Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo II – Agrupamento 1 **2021/2022**

Folha Prática 5

Equações Diferenciais Ordinárias

Exercícios Propostos

1. Verifique se as seguintes funções são solução (em $\mathbb{R}$) das equações diferenciais dadas:

   (a) $y = \operatorname{sen} x - 1 + \mathrm{e}^{-\operatorname{sen} x}$ $\quad\quad \dfrac{dy}{dx} + y\, \cos x = \dfrac{1}{2} \operatorname{sen}(2x)$;

   (b) $z = \cos x$ $\quad\quad z'' + z = 0$;

   (c) $y = \cos^2 x$ $\quad\quad y'' + y = 0$;

   (d) $y = Cx - C^2 \quad (C \in \mathbb{R})$ $\quad\quad (y')^2 - xy' + y = 0$.

2. Indique uma equação diferencial para a qual a família de curvas indicada constitui um integral geral.

   (a) $y = Cx, \quad C \in \mathbb{R}$ (retas do plano não verticais que passam pela origem);

   (b) $y = Ax + B, \quad A, B \in \mathbb{R}$ (retas do plano não verticais);

   (c) $y = \mathrm{e}^{Cx}, \quad C \in \mathbb{R}$.

3. Considere a família de curvas sinusoidais definidas por

$$y = A \operatorname{sen}(x + B) \qquad \text{com} \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

   Indique uma EDO de terceira ordem para a qual estas funções constituam uma família de soluções

4. (a) Determine a solução geral da equação diferencial $y'' - \operatorname{sen} x = 0$.

   (b) Mostre que a função definida por $\varphi(x) = 2x - \operatorname{sen} x$ é uma solução particular da EDO da alínea anterior, que satisfaz as condições $\varphi(0) = 0$ e $\varphi'(0) = 1$.

5. Determine a solução geral das seguintes EDOs:

   (a) $y' - \dfrac{1}{(1 + x^2) \operatorname{arctg} x} = 0$;

   (b) $y' - \sqrt{1 - x^2} = 0$;

   (c) $y' - \dfrac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + 1} = 0$.

6. Determine um integral geral para cada uma das seguintes EDOs de variáveis separáveis:

   (a) $x + yy' = 0$;

   (b) $xy' - y = 0$;

   (c) $(t^2 - xt^2)\dfrac{dx}{dt} + x^2 = -tx^2$;

   (d) $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$.

7. Resolva os seguintes problemas de Cauchy:

   (a) $xy' + y = y^2, \quad y(1) = 1/2;$

   (b) $xy + x + y'\sqrt{4 + x^2} = 0, \quad y(0) = 1;$

   (c) $(1 + x^3)y' = x^2 y, \quad y(1) = 2.$

8. Verifique que as seguintes equações diferenciais são homogéneas e determine um seu integral geral.

   (a) $(x^2 + y^2)y' = xy;$

   (b) $y'\left(1 - \ln \dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{y}{x}\,, \quad x > 0.$

9. Considere a equação diferencial $y' = \dfrac{y}{x}\,(1 + \ln y - \ln x)\,, \quad x > 0.$

   (a) Verifique que se trata de uma equação diferencial homogénea.

   (b) Determine um integral geral desta EDO.

10. Resolva as seguintes equações diferenciais exatas:

    (a) $(2x + \operatorname{sen} y)\, dx + x \cos y\, dy = 0\,;$

    (b) $(2xy - x - e^y)\, dx = (xe^y + y - x^2)\, dy\,;$

    (c) $\left(\dfrac{y}{x} + 6x\right) dx + (\ln x - 2)\, dy = 0\,.$

11. Resolva a equação $e^x \sec y - \operatorname{tg} y + y' = 0$ sabendo que ela admite um fator integrante da forma $\mu(x, y) = e^{\beta x} \cos y$.

12. Resolva as seguintes equações diferenciais, usando em cada caso o fator integrante indicado:

    (a) $y\, dx + (y^2 - x)\, dy = 0 \qquad [\ \mu(y) = y^{-2}\ ];$

    (b) $(2y - x^3)\, dx + x\, dy = 0 \qquad [\ \mu(x) = x\ ];$

13. Resolva as seguintes equações diferenciais lineares usando fatores integrantes:

    (a) $y' + 2y = \cos x;$

    (b) $x^3 y' - y - 1 = 0;$

    (c) $\dfrac{1}{x}\, y' - \dfrac{1}{x^2 + 1}\, y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}\,, \quad x \neq 0.$

14. Considere a EDO $x^2 y' + 2xy = 1$ em $]0, +\infty[$. Mostre que qualquer solução desta EDO tende para zero quando $x \to +\infty$.

