Guião 1

Funções reais de variável real

Linguagem da matemática

Revisões sobre funções reais de variável real

Funções trigonométricas inversas

Teoremas sobre funções contínuas e deriváveis

Paula Oliveira

2021/22

Departamento de Matemática - Universidade de Aveiro

Capítulo 3

As funções trigonométricas

Neste capítulo vamos focar o nosso estudo nas funções trigonométricas inversas. Começamos por recordar as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente, introduzimos as funções secante, cossecante e cotangente e finalmente fazemos o estudo das funções arco seno, arco cosseno, arco tangente e arco cotangente.

3.1 Funções trigonométricas diretas

As funções trigonométricas seno, cosseno e tangente são definidas *geometricamente* no círculo trigonométrico, como estudado no Ensino Secundário.

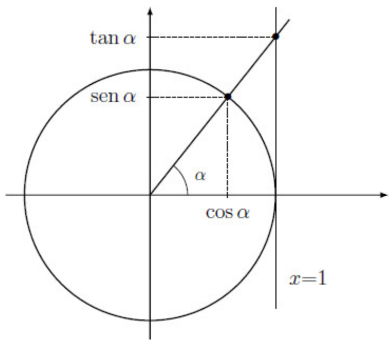


Figura 3.1: As funções seno, cosseno e tangente no círculo trigonométrico.

Exercício 3.1 Mostre que $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, determine domínio e contradomínio de sen, cos, tg e prove que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Seja $p \in \mathbb{R}^+$ e D um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ verificando a propriedade

$$x \in D \text{ se e só se } x + p \in D.$$

Uma função $f : D \to \mathbb{R}$ diz-se **periódica** com período p se e só se

$$\forall x \in D,\ f(x+p) = f(x) \tag{3.1}$$

As funções trigonométricas são periódicas. O período das funções seno e cosseno é 2π e o período da função tangente é π. Contudo, poderíamos dizer que estas funções têm outros períodos, por exemplo, 4π já que

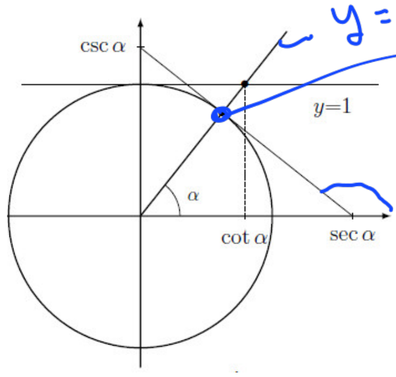
$$\operatorname{sen}(x+4\pi) = \operatorname{sen} x;\ \cos(x+4\pi) = \cos x \text{ e } \operatorname{tg}(x+4\pi) = \operatorname{tg} x.$$

Usualmente diz-se que o menor $p \in \mathbb{R}^+$ que satisfaz a condição 3.1 é o **período** da função f.

Observação 3.1. Uma função constante é periódica e o seu período é qualquer $p > 0$.

3.1.1 As funções secante, cossecante e cotangente

Para além de seno, cosseno e tangente, outras funções trigonométricas são definidas conforme indicado no círculo trigonométrico da figura 3.2: secante (sec), cossecante (csc), cotangente (cotg).



$y = mx$

$(\cos\alpha, \sin\alpha)$

$y - \sin\alpha = -\frac{1}{m}(x - \cos\alpha)$

Figura 3.2: As funções cosecante (csc), secante (sec) e cotangente (cot) no círculo trigonométrico.

3.1.1.1 A função secante

Chama-se **secante** à função

$$\begin{aligned} \sec :\ D_{\sec} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sec x = \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

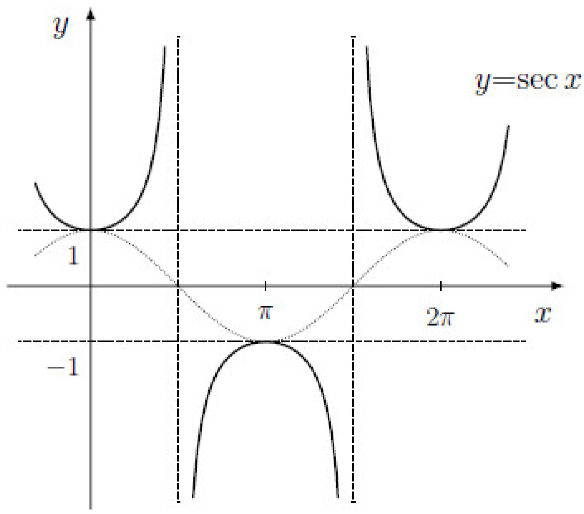


Figura 3.3: A função secante (sec).

