Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo II

- Texto de Apoio -

Alexandre Almeida

fevereiro de 2018

Nota prévia

Este texto foi escrito com o propósito de apoiar as aulas de Cálculo II lecionadas na Universidade de Aveiro, podendo ser visto também como um guião para esta unidade curricular. Não se pretende com isto substituir as aulas, mas antes proporcionar um melhor acompanhamento das mesmas por parte dos alunos. São assumidos conhecimentos prévios básicos (adquiridos no ensino secundário e em Cálculo I) sobre o estudo de funções reais de variável real, sobre cálculo diferencial e integral e sobre séries numéricas.

Trata-se de um texto resumido onde se tenta motivar a introdução dos vários conceitos relacionados com equações diferenciais ordinárias e séries de funções. Atendendo ao formato pretendido, optou-se por não se apresentar provas dos resultados formulados, apesar de alguns casos conduzirem a uma argumentação muito próxima daquilo que seria uma prova formal.

A leitura deste material deverá ser complementada com a consulta de bibliografia complementar. Para além dos diversos livros clássicos sobre Cálculo (alguns deles indicados na lista de referências), sugere-se, em particular, a leitura dos apontamentos [12] (disponíveis na plataforma *Moodle* da Universidade de Aveiro), onde poderão ser encontradas quase todas as provas dos resultados aqui apresentados, bem como vários outros exemplos e exercícios propostos.

Gostaria de deixar um agradecimento aos muitos colegas que comigo trabalharam em Cálculo II (de 2010 a 2012, e mais recentemente em 2014) pelos diversos comentários e sugestões a anteriores versões deste texto.

Conteúdo

5 Transformada de Laplace

Neste capítulo apresentamos uma ferramenta que se revelará bastante útil na resolução de certos problemas envolvendo equações diferenciais. Trata-se de uma "transformação" que consiste em converter uma dada função numa outra através de um integral impróprio apropriado. Como iremos ver, uma das suas vantagens reside no facto de permitir transformar derivadas em polinómios (num certo sentido), o que facilita a a resolução de alguns tipos de problemas de valores iniciais.

5.1 Definição e propriedades

Seja f uma função real definida (pelo menos) em $\mathbb{R}_0^+$. Considere-se o integral impróprio[32]

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

onde s é um parâmetro real. Naturalmente, o integral poderá ou não convergir (dependendo, em geral, do valor de s).

Exemplo 5.1 Considere-se o caso da função constante $f(t) = 1$, $t \in \mathbb{R}$. Comecemos por observar que, para cada $b > 0$, temos

$$\int_0^b e^{\alpha t}\, dt = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} e^{\alpha b} - \frac{1}{\alpha}, & \text{se} \quad \alpha \neq 0, \\ b, & \text{se} \quad \alpha = 0, \end{cases}$$

pelo que

$$\lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{\alpha t}\, dt = \begin{cases} -\frac{1}{\alpha}, & \text{se} \quad \alpha < 0 \\ +\infty, & \text{se} \quad \alpha \geq 0. \end{cases}$$

Portanto, o integral impróprio $\displaystyle\int_0^\infty e^{\alpha t}\, dt$ converge se e só se $\alpha < 0$, sendo, nesse caso, o seu valor igual a $-\dfrac{1}{\alpha}$. Daqui conclui-se que

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-st}\, dt = \frac{1}{s}, \qquad \text{para } s > 0.$$

[32]Este assunto já foi estudado em Cálculo I, pelo que se aconselha uma breve revisão do mesmo (sugere-se a consulta do material disponível no *Moodle*).

Assim, podemos definir uma nova função,

$$\begin{array}{rcl} F: \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ s & \mapsto & F(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \frac{1}{s}, \end{array}$$

a qual representa aquilo a que chamaremos a *transformada de Laplace* da função f.

Definição 5.1 (Transformada de Laplace)
Chama-se ***transformada de Laplace***[33] ***da função*** $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *à função* $\mathcal{L}\{f\}$ *definida por*

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt\,,$$

sempre que este integral impróprio seja convergente.