15. Resolva as seguintes equações diferenciais de Bernoulli:

    (a) $xy' + y = y^2 \ln x, \quad x > 0;$

    (b) $y' - \dfrac{y}{2x} = 5x^2 y^5\,, \quad x \neq 0.$

(a) $y' + \frac{1}{x} y = \frac{\ln x}{x} y^2$

16. Usando o método da variação das constantes, determine a solução geral das seguintes EDOs lineares:

    (a) $y' - \dfrac{2y}{x} = x^3$;

    (b) $y' \operatorname{sen} x + y \cos x = \operatorname{sen}^2 x$;

    (c) $y' - \dfrac{x}{x^2+1}\, y = \sqrt{x^2+1}\,, \qquad$ (rever EDO do 13 (c)).

17. Determine a solução geral das seguintes EDOs lineares:

    (a) $y' + y = \operatorname{sen} x$;

    (b) $y'' - y + 2\cos x = 0$;

    (c) $y'' + y' = 2y + 3 - 6x$;

    (d) $y'' - 4y' + 4y = x\,\mathrm{e}^{2x}$;

    (e) $y'' + y' = \mathrm{e}^{-x}$;

    (f) $y'' + 4y = \operatorname{tg}(2x)$;

    (g) $y''' + y' = \operatorname{sen} x$;

    (h) $y'' + 9y = \operatorname{sen} x - \mathrm{e}^{-x}$.

18. Considere o problema de valores iniciais

$$y'' + 4y' + 4y = \cos(2x)\,, \qquad y(\pi) = 0\,, \quad y'(\pi) = 1.$$

    Justifique que este problema possui uma única solução (em $\mathbb{R}$) e determine-a.

19. Resolva o seguinte problema de valor inicial $\begin{cases} y' + y\cos x = \cos x \\ y(0) = 2 \end{cases}$.

20. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais:

    (a) $(1+x^2)y' + 4xy = 0$;

    (b) $y'' + y + 2\operatorname{sen} x = 0$;

    (c) $(1+x^2)y' - y = 0$;

    (d) $y''' + 4y' = \cos x$;

    (e) $y' - 3x^2 y = x^2$;

    (f) $y''' - 3y' + 2y = 12\,\mathrm{e}^x$.

21. Resolva a EDO $xy'' - y' = 3x^2$ (<u>Sugestão</u>: Efetue a mudança de variável $z = y'$).

22. Considere a EDO linear homogénea (de coeficientes não constantes)

$$(1-x)y'' + xy' - y = 0\,, \qquad x \in]1,\infty[.$$

    (a) Mostre que $\{x, e^x\}$ forma um sistema fundamental de soluções da equação.

    (b) Obtenha a solução geral da EDO.

    (c) Resolva agora a EDO

$$(1-x)y'' + xy' - y = x^2 - 2x + 2\,, \qquad x \in]1,\infty[,$$

    começando por verificar que ela admite uma solução do tipo $y = \beta x^2$ para certo $\beta \in \mathbb{R}$.

Soluções

1. (a) Sim; (b) Sim; (c) Não; (d) Sim.

2. (a) $xy' - y = 0$; (b) $y'' = 0$; (c) $xy' - y\ \ln(y) = 0$.

3. $y''' + y' = 0$.

4. (a) $y = C_1 x - \operatorname{sen} x + C_2\,,\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

5. (a) $y = \ln(\operatorname{arctg} x) + C\,,\quad C \in \mathbb{R}$;

   (b) $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \dfrac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + C\,,\quad C \in \mathbb{R}$;

   (c) $y = \dfrac{x^3}{3} + \operatorname{arctg} x + C\,,\quad C \in \mathbb{R}$.