Exercício resolvido 3.1.

1. Determine $D_{\sec}$ e $CD_{\sec}$.
2. Qual o período? Em que intervalos é monótona?
3. Verifique que $1 + \mathrm{tg}^2 x = \sec^2 x$, $\forall x \in D_{\sec}$.
4. Determine, caso existam, os zeros desta função.

Resolução:

1. $D_{\sec} = \{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$ e $CD_{\sec} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, atendendo a que $-1 \leq \cos x \leq 1$.

2. O período é o mesmo da função cosseno: $p = 2\pi$. Monótona crescente em $\left]2k\pi + \dfrac{\pi}{2}, (2k+1)\pi\right[$ e em $\left]2k\pi, 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$ (nos intervalos onde a função cosseno é decrescente) e é monótona decrescente em $\left](2k+1)\pi, (2k+1)\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$ e em $\left]2k\pi - \dfrac{\pi}{2}, 2k\pi\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$ (nos intervalos onde a função cosseno é crescente).

4. A função não tem zeros já que o numerador da expressão que a define é diferente de zero.

3.1.1.2 A função cossecante

Chama-se **cossecante** à função

$$\begin{array}{rccl} \csc: & D_{\csc} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} \end{array}$$

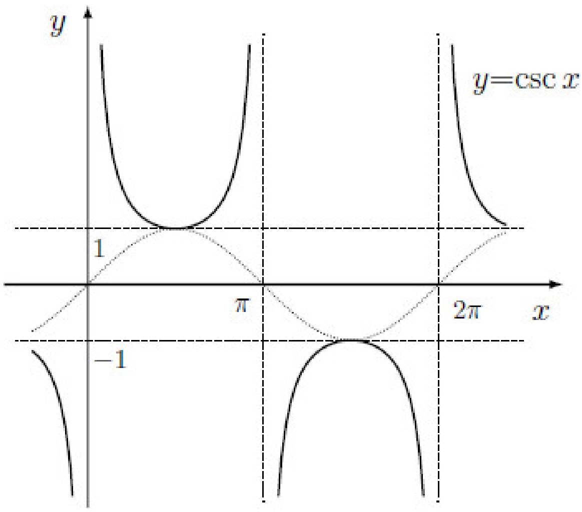


Figura 3.4: A função cossecante (csc).

Exercício 3.2 Determine $D_{\csc}$ e $CD_{\csc}$. Qual o período? Em que intervalos é monótona? Determine, caso existam, os zeros da função.

3.1.1.3 A função cotangente

Chama-se **cotangente** à função

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{cotg}: & D_{\operatorname{cotg}} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \end{array}$$

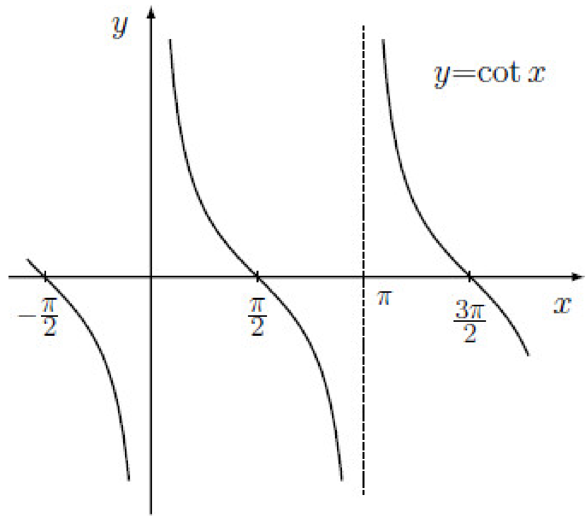


Figura 3.5: A função cotangente.

Exercício 3.3 Determine D_{cotg} e CD_{cotg}. Qual o período? Em que intervalos é monótona? Determine os zeros desta função. Verifique que $1 + \text{cotg}^2 x = \csc^2 x$, $\forall x \in D_{\text{cotg}}$.