Observação 5.1 Podemos escrever $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ para indicar a transformada de Laplace de f. Ao escrever-se desta forma salienta-se o facto da função inicial f depender de t, enquanto que a transformada $\mathcal{L}\{f\}$ é calculada em s (o parâmetro do integral). É também habitual usar-se a letra F para denotar a transformada de Laplace de f.

Exemplo 5.2 Do Exemplo 5.1 resulta que

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}, \quad s > 0.$$

Exemplo 5.3 Seja $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad t \neq 2, \\ 0 & \text{se} \quad t = 2. \end{cases}$

Temos

$$\mathcal{L}\{g\}(s) = \frac{1}{s}, \quad s > 0. \qquad \text{[Verifique!]}$$

[33] Em homenagem ao matemático e físico francês Pierre Simon Laplace (1749-1827), o qual teve importantes contribuições na física-matemática, na astronomia e na teoria das probabilidades
A transformada de Laplace é um caso particular das chamadas *transformadas integrais* que são de grande utilidade na resolução de problemas em várias ciências, incluindo a própria Matemática. Esta transformada pode ser definida em contextos mais gerais do que aquele que estamos a considerar neste texto.

Exemplo 5.2 Do Exemplo 5.1 resulta que

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}, \quad s > 0.$$

$f(t) = 1, \; t \in [0, +\infty[$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \underbrace{f(t)}_{1} dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-st} dt = \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^b =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(\underbrace{\frac{e^{-sb}}{-s}}_{\to 0} - \frac{1}{-s} \right) = 1/s$$

$f(t) = t, \; t \in [0, +\infty[$

$$\mathcal{L}\{t\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot t \, dt = \lim_{\to +\infty} \int$$

$$\mathcal{L}\{t\}(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st}\cdot t\,dt = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\left(t+\frac{1}{s}\right)\right]_0^b$$

$$\int \underset{u'}{e^{-st}}\cdot \underset{v}{t}\,dt = \frac{e^{-st}}{-s}\cdot t - \int \frac{e^{-st}}{-s}\,dt = \frac{e^{-st}}{-s}\,t + \frac{1}{s}\int e^{-st}\,dt$$

$$= \frac{e^{-st}}{-s}\cdot t + \frac{1}{s}\cdot\frac{e^{-st}}{-s} + c = \frac{e^{-st}}{-s}\left(t+\frac{1}{s}\right) + c$$

$$\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{e^{-sb}}{-s}\left(b+\frac{1}{s}\right) - \frac{e^{0}}{-s}\left(0+\frac{1}{s}\right)\right] = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{e^{-sb}}{-s}\left(b+\frac{1}{s}\right) + \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}\right)\right]$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left[\underbrace{\cancel{\frac{b+\frac{1}{s}}{-se^{-sb}}}}_{0} + \frac{1}{s^2}\right] = \frac{1}{s^2}$$

Exemplo 5.4 Tendo em conta o estudo do integral impróprio $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{\alpha t}\,dt$ realizado no Exemplo 5.1, conclui-se imediatamente que

$$\boxed{\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}\,, \quad s > a} \qquad (a \in \mathbb{R}).$$

Recorrendo à integração por partes não é difícil mostrar que

$$\boxed{\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}\,, \quad s > 0}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(at)\}(s) = \frac{a}{s^2+a^2}\,, \quad s > 0} \qquad \boxed{\mathcal{L}\{\cos(at)\}(s) = \frac{s}{s^2+a^2}\,, \quad s > 0}$$

para todos $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}_0$.

Atendendo às propriedades dos integrais impróprios verifica-se facilmente que a transformada de Laplace goza da linearidade:

Proposição 5.1 *Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f, g : [0, +\infty[\, \to \mathbb{R}$. Suponha-se que existem $\mathcal{L}\{f\}(s)$ e $\mathcal{L}\{g\}(s)$ para $s > s_f$ e $s > s_g$, respetivamente. Então:*

(i) $\mathcal{L}\{f+g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) + \mathcal{L}\{g\}(s), \qquad s > \max\{s_f, s_g\}$;

(ii) $\mathcal{L}\{\alpha f\}(s) = \alpha\mathcal{L}\{f\}(s), \qquad s > s_f$.

