角度，反投影就是把滤波后的数据  $q(s, \theta)$  沿着投影方向“复制”到整个图像空间。我们曾形象地把这个运作称为“撒种子”。也有人把这个运作形容为“涂抹”。从(A)到(G)，越来越多的角度慢慢地加入反投影，反投影的图像就越来越像原本图像。值得一提的是，反投影包括两项内容，即“涂抹”和迭加。当反投影做到了  $180^\circ$  的角度范围，精确的图像就重建出来了。当然了，也可以做  $360^\circ$  角的反投影，然后再除以2。这是因为数据是冗余的，所有的数据都测了两次： $p(s, \theta) = p(-s, \theta + \pi)$  及  $q(s, \theta) = q(-s, \theta + \pi)$ 。

## 2.5\* 利用截断的投影数据重建ROI

如果我们只对图像中的一个小的区域感兴趣，这个小区域叫 ROI (region-of-interest 感兴趣区域)。在一些特定的情形，完全有可能用截断的(不完整的)投影数据做准确的 ROI 重建。图2.11就描述了这样的情形。在那里，探测器不够大，无法把整个物体摄入其内，但可把 ROI 完全看到。在断层成像理论中，这个ROI重建问题叫做内部重建问题 (Interior Problem)。一般而言，内部重建问题只能得到近似解。只有在一些特殊条件下才可得到精确解。

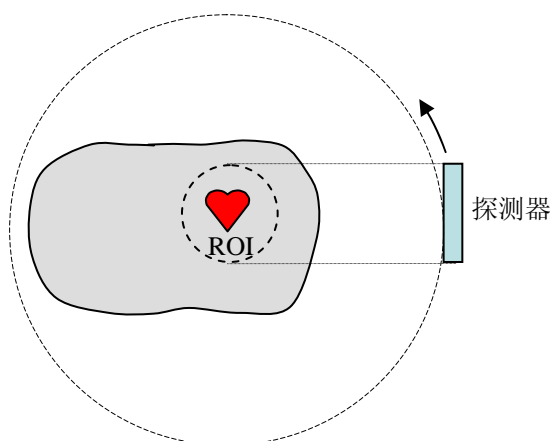


图 2.11 探测器不够大，无法把整个物体摄入其内，但可把 ROI 完全看到。

图2.12显示了一个可获精确解的 ROI 重建问题。它可用 DBH (Derivative, backprojection, and the Hilbert transform 求导, 反投影, 及希尔伯特变换) 算法来重建精确的 ROI。在图2.12中, 探测器的视野 (FOV) 是个圆形区域, 而ROI是其中更小的阴影区。求导运算和反投影运算都是局部 (local) 运算。也就是说, 运算结果只与近邻的数据有关。对于被截断的数据, 在求导和反投影后, 所得的中间结果在视野内仍然可一认为是准确的。

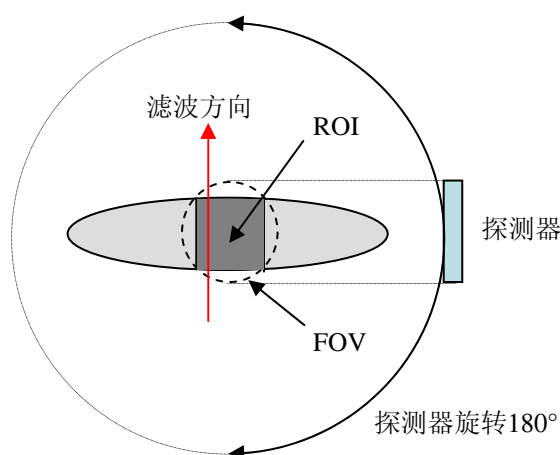


图 2.12 DBH (求导, 反投影, 希尔伯特变换) 算法可以用来准确地重建 ROI。

重建算法的下一步就是沿着图2.12所示的垂线方向逐行做一维的希尔伯特变换。通常的希尔伯特变换的表达式是个卷积积分。卷积核是个处处非零的函数  $1/s$ 。所以要计算希尔伯特变换, 我们需要知道整条积分线上的函数值。对于被截断的数据来说, 这个要求无法达到。

幸亏有个有限的希尔伯特反变换公式, 我们得以用有限区间内的数据来求精确的希尔伯特反变换。设函数  $f(s)$  只在  $[a, b]$  区间上非零,  $f(s)$  的希尔伯特变换为  $g(s)$ , 那么有限的希尔伯特反变换公式只需用到  $g(s)$  在  $[a, b]$  区间上的值来恢复出原本的  $f(s)$  来。

因为只是在视野 FOV 内我们才有所需的准确数据, 使用有限的希尔伯特反变换公式, 使我们能够沿着滤波线求得一维希尔伯特反变换, 而算出准确的 ROI。因为这个有限的希尔伯特反变换公式不具有卷积的形式, 所以, 即使使用傅里叶变换也不会使计算得到简洁和快速。

在图2.13中显示了另一个可以精确地重建 ROI 的情形。这个情形比图2.12的情形有较少的限制，也就是说条件不是那么苛刻。在图2.13中，ROI 和视野 FOV 一样大。还有一点与图2.12不同的是，在图2.13中的滤波线只有一端需要在物体外，另一端可以在物体内。在这种情况下要证明可以精确地重建 ROI 主要是靠复变函数中的解析开拓理论。美中不足的是，对于在图2.13显示的情形目前我们还没有找到一个闭合形式的公式来做 ROI 重建。

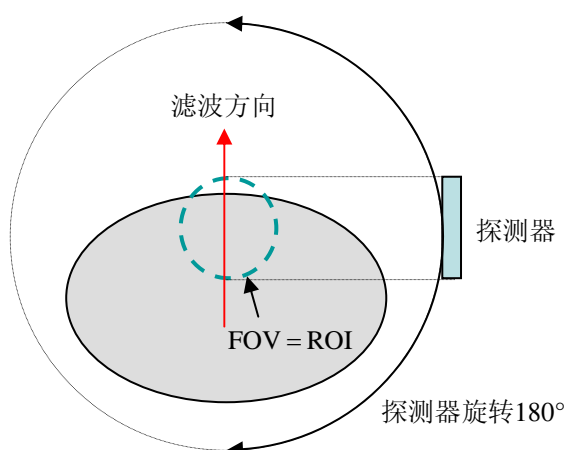


图 2.13 这样测到的数据可以准确地重建视野 FOV。视野的一部分一定要在物体以外。

这个解析开拓方法稍微推广一下就可以应用到一般的内部重建问题，但是有个要求：在视野中存在一个小小的区域，原本的图像在这个小小的区域内是已知的 (图2.14)。这个小小的区域可以相当小。和刚才讨论过的一样，要在视野中解出精确的图像目前还没有闭合形式的解，视野的图像仍需要用迭代的方法去重建。

现在我们来解释一下什么是解析开拓。复变函数是一个数学分枝，它研究的函数是以复数为变量的。而解析开拓是复变函数中的一个科目。

设 $x$ 是个实变量， $i = \sqrt{-1}$ 。虽然 $h(x) = 2x + i(3 + 5x)$ 的函数值是复数，但是 $h(x) = 2x + i(3 + 5x)$ 并不是个复变量函数。可是， $h(z) = 2z$ 却是一个复变量函数，其中 $z = x + iy$ 而且 $x$ 和 $y$ 都是实变量。这个复变量函数的定义域是复平面上的区域。

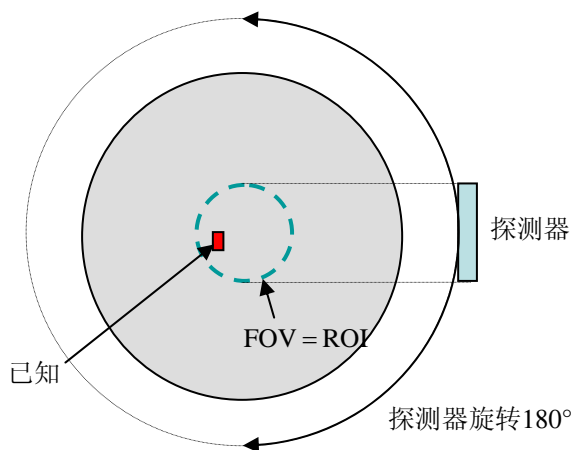


图 2.14 从理论上讲，如果视野中有一小块已知的区域，整个视野就被完全确定了。

一个复变量函数  $h(z)$  在一个复区域  $R$  内解析当且仅当函数  $h(z)$  在区域  $R$  的每一点都可导。一个复变量函数  $h(z)$  在一个复区域内解析的话，它在这个区域内就无穷次可导。因此，这就保证了在区域  $R$  内的任何一点都可得到  $h(z)$  的幂级数展开式。可以想象得出，解析函数是相当平滑的。

假设  $h_1(z)$  和  $h_2(z)$  分别是区域  $R_1$  和  $R_2$  上的解析函数，而且  $R_1$  和  $R_2$  相交的区域  $R_1 \cap R_2$  不是个空集。在  $R_1 \cap R_2$  上如果有  $h_1(z) = h_2(z)$  的话， $h_2(z)$  就称为  $h_1(z)$  到  $R_2$  上的解析开拓。同理， $h_1(z)$  就称为  $h_2(z)$  到  $R_1$  上的解析开拓。此外，这个解析开拓是唯一的。这个唯一性相当了不起，千万不要小瞧了它。如果一个复变量函数  $h(z)$  在一个区域  $R$  内解析的话，只要知道  $h(z)$  在  $R$  的一个很小的子区域内的值就可唯一地确定  $h(z)$  在  $R$  内任何其它点的值。

如果我们知道二维图像  $f(x, y)$  在一个小区域  $\Omega_{\text{已知}}$  的值，我们能有什么办法确定  $f(x, y)$  在一个更大的区域  $\Omega$  上的值。值得注意的是， $f(x, y)$  并不是个解析函数。我们不是对  $f(x, y)$  直接做解析开拓。

如图2.15所示，我们过小区域  $\Omega_{\text{已知}}$  画一条线。不妨假设这条线就是  $x$  轴。不失一般性，我们只考虑  $y = 0$  这一条直线。对其他通过已知区域  $\Omega_{\text{已知}}$  的直线，可同法处理。

我们假定，图像  $f(x,0)$  在  $-r \leq x \leq r$  是已知的。下面我们来定义一个函数  $h(x)$ ，再把它变成一个复变函数  $h(z)$ ，最后对它实施解析开拓以至于我们可以在更大的  $(-1, 1)$  区间对图像  $f(x,0)$  进行估值。

在这个特定的成像问题中，探测器比物体要小。只能采集到  $-1 \leq s \leq 1$  上的投影数据。我们现在用 FBP 算法来重建图像

$$f(x,0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s - x \cos \theta} \frac{\partial p(s, \theta)}{\partial s} ds。$$

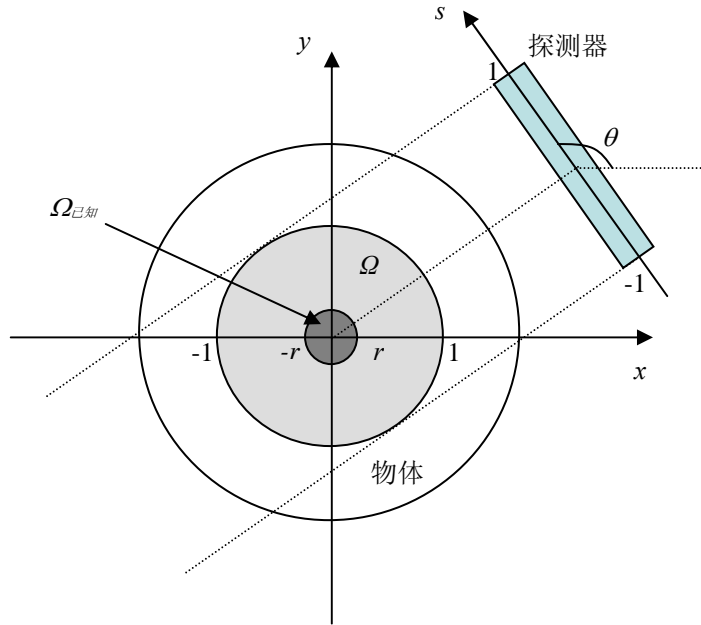


图 2.15 所求图像在  $(-1, 1)$  区间上的值可由该图像在  $[-r, r]$  区间上的已知值及截断的投影数据来确定。

这个表达式可以写成两项。第一项是对已测得数据的积分，而第二项是对未测得数据的积分：

$$f(x,0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 \frac{1}{s - x \cos \theta} \frac{\partial p(s, \theta)}{\partial s} ds + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{|s|>1} \frac{1}{s - x \cos \theta} \frac{\partial p(s, \theta)}{\partial s} ds。$$



第一项可用在  $[-1, 1]$  区间测得的数据算出。但是，我们无法算出第二项，因为，要用到的数据被截掉了。让我们把第二项记为  $h(x)$ ，也就是

$$h(x) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{|s|>1} \frac{1}{s - x \cos \theta} \frac{\partial p(s, \theta)}{\partial s} ds, \quad |x| < 1。$$

在上式中， $|x| < 1$  而  $|s| > 1$ ，这就保证了  $1/(s - x \cos \theta)$  可以有无穷阶的导数。我们还假设  $\partial p / \partial s$  是连续的。对于实际的物体来说，这是容易满足的。如果我们把实变量  $x$  用复变量  $z$  来代替， $h(z)$  在区域  $|z| < 1$  中就是一个解析函数。

这个解析函数  $h(z)$  在  $[-r, r]$  区间上是已知的，因为  $h(x)$  可以表达成

$$h(x) = f(x, 0) - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 \frac{1}{s - x \cos \theta} \frac{\partial p(s, \theta)}{\partial s} ds,$$

$f(x, 0)$  在  $[-r, r]$  区间上的值是给定的，而且上式的第二项可由所测得的数据算出。利用解析开拓， $h(z)$  在区域  $|z| < 1$  内的值就被唯一地确定下来了。这样一来， $h(x)$  在  $(-1, 1)$  上的值就确定了。一旦  $h(x)$  确定以后，所求图像在  $(-1, 1)$  上的值也就随之确定了：

$$f(x, 0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 \frac{1}{s - x \cos \theta} \frac{\partial p(s, \theta)}{\partial s} ds + h(x), \quad |x| < 1。$$

在前面的讨论中，我们知道我们有足够的数据在区域  $\Omega$  中准确地重建图像。但是，解析开拓是说起来容易做起来难的事。从数学上讲，做解析开拓要用泰勒展式来计算，但是这个方法不实际。当前，解析开拓是靠迭代方法来做的。

## 2.6\* 数学表达式

### 2.6.1 傅里叶变换与卷积

一维傅里叶变换可定义为：

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s) e^{-2\pi i s \omega} ds ,$$

相应的一维傅里叶反变换就是：

$$p(s) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) e^{2\pi i s \omega} d\omega .$$

两个函数  $f$  和  $g$  的卷积的定义是：

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) g(\tau) d\tau .$$

若傅里叶变换的算子记为  $\mathbf{F}$ ，傅里叶卷积定理可表述成

$$\mathbf{F}(f * g) = \mathbf{F}(f) \times \mathbf{F}(g) .$$

### 2.6.2 希尔伯特变换与有限希尔伯特变换

希尔伯特变换不如傅里叶变换那么有名气。傅里叶变换可以把一个实值函数变换成复值函数。而希尔伯特变换只能把一个实值函数变换成另一个实值函数。

在这一节里，我们用  $\mathbf{H}$  表示希尔伯特变换的算子。对一个函数  $f$  连着实施两次希尔伯特变换就会把这个函数还原，但差一个负号。也就是说，

$$\mathbf{H}(\mathbf{H}f) = \mathbf{H}^2 f = -f .$$

换言之，希尔伯特反变换就是希尔伯特变换再乘以 (-1)。

一个实值函数与其希尔伯特变换是正交的。设  $g=\mathbf{H}f$ ，那么

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt = 0。$$

例如，余弦函数  $\cos t$  的希尔伯特变换是正弦函数  $\sin t$ 。正弦函数  $\sin t$  的希尔伯特变换是负的余弦函数  $-\cos t$ 。

下面我们在傅里叶变换域中定义希尔伯特变换。令实值函数  $f(t)$  的傅里叶变换为  $F(\omega)$ ， $f(t)$  的希尔伯特变换为  $g(t)$ ，而  $g(t)$  的傅里叶变换为  $G(\omega)$ ，我们有

$$G(\omega) = -i \operatorname{sgn}(\omega) F(\omega)。$$

其中， $i = \sqrt{-1}$ ，而  $\operatorname{sgn}(\omega)$  是符号函数：

$$\operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega > 0 \\ 0, & \omega = 0 \\ -1, & \omega < 0。 \end{cases}$$

因为  $-i \operatorname{sgn}(\omega)$  的幅度是常数 1，所以希尔伯特变换是个全通滤波器，并且有  $\pm 90^\circ$  的相位移动。

在空间域中，希尔伯特变换可以完全等价地定义为一个卷积积分，其卷积核是

$$h(t) = \frac{1}{\pi t}，$$

其卷积表达式为

$$g(t) = h(t) * f(t) = p.v. \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \frac{1}{\pi(t-\tau)} d\tau，$$

其中，“p.v.”次表示广义积分的积分主值，是英文 Principle Value 的缩写。

在前面我们已经看到了斜坡滤波可以分解成希尔伯特变换和求导运算。求导运算和希尔伯特变换谁先谁后到无所谓。你高兴的话，可先求导再求希尔伯特变换。把这个次序颠倒过来也行。用数学表达式来表述就是

$$\mathbf{H}(f'(t)) = \frac{d(\mathbf{H}(f(t)))}{dt}.$$

我们还可以交换希尔伯特变换和  $180^\circ$  反投影的次序。这个次序交换的合理性并不是显而易见的。为了体会出这个次序交换造成的影响，我们要用中心切片定理，并在傅里叶变换域中讨论这个问题。我们先看看  $180^\circ$  反投影的数学表达式

$$b(x, y) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathbf{H}p(s, \theta) \big|_{s=x \cos \theta + y \sin \theta} d\theta,$$

其中，希尔伯特变换是作用于变量  $s$  的。令  $p(s, \theta)$  对于变量  $s$  的傅里叶变换为  $P(\omega, \theta)$ 。实施希尔伯特变换就是在  $\omega$  的正半轴对  $P(\omega, \theta)$  乘  $(-i)$ ，在  $\omega$  的负半轴对  $P(\omega, \theta)$  乘  $(i)$ 。做反投影不外乎是把乘积  $(-i)P(\omega, \theta)$  或  $(i)P(\omega, \theta)$  嵌入二维傅里叶空间 (即  $\omega_x$ - $\omega_y$  平面) 适当的位置 (图2.16)。

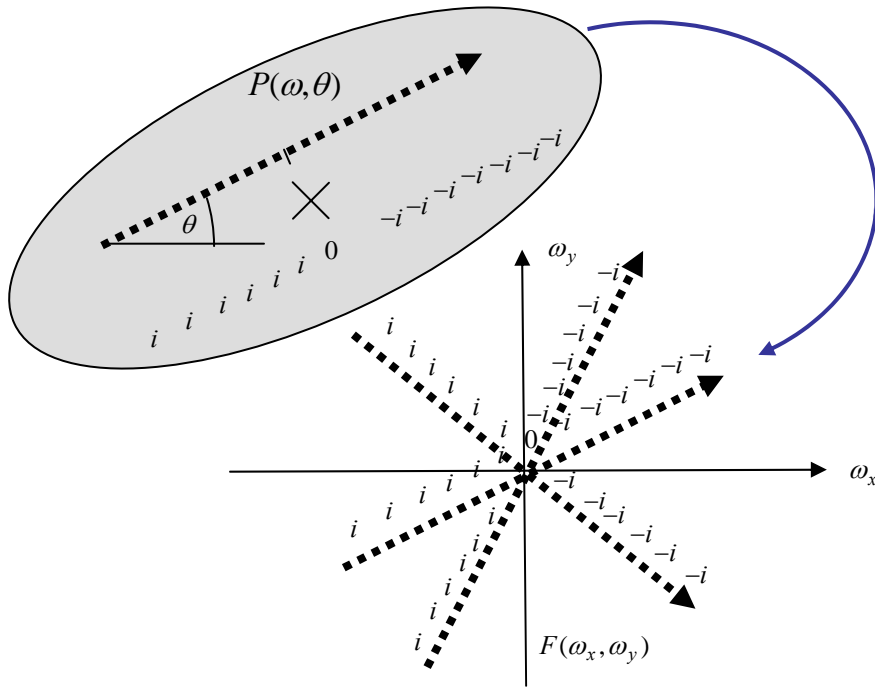


图 2.16 对  $\mathbf{H}p(s, \theta)$  在  $(-\pi/2, \pi/2)$  区间上的反投影等价于对  $p(s, \theta)$  在  $(-\pi/2, \pi/2)$  区间上的反投影，然后在左半  $\omega_x$ - $\omega_y$  平面乘以  $(i)$  并在右半  $\omega_x$ - $\omega_y$  平面乘以  $(-i)$ 。

由图2.16可以看出下面两种方法是等价的。第一种是先对  $p(s, \theta)$  进行希尔伯特变换，然后做反投影。第二种先对  $p(s, \theta)$  做反投影，然后一条线一条线地 (即沿着  $x$  轴方向逐行地) 做希尔伯特变换。这样逐行地做希尔伯特变换相当于在傅里叶变换域内对左半  $\omega_x$ - $\omega_y$  平面乘以  $(i)$  并对右半, 平面乘以  $(-i)$ 。这两种等价方法用数学表达式表达出来就是

$$\mathbf{H}_x \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(s, \theta) |_{s=x \cos \theta + y \sin \theta} d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathbf{H}_s p(s, \theta) |_{s=x \cos \theta + y \sin \theta} d\theta。$$

下面我们扼要地介绍一下有限希尔伯特变换的概念。有限希尔伯特变换在利用截断的 (即不完整的) 投影数据来精确重建 ROI 中起着关键的作用。

不失一般性，我们假定一个实函数  $f(t)$  只在  $(-1, 1)$  内可取非零值。也就是说，当  $|t| \geq 1$ ， $f(t)=0$ 。那么， $f(t)$  的希尔伯特变换可用下面的公式算出

$$g(t) = p.v. \int_{-1}^1 f(\tau) \frac{1}{\pi(t-\tau)} d\tau。$$

即使  $f(t)$  只在  $(-1, 1)$  内可取非零值，但  $g(t)$  未必只在有限区间内取非零值。很有可能， $g(t)$  在整个实数轴上都有非零值。下面这两个有限希尔伯特反变换公式只用到  $g(t)$  在  $[-1, 1]$  区间上的值：

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{t-1}{t+1}} p.v. \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{\tau+1}{\tau-1}} \frac{g(\tau)}{t-\tau} d\tau，$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-t^2}} \int_{-1}^1 f(\tau) d\tau + \frac{1}{\pi} p.v. \int \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau-t} g(\tau) d\tau。$$

有限希尔伯特反变换公式还有其它表达式，这里就不一一赘述了。

### 2.6.3 中心切片定理的证明

中心切片定理可表述为

$$P(\omega, \theta) = F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta)。$$

*证明*

我们首先给出一维傅里叶变换的定义式：

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s) e^{-2\pi i s \omega} ds ,$$

然后把它应用到第1.5节给出的投影数据  $p(s, \theta)$  的定义式上，并得到

$$P(\omega, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy \right] e^{-2\pi i s \omega} ds .$$

交换积分次序，得

$$P(\omega, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) e^{-2\pi i s \omega} ds \right] dx dy .$$

根据  $\delta$  函数的性质，最内层对于变量  $s$  的积分可以很容易地计算出为  $e^{-2\pi i \omega (x \cos \theta + y \sin \theta)}$ 。所以有

$$P(\omega, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i (x \cos \theta + y \sin \theta) \omega} dx dy ,$$

也就是，

$$P(\omega, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i (xu + yv)} \Big|_{u=\omega \cos \theta, v=\omega \sin \theta} dx dy .$$

最后，用二维傅里叶变换的定义即可得到

$$P(\omega, \theta) = F(\omega_x, \omega_y) \Big|_{\omega_x = \omega \cos \theta, \omega_y = \omega \sin \theta} .$$

在极坐标系中，中心切片定理的表达形式是

$$P(\omega, \theta) = F_{polar}(\omega, \theta) .$$

### 2.6.4 FBP (先滤波后反投影) 算法的推导

我们首先给出二维傅里叶变换在极坐标系下的表达式

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F_{polar}(\omega, \theta) e^{2\pi i \omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega d\theta。$$

因为  $F_{polar}(\omega, \theta) = F_{polar}(-\omega, \theta + \pi)$ ，所以

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{polar}(\omega, \theta) |\omega| e^{2\pi i \omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\omega d\theta。$$

根据中心切片定理，我们可以用  $P$  来代替  $F$ ：

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega, \theta) |\omega| e^{2\pi i \omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\omega d\theta。$$

我们意识到  $|\omega|$  是斜坡率波器的传递函数，令  $Q(\omega, \theta) = |\omega| P(\omega, \theta)$ ，则

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega, \theta) e^{2\pi i \omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\omega d\theta。$$

利用一维傅里叶反变换并记  $Q$  的反变换为  $q$ ，我们最后得到

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} q(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta，$$

或

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} q(s, \theta) |_{s=x \cos \theta + y \sin \theta} d\theta。$$

这正是  $q(s, \theta)$  的反投影 (见第1.5节)。

### 2.6.5 先卷积后反投影算法的数学表达式

令斜坡滤波器传递函数  $|\omega|$  的傅里叶反变换为卷积核  $h(s)$ 。也就是说，卷积核  $h(s)$  是从这个公式  $h(s) = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| e^{2\pi i \omega s} ds$  算出来的。利用第2.6.4节的结果，我们很容易地得到

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^{\pi} [h(s) * p(s, \theta)]|_{s=x \cos \theta + y \sin \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(x \cos \theta + y \sin \theta - s) p(s, \theta) ds d\theta。 \end{aligned}$$

### 2.6.6 拉东反演公式的数学表达式

拉东反演公式也就是 DHB (Derivative, Hilbert transform, Backprojection 求导, 希尔伯特变换, 反投影) 算法。它的推导是基于把斜坡函数  $|\omega|$  特地分解为求导数运算和求希尔伯特变换:

$$|\omega| = (2\pi i \omega) \times \left[ \frac{1}{2\pi} (-i \operatorname{sgn}(\omega)) \right]。$$

函数  $-i \operatorname{sgn}(\omega)$  的傅里叶反变换是  $1/(\pi s)$ ，而且函数  $2\pi i \omega$  的傅里叶反变换是求导算子。所以可得

$$q(s, \theta) = \frac{\partial p(s, \theta)}{\partial s} * \frac{1}{2\pi^2 s}，$$

以及

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial p(s, \theta)}{\partial s} \frac{1}{2\pi^2 (x \cos \theta + y \sin \theta - s)} ds d\theta。$$



### 2.6.7 先反投影后滤波算法的推导

我们首先考察一下 (未滤波的) 原本数据  $p(s, \theta)$  的反投影图像  $b(x, y)$ 。反投影的定义式是

$$b(x, y) = \int_0^\pi p(s, \theta) \big|_{s=x \cos \theta + y \sin \theta} d\theta。$$

利用傅里叶反变换的定义,  $p(s, \theta)$  可以用其傅里叶变换  $P(\omega, \theta)$  来表示, 那么

$$b(x, y) = \int_0^\pi \left[ \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega, \theta) e^{2\pi i \omega (x \cos \theta + y \sin \theta)} d\omega \right] d\theta。$$

利用中心切片定理, 我们可以用  $F$  来替换  $P$ :

$$b(x, y) = \int_0^\pi \left[ \int_{-\infty}^{\infty} F_{polar}(\omega, \theta) e^{2\pi i \omega (x \cos \theta + y \sin \theta)} d\omega \right] d\theta，$$

也就是

$$b(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{polar}(\omega, \theta)}{|\omega|} e^{2\pi i \omega (x \cos \theta + y \sin \theta)} |\omega| d\omega d\theta。$$

上面这个式子是二维傅里叶反变换在极坐标下的表达式。如果我们对等式两边同时 (在极坐标下) 求二维傅里叶变换, 我们就可得到

$$B_{polar}(\omega, \theta) = \frac{F_{polar}(\omega, \theta)}{|\omega|}。$$

写成直角坐标的表达式, 就成为

$$B(\omega_x, \omega_y) = \frac{F(\omega_x, \omega_y)}{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}},$$

即

$$F(\omega_x, \omega_y) = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2} B(\omega_x, \omega_y)。$$

从此式立刻可得到先反投影后滤波的算法。

## 2.7 例题

**例题 1** 写个短小的 Matlab 程序并演示在断层成像问题中要有足够多的探测视角的重要性。Matlab 中的函数 “*phantom*” 可以帮你产生一个 Shepp-Logan 模型的图像。顺便提一下, “*phantom*” 在英语中一般作 “幻影” 解, 在医学成像中, 凡是不是真正的病人, 都可称为 *phantom*, 它可以是数学模型, 也可以是个塑料容器模型。Matlab 中的函数 “*radon*” 可用来产生投影数据, 也就是对所给的模型图像  $f(x, y)$  产生一组拉东变换  $p(s, \theta)$ 。Matlab 中的函数 “*iradon*” 可用来做 FBP 算法的图像重建。

解

Matlab 程序:

```
P = phantom(128); %Generate the Shepp-Logan phantom in
a 128x128 array
angle = linspace(0,179,180); %Sampling angles
R = radon(P, angle); %Generate the Radon transform
over 180°,
I1 = iradon(R, angle); %Inverse Radon transform, i.e.,
FBP reconstruction
I2 = iradon(R, angle, 'linear', 'none'); %backprojection
without ramp-filtering
subplot(1,3,1), imshow(P), title('Original')
subplot(1,3,2), imshow(I1), title('Filtered Backprojec-
tion')
subplot(1,3,3), imshow(I2,[]), title('Unfiltered Back-
projection')
```

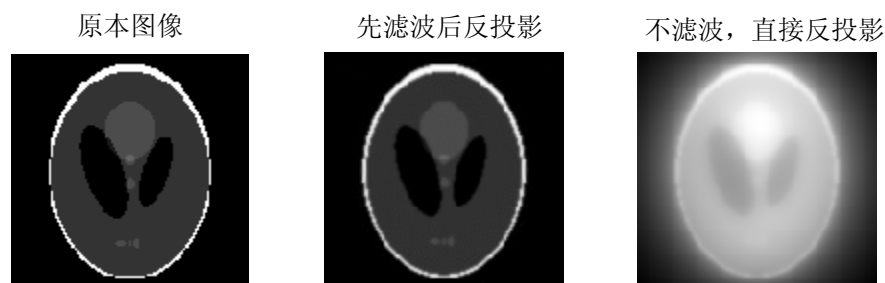


图 2.17 原本的图像和用 Matlab 中用 “*iradon*” 函数重建的图像。

如果我们把这一行 `angle = linspace(0,179,180)` 分别换成  
`angle = linspace(0,179,10)`  
`angle = linspace(0,179,20)`  
`angle = linspace(0,179,40)`  
`angle = linspace(0,179,80)`  
 我们便得到图2.18中所示的不同结果。

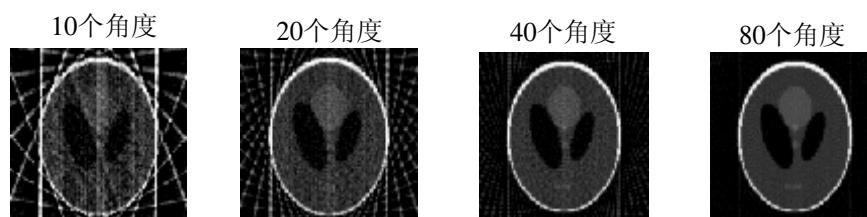


图 2.18 如果视角不够，重建的图像中就会出现令人讨厌的条纹状的伪影。所谓伪影 (英文是 *Artifact*) 指的是原本图像中没有的，由于数据或重建算法的错误和误差造成的图案。

**例题 2** 运行一个简单的 Matlab 程序来观察一下噪声的影响。对斜坡滤波函数施用三个不同的窗函数，并视其控制噪声效果。

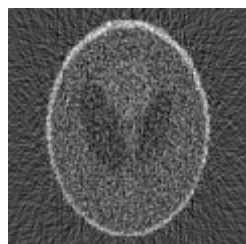
解

Matlab 程序:

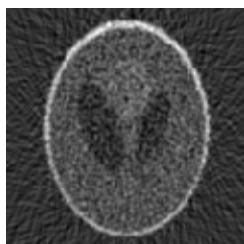
```
P = phantom(128);
angle = linspace(0,179,180);
R = radon(P,angle);
R = 1e12*imnoise(1e-12*R,'Poisson'); %Add Poisson Noise
I1 = iradon(R,angle,'Ram-Lak');
```

```
subplot(1,3,1), imshow(I1,[]), title('w/ Ram-Lak filter')
I1 = iradon(R,angle,'Cosine');
subplot(1,3,2), imshow(I1,[]), title('w/ Cosine filter')
I1 = iradon(R,angle,'Hann');
subplot(1,3,3), imshow(I1,[]), title('w/ Hann filter')
```

用Ram-Lak 滤波器



用余弦滤波器



用Hann滤波器

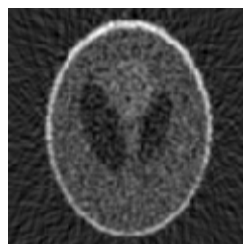


图 2.19 利用不同的窗函数来控制噪声。

**例题3\*** 试求离散的‘Ramachandran-Lakshminarayanan’ 卷积核。这个卷积核是斜坡滤波函数的傅里叶反变换。窗函数的截止频率是  $\omega = 1/2$ 。

解

我们先求连续的卷积核  $h(s)$ :

$$h(s) = \int_{-1/2}^{1/2} |\omega| e^{2\pi i \omega s} d\omega = \frac{1}{2} \frac{\sin(\pi s)}{\pi s} - \frac{1}{4} \left( \frac{\sin(\frac{\pi s}{2})}{\frac{\pi s}{2}} \right)^2.$$

为把它离散化，令  $s = n$  (整数) 则有

$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & n = 0 \\ 0, & n \text{ 为偶数} \\ \frac{-1}{n^2 \pi^2}, & n \text{ 为奇数。} \end{cases}$$

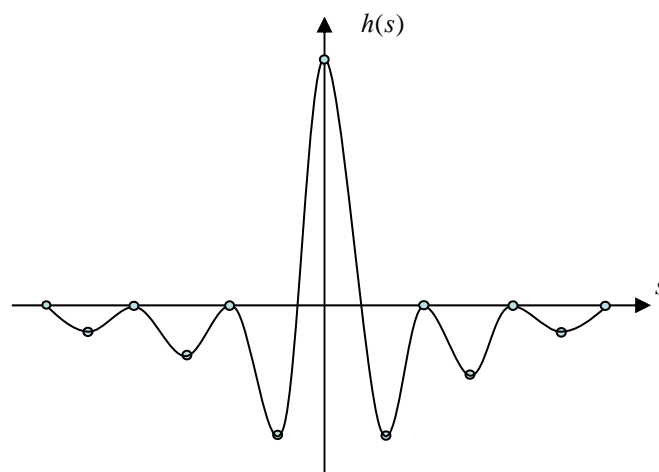


图 2.20 连续的以及采样后得到的 ‘Ramachandran-Lakshminarayanan’ 卷积核。

## 2.8 小结

- 傅里叶变换非常有用，它把一个函数在频率域中用另一种形式表达出来。而傅里叶反变换则把这个频域中的表达式变回到空间域中来。
- 在傅里叶域中（即在频域中），投影数据与原本的图像有个简单直观的关系。这个关系就是大名鼎鼎的中心切片定理。在一个方向上的投影数据的一维傅里叶变换是原本图像的二维傅里叶变换的一条线上的值。一旦我们有足够多的投影角度，它们所对应的直线就可覆盖整个二维傅里叶平面。
- 二维傅里叶变换平面上的反投影图案意味着频域的采样密度正比于  $1/|\alpha|$ 。所以，光靠反投影只能得到一个模糊的重建图像。要把反投影和斜坡滤波结合起来才能得到精确的重建图像。
- 先滤波后反投影的FBP算法是图像重建中知名度最高和最普及的算法。斜坡滤波可以在频域中用乘法实现，也可以在空间域中用卷积实现。
- 我们可以自由地更换斜坡滤波和反卷积的次序。

- 斜坡滤波又可以进一步分解成求导运算和希尔伯特变换。这样，我们利用不同的排列可以得到更多的重建算法。
- 在特定的条件下，利用截断了的投影数据可以对感兴趣的区域（ROI）做精确的重建。
- 通过阅读本章，读者应该至少弄懂中心切片定理的含意和知道什么是 FBP 算法。

## 参考文献

- Bracewell RN (1956) Strip integration in radio astronomy. *Aust J Phys* 9:198-217
- Bracewell RN (1986) *The Fourier Transform and its Applications*, 2<sup>nd</sup> ed., McGraw-Hill, New York
- Carrier GF, Krook M, Pearson CE (1983) *Functions of a Complex Variable Theory and Technique*, Hod, Ithaca
- Clackdoyle R, Noo F, Guo J, Roberts J (2004) A quantitative reconstruction from truncated projections of compact support. *Inverse Probl* 20:1281-1291
- Deans SR (1983) *The Radon Transform and Some of Its Applications*. John Wiley & Sons, New York
- Defrise M, Noo F, Clackdoyle, Kudo H (2006) Truncated Hilbert transform and image reconstruction from limited tomographic data. *Inverse Probl* 22:1037-1053
- Hahn SL (1996) *Hilbert Transforms in Signal Processing*, Artech House, Boston
- Huang Q, Zeng GL, Gullberg GT (2007) An analytical inversion of the 180° exponential Radon transform with a numerically generated kernel. *Int J Image and Graphics* 7:71-85
- Kak AC, Slaney M (1998) *Principles of Computerized Tomographic Imaging*, IEEE Press, New York
- Kanwal RP (1971) *Linear Integral Equations Theory and Technique*, Academic Press, New York
- Netterer F (1986) *The Mathematics of Computerized Tomography*, Wiley, New York
- Noo F, Clackdoyle R, Pack JD (2004) A two-step Hilbert transform method for 2D image reconstruction. *Phys Med Biol* 49:3903-3923
- Sidky EY, Pan X (2005) Recovering a compactly supported function from knowledge of its Hilbert transform on a finite interval. *IEEE Trans Sig Processing Let* 12:97-100
- Shepp L, Logan B (1974) The Fourier reconstruction of a head section. *IEEE Trans Nucl Sci* 21:21-43
- Tricomi FG (1957) *Integral Equations*, Interscience, New York
- You J, Zeng GL (2006) Exact finite inverse Hilbert transforms. *Inverse Probl* 22:L7-L10
- Zeng GL (2007) Image reconstruction via the finite Hilbert transform of the derivative of the backprojection. *Med Phys* 34:2837-2843
- Zeng GL, You J, Huang Q, Gullberg GT (2007) Two finite inverse Hilbert transform formulae for local tomography. *Int J Imag Syst Tech* 17:219-223

### 第3章 扇形束图像重建

#### 3.1 扇形束成像的几何描述及其点扩散函数

前面重点讨论过的平行光束成像数学上处理容易些，但是在X光CT领域里它远不如扇形束成像常见。X光的光源就是扇形束的焦点。图 3.1把扇形束的几何结构与平行光束的几何结构做了一下比较。

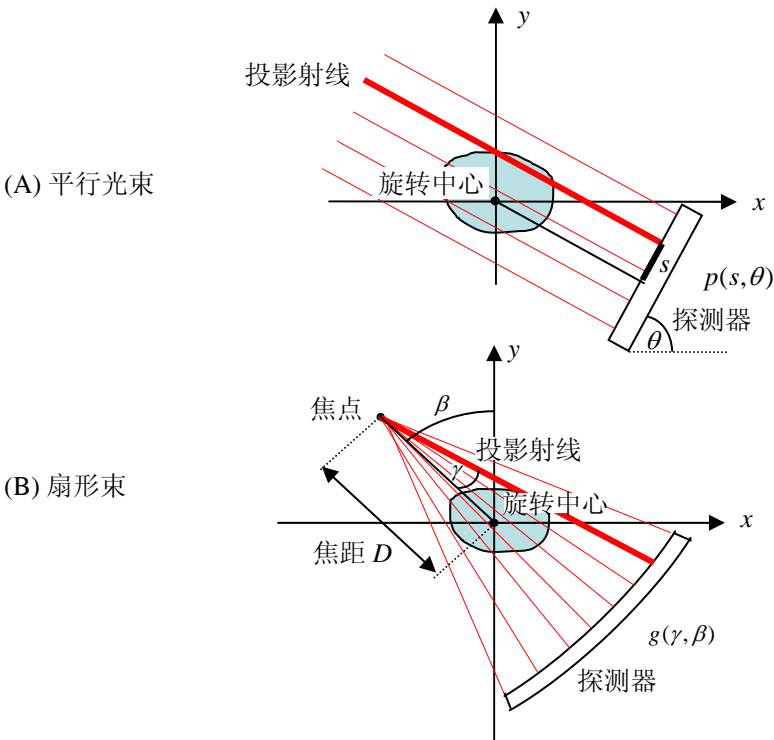


图 3.1 平行光束成像与扇形束成像的几何结构比较。

对于平行光束成像，我们用极为重要的中心切片定理推导出了一些图像重建的算法。可是，对与扇形束成像，我们并没有相应的中心切片定理。我们只好想个别的办法来推导扇形束的图像重建算法。这个办法就是把扇形束的成像问题转化成平行光束的成像问题，把平行光束图像重建的算法修正一下然后应用于解决扇形束的成像问题中。

第二章中，当我们讨论平行光束的图像重建问题时，虽然我们没有明确地说，我们总是假定探测器是匀速地绕物体转动，而且数据采样的角度区间也是均匀的。这里我们对扇形束的成像问题也做同样的假设。

在这个假设下，平行光束的投影/反投影的点扩散函数 (PSF) 是移动不变的。换句话说，如果你把一个点源放在  $x$ - $y$  平面上。放到哪里到无所谓，只要放在探测器的视野内就好。先算出该点源的投影数据，再算出这些投影数据的反投影。这样你会得到一个与图3.2类似的星状图案。这个图案就是投影/反投影运算点扩散函数 (PSF, Point Spread Function)。这里我们用“投影/反投影”表示先做投影再做反投影，而且把“投影/反投影”看作为一个不可分割的运算过程。

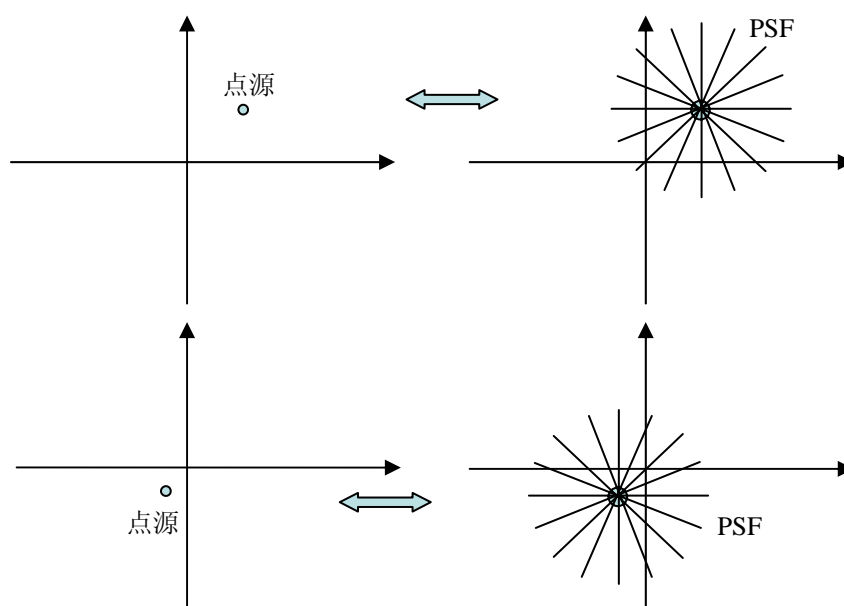


图 3.2 投影/反投影的点扩散函数 (PSF) 是移动不变的。也就是说，不管点源在哪里，所得到的星状图案都一样。



在用平行光束成像的情形，为了求反投影在点  $(x, y)$  的数值，过该点向每个探测方向  $\theta$  上的探测器做垂线。把垂线与探测器的交点记为  $s^*$ 。然后把投影数值  $p(s^*, \theta)$  加到  $(x, y)$  的位置上。

相似地，在用扇形束成像的情形，为了求反投影在点  $(x, y)$  的数值，过该点和每个扇形的焦点画一条直线。把该直线与探测器的中线夹角记为  $\gamma^*$ 。然后把扇形束的投影数值  $g(\gamma^*, \beta)$  加到  $(x, y)$  的位置上。

可以证明，如果扇形束焦点的轨迹是一个完整的圆圈，所得到的投影/反投影的点扩散函数 (PSF) 是移动不变的。也就是说，不管点源在哪里，所得到的星状图案都一样。而且，这个投影/反投影的点扩散函数与平行光束成像情形的投影/反投影的点扩散函数是一样的 (图 3.3)。

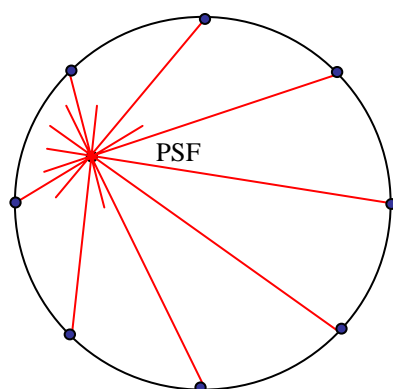


图 3.3 扇形束 360° 全扫描的点扩散函数 PSF 与平行光束 360° 全扫描的点扩散函数 PSF 完全相同。

这个发现极为重要。如果你对一个图像做投影/反投影，不管你用平行光束还是扇形束，你会得到相同的模糊的图像。

设原本的图像为  $f(x, y)$ ，经过投影/反投影运算后的图像为  $b(x, y)$ 。可以证明，投影/反投影的点扩散函数是  $1/r$ ，其中  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。这样， $f(x, y)$  和  $b(x, y)$  的关系就建立起来了：

$$b(x, y) = f(x, y) ** \frac{1}{r},$$

其中 “\*\*” 表示二维卷积。在傅里叶变换域中，原本图像的傅里叶变换  $F$  与投影/反投影运算后的图像的傅里叶变换  $B$  的关系是

$$B(\omega_x, \omega_y) = F(\omega_x, \omega_y) \times \frac{1}{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}},$$

这是因为  $1/\sqrt{x^2 + y^2}$  的二维傅里叶变换是  $1/\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$ 。

我们已经知道如果我们对反投影后的图像  $b(x, y)$  进行二维斜坡滤波，即可重建出原本图像  $f(x, y)$ 。对于扇形束反投影后的图像  $b(x, y)$  完全可以采用同样的方法重建出原本图像  $f(x, y)$ 。也就是说，先反投影后滤波算法对平行光束成像和扇形束成像是一样的。如果在上面的傅里叶变换域中的关系式两边同时乘以二维斜坡函数  $\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$ ，即可得到原本图像  $f(x, y)$  的傅里叶变换  $F(\omega_x, \omega_y)$ ：

$$F(\omega_x, \omega_y) = B(\omega_x, \omega_y) \times \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}。$$

最后，对  $F(\omega_x, \omega_y)$  求二维傅里叶反变换便得到原本图像  $f(x, y)$ 。

### 3.2 平行光束算法到扇形束算法的转换

若想要得到一个 FBP (先滤波后反投影) 算法来重建图像，我们需要改变一下策略，从一个与第3.1节不同的途径来推导。

一个直截了当的方法是把所有的扇形束射线放在一起进行分组，把互相平行的射线分在一组，这样就把扇形束的成像问题简化为平行光束的成像问题。正如图3.4所示，每一条扇形束的射线都刚好对应一条平行光束的射线。这两条线是完全重合的。也就是说，每一个扇形束的数据  $g(\gamma, \beta)$  都刚好对应一个平行光束的数据  $p(s, \theta)$ ，它们的坐标满足下列关系：

$$\theta = \gamma + \beta,$$

$$s = D \sin \gamma,$$

其中  $D$  为焦距，也就是从扇形的焦点到旋转中心的距离。当上面这两个关系成立时，这两个成像系统所测的数据是相同的：

$$p(s, \theta) = g(\gamma, \beta)。$$

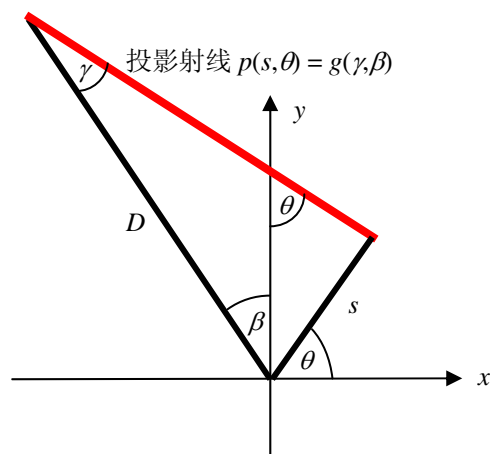


图 3.4 一条扇形束的射线可以用平行光束的几何参数来描述。

在扇形束数据重组为平行光束数据的形式以后，我们就可以用平行光束图像重建算法，比如 **FBP** 算法，来重建图像了。这个数据重组的方法听起来可行，但是实现起来还是有它的问题的，因为数据重组时需要做坐标变换，这也就需要做插值运算。插值运算是要引入误差的。数据重组的想法虽然可行，但是其结果有时不够精确。

然而，这个数据重组的想法还是有其可取之处的。我们对它做一点改造它会变成一个很有用的算法。我们改造的思路是把对数据做重组改为对算法的变量做变换。我们的出发点是一个平行光束的图像重建算法。你可以想象，这个算法是个数学等式。等式的左边是重建的图像  $f(x, y)$ 。等式的右边是个积分表达式。积分号内有投影数据  $p(s, \theta)$  以及其它与  $s$  和  $\theta$  有关的因子 (图 3.5)。

接下来，我们把平行光束的投影数据  $p(s, \theta)$  用对等的扇形束数据  $g(\gamma, \beta)$  来替换。当然，要使这个替换有意义，必须满足这两个条件 (图 3.4):  $\theta = \gamma + \beta$  和  $s = D \sin \gamma$ 。这两个条件是由图 3.1 导出的。

这两个条件实际上确定了一个变量替换关系。把这个变量替换关系带入等式右边的积分式里面。把旧变量  $s$  和  $\theta$  变为新变量  $\gamma$  和  $\beta$ 。

我们要提醒一下，在微积分中，在做积分的变量替换时需要加入一个雅可比因子。雅可比因子是个由一些偏导数算出的行列式，它是  $\gamma$  和  $\beta$  的函数。

在完成了从平行光束数据  $p(s, \theta)$  到扇形束数据  $g(\gamma, \beta)$  的替换，旧变量  $s$  和  $\theta$  到新变量  $\gamma$  和  $\beta$  的替换，及加入一个雅可比因子  $J(\gamma, \beta)$ ，一个崭新的扇形束图像重建算法就诞生了 (图 3.5)!