Exercício 3.4

1. A igualdade $\text{cotg}\, x = \frac{1}{\text{tg}\, x}$ é verdadeira para todo o $x \in D_{\text{cotg}}$? É $\text{cotg}(x - \frac{\pi}{2}) = -\text{tg}\, x$?
2. Para que valores de x é verdadeira a igualdade $\frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \frac{\sec x}{\csc x}$?
3. Mostre que se $x \neq \frac{n\pi}{2}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$\text{tg}\, x + \text{cotg}\, x = \sec x \csc x \quad \text{e} \quad (\text{tg}\, x + \text{cotg}\, x)^2 = \sec^2 x + \csc^2 x$$

4. Explique porque **as funções trigonométricas não são invertíveis**

3.2 Funções trigonométricas inversas

Como se referiu, as funções trigonométricas não admitem inversa, já que, sendo periódicas não são injetivas. Contudo, podemos considerar restrições aos domínios dessas funções, onde o conjunto das imagens continua a ser o contradomínio da função original, mas o domínio escolhido faz com que as restrições a essas funções sejam funções injetivas.

3.2.1 Função arco seno

A **restrição** da função seno ao intervalo $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ é **injetiva**, logo a função

$$\begin{array}{rccl} S: & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & S(x) = \text{sen}\, x \end{array}$$

é invertível. À sua inversa chama-se **arco seno** e denota-se por arcsen.

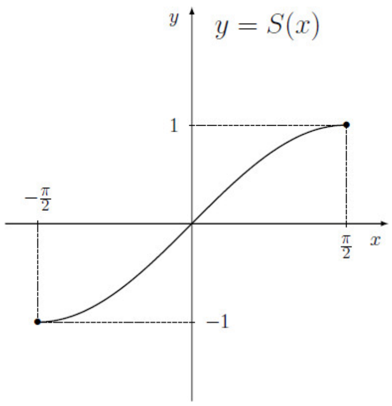


Figura 3.6: A restrição da função seno ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

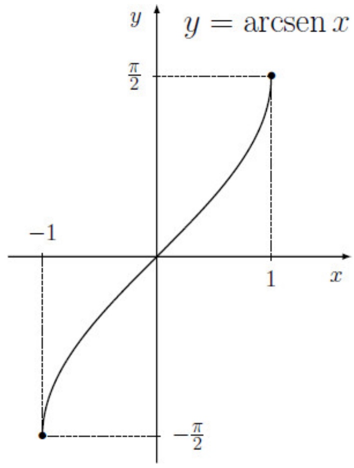


Figura 3.7: A função arco-seno.

Como o contradomínio de S é $[-1,1]$, a inversa de S é a função

$$\begin{array}{rccl} S^{-1}: & [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & S^{-1}(x) = \operatorname{arcsen} x \end{array}$$

com contradomínio $CD_{S^{-1}} = D_S = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Assim, usando a definição de S,

$$\forall x \in [-1,1], \forall y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \; y = \operatorname{arcsen} x \Leftrightarrow \operatorname{sen} y = x.$$

Pelas propriedades da função inversa escreve-se também

$$\forall x \in [-1,1], \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x \quad \text{e} \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x.$$

Exercício 3.5

1. Seja f definida por $f(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$. Pode-se afirmar que $f(x) = x$, $\forall x \in D_f$?
2. Mostre que se $-1 \leq x \leq 1$ então $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1-x^2}$.

TPC

3. Considere a função dada por $f(x) = \operatorname{arcsen}(\ln x)$.
   (a) Determine o domínio e o contradomínio de f.
   (b) Determine, caso existam, os zeros de f.

A função $f(x) = \operatorname{sen} x$ é invertível e tem derivada $f'(x) = \cos x$ não nula no intervalo $D_f =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Portanto a sua inversa é derivável (aplica-se o teorema da função inversa) e

$$\forall y \in CD_f =]-1,1[, \; (\operatorname{arcsen} y)' = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} y)} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

3.2.2 Função arco coseno

A restrição da função coseno ao intervalo $[0,\pi]$ é injetiva. Assim, a função

$$\begin{array}{rccl} C: & [0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & C(x) = \cos x \end{array}$$

é invertível. A sua inversa, designada por **arco coseno**, denota-se por arccos.

