6.7 Aplicação do integral de Riemann ao cálculo de áreas

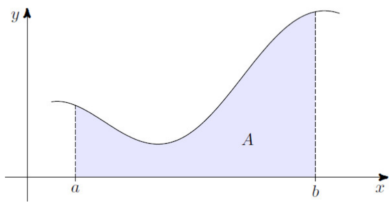


Figura 6.10: Área sob o gráfico da função f.

Seja f uma função não negativa e contínua num intervalo $[a, b]$. A área A da região limitada pelo gráfico de f, pelo eixo Ox e pelas retas de equações $x = a$ e $x = b$ (ver figura 6.10) é dada por

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

Se f é uma função contínua num intervalo $[a, b]$ então $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$ é a área da região limitada pelo gráfico de f, pelo eixo Ox e pelas retas de equações $x = a$ e $x = b$.

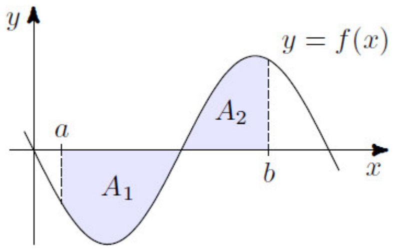


Figura 6.11: Área da região limitada pelo gráfico da função f, pelo eixo das abcissas e pelas retas $x = a$ e $x = b$.

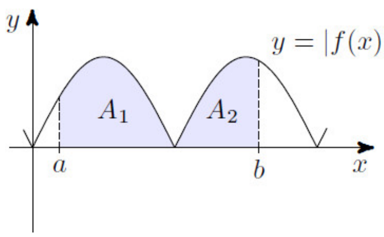


Figura 6.12: Área da região limitada pelo gráfico da função $|f|$, pelo eixo das abcissas e pelas retas $x = a$ e $x = b$.

Exercício resolvido 6.2. Considere a função real de variável real dada por $f(x) = \dfrac{x^3}{2x-2}$.

1. Estude o sinal da função f.
2. Exprima, em termos de integrais definidos, a área da região do plano limitada pelo eixo Ox, pelas retas de equações $x = -1$ e $x = \frac{1}{2}$ e pelo gráfico de f.

Resolução do exercício 6.2. Para determinar o sinal da função f podemos construir um quadro de sinal

		0		1	
x^3	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x) = \frac{x^3}{2x-2}$	$+$	0	$-$	ND	$+$

Portanto, $f(x) \leq 0$, em $[0, 1[$ e $f(x) > 0$ em $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

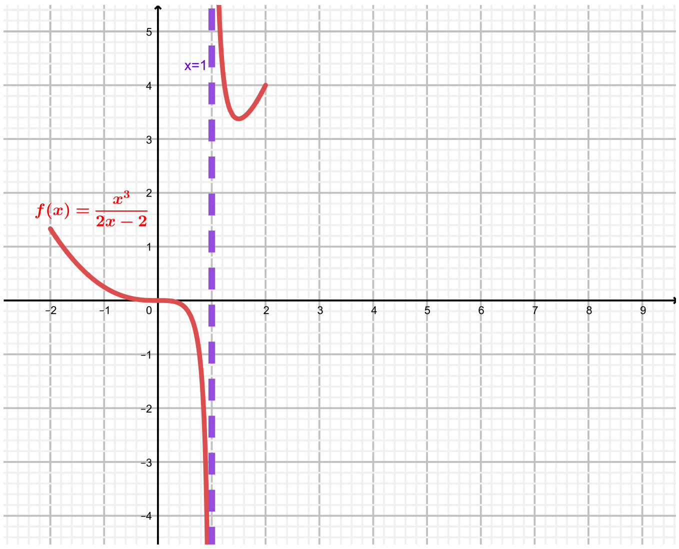


Figura 6.13: Esboço do gráfico da função f.