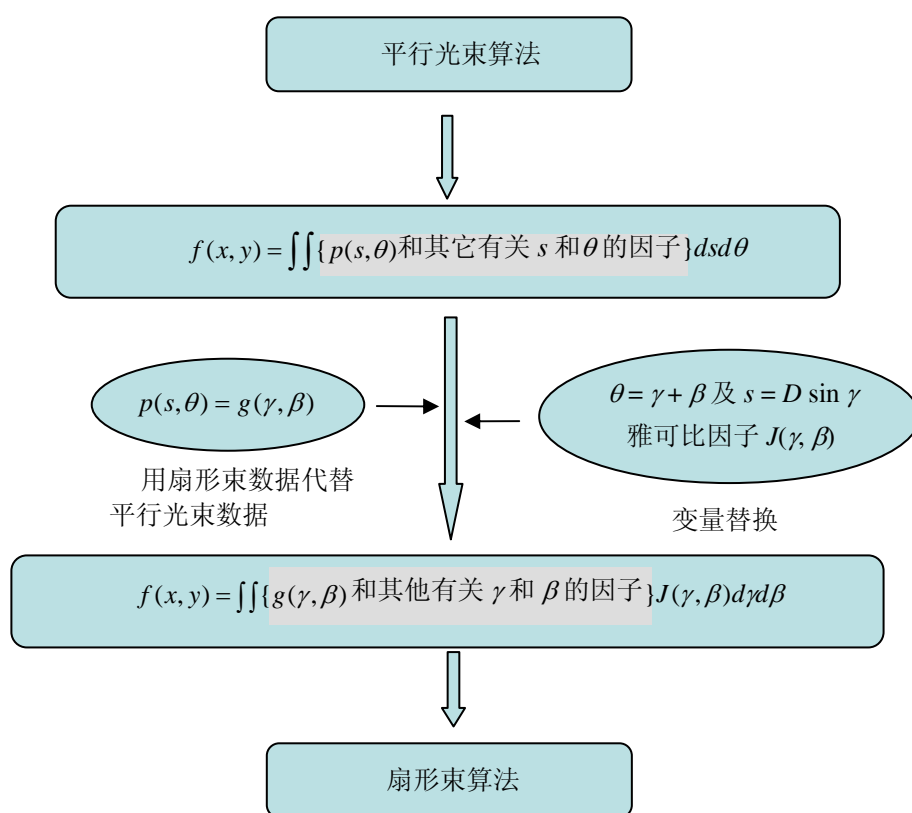


图 3.5 从平行光束图像重建算法到扇形束图像重建算法的推导过程。

图 3.5 列出的是个一般性的步骤。我们曾经列出过一长串平行光束图像重建的算法。这些算法都可以用这个变量替换的方法推广到扇形束图像重建中去，并得到一长串扇形束图像重建的算法。我们必须指出的是，对于变量  $s$

的卷积运算，经过变量替换后，一般说来并不刚好是对于变量  $\gamma$  的卷积运算。要想把对变量  $\gamma$  的积分变成对变量  $\gamma$  的卷积，还需另外付出一些数学上的努力。与平行光束图像重建的算法相类似，扇形束图像重建的算法也是由斜坡滤波和反投影组成，或者是由求导，希尔伯特变换，及反投影的不同排列组成。

扇形束图像重建的算法分为两大类：一类是针对平面探测器的，而另一类是针对弧形曲面探测器的。对于平面探测器，我们总是假定数据采样点是等间距的，相邻采样点之间的距离是  $\Delta s$ 。对于弧形曲面探测器，我们总是假定数据采样点是等夹角的，相邻采样点之间的夹角是  $\Delta\gamma$  (图 3.6)。在扇形束图像重建中，每个探测器的几何形状都有其专用的图像重建算法。在不同的探测器几何形状之间，它们的图像重建算法也可以通过引入适当的权函数互相转换。

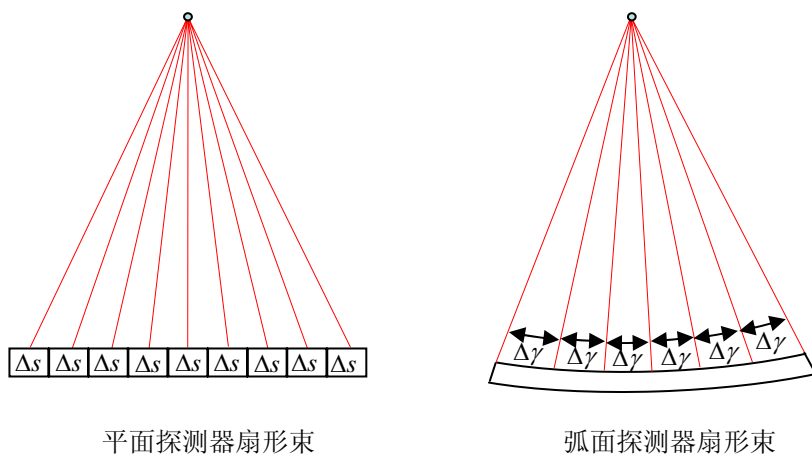


图 3.6 平面扇形束探测器和弧形曲面扇形束探测器。

### 3.3 短扫描

在平行光束成像中，当探测器绕物体旋转  $2\pi$  (即  $360^\circ$ )，每一条投影射线都被测了两次。冗余的数据可由下面这个表达式给出

$$p(s, \theta) = p(-s, \theta + \pi)。$$

可见, 由两个面对面的探测器测得的数据都是冗余的(图 3.7)。所以, 探测器旋转  $180^\circ$  即可提供足够的数据。

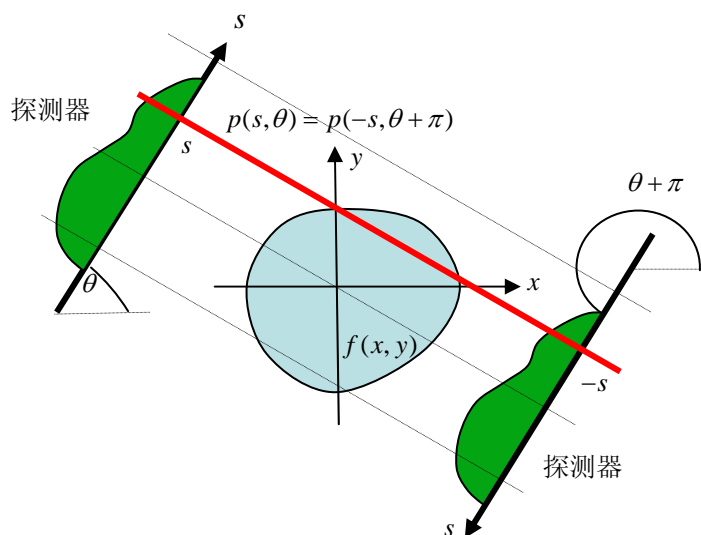


图 3.7 面对面的平行光束探测器测到的是同样的线积分。

根据同样的道理, 当扇形束探测器旋转  $2\pi$ , 每条投影射线也都被测到了两次(图 3.8)。冗余的数据可由下面这个表达式给出

$$g(\gamma, \beta) = g(-\gamma, \beta + 2\gamma + \pi)。$$

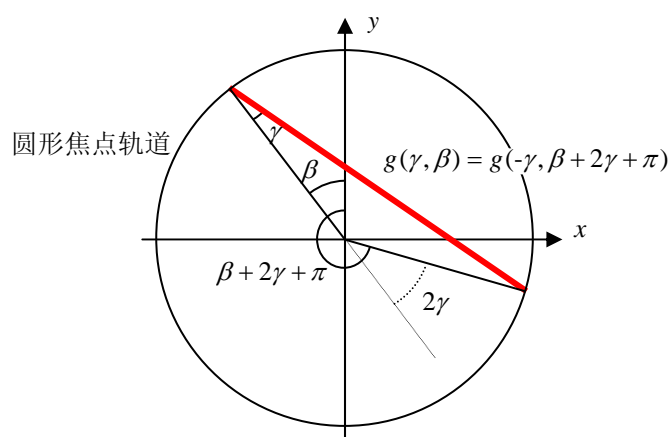


图 3.8 使用扇形束  $360^\circ$  全扫描, 每条射线都被测到了两次。

由于数据冗余，在扇形束数据采集中没有必要让探测器做  $2\pi$  全扫描。扫描角度 ( $\beta$ ) 可以小于  $2\pi$ , 这种扫描方式叫做*短扫描*。角度  $\beta$  的最小取值范围取决于数据采集时物体与探测器之间的几何关系。角度  $\beta$  的最小取值区间可能小于  $\pi$  (图 3.9 左), 可能等于  $\pi$  (图 3.9 中), 也可能大于  $\pi$  (图 3.9 右)。确定扫描区间的原则是, 我们感兴趣的物体中的每一点都要有  $180^\circ$  的角度覆盖。

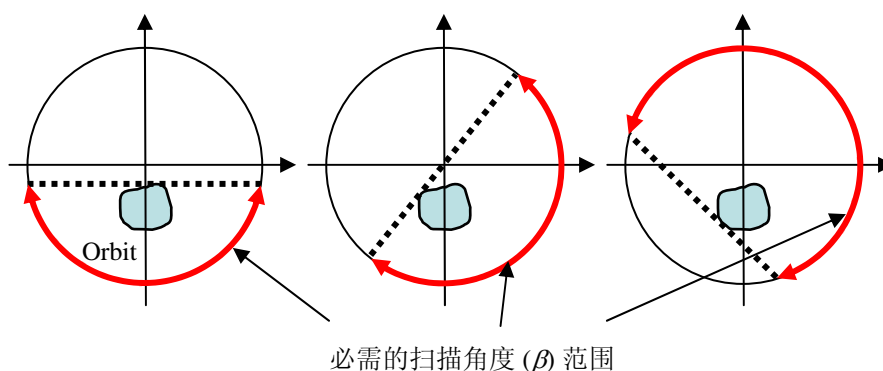


图 3.9 扇形束成像系统的最小扫描角度范围取决于物体的位置。

我们要提醒读者注意, 在扇形束短扫描成像中, 并不是所有的线积分都被刚好测到一次。有些线积分被测到一次, 而另一些线积分会被测到两次。即使在扫描角度  $\beta$  的范围小于  $\pi$  的情形, 还是有一些线积分会被测到两次的。其实, 任何直线, 只要它与扇形的焦点轨迹有两个交点, 那么沿这条线的线积分就被测到了两次 (图 3.10)。为了获得足够的数据来做断层成像, 我们要求过物体的每一条线的线积分都要至少被测到一次。对于冗余的数据, 在图像重建时需要施加适当的权函数来处理。举例来说, 若一个线积分被测到了两次, 对它们要进行加权, 而且它们的权因子之和一定要是 1。

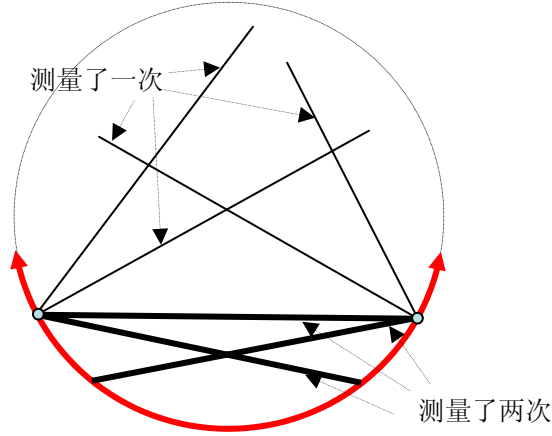


图 3.10 在扇形束短扫描中，一些数据被测到一次，而另一些则被测到了两次。

### 3.4\* 数学表达式

#### 3.4.1 扇形束FBP(先滤波后反投影)算法的推导

我们的出发点是平行光束的 FBP 算法。注意，我们要用的是极坐标  $(r, \varphi)$  的表达式，而不是直角坐标  $(x, y)$  的表达式。为了得到极坐标的 FBP 算法的表达式，我们需要对直角坐标的 FBP 算法的表达式（见第 2.6.5 节）做如下的变量替换： $x = r \cos \varphi$ ， $y = r \sin \varphi$ ，及  $x \cos \theta + y \sin \theta = r \cos(\theta - \varphi)$ ，从而得到

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(s, \theta) h(r \cos(\theta - \varphi) - s) ds d\theta。$$

接下来，根据图 3.5 的思路，把平行光束的变量替换成扇形束的变量  $\theta = \gamma + \beta$  及  $s = D \sin \gamma$ 。变量替换的可比因子是  $D \cos \gamma$ 。这样，我们就有

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} g(\gamma, \beta) h(r \cos(\beta + \gamma - \varphi) - D \sin \gamma) D \cos \gamma d\gamma d\beta。$$



这个等式给出了一个扇形束图像的重建算法，但是在等式中对  $\gamma$  的积分还不是卷积的形式。若这个积分可以写成卷积积分，那么这个算法实现起来就要快得多。下面我们就着手把它凑成个卷积积分。

假设我们要在  $(r, \varphi)$  这一点上求重建的数值。我们在图3.11定义了两个新的变量版  $D'$  和  $\gamma'$ 。可以容易地验证  $r \cos(\beta + \gamma - \varphi) - D \sin \gamma = D' \sin(\gamma' - \gamma)$ ，那么就有

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} g(\gamma, \beta) h(D' \sin(\gamma' - \gamma)) D \cos \gamma d\gamma d\beta。$$

我们现在要证明斜坡滤波器卷积核的一个特殊性质

$$h(D' \sin \gamma) = \left( \frac{\gamma}{D' \sin \gamma} \right)^2 h(\gamma)，$$

这个性质在我们推导扇形束 FBP 公式的最后一步会用到。

斜坡滤波器卷积核的定义是  $h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| e^{i2\pi\omega t} d\omega$ ，所以我们有

$$\begin{aligned} h(D' \sin \gamma) &= \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| e^{i2\pi\omega D' \sin \gamma} d\omega \\ &= \left( \frac{\gamma}{D' \sin \gamma} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\omega D' \frac{\sin \gamma}{\gamma}| e^{i2\pi\omega \frac{D' \sin \gamma}{\gamma} \gamma} d\left( \omega D' \frac{\sin \gamma}{\gamma} \right) \\ &= \left( \frac{\gamma}{D' \sin \gamma} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\omega}| e^{i2\pi\hat{\omega} \gamma} d\hat{\omega} \\ &= \left( \frac{\gamma}{D' \sin \gamma} \right)^2 h(\gamma)。 \end{aligned}$$

记  $h_{fan}(\gamma) = \frac{D}{2} \left( \frac{\gamma}{\sin \gamma} \right)^2 h(\gamma)$ ，那么扇形束的先卷积后反投影算法就得到了

$$f(r, \varphi) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(D')^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos \gamma) g(\gamma, \beta) h_{fan}(\gamma' - \gamma) d\gamma d\beta。$$

不管斜坡滤波是在空间域中用卷积来实现还是在傅里叶变换域中用乘法来实现，都可称为 FBP 算法。

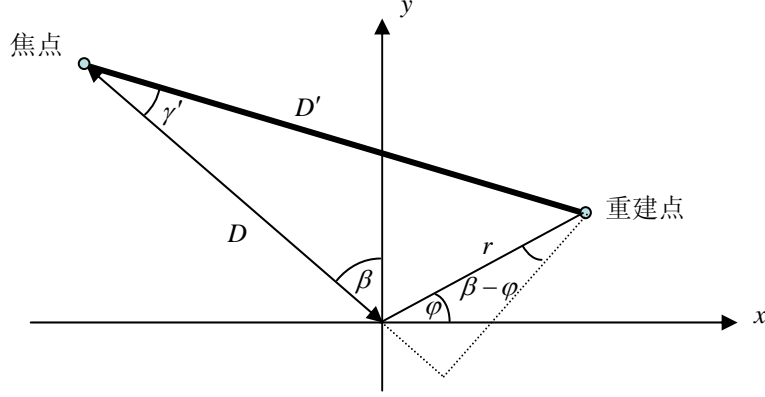


图 3.11 用重建点  $(r, \varphi)$  来定义两个新变量: 角度  $\gamma'$  和距离  $D'$ 。

### 3.4.2 扇形束的 DHB (Derivative, Hilbert Transform, Backprojection 求导, 希尔伯特变换, 反投影) 算法

把斜坡滤波分解成求导运算和希尔伯特变换的想法也可应用到扇形束图像重建中去。对于平行光束的情形, DHB 算法就是拉东反演公式 (见第2.6.6节)。扇形束数据的 DHB 算法可以用拉东反演公式经过平行光束到扇形束的变量替换来推导出来。很多作者, 如Noo, Defrise, Kudo, Clackdoyle, Pan, Chen, Wang, 等等, 发表了不少利用求导运算和希尔伯特变换来重建图像的算法。

下面我们利用拉东反演公式推导一个扇形束数据的 DHB 算法。首先, 我们把拉东反演公式 (见第2.6.6节) 用极坐标的形式给出

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial p(s, \theta)}{\partial s} \frac{1}{2\pi^2 (r \cos(\theta - \varphi) - s)} ds d\theta。$$

做从  $(s, \theta)$  到  $(\gamma, \beta)$  的变量替换, 并带入  $\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{1}{D \cos \gamma} \frac{\partial g}{\partial \gamma}$ , 我们得到

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{D \cos \gamma} \frac{\partial g(\gamma, \beta)}{\partial \gamma} \frac{1}{2\pi^2 D' \sin(\gamma' - \gamma)} D \cos \gamma d\gamma d\beta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi^2 D'} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\partial g(\gamma, \beta)}{\partial \gamma} \frac{1}{\sin(\gamma' - \gamma)} d\gamma d\beta,$$

其中  $D'$  是当扇形束在旋转角为  $\beta$  时从重建点到焦点的距离。这个距离因子  $D'$  不是一个常数。它是扇形束重建算法的一个“眼中钉”，因为当  $D'$  很小时，它使扇形束重建算法不稳定。而且这是一个变量，计算它要花费一些计算机的时间。我们下面要证明，对于  $2\pi$  扇形束全扫描来说，这个  $D'$  因子可以从算法中去掉。

现在让我们在扇形束的 DHB 算法中人为地引入一个加权函数  $w$ ，那么，DHB 算法就变成

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{w(\gamma', \beta, r, \varphi)}{D'} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\partial g(\gamma, \beta)}{\partial \gamma} \frac{1}{\sin(\gamma' - \gamma)} d\gamma d\beta.$$

如果我们用  $\hat{g}$  来记求导运算和希尔伯特变换以后的扇形束数据，也就是

$$\hat{g}(\gamma', \beta) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\partial g(\gamma, \beta)}{\partial \gamma} \frac{1}{\sin(\gamma' - \gamma)} d\gamma,$$

那么

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{w(\gamma', \beta, r, \varphi)}{D'} \hat{g}(\gamma', \beta) d\beta.$$

可以证明新算出的数据  $\hat{g}/D'$  与原本的扇形束数据  $g$  具有相同的冗余性质 (图 3.8)。为了使引入加权函数  $w$  的算法仍然成立，我们要求加权函数  $w$  满足下面的条件

$$w(\gamma', \beta, r, \varphi) + w(\gamma'_c, \beta_c, r, \varphi) = 2,$$

其中， $\gamma'_c = -\gamma'$  及  $\beta_c = \beta + 2\gamma' + \pi$ 。如果我们定义  $w(\gamma', \beta, r, \varphi) = \frac{D'}{D \cos \gamma'}$ ，那么上面对加权函数  $w$  的条件就自然满足了，因为  $D' + D'_c = 2D \cos \gamma'$  (图 3.12)。最后，我们得到扇形束的 DHB 算法

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{w(\gamma', \beta, r, \varphi)}{D'} + \frac{w(\gamma'_c, \beta_c, r, \varphi)}{D'_c} \right] \hat{g}(\gamma', \beta) d\beta \right\} \\ = \frac{1}{4\pi^2 D} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos \gamma'} \hat{g}(\gamma', \beta) d\beta。$$

这个扇形束的 DHB 算法不用引入加权函数  $w$  也能推导出来，读者可参阅本章后面参考文献中列的 You (尤江生) 和 Zeng (曾更生) 的文章。

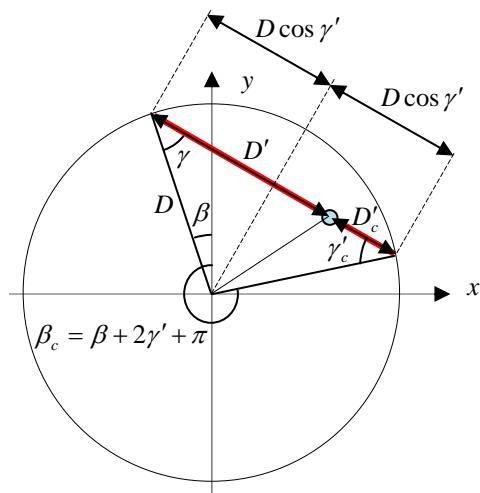


图 3.12 引如适当的加权函数可以使在  $360^\circ$  全扫描的 DHB 算法中的随角度和位置变化的因子  $D'$ 。

### 3.5 例题

**例题 1** 下面图示的扇形束数据采集方案能为图像重建测得足够的数据吗？这里，扇形束的焦点轨迹由三段不相连的圆弧组成 (图 3.13)。

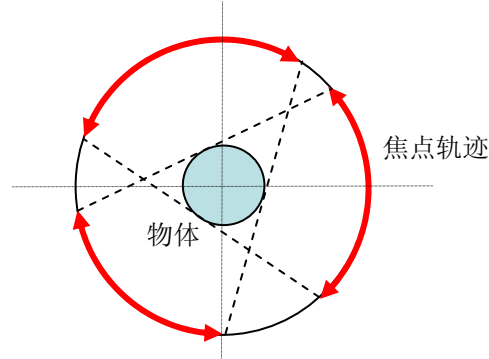


图 3.13 由三段圆弧组成的扇形束的焦点轨迹。

解

能。因为如果你过那个圆形物体随意画一条直线，这条线总会与扇形束的焦点轨迹至少有一点相交。

**例题 2** 在  $\gamma$ - $\beta$  平面上标出扇形束  $2\pi$  全扫描冗余的数据。即指出哪两点代表同一数据。这里，表示扇形束数据的  $\gamma$ - $\beta$  平面的作用相当于表示平行光束投影数据的正弦图。

解

从图 3.14，我们可以很容易的找出扇形束数据的冗余条件。若要使

$$g(\gamma_1, \beta_1) = g(\gamma_2, \beta_2)$$

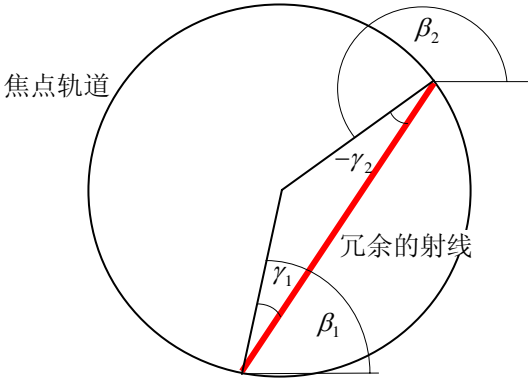


图 3.14 这条线在扇形束扫描中被在两个不同的角度上测到了两次。

成立，数据参数需要满足

$$\gamma_2 = -\gamma_1,$$

及

$$\beta_2 = \beta_1 + 2\gamma_1 + \pi。$$

利用这两个条件，在图 3.15 中的  $\gamma$ - $\beta$  平面上可以很容易地找出哪两数据点具有相同的数值。在图 3.15 中，每一条垂线都与一条斜线包含同样的信息。

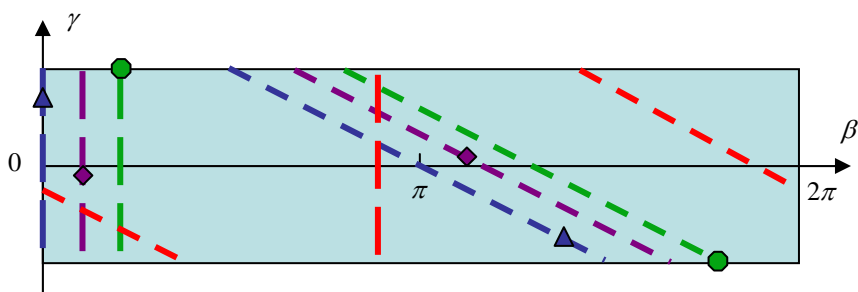


图 3.15 若把扇形束数据显示在  $\gamma$ - $\beta$  平面上，每一条垂线上的数据与一条斜线上的数据完全一样。

**例题 3\*** 试推导平面探测器的扇形束 FBP (先滤波后反投影) 算法。

*解*

我们的出发点是平行光束的 FBP 算法。注意，我们要用的是极坐标  $(r, \varphi)$  的表达式，而不是直角坐标  $(x, y)$  的表达式。为了得到极坐标的 FBP 算法的表达式，我们需要对直角坐标的 FBP 算法的表达式 (见第 2.6.5 节) 做如下的变量替换:  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , 及  $x \cos \theta + y \sin \theta = r \cos(\theta - \varphi)$ , 从而得到

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(s, \theta) h(r \cos(\theta - \varphi) - s) ds d\theta。$$

接下来，我们用  $p(s, \theta) = g(t, \beta)$  把平行光束数据替换成扇形束数据。再把平行光束的变量替换成扇形束的变量  $\theta = \beta + \tan^{-1} \frac{t}{D}$  及  $s = D \frac{t}{\sqrt{D^2 + t^2}}$ 。

变量替换的可比因子是  $\frac{D^3}{(D^2 + t^2)^{3/2}}$ 。这样，我们就有

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t, \beta) h \left( \hat{t} - t \frac{UD}{\sqrt{D^2 + t^2}} \right) \frac{D^3}{(D^2 + t^2)^{3/2}} dt d\beta,$$

这里，我们用到了关系式  $r \cos(\theta - \varphi) - s = (\hat{t} - t) \frac{UD}{\sqrt{D^2 + t^2}}$ ，其中

$$U = \frac{D + r \sin(\beta - \varphi)}{D},$$

及

$$\hat{t} = \frac{Dr \cos(\beta - \varphi)}{D + r \sin(\beta - \varphi)}$$

(见图 3.16)。

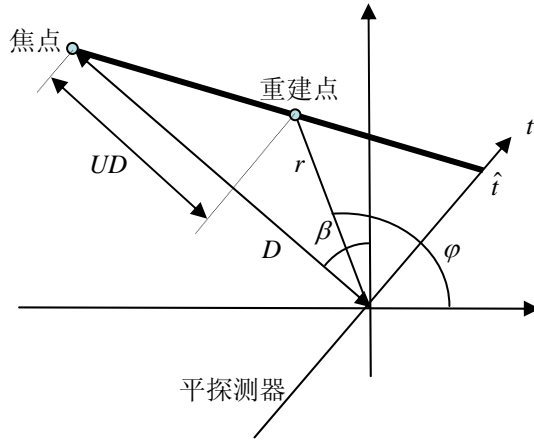


图 3.16 平面探测器扇形束成像所用符号的示意图。

我们已经得到了一个扇形束的重建算法了，但是内层对于  $t$  的积分还不是卷积积分的形式。斜坡滤波的卷积核  $h$  有个特殊的性质:  $h(at) = \frac{1}{a^2} h(t)$ 。把这个性质应用到刚才得到的扇形束的重建算法的表达式中即可得到

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{U^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D}{\sqrt{D^2 + t^2}} g(t, \beta) h(\hat{t} - t) dt d\beta。$$

这就是平面探测器情况下的扇形束的先卷积后反投影算法。它也可以称作 FBP 算法。其中， $D/\sqrt{D^2 + t^2}$  实际上是个余弦函数。先用它乘以扇形束数据。对  $t$  的积分现在已经变成卷积形式了。对  $\beta$  的积分是做反投影。反投影中有个与距离有关的加权函数  $1/U^2$ 。 $U$  的含义示意在图3.16中了。

[附注: 若斜坡滤波函数已经乘过了窗函数，而变成了有限带宽的函数，关系式后  $h(at) = \frac{1}{a^2} h(t)$  就不再成立了。在实际应用中，我们总是要用个窗函数来控制噪声，刚才推导出的 FBP 算法若带上窗函数就会在重建的图像中造成不均匀的分辨率。]

### 3.6 小结

- 在X光CT中，扇形束成像很普遍。
- 扇形束的图像重建算法可以由平行光束的图像重建算法经变量代换来得到。
- 扇形束探测器通常分为两类。一类是平面探测器。另一类是弧面探测器。每一类探测器都有它们专用的图像重建算法。
- 如果扇形束的焦点轨道是整个圆周，这就叫全扫描。如果扇形束的焦点轨道是部分圆周，这就叫短扫描。即使是短扫描，有些扇形束的射线也被测了两次。在图像重建过程中，对冗余的数据需要做恰当的加权。
- 在有些扇形束的图像重建算法中，其反投影算子中含有一个与距离有关的加权因子。当对斜坡函数施加窗函数时，这个窗函数没有对这个与距离有关的加权因子做相应的处理。因而导致了扇形束 FBP 算法所重建的图像有不均匀的分辨率。从这个意义上讲，这个 FBP



重建就不精确了。基于同样的原因，Parker 的短扫描方法（在本书里没有介绍）也就不精确了。

- 现代的基于求导运算和希尔伯特变换的算法则可以在短扫描中正确地处理冗余数据。
- 通过阅读本章，读者应该明白如何由一个平行光束的图像重建算法推导出一个扇形束的图像重建算法。

## 参考文献

- Besson G (1996) CT fan-beam parameterizations leading to shift-invariant filtering. *Inverse Probl* 12:815-833
- Chen GH (2003) A new framework of image reconstruction from fan beam projections. *Med Phys* 30:1151-1161
- Chen GH, Tokalkanajalli R, Hsieh J (2006) Development and evaluation of an exact fan-beam reconstruction algorithm using an equal weighting scheme via locally compensated filtered backprojection (LCFBP). *Med Phys* 33:475-481
- Dennerlein F, Noo F, Hornegger J, Lauritsch G (2007) Fan-beam filtered-backprojection reconstruction without backprojection weight. *Phys Med Biol* 52:3227-3240
- Gullberg GT (1979) The reconstruction of fan-beam data by filtering the back-projection. *Comput Graph Image Process* 10:30-47
- Hanajer C, Smith KT, Solmon DC, Wagner SL (1980) The divergent beam X-ray transform. *Rocky Mountain J Math* 10:253-283
- Natterer N (1993) Sampling in fan-beam tomography. *SIAM J Appl Math* 53:358-380
- Horn BKP (1979) Fan-beam reconstruction methods. *Proc IEEE* 67:1616-1623
- Noo F, Defrise M, Clackdoyle R, Kudo H (2002) Image reconstruction from fan-beam projections on less than a short scan. *Phys Med Biol* 47:2525-2546
- Pan X (1999) Optimal noise control in and fast reconstruction of fan-beam computed tomography image. *Med Phys* 26:689-697
- Pan X, Yu L (2003) Image reconstruction with shift-variant filtration and its implication for noise and resolution properties in fan-beam tomography. *Med Phys* 30:590-600
- Parker DL (1982) Optimal short scan convolution reconstruction for fan beam CT. *Med Phys* 9:254-257
- Silver MD (2000) A method for including redundant data in computed tomography. *Med Phys* 27:773-774
- You J, Liang Z, Zeng GL (1999) A unified reconstruction framework for both parallel-beam and variable focal-length fan-beam collimators by a Cormack-type inversion of exponential Radon transform. *IEEE Trans Med Imaging* 18:59-65
- You J, Zeng GL (2007) Hilbert transform based FBP algorithm for fan-beam CT full and partial scans. *IEEE Trans Med Imaging* 26:190-199
- Yu L, Pan X (2003) Half-scan fan-beam computed tomography with improved noise and resolution properties. *Med Phys* 30:2629-2637
- Wang J, Lu H, Li T, Liang Z (2005) An alternative solution to the nonuniform noise propagation problem in fan-beam FBP image reconstruction. *Med Phys* 32:3389-3394
- Wei Y, Hsieh J, Wang G (2005) General formula for fan-beam computed tomography. *Phys Rev Lett* 95:258102

- Wei Y, Wang G, Hsieh (2005) Relation between the filtered backprojection algorithm and the backprojection algorithm in CT. IEEE Sig Proc Lett 12: 633-636
- Zeng GL (2004) Nonuniform noise propagation by using the ramp filter in fan-beam computed tomography. IEEE Trans Med Imaging 23:690-695
- Zeng GL, Gullberg (1991) Short-scan fan beam algorithm for non-circular detector orbits. SPIE Med Imaging V Conf, San Jose, CA 332-340
- Zou Y, Pan X, Sidky EY (2005) Image reconstruction in regions-of-interest from truncated projections in a reduced fan-beam scan. Phys Med Biol 50:13-28

## 第4章 透射型投影和发射型投影的断层成像

### 4.1 X光 CT (计算机断层成像)

这一章的主要目的是把线积分数据的概念与医学成像 (比如：透射型投影和发射型投影的断层成像) 的测量数据联系起来。这样一来，前面几章所介绍过的图相重建算法就可以有效地应用到实际的医学图像重建中去了。

X光 CT 利用对X光穿透病人身体后的剩余光线进行测量，然后用测量值来估算病人体内的截面图像。虽然X光具有很高的能量，可以穿透人体，但是并不是所有进入人体的光子都能逃出。有一些光子在人体内发生了散射，从而改变了传播方向，同时光子的能量也有所降低。当X光发生散射时，X光的光子与病人体内的电子发生作用，光子把它部分的能量传递给了电子，使电子获得足够的能量得以脱离原轨道成为自由电子（图4.1）。这个X光光子损失了能量，沿着一个偏折的方向继续前行。

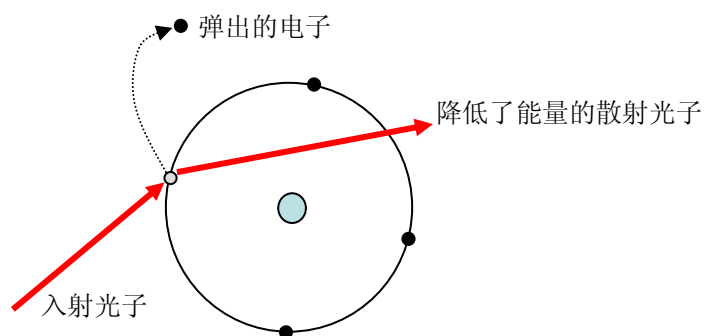


图 4.1 康普顿散射示意图。入射光子把部分能量传递给了电子，并散射到一个新的方向。

还有一些光子在人体内由于光电效应而完全消失了。它们的能量就留在人体内部了。在光电效应过程中X光光子的能量全部由病人体内的原子所吸收，被吸收的能量把电子从原子中弹射出去（图4.2）。

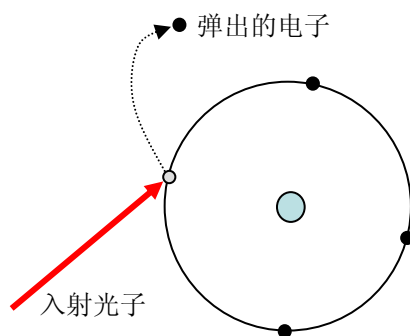


图 4.2 光电效应示意图。入射光子把其所有的能量都传递给了电子，而光子本身就消失掉了。

X光把能量消耗在人体内并不是一件好事。若剂量太大，这些能量足以对DNA造成伤害。

若X光进入人体前的强度为  $I_0$ ，离开人体后的X光强度为  $I_d$ 。那么  $I_0$  和  $I_d$  服从比尔定律 (图 4.3)：



图 4.3 X光通过物体后强度会降低。

$$\frac{I_d}{I_0} = \exp(-p),$$

式中  $p$  是物体中沿着X光路径上的线性衰减系数的线积分。那么，衰减系数的线积分  $p$  可以利用对数函数来计算

$$p = \ln \left( \frac{I_0}{I_d} \right),$$

这样算出的线积分数据就可直接使用通常的图像重建算法来做图像重建了。

X光 CT 的主要应用是获得一幅人体内部各个器官不同的衰减系数的截面图像。图4.4显示了一幅典型的X光 CT 图像。衰减系数是不同物质材料的特有性质，通常记为  $\mu$ ，它是单位长度上光的输入/输出的强度比的对数。骨头有较大的衰减系数值  $\mu$ ，而软组织有较小的衰减系数值  $\mu$ 。物质材料的衰减系数还与X光的能量有关。X光的能量越高，衰减系数越小。

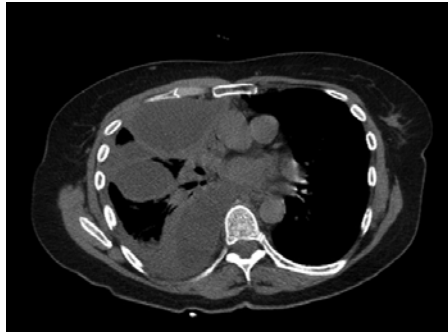


图 4.4 胸腔的X光 CT 图像。

第一代 CT，如图4.5所示，只有一个小的探测器。X光的光源以及探测器要做两种不同的移动动作：一是直线平移，另一是圆周旋转。X光的光源发射出窄的铅笔形状的光束。当X光的光源平移时，就可产生一组平行的投影光束。第一代 CT 的扫描时间比较长(约 25 分钟)。第一代 CT 已经退役，没有临床应用了。

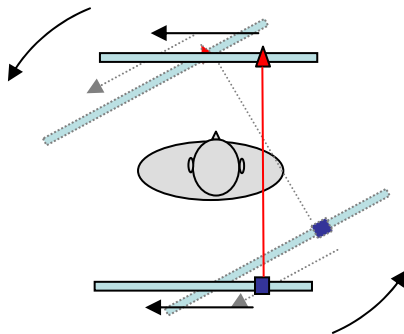


图 4.5 在第一代 CT 中，X光的光管和探测器都要平移和旋转。

第二代 CT 使用的是窄的扇形光束，它由 12 个探测器组成 (图 4.6)。与第一代 CT 一样，X 光的光源以及探测器要做两种不同的移动动作：一是直线平移，另一是圆周旋转。基于扇形光束的形状，扫描时间可缩短到 1 分钟。

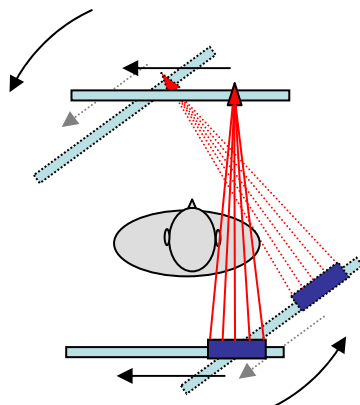


图 4.6 第二代 CT 使用的是窄的扇形光束。X 光的光管和探测器都要做跨视野的平移和绕物体的旋转。

第三代 CT 使用的是宽的扇形光束，它有 1000 个探测器 (图 4.7)。由于光束宽，可以覆盖整个视野，X 光光管和探测器的直线平移步骤就不再需要了。因此，扫描时间又进一步缩短，缩短成 3 秒钟。这第三代 CT 目前在一般的医疗机构中应用最为广泛。

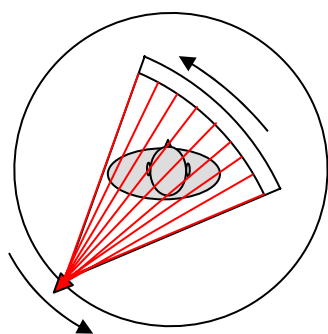


图 4.7 第三代 CT 使用的是宽的扇形光束。X 光的光管和探测器都只需要绕物体做旋转即可，无需做平移了。

第四代 CT 使用的是静止的环状探测器。只有X光的光源在绕物体旋转(图 4.8)。这种扫描方式给出宽的扇形束数据, 而且扫描时间非常短。但是第四代 CT 的口碑不好。这是因为无法在探测器前安装准直器, 而造成数据中有很大的成分是在物体内的散射后的X光。

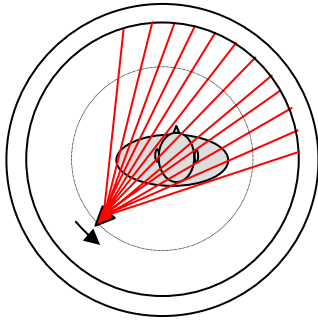


图 4.8 第四代 CT 中的环形探测器是静止不动的, 只是X光的光源在绕物体做高速旋转。

现代 CT 可以做螺旋式扫描。它是这样实现的: 当X光的光源和探测器在绕病人旋转的时候, 病人的床沿着旋转轴的方向缓慢移动。现代 CT 使用二维的多行探测器, 它采集的是锥形束数据(图 4.9)。下一章将介绍一些锥形束数据的图像重建算法。

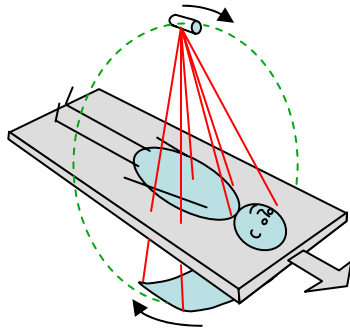


图 4.9 现代CT使用大型二维探测器, 并可以做螺旋式扫描。有些系统甚至有多个X光光源和多个二维探测器。X光光源螺旋线轨迹是靠光源绕病人旋转时沿转轴方向移动病人来实现的。

## 4.2 PET (正电子发射断层成像) 和 SPECT (单光子发射计算机断层成像)

前一节讲的是透射型断层成像。所谓透射型成像就是把放射源在病人身体的外面，放射线从外面进入人体，再穿透人体，最后被探测器接收。放射源可以是X射线，也可以是伽玛 $\gamma$ 射线。

在这一节，我们要转个话题，讨论发射型断层成像。所谓发射型成像就是把放射源放在病人身体的内部，放射线从病人身体内部射出，最后被探测器接收。具有短半衰期的放射性的原子可以由回旋加速器或核反应堆生产出来。这些放射性元素再用来制造放射性药物。通常放射性药物是通过手臂静脉血管注射而进入体内的。放射性药物进入人体后会跟踪病理过程。放射性药物也可以通过病人的呼吸道或消化道进入人体。放射性药物实际上是个分子载体，它依附于特定的生理组织或病理过程。放射性物质在药物的带领下在人体内做有目的的分布。发射型断层成像的目的就是要得到一个放射性物质在人体内部的分布图。

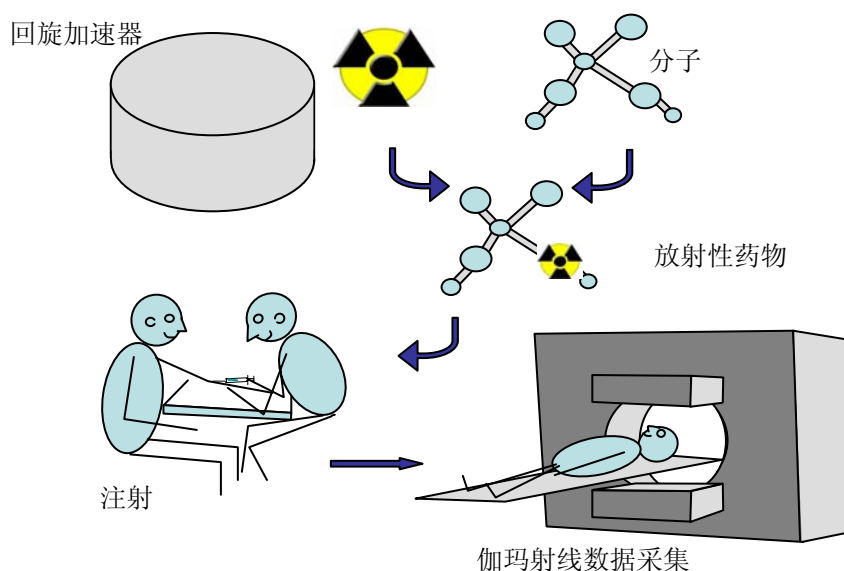


图 4.10 核医学发射型成像的准备工作。

不稳定原子在衰退过程中要释放出伽玛射线。伽玛照相机是用来检测伽光子的 (图 4.10)。与普通的光学照相机不同，伽玛照相机一次只能检测和分析一个光子。然后伽玛照相机系统把每一个方向测到的光子的数目汇集起来就得到放射性物质在人体内部的分布图的线积分 (也称作射线和)。与透射型



数据不同的是，我们不需要对所测得的数据取对数。SPECT (single photon emission computed tomography, 单光子发射计算机断层成像) 就是基于这个原理成像的。

有一些放射性元素，如 O-15, C-11, N-13, 和 F-18, 在放射性衰退时会释放出正电子 (即带一个正电荷的电子)。正电子在自然界中生存的时间十分短暂，因为在自然界中正电子很快就会遇到一个 (带负电的) 电子。当正电子与电子发生作用时，它们的质量会湮灭 (即完全消失)，它们的质量完全转换为能量而产生出两个能量为 511 keV 的伽玛光子。这两个光子沿着相隔  $180^\circ$  角的方向传播。也就是说，它们在一条直线上朝相反的方向射出。有一种特殊的伽玛照相机可专门用来检测这一对光子。这种特殊的伽玛照相机运用的是同时检测技术。当两个探测器同时各接收到一个能量为 511 keV 的伽玛光子时，说明在连接这两个探测器的线段上曾经有过一个正电子。与 SPECT 的情形相仿，这种两个探测器同时检测的方法也是对每一个正电子进行记数，在各个给定方向上的记数汇总就是放射性物质在人体内部的分布图的线积分 (也称作射线和)。我们不需要对所测得的数据取对数。以上的讨论是 PET (positron emission tomography, 正电子发射断层成像) 的基本原理 (图 4.11)。

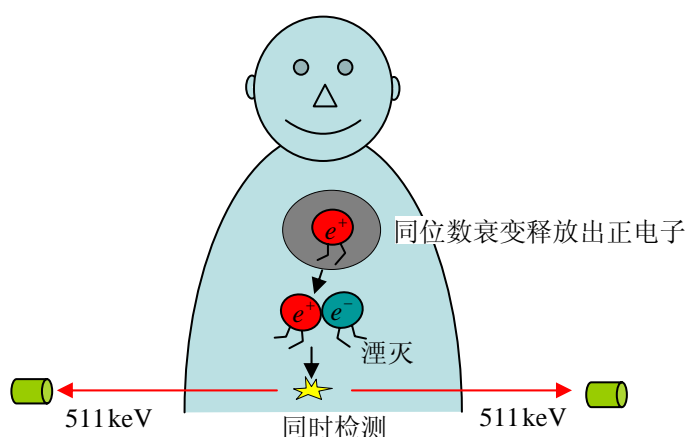


图 4.11 PET 的成像原理。

对 SPECT 而言，光束的几何构形完全由其准直器决定。SPECT 的准直器一般由铅制成，形状像个蜂房网，有许多六边形的洞。这些洞是让伽玛射线通过的通道。其它方向的伽玛射线会被铅制的洞壁挡住。若使用平行光束确 (或扇形束) 的准直器采集数据，所测得的投影数据就是平行光束 (或扇形束) 的数据 (图 4.12)。同理，使用锥形束准直器或针孔准直器来采集数据，所测得的投影数据就是锥形束数据 (图 4.13)。汇聚型光束的成像几何构造可以将物体放大，在探测器上的图像比真实的物体要大。

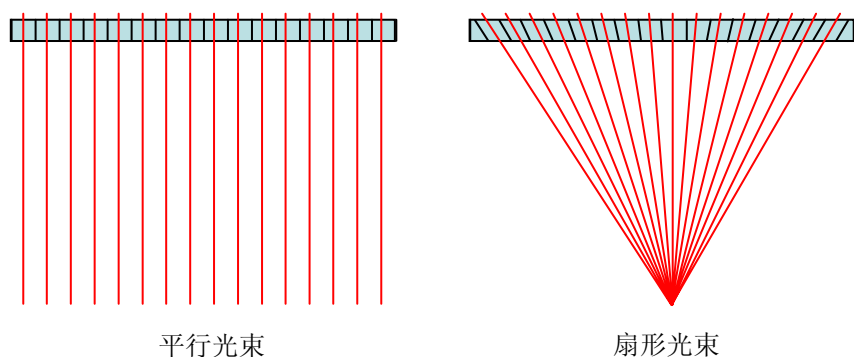


图 4.12 SPECT利用准直器来选择投影射线的几何形状。

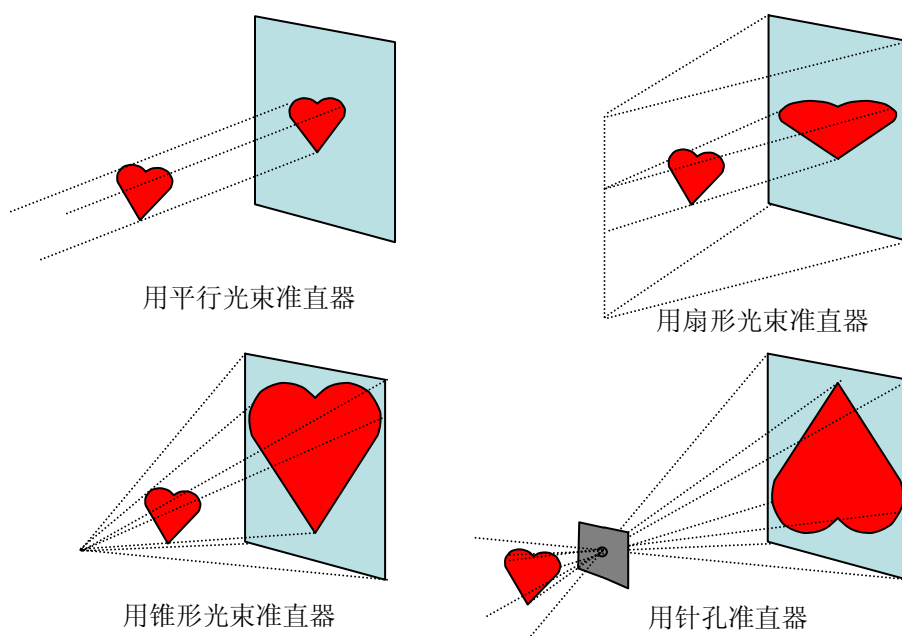


图 4.13 SPECT 有各种各样的准直器：平行的，汇聚型的，发散型的等等。它们在探测器上产生不同大小的图像。

在 PET 的成像系统中，每测到一对伽玛光子 (这也称为一个事件) 都涉及到两个探测器。这两个探测器确定一条直线，这就不需要使用准直器来确定方向了。把这些事件所对应的直线按一定的法则进行分组排列，就可构成所需的成像几何构形。通常，这些直线按照平行法则进行分组。图4.14显示了

