Porque vale a pena aprender a primitivar por partes.... Se calcular esta primitiva com recurso a alguns CAS pode obter este resultado...

$$\int x(2x+5)^{10}\,dx = \frac{256}{3}\,x^{12} + \frac{25600}{11}\,x^{11} + 28800\,x^{10} + \frac{640000}{3}\,x^{9} + 1050000\,x^{8} + 3600000\,x^{7} + 8750000\,x^{6} + 15000000\,x^{5} + 17578125\,x^{4} + \frac{39062500}{3}\,x^{3} + \frac{9765625}{2}\,x^{2} + c.$$

5.6 Primitivação por Substituição: mudança de variável

O processo de mudança de variável é conhecido do Ensino Secundário. Por exemplo, para resolver a equação $e^{2x} - 2e^{x} + 1 = 0$ podemos recorrer à mudança de variável $e^{x} = y$ e resolver a equação $y^2 - 2y + 1 = 0$. A solução desta equação é $y = 1$ e regressando à variável x, temos $e^{x} = 1$, ou seja, $x = 0$.

Este processo é também utilizado para calcular algumas primitivas que não são "tão" imediatas.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função primitivável, onde I designa um intervalo de números reais. Dizer que f é primitivável significa que existe uma função $F : I \to \mathbb{R}$ tal que $F' = f$.

Seja agora $h : J \to \mathbb{R}$ uma função derivável e invertível no intervalo não degenerado J tal que $h(J) = I$. Recorrendo à derivada da função composta, podemos dizer que

$$(F \circ h)'(t) = F'(h(t)) \cdot h'(t). \tag{5.2}$$

Como $F' = f$, podemos reescrever a igualdade (5.2) da seguinte forma

$$(F \circ h)'(t) = f(h(t)) \cdot h'(t),$$

o que traduz o facto de que $F \circ h$ é uma primitiva de $(f \circ h) \cdot h'$.

Para obter a expressão da função F, e sendo h invertível, basta fazer a composta $F \circ h \circ h^{-1}$.

Na prática procede-se da seguinte forma. Seja $\int f(x)\,dx$ a família de primitivas a determinar. Faz-se a substituição de x por uma função $h(t)$ onde f e h estão nas condições acima referidas. Determina-se de seguida a família de primitivas de

$$\int f(\underbrace{h(t)}_{x}) \cdot \underbrace{h'(t)dt}_{dx} = \int g(t)dt = G(t) + C, \;\; C \in \mathbb{R},$$

em que $G'(t) = g(t) = f\,(h(t)) \cdot h'(t)$. A função G é uma primitiva de $(f \circ h) \cdot h'$, ou seja, $G = F \circ h$. Para determinar a função F faz-se a composta de G com a função h^{-1}, $F = G \circ h^{-1}$:

$$\int f(x)\;dx = G\big(\underbrace{h^{-1}(x)}_{t}\big) + C, \;\; C \in \mathbb{R}. \text{ (Regresso à variável inicial)}$$

Exemplo 5.4. Como calcular $\displaystyle\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}dx$, com $x \in \mathbb{R}_0^+$?

A função f é definida por $f(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$ com $x \in I = [0, +\infty[= \mathbb{R}_0^+$.

Consideremos, a mudança de variável definida por

$$x = h(t) = t^2 \;\text{ com }\; t \in J = [0, +\infty[$$

e observemos que h é uma função derivável, invertível e que

$$h^{-1}(x) = \sqrt{x} \;\text{ com }\; x \in I = [0, +\infty[.$$

Como $h'(t) = 2t$ e $f(h(t)) = \dfrac{t^2}{1+t}$ vamos determinar a família de primitivvas

$$\int \frac{t^2}{1+t} \cdot 2t\, dt = 2 \int \frac{t^3}{t+1} dt.$$

Como $\dfrac{t^3}{t+1} = t^2 - t + 1 - \dfrac{1}{t+1}$ (porquê?), a determinação das primitivas torna-se muito fácil:

$$\begin{aligned} 2\int \frac{t^3}{t+1}\, dt &= 2\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right) dt \\ &= 2\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|1+t|\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Voltando à variável inicial, como $t = \sqrt{x}$, temos:

$$\int \frac{x}{1+\sqrt{x}} dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - x + 2\sqrt{x} - 2\ln|1+\sqrt{x}| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercício 5.7

Calcule, fazendo uma mudança de variável adequada, as seguintes famílias de primitivas:

1. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx$; 2. $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1} dx$; 3. $\displaystyle\int \frac{\ln^4 x}{x(\ln^2 x + 1)} dx$; 4. $\displaystyle\int \operatorname{sen}\sqrt{x}\, dx$;

5. $\displaystyle\int x\sqrt{2x+3} dx$; 6. $\displaystyle\int \frac{\ln(2x)}{x\ln(4x)} dx$; 7. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{x}} dx$.