A área pedida é dada por

$$A = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} |f(x)|\, dx = \int_{-1}^{0} \frac{x^3}{2x-2}\, dx + \int_{0}^{-\frac{1}{2}} \frac{x^3}{2x-2}\, dx$$

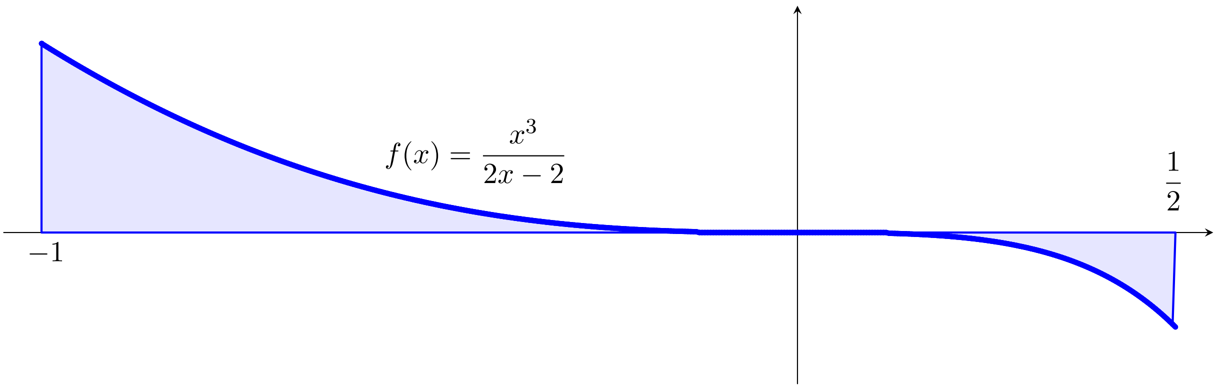


Figura 6.14: Área referente ao exercício 6.2.

Uma primitiva de $f(x) = \frac{x^3}{2x-2}$ [1] é $F(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1|\right)$ e portanto,

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1|\right)\Bigg|_{-1}^{0} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1|\right)\Bigg|_{0}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{12}.$$

6.7.1 Área compreendida entre duas curvas

Sejam f e g funções contínuas em $[a, b]$. A área A da região do plano limitada inferiormente pelo gráfico de g e limitada superiormente pelo gráfico de f e pelas retas de equações $x = a$ e $x = b$, é dada por

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

[1]Note que $\frac{x^3}{2x-2} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2(x-1)}$.

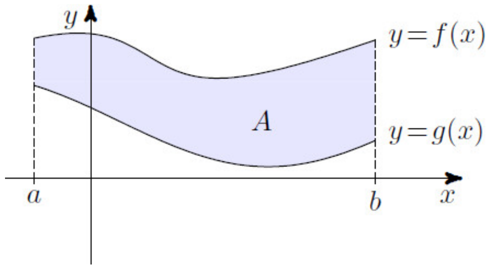


Figura 6.15: Área compreendida entre duas funções não negativas em $[a, b]$.

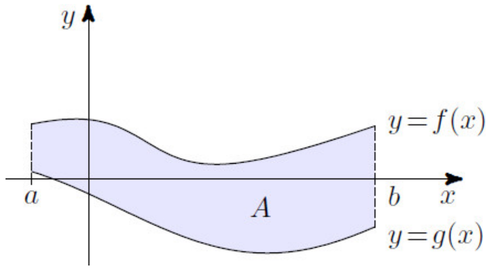


Figura 6.16: Área compreendida entre duas funções em $[a, b]$.

Observe que, em geral, a área A da região do plano limitada pelo gráfico de f, pelo gráfico de g e pelas retas de equações $x = a$ e $x = b$, é dada por

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Exercício resolvido 6.3. Exprima, em termos de integrais definidos, a área da região do plano delimitada pelos gráficos das funções $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$ e pelas retas $x = -\pi$ e $x = \pi$.