2. Mostre que se $-1 \leq x \leq 1$ então $\cos(\underbrace{\operatorname{arcsen} x}_{\alpha}) = \sqrt{1 - x^2}$.

$$\alpha \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] = CD_{\arcsin}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \underset{\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}{\Longleftrightarrow} \cos\alpha = +\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$$

$$\cos(\arcsin u) = \sqrt{1 - u^2}$$

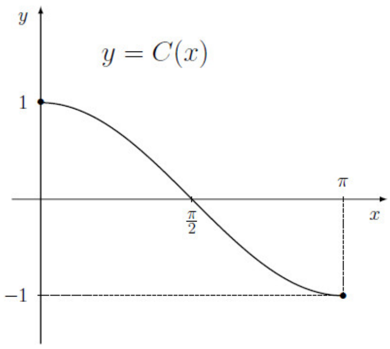


Figura 3.8: A restrição da função cosseno ao intervalo $[0, \pi]$.

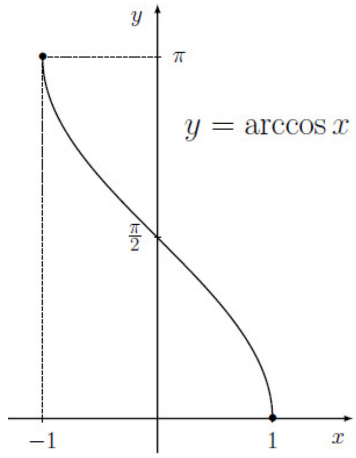


Figura 3.9: A função arco-cosseno.

Sendo $[-1,1]$ o contradomínio de C, tem-se que

$$\begin{array}{rccl} C^{-1}: & [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & C^{-1}(x) = \arccos x \end{array}$$

O domínio da função arccos é $[-1,1]$ e, pela definição de C,

$$\forall y \in [0,\pi],\ \forall x \in [-1,1],\ y = \arccos x \ \Leftrightarrow\ \cos y = x.$$

Como consequência das propriedades da função inversa obtém-se que

$$\forall x \in [-1,1],\ \cos(\arccos x) = x \quad \text{e} \quad \forall x \in [0,\pi],\ \arccos(\cos x) = x.$$

Ver o vídeo da khan academy

`https://youtu.be/-idIy_YsUGM`

Exercício 3.6

1. Seja g definida por $g(x) = \cos(\arccos x)$. Pode-se afirmar que $g(x) = x$, $\forall x \in D_g$?
2. Considere a função dada por $f(x) = \arccos(e^x)$.
   (a) Determine o domínio e o contradomínio de f.
   (b) Determine, caso existam, os zeros de f.
3. Mostre que se $-1 \leq x \leq 1$ então $\operatorname{sen}(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$.

A função $f(x) = \cos x$ é invertível e tem derivada $f'(x) = -\operatorname{sen} x$ não nula no intervalo $D_f =]0,\pi[$. Portanto a sua inversa é derivável e

$$\forall y \in CD_f =]-1,1[,\ \boxed{(\arccos y)' = -\frac{1}{\operatorname{sen}(\arccos y)} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.}$$

Exercício 3.7 Caracterize a função inversa da função f e estude-a quanto à continuidade, sendo $f(x) = \pi - \arccos(2x+1)$

Exercício 3.7 Caracterize a função inversa da função f
$f(x) = \pi - \arccos(2x+1)$

(Domínio, contradomínio e expressão que define f^{-1})

3.7

$f(x) = \pi - \arccos(2x+1)$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq 2x+1 \leq 1\}$

$-2 \leq 2x \leq 0$

$-1 \leq x \leq 0$

$CD_{f^{-1}} = [-1, 0]$

$f(x) = y$

$\pi - \arccos(2x+1) = y$

$-\arccos(2x+1) = y - \pi$

$\arccos(2x+1) = -y + \pi$

$2x+1 = \cos(-y+\pi)$

$2x = \cos(-y+\pi$

$x = \cos$

$0 \leq -y \leq$

$-\pi \leq -y \leq$

$0 \leq -y+\pi$

$f^{-1}(x) = \frac{\cos(-x+\pi) - 1}{2}$

$CD_{f^{-1}} = [-1, 0]$

$D_{f^{-1}} = [0, \pi]$

Segunda aula da semana

- Resultados VeVox
- Propriedades das funções contínuas
- Derivada da composta e derivada da inversa
- Inversas das funções tangente e cotangente
- Exercícios

Definição 2.7. *Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. f diz-se contínua se é contínua em todos os pontos de D.*

Observação 2.4. 1. Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $A \subseteq D$. f é contínua em A se e só se $f|_A$ é contínua.