Pode recorrer ao http://m.wolframalpha.com/ ou ao Geogebra para calcular estes integrais e confirmar os seus resultados.

5.6.1 Substituição por Funções Trigonométricas

Duas relações trigonométricas,

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \ \text{ e } \ 1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x,$$

são fundamentais para primitivar funções que envolvam os radicais

$$\sqrt{a^2+x^2}\ , \ \sqrt{a^2-x^2} \ \text{ e } \ \sqrt{x^2-a^2}, \quad \text{com } \ a > 0.$$

1. No caso do radical $\sqrt{a^2+x^2}$, pode utilizar-se a mudança de variável $x = h(t) = a \operatorname{tg} t$ com $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

   $$\sqrt{a^2+x^2} = a\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t} = a\sqrt{\sec^2 t} = a\sec t \ (a > 0 \text{ e como } t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \ \sec t > 0)$$

   Neste caso, $h^{-1}(x) = \arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$, com $x \in \mathbb{R}$.

2. No caso do radical $\sqrt{a^2-x^2}$, pode utilizar-se a mudança de variável $x = h(t) = a \operatorname{sen} t$ com $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ (ou $x = a\cos t$ com $t \in [0, \pi]$).

   $$\sqrt{a^2-x^2} = a\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} = a\sqrt{\cos^2 t} = a\cos t \ (a > 0 \text{ e como } t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \ \cos t \geq 0)$$

   Neste caso, $h^{-1}(x) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{a}\right)$, com $x \in]-a, a[$.

1. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx;$ $= \int \frac{u^{1/2}}{1+u^{1/3}} \, du =$

$u \geq 0$

$t \geq 0$

$u = t^6$, $du = 6t^5 \, dt$, $t = u^{1/6}$

$$= \int \frac{t^{6/2}}{1+t^{6/3}} \cdot 6t^5 \, dt = 6\int \frac{t^8}{t^2+1} \, dt$$

$$= 6\int t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1} \, dt$$

$t^8 \quad | \, t^2+1$

$-t^8 - t^6 \quad t^6 - t^4 + t^2 - 1$

$-t^6$

$\cancel{t^6} + t^4$

t^4

$-t^4 - t^2$

$-t^2$

t^2+1

1

$$= \frac{6t^7}{7} - \frac{6t^5}{5} + \frac{6t^3}{3} - 6t + 6\arctan t + C,$$

$C \in \mathbb{R}$

$$= \frac{6u^{7/6}}{7} - \frac{6u^{5/6}}{5} + \frac{6u^{3/6}}{3} - 6u^{1/6} + \arctan u^{1/6} + C,$$

$C \in \mathbb{R}.$

2. $\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1} dx;$ $= \int \frac{(e^u)^3}{(e^u)^2+1} \, du =$

$t = e^u$ $(t > 0)$

$u = \ln t$, $du = \frac{1}{t} \, dt$

$$= \int \frac{t^3}{t^2+1}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \int 1 - \frac{1}{t^2+1}\,dt = t - \arctan t + C$$

$$= e^u - \arctan(e^u) + C,\ C\in\mathbb{R}$$

3. $\displaystyle\int \frac{\ln^4 x}{x(\ln^2 x+1)}dx;$

$\ln u = t$

③ $\displaystyle\int \frac{\ln^4 x}{x(\ln^2 x+1)}dx = \int \frac{t^4}{\cancel{e^t}(t^2+1)}\cdot \cancel{e^t}\,dt = \int \frac{t^4}{t^2+1}\,dt =$

M.V. $\ln x = t \quad x = e^t \quad dx = e^t$

$$= \int \frac{t^4-1+1}{t^2+1}\,dt = \int \frac{t^4-1}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \int \frac{(t^2-1)\cancel{(t^2+1)}}{\cancel{t^2+1}} + \frac{1}{t^2+1}\,dt = \int t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \frac{t^3}{3} - t + \arctan t\ dt + C = \frac{\ln^3 x}{3} - \ln x + \arctan(\ln x) + C,$$

