# Guião 1

## Funções reais de variável real

Linguagem da matemática

Revisões sobre funções reais de variável real

Funções trigonométricas inversas

Teoremas sobre funções contínuas e deriváveis

Paula Oliveira

2021/22

Departamento de Matemática - Universidade de Aveiro

# Conteúdo

# Capítulo 1

# A linguagem da Matemática

Neste capítulo vamos fazer uma introdução à linguagem usada em Cálculo e recordar algumas propriedades da Lógica.

O intuito é ajudar o estudante a entender um texto matemático, a saber distinguir definições de teoremas e conseguir elaborar demonstrações simples.

---

A implicação material pode ser definida usando outros conetivos lógicos. Pela sua definição, a implicação material $P \Rightarrow Q$ só é falsa quando $P$ é Verdadeira e $Q$ é Falsa, ou seja, quando $\sim P$ é Falsa e $Q$ é Falsa. Esta é exatamente a propriedade da disjunção de $\sim P$ e $Q$, logo

$$\boxed{P \Rightarrow Q \text{ é equivalente a } \sim P \vee Q.}$$

Usando as leis de De Morgan pode-se verificar que

$$\boxed{\sim (P \Rightarrow Q) \text{ é equivalente a } P \wedge \sim Q.}$$

“Se $m$ e $n$ são pares então $mn$ é par” é um teorema, contudo, a sua recíproca, “Se $mn$ é par então $m$ e $n$ são pares”, não é um teorema.

(prova direta, indireta e redução ao absurdo, condição necessária, suficiente)

## 1.5 Topologia da reta $\mathbb{R}$

**Interior -** $a \in A$ diz-se *ponto interior* do conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, se existe uma vizinhança $\mathcal{V}(a)$ de $a$, contida em $A$, $\mathcal{V}(a) \subseteq A$, isto é, $a \in A$ é ponto interior a $A$ se e só se

$$\exists \delta > 0 : \underbrace{]a-\delta, a+\delta[}_{\mathcal{V}_\delta(a)} \subseteq A.$$

O *interior de* $A$ é o conjunto de todos os pontos interiores de $A$ e denota-se por $\mathrm{Int}(A)$.

**Exterior -** $a \in \mathbb{R} \backslash A$ diz-se *ponto exterior* a $A \subseteq \mathbb{R}$ se existe uma vizinhança $\mathcal{V}(a)$ de $a$ contida no complementar de $A$, $\mathcal{V}(a) \subseteq \mathbb{R} \setminus A$, isto é,

$$\exists \delta > 0 : ]a-\delta, a+\delta[ \subseteq \mathbb{R} \setminus A.$$

$a \in \mathbb{R}$ é ponto exterior de $A$ se e só se é ponto interior de $\mathbb{R} \backslash A$. (Porquê?)

O *exterior* de $A$ é o conjunto de todos os pontos exteriores de $A$ e denota-se por $\mathrm{Ext}(A)$.

**Exemplo 1.12.** Seja $A = [-1, 0[ \cup ]0, 1[ \cup [\pi, 5[$.

**Fronteira -** Um ponto $a \in \mathbb{R}$ diz-se *ponto fronteira* de $A \subseteq \mathbb{R}$ se toda a vizinhança de $a$ interseta $A$ e interseta o complementar de $A$ ($\mathbb{R}\backslash A$), isto é,

$$\forall \delta > 0, ]a-\delta, a+\delta[\cap A \neq \emptyset \wedge ]a-\delta, a+\delta[\cap \mathbb{R} \setminus A \neq \emptyset.$$

$a \in \mathbb{R}$ é ponto fronteira de $A$ se e só se é ponto fronteira de $\mathbb{R}\backslash A$. (Porquê?)

A *fronteira* de $A$ é o conjunto de todos os pontos fronteira de $A$ e denota-se por $\mathrm{Frt}(A)$.

**Fecho (ou aderência) -** O conjunto formado pelos pontos fronteira e pelos pontos interiores de $A \subseteq \mathbb{R}$ designa-se por *fecho ou aderência de A* e denota-se por $\overline{A}$, $\overline{A} = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Frt}(A)$. Os pontos de $\overline{A}$ designam-se por pontos aderentes ou pontos de aderência.

**Exercício 1.7** Seja $A = ]-\infty, 1] \cup \{3\} \cup ]10, 35]$. Determine:

- O interior de $A$;
- O complementar de $A$;
- O exterior de $A$;
- A fronteira de $A$;
- O fecho de $A$.

Fronteira de $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ ?

### 1.5.1 Conjunto aberto, conjunto fechado

**Aberto -** Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ diz-se *aberto* em $\mathbb{R}$ se $A = \mathrm{Int}(A)$.

**Fechado -** Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ diz-se *fechado* em $\mathbb{R}$ se o seu complementar é aberto, isto é, se $\mathbb{R} \setminus A = \mathrm{Ext}(A)$.

**Exemplo 1.14.** Seja $A = [2, 8] \cup \{0, 1, 9\}$.

### 1.5.2 Ponto de acumulação e ponto isolado

Seja $A \subseteq \mathbb{R}$. Um ponto $a \in \mathbb{R}$ diz-se ***ponto de acumulação*** de $A$ se toda a vizinhança de $a$, $\mathcal{V}(a)$, interseta $A \setminus \{a\}$:

$$\forall \mathcal{V}(a), \mathcal{V}(a) \cap A \setminus \{a\} \neq \emptyset$$

Usando as vizinhanças centradas no ponto, podemos escrever a definição de ponto de acumulação na forma:

$a \in \mathbb{R}$ é *ponto de acumulação* de $A$ se e só se $\forall \delta > 0,\ ]a-\delta, a+\delta[ \cap A \setminus \{a\} \neq \emptyset$.