三组不同的平行的事件直线。我们也可以不把事件分组，而直接地把每一个事件的方向和位置记录下来，英文叫 List Mode (列表模式)。

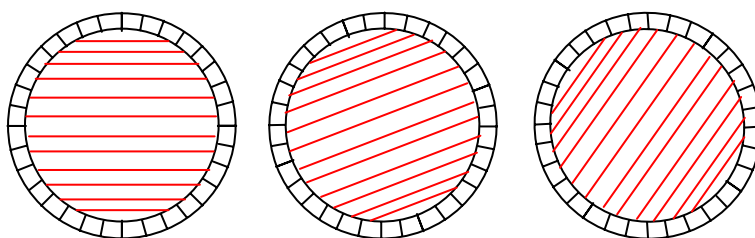


图 4.14 PET 的数据可以重组为不同方向的平行光束。

图4.15显示了一个典型的 SPECT 图像和一个典型的 PET 图像。人们可以注意到，X光CT的图像具有最高的分辨率和最低的噪声。SPECT 图像具有最低的分辨率和最大的噪声。图像的质量效果是与接收到的放射性光子的总数成正比的。

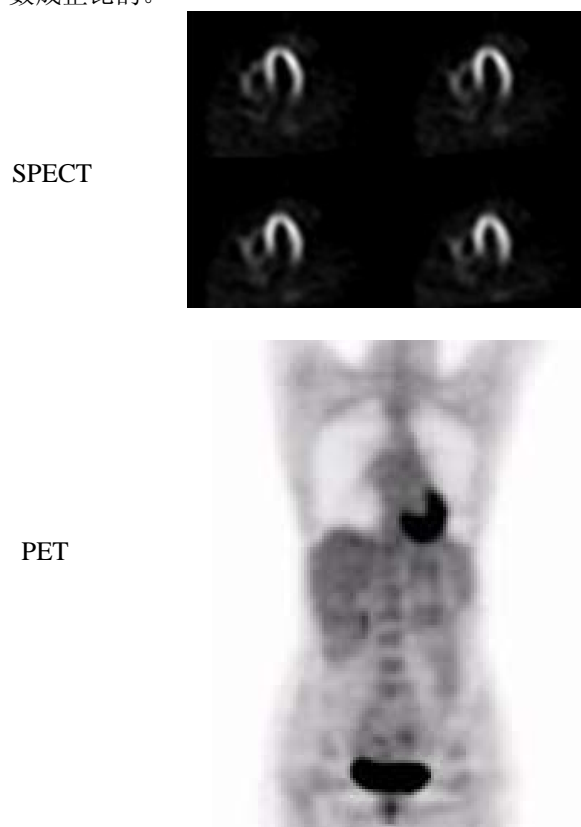


图 4.15 SPECT 的心脏图像和 PET 的身躯图像。PET 的图像是用反灰度显示的 (所谓反灰度是用黑色表示大值，白色表示小值)。

### 4.3 发射型断层成像的衰减修正

无论是 SPECT 还是 PET，在发射型断层成像的过程中，伽玛射线的光子是从病人体内发射出来的。并不是所有已经发射的光子都可以从病人体内逸出，有的光子在人体内部传播时就被衰减掉了。这个体内的衰减现象也服从第4.1节中提到的比尔定律。

对于 PET 来说，要用两个探测器同时检测的方式来检测一个事件。成功地检测到了一个事件，说明两个探测器同时各检测到了一个能量为 511 keV 的光子。让我们考查一下图4.16的情形。伽玛射线的光子对在一个非均匀的媒介中发射并传播。光子要达到第一号探测器，需要经过衰减路径  $L_1$ 。其衰减因子可由比尔定律确定。我们象征性地把这个衰减因子记为  $\exp(-\int_{L_1} \mu)$ 。

同样地，衰减路径  $L_2$  的衰减因子记为  $\exp(-\int_{L_2} \mu)$ 。衰减因子是 0 和 1 之间的一个数值，你可以把它想象为一个概率。一对光子被两个探测器用同时测到的概率是其中一个光子被第一号探测器测到的概率与另一个光子被第二号探测器测到的概率的乘积。所以，总的检测概率(即总的衰减因子)是

$$\exp(-\int_{L_1} \mu) \times \exp(-\int_{L_2} \mu) = \exp(-\int_{L_1+L_2} \mu) = \exp(-\int_L \mu)。$$

由此可见，总的衰减因子是由整条衰减路径确定的，与伽玛射线光源在该路径上的具体位置无关。

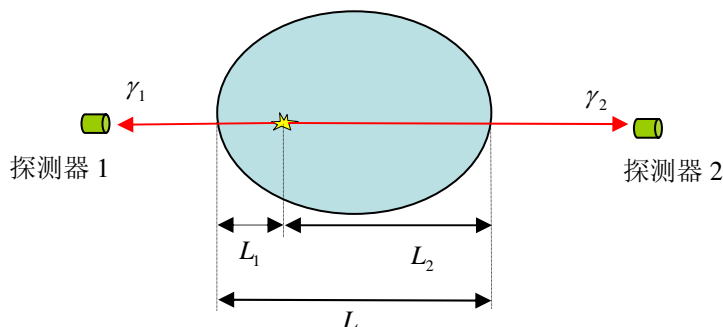


图 4.16 PET 投影数据的衰减是总路径  $L = L_1 + L_2$  的衰减所致。

为了对 PET 的测量数据做衰减修正，需要用透射源 (X光光源或伽玛光源均可) 来对物体媒介做个透射扫描。用这个透射扫描的测量值和比尔定律就可算出总的衰减因子  $\exp(-\int_L \mu)$ 。

经衰减修正后的 PET 的数据才真正是放射性物质在人体内分布图的线积分 (也称作射线和):

$$p(s, \theta) = \exp\left(-\int_{L(s, \theta)} \mu\right) \times [\text{沿路径 } L(s, \theta) \text{ 所测的 PET 的数据}],$$

式中, 衰减因子的倒数被用来补偿光子在人体内部的衰减。对于 PET 成像, 没有必要先重建一个衰减系数的图像来修正衰减的效应。

要想对 SPECT 数据做衰减修正, 情况要复杂得多, 也许, 直接对 SPECT 数据做衰减修正根本不可能。这是因为在 SPECT 成像的过程中一个事件是指测到了一个伽玛光子 (图 4.17)。在光源的位置不知道的情况下, 想要对 SPECT 数据做数据做衰减修正是件十分困难的事。我们还不知道如何象对 PET 的投影数据进行修正那样对 SPECT 的投影数据进行修正。但是, 对 SPECT 衰减效应的补偿可以在图像重建的过程中进行。

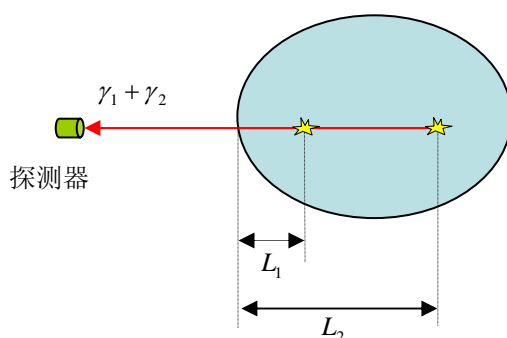


图 4.17 在 SPECT 成像过程中, 衰减的影响是不同长度的衰减路径的混合效应。

对于 SPECT 图像的重建, 如果衰减媒介是均匀的 (即物体内的衰减系数  $\mu$  是个常数值), 图像重建的 FBP (先滤波后反投影) 算法与通常的对与没有经过衰减的投影数据所适用的 FBP 算法差不了太多。物体内的衰减系数  $\mu$  是个常数值时, 由 Tretiak 和 Metz 提出的具有衰减补偿功能的 FBP 算法是由以下三个步骤组成:

- (i) 先对所测到的投影数据  $p(s, \theta)$  乘以  $e^{\mu d(s, \theta)}$ , 式中  $d(s, \theta)$  的定义由图 4.18 给出。
- (ii) 利用带缺口的斜坡滤波器 (图 4.19) 对预先处理过的数据进行滤波。
- (iii) 对数据做加权反投影。其权重因子是个指数函数  $e^{-\mu t}$ , 式中  $t$  在图 4.20 中做了定义,  $t$  的值取决于重建点的位置和反投影角度  $\theta$ 。

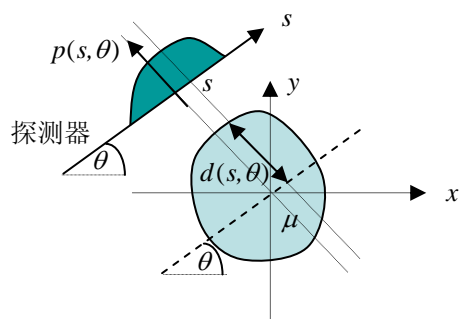


图 4.18 从均匀的衰减媒介的边界到平行于探测器的中线的距离记为 $d(s, \theta)$ 。所谓中线是指过旋转中心的直线。

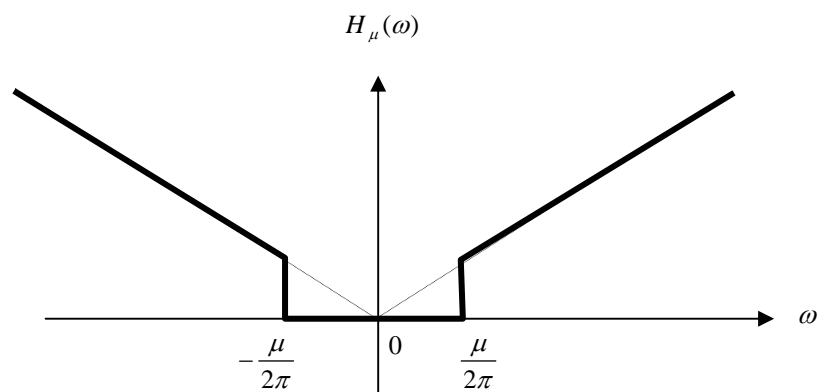


图 4.19 对均匀衰减的拉东变换做图像重建时要用到的滤波器传递函数是个带缺口的斜坡函数。所谓传递函数就滤波器在傅里叶变换域中的函数表达形式，其傅里叶反变换就是卷积核。

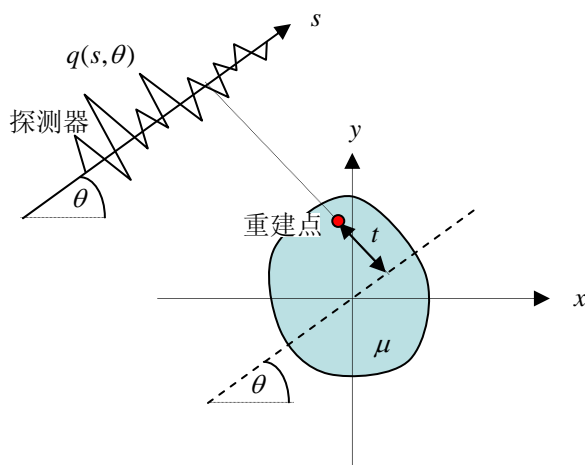


图 4.20 从重建点到平行于探测器的中线的距离记为  $t$ 。

与  $\mu = 0$  的情形相仿，带缺口的斜坡滤波可以分解为求导数运算和做带缺口的希尔伯特变换。在空间域中，希尔伯特变换是以  $1/s$  为卷积核的卷积。而带缺口的希尔伯特变换是以  $(\cos \mu s)/s$  为卷积核的卷积。

在傅里叶反变换域中，带缺口的希尔伯特滤波函数显示在图 4.21 中的等式的左端。余弦函数可以分解为两个指数函数之和  $\cos(\mu s) = (e^{i\mu s} + e^{-i\mu s})/2$ 。傅里叶变换有个重要的性质：在空间 ( $s$ ) 域中乘以  $e^{i\mu s}$  相当于在傅里叶变换 ( $\omega$ ) 域中平移  $\mu/(2\pi)$ 。所以， $(\cos \mu s)/s$  的傅里叶变换是  $1/s$  的傅里叶变换的两个朝相反方向平移后的版本叠加。这两个版本分别向左和向右平移了  $\mu/(2\pi)$  (图 4.21)。

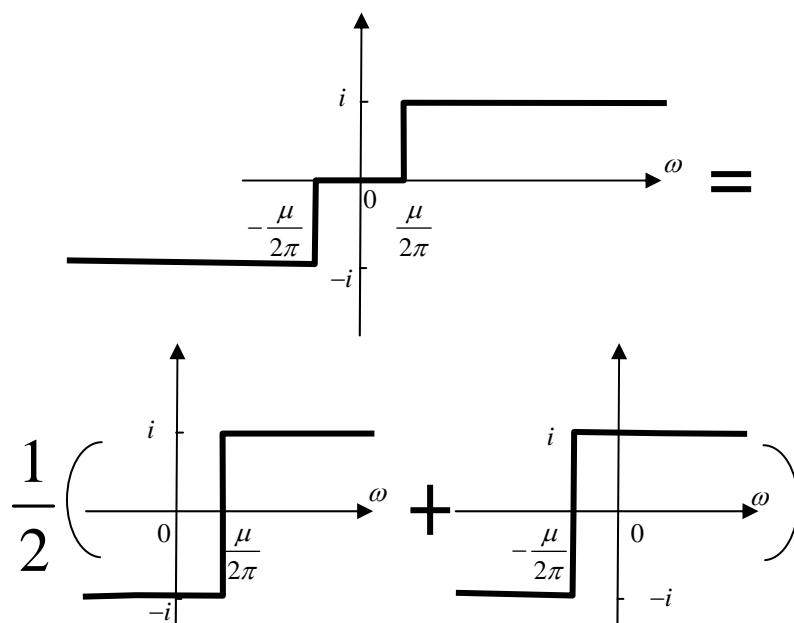


图 4.21 带缺口的希尔伯变换的传递函数可以分解成两个平移过的希尔伯变换的传递函数之和。

如果衰减系数  $\mu$  是非均匀的，FBP 型的图像重建算法还是存在的，但其表达式比较复杂，在下一节中我们将对它做个简要介绍。

#### 4.4\* 数学表达式

现在，我们不加证明地给出在均匀的衰减媒介中做SPECT图像重建的有衰减修正功能的 FBP 算法。这个算法在第4.3节中已经做了大致的介绍。我们记做了预处理的数据为  $\hat{p}(s, \theta)$ ，那么  $\hat{p}(s, \theta)$  与原本图像  $f(x, y)$  关系是它的加权投影，犹如探测器放在了中线上：

$$\hat{p}(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t\mu} f(s\bar{\theta} + t\bar{\theta}^\perp) dt。$$

式中的一些符号可参照第1.5节中的定义。下面的 FBP 算法用求导和带缺口的希尔伯变换来滤波，然后做加权的反投影：



$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} e^{-\mu(-x \sin \theta + y \cos \theta)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\mu(s - x \cos \theta - y \sin \theta))}{s - x \cos \theta - y \sin \theta} \frac{\partial \hat{p}(s, \theta)}{\partial s} ds d\theta。$$

重建 SPECT 数据并同时做均匀的衰减修正还有其它的算法。我们还可以用交换次序的拿手把戏来创造出新的算法。例如，我们可以先求导，紧接着做反投影。这两步会给我们一个半成品的重建图像  $\hat{f}(x, y)$ 。这个半成品的重图像  $\hat{f}(x, y)$  与原本图像  $f(x, y)$  有着紧密的关系：

$$\hat{f}(x, y) = f(x, y) * \frac{\cosh(\mu x)}{x},$$

式中，逐行做的一维卷积只在  $x$  方向进行。对这个式子做反卷积来求  $f(x, y)$  并不容易。这是因为当  $x$  趋于无穷大时，函数  $\frac{\cosh(\mu x)}{x}$  也趋于无穷大。不可能找到一个函数  $u(x)$  使得

$$\delta(x) = u(x) * \frac{\cosh(\mu x)}{x}$$

能在整个  $-\infty < x < \infty$  范围内都成立。但是，要找一个函数  $u(x)$  使得上面这个等式只在一个小区间，比如， $(-1, 1)$  区间，上成立还是可能的。在这个小区间之外就不对  $u(x) * \frac{\cosh(\mu x)}{x}$  下任何定义了。虽然在理论上这并不是一个很理想的解决方案，但是在实际的图像重建中它还挺管用。这是因为我们所感兴趣的物体都是局限在一个小的有限范围内的。即使做了这样一个让步，我们目前还是没有找到这样一个函数  $u(x)$  的闭合形式的表达式，还只能用数值运算的方法来解决  $\hat{f}(x, y) = f(x, y) * \frac{\cosh(\mu x)}{x}$  的反卷积问题。

这个先求导再做反投影最后做反卷积的算法有个特别的用处，它可以用于使用被截断的数据来精确地重建 ROI。

在非均匀的衰减媒介  $\mu(x, y)$  中做 SPECT 成像，若需要做衰减修正，就得在做发射型扫描之外另做一个透射型扫描。透射型扫描的投影数据要用来重建一个衰减系数图像  $\mu(x, y)$ 。这个衰减系数图像将被用在 SPECT 的图像重建中作衰减修正之用。下面的式子是个具有非均匀衰减补偿功能的 SPECT 图像重建算法：

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial q} \left[ e^{a_\theta(q, t) - g(q, \theta)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^s p)(l, \theta)}{q - l} dl \right] \right\}_{q=s} d\theta,$$

式中， $\operatorname{Re}$  表示取实数部分， $p(s, \theta)$  是测量到的被衰减的投影数据，

$$s = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad t = -x \sin \theta + y \cos \theta, \quad a_\theta(s, t) = \int_t^\infty \mu(s\bar{\theta} + \tau\bar{\theta}^\perp) d\tau,$$

$g(s, \theta) = \frac{1}{2}[(\mathbf{R} + i\mathbf{H}\mathbf{R})\mu](l, \theta)$ ， $i = \sqrt{-1}$ ， $\mathbf{R}$  是拉东变换算子，以及  $\mathbf{H}$  是对变量  $l$  的希尔伯特变换算子。这个算法是分别由 Novikov 和 Natterer 独立提出来的。该算法的表达式看上去令人眼花缭乱，其实它也算是个 FBP 算法，只是其滤波步骤比较麻烦，不是一个简单的卷积。

## 4.5 例题

**例题 1** 在医院里我们看到的X光 CT 图像是病人体内的线性衰减系数的分布图吗？

答案

确切地说，不是。我们看到的衰减系数只是个相对衰减系数值。叫做 CT 值。所谓 CT 值是用水的衰减系数  $\mu_{\text{水}}$  作为参照值定义的：

$$\text{CT 值} \quad h = 1000 \times \frac{\mu - \mu_{\text{水}}}{\mu_{\text{水}}}。$$

CT 值的单位是 HU（即 Hounsfield Unit，韩森费尔德单位，韩森费尔德是 CT 的发明者）。对于水， $h = 0$  HU。对于空气， $h = -1000$  HU。对于骨头， $h = 1000$  HU。

**例题 2** 如图4.19所示，低于  $\mu/(2\pi)$  的频率分量在图像重建中都被丢弃了。这怎么能重建图像中的低频分量呢？

答案

Inouye 在他 1988 的文章中推导出了一个具有复数频率的中心切片定理，把经过衰减的投影数据与原本物体在傅里叶变换域中联系了起来。他提出了“虚数”频率的概念。这个虚频率就是衰减系数。我们注意到在空间域里频率与衰减系数的单位（1/cm）是一样的，所以，把衰减系数视为一种频率

是合理的。这样一来，在空间域里的衰减效应在频率域里则等价于对“频率”的位移。在经过衰减的投影数据中，频率分量向高频方向移动了  $\mu/(2\pi)$ 。所以，在重建图像只考虑  $\mu/(2\pi)$  以上的频率分量并不会造成信息损失。

我们还可以用 Bellini 的结果来解释这个现象。设无衰减的拉东变换为

$$p(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s\bar{\theta} + t\bar{\theta}^{\perp}) dt ,$$

而指数型拉东变换为

$$\hat{p}(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu t} f(s\bar{\theta} + t\bar{\theta}^{\perp}) dt .$$

指数型拉东变换就是经过衰减的投影数据  $p(s, \theta)$  乘以  $e^{\mu d(s, \theta)}$  的结果。

我们下面分别对  $p(s, \theta)$  和  $\hat{p}(s, \theta)$  做二维傅里叶变换，并分别得到  $P(\omega, k)$  和  $\hat{P}(\omega, k)$ 。Bellini 给出了  $P(\omega, k)$  和  $\hat{P}(\omega, k)$  之间的关系：

$$P(\omega, k) = \left( \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^2 + (\mu/(2\pi))^2} + (\mu/(2\pi))} \right)^k \hat{P}(\sqrt{\omega^2 + (\mu/(2\pi))^2}, k)$$

对  $\omega \geq 0$  和  $k \geq 0$  时成立。

这个关系暗示了经过衰减后频率  $\omega$  平移到了  $\sqrt{\omega^2 + (\mu/(2\pi))^2}$ 。

**例题 3** 考虑一个二维的 PET 成像问题（见图 4.22），其中被成像的物体由  $R_1$  和  $R_2$  两部分组成。放射性物质在  $R_1$  内的密度为  $\rho_1$ ，在  $R_2$  内的密度为  $\rho_2$ 。这两个部分的衰减系数均为  $\mu$ 。试求 PET 的同时检测的投影值  $p$  和经衰减修正后的值  $p_c$ 。

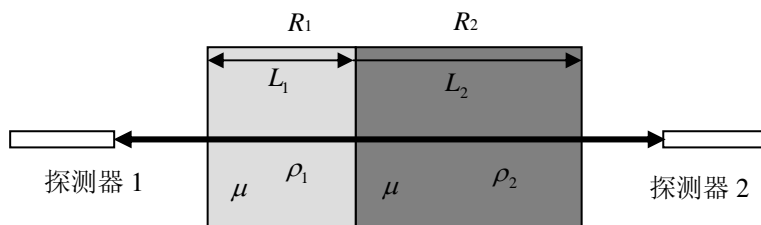


图 4.22 这两个区域中的放射性物质的密度不同。

解

PET 的同时检测的投影值是

$$p = (L_1\rho_1 + L_2\rho_2)e^{-\mu(L_1+L_2)}。$$

经衰减修正后的值

$$p_c = L_1\rho_1 + L_2\rho_2。$$

## 4.6 小结

- X光 CT 的工作原理是比尔定律。必须把 CT 测到的数据取对数才能得到线积分数据。
- PET 和 SPECT 都可直接测量线积分数据。但是，这些测量值受到了病人身体对光子衰减的影响，而使线积分的值不准确。
- PET 数据光子衰减的修正可以通过对数据乘以一个修正因子来完成。这个修正因子是通过透射型投影数据算出来的。
- SPECT 数据光子衰减的修正要困难得多，不可以通过对数据乘以一个修正因子来完成。衰减的修正只能在做图像重建的同时一起做。对于均匀的和非均匀的衰减媒介都有精确的 FBP 图像重建算法。但对于非均匀的衰减媒介，其 FBP 重建算法相当繁琐，实现起来很麻烦。
- 阅读完本章后，读者至少要能区分什么是透射型断层成像与什么是发射型断层成像，并能理解 PET 和 SPECT 的衰减有什么不同。

## 参考文献

- Bellini S, Piacenti M, Caffario C, Rocca F (1979) Compensation of tissue absorption in emission tomography. *IEEE Trans Acoust Speech, Signal Processing ASSP* 27:213-218
- Bukhgeim AA, Kazantsev SG (2002) Inversion formula for the fan-beam attenuated Radon transform in a unit disk. The Sobolev Institute of Mathematics, Russian Academy of Science Siberian Branch
- Guillemeat JP, Novikov R (2004) A noise property analysis of single-photon emission computed tomography data. *Inverse Probl* 20:175-198
- Gullberg GT (1979) The Attenuated Radon Transform: Theory and Application in Medicine and Biology, Ph.D. Dissertation, Lawrence Berkeley Laboratory, University of California, Berkeley, CA
- Gullberg GT, Budinger TF (1981) The use of filtering methods to compensate for constant attenuation in single photon emission computed tomography. *IEEE Trans Biomed Eng* 28:142-157
- Hawkins WG, Lechner PK, Yang NC (1988) The circular harmonic transform for SPECT reconstruction and boundary conditions on the Fourier transform of the sinogram. *IEEE Trans Med Imaging* 7:135-148
- Hsieh J (2003) *Computed Tomography: Principles, Design, Artifacts, and Recent Advances*, SPIE, Bellingham, WA
- Huang Q, Zeng GL, Wu J ((2006) An alternative proof of Bukjgeim and Kazantsev's inversion formula for attenuated fan-beam projections. *Med Phys* 33:3983-3987
- Huang Q, You J, Zeng GL, Gullberg GT (2009) Reconstruction from uniformly attenuated SPECT projection data using the DBH method. *IEEE Trans. Med. Imaging* 28:17-29
- Inouye T, Kose K, Hasegawa A (1988) Image reconstruction algorithm for single-photon-emission computed tomography with uniform attenuation. *Phys Med Biol* 34:299-304
- Kunyansky LA (2001) A new SPECT reconstruction algorithm based upon the Novikov's explicit inversion formula. *Inverse Probl* 17:293-306
- Markoe A (1984) Fourier inversion of the attenuated X-ray transform. *SIAM J Math Anal* 15:718-722
- Metz CE, Pan X (1995) A unified analysis of exact methods of inverting the 2-D exponential Radon transform, with implications for noise control in SPECT. *IEEE Trans Med Imaging* 17:643-658
- Natterer F (2001) Inversion of the attenuated Radon transform. *Inverse Probl* 17:113-119
- Noo F, Wagner JM (2001) Image reconstruction in 2D SPECT with 180° acquisition. *Inverse Probl* 17:1357-1371
- Novikov RG (2002) An inversion formula for the attenuated X-ray transformation. *Ark Math* 40:145-167
- Pan X, Kao C, Metz CE (2002) A family of  $\pi$ -scheme exponential Radon transforms and the uniqueness of their inverses. *Inverse Probl* 18:825-836
- Puro A (2001) Cormack-type inversion of exponential Radon transform. *Inverse Probl* 17:179-188
- Rullgård H (2002) An explicit inversion formula for the exponential Radon transform using data from 180°. *Ark Math* 42:145-167
- Rullgård H (2004) Stability of the inverse problem for the attenuated Radon transform with 180° data. *Inverse Probl* 20:781-797
- Tang Q, Zeng GL, Gullberg GT (2007) A Fourier reconstruction algorithm with constant attenuation compensation using 180° acquisition data for SPECT. *Phys Med Biol* 52:6165-6179
- Tretiak O, Metz CE (1980) The exponential Radon transform. *SIAM J Appl Math* 39:341-354
- You J, Zeng GL, Liang Z (2005) FBP algorithms for attenuated fan-beam projections. *Inverse Probl* 21:1179-1192

Webster JG (1998) Medical Instrumentations: Application and Design, 3<sup>rd</sup> ed, Wiley, New York

Wolbarst AB (1993) Physics of Radiology, Appleton and Lange, Norwalk, CT

Zeng GL, Gullberg GT (2009) Exact emission SPECT reconstruction with truncated transmission data. Phys Me. Biol 54:3329-3340

## 第5章 三维图像重建

### 5.1 平行的线积分数据

在不少情况下，一个三维图像的重建可以分解成一系列逐层做的二维图像重建。只有当投影射线可以按层分组，而每一组里的投影射线都必须局限在该层所在的与旋转轴垂直的二维平面里的特殊情况下(图 5.1 左)，这个三维图像重建转为二维图像重建的方法才可行。

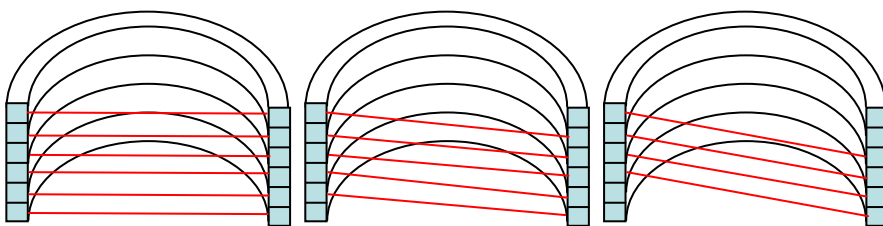


图 5.1 测量到的投影射线有的局限于与旋转轴垂直的平面内，而有的与这些平面成一个斜角。

但在其他情形，投影射线却穿过那些与旋转轴垂直的平面 (图5.1中和右)。此时，三维图像的重建就不能简化为逐层地做二维图像的重建。

二维平行光束图像重建的理论基础是中心切片定理 (见第2.2节)。利用平行光线做三维成像的中心切片定理可以这样叙述：三维函数  $f(x, y, z)$  的投影  $p(u, v, \bar{\theta})$  之二维傅里叶变换  $P(\omega_u, \omega_v, \bar{\theta})$  等于函数  $f(x, y, z)$  的三维傅里叶变换  $F(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  沿与探测器平行的方向过原点的片段 (图 5.2)。这里  $\bar{\theta}$  是  $u$ - $v$  平面和  $\omega_u$ - $\omega_v$  平面的法线方向。

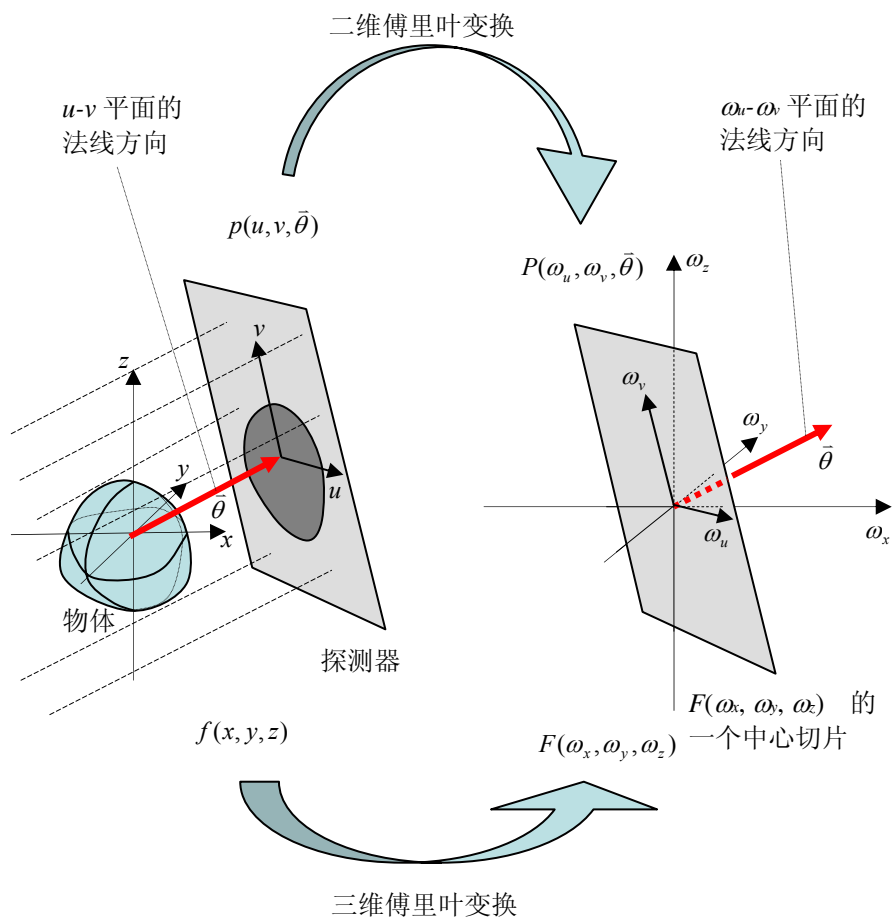


图 5.2 三维线积分投影成像的中心切片定理。

根据这个中心切片定理，我们能找到一些  $\bar{\theta}$  的轨迹以使傅里叶空间中的每一点  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  上的值都能被测到。图5.3给出了一个满足要求的  $\bar{\theta}$  的轨迹。这个轨迹是一个大圆。所谓大圆，是指在单位球面上的一个半径为一的圆圈 (图 5.4)。大圆上的每一个单位向量  $\bar{\theta}$  都对应于一个傅里叶空间  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  中的一个投影测量平面  $P(\omega_u, \omega_v, \bar{\theta})$ ， $\bar{\theta}$  是该平面的法向量。当向量  $\bar{\theta}$  在大圆上扫过一周后，投影测量平面  $P(\omega_u, \omega_v, \bar{\theta})$  就会扫满所有傅里叶空间中的点  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ 。其实，由于对称性，当向量  $\bar{\theta}$  在大圆上扫过半周后，一组完整的数据就都测到了。



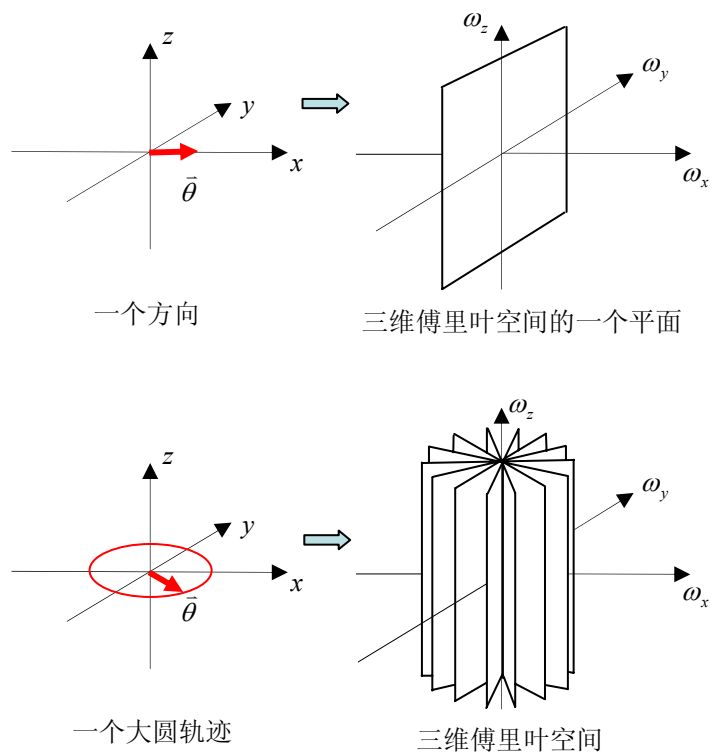


图 5.3 一个测量方向确定傅里叶空间中的一个测量平面。测量方向的轨迹是个大圆就意味着可以测量到整个傅里叶空间的数据。

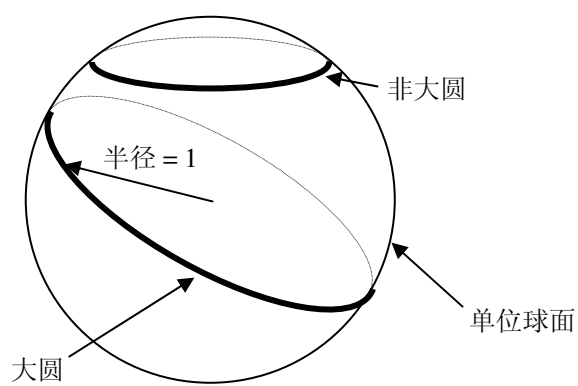


图 5.4 大圆是指单位球面上的单位圆。

把上面这个例子推广一下，就是著名的沃尔洛夫条件：把平行光束的方向记为  $\bar{\theta}$ ，把单位向量  $\bar{\theta}$  的轨迹记为  $\Omega$ 。如果单位圆上的每一个大圆都与  $\Omega$  有交点，那么就可以获得一组完整的数据。图5.5给出了一些单位向量  $\bar{\theta}$  的轨迹（涂色的区域为轨迹  $\Omega$ ）的例子。前三个例子满足沃尔洛夫条件，而后两个例子不满足。

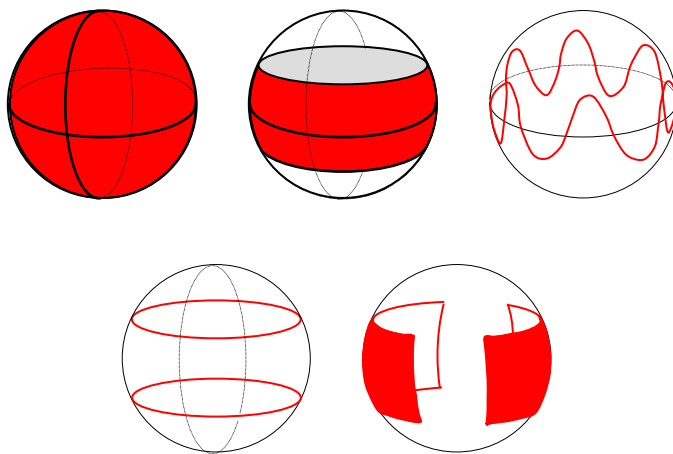


图 5.5 方向向量的轨迹用涂色的区域来标示。第一行是满足沃尔洛夫条件例子。第二行是不满足沃尔洛夫条件例子。

图像重建算法取决于方向向量  $\bar{\theta}$  的轨迹的不同而不同。下面我们介绍一下最基本的图像重建算法的推导原则。

### 5.1.1 先反投影后滤波算法

如果测到了一组完整的数据，一个三维图像是可以精确地重建出来的。与二维图像重建一样，我们在做图像重建时，可以先做反投影，也可以最后做反投影。如果是先做反投影，就可得到一个先反投影后滤波的算法。下面就介绍以下这个算法的步骤。

(i) 对于空间中的任意一点，求其投影/反投影的 PSF（点扩散函数） $h$  (PSF 的定义见图 3.2)。设原本图像为  $f(x, y, z)$ ，对未滤波的数据做反投影得到的图像是  $b(x, y, z)$ ，那么，这两个图像的关系就是

$$b = f *** h,$$

式中“\*\*\*”表示三维卷积。例如，如果方向向量 $\bar{\theta}$ 的轨迹是整个单位球面（见图 5.5 第一行最左边的图），其相应的点扩散函数  $h$  是

$$h(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{r^2},$$

式中， $r$  是到点源的距离。在二维成像的时候，投影/反投影的 PSF 是  $1/r$ 。这说明三维的 PSF 比二维的 PSF 更为尖锐，当  $r$  增大时三维成像的 PSF 比二维的 PSF 趋于零更快些。

(ii) 对关系式  $b = f *** h$  的两端求三维傅里叶变换，得到

$$B(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = F(\omega_x, \omega_y, \omega_z) H(\omega_x, \omega_y, \omega_z)。$$

做了傅里叶变换之后， $b$ ， $f$ ，和  $h$  分别变换成  $B$ ， $F$ ，和  $H$ ，而卷积变成了乘积。如果我们再次用图 5.5 第一行左图的情形为例，其 PSF  $h(x, y, z) = 1/r^2$  的傅里叶变换（即传递函数） $H$  为

$$H(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = \frac{\pi}{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}}。$$

这样，我们就可以用三维的斜坡滤波函数

$$\frac{1}{H(\omega_x, \omega_y, \omega_z)} = \frac{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}}{\pi}$$

来对这个特例做图像重建。

将函数  $F$  从  $B(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = F(\omega_x, \omega_y, \omega_z) H(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  解出，我们得到

$$F(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = B(\omega_x, \omega_y, \omega_z) \frac{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}}{\pi}。$$

最后，对  $F$  做三维傅里叶反变换就可得到重建的图像。

一般来说，三维线积分数据是高度冗余的。因为我们可以用不同的方式来对冗余的数据进行加权处理，所以三维线积分数据的图像重建算法并不唯一。

### 5.1.2 先滤波后反投影FBP 算法

在先滤波后反投影算法中，首先要把投影数据  $p(u, v, \bar{\theta})$  进行二维滤波（或二维卷积），得到  $q(u, v, \bar{\theta})$ 。然后对滤波后的数据  $q(u, v, \bar{\theta})$  做反投影，从而得到重建的图像  $f(x, y, z)$ 。

由于数据是冗余的，这个二维滤波器不是唯一的。一般来说，在不同的方向  $\bar{\theta}$  上这个二维滤波器也不一样。为了找到这些二维滤波器，一种方法是利用中心切片定理算出傅里叶变换域中的滤波函数（即传递函数）。

在前面的第5.1.1节中，我们知道如果投影/反投影的 PSF 是  $h(x, y, z)$ ，则其傅里叶变换就是  $H(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ 。令  $G(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = 1/H(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ ，那么  $G$  就是先反投影后滤波图像重建算法中的傅里叶变换域中的滤波函数。在得到了  $G(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  之后，要找投影数据  $p(u, v, \bar{\theta})$  需要用的二维滤波器，只需在方向  $\bar{\theta}$  上对  $G(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  做中心切片即可（图 5.2）。

## 5.2 平行的面积分数据

在三维成像中，对三维物体  $f(x, y, z)$  做的平行的面积分  $p(s, \bar{\theta})$  称为拉东变换（图 5.6）。在二维成像中，拉东变换是对二维物体  $f(x, y)$  做的平行的线积分  $p(s, \theta)$ 。一般来说，对  $n$  维物体  $f$  做的平行的  $(n-1)$  维超平面积分统称为拉东变换。另一方面，对于任何维数的物体  $f$  做的平行的一维积分可叫作线积分（line integral），射线和（ray-sum），X光变换（X-ray transform），或射线变换（ray transform）。在二维成像中，拉东变换和X光变换是一回事。

与线积分数据不同，面积分数据在医学成像中并不常见。不管怎么说，三维成像中的拉东变换还是值得花时间讨论的。这是因为它的反演公式既简单又漂亮，而且还可以用于解决相关的成像问题。

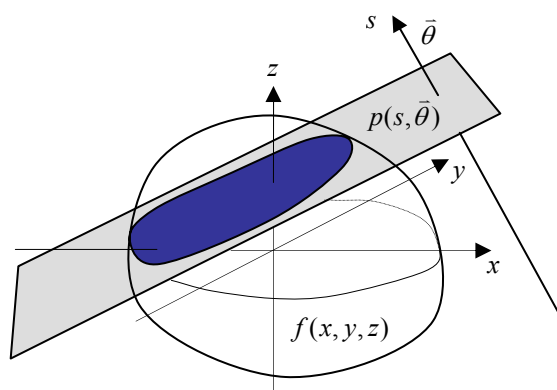


图 5.6 在三维成像中，对三维物体面积分就是物体的拉东变换。

为了研究三维的拉东变换，我们可以设想有一个一维的探测器，它能测量到物体的面记分，其积分平面与这个一维探测器垂直。这个一维探测器的轴线方向记为  $\bar{\theta}$ 。在三维成像中拉东变换的中心切片定理可做如下叙述：三维函数  $f(x, y, z)$  的投影  $p(s, \bar{\theta})$  之一维傅里叶变换  $P(\omega, \bar{\theta})$  等于函数  $f(x, y, z)$  的三维傅里叶变换  $F(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  沿与探测器平行的方向过原点的一维片段（图 5.7）。这里， $\bar{\theta}$  是一维探测器的轴线方向，也是在傅里叶空间  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  中一维“切片”的方向。

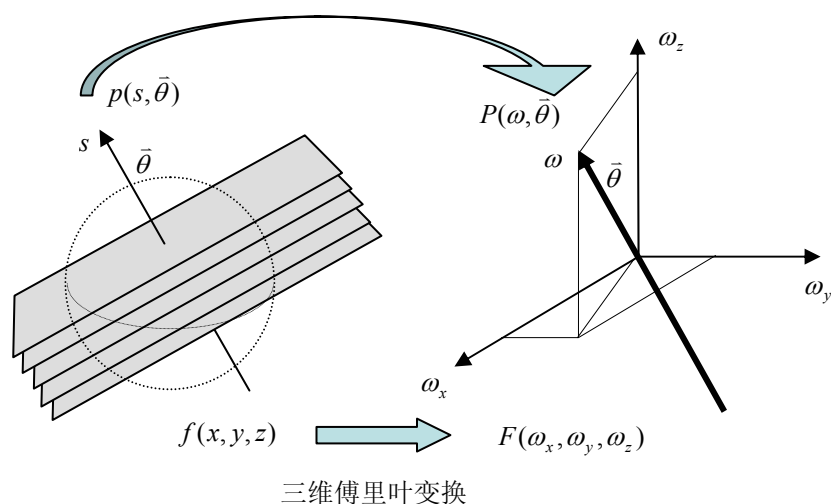


图 5.7 三维拉东变换的中心切片定理。

从图5.7中我们注意到，每一个探测器的方位  $\bar{\theta}$  只能在傅里叶空间  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  中测到沿着  $\bar{\theta}$  方向的一条线。要想获得足够的数据来做图像重建，必须使探测方位  $\bar{\theta}$  扫满半个单位球面。当数据准备好了以后，三维拉东变换的图像重建算法相当简单，可以用先滤波后反投影的方法来做。这个先滤波后反投影的算法通常被称为拉东反演公式。

三维拉东变换的图像重建是这样实现的。首先对一维数据  $p(s, \bar{\theta})$  以  $s$  为变量求二阶导数。这一步叫滤波。随后把滤波后的数据反投影到三维空间，就得到了重建的图像了。你也许再也找不到比它更简洁的图像重建算法了。

下面介绍一个计算量小的三维反投影方法。这个方法只适用于拉东数据。拉东数据反投影的目的是把探测器上的一个点的值放到该点所在平面上的每一点，这个平面与一维探测器的轴线方向垂直。若直接按定义实现这个反投影过程，计算量是比较大的。要想减少计算量，窍门是把三维的拉东反投影分成两步来做，其中每一步都是一个二维的拉东反投影。第一步，把一个点反投影成一条线（图5.8(i)）。探测器上所有的点经过第一步的反投影变成一组平行的直线，而这些直线都在同一个平面内。在第二步中，每一条线经过反投影变成一个二维平面（图5.8(ii)）。在这两个步骤中，反投影的方向是互相垂直的。

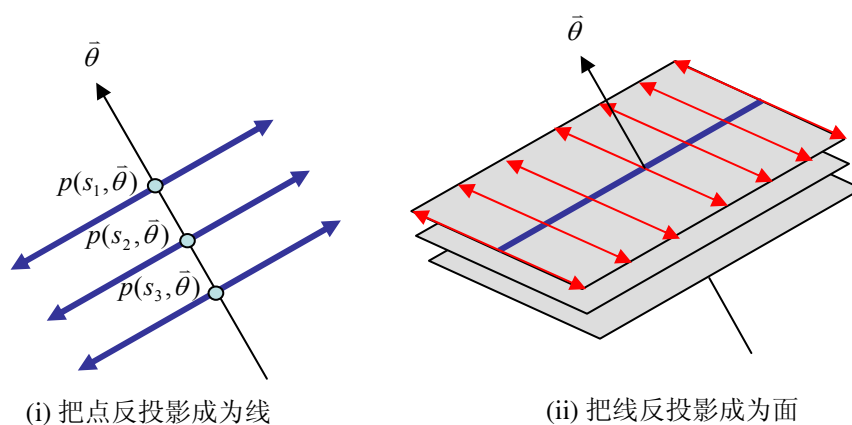


图 5.8 三维拉东反投影可分为两步来实现：第一步是点变成线，第二步是线变成面。

## 5.3 锥形束数据

利用锥形束成像十分常见，比如，X光 CT 和针孔 SPECT 成像都是锥形束成像。与三维线积分和三维面积分的数据做图像重建相比，锥形束数据的图像重建要困难得多。对于锥形束数据成像，我们还没有找到相应的中心切片定理。下面我们要花相当的篇幅来讨论它的重建方法。

锥形束数据的图像重建是个很新的学科，它的理论研究的先驱者们至今还朝气蓬勃地在科研的第一线上工作。在这方面有卓越贡献的第一人，是个柬埔寨裔学者 Tuy。前些年笔者见到他时，他正在中国做 CT 方面的工作。1983 年 Tuy 发表了一篇文章。文章中有一个引理把“延伸”后的锥形束数据的三维傅里叶变换与物体本身的三维傅里叶变换的一个变形联系了起来。这个引理的理论价值几乎等同于“锥形束的中心切片定理”。Tuy 的文章还提出了锥形束数据的数据足量条件，这个条件在锥形束成像领域里是家喻户晓的。Tuy 条件可以叙述为：每一个与物体相交的平面都必须包含至少一个锥形束的焦点位置。这个条件与扇形束的数据足量条件差不多：每一条与物体相交的直线都必须包含（至少）一个扇形束的焦点位置。

在图5.9中锥形束的焦点轨迹是一个圆圈，这个轨迹不满足 Tuy 条件。这一点很容易验证。我们在轨道平面的上方或下方画一个切割物体平面，当这个平面与轨道平面平行时，这个平面就永远不会与扇形束的焦点的轨道相交。另一方面，图5.9中的螺旋轨道和圆圈加直线轨道就满足 Tuy 条件，并可以用于采集锥形束投影数据来精确地重建图像。