$C \in \mathbb{R}$

3. $\displaystyle\int \frac{\ln^4 x}{x(\ln^2 x+1)}dx;$

$$= \int \frac{t^4}{\cancel{e^t}(t^2+1)}\cancel{e^t}\,dt =$$

$\left(\begin{array}{l} t = \ln u \\ u = e^t,\ du = \underline{\underline{e^t\,dt}} \end{array}\right)$

$$\begin{array}{l|l} t^4 & t^2+1 \\ \hline -t^4-t^2 & t^2-1 \\ \hline -t^2 & \\ +t^2+1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$= \int \frac{t^4}{t^2+1}\,dt = \int t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$$= \frac{t^3}{3} - t + \arctan t + C = \frac{(\ln u)^3}{3} - \ln u + \arctan(\ln u) + C,\ C\in\mathbb{R}$$

3. No caso do radical $\sqrt{x^2-a^2}$, com $a>0$, pode utilizar-se a mudança de variável $x=h(t)=a\sec t$.
   - No intervalo $]a,+\infty[$, teremos $t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ e
   $$\sqrt{x^2-a^2}=a\sqrt{\sec^2 t-1}=a\sqrt{\operatorname{tg}^2 t}=a\operatorname{tg} t(>0)$$
   - No intervalo $]-\infty,a[$ teremos $t\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ e
   $$\sqrt{x^2-a^2}=a\sqrt{\sec^2 t-1}=a\sqrt{\operatorname{tg}^2 t}=-a\operatorname{tg} t$$

   Neste caso, $h^{-1}(x)=\arccos\left(\frac{a}{x}\right)$, com $x\in]a,+\infty[$ ou $x\in]-\infty,a[$, consoante o intervalo considerado.

Exemplo 5.5. Como calcular $\int\sqrt{9-x^2}\,dx$, com $x\in]-3,3[$?

$$\int\sqrt{9-x^2}\,dx=\quad 3\int\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}\,dx$$

Fazendo

$$\frac{x}{3}=\operatorname{sen} t,\ t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ \text{ temos }\ \cos t=\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$$

e

$$t=\operatorname{arcsen}\frac{x}{3}\quad\text{e}\quad dx=3\cos t\,dt.$$

Assim,

$$3\int\sqrt{1-(\operatorname{sen} t)^2}\,3\cos t\,dt=9\int\cos^2 t\,dt=\frac{9}{2}\int(1+\cos(2t))\,dt=\frac{9}{2}t+\frac{9}{4}\operatorname{sen}(2t)+C,\ \text{com } C\in\mathbb{R}.$$

Voltando à variável inicial:

$$\int\sqrt{9-x^2}\,dx=\frac{9}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{3}+\frac{x\sqrt{9-x^2}}{2}+C,\ \text{com } C\in\mathbb{R}.$$

Note que $\operatorname{sen}(2t)=2\operatorname{sen} t\cos t$ e $\cos^2 t=\dfrac{1+\cos(2t)}{2}$.

No exemplo anterior considerou-se a função

$$h(t)=3\operatorname{sen} t,\ \text{com } t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,$$

invertível e derivável:

$$h^{-1}(x)=\operatorname{arcsen}\frac{x}{3},\ \text{com } x\in]-3,3[\ \text{e}\ h'(t)=3\cos t.$$

Sendo $g(t)=f\left(h(t)\right)\cdot h'(t)=9\cos^2 t$, uma sua primitiva é

$$G(t)=\frac{9}{2}t+\frac{9}{4}\operatorname{sen}(2t)=\frac{9}{2}t+\frac{9}{2}\operatorname{sen} t\cos t.$$

Fazendo a composta, $F=G\circ h^{-1}$, obtém-se uma primitiva de f:

$$F(x)=\left(G\circ h^{-1}\right)(x)=\frac{9}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{3}+\frac{x\sqrt{9-x^2}}{2}.$$

E se o factor a primitivar for $\sqrt{ax^2+bx+c}$?

Podemos sempre fazer a decomposição

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right],a\neq 0$$

e usa-se uma das substituições acima referidas com as devidas adapatações. Veja-se o exemplo seguinte.

Exemplo 5.5. Como calcular $\int \sqrt{9-x^2}\,dx$, com $x \in]-3,3[$?