6. (a) $x^2 + y^2 = C\,,\quad C \in \mathbb{R}$;

   (b) $y = C\,x\,,\quad C \in \mathbb{R}$ (compare com o ex. 2(a));

   (c) $\dfrac{x}{t} = C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}-\frac{1}{t}}\,,\quad C \in \mathbb{R}$;

   (d) $y = \dfrac{1}{\ln|x^2 - 1| - C}\,,\quad C \in \mathbb{R}$;

7. (a) $y = \dfrac{1}{x+1}$; (b) $y = -1 + 2e^{2-\sqrt{4+x^2}}$; (c) $y^3 = 4(1 + x^3)$.

8. (a) $\ln|y| - \dfrac{x^2}{2y^2} = C,\quad C \in \mathbb{R}$ ($y = 0$ é solução singular).

   (b) $y = x\,\mathrm{e}^{Ky}\,,\quad x > 0,\quad K \in \mathbb{R}$.

9. (b) $y = x\,\mathrm{e}^{Cx},\quad x > 0,\quad C \in \mathbb{R}$.

10. (a) $x^2 + x \operatorname{sen} y = C\,,\quad C \in \mathbb{R}\,$;

    (b) $x^2 + y^2 + 2xe^y - 2yx^2 = C\,,\quad C \in \mathbb{R}$;

    (c) $y = \dfrac{C - 3x^2}{\ln|x| - 2}\,,\quad C \in \mathbb{R}$.

11. $x + e^{-x} \operatorname{sen} y = C\,,\quad C \in \mathbb{R}$ (um fator integrante é $\mu(x, y) = e^{-x}\cos y$).

12. (a) $x + y^2 = Cy\,,\quad C \in \mathbb{R}$

    (b) $yx^2 - \dfrac{x^5}{5} = C\,,\quad C \in \mathbb{R}$

13. (a) $y = \dfrac{2}{5}\cos x + \dfrac{1}{5}\operatorname{sen} x + C\,\mathrm{e}^{-2x}\,,\quad C \in \mathbb{R}$;

    (b) $y = -1 + C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}}\,,\quad x \neq 0,\quad C \in \mathbb{R}$;

    (c) $y = (C + x)\sqrt{x^2 + 1}\,,\quad C \in \mathbb{R}$.

14. Comece por verificar que a solução geral possui a forma $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{C}{x^2}\,,\quad C \in \mathbb{R}$.

15. (a) $y = \dfrac{1}{1 + Cx + \ln x}\,,\quad x > 0,\quad C \in \mathbb{R}$ ($y = 0$ é solução singular).

    (b) $y^4 = \dfrac{x^2}{C - 4x^5}\,,\quad C \in \mathbb{R}$ ($y = 0$ é solução singular).

16. (a) $y = \dfrac{x^4}{2} + K\,x^2\,, \qquad K \in \mathbb{R};$

(b) $y = \dfrac{x}{2}\,\mathrm{cosec}x - \dfrac{\cos x}{2} + K\,\mathrm{cosec}x\,, \qquad K \in \mathbb{R}.$

17. (a) $y = C_1\,\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{\mathrm{sen}\,x}{2} - \dfrac{\cos x}{2};$

(b) $y = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x} + \cos x;$

(c) $y = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-2x} + 3x;$

(d) $y = \left(C_1 + C_2 x + \dfrac{x^3}{6}\right)\mathrm{e}^{2x};$

(e) $y = C_1 + (C_2 - x)\,\mathrm{e}^{-x};$

(f) $y = C_1\,\mathrm{sen}\,(2x) + C_2\,\cos(2x) - \dfrac{1}{4}\cos(2x)\,\ln|\sec(2x) + \mathrm{tg}\,(2x)|;$

(g) $y = C_1 + C_2\,\cos x + C_3\,\mathrm{sen}\,x - \dfrac{x}{2}\,\mathrm{sen}\,x;$

(h) $y = C_1\,\mathrm{sen}\,(3x) + C_2\,\cos(3x) + \dfrac{\mathrm{sen}\,x}{8} - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{10}.$

(C_1, C_2, C_3 são constantes reais arbitrárias).