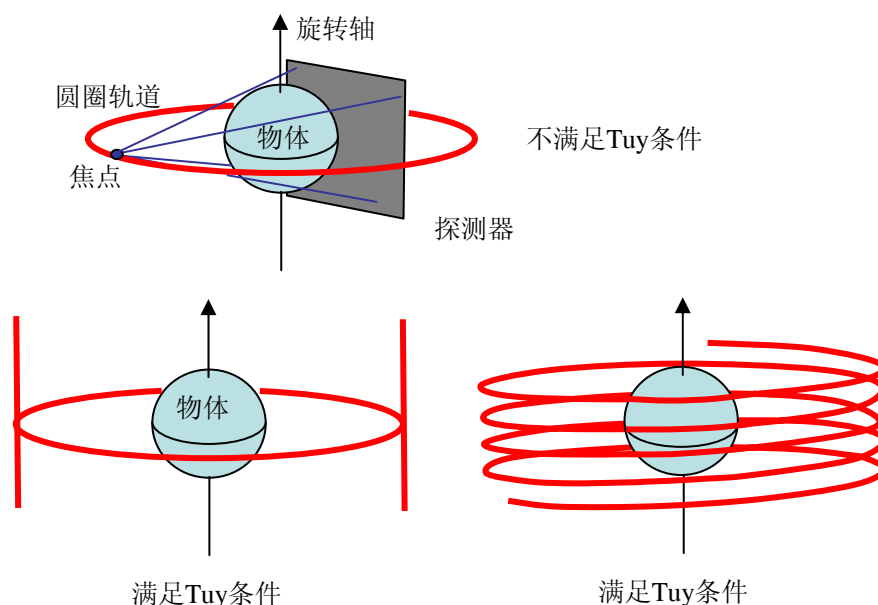


图 5.9 圆圈轨道不满足 Tuy 条件。圆圈加直线轨道和螺旋轨道则满足 Tuy 条件。

### 5.3.1 Feldkamp 算法

Feldkamp 的锥形束图像重建算法是专门为锥形束的圆形焦点轨道而设计，由 Feldkamp, Davis, 和 Kress 三人共同发表的。这是算法是个先滤波后反投影 FBP 算法，而且使用起来很方便。由于圆圈轨道不满足 Tuy 条件，Feldkamp 算法只能提供一个近似的重建图像。在重建的图像中，可以看到伪影。特别是在远离轨道平面的区域，伪影表现得更明显。这些伪影可以表现为图像上数值的偏低，层与层间的图像的互串，和在物体的边缘外围出现负值等等。

Feldkamp 算法的优点是实用与稳定。当锥形束的锥形张角比较小（比如，小于  $10^\circ$ ）时，Feldkamp 算法重建出的图像还是不错的。在轨道平面上，这个算法是个精确的，因为这时候 Feldkamp 算法退化成为一个经典的扇形束的 FBP 算法。如果物体在转轴方向是个常数（比如，物体是个高高的柱子），Feldkamp 算法的重建图像也是精确的。



Feldkamp 锥形束算法（在第5.4节中还要继续讨论）其实就是从扇形束的FBP算法（见第5.4.1节）做点修改得到的。Feldkamp 算法分下面几个步骤：

- (i) 对投影数据做预处理，即乘以一个余弦函数 $\cos \alpha$ （角度 $\alpha$ 的定义见图5.10）。
- (ii) 对预处理过的数据逐行地做一维的斜坡滤波。
- (iii) 把滤波后的数据做锥形束的加权反投影。反投影中的权函数取决于重建点到焦点的距离。

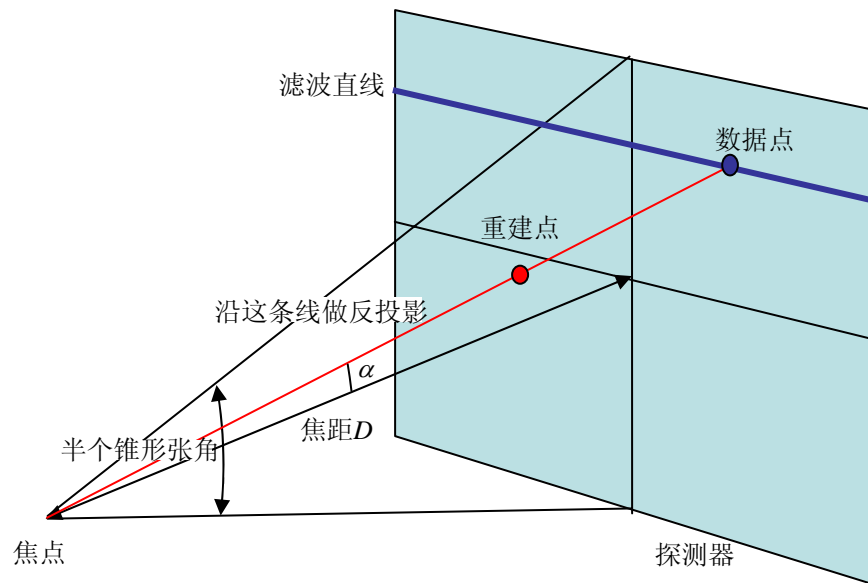


图 5.10 锥形束图像重建算法的坐标系。

### 5.3.2 Grangeat 算法

Feldkamp 算法的思路是把锥形束图像重建的问题转变为扇形束图像重建的问题。而 Grangeat 算法则是把锥形束图像重建的问题转变为三维拉东变换的问题（见第5.2节），并且用拉东反演公式来重建图像。Feldkamp 算法是基于圆圈轨道来考虑的。而 Grangeat 算法则可应用到任何一个轨道上去。如果所用的轨道满足 Tuy 条件的话，Grangeat 算法可以给出精确的重建图像。

Grangeat 是个法国人，Grangeat 算法是他的博士论文。Grangeat 算法的第一步是从锥形束的线积分数据创造出面积分来。其作法是在二维的锥形束探测器上画很多的直线，然后沿这些直线对数据做线积分（图 5.11）。

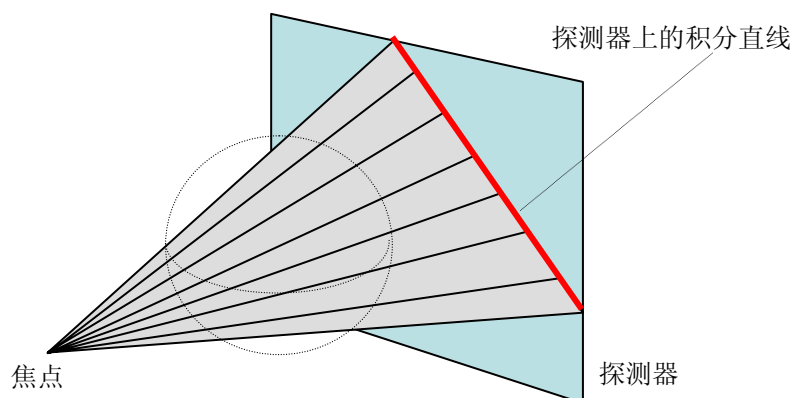


图 5.11 在锥形束的探测器上沿着直线做积分就可得到物体的加权的面积分。

我们发现这样得来的面积分并不是物体真正的面积分，而是加权的面积分，其权函数为  $1/r$ 。这里， $r$  是物体到锥形束的焦点的距离。要得到真正的面积分，必须想办法去掉这个  $1/r$  权因子。

从图5.12中我们发现，角度的微分  $d\alpha$  与距离  $r$  的乘积等于在切线方向上的微分  $dt$ ： $r d\alpha = dt$ 。如果我们对  $1/r$  加权过的面积分对角度求导数，就会产生出一个因子  $r$  来抵消权因子  $1/r$ 。这个总效果就是不加权的面积分在切线方向上的导数。这个切线方向也就是平面的法线方向。用数学语言来表述，就是

$$\frac{\partial \left( \frac{1}{r} \text{ weighted plane integral} \right)}{\partial \alpha} = \frac{\partial (\text{Radon transform})}{\partial t}。$$

别忘了，拉东反演公式是沿  $t$  的方向对面积分求二阶导数然后再做三维的拉东反投影。我们已经有了对面积分求的一阶导数，再求一个一阶导数就得到二阶导数了。所以，锥形束图像可以按下面的方法来重建：

- (i) 在每个探测器平面上，算出所有可能的线积分（图 5.11），包括所有的方向和所有的位置。这就得到了很多以  $1/r$  加权的面积分。
- (ii) 对第(i)步的结果以角度为变量求导数。

- (iii) 把第(ii)步的结果嵌入拉东空间  $(s, \bar{\theta})$  (图 5.6)。
- (iv) 对第(iii)步的结果沿平面的法线方向  $t$  求一阶导数。
- (v) 做三维拉东反投影 (图 5.8)。

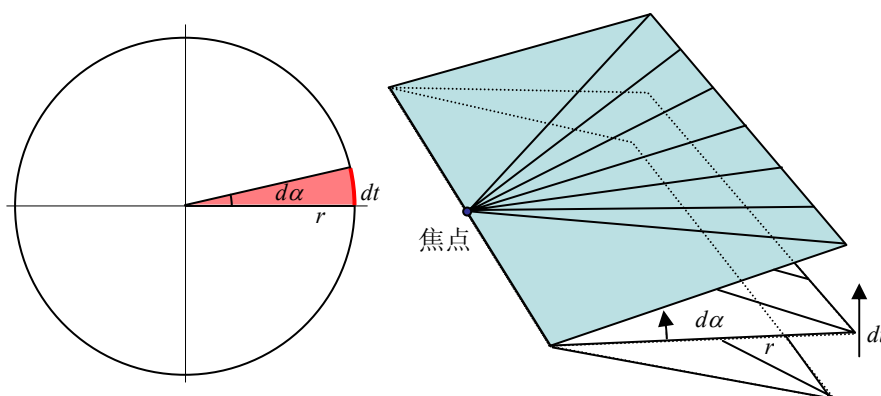


图 5.12 在切线方向上的微分  $dt$  等于角度的微分  $d\alpha$  乘以距离  $r$ 。

我们现在要对第(iii)步做进一步的解释。对于一个实际的焦点轨道，数据被嵌入到拉东空间  $(s, \bar{\theta})$  后，拉东空间的采样一般来说是不均匀的。冗余的数据需要做适当的加权处理。例如，如果拉东空间的某一点  $(s, \bar{\theta})$  被测到了 3 次，这个数值就需要除以 3。

Grangeat 算法不是一个 FBP（先滤波后反投影）算法，因为它需要对数据进行嵌入重排。这个嵌入重排步骤需要用到插值运算，而插值运算会引入比较大的误差。

### 5.3.3 Katsevich 算法

Katsevich 是个俄罗斯裔的年轻数学家。他在本世纪初提出了锥形束图像重建的一个精确的 FBP 算法。当时引起了很大的轰动。Katsevich 锥形束算法最初是为螺旋轨道“量身订造”的。后来 Katsevich 锥形束算法被推广到了其它更一般的锥形束焦点的轨道上去了。Katsevich 算法是个真正的 FBP（先滤波后反投影）算法。其滤波是移动不变的，也就是滤波器函数与重建点的位置无关，因而可以用卷积来实现。这里用的反投影是真正的锥形束反投影。而在 Grangeat 算法中的反投影是拉东反投影。

用如图5.9所示的螺旋线轨道来做锥形束成像满足 Tuy 的锥形束数据足量条件。数据是够了，但现在的主要问题是恰当地对数据做归一化处理并找到一个有效的锥形束 FBP 算法来做图像重建。Katsevich 在解决这个问题时提出了一些限制条件。

可以证明，对于螺旋线轨道所包含的体积内的任意一点  $(x, y, z)$ ，存在唯一的一条过点  $(x, y, z)$  直线线段，其两端都接触到螺旋线轨道，而且这两个触点之间小于一个螺距。在图5.13中这两个触点记为  $s_b$  和  $s_t$ 。这个特殊的直线线段叫  $\pi$  线段（或  $\pi$  直线）。Katsevich 的第一个限制条件是若要对点  $(x, y, z)$  做图像重建，只能用在  $s_b$  和  $s_t$  之间采集到的锥形束投影数据。

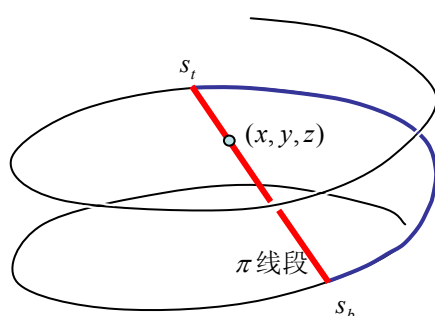
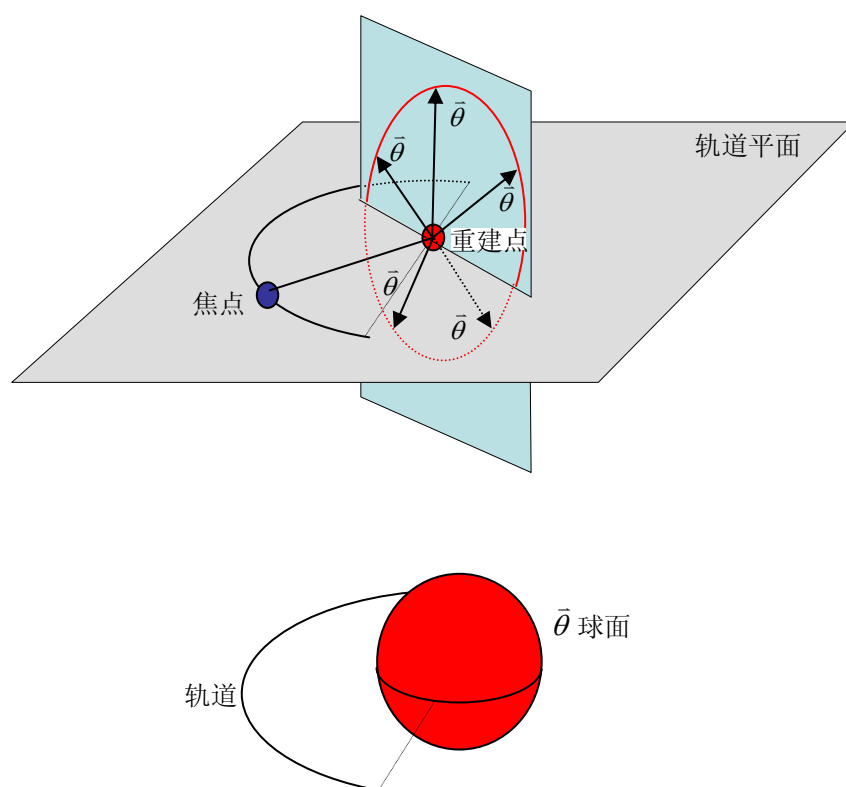


图 5.13 在螺旋线的内部任何一点  $(x, y, z)$  刚好存在一条  $\pi$  线段。

Katsevich 的第二个限制条件是滤波方向要经过精心地挑选。对冗余数据的归一化处理是靠巧妙地利用特定的滤波方向完成的。为了看清楚冗余数据的问题，让我们考查三个锥形束图像重建的情形：（a）数据足够，但无冗余数据；（b）数据不够；（c）数据足够，而且有冗余。

（a）锥形束的焦点轨道是个圆弧（即一个不完整的圆）。要重建的物体是轨道平面上一个点。这个点在圆弧的两个端点的连接线上。这条连接线正好是图像重建点的  $\pi$  线段。在这个特例中，整个物体就是这么孤零零的一个点，用锥形束在一个焦点位置对这个点的测量很容易地就可以得到这个点在多个方向的面积分。这些“面”都包含着焦点与重建点的连接线。当锥形束的焦点跑遍整个圆弧后，这个点的所有面积分都测到了。我们来回顾一下拉东变换的中心切片定理：精确的图像重建要求能测到所有方向  $\bar{\theta}$ （图 5.14 上图）上的面积分。



**图 5.14** 上图：在固定的一个锥形束焦点的位置，所有方向向量汇总成一个单位圆。每个方向向量代表一个测到的面积分。这个单位圆所在的平面与连接焦点和重建点的直线相垂直。下图：当焦点扫过整段弧线后，所有方向向量就汇总成一个单位球面。

单位向量  $\vec{\theta}$  在与轨道平面相垂直的一个平面上汇成一个圆圈（我们就称它为  $\vec{\theta}$  圆好了），这个含有  $\vec{\theta}$  圆的平面还与连接重建点和焦点的直线相垂直。这样一来，弧线轨道上每个焦点位置都对应一个  $\vec{\theta}$  圆。让焦点跑遍整个

弧线轨道，那么所对应的  $\bar{\theta}$  圆就会汇总成一个球面，我们把它叫  $\bar{\theta}$  球面（图 5.14 下图）。

(b) 如果用与(a)中相同的弧线轨道，而且被成像的物体仍然是一个点，但是这个点的位置有所不同。这个点现在是放在轨道平面的上方。在这种情况下，数据就不够了。如果在每一个焦点位置上画一个  $\bar{\theta}$  圆，这个  $\bar{\theta}$  圆会有一个倾斜的角度。即使让焦点跑遍整个弧线轨道，所对应的  $\bar{\theta}$  圆的汇总不再是一个完整的球面了。球面北极圈和南极圈都没有覆盖到（图 5.15）。

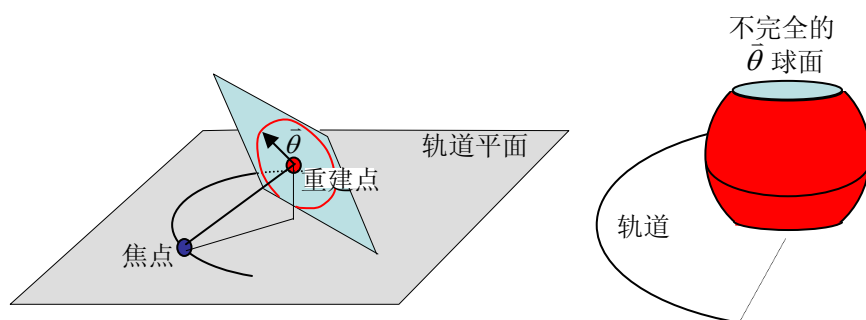


图 5.15 如果重建点在轨道平面的上方，把所有的方向向量汇总在一起也不能覆盖整个单位球面。

(c) 现在我们考虑一个螺旋线轨道。物体还是一个点。这个点是放在螺旋线所包围的体积的内部。我们首先找到这个重建点的  $\pi$  线段，和这个  $\pi$  线段的两个端点。图 5.16 显示的是这两个端点之间那一段螺旋线。

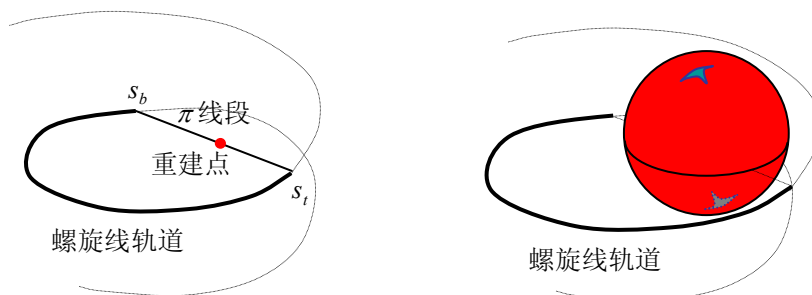


图 5.16 对螺旋线轨道来说，被测到的方向向量布满整个单位球面。而且南极和北极有个小区域被覆盖（即测量了）三次。

如图 5.16 所示， $\bar{\theta}$  球面是完完整整地测量到了。事实上， $\bar{\theta}$  球面被过分地覆盖了。在靠近南极和北极的地带有个看起来像个小三角形的区域被测量了三次。我们再从另一个角度来看这个问题。过重建点画一个平面。在大多数

情况下，该平面与我们所截下来的这一段螺旋线相交于一个点。可是，仍有小小的概率（这个概率并不是零）使该平面与我们所截下来的这一段螺旋线相交于三个点。这可以从图 5.17 所示的侧视图清楚地看到。该平面与这一段螺旋线之间的其它情形，发生的概率是零。（这里我们用的概率一词并不十分准确，因为我们不是在讨论一个随机事件。用数学里的测度一词来描述要准确些。）

当一个平面与焦点轨道相交三次时，我们必须设计出一个恰当的权函数对所测数据做加权和归一化处理。对每一个测量方向来说，总的加权函数的和应该等于 1。常识告诉我们，为了降低噪声，我们应该利用所有测到的数据，对所有的数据求加权和。对冗余的数据来说，权函数要与数据的噪声方差成反比。可是，要想推导出一个图像重建的 FBP 算法，并要求滤波是移动不变的（即可以用求卷积来实现），我们的奢侈不能太多，只好忍痛割爱，实行“方便”的加权，而不是最佳的加权方案。

在 Katsevich 算法中，测量值被赋予的加权值要么是 +1 要么是 -1。如果一个平面只被测到了一次，我们必须保证它所赋予的加权值是 +1。如果一个平面只被测到了三次，我们必须保证其中两次所赋予的加权值是 +1，其中一次所赋予的加权值是 -1。换句话说，三个数据中，我们要仍掉两个，只用其中一个。这的确令人痛惜。关于加权与滤波方面进一步的讨论，我们将在下一节中继续进行。

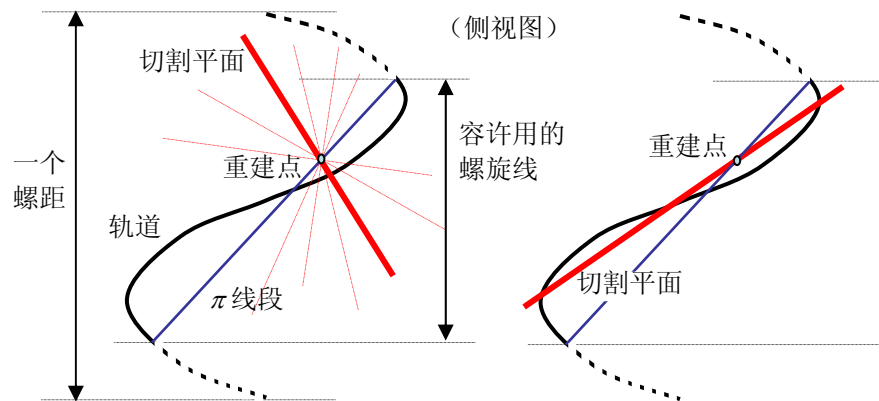


图 5.17  $\pi$  线段截出螺旋线中的一段供重建使用。过重建点的平面叫切割平面。切割平面与所截出的螺旋线要么相交一次，要么三次。

Katsevich 算法中，加权归一化是靠合理地选择滤波方向来决定的。这里的滤波是特指希尔伯特变换。假设滤波方向和归一化加权等问题都已经解决，Katsevich 算法的实现步骤如下：

- (i) 对锥形束数据沿着轨道以轨道参量为变量求导。
- (ii) 沿着精心选择的方向对求导后的数据做希尔伯特变换。
- (iii) 进行锥形束的加权反投影。这个加权反投影与 Feldkamp 算法中的加权反投影差不多。

Katsevich 算法还有其它的形式版本。有些版本把对轨道参数求的偏导数变成对探测器坐标系中的变量求偏导数。

## 5.4\* 数学表达式

### 5.4.1 平行的线积分数据的先反投影后滤波算法

对先反投影后滤波这一类的算法, 首先要将所测的投影数据反投影到图像空间去, 得到一个模糊的图像  $b(x, y, z)$ 。然后对  $b(x, y, z)$  做三维傅里叶变换, 并得到  $B(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ 。接下来, 把  $B(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  乘以一个傅里叶变换域中的一个滤波函数  $G(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  以得到  $F(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = B(\omega_x, \omega_y, \omega_z) G(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ 。最后, 对  $F(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  求三维傅里叶反变换, 而得到最终的重建图像  $f(x, y, z)$ 。

这里的滤波传递函数  $G(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  是由成像的几何构造决定的。一些几何构造的例子如图5.5所示, 图中涂色的区域是方向向量  $\bar{\theta}$  在单位球面上的轨迹。我们记向量  $\bar{\theta}$  的轨迹所形成的区域为  $\Omega$ 。

当  $\Omega = \Omega_{4\pi}$  为  $4\pi$  的立体角 (即  $\Omega_{4\pi}$  是整个单位球面) 时,  $G$  是一个三维空间中的斜坡函数:

$$G(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} / \pi。$$

当  $\Omega$  不是整个球面时, 这个斜坡滤波器要由  $\Omega$  的几何构造对它进行修正。滤波器函数  $G(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  的一般表达式是

$$G(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} / D(\bar{\theta}),$$

式中,  $D(\bar{\theta})$  是大圆与  $\Omega$  相交的弧线的弧长的一半,  $\bar{\theta}$  是从傅里叶空间的坐标原点到点  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  的方向,  $\bar{\theta}$  也是大圆的法线方向。



图5.18 给出了一个  $\Omega = \Omega_\psi$  的特例， $\Omega_\psi$  是单位球面上的一个带状区域，而  $D(\bar{\theta})$  就是弧长  $\gamma$ ，它随方向  $\bar{\theta}$  的变化而变化。根据几何图形可以算出，当  $\theta \leq \psi$ ，我们有  $\gamma = \pi$ ；当  $\theta > \psi$ ，我们有  $\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin \psi}{\sin \theta}$ 。

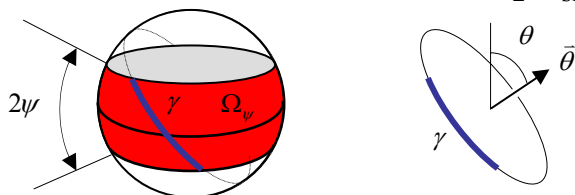


图 5.18  $\Omega_\psi$  是个带状区域，弧是大圆的一部分，其长度是  $\gamma$ 。

### 5.4.2 平行的线积分数据的先滤波后反投影算法

在推导一个先滤波后反投影算法时，对每个方向  $\bar{\theta} \in \Omega$ ，我们需要找到一个二维的传递函数。当  $\Omega = \Omega_{4\pi}$  时，这个传递函数是一个二维的斜坡滤波器

$$Q(\omega_u, \omega_v) = \sqrt{\omega_u^2 + \omega_v^2} / \pi,$$

这个滤波器在任何方向  $\bar{\theta} \in \Omega$  都是一样的。

当  $\Omega$  不是整个球面  $\Omega_{4\pi}$  时，这个斜坡滤波器  $Q(\omega_u, \omega_v)$  就变为  $Q_{\bar{\theta}}(\omega_u, \omega_v)$ ，它随方向  $\bar{\theta}$  而变。我们加上了一个下标  $\bar{\theta}$ ，注意到了吗？对每一给定的方向  $\bar{\theta}$ ， $Q_{\bar{\theta}}(\omega_u, \omega_v)$  可以取值为在  $\bar{\theta}$  方向上  $G(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  的“中心切片”。

下面我们考虑如图5.18所示的  $\Omega = \Omega_\psi$  的特例，在两个不同的区域内  $Q_{\bar{\theta}}(\omega_u, \omega_v)$  的表达式分别为（图 5.19）：

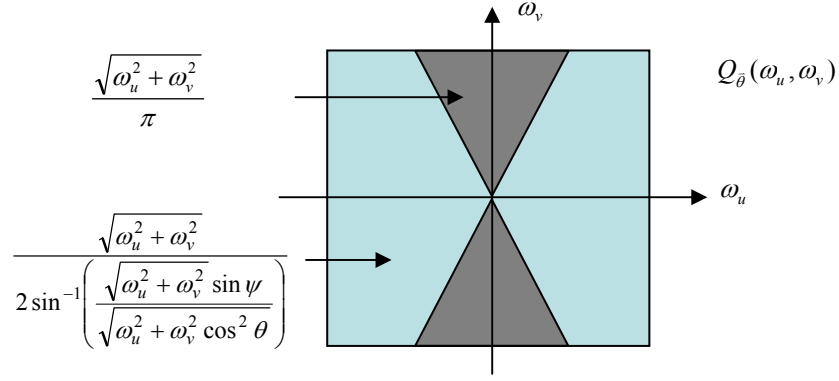


图 5.19 对  $\Omega_\psi$  定义的成像几何构形，二维滤波的传递函数  $Q$ 。

当

$$0 \leq \sqrt{\omega_u^2 + \omega_v^2 \cos^2 \theta} \leq \sqrt{\omega_u^2 + \omega_v^2} \sin \psi ,$$

我们有

$$Q_{\bar{\theta}}(\omega_u, \omega_v) = \frac{\sqrt{\omega_u^2 + \omega_v^2}}{\pi} ;$$

当

$$\sqrt{\omega_u^2 + \omega_v^2} \sin \psi < \sqrt{\omega_u^2 + \omega_v^2 \cos^2 \theta} \leq \sqrt{\omega_u^2 + \omega_v^2} ,$$

我们有

$$Q_{\bar{\theta}}(\omega_u, \omega_v) = \frac{\sqrt{\omega_u^2 + \omega_v^2}}{2 \sin^{-1} \left( \frac{\sqrt{\omega_u^2 + \omega_v^2 \sin \psi}}{\sqrt{\omega_u^2 + \omega_v^2 \cos^2 \theta}} \right)} .$$

### 5.4.3 三维拉东反演公式（先滤波反投影算法）

三维拉东反演公式只能用于对三维面积分数据进行图像重建：

$$f(x, y, z) = \frac{-1}{8\pi^2} \iint_{4\pi} \frac{\partial^2 p(s, \bar{\theta})}{\partial s^2} \Big|_{s=\bar{x} \cdot \bar{\theta}} \sin \theta d\theta d\phi,$$

式中  $\bar{\theta} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$  及  $\bar{x} = (x, y, z)$ 。相应的坐标系如图5.20所示。

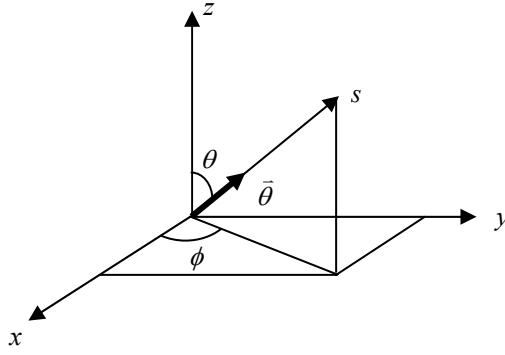


图 5.20 三维拉东反演公式所用的坐标系。

### 5.4.4 三维拉东数据的先反投影后滤波算法

三维拉东数据的反投影图像是

$$b(x, y, z) = \iint_{2\pi} p(s, \bar{\theta}) \Big|_{s=\bar{x} \cdot \bar{\theta}} \sin \theta d\theta d\phi.$$

因为三维拉东数据的投影/反投影点扩散函数的傅里叶变换是  $1/(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)$ ，所以，在三维傅里叶变换空间，要重建的图像  $f(x, y, z)$  的傅里叶变换是

$$F(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = B(\omega_x, \omega_y, \omega_z) \times (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2).$$

这里,  $B$  是反投影图像  $b$  的三维傅里叶变换。在频域中做了滤波之后, 需要做三维傅里叶反变换来得到重建的图像  $f$ 。

这个滤波工作也可以在空间域里完成, 而且空间域里实现方法很简单, 其表达式为:

$$f(x, y, z) = \Delta b(x, y, z) = \frac{\partial^2 b(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 b(x, y, z)}{\partial z^2},$$

式中,  $\Delta$  是拉普拉斯算子。

### 5.4.5 Feldkamp 算法

首先让我们回顾一下扇形束对于平面探测器的 FBP 图像重建算法。在极坐标系下 (图 5.21), 该算法的表达式为:

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{D}{D-s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D}{\sqrt{D^2+l^2}} g(l, \beta) h(l'-l) dl d\beta,$$

式中,  $h(l)$  是一维斜坡滤波器的卷积核,  $D$  是焦距,  $g(l, \beta)$  是扇形束投影数据,  $l$  是探测器上的线性坐标,  $s = r \sin(\varphi - \beta)$ , 及  $l' = \frac{Dr \cos(\varphi - \beta)}{D - r \sin(\varphi - \beta)}$ 。在这

个公式里,  $D/\sqrt{D^2+l^2}$  是射线入射角的余弦函数。在实现这个算法的时候, 我们首先要对投影数据乘以这个余弦函数。然后对这个经过预处理的数据做斜坡滤波。最后进行加权的扇形束反投影, 权函数  $D/(D-s)$ , 其中  $s$  是从重建点到虚拟探测器的距离。虚拟探测器位于旋转中心, 并与实际的探测器平行。引入虚拟探测器的概念是为了使算法的分析和实现得到简化。

Feldkamp 算法与这个扇形束算法没有太大的区别, 最主要的区别是把扇形束的反投影换成了锥形束的反投影。Feldkamp 算法中的斜坡滤波是逐行进行的。在转轴的方向不做滤波。记转轴的方向为  $z$  方向, Feldkamp 算法可以表示成

$$f(r, \varphi, z) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{D}{D-s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D}{\sqrt{D^2+l^2+\hat{z}^2}} g(l, \hat{z}, \beta) h(l'-l) dl d\beta。$$

在这个式子里， $g(l, \hat{z}, \beta)$  是锥形束的投影数据，而  $D/\sqrt{D^2 + l^2 + \hat{z}^2}$  是锥形束射线入射角的余弦函数。

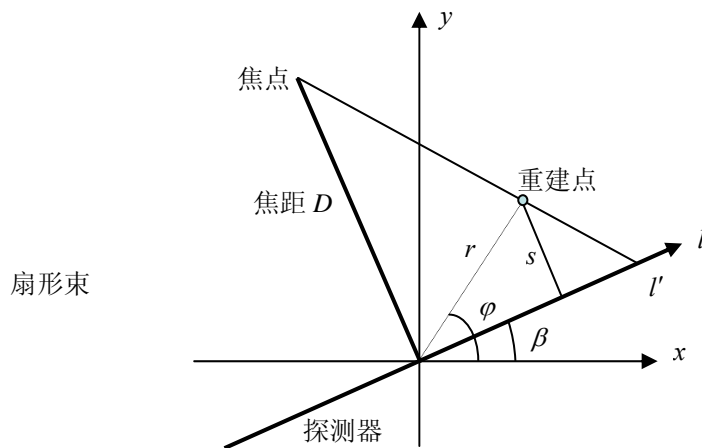


图 5.21 平面探测器扇形束成像所用的坐标系。

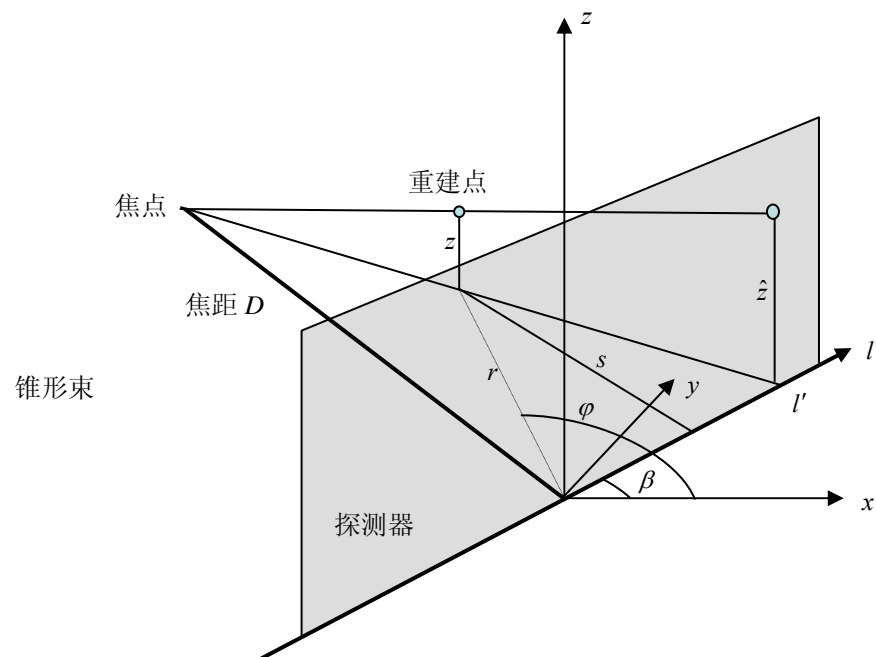


图 5.22 锥形束算法所用的坐标系。

### 5.4.6 Tuy 关系

Tuy 于 1983 年发表了一篇文章。在文章中,他把锥形束数据与原本图像建立了关系。这个关系的目的是与中心切片定理差不多。在这一节里,我们来推导这个关系。

原本的图像是  $f$ 。锥形束的焦点轨迹记为  $\bar{\Phi}$ 。指示射线方向的单位向量记为  $\bar{\alpha}$ 。这样一来,锥形束数据就用下面的式子表达

$$g(\bar{\Phi}, \bar{\alpha}) = \int_0^{\infty} f(\bar{\Phi} + t\bar{\alpha}) dt, \quad \|\bar{\alpha}\| = 1。$$

现在我们把这个单位向量  $\bar{\alpha}$  换成一个一般的三维向量  $\bar{x}$ , 上面这个二维的投影数据就被扩展成了一个三维函数:

$$g(\bar{\Phi}, \bar{x}) = \int_0^{\infty} f(\bar{\Phi} + t\bar{x}) dt。$$

以  $\bar{x}$  为变量对这个函数求三维傅里叶变换, 并用  $\bar{\beta}$  记三维的频率变量, 我们有

$$G(\bar{\Phi}, \bar{\beta}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\bar{\Phi}, \bar{x}) e^{-2\pi i \bar{x} \cdot \bar{\beta}} d\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f(\bar{\Phi} + t\bar{x}) e^{-2\pi i \bar{x} \cdot \bar{\beta}} dt d\bar{x}。$$

令  $\bar{y} = \bar{\Phi} + t\bar{x}$ ;  $d\bar{y} = |t|^3 d\bar{x}$ 。上面的表达式变为

$$G(\bar{\Phi}, \bar{\beta}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f(\bar{y}) e^{-\frac{2\pi i}{t}(\bar{y}-\bar{\Phi}) \cdot \bar{\beta}} \frac{1}{|t|^3} dt d\bar{y}。$$

令  $s = \frac{1}{t}$ ;  $ds = -\frac{1}{t^2} dt$ 。我们有

$$G(\bar{\Phi}, \bar{\beta}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f(\bar{y}) e^{-2\pi i s(\bar{y}-\bar{\Phi}) \cdot \bar{\beta}} |s|^3 \frac{1}{s^2} d\bar{y} ds,$$

$$G(\bar{\Phi}, \bar{\beta}) = \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{y}) e^{-2\pi i \bar{y} \cdot (s\bar{\beta})} d\bar{y} \right) |s| e^{2\pi i s(\bar{\Phi} \cdot \bar{\beta})} ds。$$

我们注意到，内层的三重积分是 $f$ 的三维傅里叶变换，也就是

$$F(s\vec{\beta}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{y}) e^{-2\pi i \vec{y} \cdot (s\vec{\beta})} d\vec{y},$$

我们得到

$$G(\vec{\Phi}, \vec{\beta}) = \int_0^{\infty} F(s\vec{\beta}) |s| e^{2\pi i s(\vec{\Phi} \cdot \vec{\beta})} ds.$$

下面，我们把积分限从  $[0, \infty)$  变成  $(-\infty, \infty)$ ，因此有

$$G(\vec{\Phi}, \vec{\beta}) = \int_{-\infty}^{\infty} F(s\vec{\beta}) |s| e^{2\pi i s(\vec{\Phi} \cdot \vec{\beta})} ds + \int_{-\infty}^{\infty} F(s\vec{\beta}) \frac{is}{i} e^{2\pi i s(\vec{\Phi} \cdot \vec{\beta})} ds.$$

利用三维拉东变换的中心切片定理， $F(s\vec{\beta})$  是原本函数的面积分的一维傅里叶变换。面积分平面的法线方向是  $\vec{\beta}$ 。在上面第一项中的因子  $|s|$  是傅里叶域中的斜坡滤波器。在上面第二项中的因子  $(is)$  对应于空间域中的求导运算。上面等式右边的两项都是傅里叶反变换的形式。所以，这两项都可以用卷积来表达

$$G(\vec{\Phi}, \vec{\beta}) = p_{\vec{\beta}}(t) * h(t) - i p_{\vec{\beta}}(t) * \delta'(t) \quad (\text{T})$$

式中， $i = \sqrt{-1}$ ， $t = \vec{\Phi} \cdot \vec{\beta}$ ， $h(t)$  是斜坡滤波器的卷积核

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |s| e^{2\pi i s t} ds,$$

而且原本图像  $f$  的拉东变换是

$$p_{\vec{\beta}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x}) \delta(\vec{x} \cdot \vec{\beta} - t) d\vec{x}.$$

标有符号 (T) 的等式的左边是有关锥形束数据的，等式的右边是有关原本图像的面积分的。这样，锥形束数据与物体的拉东变换就联系起来了。

Tuy 提出的锥形束图像重建算法是

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi i} \iint_{4\pi} \frac{1}{|\bar{\Phi}'(\lambda) \cdot \bar{\beta}|} \frac{\partial G(\bar{\Phi}(\lambda), \bar{\beta})}{\partial \lambda} d\bar{\beta},$$

其中,  $\bar{\Phi}(\lambda) \cdot \bar{\beta} = \bar{x} \cdot \bar{\beta}$ 。事实上, 算法中的  $(2\pi i)$  因子并不意味着所重建的图像  $f(\bar{x})$  是复数值的。标有符号 (T) 的等式右边的第一项在重建中没有任何用处, 可以把它扔掉, 这是因为它与 Tuy 算法中的因子  $|\bar{\Phi}'(\lambda) \cdot \bar{\beta}|$  组合起来是  $\bar{\beta}$  的奇函数, 在  $\iint_{4\pi} \frac{1}{|\bar{\Phi}'(\lambda) \cdot \bar{\beta}|} \frac{\partial G(\bar{\Phi}(\lambda), \bar{\beta})}{\partial \lambda} d\bar{\beta}$  中做反投影的时候, 奇函数项的贡献为零。这样, 做了反投影积分后, 实部就会消失掉。算法中的  $(2\pi i)$  因子进而再消掉虚部项中的  $i$ , 那么 Tuy 算法的重建图像就是实的了。

#### 5.4.7 Grangeat 关系

Grangeat 建立了一个关系把拉东数据的导数与锥形束数据在平面探测器上的线积分的导数联系了起来。

在下面的讨论中, 我们只考虑一个固定的焦点位置  $\bar{\Phi}$ 。在探测器上, 我们随便选择一条直线, 并把这条直线上的锥形束数据加起来 (即求线积分)。我们在平面探测器上先建立一个坐标系 (图5.23)。在平面探测器上的积分线的方向是  $u$  轴方向。与其垂直的方向是  $v$  轴方向。在  $u$ - $v$  坐标系中, 锥形束数据记为  $g(u, v)$ 。如果我们用球面坐标系来表示物体  $f$ , 锥形束投影数据  $g(u, v)$  可表示为 (图5.24)

$$g(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{\beta}, \theta, r) dr,$$

式中,  $u$  和  $\theta$  之间的关系为

$$u = \sqrt{D^2 + v^2} \tan \theta。$$



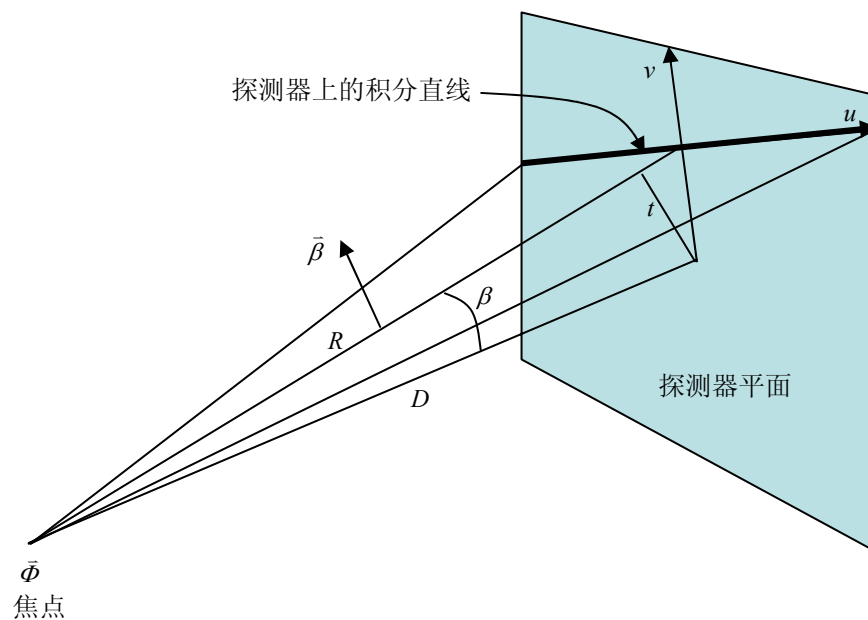


图 5.23 在探测器上画一条直线。线上的锥形束投影数据加起来后记为  $s(v)$ 。

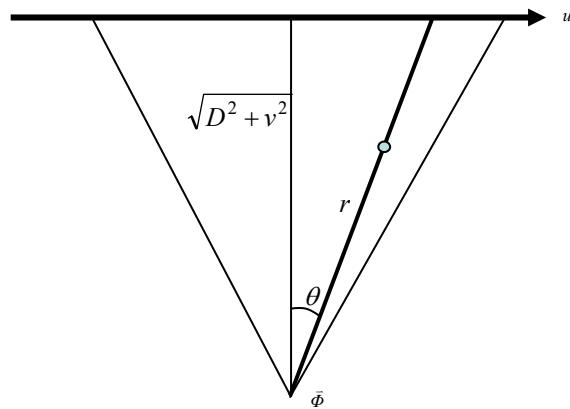


图 5.24 锥形束投影数据。

象在 Feldkamp 算法中那样，在计算数据求和之前所有的锥形束投影数据都要事先乘以一个余弦函数  $D/\sqrt{D^2 + u^2 + v^2}$ 。这样一来，在  $u$  轴上的数据求和实际上是

$$s(v) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u, v) \frac{D}{\sqrt{D^2 + u^2 + v^2}} du = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{\beta}, \theta, r) \frac{D}{\sqrt{D^2 + u^2 + v^2}} dr du。$$

我们现在把变量  $u$  替换为变量  $\theta$ ，这需要用到  $u = \sqrt{D^2 + v^2} \tan \theta$ ， $\cos \theta = \frac{\sqrt{D^2 + v^2}}{\sqrt{D^2 + u^2 + v^2}}$ ，和  $\frac{du}{d\theta} = \frac{\sqrt{D^2 + v^2}}{\cos^2 \theta}$ 。我们可得到一个新的表达式

$$s(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\vec{\beta}, \theta, r) \frac{D}{\sqrt{D^2 + u^2 + v^2}} \frac{\sqrt{D^2 + v^2}}{\cos^2 \theta} dr d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\vec{\beta}, \theta, r) \frac{D}{\cos \theta} dr d\theta。$$

我们想要把  $s(v)$  与  $f$  的拉东变换建立起关系， $f$  的拉东变换是：

$$p_{\vec{\beta}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\vec{\beta}, \theta, r) r dr d\theta，$$

式中，参数  $t$  在图5.23中做了定义。现在我们用第5.3.2节介绍的思路来建立这个关系。从第5.3.2节我们知道（图5.25）

$$\frac{\partial f}{\partial \beta} = R \frac{\partial f}{\partial t} = r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial t}。$$

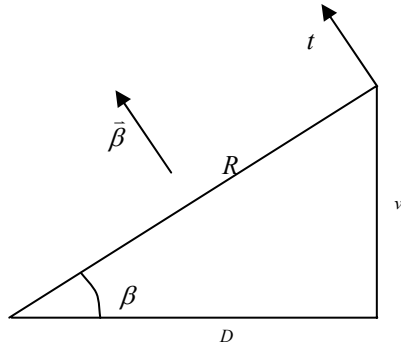


图 5.25 切线方向  $t$  的示意图。

利用这个关系，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p_{\bar{\beta}}(t)}{\partial t} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial t} f(\bar{\beta}, \theta, r) r dr d\theta \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \beta} f(\bar{\beta}, \theta, r) r dr d\theta = \frac{1}{D} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{D}{\cos^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \beta} f(\bar{\beta}, \theta, r) r dr d\theta \\
&= \frac{1}{D} \frac{\partial s(v)}{\partial \beta}。
\end{aligned}$$

最后，我们要把对  $\beta$  的偏导数变为对  $v$  的偏导数。从图5.25我们看到

$$v = D \tan \beta \text{ 和 } \frac{dv}{d\beta} = \frac{D}{\cos^2 \beta}。$$

那么，Grangeat 的关系式就得到了

$$\frac{\partial p_{\bar{\beta}}(t)}{\partial t} = \frac{1}{D} \frac{\partial s(v)}{\partial \beta} = \frac{1}{D} \frac{\partial s(v)}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \beta} = \frac{1}{D} \frac{\partial s(v)}{\partial v} \frac{D}{\cos^2 \beta} = \frac{s'(v)}{\cos^2 \beta}。$$

#### 5.4.8 Katsevich 算法

我们把螺旋线焦点轨道记成一个向量函数

$$\vec{a}(s) = \left( R \cos s, R \sin s, \frac{h}{2\pi} s \right), \quad s \in I_{\pi}(\bar{x})$$

式中  $R$  是螺旋轨道的半径， $h$  是螺旋轨道的螺距， $\bar{x}=(x, y, z)$  是重建点， $s$  是轨道参数，以及  $I_{\pi}(\bar{x})=[s_b, s_t]$ 。这里， $s_b$  和  $s_t$  是由螺旋轨道，重建点  $\bar{x}$  和  $\pi$  线段一起确定的。

锥形束投影数据在局部坐标系中可以表示为  $g(\bar{\theta}, \vec{a})$ ，式中  $\bar{\theta}$  是局部坐标系  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$  和参数  $\gamma$  的函数 (图 5.26)，它们的关系是

$$\bar{\theta}(\gamma) = (\cos \gamma) \vec{\alpha} + (\sin \gamma) \vec{\beta}, \quad -\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2}。$$

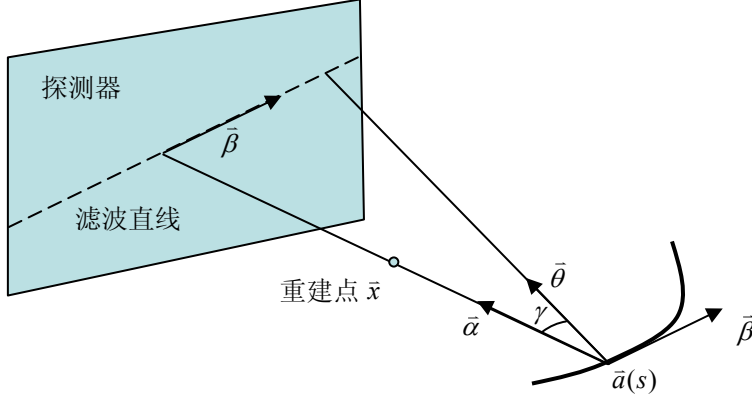


图 5.26 螺旋轨道锥形束算法所用的坐标系。

单位向量  $\vec{\alpha}$  是用从锥形束的焦点  $\vec{a}(s)$  到重建点  $\bar{x}$  的方向来定义的。单位向量  $\vec{\beta}$  是用探测器平面上的滤波方向来定义的（图 5.27）。从广义上讲，滤波可以指对数据的任何处理。在 Katsevich 算法中，凡是提到滤波，我们特指希尔伯特变换。单位向量  $\vec{\alpha}$  与单位向量  $\vec{\beta}$  总是正交的。Katsevich 算法的公式表达式是：

$$f(\bar{x}) = \frac{-1}{2\pi^2} \int_{I_s(\bar{x})} \frac{1}{\|\bar{x} - \vec{a}(s)\|} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\partial g(\bar{\theta}(\gamma), \vec{a}(q))}{\partial q} \bigg|_{q=s} \frac{1}{\sin \gamma} d\gamma ds,$$