$u = 3\sin t$, $du = 3\cos t\,dt$

$t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$\int \sqrt{9-u^2}\,du = \int \sqrt{9-9\sin^2 t}\,.\,3\cos t\,dt =$$

$$= \int \sqrt{9(\underbrace{1-\sin^2 t}_{\cos^2 t})}\,.\,3\cos t\,dt = \int 3\underbrace{\sqrt{\cos^2 t}}_{=\cos t,\ t\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}\,.\,3\cos t\,dt$$

$$= 9\int \cos^2 t\,dt =$$

$$= 9\int \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt =$$

$$= \frac{9}{2}\left(t + \frac{\sin(2t)}{2}\right) + C$$

$$= \frac{9}{2}t + \frac{9}{2}\sin t\cos t + C$$

$$= \frac{9}{2}\arcsin\left(\frac{u}{3}\right) + \frac{9}{2}\cdot\frac{u}{3}\cdot\sqrt{1-u^2/9} + C$$

$$\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\left(\frac{u}{3}\right)^2}$$

$u = 3\sin t$, $\sin t = \frac{u}{3}$, $t = \arcsin\left(\frac{u}{3}\right)$

Exemplo 5.6.

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2+8x-24}}\,dx \;=\,?$$

$$2x^2+8x-24 = 2\left(x^2+4x-12\right) = 2\left((x+2)^2-16\right)$$

Fazendo a mudança de variável

$$x+2 = 4\sec t \Leftrightarrow x = 4\sec t - 2 = h(t), t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

podemos resolver o problema. Como $h'(t) = 4\sec t \operatorname{tg} t$, determinamos a família de primitivas

$$\int \frac{1}{4\sqrt{2}\operatorname{tg} t} 4\sec t \operatorname{tg} t\,dt = \int \frac{1}{\sqrt{2}}\sec t\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\sec t + \operatorname{tg} t| + C,\ \text{com } C \in \mathbb{R}.$$

Regressando à variável inicial, temos $h^{-1}(x) = \arccos\frac{4}{x+2}$ e recorrendo às fórmulas trigonométricas $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ e $1+\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$ obtemos:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2+8x-24}}\,dx \;=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{4}\left(x+2+\sqrt{x^2+4x-12}\right)\right| + C,\ \text{com } C \in \mathbb{R}$$

Exercício 5.8 Calcule:

1. $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}\,dx;$
2. $\displaystyle\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}\,dx;$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x(3+\ln x)^3}\,dx;$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{8+2x-x^2}}\,dx;$
5. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx;$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{5-x^2}}\,dx;$
7. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+2}}\,dx;$
8. $\displaystyle\int \sqrt{4+5x^2}\,dx;$
9. $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x}\,dx.$

5.7 Primitivas de Funções Racionais

Uma função racional é o quociente de dois polinómios, p e q, sendo $q(x)$ não nulo,

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Se $\text{grau}(p) \geq \text{grau}(q)$ então devemos fazer a divisão dos polinómios e obtemos $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$, em que $\text{grau}(r) < \text{grau}(q)$. Portanto, nesse caso,

$$\int f(x)dx = \int s(x)dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}dx$$

Exemplo 5.7. Sejam p e q os polinómios definidos por $p(x) = x^4+2x+1$ e $q(x) = x^3-x^2-2x$. Para determinar $\displaystyle\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ efetuamos a divisão dos polinómios já que $\text{grau}(p) \geq \text{grau}(q)$. Como $p(x) = (x+1)q(x) + 3x^2+4x+1$ vem,

$$\frac{p(x)}{q(x)} = (x+1) + \frac{3x^2+4x+1}{x^3-x^2-2x}.$$

Exemplo 5.6.

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2+8x-24}}\,dx = ? =$$

$$2x^2+8x-24 = 2\left(x^2+4x-12\right) =$$

$$= 2\left((x+2)^2-16\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{\underline{(x+2)^2-16}}}\,dx \qquad \underline{x+2 = 4\sec t}$$

$$\underbrace{\sec^2 t-1}_{tg^2 t}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{16\sec^2 t-16}}\cdot 4\,tg\,t\sec t\,dt \qquad dx = 4\,tg\,t\sec t\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\cancel{4}}\frac{1}{\sqrt{\underbrace{\sec^2 t-1}_{tg^2 t}}}\cdot \cancel{4}\,tg\,t\sec t\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\cancel{tg\,t}}{\cancel{tg\,t}}\cdot\sec t\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \sec t\,dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\sec t + tg\,t\right| + c,\ c\in\mathbb{R}.$$

$$\sec t = \frac{x+2}{4} \qquad x+2 = 4\sec t$$

$$tg\,t = \sqrt{\sec^2 t - 1} = \sqrt{\left(\frac{u+2}{4}\right)^2 - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \frac{u+2}{4} + \sqrt{\left(\frac{u+2}{4}\right)^2 - 1} \right| + C, \; C \in \mathbb{R}$$

Exercício 5.8 Calcule:

