Exercício 4.14 Calcule os seguintes limites $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ com $f(x) = x + \operatorname{sen} x$ e $g(x) = x + \cos x$. Pode aplicar a Regra de Cauchy para o cálculo destes limites?

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{0+0}{0+1} = 0$$

Não, pois não há indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\cos x}{1-\operatorname{sen} x} = 2$$

Exercício 4.16 Verifique que $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \frac{\frac{1}{x}}{e^{-\frac{1}{x}}}$ e aplique a regra aos limites $\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$ e $\lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{x}}{e^{-\frac{1}{x}}}$.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{1} =$$

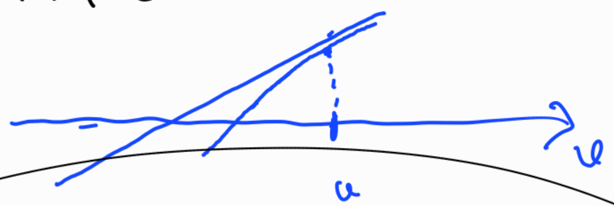
$$= \lim_{x\to 0^-} -\frac{e^{1/x}}{x^2} \quad \text{vai complicando...}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x}}{x} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{x}}{e^{-1/x}} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1/x^2}{e^{-1/x} \times \left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} -e^{1/x} = 0$$

Exercício 4.17 Verifique que se f tiver assímptota não vertical direita $y = mx + b$ e $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = l$, então $m = l$ (analogamente à esquerda).

$m \neq 0$



$$H: \begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - (mx+b) \right] = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} f'(x) = l \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } m>0 \\ -\infty & \text{se } m<0 \end{cases}$$

$T: \quad m = l$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - (mx+b) \right) \times \frac{1}{mx+b} = 0 \iff$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\underbrace{\frac{f(x)}{mx+b}}_{\infty/\infty} - 1 \right) \overset{R.C.}{=} \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{f'(x)}{m} - 1 \right], \quad f'(x) \to l$$

$$\frac{l}{m} - 1 = 0 \iff l = m.$$

Exercício 4.18 Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{1-\cos x}$; (b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^4 - 2x^3 + 2x - 1}{x^3 - 3x + 2}$; (c) $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$; (d) $\lim_{x\to 0^+} x^x$; (e) $\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{arccot} x$.

(c) $\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} \quad (1^{\infty})$

$$\lim_{x\to 0} \ln (1+x)^{1/x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) =$$

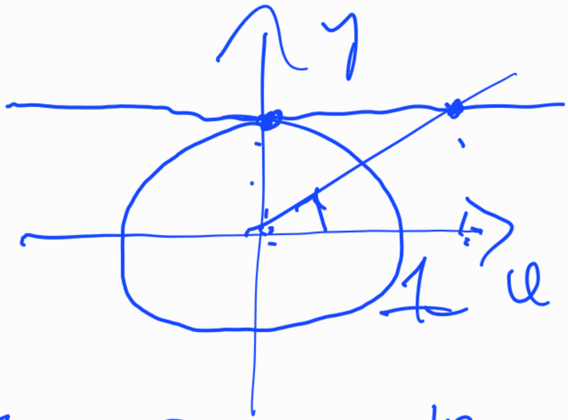
$$= \lim_{u \to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} \quad \left(\tfrac{0}{0}\right) \underset{R.C.}{=} \lim_{u \to 0} \frac{\frac{1}{1+u}}{1} = 1$$

$$\lim_{u \to 0} (1+u)^{1/u} = \lim_{u \to 0} e^{\ln (1+u)^{1/u}} = e^{1} = e$$

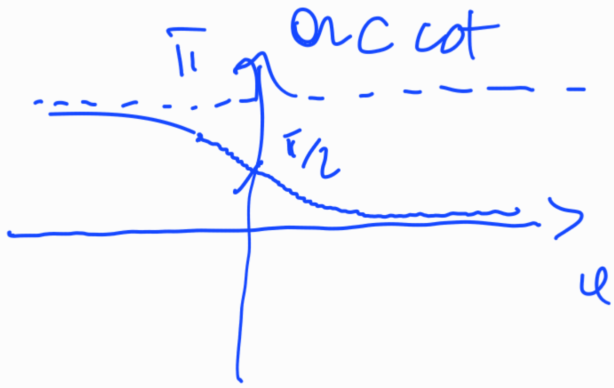
(d) $$\lim_{u \to +\infty} u \,\operatorname{arccot} u = \quad (\infty \times 0)$$