式中，关于变量  $\gamma$  的积分是希尔伯特变换，关于变量  $s$  的积分是锥形束的反投影。这是一个漂亮简洁的 FBP（先滤波再反投影）的锥形束图像重建公式。Katsevich 的独特技巧是用选择特别的积分方向  $\vec{\beta}$  的方法来给冗余的数据做恰当的加权。可以证明，Katsevich 选择方向  $\vec{\beta}$  的方法恰好给测量一次的平面赋予权值 +1，恰好给测量三次的平面赋予权值 +1 或 -1（其中有两个 +1 和一个 -1）。对  $\vec{\beta}$  可以有不同的选择（即选择是不唯一的），不同的滤波方向  $\vec{\beta}$  可给出不同的算法。

下面是选择  $\vec{\beta}$  的一种方法。首先我们来定义一个  $\kappa$  平面。锥形束的焦点是  $\vec{a}(s)$ 。在探测器的视野中取一点  $\bar{x}$  作为重建点。我们再看区间  $(-\pi, \pi)$  找一个角度  $\psi$  使得  $\bar{x}$ ， $\vec{a}(s)$ ， $\vec{a}(s+\psi)$ ，和  $\vec{a}(s+2\psi)$  这四个点在一个平面上（图 5.27）。满足这些条件的平面是存在的，但是不唯一。在不唯一的情况下，我们取绝对值  $|\psi|$  最小的  $\psi$  来构造着个平面。这样一来，这个平面就唯一了，我们把这个平面冠名为  $\kappa$  平面，并记作  $\kappa(s, \psi)$ 。

我们把  $\kappa$  平面  $\kappa(s, \psi)$  与探测器平面相交的直线称为  $\kappa$  线。滤波方向  $\vec{\beta}$  就是沿  $\kappa$  线方向的单位向量。如果重建点  $\bar{x}$  在视野中变动位置，我们就会得到一组  $\kappa$  平面  $\kappa(s, \psi)$ ，这样，在一个探测器平面上就可得到一组  $\kappa$  线（图 5.28）。

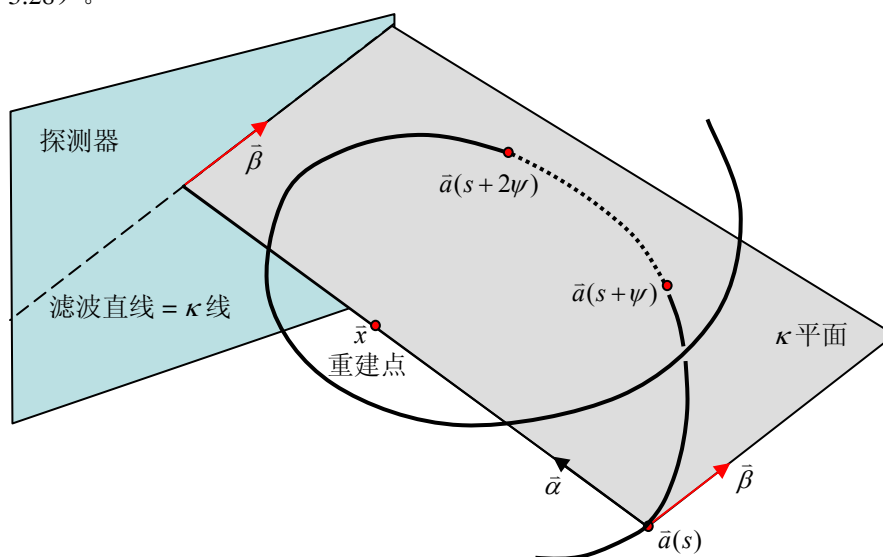


图 5.27  $\kappa$  平面上有重建点和均匀地分布在由  $\pi$  线段所截的螺旋轨道上的三个点。

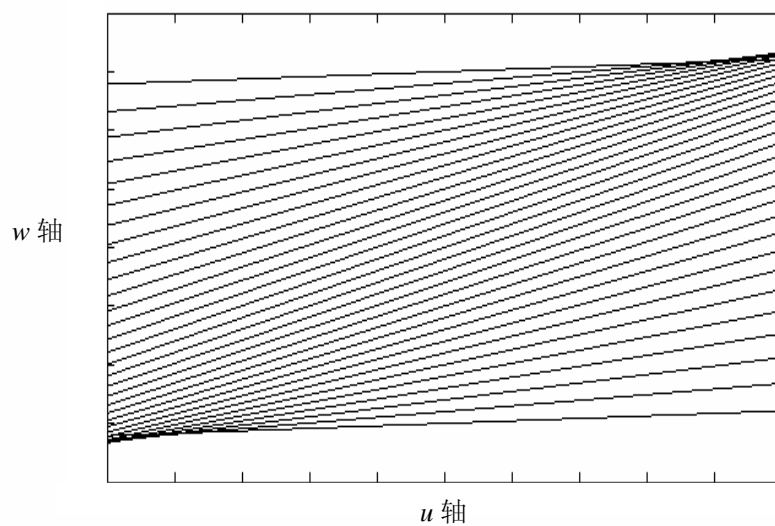


图 5.28 在锥形束探测器的平面上的一组  $\kappa$  线。每条  $\kappa$  线都对应着一个固定的角度  $\psi$ 。每个重建点都对应着唯一的一条  $\kappa$  线。

在平面探测器上， $\kappa$  线都是直线。让我们在这个平面探测器上建立一个  $u$ - $w$  坐标系如图5.28所示，其中  $w$  轴就是螺旋线的中心轴（即  $z$  轴）。在  $u$ - $w$  坐标系中，对于每一个固定的角度  $\psi$ ， $\kappa$  线有下面的直线表达式

$$w = \frac{Dh}{2\pi R} \left( \psi + \frac{\psi}{\tan \psi} \frac{u}{D} \right),$$

式中， $R$  是螺旋线的半径， $h$  是螺旋线的螺距， $D$  从探测器平面到焦点的距离。图5.28中有很多直线，每一条直线都对应着一个固定的  $\psi$  值。

如果我们使用弧形的探测器，这些  $\kappa$  线就不再是探测器上面的直线了。它们变成了曲线。在  $\alpha$ - $w$  坐标系中，对于每一个固定的角度  $\psi$ ， $\kappa$  线有下面的曲线表达式

$$w = \frac{Dh}{2\pi R} \left( \psi \cos \alpha + \frac{\psi}{\tan \psi} \sin \alpha \right),$$

式中，角度  $\alpha$  在图5.29中做了定义。对一组  $\psi$  的数值，我们用这个表达式可以在  $\alpha$ - $w$  坐标系中画出一组弯曲的  $\kappa$  线。平面探测器上的  $\kappa$  线（直线）示意在了图5.28中；相应地，弧形探测器上的  $\kappa$  线（曲线）示意在了图5.30中。

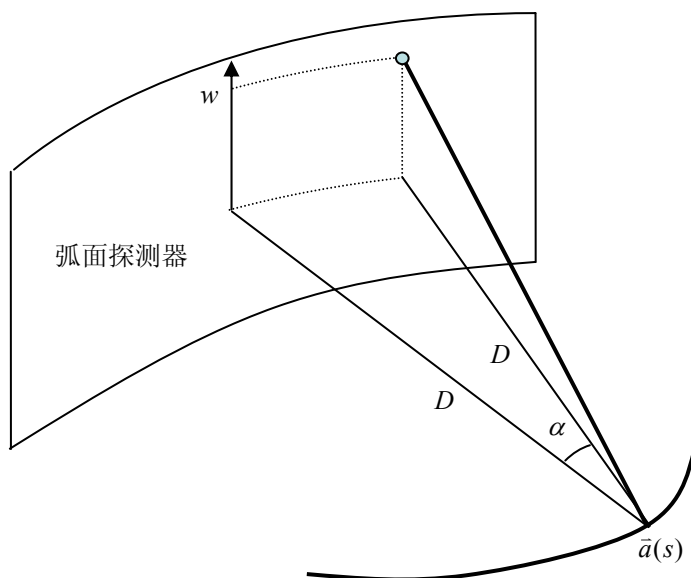


图 5.29 用弧形探测器锥形束来成像所用的坐标系。

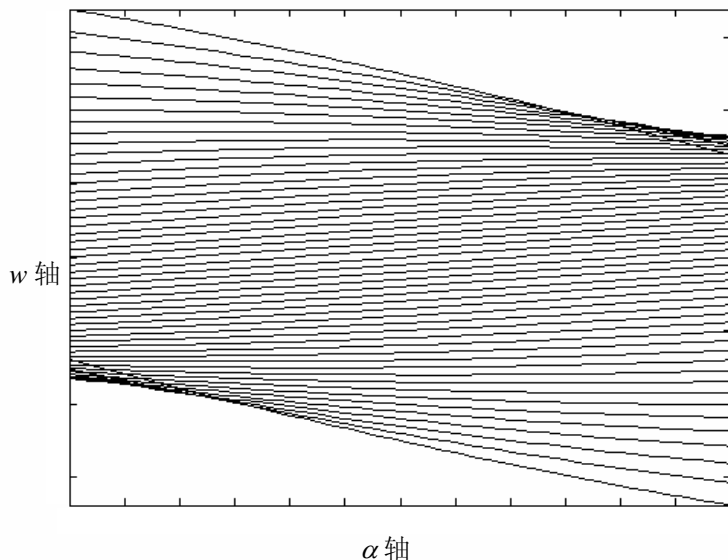


图 5.30 在锥形束弧形探测器上的一组  $\kappa$  曲线。每条  $\kappa$  曲线都对应着一个固定的角度  $\psi$ 。每个重建点都对应着唯一的一条  $\kappa$  曲线。

最后，我们再谈一谈弧形探测器的 Katsevich 算法实现步骤。我们下面给出 Katsevich 算法的表达式和实现步骤：

$$f(\bar{x}) = \frac{-1}{2\pi^2} \int_{I_x(\bar{x})} \frac{1}{\|\bar{x} - \bar{a}(s)\|} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\partial g(\bar{\theta}(\gamma), \bar{a}(q))}{\partial q} \bigg|_{q=s} \frac{1}{\sin \gamma} d\gamma ds。$$

第一步：对于一个给定的方向  $\bar{\theta}$  把数据对轨道的参数  $s$  求偏导，即计算  $\frac{\partial g(\bar{\theta}, \bar{a}(s))}{\partial s}$ 。

在实际中，用的是离散的探测器（也就是说，锥形束的投影数据已经经过采样并且以矩阵的形式储存），焦点的位置也是离散的。求导运算是把一个焦点的位置  $\bar{a}(s_k)$  与其相邻的焦点的位置  $\bar{a}(s_{k+1})$  组成一对，对它们同方  $\bar{\theta}$  向的投影数据进行有限差分（即做减法）。做差分的时候要注意，这一对投影射线  $g(\bar{\theta}, \bar{a}(s_k))$  和  $g(\bar{\theta}, \bar{a}(s_{k+1}))$  必须拥有相同的方向  $\bar{\theta}$ （这个  $\bar{\theta}$  是在整体坐标系中定义的），它们在各自己的探测器上还必须要有相同的  $w$  坐标，如图 5.31 所示。

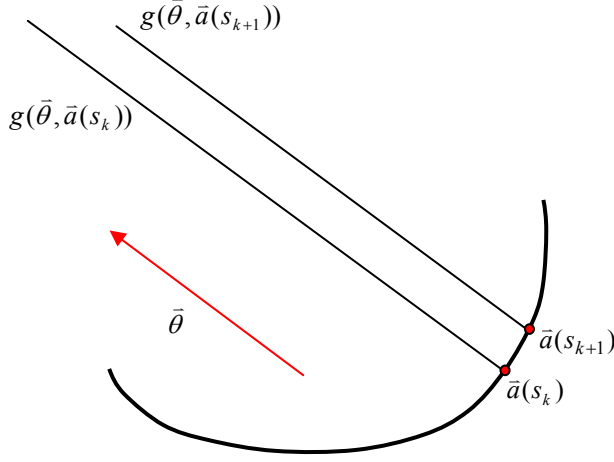


图 5.31 为了实现对轨道参数  $s$  的导数，需要用相邻的两个探测角度上的数据做差分。做差分时，所涉及的两条射线必须相互平行，和相同的  $w$  坐标。

在弧形探测器的  $\alpha$ - $w$  坐标系中， $g(\bar{\theta}, \bar{a}(s_k))$  和  $g(\bar{\theta}, \bar{a}(s_{k+1}))$  会有不同的  $\alpha$  值。请原谅我们在符号使用上的不严谨，在探测器的  $\alpha$ - $w$  坐标系中令

$$g\left(\alpha - \frac{\Delta s}{2}, w, \bar{a}(s_k)\right) = g(\bar{\theta}, \bar{a}(s_k)),$$

和

$$g\left(\alpha + \frac{\Delta s}{2}, w, \bar{a}(s_{k+1})\right) = g(\bar{\theta}, \bar{a}(s_{k+1})),$$

那么，我们得到了一个导数的近似值

$$\frac{\partial g\left(\alpha, w, \bar{a}\left(s_{k+\frac{1}{2}}\right)\right)}{\partial s} \approx \frac{g\left(\alpha + \frac{\Delta s}{2}, w, \bar{a}\left(s_{k+\frac{1}{2}}\right)\right) - g\left(\alpha - \frac{\Delta s}{2}, w, \bar{a}\left(s_{k+\frac{1}{2}}\right)\right)}{\Delta s},$$

式中， $\Delta s = s_{k+1} - s_k$ 。

第二步：把第一步的结果乘以一个余弦函数  $D/\sqrt{D^2 + w^2}$ ，得



$$\frac{D}{\sqrt{D^2 + w^2}} \frac{\partial g\left(\alpha, w, \vec{a}\left(s_{k+\frac{1}{2}}\right)\right)}{\partial s}。$$

这一步也可称之为用余弦函数加权。这是探测器上的逐点乘积运算。

第三步：为了给希尔伯特变换做准备工作，我们需要把那些  $\kappa$  曲线变换成一行行的水平线（图 5.32），把  $\alpha$ - $w$  坐标系的表达形式映射成  $\alpha$ - $\psi$  坐标系的表达形式。映射的关系式是  $w = \frac{Dh}{2\pi R} \left( \psi \cos \alpha + \frac{\psi}{\tan \psi} \sin \alpha \right)$ 。做了映射变换之后，那些  $\kappa$  曲线就成了一行行的水平线。

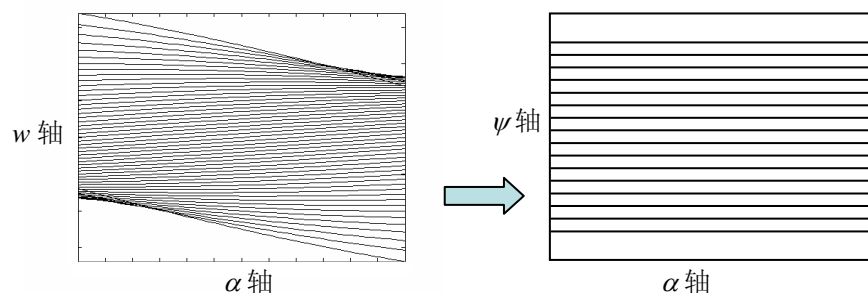


图 5.32 把那些  $\kappa$  曲线映射成平行的水平线。

第四步：在数据被重新排列成一行行的水平线后，就可以很容易逐行地做一维的希尔伯特变换了。

第五步：这一步是第三步的逆过程。它把滤波（即希尔伯特变换）后的数据映射回到探测器的  $\alpha$ - $w$  坐标系中，一行行的水平线又变回了  $\kappa$  曲线（图 5.33）。

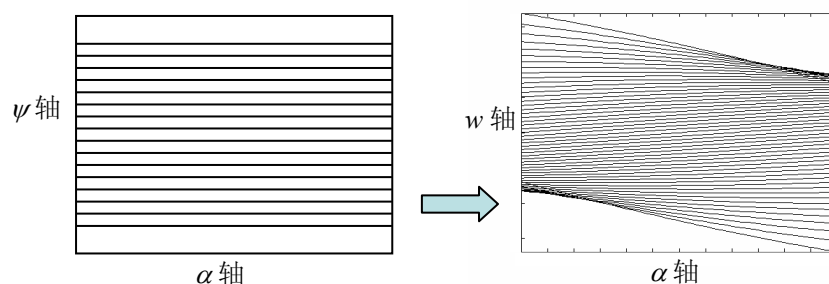


图 5.33 把平行的水平线变回  $\kappa$  曲线。

第六步：在弧形探测器上对所有的  $\alpha$  位置的数据乘以余弦函数  $\cos \alpha$ 。角度  $\alpha$  在图5.29中做了定义。

第七步：这最后一步是逐一射线地做三维螺旋轨道锥形束的加权反投影。这里，加权函数是  $1/\|\bar{x} - \bar{a}(s)\|$ 。这个反投影与 Feldkamp 算法中的反投影差不多，只是在 Feldkamp 算法中所用的是圆圈轨道，而这里用的是螺旋轨道。

## 5.5 例题

**例题 1** 一个 SPECT 伽玛相机系统装有一个平行光束的准直器。这个伽玛相机探头有一个  $30^\circ$  的倾角（如图 5.34所示）。伽玛相机绕病人旋转一周采集投影数据。这样一个成像的集合构形满足沃尔洛夫条件吗？

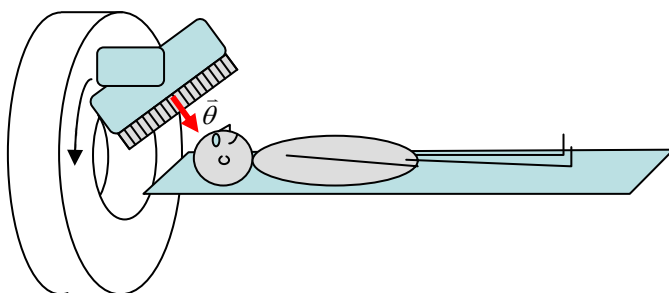


图 5.34 SPECT 的照相机探头是倾斜的。

解

不满足。如果在单位球面上我们画出投影方向  $\bar{\theta}$  的轨迹，可以看出，这个轨迹是一个小圆（图5.35），而不是大圆。沃尔洛夫条件无法满足。

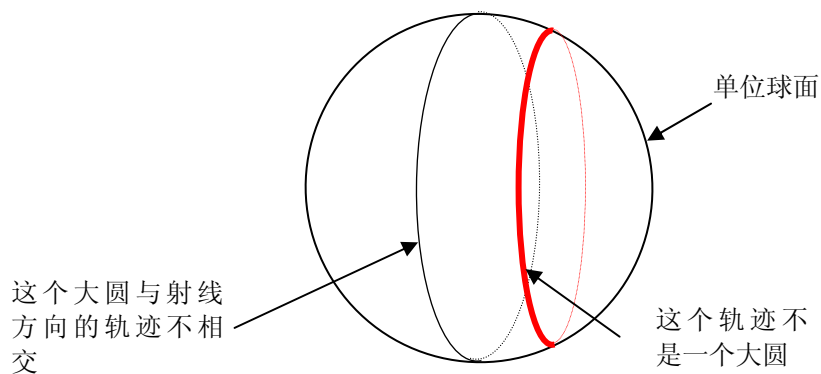


图 5.35 这个小圆轨道不满足沃尔洛夫条件。

**例题 2** 对于三维线积分投影数据和三维面积分投影数据的情形分别给出它们中心切片定理的数学表达式。

解

(i) 三维面积分数据

记  $\bar{\theta} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ , 则三维拉东变换 (即面积分投影数据) 的中心切片定理可被表述为

$$P(\omega, \bar{\theta}) = F(\omega \sin \theta \cos \phi, \omega \sin \theta \sin \phi, \omega \cos \theta),$$

式中,  $P(\omega, \bar{\theta})$  是面积分数据  $p(s, \bar{\theta})$  的对于变量包  $s$  的一维傅里叶变换,  $F(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  是原本物体  $f(x, y, z)$  的三维傅里叶变换。

(ii) 三维线分数据

要考虑三维线积分投影数据, 我们需要根据投影方向  $\bar{\theta}$  在探测器上建立一个局部坐标系。令

$$\bar{\theta}_u = (-\sin \phi, \cos \phi, 0) \text{ 和 } \bar{\theta}_v = (-\cos \theta \cos \phi, -\cos \theta \sin \phi, \sin \theta),$$

那么  $\bar{\theta}$ ,  $\bar{\theta}_u$ , 和  $\bar{\theta}_v$  这三个向量构成一个直角坐标系。我们称沿  $\bar{\theta}_u$  方向的坐标轴为  $u$  轴, 沿  $\bar{\theta}_v$  方向的坐标轴为  $v$  轴。这样, 中心切片定理就可表达成

$$\begin{aligned}
& P(\omega_u, \omega_v, \bar{\theta}) \\
&= F(-\omega_u \sin \phi - \omega_v \cos \theta \cos \phi, \omega_u \cos \phi - \omega_v \cos \theta \sin \phi, \omega_v \sin \theta) \\
&= F(\omega_u \bar{\theta}_u + \omega_v \bar{\theta}_v),
\end{aligned}$$

式中,  $P(\omega_u, \omega_v, \bar{\theta})$  是线积分数据  $p(u, v, \bar{\theta})$  的对于变量  $u$  和  $v$  的二维傅里叶变换,  $F(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  是原本物体  $f(x, y, z)$  的三维傅里叶变换。

**例题 3\*** 运行 Feldkamp 算法, 观察一下锥形束的张角对重建图像中伪影的影响。

解

我们把 Feldkamp 算法编了程, 并用圆形的焦点轨道和 Defrise 模型进行了计算机模拟。我们用的 Defrise 模型由五个扁平的均匀椭球组成 (图 5.36)。在计算机模拟中, 我们试了六个不同的锥形束的张角:  $2^\circ$ ,  $4^\circ$ ,  $8^\circ$ ,  $16^\circ$ ,  $32^\circ$ , 和  $64^\circ$ 。计算机模拟结果以纵截面图的形式在图 5.37 中显示。从图中可以看出, 对于大的锥形束张角, Feldkamp 算法的伪影很严重, 在离中心平面 (也就是轨道平面) 远的区域尤其严重。

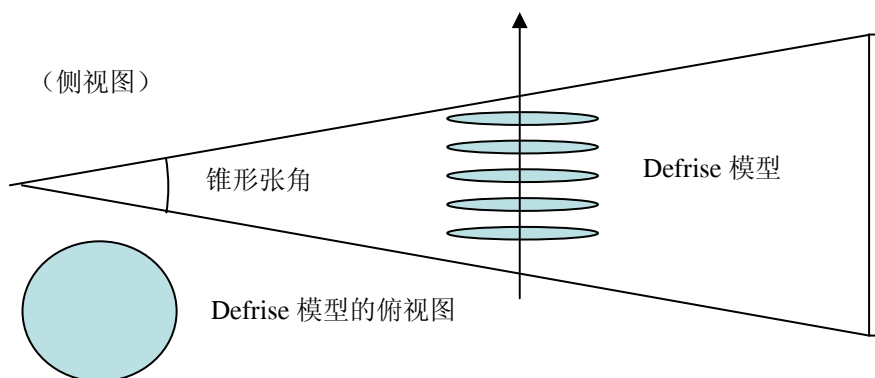


图 5.36 在计算机模拟中使用的 Defrise 模型。

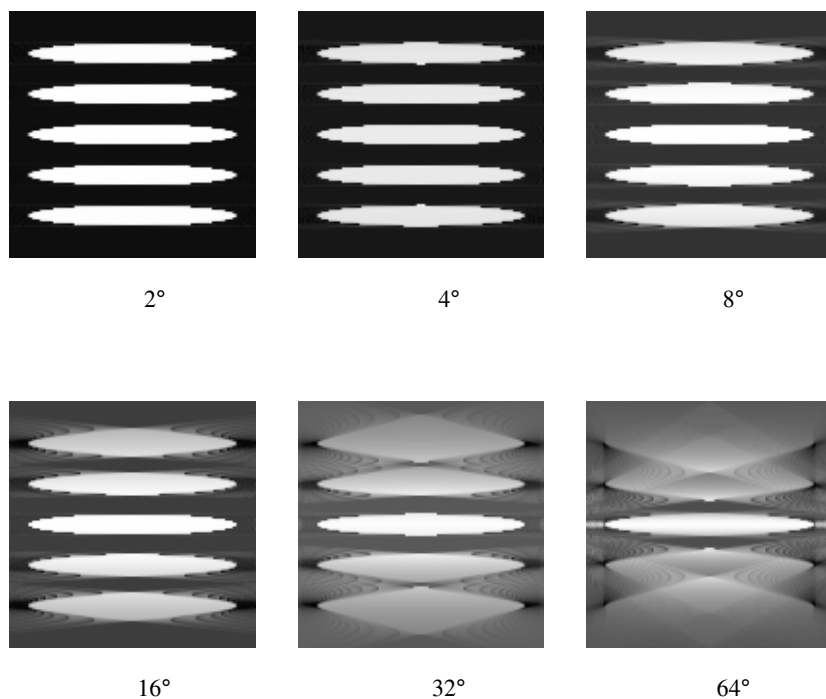


图 5.37 用 Defrise 模型和不同的锥形束张角做的图像重建的计算机模拟结果。

## 5.6 小结

- 在三维成像中，平行的线积分叫射线变换，而平行的面积分叫拉东变换。
- 对于拉东投影数据，我们要求 $2\pi$ 立体角中的所有方向的数据都要测量到。
- 拉东投影数据的图像重建算法（也就是拉东反演公式）十分简单——先求二阶导数再做拉东反投影。当然，我们可以交换一下次序，先做拉东反投影再用拉普拉斯算子求二阶导数。拉普拉斯运算是分别对 $x$ ， $y$ ，和 $z$ 求二阶偏导数，然后对它们求和。
- 做拉东反投影有个计算复杂度较低的办法，就是把它分成两步来做。每一步都是二维的反投影。

- 我们要求射线变换的数据要满足沃尔洛夫的数据足量条件。射线的方向在单位球面上的轨迹若与每个大圆都相交，沃尔洛夫条件就满足了。
- 对于射线变换的数据来说，图像重建的算法与射线的方向在单位球面上的轨迹有关。由于投影数据是冗余的，重建算法是不唯一的。先做滤波或先做反投影都行。
- 针对圆形轨道的锥形束成像问题 Feldkamp 等人提出了一个简单、实用、稳定的 FBP 图像重建算法。Feldkamp 算法是对扇形束的 FBP 算法做了小修小改得到的，它并不是个精确算法，但是它在不同的领域中有很大的应用市场。如果锥形束张角足够小的话，重建图像的误差的影响也不会很大。
- 人们可以用 Tuy 条件来判定所用的锥形束成像的几何构造是否能够精确的图像重建能提供足够的数据。要满足 Tuy 条件，必须采用非平面的锥形束焦点轨道，比如，螺旋线轨道，圆圈加直线轨道，等等。Tuy 建立了一个锥形束投影数据与原本图像之间的关系。他还提出了一个锥形束数据的反演公式，但这个公式使用起来不方便。
- Grangeat 也建立了一个关系：锥形束的加权面的积分对角度的导数等于拉东面积分的导数。Grangeat 的图像重建算法是利用拉东反演公式完成的。这个重建算法的缺点是要把锥形束数据重新排列成拉东数据，数据的重新排列会引进比较大的误差。
- Katsevich 的锥形束图像重建算法是个名副其实的 FBP 算法，它的滤波是移动不变的（也就是说，这个滤波可以用卷积来实现），它的反投影是锥形束的反投影（而不象 Grangeat 算法那样，用的是拉东反投影）。Katsevich 重建算法的一个缺点是选择滤波方向需要技巧。另一个缺点是它没有充分利用所测到的投影数据。
- 阅读完本章后，读者至少应该理解拉东反演公式和 Feldkamp 的锥形束图像重建算法。

## 参考文献

- Axelsson C, Danielsson PE (1994) Three-dimensional reconstruction from cone-beam data in  $O(N^3 \log N)$  time. *Phys Med Biol* 39:477-491
- Barrett HH, Swindell W (1981) *Radiological Imaging*, Academic Press, New York

- Chen GH (2003) An alternative derivation of Katsevich's cone-beam reconstruction formula. *Med Phys* 30:3217-3226
- Clack R (1992) Towards a complete description of three-dimensional filtered backprojection. *Phys Med Biol* 37:645-660
- Clack R, Defrise M (1994) Overview of reconstruction algorithms for exact cone-beam tomography. *Proc SPIE* 2299:230-241
- Colsher JG (1980) Fully three-dimensional positron emission tomography. *Phys Med Biol* 25:103-115
- Crawford CR (1991) CT filtration aliasing artifacts. *IEEE Trans Med Imaging* 10:99-102
- Deans SR (1983) *The Radon Transform and Some of Its Applications*, John Wiley, New York
- Defrise M, Clack R (1994) A cone-beam reconstruction algorithm using shift-variant filtering and cone-beam backprojection. *IEEE Trans Med Imaging* 13:186-195
- Defrise M (1995) A factorization method for the 3D X-ray transform. *Inverse Probl* 11:983-994
- Defrise M, Clack R, Townsend D (1993) Solution to the three-dimensional image reconstruction problem from two-dimensional projections. *J Opt Soc A* 10:869-877
- Defrise M, Clack R, Townsend D (1995) Image reconstruction from truncated, two-dimensional parallel projections. *Inverse Probl* 11:287-313
- Defrise M, Kinahan PE, Townsend DW, Michel C, Sibomana M, Newport DF (1997) Exact and approximate rebinning algorithms for 3-D PET data. *IEEE Trans Med Imaging* 16:145-158
- Feldkamp LA, Davis LC, Kress JW (1984) Practical cone beam algorithm. *J Opt Soc Am A* 1:612-619
- Grangeat P (1991) Mathematical framework of cone beam 3D reconstruction via the first derivative of the Radon transform. In: Herman G, Luis AK, Natterer F (eds) *Mathematical Methods in Tomography, Lecture Notes in Mathematics* 1497:66-97
- Katsevich A (2002) Theoretically exact filtered backprojection-type inversion algorithm for spiral CT. *SIAM J Appl Math* 62:2012-2026
- Katsevich A (2002) Analysis of an exact inversion algorithm for spiral cone-beam CT. *Phys Med Biol* 47:2583-2597
- Katsevich A (2003) An improved exact filtered backprojection algorithm for spiral computed tomography. *Adv Appl Math* 32:681-697
- Kinahan PE, Rogers JG, Harrop R, Johnson RR (1988) Three-dimensional image reconstruction in object space. *IEEE Trans Nucl Sci* 35:635-640
- Kudo H and Saito T (1994) Derivation and implementation of a cone-beam reconstruction algorithm for non-planar orbit. *IEEE Trans Med Imaging* 13:196-211
- Natterer F (1986) *The Mathematics of Computerized Tomography*, John Wiley, New York
- Noo F, Pack J, Heuscher D (2003) Exact helical reconstruction using native cone-beam geometries. *Phys Med Biol* 48:3787-3818
- Orlov SS (1976) Theory of three-dimensional image reconstruction I. Conditions for a complete set of projections. *Sov Phys Crystallog* 20:429-433
- Orlov SS (1976) Theory of three-dimensional image reconstruction II. The recovery operator. *Sov Phys Crystallog* 20:429-433
- Pack J, Noo F, Clackdoyle (2005) Cone-beam reconstruction using the backprojection of locally filtered projections. *IEEE Trans Med Imaging* 24:70-85
- Proksa R, Kohler T, Grass M, Timmer J (2000) The n-PI-method for helical cone-beam CT. *IEEE Trans Med Imaging* 19:848-863
- Ra JB, Jim CB, Cho ZH, Hilal SK, Correll J (1992) A true 3D reconstruction algorithm for the spherical positron tomography. *Phys Med Biol* 27:37-50
- Schaller S, Noo F, Sauer F, Tam KC, Lauritsch G, Flohr T (2000) Exact Radon rebinning algorithm for the long object problem in helical cone-beam CT. *IEEE Trans Med Imaging* 19:822-834
- Smith BD (1985) Image reconstruction from cone-beam projection: Necessary and sufficient conditions and reconstruction methods. *IEEE Trans Med Imaging* MI-4:14-25
- Stazyk M, Rogers J, Harrop R (1992) Analytic image reconstruction in PVI using the 3D Radon transform. *Phys Med Biol* 37:689-704

- Stearns CW, Chesler DA, Brownell GL (1990) Accelerated image reconstruction for a cylindrical positron tomography using Fourier domain methods. *IEEE Trans Nucl Sci* 37:773-777
- Stearns CW, Crawford CR, Hu H (1994) Oversampled filters for quantitative volumetric PET reconstruction. *Phys Med Biol* 39:381-388
- Taguchi K, Aradate H (1998) Algorithm for image reconstruction in multi-slice helical CT. *Med Phys* 25:550-561
- Tam KC, Samarasekera S, Sauer F (1998) Exact cone-beam CT with a spiral scan. *Phys Med Biol* 43:1015-1024
- Turbell H, Danielsson PE (2000) Helical cone-beam tomography. *Int J Imaging Syst Technol* 11:91-100
- Tuy HK (1983) An inverse formula for cone-beam reconstruction. *SIAM J Appl Math* 43:546-552
- Wang G, Vannier MW (1993) Helical CT image noise-analytical results. *Med Phys* 20:1653-1640
- Wang G, Lin TH, Cheng P, Shinozaki DM (1993) A general cone-beam reconstruction algorithm. *IEEE Trans Med Imaging* 12:486-496
- Ye Y, Zhao S, Yu H, Wang G (2005) A general exact reconstruction for cone-beam CT via backprojection-filtration. *IEEE Trans Med Imaging* 24:1190-1198
- Zeng GL, Gullberg GT (1992) A cone-beam tomography algorithm for orthogonal circle-and-line orbit. *Phys Med Biol* 37:563-577
- Zeng GL, Clack R, Gullberg GT (1994) Implementation of Tuy's inversion formula. *Phys Med Biol* 39:493-507
- Zhuang TL, Leng S, Nett BE, Chen GH (2004) Fan-beam and cone-beam image reconstruction via filtering the backprojection image of differentiated data. *Phys Med Biol* 49:5489-5503
- Zou Y, Pan X (2004) An extended data function and its generalized backprojection for image reconstruction in helical cone-beam CT. *Phys Med Biol* 49:N383-N387
- Zou Y, Pan X, Xia D, Wang G (2005) PI-line-based image reconstruction in helical cone-beam computed tomography with a variable pitch. *Med Phys* 32:2639-2648



# 第6章 迭代重建

## 6.1 解线性方程组

前面几章讲的是用解析算法来重建图像，图像重建还可以用解线性方程组的方法来达到目的。为了建立方程组，我们首先要将图像离散化，把图像用一个个像素拼摆而成，见图6.1。对于三维图像来说，每个像素是个立方体，有人把它称作体积像素或称作体素（英文是 voxel = volumetric pixel）。在这本书里，不管是二维图像还是三维图像，我们统统用像素这个词来称谓构成图像的最小元素。

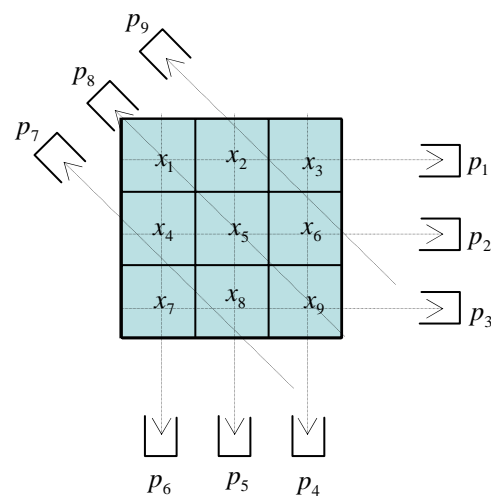


图 6.1 这个例子里有九个未知数和九个测量值。

值得一提的是，我们是用单下标，而不是用双下标，来标记图像像素  $x_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ )。对所有的投影数据我们也是用单下标  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) 来标

记。这样一来，我们就可以建立一个线性方程组来描述像素与投影数据之间的关系：

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = p_1 \\ x_4 + x_5 + x_6 = p_2 \\ x_7 + x_8 + x_9 = p_3 \\ x_3 + x_6 + x_9 = p_4 \\ x_2 + x_5 + x_8 = p_5 \\ x_1 + x_4 + x_7 = p_6 \\ 2(\sqrt{2}-1)x_4 + (2-\sqrt{2})x_7 + 2(\sqrt{2}-1)x_8 = p_7 \\ \sqrt{2}x_1 + \sqrt{2}x_5 + \sqrt{2}x_9 = p_8 \\ 2(\sqrt{2}-1)x_2 + (2-\sqrt{2})x_3 + 2(\sqrt{2}-1)x_6 = p_9 \end{array} \right. .$$

这个方程组也可以用矩阵的形式写出

$$AX = P,$$

式中， $X = [x_1, x_2, \dots, x_9]^T$ ， $P = [p_1, p_2, \dots, p_9]^T$ ， $A$  是方程组的系数矩阵。矩阵  $A$  的元素  $a_{ij}$  代表第  $j$  个像素对第  $i$  个投影值的贡献。在上面的例子中，这个“贡献”就是投影射线在该像素内所截的线段的长度。如果矩阵  $A$  的逆矩阵  $A^{-1}$  存在的话，重建的图像可以这样得到

$$X = A^{-1} P.$$

线段长度并不是用来作为“贡献”的唯一模型。成像中遇到的物理现象（如衰减和点扩散函数）都可以放到模型中去。

对于一个实际的成像问题来说，矩阵  $A$  不总是方阵。当矩阵  $A$  不是方阵时，我们可以用广义逆矩阵来近似。例如，我们可以用广义逆矩阵来得到最小二乘解：

$$\text{当方程组是超定时， } X = (A^T A)^{-1} A^T P ;$$

$$\text{当方程组是欠定时， } X = A^T (A A^T)^{-1} P .$$

广义逆可以通过对最小二乘的目标函数进行优化来获得。对于超定的方程组（即投影射线的数目比图像像素的总数要大），我们建立下面这个目标函数

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \|AX - P\|^2 = (AX - P)^T (AX - P) \\ &= X^T A^T AX - 2X^T A^T P - P^T P.\end{aligned}$$

对其求偏导数（即梯度），并设偏导数为零：

$$\bar{0} = \nabla \chi^2 = 2A^T A - 2A^T P.$$

也就是，

$$A^T AX = A^T P.$$

这是一组正交方程，因为  $(AX - P)$  与  $A$  的每一行都正交： $A^T (AX - P) = \bar{0}$ 。从这个方程组中解出的  $X$  就是个广义解

$$X = (A^T A)^{-1} A^T P.$$

另一方面，欠定方程组（即图像像素的总数比投影射线的数目要大） $AX=P$  有无穷多个解。在这么多的解中，我们要寻找一个最小范数（即最小模，最小能量）解。我们可以用拉格朗日乘数法在约束  $AX=P$  下求  $\|X\|^2$  的极小值。我们建立一个求条件极值的拉格朗日函数如下

$$L = \|X\|^2 + \Lambda(AX - P).$$

其中，对角矩阵  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$  的对角元素是拉格朗日乘数，而  $m$  是投影射线数目的总数。

对拉格朗日函数求偏导（即梯度），并令这些偏导为零，我们得到

$$\bar{0} = 2X + A^T \Lambda \text{ 和 } AX = P.$$

对  $\bar{0} = 2X + A^T \Lambda$  左乘  $A$  而得到

$$\bar{0} = 2AX + AA^T \Lambda.$$

从中解出  $\Lambda$  并代入  $AX = P$ ，我们得到

$$\Lambda = -2(AA^T)^{-1} AX = -2(AA^T)^{-1} P.$$

最后，从  $\bar{0} = 2X + A^T \Lambda$  解出  $X$

$$X = -\frac{1}{2}A^T A = A^T(AA^T)P。$$

即使矩阵  $A$  是个方阵，其逆矩阵  $A^{-1}$  也不见得存在。当矩阵  $A$  不是满秩的时候，其逆矩阵  $A^{-1}$  就不存在。其实，图6.1所示的例子给出的矩阵  $A$  就不是满秩的。我们可以很容易地验证，第一，二，三行的和等于第四，五，六行的和。若矩阵  $A$  不是满秩的，我们连  $(AA^T)^{-1}$  或  $(A^T A)^{-1}$  都无法算得。我们要面对这样的现实，矩阵  $A$  不是满秩的，也不是个方阵；投影数据是含噪声的；方程组是不相容的。对于不满秩的矩阵  $A$ ，用奇异值分解（英文是 **SVD** = Singular Value Decomposition）来求一个伪逆。在 Matlab 中，求伪逆的函数是 “*pinv*”。

奇异值分解 (SVD) 方法是寻找广义逆的有效而稳定手段，它还可以对方程组的病态状况作出诊断。下面我们用 SVD 来找方程组  $AX = P$  的最小二乘解。

假设矩阵  $A$  有  $m$  行有  $n$  列，并记为  $A_{m \times n}$ 。用 SVD，矩阵  $A_{m \times n}$  可以分解成

$$A_{m \times n} = U_{m \times m} \Sigma V_{n \times n}^T,$$

式中，

$$\begin{aligned} V^T V &= I_{n \times n}, \\ U^T U &= I_{m \times m}, \text{ 及} \\ \Sigma_{m \times n} &= \begin{bmatrix} \text{diag}\{\sigma_i\} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

这里，奇异值是按递减的次序排列的：

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_i \geq \dots \geq 0。$$

广义逆（或称伪逆）可定义为

$$A^+ = V \Sigma^+ U^T,$$

式中，

$$\Sigma_{n \times m}^+ = \begin{bmatrix} D_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

这里，对角矩阵  $D_r$  有一个截断指标  $r$ ，它只有  $r$  个非零元素，并定义为

$$D_r = \text{diag}\left\{\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \dots, 0\right\}。$$

这样，重建的图像就可表达成

$$X = A^+ P = V \Sigma^+ U^T P。$$

在 SVD 方法中，截断指标  $r$  是根据情况而定的。如果截断指标  $r$  选取得过小，重建的图像只包含一些低频分量，图像就是模糊的。如果截断指标  $r$  选取得过大，重建的图像就会包含很多高频分量，并有很多高频噪声，高频噪声甚至会淹没图像。

在通常的医学成像应用中，矩阵  $A$  十分庞大，无法使整个矩阵同时储存在计算机中。在解方程组的过程中，我们只能当用到矩阵  $A$  的哪一行值时就即刻产生那一行的值，用后也不保存。基于这个限制，有些解方程组的算法（比如，把矩阵  $A$  进行对角化，或把矩阵  $A$  进行上三角化）就不适用。其实，任何需要改动矩阵  $A$  的算法都不能用。我们可以用的算法只能使用矩阵  $A$  和其转置矩阵  $A^T$ ，而不能改变它们。所以，使用直接运用  $A$  和  $A^T$ （而不是对  $A$  和  $A^T$  做变换）的迭代的方法来找方程组的一个近似解的方法比较实际可行。

我们可以把一个解析的图像重建算法看成一个“开环”系统，而一个迭代的图像重建算法看成一个“闭环”系统。每一环，称作一次迭代由下面几个基本部分组成：投影运算，投影运算的结果与测量数据进行比较，反投影运算，以及图像更新。反投影运算的目的是把投影运算的结果与测量数据之间的差异映射到图像空间去，并去修正当前所估算的图像（图6.2）。

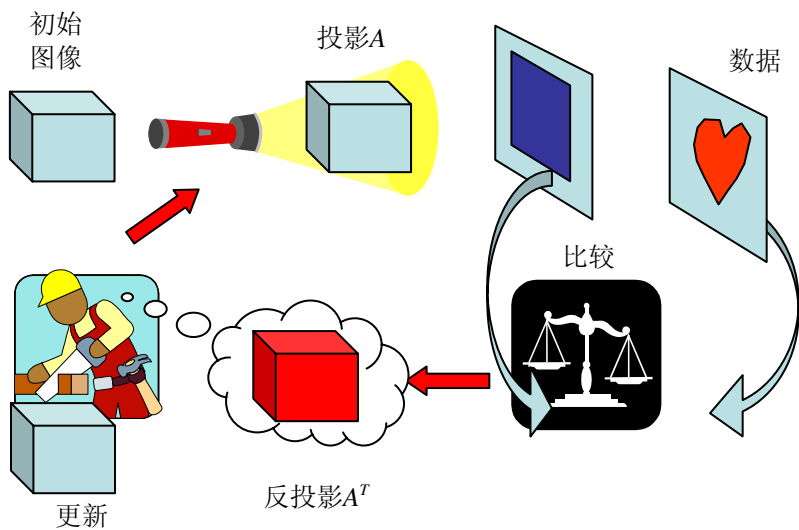


图 6.2 图像重建迭代算法过程示意图。

## 6.2 代数重建算法（英文是 ART = Algebraic Reconstruction Technique）

ART 算法有时也被称作 Kaczmarz 算法，它的主要思路是让当前所估算的图像在一次图像更新中满足一个方程，如图6.3所示。图中有三条直线： $L_1$ ， $L_2$ ，和 $L_3$ ，它们代表三个方程。它们的交点就是方程组的解。

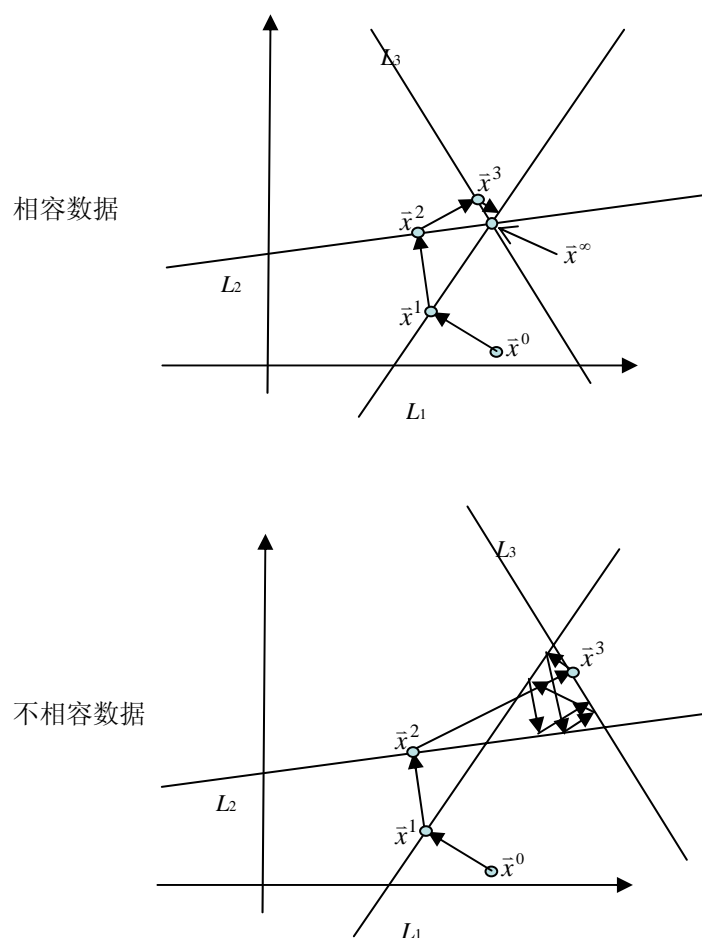


图 6.3 在每一次图像更新时，ART 算法总是试图让新的图像满足下一个方程。

在图6.3中， $\bar{x}^0$  是任意给的一个初始值。第一步是把点  $\bar{x}^0$  垂直地投影到  $L_1$  上去，得到新值  $\bar{x}^1$ 。下一步是把点  $\bar{x}^1$  垂直地投影到  $L_2$  上去，得到新值  $\bar{x}^2$ ，依此类推。每一步是把当前所估算的点投影到下一条直线上去，让它满足下一个方程。最终，这个算法会收敛到方程组的解上去（图6.3上）。

如果这个方程组是不相容的，这个算法会导致方程组的“解”来回跳动而不会收敛（图6.3下）。一次迭代定义为所有方程都被该算法访问了一次。

ART 算法是一条射线接一条射线地进行的，当每一条射线被考虑之后，图像就被更新一次。这个算法可以形式上地写成

$$\bar{x}^{\text{下一个}} = \bar{x}^{\text{当前}} - \text{反投影}_{\text{射线}} \left\{ \frac{\text{投影}_{\text{射线}}(\bar{x}^{\text{当前}}) - \text{测量值}_{\text{射线}}}{\text{归一化因子}} \right\}。$$

### 6.3 梯度下降算法

首先，我们利用描述成像的方程  $AX = P$  组建立一个目标函数：

$$\chi^2 = \|AX - P\|^2，$$

这是一个二次函数（图6.4）。由于噪声的影响，这个方程组是不相容的。这样一来，目标函数  $\chi^2$  的极小值是一个非零的正值。

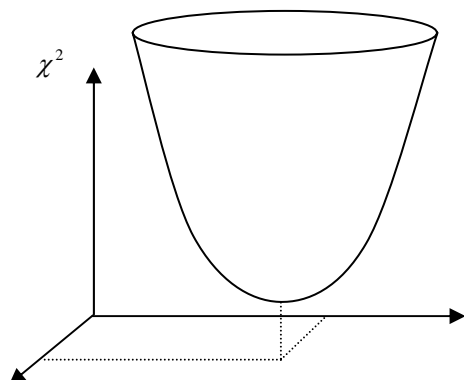


图 6.4 一个二次多项式目标函数。

梯度下降算法的策略是对于当前估算的图像  $X$  求其目标函数  $\chi^2$  的梯度，根据梯度把估算的图像往目标函数的极小值方向“推”。在一维情形，梯度就是函数的导数。梯度方向是函数上升的方向，与梯度相反的方向是函数下降的方向。梯度下降算法是选取与梯度方向相反的方向对估算的图像进行更新。更新步长要取得很小，以保证算法能收敛到极小值（图6.5）。梯度下降算法的一般表达式为

$$\bar{x}^{\text{下一个}} = \bar{x}^{\text{当前}} - a_{\text{当前}} \bar{\Delta}(\bar{x}^{\text{当前}})，$$