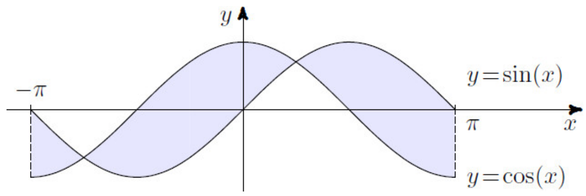


Figura 6.17: Área da região definida no exercício 6.3.

Resolução do exercício 6.3. No intervalo $[-\pi, \pi]$ as duas funções intersetam-se em $-\dfrac{3\pi}{4}$ e em $\dfrac{\pi}{4}$.

A área sombreada é dada por

$$A = \int_{-\pi}^{\pi} |\operatorname{sen} x - \cos x|\, dx.$$

Atendendo ao gráfico e aos pontos de interseção das duas funções, podemos concluir que

$$A = \int_{-\pi}^{-\frac{3\pi}{4}} (\operatorname{sen} x - \cos x)\, dx + \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \operatorname{sen} x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\operatorname{sen} x - \cos x)\, dx.$$

Assim,

$$A = (-\cos x - \operatorname{sen} x)|_{-\pi}^{-\frac{3\pi}{4}} + (\operatorname{sen} x + \cos x)|_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - (\cos x + \operatorname{sen} x)|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = 4\sqrt{2}.$$

Exercício 6.11 Exprima, em termos de integrais definidos, a área da região limitada pelos gráficos das funções dadas por $f(x) = \dfrac{1 + \cos^2 x}{1 + e^{2x}}$ e $g(x) = \dfrac{\cos^2 x}{1 + e^{2x}}$, em $[\ln 2, \ln 5]$.

Mostre ainda que, quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, a área da região limitada pelos gráficos das duas funções em $[a, b]$ é dada por $\dfrac{1}{2} \ln \left(\dfrac{1 + e^{2a}}{1 + e^{2b}} \right) + b - a$.

Exercício 6.12 Exprima, em termos de integrais definidos, a área da região do primeiro quadrante limitada pela parábola de equação $y = x^2 - 2x + 2$ e pela reta que lhe é tangente no ponto $(2, 2)$.

6.8 Exercícios do capítulo

Exercício 6.13 Calcule os seguintes integrais definidos:

1. $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\cos(e^{-x})\,dx$
2. $\displaystyle\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$ (Suggestão: Faça a substituição $t=\sqrt{x}$)

Exercício 6.14 Considere a função F definida por

$$F(x)=\int_{x^2}^{k\ln(x)} e^{-t^2}\,dt$$

1. Determine a expressão da derivada de F, $F'(x)$.
2. Determine $k\in\mathbb{R}$ de modo a que $F'(1)=0$.

Exercício 6.15 Considere a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x)=xe^x$.

1. Diga, justificando, se a função f é integrável em qualquer intervalo $[a,b]\subset\mathbb{R}$ com $b>a$.
2. Calcule o valor da área da região limitada do plano situada entre $x=-1$ e $x=1$ e compreendida entre o gráfico de f e o eixo das abcissas.

Exercício 6.16 Considere a função F definida por $F(x)=\displaystyle\int_0^{x^2} e^{-t^2}\arctan t\,dt$, para todo o $x\in\mathbb{R}$.

1. Determine $F'(x)$ e o seu domínio.
2. Estude F quanto à existência de extremos locais.

Exercício 6.17 Considere a função F definida por $F(x)=\displaystyle\int_0^{x^2} t\ln\left(1+e^t\right)dt$, para todo o $x\in\mathbb{R}$.

1. Justifique que F é diferenciável em $\mathbb{R}$ e determine $F'(x)$.
2. Estude F quanto à monotonia e existência de extremos locais.