18. $y = \dfrac{3}{4}(x - \pi)\,\mathrm{e}^{2(\pi - x)} + \dfrac{\mathrm{sen}\,(2x)}{8}.$

19. $y = 1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{sen}\,x}\,, \quad x \in \mathbb{R}.$

20. (a) $y = \dfrac{K}{(x^2+1)^2}\,, \qquad K \in \mathbb{R};$

(b) $y = C_1\,\cos x + C_2\,\mathrm{sen}\,x + x\,\cos x\,, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R};$

(c) $y = C\,\mathrm{e}^{\mathrm{arctg}\,x}\,, \qquad C \in \mathbb{R};$

(d) $y = C_1 + C_2\,\cos(2x) + C_3\,\mathrm{sen}\,(2x) + \dfrac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,x\,, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R};$

(e) $y = K\,\mathrm{e}^{x^3} - \dfrac{1}{3}\,, \qquad K \in \mathbb{R};$

(f) $y = C_1\,\mathrm{e}^{-2x} + (C_2 + C_3 x + 2x^2)\,\mathrm{e}^{x}\,, \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

21. $y = Cx^2 + x^3 + K\,, \qquad C, K \in \mathbb{R}.$

22. (a) –

(b) $y = C_1 x + C_2 e^x\,, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

(c) $y = C_1 x + C_2 e^x + x^2\,, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

6. Determine um integral geral para cada uma das seguintes EDOs de variáveis separáveis:

(a) $x + yy' = 0$;

$\boxed{\text{(b) } xy' - y = 0;}$ $, x > 0$

(a) $yy' = -x$

$$y\frac{dy}{dx} = -x$$

$$y\,dy = -x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$x^2 + y^2 = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

1

$$xy' - y = 0$$

$$xy' = y$$

$$x\frac{dy}{dx} = y$$

2

$$x\,dy = y\,dx$$

$$\frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{x}\,dx$$

$$\ln|y| = \ln|x| + K$$

3

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x| + K}$$

$$|y| = e^K \cdot e^{\ln|x|}$$

$$|y| = e^K|x|$$

4

$$y = \underbrace{\pm e^K}_{c}|x|$$

$$y = c|x|$$

$$y = c|x|, \quad c \in \mathbb{R}.$$

($y = 0$ também é solução de $xy' - y = 0$)

(c) $(1+x^3)y' = x^2 y, \quad y(1) = 2.$

$$(1+x^3)\frac{dy}{dx} = x^2 y$$

$$\frac{1}{y}\, dy = \frac{x^2}{1+x^3}\, dx$$

$$\ln y = \frac{1}{3}\ln(1+x^3) + C$$

$$\ln 2 = \frac{1}{3}\ln(1+1) + C$$

$$\ln 2 = \ln\left(2^{1/3}\right) + C$$

$$C = \ln\left(\frac{2}{2^{1/3}}\right) = \ln\left(2^{2/3}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\ln 2$$

$$\ln y = \frac{1}{3}\ln(1+x^3) + \frac{2}{3}\ln 2$$

$$y = e^{1/3 \ln(1+x^3) + \frac{2}{3}\ln 2}$$

$$y = e^{\ln\left((1+x^3)^{1/3} \times 2^{2/3}\right)} =$$

$$= \sqrt[3]{4+4x^3}$$

13. Resolva as seguintes equações diferenciais lineares usando fatores integrantes:

(a) $y' + 2y = \cos x$;

(b) $x^3 y' - y - 1 = 0$;

(a) $\mu(x) = e^{\int 2\,dx} = e^{2x}$

$$e^{2x}(y' + 2y) = e^{2x}\cos x$$

$$(y e^{2x})' = e^{2x}\cos x$$

$$y e^{2x} = \int e^{2x}\cos x\,dx$$

$$y(x) = e^{-2x}\int e^{2x}\cos x\,dx$$

(por partes, duas vezes)

$$= e^{-2x}\left(\frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C\right)$$

(b) $x^3 y' - y - 1 = 0$;

$$y' - \frac{1}{x^3}y = \frac{1}{x^3}, \quad p(x) = -x^{-3}$$

$$\int -x^{-3}\,dx = -\frac{x^{-3+1}}{-3+1} = -\frac{x^{-2}}{-2} = \frac{1}{2x^2}$$

$$\mu(x) = e^{\frac{1}{2x^2}}$$

$$e^{\frac{1}{2x^2}}\left(y' - \frac{1}{x^3}y\right) = e^{1/2x^2}\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$\left(y\, e^{\frac{1}{2u^2}}\right)' = e^{1/2u^2} \cdot \frac{1}{u^3}$$