2. Se a função está definida num intervalo $[a, b]$, f diz-se contínua em a se $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$. Analogamente, f diz-se contínua em b se $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

2.10.1 Propriedades das funções contínuas

Teorema 2.7. ***(Propriedades aritméticas das funções contínuas)*** *Se $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas em $a \in D_f \cap D_g$ então as seguintes funções também são contínuas em a:*

$$(a)\ \ f \pm g; \quad (b)\ \ f \cdot g; \quad (c)\ \ \frac{f}{g},\ se\ g(a) \neq 0.$$

A recíproca da proposição anterior é falsa. Dê exemplos de funções descontínuas em que

- $f \pm g$ seja contínua;
- $f \cdot g$ seja contínua;
- $\dfrac{f}{g}$, com $g(a) \neq 0$ seja contínua.

Teorema 2.8. ***(Composição de funções)*** *Se $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem limite $l \in \mathbb{R}$ quando x tende para a e $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em $l \in D_g$ então a função composta $g \circ f$ tem limite $g(l)$ quando x tende para a:*

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x)) = g(l).$$

Como consequência, a composição de funções contínuas é contínua.

Corolário 1. *Se $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em a e $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em $f(a) \in D_g$ então a função composta $g \circ f$ é contínua em a.*

Teorema 2.9. ***(Continuidade da função inversa)*** *Seja D_f um intervalo de números reais, $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua em D_f e invertível. Então a sua inversa, $f^{-1} : CD_f \to \mathbb{R}$, é contínua em CD_f.*

Exercício 2.16

Caracterize a função inversa da função f e estude-a quanto à continuidade, sendo

(a) $f(x) = e^{1-2x}$ (b) $f(x) = \dfrac{5\ln(x-3) - 1}{4}$

2.10.1.1 Mais algumas indeterminações

Se $h : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, é definida por $h(x) = f(x)^{g(x)}$ e $f(x) > 0$, $\forall x \in D$, pode usar-se a transformação

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

para efeitos de determinação do seu limite.

Como a função exponencial é contínua, se existir o $\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)$ então,

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}.$$

Este facto usa-se para "levantar" indeterminações do tipo 0^0, 1^∞ e ∞^0.

3.2.3 Função arco tangente

A função tangente não é injetiva no seu domínio mas a sua restrição ao intervalo $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ é. A função

$$\begin{array}{rccl} T: &]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & T(x)=\operatorname{tg} x \end{array}$$

tem inversa, designada por **arco tangente** e denotada por arctan, com domínio $\mathbb{R}$ pois T é sobrejetiva

$$\begin{array}{rccl} T^{-1}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & T^{-1}(x)=\arctan x \end{array}$$

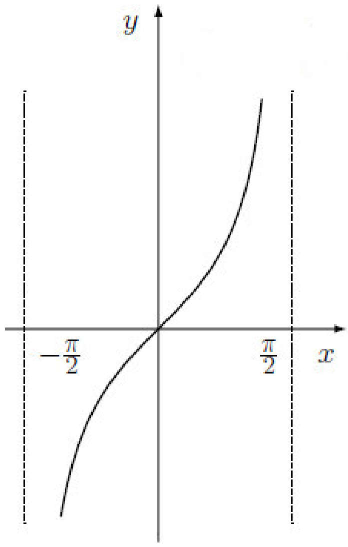


Figura 3.10: A restrição da função tangente ao intervalo $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.

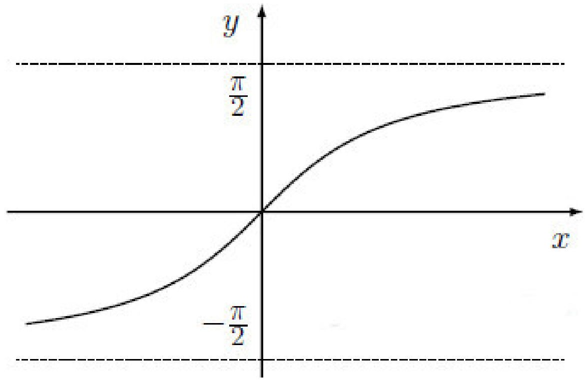


Figura 3.11: A função arcotangente.

$$\forall x\in\mathbb{R}, \forall y \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ y=\arctan x \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = x$$

Por definição de inversa:

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \operatorname{tg}(\arctan x)=x;\ \ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ \arctan(\operatorname{tg} x)=x.$$

A função $f(x)=\operatorname{tg} x$ é invertível e tem derivada $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$ não nula no intervalo $D_f=\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$. Portanto a sua inversa é derivável e

$$\forall y\in CD_f=\mathbb{R},\ (\arctan y)'=\frac{1}{\sec^2(\arctan y)}=\frac{1}{1+y^2}.$$

Exercício 3.8 Mostre que as retas $y=x+\dfrac{\pi}{2}$ e $y=x-\dfrac{\pi}{2}$ são assíntotas ao gráfico da função $f(x)=x+\arctan x$.