Exercício 6.18 Exprima, em termos de integrais definidos, a área da região assinalada na figura

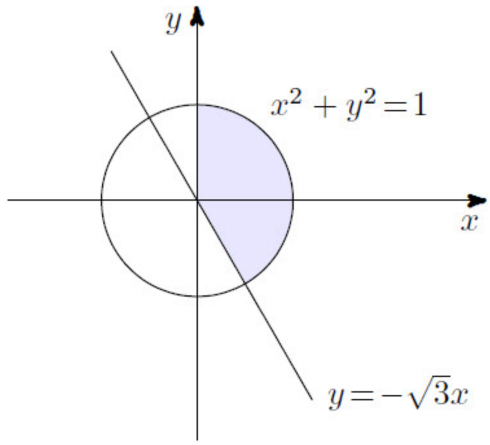


Figura 6.18: Área da região definida no exercício 6.18.

Exercício 6.19 Seja $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq (x-3)^2 \wedge y\geq x-1 \wedge y\leq 4\right\}$.

1. Represente geometricamente a região A.
2. Calcule a área da região A.

Exercício 6.20 Determine a área da região de $\mathbb{R}^2$ delimitada pelos gráficos de $f(x)=\sqrt{4+x^2}$ e $g(x)=x$ e pelas retas de equações $x=-2$ e $x=2$.

Exercício 6.21 Considere a função F dada por

$$F(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt+\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}dt$$

para $x\in[1,+\infty[$. Determine $F(1)$.

Exercício 6.22 Considere a função real de variável real f definida por

$$f(x)=\begin{cases} x\ln x & \text{se} \quad x>0 \\ \\ k & \text{se} \quad x\leq 0 \end{cases}, \quad \text{onde } k \text{ é um número real.}$$

1. Diga, justificando, para que valores de k a função f é integrável no intervalo $[-1,1]$.
2. Determine a família de primitivas $\displaystyle\int x\ln x\,dx$, definidas no intervalo $]0,+\infty[$.
3. Determine o valor da área da região limitada do plano situada entre $x=1/e$ e $x=e$ e delimitada pelo gráfico de f e pelo eixo das abcissas.

Exercício 6.23 Considere a função definida por $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t+t^2}\,dt$. Determine o subconjunto de $\mathbb{R}$ onde o gráfico da função f tem concavidade voltada para cima.

Exercício 6.24 Prove que se f é uma função contínua em $\mathbb{R}$ e a é uma constante arbitrária, então

$$\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a f(a-x)\,dx.$$

Soluções dos exercícios

Exercício 6.1 1. $S_f(\mathcal{P},\mathcal{C}_1)=\dfrac{125}{216}$; 2. $S_f(\mathcal{P},\mathcal{C}_2)=\dfrac{23}{72}$; 3. $S_f(\mathcal{P}',\mathcal{C}')=\dfrac{7}{32}$.

Exercício 6.2 $S_f(\mathcal{P},\mathcal{C}_1)=-\dfrac{125}{216}$.

Exercício 6.4 $\displaystyle\int_0^3 (2x+1)dx = 12.$

Exercício 6.5

1. f é contínua em $[-1,2]$, logo, pelo teorema 6.1 é integrável.
2. g e limitada em $[1,5]$ e descontínua apenas nos inteiros $\{1,2,3,4,5\}$, logo, pelo teorema 6.2 é integrável.
3. h é limitada em $[0,3]$ e descontínua em $x=1$, logo, pelo teorema 6.2 é integrável.
4. A função h não é limitada em $[0,1]$, logo, pelo teorema 6.5 não é integrável neste intervalo.
5. A função i não é limitada em $[0,\pi]$ já que $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} i(x)=+\infty$, logo, pelo teorema 6.5, i não é integrável neste intervalo.

Exercício 6.7 Sim. $\displaystyle\int_0^2 g(x)dx = 2$

Exercício 6.9

1. $F'(x)=2(x+1)\displaystyle\int_0^{\operatorname{sen} x} \operatorname{arcsen} t\,dt + (x+1)^2\cos x\,x.$
2. $k=\dfrac{2}{e}$.
3. $F''(x)=e^{-x^2}$.
4. $x=3$ é um maximizante de F.

