Departamento de Matemática | Universidade de Aveiro

Cálculo 2 - Agrupamento I

Exame de Recurso - 03/07/2023 | **Duração: 2h30**

Questões	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Cotação	20	26	22	20	40	20	30	22	200

Justifique convenientemente as respostas e indique os cálculos que efetuar.

1. Determine o raio e o intervalo de convergência da série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}(x+1)^n.$$

2. Determine a série de MacLaurin de $g(x) = \ln(1+x)$, $|x| < 1$, e utilize-a para calcular a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}.$$

Sugestão: Use uma representação em série de potências de $\dfrac{1}{1+x}$ e considere uma sua primitiva.

3. Justifique que a série de Fourier da função 2π-periódica tal que $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi[$, é da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

(sem calcular os coeficientes $b_n \in \mathbb{R}$) e esboce o gráfico da sua função soma no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

4. Indique o domínio e represente a curva de nível 1 da função definida por

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2 + (y-1)^2}.$$

5. Considere a função definida por $f(x,y) = x^2(y-1) + y^3 + 3y^2$.
   (a) Calcule a matriz Hessiana de f.
   (b) Determine os pontos críticos de f e classifique-os.
   (c) Indique a direção e sentido de maior crescimento de f no ponto $(1,1)$ e a correspondente derivada direcional de f nesse ponto.

6. Determine um fator integrante da equação diferencial $y' + \left(1 + \frac{1}{x}\right) y = e^{-x}$, $x > 0$, e resolva-a.

7. Verifique que $y'' - 4y' + 3y = 9x$ tem uma solução particular da forma $y_p = Ax + B$ e apresente a sua solução geral..

8. Usando transformadas de Laplace, resolva o problema de Cauchy

$$y' - 2y = e^{2t}t, \quad y(0) = 0.$$

$\mathcal{L}\{y'-2y\} = \mathcal{L}\{e^{2t}t\}$

$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$

6. Determine um fator integrante da equação diferencial $y' + \left(1 + \frac{1}{x}\right) y = e^{-x}$, $x > 0$, e resolva-a.

$$\mu(x) = e^{\int \left(1+\frac{1}{x}\right)dx} \underset{(x>0)}{=} e^{x+\ln x} = e^{x} \cdot e^{\ln x} = x e^{x}$$

$$x e^{x}\left(y' + \left(1+\frac{1}{x}\right)y\right) = x e^{x} \cdot e^{-x}$$

$$\left(x e^{x} \cdot y\right)' = x$$

$$x e^{x} \cdot y = \frac{x^2}{2} + c, \; c \in \mathbb{R}$$

Solução: $y(x) = \frac{x}{2} e^{-x} + \frac{c e^{-x}}{x}, \; c \in \mathbb{R}$

7. Verifique que $y'' - 4y' + 3y = 9x$ tem uma solução particular da forma $y_p = Ax + B$ e apresente a sua solução geral..

$y = Ax + B$; $y' = A$; $y'' = 0$

$y'' - 4y' + 3y = 9x \Leftrightarrow 0 - 4A + 3(Ax + B) = 9x \Leftrightarrow 3Ax + 3B - 4A = 9x \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 3A = 9 \\ 3B - 4A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = \frac{4}{3}A = 4 \end{cases}$ $y_p = 3x + 4$

$(y_p'' - 4y_p' + 3y_p = 0 - \cancel{4 \times 3} + 3(3x + \cancel{4}) = 9x \checkmark)$

$y'' - 4y' + 3y = 0 \longrightarrow P(r) = r^2 - 4r + 3$

$P(r) = 0 \Leftrightarrow r = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r = 3 \vee r = 1$

$y_H = c_1 e^{3x} + c_2 e^{x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

solução geral: $y = y_H + y_p = c_1 e^{3x} + c_2 e^{x} + 3x + 4$

8. Usando transformadas de Laplace, resolva o problema de Cauchy

$$y' - 2y = e^{2t}t, \quad y(0) = 0.$$

$$\mathcal{L}\{y' - 2y\}(s) = \mathcal{L}\{e^{2t} \cdot t\}$$

$$sY(s) - \underbrace{y(0)}_{0} - 2Y(s) = \mathcal{L}\{t\}(s-2), \; s > 2$$

$$(s-2)Y(s) = \frac{1}{(s-2)^2}, \quad s > 2$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s-2)^3} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2} e^{2t} \cdot t^2\right\}(s), \quad s > 2$$

$$y(t) = \frac{1}{2} t^2 \cdot e^{2t}$$

(verificação: $y'(t) = t \cdot e^{2t} + t^2 e^{2t}$

$$y' - 2y = t e^{2t} + \cancel{t^2 e^{2t}} - \cancel{2 \cdot \frac{1}{2} t^2 \cdot e^{2t}} = t e^{2t}$$)