1. $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{4 - e^{2x}}}\, dx$; $\displaystyle = \int \frac{e^u}{\sqrt{4 - (e^u)^2}}\, du =$

$$e^u = 2\underbrace{\sin t}$$

$$e^u\, du = 2 \cos t\, dt$$

$$f(u) = g(t)$$

$$f'(u)\, du = g'(t)\, dt$$

$$u = f^{-1}(g(t))$$

$$du = \frac{1}{f'(g(t))} \cdot g'(t)$$

$$f'(u)\, du = g'(t)\, dt$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{4 - (e^u)^2}}\, e^u\, du =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{4 - 4\sin^2 t}} \cdot 2\cos t\, dt$$

$$= \int \frac{2\cos t}{2\cos t}\, dt = \int 1\, dt = t + C$$

$$= \arcsin\left(\frac{e^u}{2}\right) + C, \; C \in \mathbb{R}.$$

Então,

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int \left((x+1) + \frac{3x^2+4x+1}{x^3-x^2-2x}\right) dx$$

Para integrar a segunda parcela decompomos o denominador em elementos simples, de 1º e/ou 2º grau:

$$q(x) = x(x^2-x-2) = x(x+1)(x-2)$$

e podemos reescrever a fração como segue:

$$\frac{3x^2+4x+1}{x^3-x^2-2x} = \frac{3x^2+4x+1}{x(x+1)(x-2)}.$$

Esta fração pode ser decomposta numa soma de "frações simples":

$$\frac{3x^2+4x+1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$$

onde A, B e C são constantes a determinar. Se reduzirmos as frações simples ao mesmo denominador obtemos a igualdade seguinte:

$$\frac{3x^2+4x+1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A(x+1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+1)}{x(x+1)(x-2)}.$$

Como os denominadores são iguais, para que as frações sejam iguais devemos igualar os numeradores:

$$3x^2+4x+1 = A(x+1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+1).$$

Pela igualdade de polinómios deduz-se que:

$$(A+B+C)x^2 + (-A-2B+C)x - 2A = 3x^2+4x+1, \text{ ou seja,}$$

$$\begin{cases} A+B+C=3 \\ -A-2B+C=4 \\ -2A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{1}{2} \\ B=0 \\ C=\dfrac{7}{2} \end{cases}$$

Um outro processo para determinar A, B e C consiste em utilizar o seguinte resultado:

Dois polinómios são iguais se $\forall x_0 \in \mathbb{R},\ p(x_0) = q(x_0)$.

Então, em particular,

$$A(x+1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+1) = 3x^2+4x+1, \text{ para } x=0,\ x=2 \text{ e } x=-1.$$

$$\begin{array}{lll} \text{Se } x=0, & \text{resulta} & -2A=1 \Leftrightarrow A=-\dfrac{1}{2} \\ \text{Se } x=-1, & \text{resulta} & 3B=0 \Leftrightarrow B=0 \qquad\qquad \text{Parece mais simples !!!} \\ \text{Se } x=2, & \text{resulta} & 6C=21 \Leftrightarrow C=\dfrac{7}{2} \end{array}$$

Determinados os coeficientes (por um processo ou por outro):

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4+2x+1}{x^3-x^2-2x}\,dx &= \int \left[x+1-\frac{1}{2x}+\frac{21}{6(x-2)}\right] dx \\ &= \frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{21}{6}\ln|x-2|+C,\ C\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Este processo pode ser utilizado em qualquer fraçao de polinómios, tendo em conta os resultados seguintes.

Teorema 5.5. *Todo o polinómio de coeficientes reais pode ser decomposto num produto de fatores do primeiro e/ou segundo grau (em que cada um dos fatores terá uma multiplicidade maior ou igual a* 1*).*

Um polinómio de grau n admite sempre n raízes complexas[2], não necessariamente distintas, ou seja, podem ser simples ou múltiplas. Para além disso, se admitir a raiz $a+bi$ (com $b \neq 0$) também admite a raiz $a-bi$.

O problema reduz-se assim a primitivar fatores do tipo:

$$\frac{A}{(x-\alpha)^r} \text{ e } \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^s}$$

Observe-se que se $r \neq 1$ (Caso em que o polinómio do denominador tem raízes reais múltiplas),

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^r}dx = \frac{A}{(1-r)(x-\alpha)^{r-1}} + C, C \in \mathbb{R}$$

e se $r = 1$

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^r}dx = \int \frac{A}{x-\alpha}dx = A\ln|x-\alpha| + C, C \in \mathbb{R}$$

Exemplo 5.8. Como calcular $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3}dx$?

$$\begin{aligned} \frac{x^2+1}{(x-1)^3} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} \\ x^2+1 &= Ax^2 + (-2A+B)x + A - B + C. \end{aligned}$$

Donde: $A = 1,\ B = 2$ e $C = 2$.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+1}{(x-1)^3}dx &= \int \frac{1}{x-1}dx + 2\int \frac{1}{(x-1)^2}dx + 2\int \frac{1}{(x-1)^3}dx \\ &= \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C,\ \ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Se os fatores são de 2^o grau, as coisas complicam-se... Caso em que o polinómio do denominador tem raízes complexas.