Exercício 6.10

1. $\displaystyle\int_0^5 xe^{3x^2+4}dx=\frac{1}{6}\left(e^{79}-e^4\right);$
2. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{1+(2x)^2}dx=\frac{1}{2}\arctan 4;$
3. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x(2x+4)}dx=\frac{1}{4}\ln\frac{18}{10}.$

Exercício 6.11 $A=\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 5}\frac{1}{1+e^{2x}}\,dx.$

Exercício 6.12 $A=\displaystyle\int_0^1 (x^2-2x+2)\,dx+\int_1^2 (x^2-4x+4)\,dx.$

Exercício 6.13 1. $\operatorname{sen} 1-\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{e}\right)$; 2. $2(1+\ln 2)$.

Exercício 6.14 1. $F'(x)=e^{-k^2\ln^2 x}-2xe^{-x^4}$; 2. $k=\dfrac{2}{e}$.

Exercício 6.15 1. Sim, porque é uma função contínua em $\mathbb{R}$, logo também o é em qualquer intervalo $[a,b]$. 2. $2-2/e$.

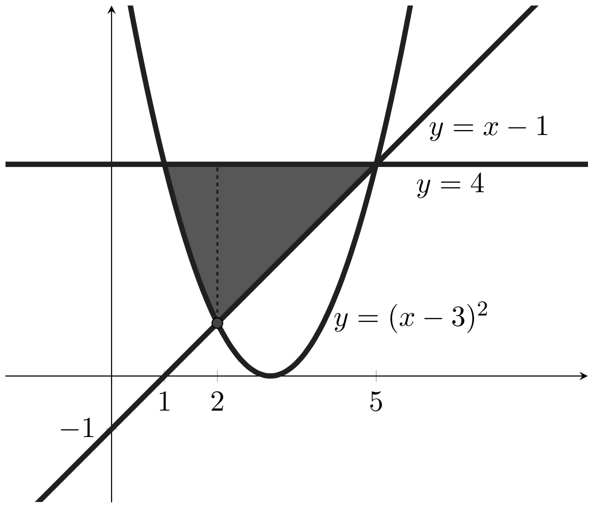
Exercício 6.16 1. $F'(x) = 2xe^{-x^4} \arctan(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$; 2. F admite um mínimo absoluto em $x = 0$ sendo $F(0) = 0$. Não tem máximo.

Exercício 6.17 1. $F'(x) = 2x^3 \ln(1 + e^{x^2})$; 2. F tem um mínimo absoluto em $x = 0$ e é zero; é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$ e estritamente crescente em $]0, +\infty[$.

Exercício 6.18 $A = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{3}\, x\, dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\, dx.$

Exercício 6.19

1.



2. $A = \dfrac{37}{6}$.

Exercício 6.20 $A = \dfrac{32}{3}$.

Exercício 6.21 $A = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercício 6.22 1. Para qualquer valor de k a função é secionalmente contínua (note que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$), logo integrável em qualquer intervalo de números reais. Em particular, se $k = 0$ a função é contínua. 2. $F(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$, $C \in \mathbb{R}$; 3. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4e^2} + \dfrac{e^2}{4}$.

Exercício 6.23 O gráfico tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right[$

Exercício 6.24 Se f é contínua em $\mathbb{R}$, então é integrável em qualquer intervalo da forma $[0, a]$, com $a \in \mathbb{R}$. Efetuando a mudança de variável $u = a - x$ ($x = a - u$, $dx = -1 \cdot du$, $x = 0 \Rightarrow u = a$ e $x = a \Rightarrow u = 0$), obtém-se

$$\int_0^a f(a-x)\, dx = \int_a^0 f(u)(-1) du = -\int_a^0 f(u)\, du = \int_0^a f(u)\, du = \int_0^a f(x)\, dx,$$

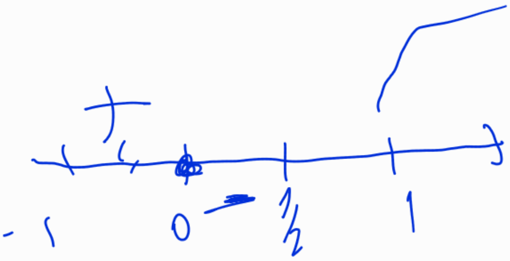
o que demonstra a propriedade pedida.