Ao conjunto dos pontos de acumulação de $A$ chama-se ***derivado* de** $A$ e denota-se por $A'$.

Um ponto $a \in A$ diz-se ***ponto isolado de*** $A$ se existe uma vizinhança de $a$, $\mathcal{V}(a)$, que interseta $A$ apenas no ponto $a$:

$$\exists \mathcal{V}(a) : \mathcal{V}(a) \cap A = \{a\}.$$

**Exemplo 1.15.** Seja $A = ]-\sqrt{7}, 3] \cup \{\pi\}$.

$A = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$ $\quad A'$?

# Capítulo 2

# Funções reais de variável real: recordar

## 2.1 Conceito de função

Sejam $A$ e $B$ conjuntos não vazios. Uma **função** $f : A \to B$ é uma correspondência que <u>*a cada*</u> elemento $x \in A$ associa <u>*um único*</u> elemento $f(x) \in B$. Isto escreve-se

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \to & B \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array} \qquad \text{e, em notação lógica,} \qquad \forall x \in A, \exists^1 y \in B : y = f(x)$$

O quantificador $\exists^1$ significa "existe um e um só" ou "existe um único".

Chama-se **domínio** de $f$ ao conjunto $A$, **conjunto de chegada** ao conjunto $B$ e **contradomínio** (ou *conjunto das imagens*) de $f$ ao conjunto dado por

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subseteq B$$

O domínio de $f$ denota-se por $D_f$ e o seu contradomínio por $CD_f = f(D_f)$.

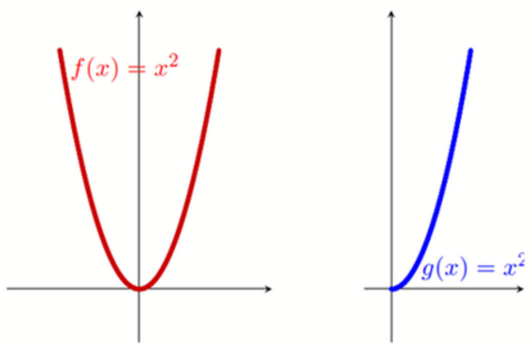



Figura 2.1: Gráfico das funções $f(x) = x^2$ com domínio $D_f = \mathbb{R}$ e $g(x) = x^2$ com domínio $D_g = \mathbb{R}_0^+$.

## 2.2 Função composta

Dadas duas funções $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se o contradomínio de $f$ for um subconjunto do domínio de $g$ ( $CD_f \subseteq D_g$) pode definir-se a **função composta** $g \circ f$:

$$\begin{array}{rccl} g \circ f : & D_f & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

**Exemplo 2.4.** Considere-se a função definida pela expressão analítica

$$f(x) = \sqrt{\frac{4-x}{x^2-2x}}.$$

## 2.3 Funções injetivas e funções sobrejetivas

**Definição 2.1.** *Uma função* $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *diz-se* ***injetiva*** *se*

$$\forall x, x' \in D_f,\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

Pode provar-se a injetividade de uma função usando o facto de que a função $f$ é injetiva se e só se

$$\forall x, x' \in D_f,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

**Definição 2.2.** *Uma função* $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *diz-se* ***sobrejetiva*** *se*

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in D_f : f(x) = y.$$

Pode mostrar-se que uma função real $f$ é sobrejetiva mostrando que o seu contradomínio é $CD_f = \mathbb{R}$.

Uma função $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se **bijetiva** se é injetiva e sobrejetiva, ou seja,

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \exists^1 x \in D_f : y = f(x).$$

**Exercício 2.3** Considere a família de funções $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f_a(x) = a^x$ com $a \in \mathbb{R}^+$. Existe alguma função desta família que não seja injetiva?

## 2.5 A função inversa

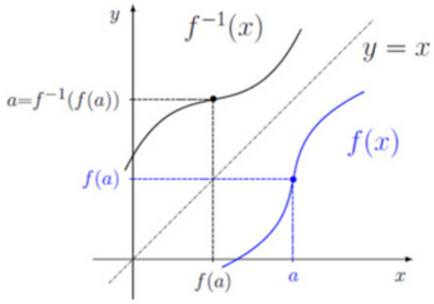
Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função **injetiva**. Então, a **cada** $y \in CD_f$ está associado um **único** $x \in D_f$ tal que $y = f(x)$. Por isso, conclui-se que existe uma função $g : CD_f \to \mathbb{R}$ tal que $y = f(x) \Rightarrow g(y) = x$.

Denota-se por $f^{-1}$ a função (dita **inversa** de $f$) que satisfaz esta propriedade. Se existe, a inversa é **única**.

Uma função diz-se **invertível** se admite inversa.

$f$ é invertível (com inversa $g$) se e só se existe $g : CD_f \to \mathbb{R} : \forall x \in D_f,\ (g \circ f)(x) = x$.

**Observação 2.1.** O gráfico de $f^{-1}$ é obtido do gráfico de $f$ por simetria em relação à reta $y = x$.




**Exercício 2.7** Determine as inversas (com domínios!) de $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, de $g(x) = \sqrt{x}$ e de $f \circ g$.