$$y\, e^{1/2u^2} = \int e^{\frac{1}{2}u^{-2}} \cdot u^{-3}\, du$$

$$y\, e^{\frac{1}{2}u^{-2}} = -\, e^{\frac{1}{2}u^{-2}} + C$$

$$y = -1 + c\, e^{-u^{-2}/2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

15. Resolva as seguintes equações diferenciais de Bernoulli:

(a) $xy' + y = y^2 \ln x, \quad x > 0;$

(b) $y' - \dfrac{y}{2x} = 5x^2y^5, \quad x \neq 0.$

(a) $y' + \frac{1}{x} y = \frac{\ln x}{x} y^2$ → Bernoulli com $\alpha = 2$

$z = y^{-1}$

$z' = -y^{-2} y'$

$$y^{-2} y' + \frac{1}{x} y^{-1} = \frac{\ln x}{x}$$

$$-z' + \frac{1}{x} z = \frac{\ln x}{x}$$

$$z - \frac{1}{x} z = -\frac{\ln x}{x}$$

$$\mu(x) = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1} = 1/x$$

$$\frac{1}{x}\left(z - \frac{1}{x} z\right) = \frac{1}{x}\left(-\frac{\ln x}{x}\right)$$

$$\left(z \cdot \frac{1}{x}\right)' = -\frac{\ln x}{x^2}$$

$$z \cdot \frac{1}{x} = -\int \underbrace{\ln x}_{v} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{u'} \, dx$$

$$z \cdot \frac{1}{x} = -\left(-\frac{1}{x} \ln x - \int -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \, dx\right)$$

$$z \cdot \frac{1}{x} = \left(+\frac{1}{x} \ln x - \frac{x^{-1}}{-1} + C\right)$$

$$z = + \ln x + 1 + Cx$$

$$y = \frac{1}{Cx + \ln x + 1}$$

(b) $y' - \dfrac{y}{2x} = 5x^2y^5\,, \qquad x \neq 0.$

16. Usando o método da variação das constantes, determine a solução geral das seguintes EDOs lineares:

(a) $y' - \dfrac{2y}{x} = x^3$;

(b) $y' \operatorname{sen} x + y \cos x = \operatorname{sen}^2 x$;

(c) $y' - \dfrac{x}{x^2+1}\, y = \sqrt{x^2+1}$, (rever EDO do 13 (c)).

① Escrever a eq. na forma normal *

② Determinar o fator integrante μ

③ Multiplicar a eq. por μ

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x)} \; *$$

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$$

$$\boxed{(\mu y)' = \mu(x)\, q(x)}$$

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{x}{x^2+1}\,dx} = e^{-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)} = e^{\ln\left((x^2+1)^{-1/2}\right)} = (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$(x^2+1)^{-1/2}\, y' + (x^2+1)^{-1/2}\left(-\frac{x}{x^2+1}\right) y = (x^2+1)^{-1/2}\sqrt{x^2+1}$$

$$\underbrace{(x^2+1)^{-1/2}\, y' - (x^2+1)^{-3/2}\cdot x\, y} = (x^2+1)^{-1/2+1/2}$$

$$\left((x^2+1)^{-1/2}\, y\right)' = 1$$

$$(x^2+1)^{-1/2}\, y = x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$y = (x+C)\sqrt{x^2+1}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$\cancel{x\sqrt{x^2+1}+C}$

Equações lineares homogéneas associadas às

17. Determine a solução geral das seguintes EDOs lineares:

(a) $y' + y = \operatorname{sen} x$;

(b) $y'' - y + 2\cos x = 0$;

(c) $y'' + y' = 2y + 3 - 6x$;

(d) $y'' - 4y' + 4y = x\,e^{2x}$;

(e) $y'' + y' = e^{-x}$;

(f) $y'' + 4y = \operatorname{tg}(2x)$;

(g) $y''' + y' = \operatorname{sen} x$;

(h) $y'' + 9y = \operatorname{sen} x - e^{-x}$.

$R \rightarrow e^{Rx}$

$\alpha \pm i\beta \rightarrow e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

(f) L. Hom. ass.