Exemplo 5.5 Vamos calcular a transformada de Laplace da função cosseno hiperbólico:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cosh(at)\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right\}(s) \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\}(s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{-at}\right\}(s) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{s-a} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+a}\,, \qquad s > a \ \text{ e } \ s > -a, \\
&= \frac{s}{(s-a)(s+a)}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\boxed{\mathcal{L}\{\cosh(at)\}(s) = \frac{s}{s^2-a^2}\,, \quad s > |a|} \qquad (a \in \mathbb{R}).$$

Do mesmo modo podemos mostrar que a transformada de Laplace da função seno hiperbólico é dada por

$$\boxed{\mathcal{L}\{\text{senh}(at)\}(s) = \frac{a}{s^2 - a^2}\,, \quad s > |a|} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Observação 5.2 Nem toda a função admite transformada de Laplace. É o caso da função $t \mapsto e^{t^2}$, uma vez que o integral impróprio $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st}e^{t^2}dt$ é divergente para todo o $s \in \mathbb{R}$. [Verifique!]

No seguimento da observação anterior seria importante conhecer classes de funções para as quais fosse garantida a existência de transformada de Laplace. Dito de outra forma, interessa saber que tipo de propriedades asseguram a convergência do integral $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)\,dt$ para algum $s \in \mathbb{R}$. A este propósito refira-se que a convergência do integral $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)\,dt$ para um certo $s = s_0$ implica a sua convergência para qualquer $s > s_0$.[34]

Atendendo ao integral impróprio envolvido na definição da transformada de Laplace, à partida deverá garantir-se a integrabilidade da função $t \mapsto e^{-st}f(t)$ em qualquer intervalo $[0, b]$, com $b > 0$. Tal acontece, por exemplo, quando a função f é seccionalmente contínua[35], o que é uma hipótese razoavelmente fraca. Além disso, para se garantir a existência (em $\mathbb{R}$) do limite $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\int_0^{b} e^{-st}f(t)\,dt$ importa controlar, de alguma forma, o crescimento da função f.

Teorema 5.2 (Existência de transformada de Laplace)
Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$. Suponha-se que:

[34]Esta propriedade pode ser provada a partir do chamado *Critério de Dirichlet*, o qual é usado algumas vezes para concluir sobre a natureza de integrais impróprios não absolutamente convergentes (ver, por exemplo, [5, pp. 600–601]).

[35]Notar que este conceito já foi discutido no Capítulo 2 quando se discutiu a convergência das séries de Fourier. De acordo com a definição aí apresentada, diremos que uma função f é seccionalmente contínua em $[0, +\infty[$ se for seccionalmente contínua em todo o intervalo $[0, b]$.

(i) *f é seccionalmente contínua em $[0, +\infty[$;*

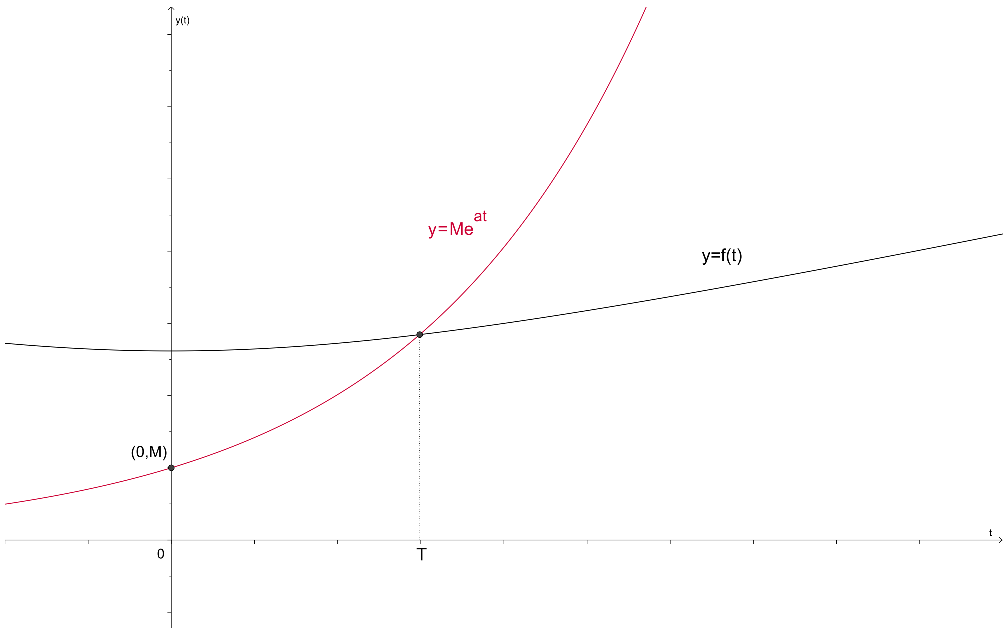
(ii) *existem constantes $M > 0$, $T > 0$, $a \in \mathbb{R}$ tais que*