Exercício resolvido 6.2. Considere a função real de variável real dada por $f(x) = \dfrac{x^3}{2x-2}$.

1. Estude o sinal da função f.
2. Exprima, em termos de integrais definidos, a área da região do plano limitada pelo eixo Ox, pelas retas de equações $x = -1$ e $x = \frac{1}{2}$ e pelo gráfico de f.

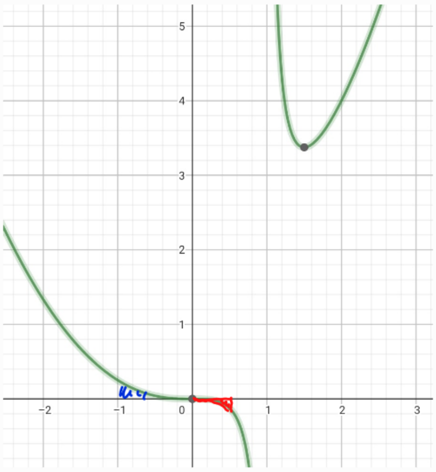
1.

x	$-$	0	$+$	1	$+$
x^3	$-$	0	$+$		$+$
$2x-2$	$-$	-2	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	ND	$+$



2. $\text{Área} = \cancel{\int_{-1}^{1/2} f(x)\,dx}$

$$= \int_{-1}^{0} f(x)\,dx - \int_{0}^{1/2} f(x)\,dx$$



$$\int \frac{x^3}{2x-2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{x^3}{x-1}\,dx =$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 & x-1 \\ \hline -x^3+x^2 & x^2+x+1 \\ \hline x^2 & \\ -x^2+x & \\ \hline x & \\ -x+1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$\int \frac{x^3}{2x-2}\,dx = \frac{1}{2}\int \left(x^2+x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{u^3}{3}+\frac{u^2}{2}+u+\ln|u-1|\right)}_{F(u)} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int_{-1}^{0} f(u)\,du - \int_{0}^{1/2} f(u)\,du = \Big[F(u)\Big]_{-1}^{0} - \Big[F(u)\Big]_{0}^{1/2}$$

Exercício resolvido 6.3. Exprima, em termos de integrais definidos, a área da região do plano delimitada pelos gráficos das funções $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$ e pelas retas $x = -\pi$ e $x = \pi$.

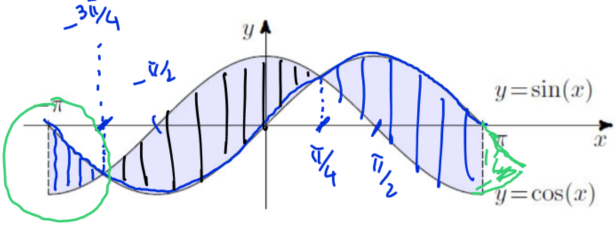


Figura 6.17: Área da região definida no exercício 6.3.

$$\text{Área} = \int_{-\pi}^{\pi} |f(u) - g(u)|\,du = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(u) - \cos(u)|\,du$$

$$= \int_{-\pi}^{-3\pi/4} (\sin u - \cos u)\,du + \int_{-3\pi/4}^{\pi/4} (\cos u - \sin u)\,du + \int_{\pi/4}^{\pi} (\sin u - \cos u)\,du$$

$$2 \times \int_{-3\pi/4}^{\pi/4} (\cos u - \sin u)\,du =$$

$$= 2 \times \Big[\sin u + \cos u\Big]_{-3\pi/4}^{\pi/4} = 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

$$= \cancel{2} \times \frac{4}{\cancel{2}}\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$$

Exercício 6.11 Exprima, em termos de integrais definidos, a área da região limitada pelos gráficos das funções dadas por $f(x) = \dfrac{1+\cos^2 x}{1+e^{2x}}$ e $g(x) = \dfrac{\cos^2 x}{1+e^{2x}}$, em $[\ln 2, \ln 5]$.