Exercício 3.9 Mostre que $\sec(\arctan x)=\sqrt{1+x^2}$, para todo o $x\in\mathbb{R}$.

Exercício 3.9 Mostre que $\sec(\underbrace{\arctan x}_{\alpha}) = \sqrt{1+x^2}$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

$\alpha \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$

$\arctan x = \alpha$

$\operatorname{tg} \alpha = x$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (div. por $\cos^2\alpha$)

$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$

$\sec^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha \Longleftrightarrow \sec\alpha = +\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

$-\pi/2 < \alpha < \pi/2$

ou seja, voltando a x

$\sec(\arctan x) = \sqrt{1+x^2}$

Exercício 3.8 Mostre que as retas $y = x + \frac{\pi}{2}$ e $y = x - \frac{\pi}{2}$ são assíntotas ao gráfico da função $f(x) = x + \arctan x$.

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[x + \arctan x - \left(x + \pi/2 \right) \right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\arctan x - \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

Exemplo 3.1. A função definida em $D_f =]0,+\infty[$, por

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x}, & x > 1 \\ \\ \frac{\pi}{4} + \ln x, & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

é contínua.

A função $l(x) = \ln x$ é contínua em $\mathbb{R}^+$, logo a sua restrição ao intervalo $]0,1[$ é contínua e portanto a função f é contínua em $]0,1[$.

Considere-se a função invertível $a: \;]1,+\infty[\; \to \; \mathbb{R}$ definida por $a(x) = \arctan \dfrac{1}{x}$. A sua inversa é a função definida em $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ por $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$.

Como a função tangente é contínua e não se anula neste intervalo, a função a é contínua em $]1,+\infty[$ e assim, f é contínua neste intervalo.

Falta analisar a continuidade de f em $x = 1$.

$$f(1) \; = \; \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{\pi}{4} + \ln x\right) = \frac{\pi}{4} \; = \; \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \arctan \frac{1}{x}$$

logo f é contínua em $x = 1$.

3.2.4 Função arco cotangente

A função cotangente não é injetiva no seu domínio $D_{\text{cotg}} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ mas a sua restrição a $]0,\pi[$ é. Assim,

$$\begin{array}{rccl} G: &]0,\pi[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & G(x) = \operatorname{cotg} x \end{array}$$

tem inversa, com domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $]0,\pi[$. Chama-se **arco cotangente** e denota-se por arccot

$$\begin{array}{rccl} G^{-1}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & G^{-1}(x) = \operatorname{arccot} x \end{array}$$

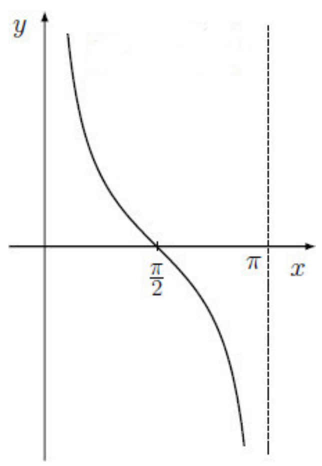


Figura 3.12: A restrição da função cotangente ao intervalo $]0,\pi[$.

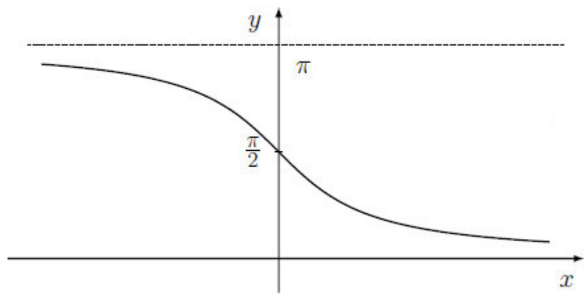


Figura 3.13: A função arco-cotangente.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in]0,\pi[, \; y = \operatorname{arccot} x \Leftrightarrow \operatorname{cotg} y = x.$$

Por definição de inversa:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; \operatorname{cotg}(\operatorname{arccot} x) = x; \; \forall x \in]0,\pi[, \; \operatorname{arccot}(\operatorname{cotg} x) = x.$$

A função $f(x)=\operatorname{cotg} x$ é invertível e tem derivada $f'(x)=-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}=-\csc^2 x$ não nula no intervalo $D_f=]0,\pi[$. Portanto a sua inversa é derivável e

$$\forall y \in CD_f=\mathbb{R},\ (\operatorname{arccot} y)'=-\frac{1}{\csc^2(\operatorname{arccot} y)}=-\frac{1}{1+y^2}.$$

3.3 Exercícios

Exercício 3.10 Determine k por forma a que a função f seja contínua no seu domínio.