$$|f(t)| \le M\, e^{at}, \qquad \textit{para todo } t \ge T. \tag{5.1}$$

Então $\mathcal{L}\{f\}(s)$ existe para $s > a$.

Observação 5.3 Uma função que satisfaz a propriedade expressa em (ii) do Teorema 5.2 diz-se uma ***função de ordem exponencial (à direita)*** (ver figura, para o caso $a > 0$). Para uma tal função f tem-se necessariamente

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-st} f(t) = 0, \qquad \text{para todo } s > a. \qquad \text{[Porquê?]}$$



A classe das funções de ordem exponencial é razoavelmente abrangente. Tal classe contém, por exemplo, as funções limitadas e a própria exponencial

e^{at}. Qualquer potência t^n, $n \in \mathbb{N}$, é também de ordem exponencial, pois $\dfrac{t^n}{e^t} \to 0$ quando $t \to +\infty$. Consequentemente toda a função polinomial é de ordem exponencial. São também exemplos de funções deste tipo as funções da forma

$$t^n e^{at}\cos(bt)\ , \qquad t^n e^{at}\text{sen}(bt) \qquad (\text{com } a, b \text{ constantes}).$$

Note-se, no entanto, que existem funções que não são de ordem exponencial. É caso da função e^{t^2}, uma vez que $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{e^{t^2}}{e^{at}} = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{t(t-a)} = +\infty$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Por comodidade e simplificação de linguagem, por vezes chamamos função de ordem exponencial a a uma função satisfazendo (5.1).

Já vimos que a transformação de Laplace goza da linearidade[36], o que poderá facilitar alguns cálculos. De seguida, apresentamos mais propriedades que, como veremos, são bastante úteis no cálculo da transformada de certas funções, uma vez que permitem tirar proveito de transformadas já conhecidas.

Observando que

$$\int_0^\infty e^{-st}e^{\lambda t}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-\lambda)t}f(t)\,dt\,, \qquad s, \lambda \in \mathbb{R},$$

facilmente se estabelece a seguinte propriedade:

Proposição 5.2 (deslocamento na transformada)
Sejam $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ integrável em todo o intervalo $[0, b]$, com $b > 0$, e $\lambda \in \mathbb{R}$. Se $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ existe para $s > s_f$, então $\mathcal{L}\{e^{\lambda t}f(t)\}(s)$ existe para $s > \lambda + s_f$ e

$$\boxed{\mathcal{L}\{e^{\lambda t}f(t)\}(s) = F(s-\lambda)}\,.$$

Exemplo 5.6 Como $\mathcal{L}\{\cos(3t)\}(s) = \dfrac{s}{s^2+9}$ para $s > 0$, então

$$\mathcal{L}\{e^{-t}\cos(3t)\}(s) = \mathcal{L}\{\cos(3t)\}(s+1) = \frac{s+1}{(s+1)^2+9} = \frac{s+1}{s^2+2s+10}\,, \quad s > -1.$$

[36] É possível provar que o conjunto das funções seccionalmente contínuas em $[0, +\infty[$ e de ordem exponencial contitui uma espaço vetorial real (com a adição e a multiplicação por um número real usuais) e que a transformada de Laplace é uma aplicação linear em tal espaço.