$$= \lim_{u \to +\infty} \frac{\operatorname{arccot} u}{\frac{1}{u}} \quad \left(\tfrac{0}{0}\right) \underset{R.C}{=} \lim_{u \to +\infty} \frac{-\frac{1}{1+u^2}}{-\frac{1}{u^2}} =$$

$$= \lim_{u \to +\infty} \frac{u^2}{u^2+1} = 1$$



$]0,\pi[\xrightarrow{\text{cotg}} \mathbb{R}$



Analisemos agora um exemplo de uma função definida por ramos. Seja a um ponto de acumulação de D_f, domínio da função contínua dada por

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x < a \\ b & \text{se } x = a \\ h(x) & \text{se } x > a \end{cases}$$

Note-se que $b = \lim_{x \to a^-} g(x) = \lim_{x \to a^+} h(x)$ pela continuidade de f.

- A derivada de f coincide com a derivada de g para $x < a$ e com a derivada de h para $x > a$ (nos pontos em que g e h são deriváveis).

- Contudo $f'(a)$ pode existir ou não. Considerem-se as funções

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ \cos x & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad f_2(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

  Uma das derivadas existe e a outra não: $f_1'(0) = 0$ e $f_2'(0)$ não existe.

$$f_1'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 1}{h}$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - 1}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\cos h - 1}{h} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{R.C.}{=}} \lim_{h \to 0^+} \frac{-\sin h}{1} = 0$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - 1}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\frac{\sin h}{h} - 1}{h} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{R.C.}{=}}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{\cos h \cdot h - 1 \cdot \sin h}{h^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{R.C.}{=}}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{-\sin h \cdot \cancel{h} + \cancel{\cos h} - \cancel{\cos h}}{2\cancel{h}} = 0$$

Lema 4.1. *Seja f contínua em a. Pode-se afirmar que*

$$\textit{Se } \lim_{x \to a^+} f'(x) = l \in \widetilde{\mathbb{R}} \textit{ então } f'_+(a) = l \quad \textit{e} \quad \textit{se } \lim_{x \to a^-} f'(x) = l \in \widetilde{\mathbb{R}} \textit{ então } f'_-(a) = l.$$

$$\left(\frac{\sin u}{u}\right)' = \frac{\cos u \cdot u - \sin u}{u^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{u \to 0^-} \dfrac{\cos u \cdot u - \sin u}{u^2} = 0 \\ (\cos u)' = -\sin u \\ \lim\limits_{u \to 0^+} -\sin u = 0 \end{array}\right\} \quad f'(0) = 0.$$

Lema 4.1. *Seja f contínua em a. Pode-se afirmar que*

$$\text{Se} \lim_{x\to a^+} f'(x) = l \in \widetilde{\mathbb{R}} \text{ então } f'_+(a) = l \quad \text{e} \quad \text{se} \lim_{x\to a^-} f'(x) = l \in \widetilde{\mathbb{R}} \text{ então } f'_-(a) = l.$$

Exercício 4.20 Caracterize a derivada da função definida por

$$g(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ \arctan x & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

explicando porque é que $D_{g'} \neq \mathbb{R}$.

$\lim_{x\to 0^-} g(x) = e^0 = 1 \neq g(0)$

$g(0) = 0$

Como g não é contínua em 0 mas tem derivada em 0.

Observação 4.4. Mesmo que os limites laterais da derivada f' não existam no ponto a, podem existir as derivadas laterais em a mas é preciso calculá-las pela definição. Note-se que, neste caso, a derivada pode existir em a mas não é contínua.

Exercício resolvido 4.2. Verifique que a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é contínua em $\mathbb{R}$.

Prove ainda que $f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$ e que não existe o $\lim_{x\to 0} f'(x)$. Apesar disso, a função é derivável também em $x = 0$ e assim $D_{f'} = \mathbb{R}$.

De facto, pela definição,

mas existe $f'(0)$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} h \operatorname{sen} \frac{1}{h} = 0.$$