(a) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right), & x>1\\ kx^2, & x\le 1\end{cases}$ **(b)** $f(x)=\begin{cases}\arccos(\frac{2}{x}), & x\ge 2\\ 2k\,e^{x-2}, & x<2\end{cases}$

Exercício 3.11 Considere a função dada por $f(x)=\arctan\frac{1}{x+1}$.

1. Determine o domínio, o contradomínio e, caso existam, os zeros de f.
2. Estude f quanto à monotonia.

Exercício 3.12 Calcule, caso existam, os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen}(5x)}{x}$ **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\arccos\frac{1}{x}$ **(c)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\operatorname{cotg}\frac{2}{x}$ **(d)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\operatorname{sen} x+e^x)$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\arctan(1-x)$ **(f)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$ **(g)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\operatorname{arccotg}\frac{1}{x}$ **(h)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arccotg}\frac{1}{x^2}$

Exercício 3.13 Determine o domínio da função dada por $g(x)=\dfrac{3+2x^2}{\operatorname{cotg} x-1}$.

Exercício 3.14 Caracterize a inversa da função h em $D\subseteq D_h$, sendo $h(x)=\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ e D o maior intervalo tal que $h|_D$ seja invertível e $0\in D$.

Exercício 3.15 Seja k a função dada por $k(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{2\operatorname{arcsen}(1-x)}{3}$.

1. Represente o domínio de k sob a forma de intervalo de números reais.
2. Caracterize a função inversa de k.
3. Calcule $\operatorname{sen}\big(k(2)\big)$.

Exercício 3.16 Considere a função dada por $f(x)=\operatorname{arcsen}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)$. Determine:

1. o domínio de f;
2. os valores de x tais que $f(x)\ge 0$. $-1\le\dfrac{x+3}{x-2}\le 1 \wedge x\ne 2$

Exercício 3.17 Determine o domínio e os zeros da função dada por

$\Leftrightarrow$

$$g(x)=\begin{cases}\arccos(x^2) & \text{se } x<0\\ e^{-x+1} & \text{se } x\ge 0.\end{cases}$$

$\left|\dfrac{x+3}{x-2}\right|\le 1 \Leftrightarrow |x+3|\le|x-2|$

$|x-(-3)|\le|x-2|$

Exercício 3.10 Determine k por forma a que a função f seja contínua no seu domínio.

(a) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right), & x > 1 \\ kx^2, & x \leq 1 \end{cases}$ **(b)** $f(x) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{2}{x}\right), & x \geq 2 \\ 2k\, e^{x-2}, & x < 2 \end{cases}$

$x > 1$

$D_f = \{ x \in \mathbb{R} : ((x > 1) \wedge x \neq 0 \wedge -1 \leq \frac{1}{x} \leq 1) \vee (x \leq 1) \} = \mathbb{R}$

$\frac{1}{x} \leq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$

$x > 1$

Para x maior do que 1 a função é contínua pois é uma composição de funções conhecidas contínuas (a inversa da função seno e um quociente de funções polinomiais).

Para x menor do que 1 a função é contínua pois é polinomial.

$f(1) = K \times 1^2 = K = \lim_{x \to 1^-} f(x)$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \operatorname{arcsin}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{arcsin} 1 = \frac{\pi}{2}$

De modo a ter $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$

$K = \pi/2$.

Exercício 3.18 Determine domínio, contradomínio e zeros da função dada por $h(x) = -\frac{\pi}{3} + \operatorname{arccot}(-3x)$.

3.4 Soluções dos exercícios do capítulo

Exercício 3.2 $D_{\text{csc}} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ e $CD_{\text{csc}} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. O período é 2π. Monótona crescente em $\left]2k\pi + \frac{\pi}{2}, (2k+1)\pi\right[$ e em $\left](2k+1)\pi, (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ e é monótona decrescente em $\left]2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \right[$ e em $\left](2k-1)\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi\right[$. A função não tem zeros.