Proposição 5.3 (transformada do deslocamento)
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nula em $\mathbb{R}^-$ e integrável em todo o intervalo $[0, b]$, com $b > 0$. Se $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ existe para $s > s_f$, então, para todo $a \in \mathbb{R}^+$, também existe a transformada $\mathcal{L}\{f(t-a)\}(s)$ para $s > s_f$ e

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t-a)\}(s) = e^{-as}\,F(s)}.$$

Exemplo 5.7 Considere-se

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < 1, \\ (t-1)^2 & \text{se} \quad t \geq 1. \end{cases}$$

Temos $f(t) = g(t-1)$, onde

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < 0, \\ t^2 & \text{se} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Como $\mathcal{L}\{g(t)\}(s) = \mathcal{L}\{t^2\}(s) = \dfrac{2}{s^3}$ para $s > 0$, então

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{g(t-1)\}(s) = e^{-s}\,\mathcal{L}\{g(t)\}(s) = \frac{2}{e^s s^3}\,, \quad s > 0.$$

Podemos também lidar com a transformada do deslocamento de funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não necessariamente nulas em $\mathbb{R}^-$. Para tal considera-se a chamada *função de Heaviside* (ou função *degrau unitário*), definida por

$$H(t) := \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < 0 \\ 1 & \text{se} \quad t \geq 0 \end{cases}.$$

Também se define $H_a(t) := H(t-a), \quad t \in \mathbb{R}$. Note-se que $H(t)f(t)$ anula-se sempre em $\mathbb{R}^-$ (independentemente do que acontece com $f(t)$). Além disso, as transformadas de Laplace de $H(t)f(t)$ e $f(t)$ coincidem uma vez que $H(t)f(t) = f(t)$ em $\mathbb{R}_0^+$. Assim, aplicando a Proposição 5.3 a $H(t)f(t)$ obtém-se, para $a > 0$, $s > s_f$,

$$\boxed{\mathcal{L}\{H_a(t)f(t-a)\}(s) = e^{-as}\,F(s)}.$$

Exemplo 5.8 Como $\mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$ $(s > 0)$ temos, para $a > 0$,

$$\mathcal{L}\{H_a(t)\}(s) = \mathcal{L}\{H_a(t) \cdot 1\}(s) = \frac{e^{-as}}{s}\,, \quad s > 0.$$

Proposição 5.4 *Sejam $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ integrável em todo o intervalo $[0, b]$, com $b > 0$, e $a \in \mathbb{R}^+$. Se $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ existe para $s > s_f$, então $\mathcal{L}\{f(at)\}(s)$ existe para $s > as_f$ e*

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a}\, F\left(\frac{s}{a}\right)}.$$

Exemplo 5.9 Já sabemos que $\mathcal{L}\{\text{sen}(2t)\}(s) = \dfrac{2}{s^2+4}$, $s > 0$. A propriedade anterior permite chegar ao mesmo resultado a partir da transformada da função seno:

$$\mathcal{L}\{\text{sen}(2t)\}(s) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{\text{sen}\, t\}\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{(s/2)^2+1} = \frac{2}{s^2+4}\,, \quad s > 0.$$

Tal como anunciado anteriormente, estamos particularmente interessados em usar a transformada de Laplace na resolução de certos problemas envolvendo derivadas. Portanto, importa ver como é que aquela transformada se relaciona com a derivação.

Proposição 5.5 (derivada da transformada)
Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ seccionalmente contínua e de ordem exponencial s_f (i.e., tomando aqui s_f no lugar do a que aparece na definição de função de ordem exponencial, cf. Observação 5.3). Então, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, existe a transformada $\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s)$ para $s > s_f$ e

$$\boxed{\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n\, F^{(n)}(s)}.$$

onde $F^{(n)}$ denota a derivada de ordem n da função F.