式中， $\bar{\Delta}$  是目前图像  $\bar{x}^{\text{当前}}$  的目标函数  $\chi^2$  的梯度。梯度  $\bar{\Delta}$  的计算包括所有射线的投影运算和反投影运算：



$$\bar{\Delta} = \nabla \|AX - P\|^2 = 2A^T(AX - P),$$

这里  $\nabla$  梯度运算算子，投影数据  $AX$  是图像  $X$  与成像矩阵  $A$  的乘积，反投影就是乘以转置矩阵  $A^T$ 。投影运算的结果与测量数据之间的差异为  $(AX - P)$ 。当  $AX = P$  而且  $X$  不再改变时，这个算法就收敛了。在我们使用的符号中， $X$  和  $\bar{x}$  是一回事，不加区分。

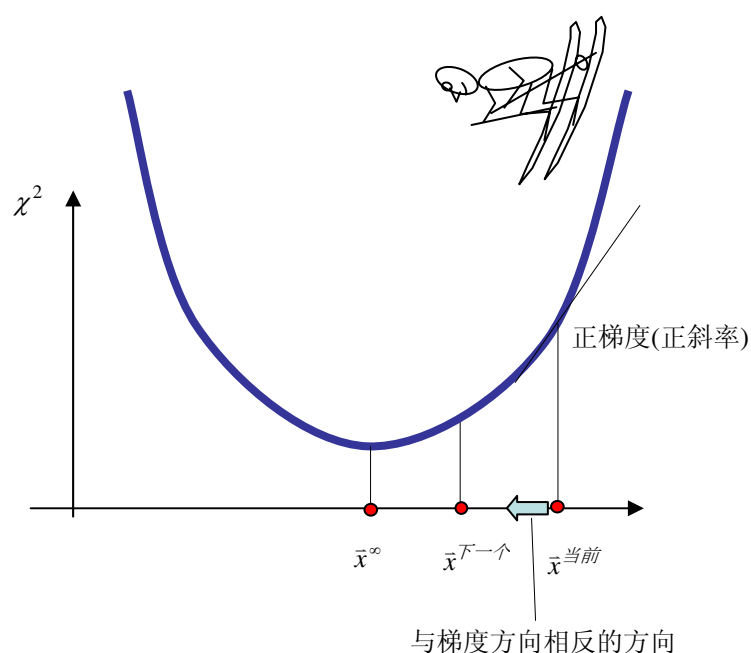


图 6.5 与梯度方向相反的方向是下降方向。

如果成像的方程组是欠定的，这个最小二乘问题的解不唯一（解有无穷多），目标函数  $\chi^2$  有一个长长峡谷（图6.6）。在这种情况下，算法所收敛到的解取决于给定的初始条件（即初始图像）。如果初始图像是零，即  $\bar{x}^0 = \bar{0}$ ，那么这个算法会收敛到最小范数（即最小模）的解。

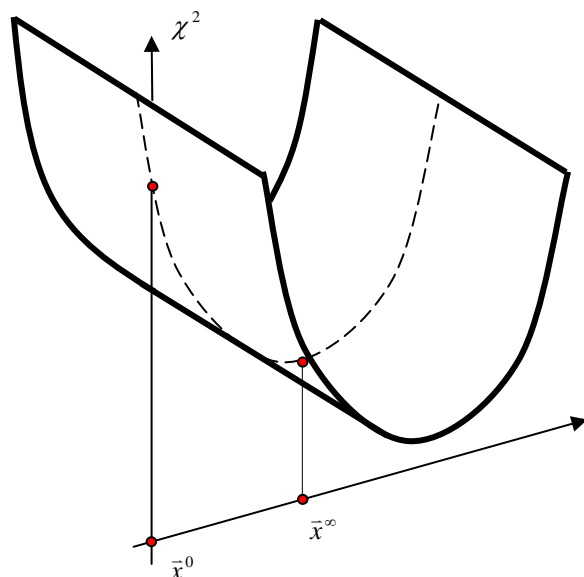


图 6.6 对于一个退化的方程组，迭代算法的解取决于初始条件。

由于噪声的影响，方程组是不相容的，我们几乎不可能收敛到  $AX = P$ 。当迭代数很大时，所得的图像可能会被噪声所淹没。我们用图2.10所示的模型产生一组带噪声的投影数据。我们再用一个迭代重建算法来做图像重建。如图6.7所示，当迭代次数小时，图像主要含有低频分量；当迭代次数增大时，高频分量渐渐地被恢复，与此同时，噪声也渐渐地侵入。

对于实际的成像问题，梯度方向是很容易利用投影和反投影计算的，其计算式为  $\bar{A} = \nabla \|AX - P\|^2 = 2A^T(AX - P)$ 。但是，负的梯度方向未必是寻找极小值的最佳的方向。让我们来看一看一个典型的目标函数  $\chi^2$  的等高线图（图6.8），这些等高线是一些椭圆。在任一点的梯度方向是与那一点椭圆的切线方向相垂直的。算法中相邻的两个搜索方向  $\bar{u}^{\text{当前}}$  和  $\bar{u}^{\text{下一个}}$  也是垂直的（即  $\bar{u}^{\text{当前}} \cdot \bar{u}^{\text{下一个}} = 0$ ）。搜索方向象之字那样曲折。整个搜索过程走了太多的弯路，既费时又费工。

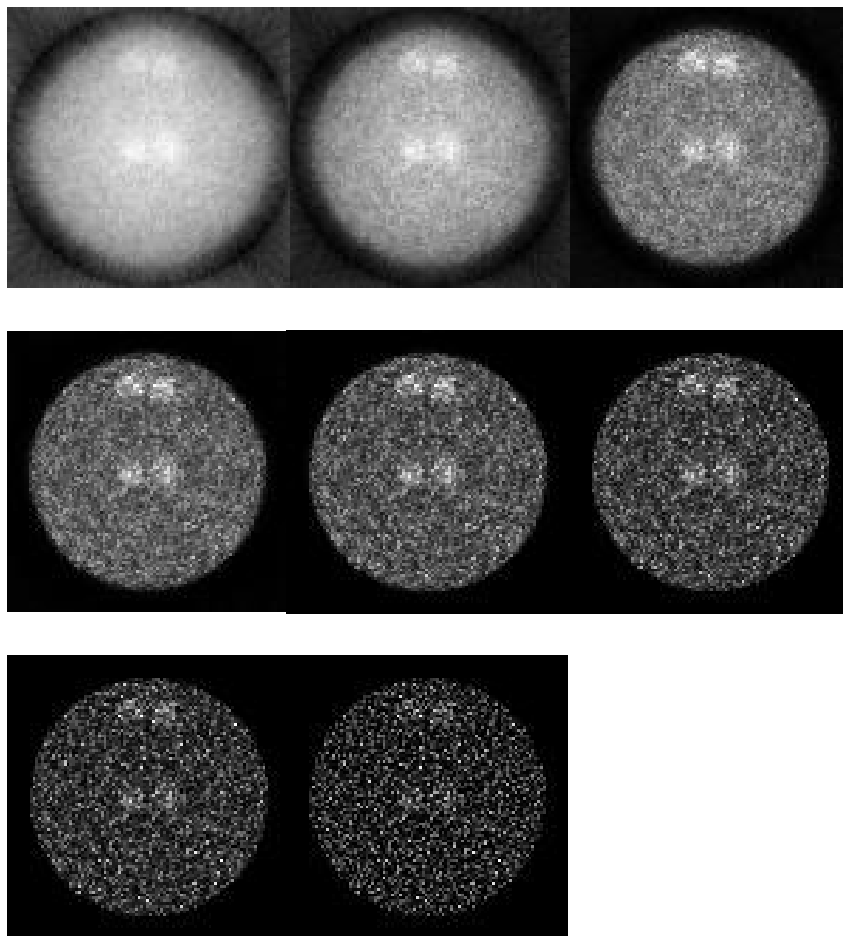


图 6.7 迭代次数增加时，图像中的噪声也越来越大。

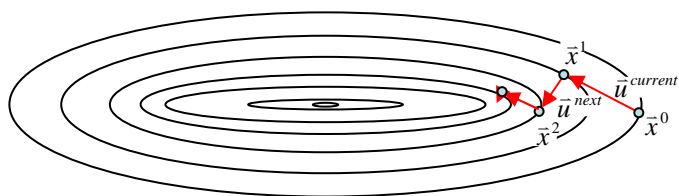


图 6.8 负的梯度方向并非函数极小值的最佳寻索路径。

用共轭梯度方向来搜寻要比用梯度方向搜寻有效得多。所谓  $\bar{u}^{\text{当前}}$  和  $\bar{u}^{\text{下一个}}$  为共轭方向是这样定义的:  $\bar{u}^{\text{当前}} \cdot (A^T A) \bar{u}^{\text{下一个}} = 0$  (图6.9)。目标函数  $\chi^2$  的形状特征是包含在方阵  $(A^T A)$  中的。当我们运用共轭方向的时候, 我们实际上是先把等高线进行形变, 把它们变成同心圆, 然后再找正交的方向。利用共轭梯度方向可使算法收敛的快一些。

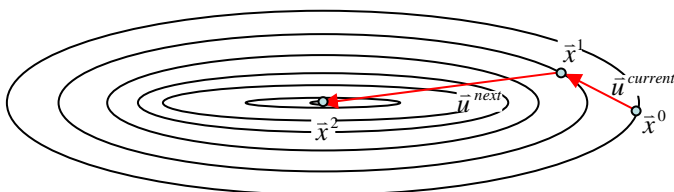


图 6.9 共轭梯度方向比梯度方向更为有效。

#### 6.4 ML-EM (利用求最大期望值来求最大似然函数) 算法

我们不见得偏要使用最小二乘法来建立目标函数。建立目标函数还有许多其它的途径。如果我们使用泊松噪声模型或仅仅使用非负值约束, 我们就可得到一个特别的目标函数。对这个目标函数求极小值, 可得到一个使用乘法来更新图像的算法, 叫ML-EM算法。这个算法可以形式上地写成

$$\bar{x}^{\text{下一个}} = \bar{x}^{\text{当前}} \frac{\frac{\text{反投影} \left\{ \frac{\text{测量值}}{\text{投影}(\bar{x}^{\text{当前}})} \right\}}{\text{反投影} \{ \bar{1} \}}},$$

式中  $\{\bar{1}\}$  是个元素全为1的向量, 其元素个数与投影数据向量的元素个数相同。在这个算法中, 投影运算的结果与测量数据之间的差异不是用减法, 而是用除法, 来表示的。这个ML-EM算法的一个很重要的特点是它的非负性。如果所给的初始图像中没有负值的话, 迭代以后的结果永远不会有负值。

现在我们来解释一下这个算法的名字: ML-EM。这个算法的目标函数可以设为一个似然函数, 它就是泊松随机变量的联合概率密度函数。我们希望找到一个解 (即重建的图像) 来使这个似然函数取得极大值。因此, 这个算法叫ML (英文是 ML = Maximum Likelihood 最大似然) 算法。

一般来说，当我们在求一个函数（比如，一个目标函数或一个似然函数）的极大值或极小值，我们总是先对其所有的未知数（也就是图像的像素）求偏导数，令这些偏导数为零，并解出这些未知数。可是，对于泊松似然函数来说，利用偏导数的方程式很难把未知数解出来。为了简化方程式，我们把方程式中的一些随机变量用其期望值（即统计均值）来代替。期望值的英文是 Expectation Value，所以，这个步骤成为“E”步骤。这一步大大简化了对方程式求解。接下来就是求这个（用期望值计算的）似然函数的极大值。这就是所谓的“M”步骤，因为英文的“求极大值”是 Maximization。把E和M放在一起，即为EM（Expectation Maximization，求期望值的极大值）。

这个ML-EM算法也被称为 Richardson-Lucy 算法，因为 Richardson 和 Lucy 分在 1972 和 1974 在做图像去模糊的研究中就提出了这个算法。在不同的应用领域里有不同的 EM 算法。在医学图像重建领域，通常所说的 ML-EM 算法是特指对发射型数据做图像重建的算法。对透射型数据做图像重建的算法也有它自己的ML-EM算法，只不过不如发射型数据的 ML-EM 算法那么有名罢了。

## 6.5 OS-EM (分成有序的子集来求期望值的极大值) 算法

在 ART 算法中，当每一条射线被考虑后，图像就被更新一次。另一方面，在梯度下降算法和 ML-EM 算法中，当所有的投影射线都被考虑完后，图像才被更新一次。一种使迭代算法加速收敛的办法是更加频繁地更新图像。

在 OS-EM 算法中，数据按投影角度被分成不同的子集（Subsets），该算法依照给定的顺序（Order）走访不同的子集中的数据，每走访一个子集图像就更新一次。OS的意思是有序的子集（Ordered Subsets）。图6.10给出了一个把投影角度被分成不同子集的例子。子集的分割有很大的自由度，可根据需要来做决策。大致地讲，若使用  $N$  个子集，收敛速度大约提升  $N$  倍。根据经验，我们建议适当地做子集分割以达到收敛速度提升大约 10 倍，在这样的倍数下噪声的破坏不明显。

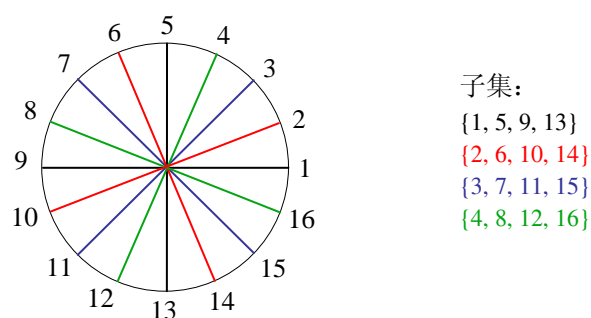


图 6.10 全体投影角度被分成不同的子集。

## 6.6 噪声控制

目前，在医学图像重建领域中越来越多的人选择用迭代算法来取代解析算法，因为迭代算法重建的图像在同分辨率或更高分辨率的前提下具有较小的噪声。在这一节里，我们要分别讨论解析算法和迭代算法是如何处理和看待噪声的。

### 6.6.1 解析方法— 加窗函数

在解析算法中，当对投影数据滤波时，噪声是通过施加窗函数的方法得到控制的。在任何解析的图像重建算法中，都有一个高通滤波器（比如，斜坡滤波器），它对高频分量进行放大，对低频分量进行抑制。大量的高频噪声就跑了进来。为了控制高频噪声，总是要给斜坡滤波器加上一个窗函数（图6.11）。从本质上讲，解析算法对噪声的控制就是靠控制带宽，把高频噪声和低频信号一起扔掉。

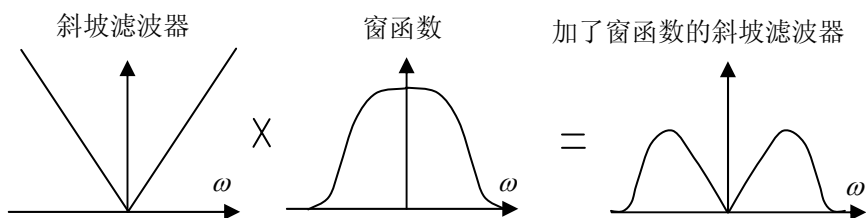


图 6.11 给斜坡滤波器加上一个窗函数。

### 6.6.2 迭代方法—提前停止迭代

迭代算法中控制噪声的方法很多。首先，我们来考查一下代算法中噪声是如何传播到重建的图像中去的。下面是一个噪声传播模型：

$$\text{误差}_{\text{图像}} = \lambda_n(\omega) \times \text{误差}_{\text{数据}},$$

式中， $\text{误差}_{\text{图像}}$  是重建的图像中的误差幅度， $\text{误差}_{\text{数据}}$  是投影数据中的误差幅度，而且  $\lambda_n(\omega)$  是算法的传递函数，它是频率  $\omega$  的函数，也是迭代次数的函数。在许多逆问题的应用中，这个关系被简化为

$$\text{误差}_{\text{图像}} = \kappa \times \text{误差}_{\text{数据}},$$

式中， $\kappa$  是正向问题的条件数。条件数的定义是最大特征值  $\sigma_{\max}$  与最小特征值  $\sigma_{\min}$  之比。这个简化的关系式，并不是想偷工减料，而是指出了问题的要害所在。因为，最恶劣的噪声影响是来自对应于最小特征值  $\sigma_{\min}$  的频率分量（即特征向量）。重建的图像是许多项的和，每一项是一个特征向量乘以它所对应的特征值的倒数  $1/\sigma$ 。其中，最大的增益来自  $1/\sigma_{\min}$ ，它所对应的特征向量含有是有很多高频分量。

你可以把这个误差传递关系和解析的方法联系起来，把  $\lambda_n(\omega)$  想象成加了窗函数的斜坡滤波函数。窗函数的宽度（即带宽）随着迭代次数的增加而增加。这使我们马上意识到控制噪声的一种办法就是控制迭代次数。

提前停止迭代是最简单的一种控制噪声的办法。但是，迭代算法对不同的频率在图像中不同的位置收敛的速度不同。在算法收敛之前，提前停止迭代，所得到的图像具有非均匀的分辨率。如果你要重建的图像具有均匀的分辨率，就不要提前停止迭代，在迭代重建做完之后，再把图像进行滤波（这叫后滤波）来抑制噪声。

### 6.6.3 迭代方法—选择像素模型

降低图像噪声的第二种办法是降低数据中的误差。这种控制噪声的办法只适用于迭代算法。投影数据  $P$  与成像模型  $AX$  之间的误差， $\text{误差}_{\text{数据}}$ ，有两部分组成：随机误差与非随机误差。非随机误差是由非理想的系统模型  $AX$  所造成的。首先，把连续的物体离散化，用有限数目的像素来表示无限多个点就会产生误差。我们在选取像素大小时必须权衡利弊。选用小的像素可以减小系统模型  $AX$  的误差，但是，系统的未知数的数目却大大增加了，使方

程组变得不稳定。反之，选用大的像素可以降低未知数的数目，使方程组变得更稳定，但是，系统模型  $AX$  的误差会变得更大。

其实，使用互不重叠的均匀像素来表示一个图像并不是个理想的方案，因为这个图像模型是不连续的，它人为地往所表示的图形中添入了本来没有的高频分量。有些人尝试过用相互重叠的非均匀像素，如棉花球像素（图 6.12），来表示图像，并做图像重建。这样重建的图像确实有所改进。它提供了一个更加接近现实的有限带宽的图像模型。

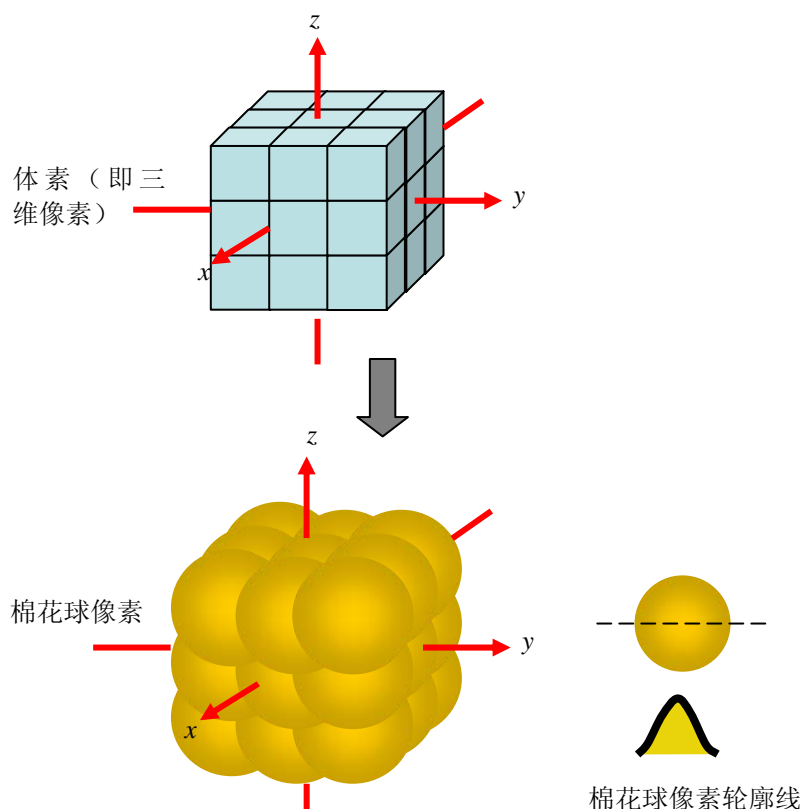


图 6.12 用重叠的棉花球像素来代替传统的互不重叠的均匀像素可改进图像模型。

使用棉花球像素的缺点是增加了计算复杂度。有另一种方案可以达到类似的结果，但计算复杂度很低。这个方案使用的是传统的互不重叠的像素来表示图像，但是，反投影的图像要经过低通滤波。这个低通滤波器的卷积核刚好取成那个三维的棉花球函数。换句话说，反投影的图像要用棉花球函数做三维卷积（图 6.13）。



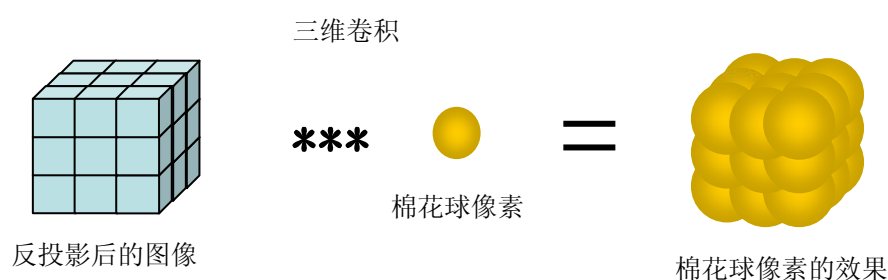


图 6.13 得到棉花球像素效果的另一途径。

作为经验之谈，为了使逆问题更加稳定，我们认为图像的像素要比探测器的像元要大。这样，可以保证图像像素的总数比不同角度的探测器的像元的总数要小（图6.14）。在实际的数据采集过程中，最好选择大的探测器矩阵（即小的探测器像元）。这对迭代算法的噪声控制很有成效。特别是，当投影运算和反投影运算都考虑到了系统的分辨率模型，这样的选择更为重要。一个比较平衡的选择是探测器像元的尺寸为图像像素的尺寸的一半。如果图像是个  $256 \times 256 \times 256$  的矩阵，最好使用  $512 \times 512$  的矩阵来采集投影数据。如果你的成像系统无此选项，你可使用  $256 \times 256$  的矩阵来采集投影数据，然后把数据插值到  $512 \times 512$  的矩阵中去，再用迭代算法做图像重建。

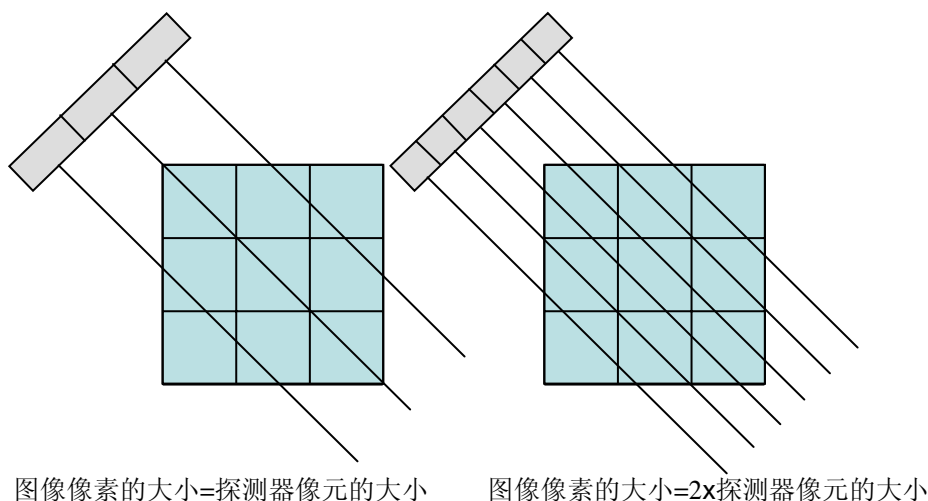


图 6.14 探测器的像元比图像的像素要小对迭代重建很有帮助。

#### 6.6.4 迭代方法—精确建模

如果把系统的点扩散函数（图6.15）以及在病人体内的射线衰减和散射都反映在成像矩阵  $A$  中，也就是说矩阵  $A$  对这些物理因素建立模型，可以大大减小数据  $P$  与模型  $AX$  间的非随机误差。假使你暂时还不准备对这些物理因素在矩阵  $A$  中建立模型，你仍然可以选择是用成像的光束路径在像素内的线段长度还是用面积大小来确定矩阵  $A$  中元素的数值（图6.16）。迭代重建算法的一个主要优点就是可以选择如何对成像的几何和物理因素进行建模。我们可以对投影数据与模型之间的误差在某种程度上给予控制。至少，我们可以通过对成像的几何和物理因素进行精确地建模，而有效地控制其中的非随机部分。建模误差的减小可导致图像误差的减小。建模误差的减小还可以允许我们在同等图像噪声或较低的图像噪声的条件下使用更大的迭代次数以获得更高的图像分辨率。

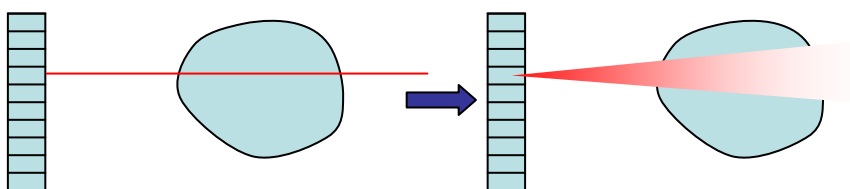


图 6.15 投影运算矩阵  $A$  能够对系统随距离变化的分辨率及感光度进行建模。

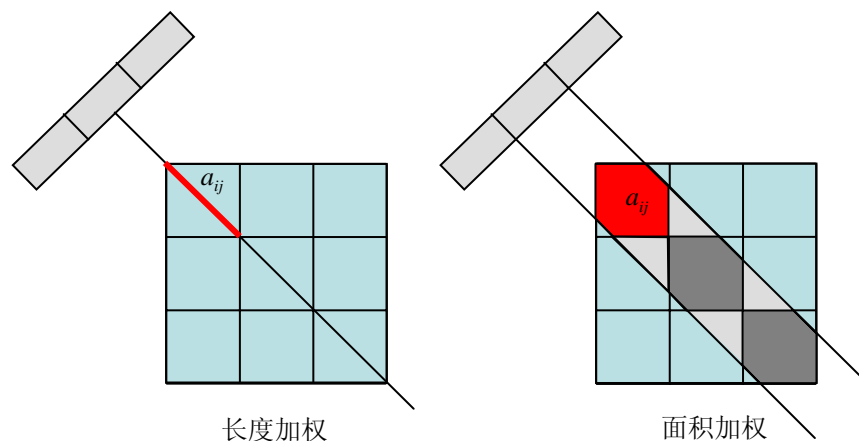


图 6.16 用面积大小加权比用线段长度加权要精确些，但运算量也大些。

除了上面的三种方法，迭代算法还可以有第四种方法来控制噪声：考虑随机噪声部分。我们可以在建立目标函数的时候把噪声的概率分布考虑进去。第6.7节就专门讨论这个题目。

除了投影数据外，我们如果对所要成的图像有些先验的知识，这些先验知识对控制噪声和提高算法的稳定性很有用。这就是第五种方法，我们会在第6.8节做专门讨论。

## 6.7 噪声模型建于似然函数中

为了使噪声模型有效地工作，我们需要有冗余的数据，否则的话，建立噪声模型对方程组求解没有帮助。图6.17中有两条线  $L_1$  和  $L_2$ ，它们代表两个独立的测量数据及两个独立的线性方程。这两个测量数据可能含噪声，也可能不含噪声。不管有没有噪声，不管你对  $L_1$  或  $L_2$  的测量数据哪个更加信赖，方程的解总是这两条直线的交点。由于噪声的影响，这两条直线的交点不见得就是真正的解。我们只有这两个数据，即使我们知道有噪声的影响，我们也不知道怎样才能把解变得更准确些。

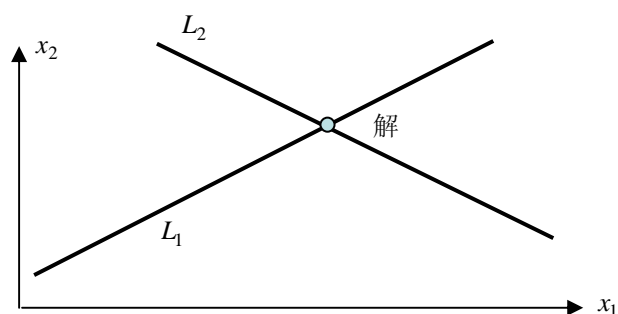


图 6.17 两直线的交点代表这两个方程的解。

如果我们有三个测量数据  $L_1$ ,  $L_2$ , 和  $L_3$  情况就不一样了 (图6.18)。由于噪声的影响, 这三条直线并不交于一点。那怎么找到一个比较公正合理的解呢? 要得到一个比较公正合理的解需要考虑到每个测量值可能的误差。我们要相对地重用误差较小的测量值, 而对误差较大的测量值则不那么信任。

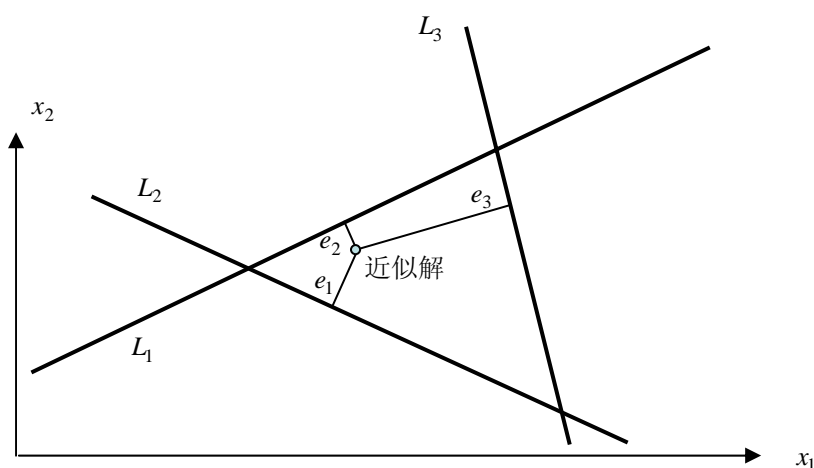


图 6.18 如果我们有冗余的数据, 而且方程组是不相容的, 我们就要根据它们的噪声大小对测量值进行加权, 并确定合适的解。

如果我们用方差  $\sigma^2$  来描述测量值中噪声的大小, 我们可以对测量数据用  $1/\sigma^2$  来加权。这样, 我们就可以使用基于方差的权因子建立目标函数。传统的最小二乘法目标函数

$$\chi^2 = \|AX - P\|^2 = (AX - P)^T (AX - P)$$

就变成了加权的最小二乘法目标函数

$$\chi_W^2 = (AX - P)^T W (AX - P),$$

式中,  $W$  是个对角矩阵  $W = \text{diag}\left\{\frac{1}{\sigma_1^2}, \frac{1}{\sigma_2^2}, \dots, \frac{1}{\sigma_N^2}\right\}$ , 及  $N$  是投影数据的数目 (即探测器像元的总数)。

如果投影数据的噪声服从高斯分布, 可以证明, 对其似然函数求极大值等价于对这个加权的最小二乘法目标函数求极小值。

设第  $i$  个投影测量值  $p_i$  是个高斯随机变量, 其均值和方差分别为  $\mu_i = \sum_j a_{ij} x_j = A_i X$  和  $\sigma_i^2$ 。这里,  $A_i$  是矩阵  $A$  的第  $i$  行。高斯分布的概率密度函数是

$$\text{Prob}(p_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{(A_i X - p_i)^2}{2\sigma_i^2}\right)。$$

我们假设所有的投影数据都是相互统计独立的。似然函数就是所有的投影数据的联合概率密度函数:

$$\text{Prob}(P) = \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{(A_i X - p_i)^2}{2\sigma_i^2}\right)。$$

我们的目的是找到一个图像  $X$  使上面这个似然函数达到极大值。这就是“最大似然解”的含意。对这个似然函数取对数后, 我们有

$$\ln(\text{Prob}(P)) = -\frac{1}{2} \sum_i \frac{(A_i X - p_i)^2}{\sigma_i^2} + \sum_i \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}\right)。$$

上面等式右边的第二项是个常数, 它对求极值没有影响。所以, 对似然函数求极大值等价于对下面这个加权的最小二乘法目标函数求极小值

$$\chi_W^2 = \sum_i \frac{(A_i X - p_i)^2}{\sigma_i^2} = (AX - P)^T W (AX - P)。$$

如果数据的噪声不服从高斯分布, 前面关于建立似然函数和目标函数的方法仍然有效, 只不过所得到的目标函数不同罢了。

## 6.8 利用先验知识 (贝叶斯法则)

除了投影数据外, 有时候我们对所要成的图像有些先验的知识。我们如果在目标函数里多加一项, 就可以把这些先验知识“塞进”图像中去。

举例说, 如果我们事先知道图像 $X$ 很光滑, 我们就可以加一个惩罚项 $\|\nabla X\|^2$ 来抑制尖锐的跳跃, 并促进图像的光滑:

$$\text{新目标函数}(X) = \text{原目标函数}(X) + \beta \|\nabla X\|^2。$$

式中,  $\beta$  是个控制参数。使用梯度的模的平方 $\|\nabla X\|^2$ 为惩罚项可以推广到使用“能量”函数 $U(X)$ 为惩罚项。能量函数 $U(X)$ 的一般定义式是:

$$U(X) = \sum_{i,j} w_{ij} V(x_i - x_j),$$

式中的求和号是指在一个邻域内求和,  $V$  是个凸函数, 但  $V$  不见得一定要是二次函数 (图6.19)。如果  $V$  是二次函数的话, 这个能量函数是要促进图像的平滑性, 抑制图像的跳跃。

如果函数  $V$  比二次函数上升得慢的话, 比如说  $V$  是线性的 (如绝对值函数), 那么它可以用来平滑噪声, 却保护住边界不至于被平滑掉。这个算法怎么知道什么地方是边界而需要保护, 什么地方是噪声而需要平滑掉呢? 我们现在来回答这个问题。假设噪声是由小幅度的跳跃组成, 而器官之间的边界是大幅度的跳跃。我们把绝对值函数  $|x|$  与二次函数  $x^2$  做个比较。当  $|x|$  的值很小的时候 (可认为是噪声的波动),  $|x| > x^2$ , 绝对值函数相对来说比二次函数有较强的惩罚, 因而噪声被压制了。当  $|x|$  的值很大的时候 (可认为是器官之间的边界),  $|x| < x^2$ , 绝对值函数相对来说比二次函数有较弱的惩罚, 因而边界就被保护下来了。

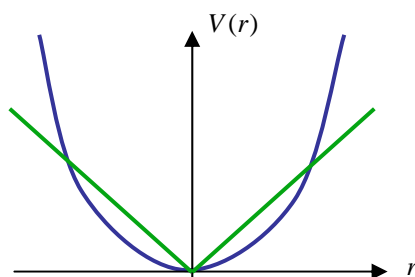


图 6.19 根据应用的不同, 惩罚函数可以有不同的形式。

使用先验知识做图像重建的算法有多种叫法，比如，贝叶斯法则，MAP (Maximum a posteriori, 最大后验概率) 算法，等等。

新的目标函数事实上是个条件概率  $Prob(X|P)$ 。贝叶斯法则指出

$$Prob(X | P) = \frac{Prob(P | X)Prob(X)}{Prob(P)}。$$

对其取对数后，我们有

$$\ln(Prob(X | P)) = \ln(Prob(P | X)) + \ln(Prob(X)) - \ln(Prob(P))，$$

式中的第三项与未知图像  $X$  无关，可以从目标函数中去掉。贝叶斯目标函数变为

$$L(X) = \ln(Prob(P | X)) + \ln(Prob(X))，$$

或形式上地表示为，

$$(\text{后验函数}) = (\text{似然函数}) + \beta(\text{先验函数})。$$

等式右端的第一项是最大似然 (ML) 算法的目标函数，右端的第二项是关于图像  $X$  的先验知识。这个表达式使我们看到我们在本节开头看到的新的目标函数的合理性。

## 6.9\* 数学表达式

### 6.9.1 ART

ART 算法是个“行运算”算法。它每次考虑一条射线就更新一次图像。ART 算法的表达式是

$$X^{\text{下一个}} = X^{\text{当前}} - \frac{A_i X^{\text{当前}} - p_i}{\|A_i\|^2} A_i^T，$$

式中,  $A_i X$  执行的是沿着第  $i$  条射线的投影运算,  $p_i$  是在第  $i$  个探测像元上测到的投影数据,  $\|A_i\|^2 = \sum_j a_{ij}^2$  是沿着第  $i$  条射线上各“贡献”因子的平方和,  $cA_i^T$  是把数值  $c$  沿着第  $i$  条射线做反投影。如果我们把上面的算法改写成下面的形式

$$X^{next} = X^{current} - \left( \frac{A_i X^{current}}{\|A_i\|} - \frac{p_i}{\|A_i\|} \right) \frac{A_i^T}{\|A_i\|},$$

该算法的几何意义就比较明显了, 见图6.20。

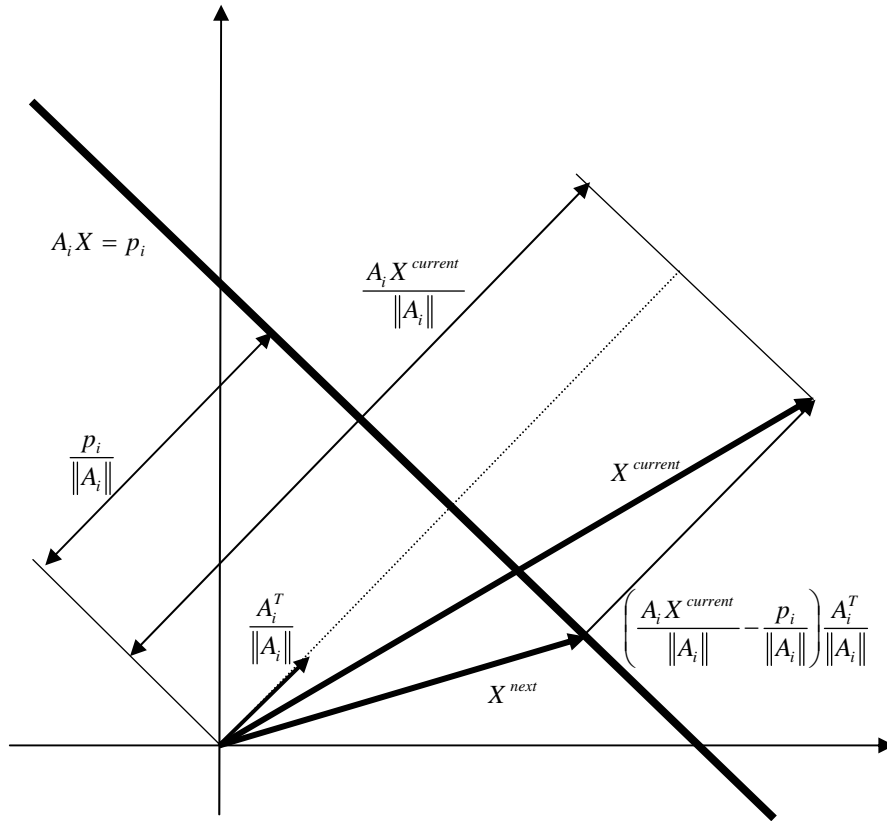


图 6.20 ART 算法示意图。

ART 算法有多种版本。其中一个版本是 SIRT (Simultaneous Iterative Reconstruction Technique 联立迭代重建方法)。这个方法并不是每考虑一条射



线就更新一次图像，而是考虑了所有条射线后才更新一次图像。另一个版本是每考虑一个投影角度就更新一次图像。还有一个版本是使用松弛因子（或称阻尼因子）用减小步长的办法来使算法更稳定些。**MART** 算法又是一个不同的算法。这里，字母 **M** 代表 **Multiplicative**，意思是“用乘法的”。这个算法是用乘法，而不是加法，来更新图像。**MART** 算法的一个优点是，如果初始图像是非负的，那么在往后的迭代中的图像都是非负的。

### 6.9.2 共轭梯度算法

CG（Conjugate Gradient 共轭梯度）算法是解下面这个正交方程组

$$A^T A X = A^T P。$$

令  $M = A^T A$  和  $B = A^T P$ 。正交方程组可写成

$$M X = B。$$

矩阵  $M$  是个实对称的正定矩阵或半正定矩阵。下面是 CG 算法的实现步骤。

设立初始条件:

$$X^{(0)} = \bar{0}, \quad R_0 = B, \quad \text{和} \quad \Delta_0 = R_0。$$

这三个图像矩阵都是以一维的列矩阵形式表达的。

迭代过程 (for  $n = 1, 2, 3, \dots$  do) :

更新步长（标量） $\alpha_n$ ，它是两个标量的比

$$\alpha_n = (R_{n-1}^T R_{n-1}) / (A_{n-1}^T M \Delta_{n-1})。$$

更新图像

$$X^{(n)} = X^{(n-1)} + \alpha_n \Delta_{n-1}。$$

计算误差图像

$$R_n = R_{n-1} - \alpha_n M \Delta_{n-1}。$$

计算求搜索方向用的因子（标量） $\beta_n$

$$\beta_n = (R_n^T R_n) / (R_{n-1}^T R_{n-1})。$$

计算下次迭代要用的搜索方向

$$A_n = R_n + \beta_n A_{n-1}。$$

*endfor*

这个 CG 算法有下列性质：

(1) 随着迭代次数的增加，Krylov子空间随之阔大。Krylov子空间  $\kappa_n$  有下面等价的定义

$$\begin{aligned}\kappa_n &= \langle B, MB, M^2 B, \dots, M^{n-1} B \rangle \\ &= \langle X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}, \dots, X^{(n)} \rangle \\ &= \langle R_0, R_1, R_2, \dots, R_{n-1} \rangle \\ &= \langle A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \rangle\end{aligned}$$

式中  $\langle R_0, R_1, R_2, \dots, R_{n-1} \rangle$  表示由  $R_0, R_1, R_2, \dots, R_{n-1}$  张成的空间。

(2) 误差向量是相互正交的，也就是，

$$R_n^T R_j = 0, \quad j < n。$$

(3) 搜索方向是相互  $M$  共扼的，也就是，

$$A_n^T M A_j = 0, \quad j < n。$$

(4) 每一次迭代， $X^{(n)}$  都在 Krylov 子空间  $\kappa_n$  中使目标函数为极小值。因此，如果  $M$  是个  $m \times m$  的矩阵，CG 算法最多  $m$  次迭代就可收敛。

CG 算法最为出众的优点是其特别的搜索方向  $A_{n-1}$ 。在一维子空间  $X^{(n)} + \langle A_{n-1} \rangle$  中找到的极小值，实际上是整个 Krylov 子空间  $\kappa_n$  中的极小值。

### 6.9.3 ML-EM

在发射型断层成像领域中，发射型数据的 ML-EM 算法是最为有名的迭代算法，其表达式为

$$x_j^{\text{下一个}} = \frac{x_j^{\text{当前}}}{\sum_i a_{ij}} \sum_i a_{ij} \frac{p_i}{\sum_j a_{ij} x_j^{\text{当前}}},$$

式中，对  $j$  的求和是投影运算，与第6.9.1节中的  $Ax$  完全相同，而对  $i$  的求和是反投影运算。这个算法用比值的形式来比较投影数据  $p_i$  与对当前估计的图像所做的投影运算  $Ax$ 。这个比值再被反投影到图像空间。求和式  $\sum_i a_{ij}$  是把常数 1 反投影到图像空间。这两个反投影的图像之比就是修正因子，用来更新当前的图像。

我们在下面给出发射型投影数据的 ML-EM 算法的推导。如果  $p$  是服从泊松分布的一个随机变量，则其概率分布函数是

$$\text{Prob}(p | \lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^p}{p!},$$

式中， $\lambda$  是该随机变量的期望值（即均值）。对于一个成像问题  $AX = P$  来说，每一个图像像素发出的光子数是一个独立的泊松随机变量，而每一个测量值  $p_i$  都可看成是这些变量的和。测量值  $p_i$  可以写成

$$p_i = \sum_j c_{ij},$$

这里， $c_{ij}$  是一个泊松随机变量，其期望值是

$$\lambda_{ij} = E(c_{ij}) = a_{ij} x_j.$$

注意， $x$  不是随机的。

我们来建立一个似然函数，即所有随机变量  $c_{ij}$  的联合概率分布函数：

$$\text{Prob} = \prod_{i,j} e^{-\lambda_{ij}} \frac{\lambda_{ij}^{c_{ij}}}{c_{ij}!} = \prod_{i,j} e^{-a_{ij} x_j} \frac{(a_{ij} x_j)^{c_{ij}}}{c_{ij}!}.$$

对这个似然函数取对数，就可得到

$$\ln(\text{Prob}) = \sum_{i,j} (c_{ij} \ln(a_{ij}x_j) - a_{ij}x_j) - \sum_{i,j} \ln(c_{ij}!)。$$

等式右边的第二个求和项  $\sum_{i,j} \ln(c_{ij}!)$  不含要估值的参数  $x_j$ ；因而把它扔掉并不会改变对似然函数求极大值的问题。为了求最大似然解  $x_j$ ，我们要对下面的目标函数求极大值：

$$L = \sum_{i,j} (c_{ij} \ln(a_{ij}x_j) - a_{ij}x_j)。$$

“E”步骤：

在上面的目标函数表达式中含有随机变量  $c_{ij}$ ，这对我们求极值大为不便。

“E”（Expectation 求期望值）步骤就是把随机变量  $c_{ij}$  用其期望值来代替。这个期望值要用测量值  $p_i$  和当前的参数估值  $x_j$  来计算。具体地说，就是把  $c_{ij}$  替换为

$$E(c_{ij} | p_i, X^{\text{当前}}) = \frac{a_{ij}x_j^{\text{当前}}}{\sum_k a_{ik}x_k^{\text{当前}}} p_i。$$

这样一来，在完成的“E”步骤之后，目标函数就变成了

$$E(L | P, X^{\text{当前}}) = \sum_{i,j} \left( \frac{a_{ij}x_j^{\text{当前}}}{\sum_k a_{ik}x_k^{\text{当前}}} p_i \ln(a_{ij}x_j) - a_{ij}x_j \right)。$$

“M”步骤：

为了对新的目标函数  $E(L | P, X^{\text{当前}})$  求极大值，我们要对参数  $x_j$  求偏导，并令偏导的值为零。即

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E(L|P, X^{\text{当前}})}{\partial x_j} &= \sum_i \left( \frac{a_{ij} x_j^{\text{当前}}}{\sum_k a_{ik} x_k^{\text{当前}}} p_i \frac{a_{ij}}{a_{ij} x_j} - a_{ij} \right) \\
&= \frac{1}{x_j} \sum_i \left( \frac{a_{ij} x_j^{\text{当前}}}{\sum_k a_{ik} x_k^{\text{当前}}} p_i - a_{ij} \right) \\
&= 0。
\end{aligned}$$

从中解出  $x_j$ ，就可最后的到 ML-EM 算法：

$$x_j = \frac{x_j^{\text{当前}}}{\sum_i a_{ij}} \sum_i a_{ij} \frac{p_i}{\sum_j a_{ij} x_j^{\text{当前}}}。$$

其实，用乘法进行图像更新的 ML-EM 算法也可以写成用加法进行图像更新的 ML-EM 算法。这样一来，它看上去就象一个梯度下降 算法了：

$$X^{\text{下一个}} = X^{\text{当前}} + S^{\text{当前}} A^T \Lambda^{\text{当前}} (P - AX^{\text{当前}})，$$

其中，步长为

$$S^{\text{当前}} = \text{diag}\{x_j^{\text{当前}} / \sum_i a_{ij}\}，$$

根据噪声方差算出的权函数为

$$\Lambda^{\text{当前}} = \text{diag}\left\{1 / \sum_k a_{ik} x_k^{\text{当前}}\right\} \approx \text{diag}\{1 / p_i\}。$$

在实际的数据采集过程中，测量噪声并不严格地遵守高斯分布或泊松分布。作者个人认为，测量噪声的分布函数是什么并不重要。重要的是要知道噪声的方差，因为方差要用来对测量数据进行加权。举例来说，有一个成像系统，其测量数据  $p_i$  的噪声方差是，

$$(p_i \text{ 的方差}) = s_i \bar{p}_i，$$

式中， $s_i$  是系统的一个比例因子， $p_i$  不见得服从泊松分布， $\bar{p}_i$  是  $p_i$  的期望值。根据成像方程

$$\sum_k a_{ik} x_k = p_i，$$

我们可以对 ML-EM 算法进行修正，并得到一个更一般的图像重建算法：

$$x_j^{\text{下一个}} = \frac{x_j^{\text{当前}}}{\sum_i a_{ij} \frac{1}{s_i}} \sum_i a_{ij} \frac{p_i}{s_i \sum_j a_{ij} x_j^{\text{当前}}}。$$

如果我们把这个修正的算法写成用加法进行图像更新的形式，其根据噪声方差算出的权函数就是

$$\Lambda^{\text{当前}} = \text{diag} \left\{ 1 / \left( s_i \sum_k a_{ik} x_k^{\text{当前}} \right) \right\} \approx \text{diag} \{ 1 / (s_i p_i) \}。$$

### 6.9.4 OS-EM

对 ML-EM 算法稍微修改一下就可以得到其“有序子集”的变形：

$$x_j^{\text{下一个}} = \frac{x_j^{\text{当前}}}{\sum_{i \in S_k} a_{ij}} \sum_{i \in S_k} a_{ij} \frac{p_i}{\sum_j a_{ij} x_j^{\text{当前}}},$$