Mostre ainda que, quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, a área da região limitada pelos gráficos das duas funções em $[a, b]$ é dada por $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+e^{2a}}{1+e^{2b}}\right) + b - a$.

$$\text{Área} = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \left|\left(f(u) - g(u) \right)\right| \, du$$

$$f(u) = \frac{1+\cos^2 u}{1+e^{2u}} > \frac{\cos^2 u}{1+e^{2u}} = g(u)$$

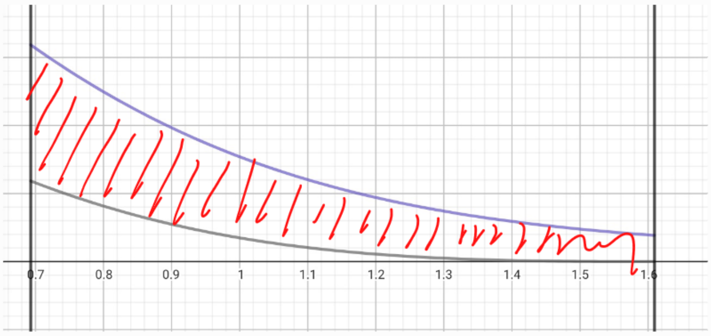
$$= \int_{\ln 2}^{\ln 5} \left(\frac{1+\cos^2 u}{1+e^{2u}} - \frac{\cos^2 u}{1+e^{2u}} \right) du = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{1}{1+e^{2u}} \, du =$$

$$= \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{1}{1+(e^u)^2} \, du =$$

$$e^u = t$$

$$u = \ln t$$

$$du = \frac{1}{t} \, dt$$



$$u = \ln 2 \Rightarrow t = 2$$

$$u = \ln 5 \Rightarrow t = 5$$

$$= \int_2^5 \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{1}{t} \, dt$$

$$= \int_2^5 \frac{1}{(t^2+1)\,t} \, dt$$

$$\frac{1}{t(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+1}$$

$$\frac{1}{t(t^2+1)} = \frac{A(t^2+1)+(Bt+C)t}{t(t^2+1)}$$

$0t^2$ $$1 = A(t^2+1)+(Bt+C)t$$

$$t=0 \Rightarrow 1 = A \times 1 + 0 \Leftrightarrow A=1$$

$$A+B=0 \Leftrightarrow B=-A \Leftrightarrow B=-1$$

$$0t^2+0t+1 = (A+B)t^2 + Ct + A$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases}$$

$$\int_2^5 \frac{1}{(t^2+1)t}\,dt = \int_2^5 \left(\frac{1}{t} + \frac{-t}{t^2+1}\right) dt$$

$$= \left[\ln t - \frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right]_2^5 =$$

$$\ln 5 - \frac{1}{2}\ln(26) - \ln 2 + \frac{1}{2}\ln(5)$$

Mostre ainda que, quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, a área da região limitada pelos gráficos das duas funções em $[a, b]$ é dada por $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+e^{2a}}{1+e^{2b}}\right) + b - a$.

$$\text{Área} = \int_a^b \frac{1}{1+e^{2u}}\,du =$$

$$\frac{1}{2}\left(\ln(1+e^{2a}) - \ln(1+e^{2b})\right) + b - a =$$

$$\underbrace{b - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2b})}_{F(b)} - \underbrace{\left(a - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2a})\right)}_{F(a)}$$

$$F(u) = u - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2u}) \quad , \quad F' = f$$

$$F'(u) = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{2e^{2u}}{1+e^{2u}} = 1 - \frac{e^{2u}}{1+e^{2u}} =$$

$$= \frac{1+e^{2u}-e^{2u}}{1+e^{2u}} = \frac{1}{1+e^{2u}}$$

$$= F(b) - F(a) \quad \checkmark$$

Exercício 6.12 Exprima, em termos de integrais definidos, a área da região do primeiro quadrante limitada pela parábola de equação $\boxed{y = x^2 - 2x + 2}$ e pela reta que lhe é tangente no ponto $(2, 2)$.