Exercício 3.3 $D_{\text{cotg}} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ e $CD_{\text{cotg}} = \mathbb{R}$. Período $= \pi$. Monótona decrescente em $]k\pi, (k+1)\pi[$; zeros em $x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercício 3.4

1. A igualdade $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ não é verdadeira para $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, porque estes pontos pertencem ao domínio da cotangente mas não pertencem ao domínio da tangente. A igualdade $\operatorname{cotg}(x - \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{tg} x$ é verdadeira para todos os pontos do domínio da cotangente.
2. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \dfrac{\sec x}{\csc x}$ para $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ e para $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercício 3.5

1. $f(x) = x$, $\forall x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ e não para $x \in D_f = \mathbb{R}$.
3. (a) $D_f = \left[\dfrac{1}{e}, e\right]$ e $CD_f = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

   (b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Exercício 3.6

1. Sim.
2. (a) $D_f =]-\infty, 0]$; $CD_f = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

   (b) $x = 0$.

Exercício 3.7 $f(x) = \pi - \arccos(2x+1)$ contínua em $D_f = [-1, 0]$; $CD_f = [0, \pi]$. $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}(\cos(\pi - x) - 1)$ é contínua em $D_{f^{-1}} = CD_f$.

Exercício 3.10 (a) $k = \dfrac{\pi}{2}$; (b) $k = 0$.

Exercício 3.11

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $CD_f = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$; não tem zeros.
2. A função é decrescente em $]-\infty, -1[$ e em $]-1, +\infty[$.

Exercício 3.12 (a) Seja $y = \operatorname{arcsen}(5x)$, ou seja, $\operatorname{sen} y = 5x$. Se $x \to 0$ então $y \to 0$, logo,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen}(5x)}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\frac{1}{5}\operatorname{sen} y} = \lim_{y\to 0} 5\frac{y}{\operatorname{sen} y} = 5\lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} y}{y}} = 5;$$

(b) $\dfrac{\pi}{2}$;

(c) Como $\operatorname{cotg} y = \dfrac{\cos y}{\operatorname{sen} y}$ e se $x \to +\infty$, então $y = \dfrac{1}{x} \to 0$, temos,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x}\operatorname{cotg}\frac{2}{x} = \lim_{y\to 0} y\frac{\cos(2y)}{\operatorname{sen}(2y)} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{2}\frac{2y}{\operatorname{sen}(2y)}\cos(2y) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2};$$

(d) $+\infty$; (e) $-\dfrac{\pi}{2}$; (f) e^2; (g) Não existe; (h) $\frac{\pi}{2}$.

Exercício 3.13 $D_g = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi \wedge x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercício 3.14 $D = [-\pi, 0]$; $h^{-1}(x) = \operatorname{arcsen}(2x) - \frac{\pi}{2}$ e $D_{h^{-1}} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Exercício 3.15

1. $D_k = [0, 2]$.
2. $k^{-1}(x) = 1 - \operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{3}{2}x\right)$, $D_{k^{-1}} =$
3. $\operatorname{sen}\big(k(2)\big) = \frac{1}{2}$.

Exercício 3.16

1. $D_f = \left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right]$;
2. $x \in]-\infty, -3]$.

Exercício 3.17 $D_g = [-1, +\infty[$; o único zero é $x = -1$.

Exercício 3.18 $D_h = \mathbb{R}$; $CD_h = \left]-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right[$; o único zero é $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen}(5x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arcsen}(5x)}{5x}\cdot 5\right) =$

$$\left(\begin{array}{l}\operatorname{arcsen}(5x) = y \Leftrightarrow 5x = \sin(y) \\ x\to 0 \Rightarrow y = \operatorname{arcsen}(5x) \to 0\end{array}\right)$$

$$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{y}{\sin y}\cdot 5\right) = 1\times 5 = 5.$$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\operatorname{cotg}\frac{2}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\,\frac{\cos\left(\frac{2}{x}\right)}{\sin\left(\frac{2}{x}\right)} =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\frac{\frac{2}{x}}{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}}\cdot\underbrace{\cos\left(\frac{2}{x}\right)}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \lim_{y\to 0}\left(\underbrace{\frac{y}{\sin y}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\cos y}_{\to 1}\cdot\frac{1}{2}\right) = 1\times 1\times\frac{1}{2}$$