式中， $S_k$  表示投影数据的第  $k$  个子集。

### 6.9.5 MAP (Green 的迟一步算法)

只要在分母加一个惩罚项，ML-EM 算法就可改造成一个 MAP（即贝叶斯）算法：

$$x_j^{\text{下一个}} = \frac{x_j^{\text{当前}}}{\sum_i a_{ij} + \beta \frac{\partial U(X^{\text{当前}})}{\partial x_j^{\text{当前}}}} \sum_i a_{ij} \frac{p_i}{\sum_j a_{ij} x_j^{\text{当前}}},$$

式中， $U(X)$  是第6.8节所定义的能量函数， $\beta$  是控制参量。严格说来，这不是一个真正的 MAP 算法，因为函数  $U$  按理说应该用更新后的图像  $X^{\text{下一个}}$  来

计算，而我们还不知道  $X^{T^{-1}}$  是什么。所谓“迟一步”就是指迟一步计算能量函数。

### 6.9.6 匹配的和匹配的投影运算与反投影运算对

这是一个有争议的话题。这有一点象宗教信仰，你如果相信并努力去实践，确实能得到好处。如果你不相信，就对它嗤之以鼻好了。在离散的情况下，投影运算就是乘以成像矩阵  $A$  而反投影运算就是乘以转置矩阵  $A^T$ 。当反投影矩阵是投影矩阵的转置的话，这两个矩阵（或，这两个运算，这两个算子）就称为匹配的。当反投影矩阵不是投影矩阵的转置矩阵的话，这两个矩阵（或，这两个运算，这两个算子）就称为不匹配的。

在解析算法中，图像的像素是一个点。图像并没有被离散化。它的投影算子，虽然没有出现在算法中，是对连续图像的积分。它的匹配的反投影算子也把像素看成为一个点。这样的反投影算子有时被称为由像素决定的反投影算子。在像素决定的反投影算子的实现中，我们以一个像素为出发点，然后找到它在探测器上的响应的位置，并从那里到反投影数值。

在迭代算法中，图像的像素是一个面积，而不是一个点。它的投影算子每个探测元都对应于一条射线。这条射线与图像像素相重叠的部分就是该图像像素对该探测元的贡献。这样的投影算子有时被称为由射线决定的投影算子。它的匹配的反投影算子就是由射线决定的反投影算子。

如果让投影算子（即矩阵  $A$ ）对成像的几何结构和物理效应做尽量准确的建模，那么非随机的建模误差就会大大减小。这一点是没有争议的。问题是应不应该用不匹配的反投影算子。在实际应用中，两方面的例子都有。在一些例子中，使用不匹配的投影/反投影对比使用匹配的投影/反投影对运算量要小，而且有较少的伪影。但在另一些例子中，使用不匹配的投影/反投影对比使用匹配的投影/反投影对却有较多的伪影。我们需要提醒读者的是，使用匹配的和匹配的投影/反投影对所得到的重建图像一般来说是不同的。

很显然，在一个迭代算法中，我们不能随便抓一个反投影算子就拿来用。例如，用扇形束的反投影算子来重建平行光束的图像就肯定不行。选择反投影算子的最低要求是先投影再反投影的运算只能让图形变模糊，不能让图形造成畸变，也不能有其它移动（如平移，旋转）。如果一个投影/反投影对施用于一个点源上，其结果只能是在原位置上变得模糊一些而已。

接下来，我们来看一看当我们更换一个反投影算子时，方程组  $AX=P$  的解究竟会如何变化。让我们来考虑下面这个改动过的 Landweber 迭代算法，其中，反投影矩阵是  $B^T$ ，但  $B^T$  不见得是  $A^T$ 。这个算法本质上是梯度下降法：

$$X^{\text{下一个}} = X^{\text{当前}} + SB^T(P - AX^{\text{当前}}),$$

式中， $S = \text{diag}\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  是个对角矩阵，主对角线上的元素都是正实数。它的第  $j$  个  $s_j$  元素控制着第  $j$  个未知数（即第  $j$  个图像像素）的迭代更新步长。定义矩阵  $T$  为

$$T = I - SB^T A,$$

式中  $I$  是单位矩阵。那么，这个改动过的 Landweber 迭代算法每次迭代后的值有个一般表达式：

$$X^{(k+1)} = T^{k+1} X^{(0)} + (T^k + \dots + T + I)SB^T P。$$

这里， $k$  是迭代次数， $X^{(k+1)}$  就是  $X^{\text{下一个}}$ ， $X^{(k)}$  就是  $X^{\text{当前}}$ ， $X^{(0)}$  就是初始条件（即初始图像），等等。这个算法会收敛当且仅当  $\max_i \{|\lambda_i|\} < 1$ ， $i=1, 2, \dots, n$ ，其中  $\lambda_i$  是方阵  $T$  的特征值。如果  $B^T A$  的特征值全是正值，只要步长  $S$  取得足够小，那么这个收敛条件总是可以满足的。当这个算法收敛以后，方程组的解是

$$X^{(\infty)} = (B^T A)^{-1} B^T P,$$

这个解对反投影矩阵  $B^T$  的依赖性很强。在  $A^{-1}$  和  $B^{-1}$  都存在的很特殊的情况下，方程组的解

$$X^{(\infty)} = A^{-1} P$$

才与反投影矩阵  $B^T$  无关。如果  $B^T A$  的特征值有负值的话，矩阵  $T$  所对应的特征值就会大于 1，这个算法就会发散。

在一般情况下，如果使用不匹配的投影/反投影对，最后收敛的解和中间结果都与反投影算子有关。匹配的投影/反投影对是解下面这个方程组：

$$A^T A X = A^T P,$$

而不匹配的投影/反投影对是解下面这个不一样方程组：



$$B^T A X = B^T P。$$

为了加快算法的收敛速度，有人把斜坡滤波和反投影结合起来，看成一个新的反投影算子。这个新的反投影算子是先做斜坡滤波，再做匹配的反投影。

把不匹配的投影/反投影对与匹配的投影/反投影对做个比较，它们对原方程组施加了不同的权函数，进而有不同的噪声效应。它们在采样和数据插值等方面也有不同的性质。这些差别对重建的图像有多大影响，要看具体的成像问题而定。该不该使用不匹配的反投影算子，和使用什么样的反投影算子要具体问题做具体分析。

## 6.10\* 利用 $l_0$ 极小化来重建极度欠采样数据

从文献上我们看到有人只用 10 个角度的投影数据就能相当准确地重建出一个 256x256 的图像。这不是在变魔术吧？因为象这样的成像问题一般至少需要 100 个角度的投影数据呢。

让我们看看他们是怎么做的。他们把成像问题叙述成一个求条件极小值的问题：

$$\min_X \|\psi X\|_0, \quad \text{约束条件: } AX = P$$

式中， $\|\bullet\|_0$  是 0 伪范数， $\psi$  是稀疏变换。0 伪范数的概念不难理解。它就是向量中非零分量的个数。举例来说，如果  $\bar{v} = [3, 0, 0, 1, 7]$ ， $\bar{v}$  中有 3 个非零元素，所以  $\|\bar{v}\|_0 = 3$ 。

这种方法的窍门在于使用了一个特别的稀疏变换  $\psi$ 。这个变换没有什么特别的定义，它可以是任何数学变换，只要它能把一个普通的图像变成一个稀疏的图像，其中决大多数（比如，97%）的像素是零。

如果一个普通的图像是个分段常数的图像（也就是说，这个图像可被分割成一些子区域，在每一个子区域内，像素的值是同一个常数），那么你就可以用  $\|\nabla\|$ （即梯度的幅度）做为稀疏变换  $\psi$ （图6.21）。

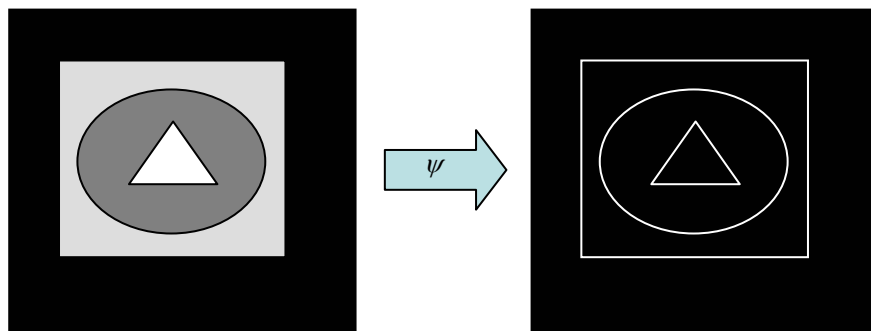


图 6.21 稀疏变换把原本图像中的一些本质的信息提取出来变成一个稀疏的图像。

一个实际的医学图像并不是一个分段常数的图像。它的梯度图像并不那么稀疏。所以，在实际应用中要找到一个稀疏变换  $\psi$  是个十分棘手的事。

另一个难题是如何求解  $l_0$  极小化问题（即在有约束条件的情况下求 0 伪范数的极小值）。我们还真不知道怎么有效地求它的极小值。我们通常是用  $l_2$  模（即 2 范数）来建立目标函数，它是个象  $\sum_i \|v_i\|^2$  那样的最小二乘函数，运用起来十分方便。你想干什么都行。象求导数之类的运算，简直是易如反掌。但是，对高度欠采样的数据用  $l_2$  模建立的目标函数结果并不理想。

另一个常用的选择就是  $l_1$  模（即 1 范数） $\left\{ \sum_i |v_i| \right\}$ 。它选择最优图像的本领虽不如  $l_0$  伪模，但比  $l_2$  模要强。话又说回来，在做数学运算的时候， $l_1$  模不象  $l_2$  模那么方便，但要比  $l_0$  伪模方便得太多了。

现在我们用两个例子来看看  $l_2$  模， $l_1$  模，和  $l_0$  伪模之间的不同。模是对距离或长度的某种度量。我们先看一个例子。我们考虑二维  $x$ - $y$  坐标系中的一个点  $(3, 4)$ 。我们来求这个点到原点  $(0, 0)$  的“距离”。如果我们用  $l_2$  模来定义距离，那么这个点的  $l_2$  距离是  $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 。如果我们用  $l_1$  模来定义距离，那么这个点的  $l_1$  距离是  $|3| + |4| = 7$ 。如果我们用  $l_0$  伪模来定义距离，那么这个点的  $l_0$  距离是  $1 + 1 = 2$ 。

我们再看一个例子。我们考虑二维  $x$ - $y$  坐标系中的另一个点  $(0, 4)$ 。我们来求这个点到原点  $(0, 0)$  的“距离”。如果我们用  $l_2$  模来定义距离，那么这个点的  $l_2$  距离是  $\sqrt{0^2 + 4^2} = 4$ 。如果我们用  $l_1$  模来定义距离，那么这个点的  $l_1$  距离是  $|0| + |4| = 4$ 。如果我们用  $l_0$  伪模来定义距离，那么这个点的  $l_0$  距离是  $0 + 1 = 1$ 。

图6.22显示了用  $l_2$  模,  $l_1$  模, 和  $l_0$  伪模定义的单位圆。除了  $l_2$  模的单位圆外, 另外两个单位圆看上去根本就不象圆。某一种度量要成为模(即范数)它一定要满足一组公理。一个伪模几乎就是一个模了, 只是它不满足其中一个公理, 即三角不等式公理。

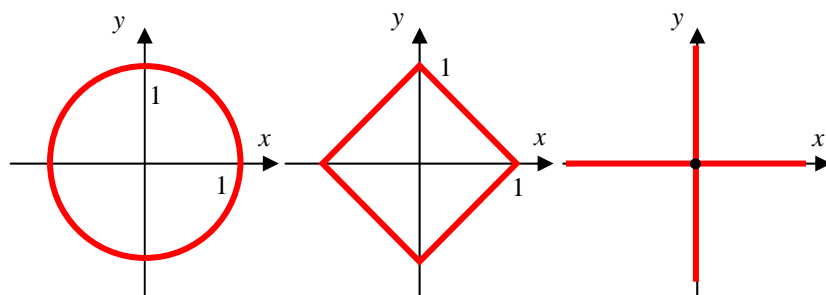


图 6.22 所谓单位圆是指与原点距离为 1 的点的轨迹。左图:  $l_2$  模的单位圆。中图:  $l_1$  模的单位圆。右图:  $l_0$  伪模的单位圆。

在实际成像过程中, 模型  $AX = P$  总是不相容的, 一是因为有数据的随机噪声, 二是因为成像模型  $AX$  的非随机误差。所以用  $AX = P$  作为一个最优化问题的约束条件来是不合适的。这个时候, 我们只能用贝叶斯方法来建立目标函数。我们可以用第6.8节的方法建立一个目标函数, 所不同的是, 我们要把那里的能量函数  $U(X)$  换成图象  $X$  的稀疏变换的某一个模。如果图象  $X$  的稀疏变换的这个模可以求导数的话, 我们就可以用第6.9.5节所介绍的“迟一步”算法来重建图像。

你也许听到过全变差极小化方法。所谓 TV (Total Variation 全变差) 范数实际上就是梯度的  $l_1$  范数:

$$TV(v) = \|\nabla v\|_1 = \sum_i |\nabla v_i|。$$

在实际的 TV 范数计算中, 要引进一个很小的参数  $\varepsilon$

$$TV(v) \approx \sum_i \sqrt{(\nabla v_i)^2 + \varepsilon^2} ,$$

这样的话, 就可以对 TV 范数求导了。应用第6.9.5节的 Green 迟一步 MAP 算法, 就可得到一个由全变差范数来约束的 EM 算法, 即 TV-EM 算法:

$$x_j^{\text{下一个}} = \frac{x_j^{\text{当前}}}{\sum_i a_{ij} + \beta \frac{\partial TV(X^{\text{当前}})}{\partial x_j^{\text{当前}}}} \sum_i a_{ij} \frac{p_i}{\sum_j a_{ij} x_j^{\text{当前}}}。$$

为了求 TV 范数, 对于二维图像  $X$ , 我们在这里暂时把每一个像元用双下标表示为  $x_{k,l}$ 。那么, TV-EM 算法中要用到的偏导数就可以这样得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial TV(X)}{\partial x_{k,l}} &= \frac{x_{k,l} - x_{k-1,l}}{\sqrt{(x_{k,l} - x_{k-1,l})^2 + (x_{k-1,l+1} - x_{k-1,l})^2 + \varepsilon^2}} \\ &+ \frac{x_{k,l} - x_{k,l-1}}{\sqrt{(x_{k+1,l-1} - x_{k,l-1})^2 + (x_{k,l} - x_{k,l-1})^2 + \varepsilon^2}} \\ &- \frac{x_{k+1,l} + x_{k,l+1} - 2x_{k,l}}{\sqrt{(x_{k+1,l} - x_{k,l})^2 + (x_{k,l+1} - x_{k,l})^2 + \varepsilon^2}}。 \end{aligned}$$

用高度欠采样的数据进行图像重建是一个很吸引人的研究领域。

## 6.11 例题

**例题 1** 对任何矩阵  $A$ , 其广义逆  $A^+$  必须满足下面四个性质:

$$\begin{aligned} AA^+A &= A, \\ A^+AA^+ &= A^+, \\ (A^+A)^* &= A^+A, \\ (AA^+)^* &= AA^+。 \end{aligned}$$

这里,  $M^*$  是矩阵  $M$  的赫米特转置矩阵 (也称作共扼转置)。对于实矩阵来说, 它就是转置矩阵而已。下面, 我们假设矩阵  $A$  是个实矩阵。

请验证如果  $(A^T A)^{-1}$  存在的话,  $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$  是矩阵  $A$  的广义逆矩阵。请验证如果  $(AA^T)^{-1}$  存在的话,  $A^+ = A^T (AA^T)^{-1}$  是矩阵  $A$  的广义逆矩阵。

*证明*

情形 1: 如果  $(A^T A)^{-1}$  存在的话, 矩阵  $A$  的广义逆是  $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$ 。

性质 1:

$$\text{左} = AA^+A = A(A^T A)^{-1} A^T A = A(A^T A)^{-1} (A^T A) = A = \text{右}$$

性质 2:

$$\begin{aligned} \text{左} &= A^+AA^+ = (A^T A)^{-1} A^T A (A^T A)^{-1} A^T = (A^T A)^{-1} (A^T A) (A^T A)^{-1} A^T \\ &= (A^T A)^{-1} A^T = A^+ = \text{右} \end{aligned}$$

性质 3:

$$\begin{aligned} \text{左} &= (A^+A)^T = \left( (A^T A)^{-1} A^T A \right)^T = \left( (A^T A)^{-1} (A^T A) \right)^T = I \\ \text{右} &= A^+A = (A^T A)^{-1} A^T A = (A^T A)^{-1} (A^T A) = I \end{aligned}$$

性质 4:

$$\begin{aligned} \text{左} &= (AA^+)^T = \left( A(A^T A)^{-1} A^T \right)^T = A \left( (A^T A)^{-1} \right)^T A^T \\ &= A \left( (A^T A)^T \right)^{-1} A^T = A(A^T A)^{-1} A^T = AA^+ = \text{右} \end{aligned}$$

情形 2: 如果  $(AA^T)^{-1}$  存在的话, 矩阵  $A$  的广义逆是  $A^+ = A^T (AA^T)^{-1}$ 。

性质 1:

$$\text{左} = AA^+A = AA^T (AA^T)^{-1} A = (AA^T) (AA^T)^{-1} A = A = \text{右}$$

性质 2:

$$\begin{aligned} \text{左} &= A^+AA^+ = A^T (AA^T)^{-1} AA^T (AA^T)^{-1} = A^T (AA^T)^{-1} (AA^T) (AA^T)^{-1} \\ &= A^T (AA^T)^{-1} = A^+ = \text{右} \end{aligned}$$

性质 3:

$$\begin{aligned} \text{左} &= (A^+A)^T = \left( A^T (AA^T)^{-1} A \right)^T = A^T \left( (AA^T)^{-1} \right)^T A \\ &= A^T \left( (AA^T)^T \right)^{-1} A = A^T (AA^T)^{-1} A = A^+A = \text{右} \end{aligned}$$

性质 4:

$$\begin{aligned} \text{左} &= (AA^+)^T = \left( A A^T (AA^T)^{-1} \right)^T = \left( (AA^T) (AA^T)^{-1} \right)^T = I \\ \text{右} &= AA^+ = AA^T (A^T A)^{-1} = (AA^T) (A^T A)^{-1} = I \end{aligned}$$

**例题 2** 在第6.1节中，我们用 SVD 把矩阵  $A_{m \times n}$  分解成  $A_{m \times n} = U_{m \times m} \Sigma_{n \times n}^T$ ，并定义  $A^+ = V \Sigma^+ U^T$ （假定  $\sigma_r > 0$ ）以及  $\Sigma_{n \times m}^+ = \begin{bmatrix} D_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ ，其中， $D_r = \text{diag}\{\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \dots, 0\}$ 。根据例题1中的四条性质， $A^+ = V \Sigma^+ U^T$  是不是矩阵  $A$  的广义逆矩阵？在什么条件下  $A^+ = V \Sigma^+ U^T$  是矩阵  $A$  的广义逆矩阵？

解

把性质 1 应用到  $A^+ = V \Sigma^+ U^T$  和  $A_{m \times n} = U_{m \times m} \Sigma_{n \times n}^T$  上，我们得到

$$AA^+A = U \Sigma V^T V \Sigma^+ U^T U \Sigma V^T = U \Sigma (V^T V) \Sigma^+ (U^T U) \Sigma V^T = U \Sigma \Sigma^+ \Sigma V^T。$$

为了满足  $AA^+A = A^+$ ，我们必须有

$$\Sigma \Sigma^+ \Sigma = \Sigma，$$

此式等价于

$$\begin{aligned} & \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r, \dots, \sigma_m\} \text{diag}\{\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \dots, 0\} \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r, \dots, \sigma_m\} \\ &= \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r, \dots, \sigma_m\}, \end{aligned}$$

即

$$\sigma_{r+1} = \dots = \sigma_m = 0。$$

因为

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_i \geq \dots \geq 0，$$

所以，性质 1 等价于

$$\sigma_{r+1} = 0 \text{ 和 } \sigma_r > 0。$$

我们再来看看性质 2:

$$A^+ A A^+ = A^+，$$

此式等价于

$$\text{diag}\{\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \dots, 0\} = \text{diag}\{\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \dots, 0\}。$$

这个性质总是满足的。

性质 3  $(A^+A)^* = A^+A$  和性质 4  $(AA^+)^* = AA^+$  都意味着

$$\text{diag}\{1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0\} = \text{diag}\{1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0\}，$$

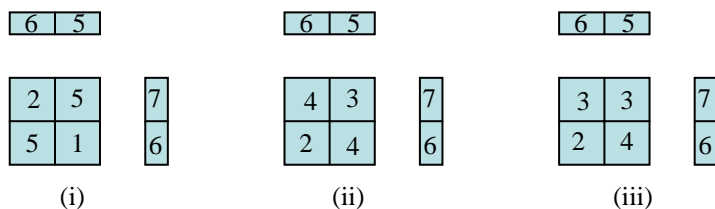
这个等式总是满足的。

把上面的讨论总结一下， $A^+ = V\Sigma^+U^T$  要成为矩阵  $A$  的广义逆矩阵需要满足条件  $A^+ = V\Sigma^+U^T$

$$\sigma_{r+1} = 0 \text{ 和 } \sigma_r > 0。$$

但是，在实际应用中，截断指标  $r$  总是选择得远远小于这个值（也就是说，一些很小的特征值被看做为零值了），以获得一个稳定的解。

**例题 3** 下面的图像都不满足投影数据。这三个解中，哪一个是最优解？（比较它们的  $\chi^2$ ）

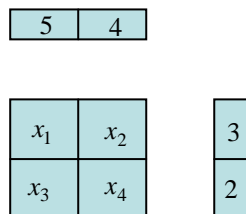


**Fig. 6.23** 这三个图像都试图去满足投影数据。

解

- i)  $\chi^2 = 0^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2 = 2, (\leftarrow \text{最优})$
- ii)  $\chi^2 = 0^2 + 0^2 + 2^2 + 0^2 = 4,$
- iii)  $\chi^2 = 1^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 = 6。$

**例题 4** 对图6.24所示的成像问题，找其最小二乘的解（即重建图像）。

图 6.24 一个  $2 \times 2$  矩阵的图像重建问题。

解

这个成像问题  $AX = P$  的成像矩阵  $A$  是

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

矩阵  $A$  的秩是 3。方程组  $AX = P$  是不相容的，因而这个问题无解。我们现在用奇异值分解（SVD）的办法找一个伪解。在 Matlab 中使用  $X = \text{pinv}(A) * P$  即可得到  $x_1 = 2.25$ ,  $x_2 = 1.75$ ,  $x_3 = 1.75$ , 及  $x_4 = 1.25$ 。

**例题 5** 设  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。求  $\bar{u}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  的共扼方向  $\bar{u}_1$ 。

解

共扼方向是用这个关系式定义的： $\bar{u}_0 \cdot (A^T A) \bar{u}_1 = 0$ ，式中

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

我们还知道

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0.$$



那么从  $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  就可解出

$$\bar{u}_1 = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ -1 \end{bmatrix}。$$

（如果你愿意的话，你可以把  $\bar{u}_1$  变成单位向量。）

矩阵  $A^T A$  确定了一个二次型，在这个题目里它是个椭圆。这个例题的用意是，对任意给定的一个初始方向，按  $A^T A$  所确定的二次型画一个椭圆。这个椭圆要与  $\bar{u}_0$  相切。如果你沿着共扼方向  $\bar{u}_1$  走的话，你就会走到椭圆的中心（图6.25）。

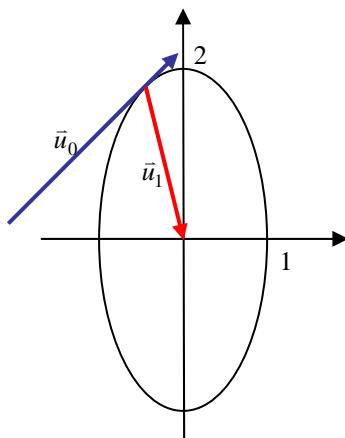


图 6.25 共扼方向。

**例题 6** 对于给定的初始图像和投影数据，依照 ML-EM 算法，计算做一次迭代后所得的图像。

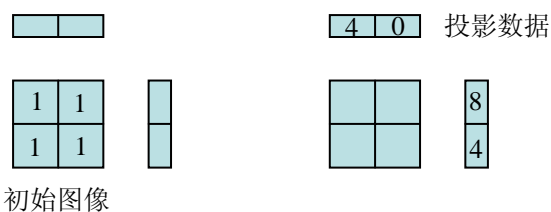
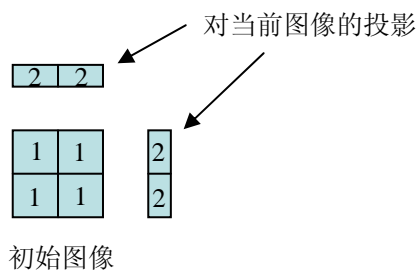


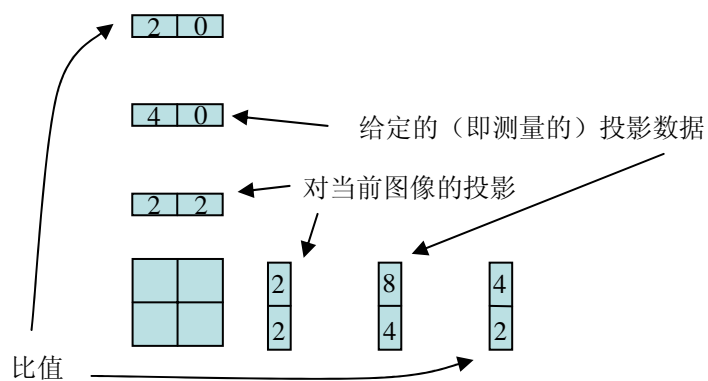
图 6.26 例题6的初始图像和投影数据。

解

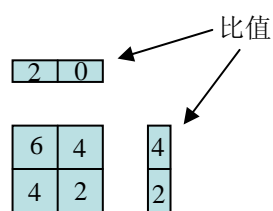
第一步，计算当前图像的投影。



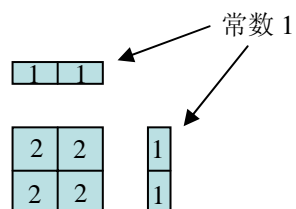
第二步，计算给定的测量数据与当前图像的投影数据的比值。



第三步，对比值做反投影。



第四步，对常数 1 做反投影。



第五步，计算从第三步得到的图象与从第四步得到的图象的比值（即逐个像素地做除法）。

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 4 \\ \hline 4 & 2 \\ \hline \end{array} \div \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

第六步，用逐个像素做乘法的方式更新图像（注意，这不是做矩阵乘法）。

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

**例题 7** 用贝叶斯方法为下面的方程组找一个稳定的解

$$\begin{cases} x_1 + 0.01x_2 = 1.2 \\ x_1 + 0.001x_2 = 1 \end{cases}。$$

解

我们假设测量值可能会有误差，那么这个方程组可以写成

$$\begin{cases} x_1 + 0.01x_2 = 1.2 + \delta_1 \\ x_1 + 0.001x_2 = 1 + \delta_2 \end{cases}。$$

这个改动过的方程组的解是

$$\begin{cases} x_1 = 0.978 - 0.111\delta_1 + 1.11\delta_2 \\ x_2 = 22.22 + 111.1\delta_1 - 111.1\delta_2 \end{cases}。$$

可以看出， $x_2$  对测量噪声很敏感。如果我们做一个先验的假设“ $x_1$  的值与  $x_2$  的值很接近”，并用贝叶斯方法来解决这个问题。这个先验的假设代表了我们在采集数据之前就有的知识或信心。它也可以看做是个概率分布。这里我们把它当作惩罚函数项放在目标函数中：

$$F(x_1, x_2) = (x_1 + 0.01x_2 - 1.2 - \delta_1)^2 + (x_1 + 0.001x_2 - 1 - \delta_2)^2 + \beta(x_1 - x_2)^2。$$

请注意，式中的  $\beta$  并不是拉格朗日乘数，而是一个预先给定的常数。为了求  $F(x_1, x_2)$  的极小值，我们令  $\partial F / \partial x_1 = 0$  和  $\partial F / \partial x_2 = 0$ 。这使我们得到了一个新的不同的方程组：

$$\begin{bmatrix} 2 + \beta & 0.011 - \beta \\ 0.011 - \beta & 0.01^2 + 0.001^2 + \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1.2 + \delta_1) + (1 + \delta_2) \\ (0.01)(1.2 + \delta_1) + (0.001)(1 + \delta_2) \end{bmatrix}。$$

这个方程组的解取决于  $\beta$  的值，也取决于  $\delta_1$  和  $\delta_2$  的值。在下面的两个表格中，我们列出的一些 MAP 方法的解。

第一种情况：无噪声 ( $\delta_1 = \delta_2 = 0$ )

$\beta$	0	0.01	0.1	1	10	100
条件数	50000	200	22	5.7	22	200
$x_1$	0.978	1.094	1.094	1.094	1.094	1.094
$x_2$	22.222	1.178	1.103	1.095	1.094	1.094

第二种情况：有噪声 ( $\delta_1 = -\delta_2 = 0.2$ )

$\beta$	0	0.01	0.1	1	10	100
条件数	50000	200	22	5.7	22	200
$x_1$	0.733	1.094	1.095	1.095	1.095	1.095
$x_2$	66.667	1.357	1.122	1.098	1.096	1.095

把先验知识项加进目标函数后，方程组变得稳定些了。稳定的方程组对应着小的条件数。这个例子还告诉我们，使用先验知识改变了原问题。即使在没有噪声的情况下，MAP 方法的解与原问题的真正的解也不一样。如果你打算使用贝叶斯方法，一定要当心，保证所假设的先验知识是合理的。

**例题 8** 试证明，在每次 ML-EM 算法迭代之后，投影运算的结果的总和与原始投影数据的总和是一样的：

$$\sum_i \left( \sum_j a_{ij} x_j \right) = \sum_i p_i。$$

证明

$$\sum_i \sum_j a_{ij} x_j = \sum_i \sum_j a_{ij} \left( \frac{x_j^{\text{当前}}}{\sum_n a_{nj}} \sum_n a_{nj} \frac{p_n}{\sum_k a_{nk} x_k^{\text{当前}}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_j x_j^{\text{当前}} \frac{\sum_j a_{ij}}{\sum_n a_{nj}} \sum_n a_{nj} \frac{p_n}{\sum_k a_{nk} x_k^{\text{当前}}} \quad [\text{交换求和次序}] \\
&= \sum_j x_j^{\text{当前}} \sum_n a_{nj} \frac{p_n}{\sum_k a_{nk} x_k^{\text{当前}}} \quad [\because \sum_j a_{ij} = \sum_n a_{nj}] \\
&= \sum_n p_n \frac{\sum_j a_{nj} x_j^{\text{当前}}}{\sum_k a_{nk} x_k^{\text{当前}}} \quad [\text{交换求和次序}] \\
&= \sum_n p_n \circ
\end{aligned}$$

**例题 9** 用计算机模拟举例演示在 ML-EM 算法中，图像中分辨率的恢复速度与位置有关。

解

一个计算机产生的二维模型如图6.27所示，用此模型可用计算机产生投影数据，可加泊松噪声，也可不加噪声。在数据产生过程中没有考虑光束的衰减及散射，和系统的分辨率影响。也就是说，投影数据是理想的物体的线积分。图像有 256x256 个像素。投影数据产生在 256 个角度，均匀地分布在 360° 的区间内。

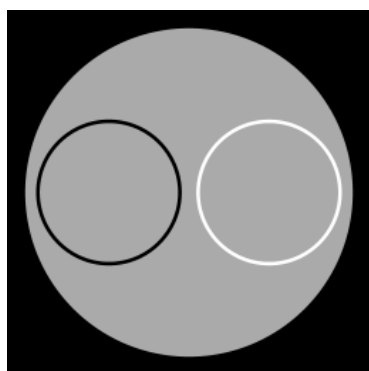


图 6.27 原本图像 (数学模型)。

图像是用 ML-EM 迭代算法重建的。图6.28中显示了两个重建的图像，左边那个用了 25 次迭代步骤，右边那个用了 250 次迭代步骤。

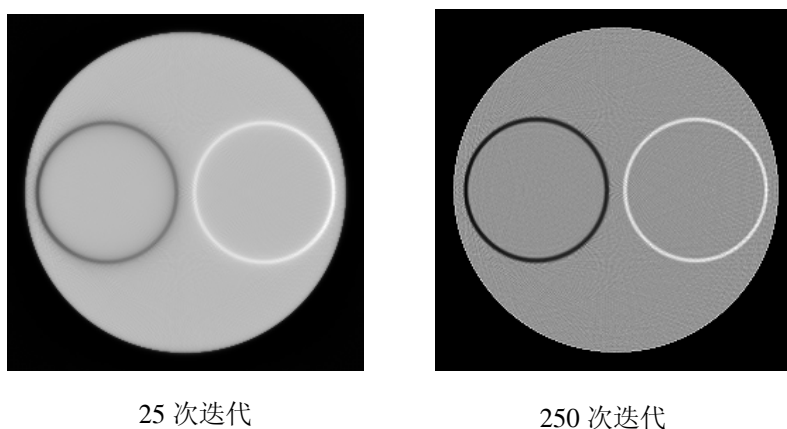


图 6.28 ML-EM 迭代算法的重建图像。

经过 250 次迭代以后，该算法就差不多收敛了，而且图像上的分辨率也比较均匀。如果算法在第 25 次迭代后马上停止，这时候算法还没有收敛，图像上的分辨率也不均匀。在物体的边缘分辨率高一些。在中心分辨率收敛得慢一些。

提早停止收敛的目的是控制噪声。这一点在图6.29中做了说明。图6.29中显示了两个图像。左边那个用了 25 次迭代步骤，右边那个用了 250 次迭代步骤。

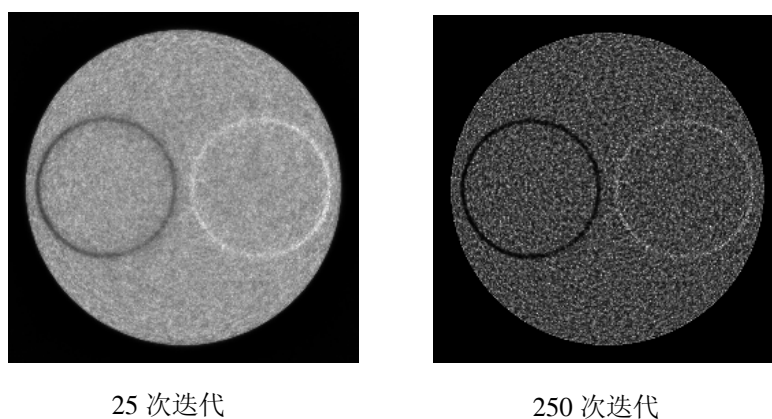


图 6.29 用 ML-EM 迭代算法重建的图像，它们用的是同样的含噪声的投影数据。

用250次迭代步骤得到的图像比用25次迭代步骤得到的图像噪声要多一些。如果我们对用250次迭代步骤得到的图像进行低通滤波，图像中的噪声降低了许多，但仍然保持着均匀的分辨率（图6.30）。所以，要一直迭代到收敛，再用低通滤波器来控制噪声。这是我们推荐的方法。

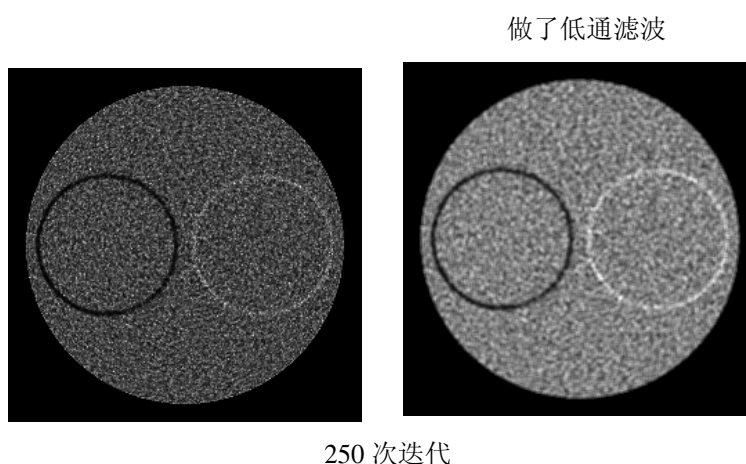


图 6.30 对用 250 次迭代步骤得到的图像进行低通滤波，所得的图像有均匀的分辨率而且噪声不大。

另一方面，当投影数据是理想的线积分时，二维平行光束的 FBP 算法所得到的图像具有均匀的分辨率（图6.31）。但是，当成像系统不是理想的，其分辨率和感光性都随位置而变，目前的 FBP 算法还不能足够精确地对系统建模，因而不能使重建的图像具有均匀的分辨率。

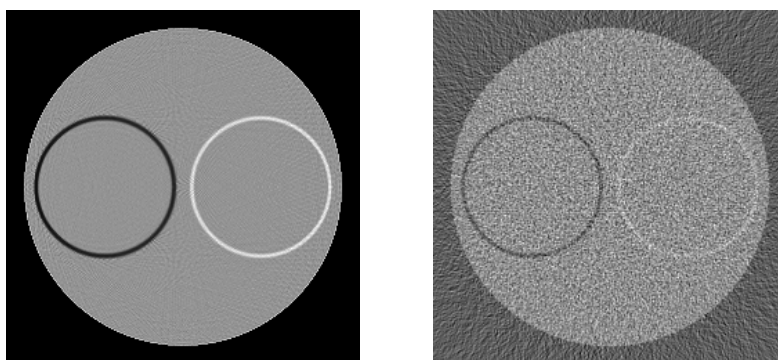


图 6.31 使用无噪声和有噪声的投影数据，FBP（先滤波后反投影）算法重建的图像。

## 6.12 小结

- 图像重建的解析算法与图像重建的迭代算法之间的主要区别在于对图像的模型化。在解析算法中，我们假设图像是连续的，每个像素只是一个点。这些离散的点是以图像显示为目的的。这些点的选择可以是随意的，与图像重建无关。但是，在迭代算法中，每个像素是个小面积。这个小面积在计算当前图像的投影数据时要用到。像素模型对重建图像的质量好坏影响很大。
- 图像重建的解析算法与图像重建的迭代算法之间的另一个区别是解析算法着力对一个积分方程求解，而迭代算法着力对一个线性方程组求解。
- 一般来说，解一个线性方程组比解一个积分方程要容易。我们可以用一个线性方程组把真实的成像几何结构与成像物理效应模型化。如果把这些效应放到积分方程中去，这个积分方程就不见得有闭合形式的解了。所以，迭代算法比解析算法可以解决更实际的成像问题，迭代算法比解析算法得到的重建图像更为准确。
- 迭代算法是用来对目标函数做极小化的。目标函数可以有效地考虑测量值的噪声影响。目前的解析算法还不能对噪声建模，对噪声的控制只能靠在频率域中加窗函数的手段来达到目的。
- 在发射型断层成像的图像重建中，ML-EM 和 OS-EM 迭代算法的使用率最高。这两个算法都假设了泊松噪声模型。



- 即使目标函数已经包含了噪声模型，重建的图像中还是有很多噪声的。一般来说，可以用五种方法来控制噪声。
- 第一种方法是在算法收敛以前就提前停止迭代运算。这个方法简单易行，但它的缺点是它得到的图像中的分辨率可能不均匀。一个补救的办法是让算法迭代到收敛，再用低通滤波器来抑制高频噪声。
- 第二种方法是用平滑而互相重叠的像素来代替平坦而不重叠的像素。平坦而不重叠的像素可以人为地往图像中引入很多高频分量。平滑而互相重叠的像素就可以去掉这些人为造成的高频分量。但是，这个方法提高了运算复杂度。一个补救方案是仍旧采用传统的平坦而不重叠的像素，但对每一个反投影的图像都做低通滤波。
- 第三种方法是在投影/反投影中对成像的几何结构和物理效应做更精确的建模。这个方法的主要目的是减小投影模型与测量数据之间的非随机误差。
- 第四种方法是应用正确的噪声模型来建立目标函数。作者的个人观点是，用什么联合概率密度函数来建立目标函数并不十分重要，我们不需要过分担心噪声的分布是否严格遵守高斯分布，或是否严格遵守泊松分布。重要的是测量值的噪声方差一定要准确，一定要用准确的噪声方差对测量数据进行加权。
- 第五种方法是使用先验知识。如果投影数据没有携带足够的图像信息，这可能由于没有足够的测量数据，或数据的噪声太大。物体的先验知识可以用来增补关于图像的信息。这可以使迭代算法更加稳定。但是，我们一定要小心，如果这个先验知识并不准确，它可能误导算法，使其收敛到一个错误的图像上去。
- 在阅读了本章以后，读者应至少知道描述成像的方程组是如何建立的，以及 ML-EM 迭代算法是如何工作的。

## 参考文献

- Bai C, Zeng GL, Gullberg GT, DiFilippo F, Miller S (1998) Slab-by-slab blurring model for geometric point response and attenuation correction using iterative reconstruction algorithms. IEEE Trans Nucl Sci 45:2168-2173

- Barrett HH, Wilson DW, Tsui BMW (1994) Noise properties of the EM algorithm, I. Theory. *Phys Med Biol* 39:833-846
- Beekman F, Kamphuis C, Viergever M (1996) Improved SPECT quantitation using fully three-dimensional iterative spatially variable scatter response compensation. *IEEE Trans Med Imaging* 15:491-499
- Byrne CL (1996) block-iterative methods for image reconstruction from projections. *IEEE Trans Imaging Processing* 5:792-794
- Candès E, Romberg J, Tao T (2006) Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Trans Inf Theory* 52:489-509
- Censor Y, Eggermont PPB, Fordon D (1983) Strong underrelaxation in Kaczmarz's method for inconsistent system. *Numer Math* 41:83-92
- Chang L (1979) Attenuation and incomplete projection in SPECT. *IEEE Trans Nucl Sci* 26:2780-2789
- Chiao PC, Rogers WL, Fessler JA, Clinthorne NH, Hero AO (1994) Model-based estimation with boundary side information or boundary regularization. *IEEE Trans Med Imaging* 13:227-234
- Dempster AP, Laird NM, Rubin DB (1977) Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *J Royal Stat Soc B* 39: 1-38
- DiBella E, Barclay A, Eisner R, Schaefer R (1996) A comparison of rotation-based methods for iterative reconstruction algorithms. *IEEE Trans Nucl Sci* 43:3370-3376
- Donoho D (2006) Compressed sensing. *IEEE Trans Inf Theory* 52:1289-1306
- Fessler J (1996) Mean and variance of implicitly defined biased estimators (such as penalized maximum likelihood): Applications to tomography. *IEEE Trans Image Processing* 5:493-506
- Fessler J, Hero A (1994) Space-alternating generalized expectation maximization algorithm. *IEEE Trans Sig Processing* 42:2664-2677
- Fessler JA, Rogers WL (1996) Spatial resolution properties of penalized-likelihood image reconstruction: Space-invariant tomography. *IEEE Trans Imaging Processing* 5: 1346-1358
- Frey EC, Ju ZW, Tsui BMW (1993) A fast projector-backprojector pair for modeling the asymmetric spatially-varying scatter response in SPECT imaging. *IEEE Trans Nucl Sci* 40:1192-1197
- Geman S, Geman D (1984) Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and Bayesian restoration of images. *IEEE Trans Patt Anal Mach Intell* 6:721-741
- Gilbert P (1972) Iterative methods for the reconstruction of three dimensional objects from their projections. *J Theor Biol* 36:105-117
- Gindi G, Lee M, Rangarajan A, Zubal IG (1991) Bayesian reconstruction of functional images using registered anatomical images as priors. In: Colchester ACF, Hawkes DJ (eds) *Information Processing in Medical Imaging*, Springer-Verlag, New York, 121-131
- Gordon R, Bender R, Herman GT (1970) Algebraic reconstruction techniques (ART) for three-dimensional electron microscopy and X-ray photography. *J Theor Biol* 29: 471-481
- Hebert TJ, Leahy R (1992) Statistic-based MAP image reconstruction from Poisson data using Gibbs priors. *IEEE Trans Sig Processing* 40:2290-2303
- Herman GT (1980) *Image Reconstruction from Projections: The Fundamentals of Computerized Tomography*, Academic Press, New York
- Hsieh YL, Zeng GL, Gullberg GT (1998) Projection space image reconstruction using strip functions to calculate pixels more "natural" for modeling the geometric response of the SPECT collimator. *IEEE Trans Med Imaging* 17: 24-44
- Hudson HM, Larkin RS (1994) Accelerated image reconstruction using ordered subsets of projection data. *IEEE Trans Med Imaging* 13:601-609
- Hwang DS, Zeng GL (2005) A new simple iterative reconstruction algorithm for SPECT transmission measurement. *Med Phys* 32:2312-2319
- Hwang DS, Zeng GL (2005) Reduction of noise amplification in SPECT using smaller detector bin size. *IEEE Trans Nucl Sci* 52:1417-1427
- Hwang DS, Zeng GL (2006) Convergence study of an accelerated ML-EM algorithm using bigger step size. *Phys Med Biol* 51:237-252

- Qi J (2003) A unified noise analysis for iterative image estimation. *Phys Med Biol* 48:3505-3519
- Kaczmarz S (1937) Angenaherte Aufosung von Systemen linearer Gleichungen. *Bull Acad Polon Sci A35*:355-357
- King, Miller TR (1985) Use of a nonstationary temporal Wiener filter in nuclear medicine. *Eur J Nucl Med* 10:458-461
- Lalush DS and Tsui BMW (1993) A generalized Gibbs prior for maximum a posteriori reconstruction in SPECT. *Phys Med Biol* 38:729-741
- Lalush DS and Tsui BMW (1994) Improving the convergence of iterative filtered backprojection algorithms. *Med Phys* 21:1283-1286
- Lange K (1990) Convergence of EM image reconstruction algorithms with Gibbs smoothing. *IEEE Trans Med Imaging* 9:439-446
- Lange K and Carson R (1984) EM reconstruction algorithms for emission and transmission tomography. *J Comput Assist Tomogr* 8:306-316
- Lewitt R (1992) Alternatives to voxels for image representation in iterative reconstruction algorithms. *Phys Med Biol* 37:705-716
- Lewitt RM, Muehllehner G (1986) Accelerated iterative reconstruction for positron emission tomography based on the EM algorithm for maximum likelihood estimation. *IEEE Trans Med Imaging* 5:16-22
- Liang Z (1993) Compensation for attenuation, scatter, and detector response in SPECT reconstruction via iterative FBP methods. *Med Phys* 20:1097-1106
- Liang Z, Jazczak R, Greer K (1989) On Bayesian image reconstruction from projections: uniform and nonuniform *a priori* source information. *IEEE Trans Med Imaging* 8:227-235
- Liow J, Strother SC (1993) The convergence of object dependent resolution in maximum likelihood based tomographic image reconstruction. *Phys Med Biol* 38:55-70
- Lucy LB (1974) An iterative technique for the rectification of observed distribution. *Astrophys J* 79:745-754
- Narayanan VM, King MA, Soare E, Byrne C, Pretorius H, Wernick MN (1999) Application of the Karhunen-Loeve transform to 4D reconstruction of gated cardiac SPECT images. *IEEE Trans Nucl Sci* 46:1001-1008
- Nuyts J, Michel C, Dupont P (2001) Maximum-likelihood expectation-maximization reconstruction of sinograms with arbitrary noise distribution using NEC-transformations. *IEEE Trans Med Imaging* 20:365-375
- Pan TS, Yagle AE (1991) Numerical study of multigrid implementations of some iterative image reconstruction algorithms. *IEEE Trans Med Imaging* 10:572-588
- Pan X, Wong WH, Chen CT, Jun L (1993) Correction for photon attenuation in SPECT: Analytical framework, average attenuation factors, and a new hybrid approach. *Phys. Med. Biol.* 38: 1219-1234
- Panin VY, Zeng GL, Gullberg GT (1999) Total variation regulated EM algorithm. *IEEE Trans Nucl Sci* 46:2202-2210
- Qi J, Leahy RM (1999) Fast computation of the covariance of MAP reconstructions of PET images. *Proc. SPIE* 3661:344-355
- Ruggardson WH (1972) Bayesian-based iterative method of image restoration. *J Opt Soc Am A* 62:55-59
- Shepp LA, Vardi Y (1982) Maximum likelihood estimation for emission tomography. *IEEE Trans Med Imaging* 1:113-121
- Snyder DL and Miller MI (1985) The use of sieves to stabilize images produced with the EM algorithm for emission tomography. *IEEE Trans Nucl Sci* 32:3864-3872
- Tanaka E (1987) A fast reconstruction algorithm for stationary positron emission tomography based on a modified EM algorithm. *IEEE Trans Med Imaging* 6:98-105
- Trzasko J, Manduca A (2009) Highly undersampled magnetic resonance image reconstruction via homotopic  $l_0$ -minimization. *IEEE Trans Med Imaging* 28:106-121
- Wallis JW and Miller TR (1993) Rapidly converging iterative reconstruction algorithms in single-photon emission computed tomography. *J Nucl Med* 34:1793-1800

- Wilson DW, Tsui BMW, Barrett HH (1994) Noise properties of the EM algorithm, II. Monte Carlo Simulations. *Phys Med Biol* 39:847-871
- Zeng GL, Gullberg, Tsui BMW, Terry JA (1991) Three-dimensional iterative reconstruction algorithms with attenuation and geometric point response correction. *IEEE Trans Nucl Sci* 38:693-702
- Zeng GL, Hsieh YL, Gullberg GT (1994) A rotating and warping projector-backprojector for fan-beam and cone-beam iterative algorithm. *IEEE Trans Nucl Sci* 41:2807-2811
- Zeng GL, Gullberg GT (2000) Unmatched projector/backprojector pairs in an iterative reconstruction algorithm. *IEEE Trans Med Imaging* 19:548-555
- Zhang B, Zeng GL (2006) An immediate after-backprojection filtering method with blob-shaped window functions for voxel-based iterative reconstruction. *Phys Med Biol* 51:5825-5842

## 第7章 MRI 中的图像重建

### 7.1 磁“M”

MRI 是磁共振成像 (Magnetic Resonance Imaging) 的缩写。MRI 的工作原理与发射型断层成像和透射型断层成像都相差很远。MRI 所显示的是一幅一个截面内的“质子密度”图像。MRI 的数据可视为这个平面内的质子密度函数的加权面积分，其权因子是“频率”的函数。