$y'' + 4y = 0$

$P(R) = R^2 + 4$

$P(R) = 0 \Leftrightarrow R = \pm 2i$

$e^{0x}\cos(2x),\ e^{0x}\sin(2x)$

$SFS = \{\cos(2x), \sin(2x)\}$

$y_H = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

17. Determine a solução geral das seguintes EDOs lineares:

(a) $y' + y = \operatorname{sen} x$;

(b) $y'' - y + 2\cos x = 0$;

(c) $y'' + y' = 2y + 3 - 6x$;

(d) $y'' - 4y' + 4y = x\,e^{2x}$;

(e) $y'' + y' = e^{-x}$;

(f) $y'' + 4y = \operatorname{tg}(2x)$;

(g) $y''' + y' = \operatorname{sen} x$;

(h) $y'' + 9y = \operatorname{sen} x - e^{-x}$.

(b) $y'' - y = \overbrace{-2\cos x}^{b(x)}$

$$\boxed{\begin{array}{l} y'' - y = 0 \\ p(r) = r^2 - 1 = \\ (r-1)(r+1) \\ y_H = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} \end{array}}$$

$-2\cos x = P_m(x)\, e^{\alpha x} \cos(\beta x)$

$\alpha = 0,\ \beta = 1,\ P_m(x) = -2$ (grau 0)

$\alpha + i\beta = i$ não é soluções de $p(r)$

$\Rightarrow K = 0$

$y_p = x^K e^{\alpha x}\left(Q(x)\cos(\beta x) + R(x)\sin(\beta x)\right) =$

$= x^0 \cdot e^0 \cdot (A\cos x + B\sin x)$

$y_p = A\cos x + B\sin x = \cos x$

(d) $y'' - 4y' + 4y = x\,e^{2x}$;

$b(x) = P_m(x)\, e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ com

$P_m(x) = x$ (grau 1), $\alpha = 2$, $\beta = 0$

$\alpha + i\beta = 2$ é raiz de $P(r)$ com multiplicidade 2

$\Rightarrow k = 2$

$$y_p = x^k e^{\alpha x}\left(Q(x)\cos(\beta x) + R(x)\sin(\beta x)\right) =$$

$$= x^2 \cdot e^{2x} \cdot \left((Ax+B)\cos 0 + (Cx+D)\sin 0\right)$$

$$y_p = (Ax^3 + Bx^2) \cdot e^{2x}$$

$$y_p' = \left(2Ax^3 + (3A+2B)x^2 + 2Bx\right)e^{2x}$$

$$y_p'' = \left(4Ax^3 + (12A+4B)x^2 + (6A+8B)x + 2B\right)e^{2x}$$

(d) $y'' - 4y' + 4y = x\,e^{2x}$; $\Leftarrow$

$$\left(\cancel{(4A - 8A + 4A)x^3} + (\cancel{12A} + \cancel{4B} - \cancel{12A} - \cancel{8B} + \cancel{4B})x^2 + (6A + \cancel{8B} - \cancel{8B})x + 2B\right)e^{2x} = x\,e^{2x}$$

$$\begin{cases} 6A = 1 \\ 2B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1/6 \\ B = 0 \end{cases}$$

$$y_p = \frac{1}{6} x^3 e^{2x}$$

(g) $y''' + y' = \operatorname{sen} x$;

(h) $y'' + 9y = \operatorname{sen} x - e^{-x}$.

(g) $b(x) = \underbrace{1}_{P_m(x)} \times \underbrace{e^{0x}}_{\alpha = 0} \times \underbrace{\sin x}_{\beta = 1}$ $\quad \left(P(r) = r(r^2+1) \right)$

(grau 0)

$\alpha + i\beta = 0 + i = i$ é raiz de $P(r) \Rightarrow K = 1$

$$y_p = x^1 \cdot e^{0x} \cdot (A\cos x + B\sin x)$$

$$y_p = Ax\cos x + Bx\sin x$$

(h) $y'' + 9y = \operatorname{sen} x - e^{-x}.$

① $y'' + 9y = \sin x \rightarrow \alpha = 0, \beta = 1$

② $y'' + 9y = -e^{-x} \rightarrow \alpha = -1, \beta = 0$

$$\left(\begin{array}{l|l} y'' + 9y = 0 & P(r) = 0 \Leftrightarrow r = \pm 3i \\ P(r) = r^2 + 9 & Y_H = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x), \\ & \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{array} \right)$$

① $y_{p_1} = e^{0x} \cdot (A \cos x + B \sin x)$

② $y_{p_2} = e^{-x} (A \cos(0) + B \sin 0)$