Exemplo 5.9. Como calcular $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{(2x+1)(x^2+1)}dx$?

$$\frac{x^2+x+1}{(2x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Donde: $A = \dfrac{3}{5},\ B = \dfrac{1}{5}$ e $C = \dfrac{2}{5}$.

$$\int \frac{x^2+x+1}{(2x+1)(x^2+1)}dx = \frac{3}{5}\int \frac{1}{2x+1}dx + \int \frac{\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{3}{10}\ln|2x+1| + \frac{1}{5}\int \frac{x}{x^2+1}dx + \frac{2}{5}\int \frac{1}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{3}{10}\ln|2x+1| + \frac{1}{10}\ln(x^2+1) + \frac{2}{5}\arctan x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

[2]Observemos que uma raiz real é complexa com parte imaginária nula.

Atendendo ao Teorema 5.5, podemos afirmar que qualquer polinómio $q(x)$, admite a seguinte fatorização em polinómios irredútiveis:

$$q(x) = \alpha(x-a_1)^{r_1}...(x-a_n)^{r_n}(x^2+b_1x+c_1)^{s_1}...(x^2+b_mx+c_m)^{s_m},$$

com $b_j^2 - 4c_j < 0, j = 1\ldots, m$ e

$$(r_1 + ... + r_n) + 2(s_1 + ... + s_m) = \text{grau}(q).$$

Então,

$$\begin{aligned}\frac{r(x)}{q(x)} &= \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{A_{i1}}{(x-a_i)} + ... + \frac{A_{ir_i}}{(x-a_i)^{r_i}}\right) + \\ &+ \frac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{B_{j1}x + C_{j1}}{(x^2+b_jx+c_j)} + ... + \frac{B_{js_j}x + C_{js_j}}{(x^2+b_jx+c_j)^{s_j}}\right),\end{aligned}$$

onde $A_{i1}, \ldots, A_{ir_i}(i = 1\ldots, n)$ e $B_{j1}, C_{j1}, \ldots B_{js_j}, C_{js_j}(j = 1\ldots, m) \in \mathbb{R}$.

Exemplo 5.10. Para determinar o integral $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+2x+15}dx$ podemos escrever

$$\frac{x}{x^2+2x+15} = \frac{x+1-1}{x^2+2x+15}$$

atendendo a que $(x^2 + 2x + 15)' = 2x + 2 = 2(x + 1)$. Assim,

$$\int \frac{x}{x^2+2x+15}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)}{x^2+2x+15}dx - \int \frac{1}{x^2+2x+15}dx$$

O primeiro integral é agora imediato; para calcular o segundo, observemos que

$$x^2+2x+15 = (x+1)^2 + 14 = 14\left(\left(\frac{x+1}{\sqrt{14}}\right)^2 + 1\right)$$

e portanto

$$\int \frac{x}{x^2+2x+15}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)}{x^2+2x+15}dx - \frac{1}{14}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{14}}\right)^2+1}\,dx.$$

Integrando vem:

$$\int \frac{x}{x^2+2x+15}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) - \frac{\sqrt{14}}{14}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{14}} + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Exemplo 5.11. A primitiva da função $\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$, ou das suas variantes $\dfrac{1}{(a^2+x^2)^2}$, aparece frequentemente na decomposição em elementos simples, por isso é importante que se perceba a sua determinação.

Como calcular

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx?$$

Fazendo a substituição $x = g(t) = \operatorname{tg} t$, porque $1 + \operatorname{tg}^2 t = \sec^2 t$ temos que

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2 t)^2} = \frac{1}{\sec^4 t}$$

Derivando $\operatorname{tg} t$, obtém-se $\sec^2 t$, assim, a função a primitivar é

$$\int \frac{1}{\sec^4 t} \sec^2 t \, dt = \int \frac{1}{\sec^2 t} \, dt = \int \cos^2 t \, dt$$

Como $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$, vem

$$\int \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2}\int (\cos(2\,t)+1) \; dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\,t)\right) + C, \; C \in \mathbb{R}$$

Como $\operatorname{sen}(2t) = 2 \operatorname{sen} t \cos t$

$$\int \frac{1}{\sec^2 t} \, dt = \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \cos t + \frac{1}{2} t + C, \; C \in \mathbb{R}$$

Como $\operatorname{tg} t = x$, resulta que $\sec^2 t = x^2 + 1$ e vem

$$\cos^2 t = \frac{1}{x^2+1} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}^2 t = 1 - \cos^2 t = \frac{x^2}{x^2+1}.$$

Regressando à variável inicial x temos:

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} \, dx = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan x + C, \; C \in \mathbb{R}$$

Exemplo 5.12. Vamos determinar o integral indefinido $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx$.

