Exercício 6.20 Determine a área da região de $\mathbb{R}^2$ delimitada pelos gráficos de $f(x) = \sqrt{4+x^2}$ e $g(x) = x$ e pelas retas de equações $x = -2$ e $x = 2$.

$$f(x) = \sqrt{4+x^2} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x = g(x)$$

$$\text{Área} = \int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))\,dx = \int_{-2}^{2} \sqrt{4+x^2}\,dx - \underbrace{\int_{-2}^{2} \underbrace{x}_{\text{ímpar}}\,dx}_{=0}$$

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4+x^2}\,dx =$$

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\underbrace{tg^2 t + 1} = \sec^2 t$$

$$x = 2\,tg\,t$$

$$dx = 2\sec^2 t\,dt$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{4 + 4tg^2 t} \cdot 2\sec^2 t\,dt = 4\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^3 t\,dt$$

$$= 4\left[\frac{1}{2}\sec(t)\,tg\,t + \frac{1}{2}\ln|\sec t + tg\,t|\right]_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

$$\int \sec^3 t\,dt = \frac{1}{2}\sec(t)\,tg(t) + \frac{1}{2}\ln|\sec t + tg\,t| + C$$

Sol: $2\sqrt{2} + 2\ln(\sqrt{2}+1)$

Exercício 6.21 Considere a função F dada por

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \underbrace{\frac{1}{1+t^2}}_{f(t)}dt$$

para $x \in [1, +\infty[$. Determine $F(1)$. e $F'(1)$.

$$F(1) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt + \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt =$$

$$= 2\left[\arctan t\right]_0^1 = 2(\underbrace{\arctan 1}_{\pi/4} - \underbrace{\arctan 0}_{0}) = \frac{\pi}{2}$$

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$F'(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times (-1) = 0.$$

Exercício 6.23 Considere a função definida por $f(x) = \int_0^x \overbrace{\frac{1}{1+t+t^2}}^{h(t)}\, dt$. Determine o subconjunto de $\mathbb{R}$ onde o gráfico da função f tem concavidade voltada para cima.

$$f'(u) = h(u)\underbrace{(u)'}_{=1} - h(0)\underbrace{(0)'}_{=0} = h(u) = \frac{1}{1+u+u^2}$$

$$f''(u) = \left(\frac{1}{1+u+u^2}\right)' = -\frac{\overbrace{1+2u}}{\underbrace{(1+u+u^2)^2}_{>0}}$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

u		$-\frac{1}{2}$	
f''	$+$		$-$
f	$\cup$		$\cap$

f tem concavidade voltada para cima em $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$

Exercício 6.24 Prove que se f é uma função contínua em $\mathbb{R}$ e a é uma constante arbitrária, então

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx.$$

$$\int_0^a f(a-u)\,du = \int_a^0 f(t)(-1)\,dt = -\int_a^0 f(t)\,dt = \int_0^a f(t)\,dt = \int_0^a f(u)\,du$$

$\overbrace{a-u}^{h^{-1}(u)} = t$

$u = \underbrace{a-t}_{h(t)}$

$du = (-1)\,dt$

Universidade de Aveiro 23 de janeiro de 2023
Exame Final de Cálculo I - Agrupamento 2 Duração total: 2 horas 30 minutos

Esta prova é constituída por 8 questões. A questão 8 deve ser respondida no próprio enunciado e entregue com as restantes folhas de resposta.

1. (**40 pts**) Considere a função definida por

$$f(x) = \text{arcsen}\,(1 - e^x).$$

(a) Determine o domínio e o contradomínio de f.
(b) Calcule a derivada da função f e estude f quanto a intervalos de monotonia.
(c) A função f admite máximo absoluto? E mínimo absoluto? Justifique a sua resposta.
(d) A função f admite assíntotas? Em caso afirmativo, determine-as.
(e) Determine a inversa da função f, indicando expressão analítica, domínio e contradomínio.

(a) $D_f = \{ x \in \mathbb{R} : -1 \leq 1 - e^x \leq 1 \} =]-\infty, \ln 2]$

$-2 \leq -e^x \leq 0$

$0 \leq e^x \leq 2 \Leftrightarrow$

$e^x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq \ln(2)$

CD_f $\qquad u \in CD_f \qquad x \leq \ln 2$

$0 < e^x \leq 2$

$-2 \leq -e^x < 0$

$-1 \leq 1 - e^x < 1$

$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(1 - e^x) < \pi/2$

$CD_f = [-\pi/2, \frac{\pi}{2}[$

$$f(x) = \text{arcsen}\,(\underbrace{1 - e^x}_{u}).$$

(b) $f'(x) = \dfrac{-\overbrace{(e^x)}^{>0}}{\underbrace{\sqrt{1 - (1 - e^x)^2}}_{>0}} < 0, \forall x \in D_{f'}$

Como $f'<0$ f é decrescente em $]-\infty, \ln 2]$.