$f(x)$ $\qquad f'(x) = 2x - 2$

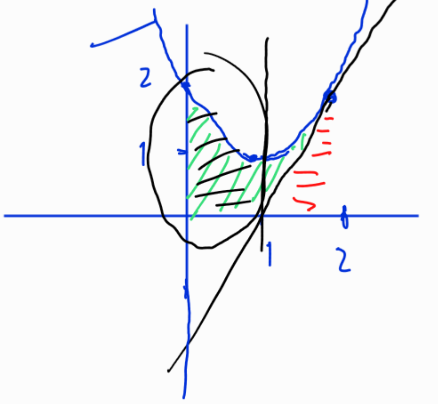
$y = mx + b$

$m = f'(2) = 2$

$y = 2x + b \qquad (x,y) = (2,2) \qquad 2 = 2\times 2 + b \Leftrightarrow b = -2$

$\boxed{y = 2x - 2}$

$y = (x-1)^2 + 1 \Leftrightarrow y - 1 = (x-1)^2$



$y = 0 \Rightarrow x = 1$

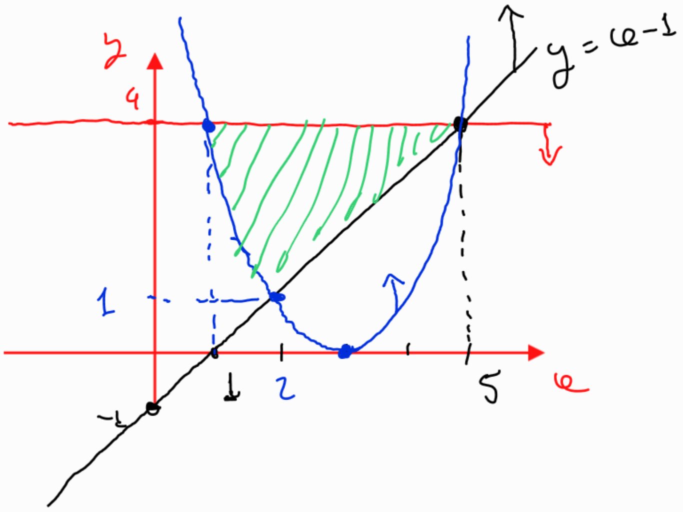
$$\text{Área} = \int_0^1 x^2 - 2x + 2 \, dx + \int_1^2 \left((x^2 - 2x + 2) - (2x - 2) \right) dx$$

$$2 \int_0^1 (x^2 - 2x + 2) \, dx - \frac{1 \times 2}{2}$$

Exercício 6.19 Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq (x-3)^2 \wedge y \geq x - 1 \wedge y \leq 4\}$.

1. Represente geometricamente a região A.
2. Calcule a área da região A.

$y = (x-3)^2$, $y = x - 1$, $y = 4$



$y = x - 1$

$y = 4 \Rightarrow x = 5$

$y = (x-3)^2$

$x = 5 \Rightarrow y = 4$

$$\begin{cases} y = (x-3)^2 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

$(x-3)^2 = x - 1$

$x^2 - 6x + 9 = x - 1$

$x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow$

$x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \dfrac{7 \pm 3}{2}$

$x = 5 \vee x = 2$

$y = (x-3)^2$

$y = 4$

$x - 3 = \pm 2$

$x = 5 \vee x = 1$

$$\int_1^2 4 - (x-3)^2 \, dx + \int_2^5 4 - (x-1) \, dx$$