Atendendo a que $(x^2+2x+3)' = 2x+2$ e que $x-1 = x+1-2$, podemos reescrever o integral da seguinte forma:

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx = \frac{1}{2}\int \left(\frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2} - \frac{4}{(x^2+2x+3)^2}\right) dx$$

ou seja,

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2} \, dx - \int \frac{2}{(x^2+2x+3)^2} \, dx.$$

O primeiro integral é imediato,

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2} \, dx = -\frac{1}{2(x^2+2x+3)} + C_1, \; C_1 \in \mathbb{R}.$$

Quanto ao segundo integral, vamos recorrer ao exemplo 5.11. Começamos por transformar a função integranda:

$$\frac{2}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{2}{4\left(\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)^2}.$$

Faz-se agora a substituição

$$\frac{x+1}{\sqrt{2}} = \operatorname{tg} t \Leftrightarrow x = \sqrt{2}\operatorname{tg} t - 1$$

no integral $\displaystyle\int \frac{2}{(x^2+2x+3)^2} \, dx$ e o integral a determinar será

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{(\operatorname{tg}^2 t+1)^2} \sqrt{2}\sec^2 t \, dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \cos^2 t \, dt = \frac{\sqrt{2}}{4}(t + \operatorname{sen}(2\,t)) + C_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}(t + 2\operatorname{sen}(t)\cos(t)) + C_2, \; C_2 \in \mathbb{R}.$$

Regressando à variável inicial,

$$\int \frac{2}{(x^2+2x+3)^2} \, dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+(x+1)^2}} \cdot \frac{x+1}{\sqrt{2+(x+1)^2}}\right) + C_2, \; C_2 \in \mathbb{R},$$

ou escrito de forma simplificada,

$$\int \frac{2}{(x^2+2x+3)^2}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{2}(x+1)}{2+(x+1)^2}\right) + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Finalmente,

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx = -\frac{1}{2(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{2}(x+1)}{2+(x+1)^2}\right) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Exercício 5.9 Calcule:

1. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)^3}\,dx;$

2. $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}\,dx;$

3. $\displaystyle\int \frac{3x^2+2x-3}{x^3+2x^2+x}\,dx;$

4. $\displaystyle\int \frac{x^4-3}{x^3+2x^2+x}\,dx;$

5. $\displaystyle\int \frac{5x^3-3x^2+7x-3}{(x^2+1)^2}\,dx.$

Soluções dos exercícios

Exercício 5.1

Função	Primitiva	Domínio
$f(x) = 2e^{2x}$	$F(x) = e^{2x}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$F(x) = -\ln(\cos x)$	$x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
$f(x) = x^5$	$F(x) = \frac{x^6}{6}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt[3]{x}$	$F(x) = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{7}$	$F(x) = \sqrt{7}\,x$	$x \in \mathbb{R}$

Exercício 5.2

1. $x^4 - \dfrac{5}{2}x^2 + 9x + C$ 2. $\dfrac{5}{4}x^4 + 2\operatorname{sen} x + C$ 3. $2t^4 - 4\sqrt{t^3} - \dfrac{1}{2t^2} + C$ 4. $\operatorname{tg} x + C$
5. $\dfrac{x^3}{3} - 2x - \dfrac{1}{x} + C$ 6. $-\sqrt{3}\cos x + \dfrac{1}{2}\ln|x| + C$ 7. $\dfrac{2}{5}\sqrt{x^5} + x + C$ 8. $\dfrac{1}{\cos u} + C$

, com $C \in \mathbb{R}$.