(c) A função f admite máximo absoluto? E mínimo absoluto? Justifique a sua resposta.

$\min f = \min CD_f = -\pi/2$

$\max f = \max\left(\left[-\pi/2, \pi/2\right[\right)$ não existe.

(d) f tem uma assimptota horizontal $y = \pi/2$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \arcsin(1-e^x) = \pi/2$$

não tem mais assimptotas pois é contínua e tem mínimo em $x = \ln 2$.

(e) $D_{f^{-1}} = CD_f = \left[-\pi/2, \pi/2\right[$

$CD_{f^{-1}} = D_f =]-\infty, \ln 2]$.

$y = f(x) \Leftrightarrow y = \arcsin(1-e^x) \Leftrightarrow$

$1-e^x = \sin y \Leftrightarrow e^x = 1-\sin y$

$x = \ln(1-\sin y)$

$f^{-1}(y) = \ln(1-\sin y)$

2. (**20 pts**) Seja $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função.

(a) Defina função estritamente decrescente em I.

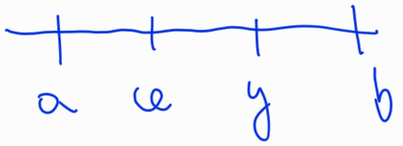
(b) Prove o seguinte resultado válido para qualquer função definida e contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$:

Se f' assume valores estritamente negativos em $]a, b[$ então f é estritamente decrescente em $[a, b]$.

(a) f é estritamente decrescente se $x < y \Rightarrow f(x) > f(y), \forall x, y \in D_f$

(b) Sejam $x, y \in [a, b]$ quaisquer com $x < y$.

f é cont. em $[x, y] \subseteq [a, b]$



e derivável em $]x, y[\subseteq]a, b[$

Pelo Teorema de Lagrange, existe $c \in]x, y[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Como $f'(c) < 0$ e $y - x > 0$ tem que ser

$f(y) - f(x) < 0$, ou seja, $f(x) > f(y)$

3. (**20 pts**) Seja f uma função racional definida em $\mathbb{R}^+$.

(a) Supondo que
$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 18}{x^2(x^2+9)^2},$$
decomponha a função em elementos simples, sem efetuar os cálculos para determinar os coeficientes.

(b) Supondo que
$$f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{x+1}{x^2+9},$$
determine $\int f(x)\,dx$.

(a) $$f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+9} + \frac{Ex+F}{(x^2+9)^2}$$

(b) $$\int \left(\frac{2}{x^2} - \frac{x+1}{x^2+9} \right) dx =$$

$$= \int 2x^{-2}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+9}\,dx - \frac{1}{9}^{\times 3}\int \frac{1^{\times \frac{1}{3}}}{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1}\,dx$$

$$= 2\frac{x^{-1}}{-1} - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+9\right) - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) + C,$$

$C \in \mathbb{R}$.

4. (**15 pts**) Fazendo uma substituição adequada, determine $\displaystyle\int_1^8 \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$ $=$

$\sqrt[3]{u} - 1 = t^2, \quad t > 0$

$\sqrt[3]{u} = t^2 + 1$

$u = (t^2+1)^3$

$du = 3(t^2+1)^2 \cdot 2t\,dt$

$u = 1 \Rightarrow t = 0$

$u = 8 \Rightarrow t^2 = \sqrt[3]{8} - 1$

$t^2 = 1 \underset{t>0}{\Leftrightarrow} t = 1$

$$= \int_1^8 \frac{\sqrt{\sqrt[3]{u}-1}}{(\sqrt[3]{u})^2}\,du$$

$$= \int_0^1 \frac{\sqrt{t^2}}{\cancel{(t^2+1)^2}} \cdot 3\cancel{(t^2+1)^2}\, 2t\,dt$$

$$= 6\int_0^1 t^2\,dt = 6\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = 2$$

5. (**30 pts**) Considere a função g definida em $\mathbb{R}$ por

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x \cos^2 x & \text{se} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{\sqrt{x}}{2} & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

(a) Determine as famílias de primitivas

(i) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos^2 x \, dx$; (ii) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{2} \, dx$.

(b) Justifique que a função g é integrável em qualquer intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ com $b > a$.

(c) Calcule a área da região do plano limitada pelo gráfico de g, pelo eixo Ox e pelas retas de equação $x = -\dfrac{\pi}{2}$ e $x = 2$.