在这一章中，我们用简浅的语言，不太严谨地介绍 MRI 的工作原理。MRI 的目的是获得病人体内的氢原子 ( $H^+$ ) 的分布图。

氢原子就是一个质子而已，它携带一个单位的正电核，而且不停地自我旋转。自旋的电核在它周围产生了一个小磁场，就象一个小磁铁一样 (图 7.1)。我们把这个小磁铁叫磁矩  $\vec{\mu}$ ，磁矩是一个向量。方向是向量的一个重要因素。

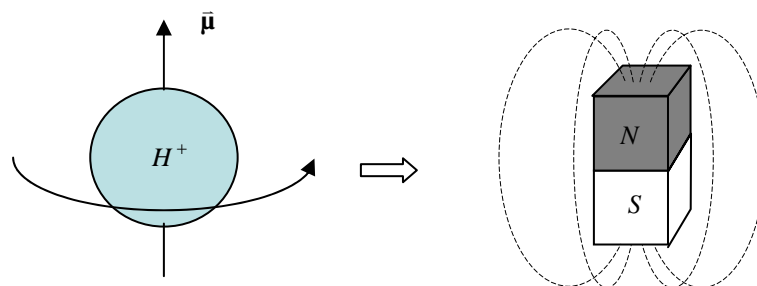


图 7.1 一个自我旋转的质子就象一个小磁铁一样可以产生磁场。

如果外界没有一个强磁场存在，人体内部的质子磁矩  $\vec{\mu}$  的方向是随机排列的。所以，净磁矩 (即所有磁矩的总和) 是  $\vec{0}$  (图 7.2)。

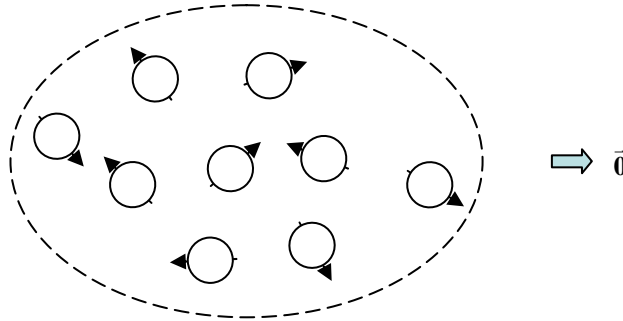


图 7.2 如果没有强的外界磁场，净磁矩是零。

如果外面加了一个很强的磁场，净磁矩就不再是零了。我们把这个净磁矩记为向量  $\vec{M}$ （图 7.3）。我们必须指出，即使在有一个很强的外部磁场存在的情况下，也不是所有的磁矩  $\vec{\mu}$  都指向同一方向。大约有一半的磁矩指向外磁场方向，而另一半指向与外磁场方向相反的方向。所以，净磁矩  $\vec{M}$  的幅度是相当小的，其幅度正比于

$$\frac{\gamma \hbar B_0}{2KT},$$

这里  $T$  病人体内的绝对温度（单位是  $^{\circ}\text{K}$  卡尔文度）， $K$  是波尔茨曼常数（ $8.62 \times 10^{-11} \text{ MeV}/^{\circ}\text{K}$  兆电子伏特/卡尔文度）， $\hbar$  是普朗克常数（ $6.6252 \times 10^{-27} \text{ ergs}$  尔格）， $B_0$  是磁场强度（单位是 Tesla 特斯拉），而  $\gamma$  是一个与原子有关的常数（对于氢原子核  $\text{H}^+$ ，它的值是  $42.58 \text{ MHz/Tesla}$  兆电子伏特/特斯拉）叫旋磁比。我们看到要获得足够强的信号，必须有足够强的外加磁场。

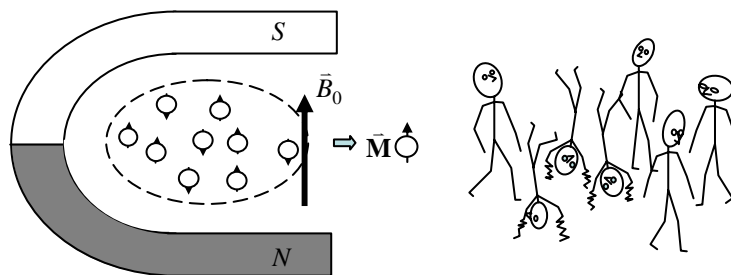


图 7.3 在有外在强磁场的情况下，可以观察到一个小的非零净磁矩。

为了解释 MRI 的物理原理，我们还要引入另一个物理概念——进动。我们来观察一下旋转的玩具陀螺（或一个陀螺仪）。我们发现，陀螺除了自旋以外，还有另外一个运动：自旋的转轴绕着重力（它是一个外力）的方向旋转。这个自旋的转轴绕着重力方向旋转的运动就叫进动（图7.4）。如果陀螺不做自旋运动，进动也不会发生，陀螺就会倒在地上。

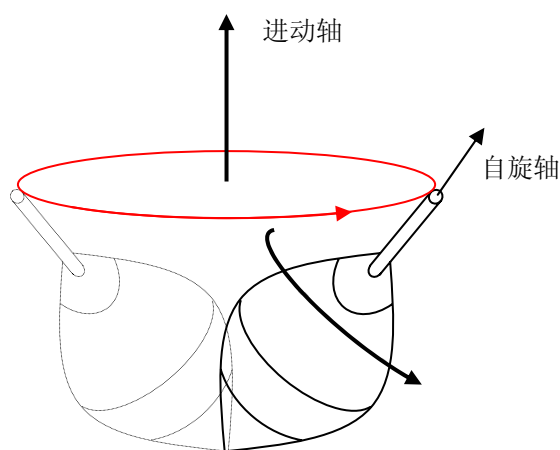


图 7.4 一个做自旋运动的陀螺，在重力的作用下，绕着垂直的轴线做进动。

## 7.2 共振 “R”

我们有一个叫做净磁矩的向量  $\vec{M}$ ，这个向量一直做着自旋运动。在正常状态下，向量  $\vec{M}$  的指向与外部磁场  $\vec{B}_0$  的方向是相同的。如果我们想办法把向量  $\vec{M}$  撞得失去平衡，向量  $\vec{M}$  的指向与外部磁场  $\vec{B}_0$  的方向就不同了。这时候，就象玩具陀螺绕着重力方向做进动一样，向量  $\vec{M}$  就会绕着  $\vec{B}_0$  的方向做进动（图 7.5）。进动的频率叫做拉莫尔频率，拉莫尔频率是这样计算的

$$\omega_0 = \gamma B_0,$$

式中  $B_0$  是外磁场的磁场强度， $\gamma$  是旋磁比。对质子来说， $\gamma = 42.58$  兆电子伏特/特斯拉。如果我们的 MRI 设备所产生的磁场强度是 1.5 特斯拉，那么净磁矩的进动拉莫尔频率大约是 64 兆赫芝（MHz），这个频率很接近调频（FM）收音机的频率。

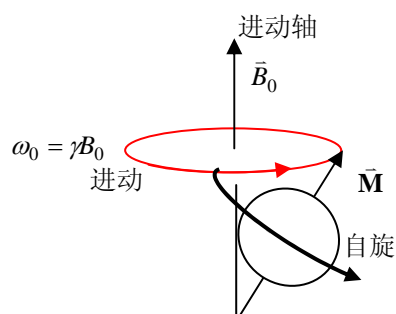


图 7.5 质子以  $\omega$  的拉莫尔频率做进动。

当净磁矩  $\vec{M}$  被从它的稳定状态撞开后，就会发射出信号。MRI 信号不外乎是从病人体内发出的 64 兆赫芝的无线电频率的电磁波。所以，MRI 信号也叫 RF (Radio Frequency 无线电收音机频率，或称射频) 信号。该信号的强度与病人体内的质子密度成正比。

要把净磁矩  $\vec{M}$  从它的稳定状态撞开可不是一件容易的事。为了看清楚如何去移动向量  $\vec{M}$ ，我们来建立一个虚拟的环境，让向量  $\vec{M}$  感觉不到外界磁场  $\vec{B}_0$  的存在。

首先，我们把向量  $\vec{M}$  放到游乐场里的一个转动的旋木（或旋转平台）上（图 7.6），这个旋木正在以拉莫尔频率做高速旋转。我们过一会儿要想个办法让使  $\vec{M}$  离开平衡位置。这时，向量  $\vec{M}$  是笔直地站在旋转平台上，并做着自旋。它与旋转平台之间没有任何运动。即使向量  $\vec{M}$  不是笔直地站在旋转平台上，而是与旋转平台有个夹角，它就这么斜着站在那里做自旋。它与旋转平台之间还是没有任何运动。



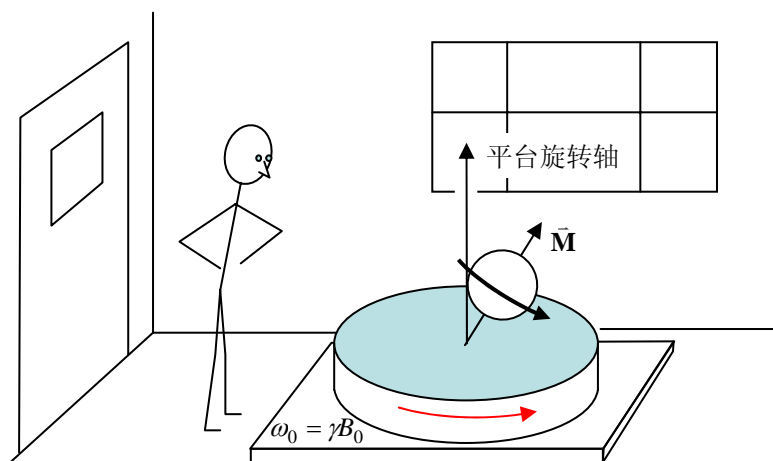


图 7.6 在旋转平台上，磁向量并不做进动。

接下来，我们也站到旋转平台上去，并在旋转平台上施加一个新的磁场  $\vec{B}_1$ ，其方向与主磁场  $\vec{B}_0$  的方向相垂直。在旋转平台上，磁向量  $\vec{M}$  根本感觉不到主磁场  $\vec{B}_0$  的存在，它只感觉到新磁场  $\vec{B}_1$  在用力推它。因为向量  $\vec{M}$  的方向与新磁场  $\vec{B}_1$  的方向不一致， $\vec{M}$  就会绕着  $\vec{B}_1$  的方向做进动（图 7.7）。进动的频率是  $\omega_1 = \gamma B_1$ 。在磁向量  $\vec{M}$  碰到旋转平台地板的那一瞬间，我们马上把新磁场  $\vec{B}_1$  关掉。这样一来，我们就圆满地完成了把磁向量  $\vec{M}$  撞倒的艰巨任务。我们只是很短暂地开启新磁场  $\vec{B}_1$ ，如果我们在磁向量  $\vec{M}$  碰到旋转平台地板的那一时刻关掉新磁场  $\vec{B}_1$  的话，新磁场  $\vec{B}_1$  就叫做  $90^\circ$  RF 脉冲。

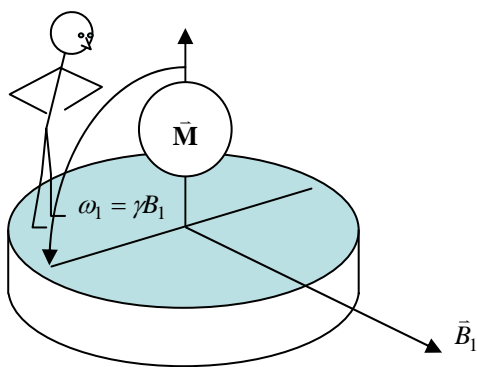


图 7.7 在旋转平台上，主磁场的影响可以被忽略。只有新的  $B_1$  在起作用。

这个新磁场  $\bar{B}_1$  到底是个什么东西呢？这个磁场  $\bar{B}_1$  是加在旋转平台上的，这个旋转平台以拉莫尔频率进行转动。对于 1.5 特斯拉的 MRI 设备来说，质子的拉莫尔频率大约为 64 兆赫芝。所以， $\bar{B}_1$  是一个交变电磁场，其交变频率与拉莫尔频率相同。相同的频率用技术术语来表述就是共振频率。 $\bar{B}_1$  的 RF 信号是用 RF 线圈发射给病人的。RF 线圈就是一架天线。整个利用  $\bar{B}_1$  RF 交变电磁场把磁向量  $\bar{M}$  撞离平衡状态的整个过程叫做 RF 激励。

在 RF 激励之后，我们关闭  $\bar{B}_1$ 。现在，净磁矩向量  $\bar{M}$  离开了平衡状态而进入激发状态，并绕着在主磁场  $\bar{B}_0$  的方向做进动。此时，携带病人质子密度信息的 RF 信号就从病人体内发射出来了。

这时，净磁矩向量  $\bar{M}$  是处于激发态。而激发态是不稳定的。在 RF 激励之后，净磁矩向量  $\bar{M}$  要经过一段弛豫期，并慢慢地返回到原来的平衡状态。在平衡状态下，向量  $\bar{M}$  指向  $\bar{B}_0$  的方向（图 7.8）。在直角坐标系中， $\bar{B}_0$  的方向是  $z$  轴方向，旋转平台的地板是  $x$ - $y$  平面。

向量  $\bar{M}$  的  $x$  和  $y$  分量共同组成 MRI 信号。当净磁矩向量  $\bar{M}$  经过弛豫回到平衡状态后， $\bar{M}$  的  $x$  和  $y$  分量就变成零了。此时，也就接收不到任何 MRI 信号了。若还要接着采集数据，需要再对物体施加一个 RF 脉冲。这个过程就这么重复着，直到我们为成像采集到了足够的数据为止。

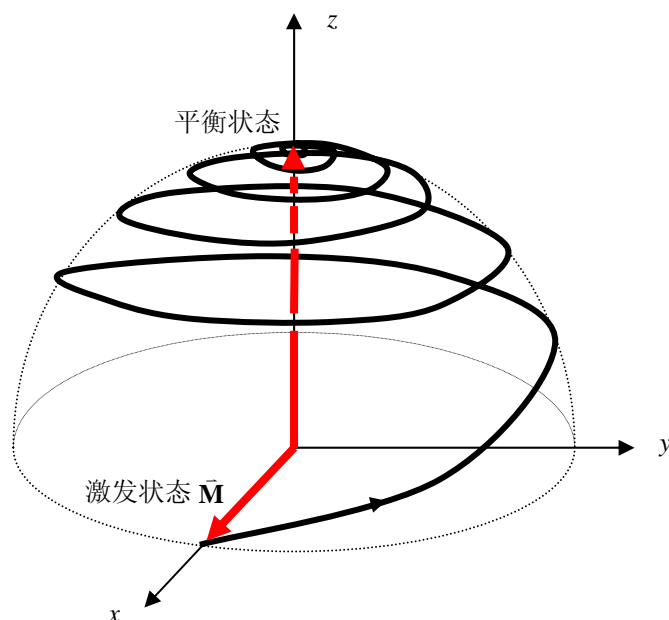


图 7.8 磁向量弛豫过程示意图。

### 7.3 成像 “1”

其实，在第7.2节中所描述的从病人体内发出的 RF 信号并不能用来成像。因为这个信号是人体内各处信号的总合，是个大杂汇。我们需要想办法让信号对位置进行编码，是其携带位置信息。这个编码的工作是由梯度线圈完成的。

在 MRI 设备中，有很多线圈。有个大的主要线圈是浸泡在液氮中的超导线圈，它是用来产生一个强大的静止磁场  $\vec{B}_0$  的。RF 线圈是用来向病人发射 RF 激励信号，并用来接收从病人发出的用来成像的 RF 信号。此外，MRI 设备中还有别的线圈，它们是 x 梯度线圈，y 梯度线圈，和 z 梯度线圈。

#### 7.3.1 获取 z 方向信息—层片选择

z 梯度线圈的示意图见图7.9。在这两个线圈中，电流的流向是相反的。它们分别产生两个局部磁场。其中一个对主磁场  $\vec{B}_0$  起加强作用，而另一个起削弱作用。最后合成的磁场仍然指向 z 轴方向，但是，对 z 值大一些的位置，磁场强度强一些，而对 z 值小一些的位置，磁场强度弱一些。磁场沿 z 轴方向就有了梯度。

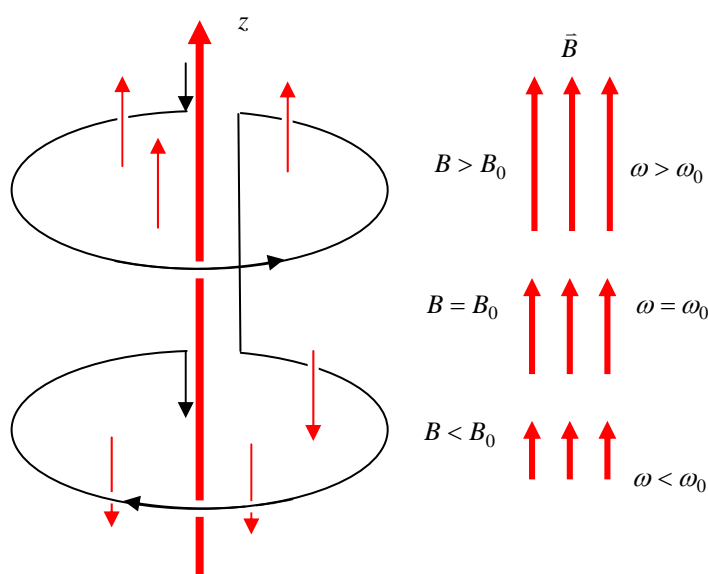


图 7.9 z 梯度线圈在 z 方向产生了一个非均匀的磁场。

$z$  梯度线圈产生的非均匀的磁场使得在不同的  $z$  位置有不同的拉莫尔频率  $\omega$ 。只有在一个层片上的拉莫尔频率是  $\omega_0$ 。我们同时开启  $z$  梯度和  $\bar{B}_1$  RF 脉冲，我们也同时关闭  $z$  梯度和  $\bar{B}_1$  RF 脉冲。 $\bar{B}_1$  RF 脉冲的频率是  $\omega_0$ 。根据共振频率的原理，病人身体中只有一个  $z$  层片能感觉到  $\bar{B}_1$  RF 脉冲的作用。也就是说，只有在一个特定  $z$  层片上的质子才能被激发，也才能发出 RF 信号（图 7.10）。

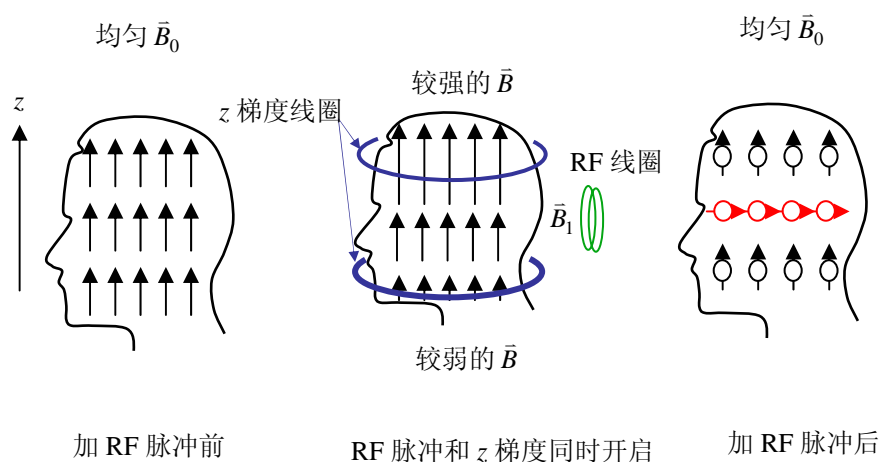


图 7.10 片层选择是靠  $z$  梯度和  $B_1$  交变磁场携手完成的。

### 7.3.2 获取 $x$ 方向信息—频率编码

我们要用  $x$  梯度来提供位置的信息。当我们准备要从病人接收 RF 信号时，我们开启  $x$  梯度。 $x$  梯度是由  $x$  梯度线圈产生的，它使磁场强度沿着  $x$  方向变化。用  $x$  梯度来对  $x$  位置编码的工作原理如图 7.11 所示。利用关系式  $\omega = \gamma B$ ，较强的场强对应着较高的频率。这样一来， $x$  的位置坐标就可以用所接收到的频率来决定了。

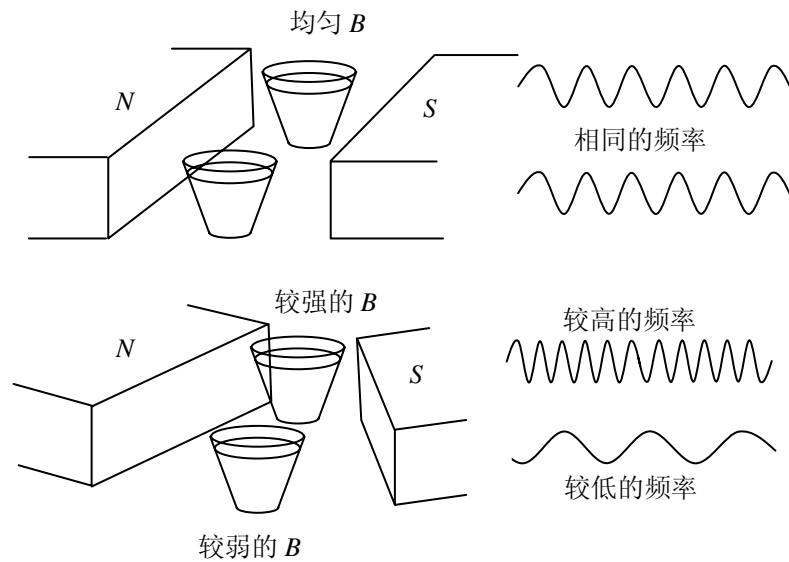


图 7.11 较强的场强可产生较高的频率。

$x$  梯度线圈如图7.12所示。我们假设  $x$  轴的正方向是从病人的右耳指向左耳。 $x$  梯度只有当我们接收 RF 信号的时候才开启，在其它时间它都处于关闭状态。所以， $x$  梯度又叫做读出梯度。千万不要在层片选择时就把  $x$  梯度打开，因为两个梯度若同时开启，这两个梯度会相加，并产生出一个沿着第三个方向的梯度。

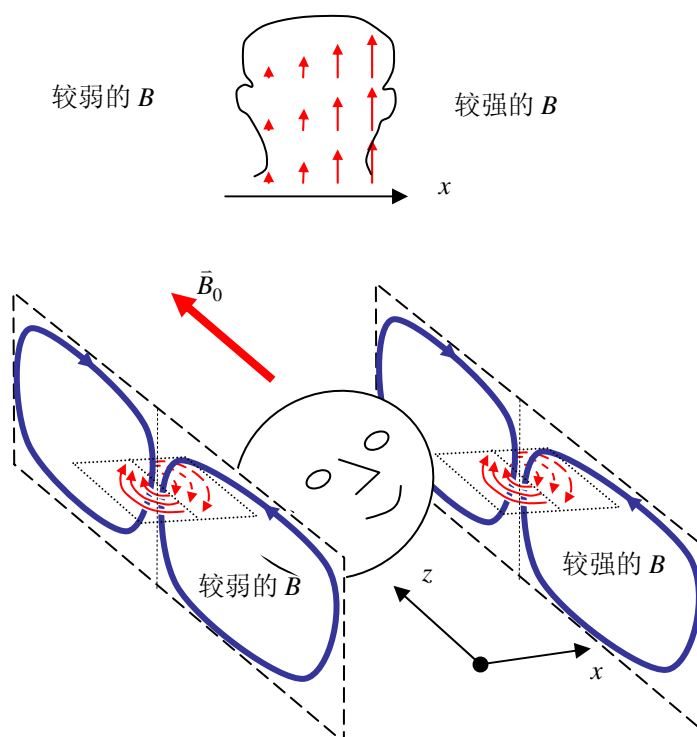


图 7.12  $x$  梯度线圈会沿读出方向改变磁场的场强。

### 7.3.3 获取 $y$ 方向信息—相位编码

在层片选择之后，在 RF 信号读出之前，我们可以短暂地开启一下  $y$  梯度。在所有的梯度线圈都不通电的时候，在任何位置的磁向量  $\vec{M}$  都是以相同的频率（即相同的速度）在做进动。但是，一旦开启了  $y$  梯度，磁场强度在不同的  $y$  位置（即  $y$  坐标）是不同的。结果，不同  $y$  位置上的磁向量  $\vec{M}$  以不同的拉莫尔频率做进动。比如，在  $y$  值大的地方，进动得快一些（图 7.13）。在  $y$  梯度开了一小段时间后，马上把它关掉。在这个时刻，磁向量  $\vec{M}$  在不同的  $y$  位置就转过了不同的角度（即相位）。这个相位就携带着  $y$  位置的信息。

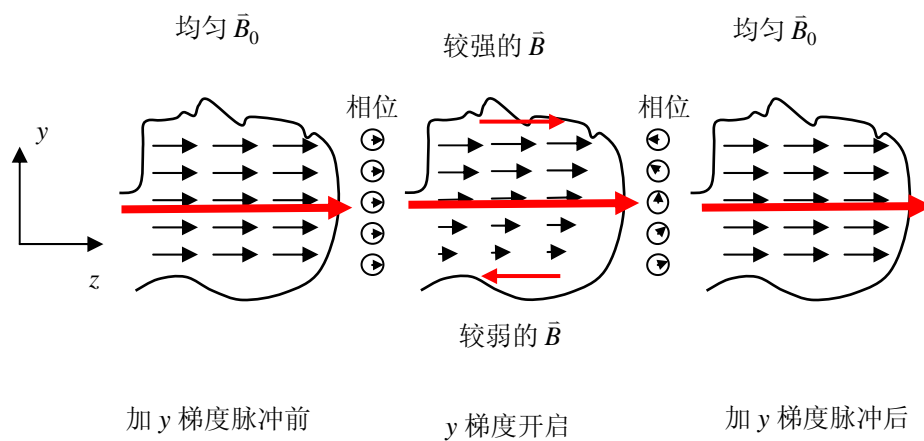


图 7.13 y 梯度使相位成为 y 位置（即 y 坐标）的函数。

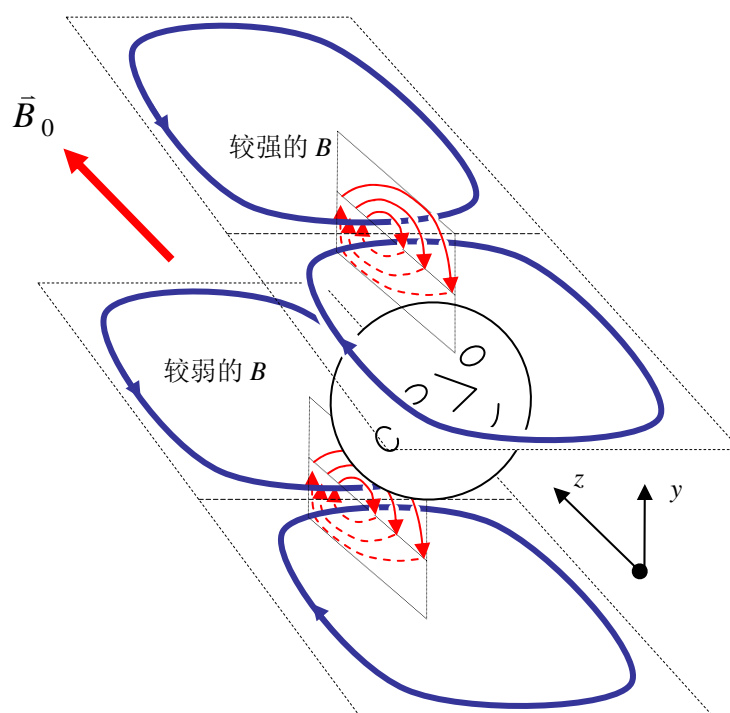


图 7.14 y 梯度线圈会沿 y 方向改变磁场的场强。

$y$  梯度线圈看上去和  $x$  梯度线圈没有什么不同，只是它们的安放位置差了  $90^\circ$ 。有效的梯度范围局限在线圈两个环之间的间隙处（图7.14）。

图7.15显示了一个基本的 MRI 数据采集过程的时间流程图。这个流程要重复多次。每一次都要改变  $y$  梯度的值。在下一节里，我们会看到所测到的数据恰好是原本图像  $f(x, y)$  的二维傅里叶变换。这个原本图像  $f(x, y)$  反映了病人体内的氢原子核的分布情况。图象重建只需做一个二维傅里叶反变换就行了。图7.16显示了一个有代表性的 MRI 图像。在 MRI 数据采集流程图中，我们发现在  $x$  读出梯度之前有一个小的负脉冲。这个负脉冲的作用是产生一个信号的“回波”，使最强的信号出现在信号时间区间的中间。

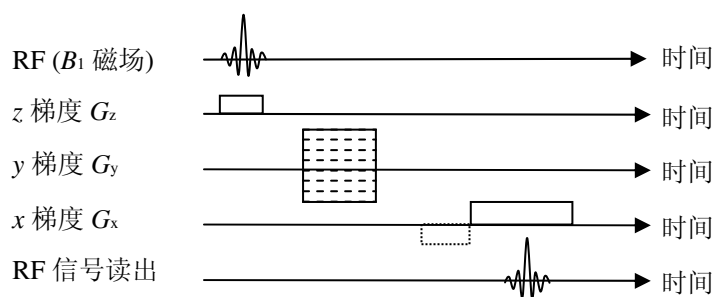


图 7.15 MRI 脉冲序列的时间流程图。



图 7.16 一个典型的 MRI 头部图像。



## 7.4\* 数学表达式

在这一节里，我们假设层片选择的步骤已经完成，三维磁向量  $\vec{\mathbf{M}}(x, y)$  只是  $x$  和  $y$  的函数。向量  $\vec{\mathbf{M}}(x, y)$  可以分解成其  $x$  分量  $M_x(x, y)$ ， $y$  分量  $M_y(x, y)$ ，和  $z$  分量  $M_z(x, y)$ 。我们定义一个复值函数  $f(x, y)$  为

$$f(x, y) = M_x(x, y) + iM_y(x, y)。$$

MRI 的成像目标是要得到这个复值函数  $f(x, y)$  并显示其幅值  $|f(x, y)|$  让放射科的医生来读。

让我们先来考虑读出梯度（即  $x$  梯度）的影响。当  $x$  梯度开启时，磁场强度是  $x$  的函数

$$B(x) = B_0 + xG_x，$$

其相应的拉莫尔频率可以这样算出：

$$\omega(x) = \gamma(B_0 + xG_x)。$$

在读出的时候，函数  $f(x, y)$  就做了频率编码，成为

$$f(x, y)\cos(2\pi\omega(x)t) = f(x, y)\cos(2\pi\gamma(B_0 + xG_x)t)，$$

式中  $\gamma B_0$  是载波频率，它对图像重建没有任何贡献。在 MRI 的信号接收机中有个解调器。解调器的目的是剔除这个载波频率。载波频率被除去以后，剩下的基带信号就是

$$f(x, y)\cos(2\pi\gamma xG_x t)。$$

因为 MRI 信号来自整个  $x$ - $y$  平面，接收到的基带信号是  $x$ - $y$  平面上每一点  $(x, y)$  上的信号的和，也就是：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\cos(2\pi\gamma xG_x t)dx dy。$$

其次，我们考虑相位编码梯度（即  $y$  梯度）的影响。让  $y$  梯度开启一段时间，马上再关闭。这个时间区间的长度为  $T$ 。在这个时间区间内，磁场强度是  $y$  的函数

$$B(y) = B_0 + yG_y,$$

其相应的拉莫尔频率可以这样算出：

$$\omega(y) = \gamma(B_0 + yG_y)。$$

经过时间段  $T$  之后，相位的变化  $\phi$  就是  $y$  的函数

$$\phi(y) = T\omega(y) = \gamma B_0 T + \gamma y G_y T。$$

可别忘了，函数  $f(x, y)$  是个复数，它可以用幅度和相位来表达

$$f(x, y) = |f(x, y)|e^{i\phi(x, y)}。$$

在相位改变了  $\phi(y)$  之后， $f(x, y)$  就变成了

$$|f(x, y)|e^{i\phi(x, y)}e^{-i\phi(y)} = f(x, y)e^{-i(\gamma B_0 T + \gamma y G_y T)}。$$

我们可以不去理会指数中的第一项  $\gamma B_0 T$ ，因为这个角度（即相位）与  $y$  无关。也就是说，在所有的位置向量都经历了这个相移。它不携带任何图像的信息。

图像函数  $f(x, y)$  经过相位编码后，成为

$$f(x, y)e^{-i2\pi\gamma y G_y T},$$

这就是我们要读出的信号。所以，我们读出的信号是

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x, y)e^{-i2\pi\gamma y G_y T}] \cos(2\pi\gamma x G_x t) dx dy。$$

MRI 设备通常使用的是正交数据采集方式。它有两个输出，它们的相位差是  $90^\circ$ 。其中一个输出是

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x, y)e^{-i2\pi\gamma y G_y T}] \cos(2\pi\gamma x G_x t) dx dy,$$

而另一个输出是

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x, y) e^{-i2\pi\gamma_y G_y T}] \sin(2\pi\gamma_x G_x t) dx dy。$$

我们可以把这两个输出用复数合并起来。令一个输出为实部，令另一个输出为虚部，我们就得到一个复的信号

$$signal(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi\gamma_y G_y T} e^{-i2\pi\gamma_x G_x t} dx dy。$$

这个式子可重新写成

$$signal_{G_y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi[x(\gamma G_x t) + y(\gamma G_y T)]} dx dy，$$

我们一眼就可以看出它是图像  $f(x, y)$  的二维傅里叶变换：

$$F(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi[x(\gamma G_x t) + y(\gamma G_y T)]} dx dy，$$

式中， $k_x = \gamma G_x t$  和  $k_y = \gamma G_y T$ 。当我们对时间信号以时间  $t$  为变量采样时，我们实际上是以  $x$  方向上的频率  $k_x$  为变量采样。当我们重复扫描过程，而每次用不同的值  $G_y$ ，我们实际上是以  $y$  方向上的频率  $k_y$  为变量采样。正是由于这个原因，人们常把 MRI 的信号空间称为  $k$  空间（图7.17）。这个  $k$  空间就是原本图像的傅里叶空间。在采集数据的时候，根据  $k_x = \gamma G_x t$  和  $k_y = \gamma G_y T$ ， $k$  空间被一行一行地填满。

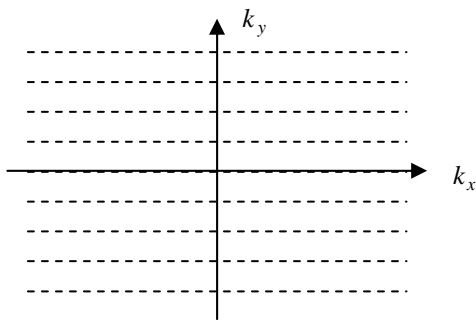


图 7.17  $k$  空间示意图。

最后，我们来考虑一个不同的  $k$  空间扫描方法—极射线扫描方法。这里，“极”的含意是极坐标。在这个方法中， $x$  梯度和  $y$  梯度总是同时开启，同时关闭（图7.18）。在这个方法中，没有相位编码，只有读出编码。读出编码的方向取决于  $x$  梯度和  $y$  梯度。

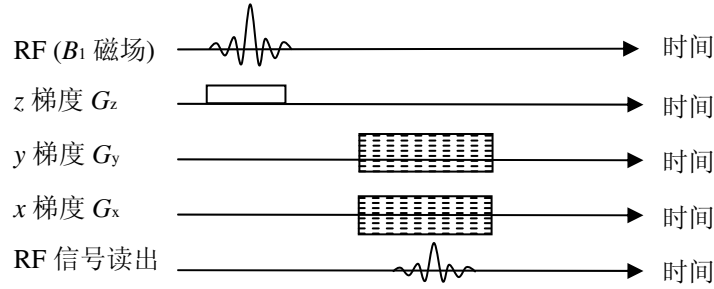


图 7.18 极射线扫描的时间流程图。

利用极射线扫描的读出信号可以由下式给出

$$signal_{G_x, G_y}(t) = F(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi[x(\gamma G_x t) + y(\gamma G_y t)]} dx dy。$$

式中， $k_x = \gamma G_x t$  及  $k_y = \gamma G_y t$ 。比值关系式  $k_y/k_x = G_y/G_x$  高诉我们，每一个 RF 激励周期都在  $k$  空间测量一条斜率为  $G_y/G_x$  的直线（图7.19）。对于不同的 RF 激励周期，都要用一组新的  $G_x$  和  $G_y$ ，从而得到  $k$  空间的一条新的直线。图7.19让我们回想起了那久违了的中心切片定理。我们因而可以用第2.3节所介绍的 FBP 算发来重建这个 MRI 图像。

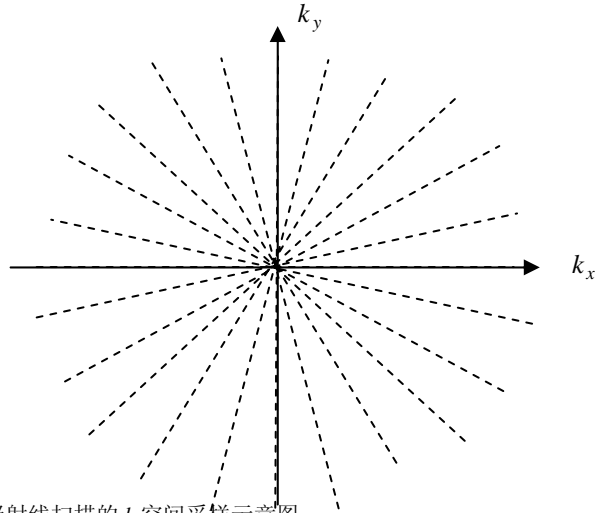


图 7.19 极射线扫描的  $k$  空间采样示意图。

## 7.5 例题

**例题 1** 磁  $\vec{M}$  向量有三个分量： $M_x$ ， $M_y$ ，和  $M_z$ 。这个幅值  $\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$  是个不变的常数吗？

答案

它不是一个不变的常数。在弛豫过程中， $M_x$  和  $M_y$  恢复到零的速度要快于  $M_z$  恢复到其平衡状态最大值的速度。这样一来，磁向量  $\vec{M}$  的幅值  $\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$  就是一个随时间而变的量了。

**例题 2** MRI 从 RF 线圈接收到的信号是模拟信号，经过模数转换器后就变成了数字信号。模数转换器的采样速率是否决定着图像的分辨率？

答案

不是的。MRI 图像的分辨率是由  $k$  空间采样范围（而不是采样点之间的间隔）决定的。在  $k$  空间，离原点（即直流点）最远的采样点的位置决定图像中的最高分辨率。而模数转换器的采样时间间隔决定图像的视野。如果模数转换器的采样速率不够高的话，图像中就会有混叠的伪影。例如，鼻子会混叠到后脑勺上去。

**例题 3\*** 设计一个脉冲序列来产生一个  $k$  空间的螺旋线轨道。

解

对于这种情形， $x$  梯度和  $y$  梯度必须同时开启。 $k$  空间采样点  $k_x$  和  $k_y$  的一般表达式分别为

$$k_x = \gamma G_x t \text{ 和 } k_y = \gamma G_y t,$$

另一方面， $k$  空间螺旋线的一般表达式分别是

$$k_x = (\alpha \cdot t) \cos(\beta \cdot t) \text{ 和 } k_y = (\alpha \cdot t) \sin(\beta \cdot t),$$

其中， $\alpha$  和  $\beta(t)$  是两个参数。我们可以选择

$$G_x = \frac{\alpha}{\gamma} \cos(\beta(t) \cdot t) \text{ 和 } G_y = \frac{\alpha}{\gamma} \sin(\beta(t) \cdot t)。$$

这个 $k$ 空间的螺旋线扫描轨迹和所对应的时间流程图如图7.20所示。其图像重建通常是把 $k$ 空间的采样点插值到直角坐标系的阵列中去，然后再用二维傅里叶反变换来得到原本图像。

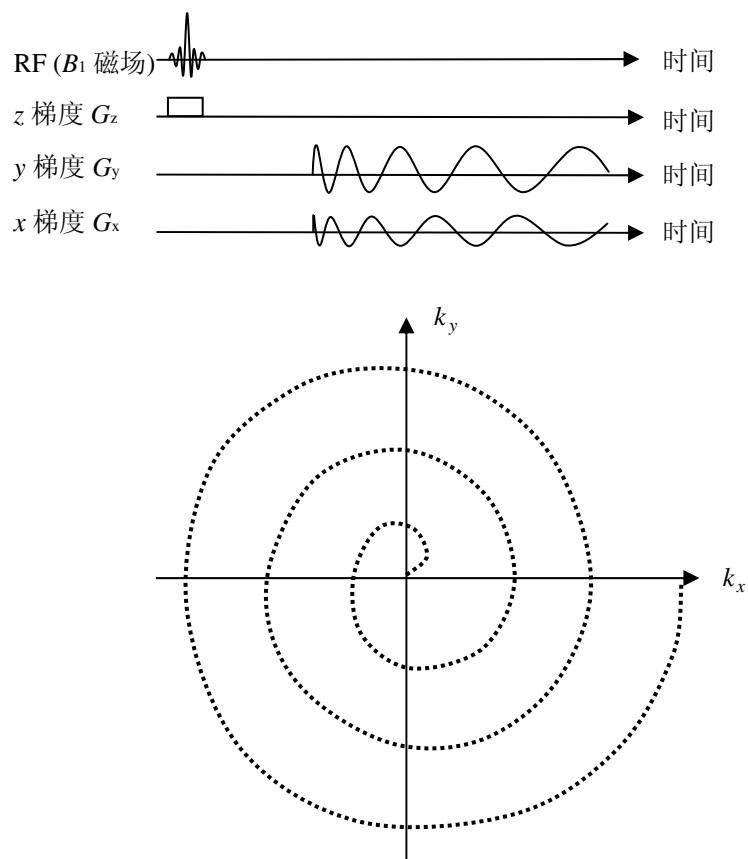


图 7.20 螺旋线扫描 $k$ 空间轨迹以及时间流程图。

## 7.6 小结

- MRI 的工作原理与透射型断层成像和发射型断层成像都不同。MRI 信号是收音机频段的无线电波，这个信号是用称为线圈的天线来接收的。

- 磁“M”部分：病人必须放在一个强磁场中，这样，由质子自旋产生的磁矩才有机会按一个方向排列起来。
- 共振“R”部分：用共振的射频信号向病人辐射，就可使净磁矩向量 $\vec{M}$ 被撞倒，离开主磁场方向。净磁矩绕主磁场方向进动时，射频信号就从病人体内发射了出来。
- 成像“I”部分：用开启和关闭梯度线圈的办法可以对病人发出的射频信号进行位置编码，以使MRI信号携带位置信息。
- RF线圈所接收到的MRI信号是傅里叶域（也称空间频率域，或 $k$ 空间）中的信号。图像重建是靠二维反傅里叶变换完成的。
- 在阅读完本章后，读者应至少知道MRI信号是怎样对位置进行编码，使之携带位置信息的，以及为什么 $k$ 空间信号是物体图像的傅里叶变换。

## 参考文献

- Abraham A (1961) The Principle of Nuclear Magnetic Resonance, Oxford University Press, Oxford
- Brown MA, Semelka RC (2003) MRI Basic Principles and Applications, Wiley, Hoboken, NJ
- Fukushima E, Raeder SBW (1981) Experimental Pulse NMR, A Nuts and Bolts Approach, Addison-Wesley, Reading, MA
- Gerald LW, Carol P (1984) MRI A Primer for Medical Imaging, Slack, Thorofare, NJ
- Haacke EM, Brown RW, Thompson MR, Venkatesan R (1999) Magnetic Resonance Imaging: Physical Principles and Sequence Design, Wiley, New York
- Liang ZP, Lauterbur PC (2000) Principles of Magnetic Resonance Imaging: A Signal Processing Perspective, IEEE Press, Piscataway, NJ
- NessAiver M (1997) All You Really Need to Know About MRI Physics, Simply Physics, Baltimore, MD
- Macovski A (1996) Noise in MRI. Magnetic Resonance Medicine 36:494-497
- Stark D, Bradley W (1992) Magnetic Resonance Imaging, Mosby, St. Louis, MO

## 英汉对照表

### 2

2D 二维

### 3

3D 三维

### A

ADC = Analog-to-Digital converter 模数转换器

Adjoint 伴随

Algorithm 算法

Aliasing 混叠

Analytical 解析的

ART = Algebraic Reconstruction Techniques 代数重建法

Artifact 伪影

Attenuation Correction 衰减修正

Attenuation 衰减

Attenuator 衰减媒介

### B

Backprojection 反投影

Backprojector 反投影算子, 反投影器

Baseband Signal 基带信号

Bayesian Law 贝叶斯法则

Beer's Law 比尔法则

Boltzman Constant 波尔茨曼常数

### C

Carrier Frequency 载波频率

Central Slice Theorem 中心切片定理

Closed Loop 闭环

Coincidence Detection 同时检测

Collimator 准直器

Compton Scattering 康普顿散射

Condition Number 条件数

Cone Angle 锥形张角

Cone-Beam 锥形束

Conjugate Gradient Direction 共轭梯度方向

Consistent 相容的

Convergent Beam 会聚型光束

Convex Function 凸函数

Convolution Kernel 卷积核

Convolution 卷积

CT = Computed Tomography 计算机断层成像

CT Number CT值

Cut-Off Frequency 截止频率

Cut-Off Index 截断指标

Cutting Plane 切割平面

Cyclotron 回旋加速器

### D

Damping Factor 阻尼因子

Data Sufficiency Condition 数据足量条件

DC = Direct Current 直流

Deblurring 去(掉)模糊

Deconvolution 反卷积

Demodulator 解调器

Detector Bin 探测器的像元, 探测元

Deterministic 确定性的, 非随机的

Dirac delta function 狄拉克 $\delta$ 函数

Divergent Beam 发散型光束

### E

Emission 发射

Event 事件

Excited State 激发态

Expectation-Maximization 最大期望值

Exponential Radon Transform 指数型拉东变换

### F

Fan-Beam 扇形束

FBP = Filtered Backprojection 先滤波后反投影

Filtering Line 滤波线

Forward Problem 正向问题

Fourier Domain 傅里叶域, 傅里叶变换域

Fourier Slice Theorem 傅里叶中心切片定理

Fourier Transform 傅里叶变换

FOV=Field of View 视野

Frequency Encoding 频率编码

Full Scan 全扫描

### G

Global Coordinate System 整体坐标系

Gradient Coil 梯度线圈

Gradient Descent 梯度下降

Great Circle 大圆

Gyromagnetic Ratio 旋磁比

Gyroscope 陀螺仪

### H

Half Life 半衰期

Hermitian Matrix 赫米特矩阵

Hilbert Transform 希尔伯特变换

### I

Image 图像

Interior Problem 内部重建问题

Inverse Problem 逆问题

Iterative 迭代的

### J

Jacobian Factor 雅可比因子

### L

Lagrange Function 拉格朗日函数

Lagrange Multiplier 拉格朗日乘数

Laplacian operator 拉普拉斯算子

Larmor Frequency 拉莫尔频率

Likelihood Function 似然函数

List Mode 列表模式

Local Coordinate System 局部坐标系

Local Operation 局部运算

### M

Magnetic Moment 磁矩

Maximum *a posteriori* 最大后验概率

Maximum-Likelihood 最大似然

Merry-go-round 旋木

ML-EM = Maximum-Likelihood Expectation-

Maximization 用求最大期望值的方法求似然函数的极大值



MRI = Magnetic Resonance Imaging 磁共振成像

## N

Normal Equation 正交方程 (通常译成:正规方程)

Notched 带缺口的

Nuclear Reactor 核反应堆

## O

Objective Function 目标函数

One-Step Late 迟一步

Open Loop 开环

Ordered-Subset 分成有序的子集

Orlov's Condition 沃尔洛夫条件

OS-EM = Ordered-Subset Expectation-Maximization 用  
分成有序的子集的方法求似然函数的极大值

Over-determined 超定的

## P

Parallel Line-Integral Data 平行的线积分数据

*Parallel Plane-Integral Data* 平行的面积分数据

Parallel-Beam 平行光束

PET = Positron Emission *Tomography* 正电子发射断层  
成像

Phantom 模型

Phase Encoding 相位编码

Piecewise-Constant 分段常数的

Pinhole Collimator 针孔准直器

Pixel 像素

Pixel-Driven 像素决定的

Plank constant 普朗克常数

Poisson Noise 泊松噪声

Polar Scanning 极射线扫描

Prior Knowledge 先验知识

Projection Slice Theorem 投影切片定理

Projection 投影

Projector 投影算子, 投影器

Pseudo inverse 伪逆

Pseudo Solution 伪解

PSF = Point Spread Function 点扩散函数

## Q

Quadrature Data Acquisition 正交数据采集

## R

Radiopharmaceutical 放射性药物

Radon Transform 拉东变换

Ramp Filter 斜坡滤波器

Ray Sum 射线和 (即沿着一条射线求和)

Ray-Driven 射线决定的

Read-Out Gradient 读出梯度

Rebin 嵌入, 重新排列

Reconstruction 重建

Relaxation Factor 松弛因子

Relaxation 弛豫

Residual Image 误差图像

Resolution 分辨率

Resonance Frequency 共振频率

RF = Radio Frequency 无线电收音机频率, 射频

RF excitation 无线电频率激励

ROI = Region of Interest 感兴趣区域

Rotating Platform 旋转平台

## S

Searching Direction 搜索方向

Sensitivity 感光度

Shift Invariant 移动不变的

Short Scan 短扫描

Singular Value Decomposition 奇异值分解

Sinogram 正弦图

SIRT = Simultaneous Iterative Reconstruction Technique  
联立迭代重建方法

Slice Selection 层片选择

Sparsifying Transform 稀疏变换

Spatial Domain 空间域

SPECT = Single Photon Emission Computed  
Tomography 单光子发射计算机断层成像

## T

Taylor Expansion 泰勒展式

Tomography 断层成像

Top 陀螺

Total Variation 全变差

Transfer Function 传递函数

Transmission 透射

Transversal Plane 横截平面

## U

Under-determined 欠定的

Undersampled Data

## W

Window Function 窗函数

## X

X-ray X光

## Z

Zero Quasi-Norm 0伪范数

$\pi$ -line  $\pi$ 直线

$\pi$ -segment  $\pi$ 线段