Exercício 5.3

1. $\dfrac{(g(x))^{n+1}}{n+1} + C$ 2. $\operatorname{sen}(g(x)) + C$ 3. $-\cos(g(x)) + C$
4. $\operatorname{tg}(g(x)) + C$ 5. $-\operatorname{cotg}(g(x)) + C$ 6. $\operatorname{arcsen}(g(x)) + C$
7. $e^{g(x)} + C$ 8. $\dfrac{a^{g(x)}}{\ln a} + C$ 9. $\ln|g(x)| + C$
10. $\arctan((g(x))) + C$ 11. $-\ln|\cos(g(x))| + C$ 12. $\dfrac{n}{n+1}\sqrt[n]{g(x)^{n+1}} + C$

, com $C \in \mathbb{R}$

Exercício 5.5

1. $\dfrac{\sqrt{7}}{7}\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{7}}\right) + C$;
2. $\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{\sqrt{8}}\right) + C$;
3. $-2\sqrt{1-x} + C$;
4. $-\dfrac{1}{6}e^{3\cos^2 x} + C$;
5. $\dfrac{1}{2}\arctan(e^{2x}) + C$;
6. $-\ln|\cos x| + C$;
7. $-\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) + C$;
8. $\dfrac{1}{2}e^{x^2+4x+3} + C$.

Exercício 5.6

1. $x\arctan x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$;
2. $\dfrac{1}{2}(\operatorname{tg} x \sec x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|) + C$;
3. $\dfrac{2}{45}\cos(2x)\operatorname{sen}(7x) - \dfrac{7}{45}\operatorname{sen}(2x)\cos(7x) + C$;
4. $-\dfrac{3}{16}\operatorname{sen}(5x)\operatorname{sen}(3x) - \dfrac{5}{16}\cos(5x)\cos(3x) + C$;
5. $\dfrac{x^2}{2}\arctan x - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}\arctan x + C$;
6. $\dfrac{x3^x}{\ln 3} - \dfrac{3^x}{\ln^2 3} + C$;
7. $\dfrac{1}{2}\arctan x - \dfrac{1}{2}\dfrac{x}{1+x^2} + C$(Sugestão: $\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}\,x$);
8. $\dfrac{1}{2}(x\cos(\ln x) + x\operatorname{sen}(\ln x)) + C$;
9. $x\dfrac{(2x+5)^{11}}{22} - \dfrac{(2x+5)^{12}}{528} + C$;

com $C \in \mathbb{R}$

Exercício 5.7

1. $\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt[6]{x^3} - 6\sqrt[6]{x} + 6\arctan\sqrt[6]{x} + C$;

2. $e^x - \arctan(e^x) + C$;

3. $\frac{\ln^3 x}{3} - \ln x + \arctan(\ln x) + C$;

4. $2\,\mathrm{sen}\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + C$;

5. $\frac{\sqrt{(2x+3)^5}}{10} - \frac{\sqrt{(2x+3)^3}}{2} + C$;

6. $\ln(4x) - \ln 2\ \ln|\ln(4x)| + C$;

7. $-\frac{4\sqrt{(1-\sqrt{x})^3}}{3} + C$,

com $C \in \mathbb{R}$.

Exercício 5.8

1. $\mathrm{arcsen}\left(\frac{e^x}{2}\right) + C$;

2. $\frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2} - \frac{13}{9}\ln\left(\sqrt{9x^2+6x+2} - 3x - 1\right) + C$;

3. $-\frac{1}{2(3+\ln x)^2} + C$;

4. $\mathrm{arcsen}\left(\frac{x-1}{3}\right) + C$;

5. $-2\sqrt{\cos x} + \frac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x} + C$;

6. $-\frac{\sqrt{5-x^2}}{5x} + C$;

7. $-\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\sqrt{2} + \sqrt{2+x^2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(-\sqrt{2} + \sqrt{2+x^2}\right) + C$;

8. $\frac{1}{2}x\sqrt{4+5x^2} - 2\frac{\ln\left(-x\sqrt{5} + \sqrt{4+5x^2}\right)}{\sqrt{5}} + C$;

9. $\sqrt{1-x}\left(\frac{4(1-x)^2}{5} - \frac{2(1-x)^3}{7} - \frac{2(1-x)}{3}\right) + C$.

com $C \in \mathbb{R}$,

Exercício 5.9

1. $-\frac{1}{2(x-2)^2} + C$, com $C \in \mathbb{R}$;
2. $\frac{1}{18}\left(\frac{3-6x}{(x+1)^2} + 4\ln(x-2) - 4\ln(x+1)\right) + C$, com $C \in \mathbb{R}$;
3. $-\frac{2}{x+1} - 3\ln x + 6\ln(x+1) + C$, com $C \in \mathbb{R}$;
4. $\frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x+1} - 3\ln x + 6\ln(x+1) + C$, com $C \in \mathbb{R}$;
5. $-\frac{1}{x^2+1} + \frac{5}{2}\ln(x^2+1) - 3\arctan x + C$, com $C \in \mathbb{R}$.