Exemplo 5.10 Como $F(s) = \mathcal{L}\{\text{sen}(2t)\}(s) = \dfrac{2}{s^2+4}$ para $s > 0$, então

$$\mathcal{L}\{t\,\text{sen}(2t)\}(s) = -F'(s) = -\left(\frac{2}{s^2+4}\right)' = \frac{4s}{(s^2+4)^2}\,, \quad s > 0.$$

Observação 5.4 A fórmula anterior permite, por exemplo, calcular a transformada de Laplace de qualquer potência t^n ($n \in \mathbb{N}$) a partir da transformada da função constante igual a 1 (calculada no Exemplo 5.2):

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \mathcal{L}\{t^n \cdot 1\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s}\right) = (-1)^n \frac{(-1)^n\, n!}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}\,, \quad s > 0.$$

Proposição 5.6 (transformada da derivada)
Suponha-se que as funções $f, f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ ($n \in \mathbb{N}$) são todas de ordem exponencial s_0, para algum $s_0 \in \mathbb{R}$, e que $f^{(n)}$ existe e é seccionalmente contínua em $[0, +\infty[$. Então existe $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s)$ para $s > s_0$ e

$$\boxed{\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)}$$

Fica agora claro o significado da afirmação inicial sobre o facto da transformada de Laplace converter, de alguma forma, derivadas em polinómios.

Exemplo 5.11 Vamos calcular $F(s) = \mathcal{L}\{\cos^2 t\}(s)$.
Como $\left(\cos^2 t\right)' = -\mathrm{sen}(2t)$, então

$$-\mathcal{L}\{\mathrm{sen}(2t)\}(s) = \mathcal{L}\left\{\left(\cos^2 t\right)'\right\}(s) = s\mathcal{L}\{\cos^2 t\}(s) - \cos^2(0) = sF(s) - 1$$

para $s > 0$. Portanto,

$$F(s) = \frac{1}{s}\big(1 - \mathcal{L}\{\mathrm{sen}(2t)\}(s)\big) = \frac{s^2+2}{s(s^2+4)}\,, \quad s > 0.$$

Considere-se o seguinte problema de valores iniciais (o qual possui uma única solução, cf. Teorema 4.6):

Determinar $y = y(t)$ tal que

$$y'' + 2y' + 10y = 1, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \tag{5.2}$$

Seja $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$ (assumindo que a função y admite transformada de Laplace). Usando a fórmula dada na Proposição 5.6, temos

$$\mathcal{L}\{y'(t)\}(s) = s\,Y(s) - y(0) = s\,Y(s)$$

e

$$\mathcal{L}\{y''(t)\}(s) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s).$$

Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação dada em (5.2), obtemos

$$s^2Y(s) + 2s\,Y(s) + 10\,Y(s) = \mathcal{L}\{1\}(s). \qquad \text{[Porquê?]}$$

Daqui resulta que

$$(s^2 + 2s + 10)Y(s) = \frac{1}{s} \quad \text{i.e.,} \quad Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 10)} \quad (s > 0).$$

É claro que o problema anterior ainda não está resolvido. Relativamente à função $y = y(t)$ que procuramos, de momento apenas conhecemos a sua transformada de Laplace. Assim, seria importante considerar uma "transformação inversa" por forma a recuperar a função original. Voltaremos então ao nosso problema assim que esclarecermos a questão da inversão da transformada de Laplace.

5.2 Transformada de Laplace inversa

Dada uma transformada de Laplace $F(s)$ interessa determinar "a" função f (definida em $\mathbb{R}_0^+$) tal que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Tal f, caso exista, chama-se **transformada de Laplace inversa** de F e escreve-se

$$f = \mathcal{L}^{-1}\{F\} \quad \text{ou} \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t).$$

Mas veja-se o que acontece com a função constante igual a 1 e com a função do Exemplo 5.3. Ambas as funções têm a mesma transformada de Laplace $\frac{1}{s}$, pelo que se coloca uma ambiguidade ao considerar $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\}$. O problema pode ser resolvido se escolhermos para transformada inversa a função contínua:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}(t) = 1\,, \quad t \geq 0.$$

A escolha anterior é justificada pelo facto de não existirem funções contínuas diferentes com a mesma transformada de Laplace.

Teorema 5.3 *Sejam f e g funções seccionalmente contínuas em $[0, +\infty[$ tais que*

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = \mathcal{L}\{g\}(s), \quad \textit{para } s > \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Se f e g são contínuas no ponto $t \in \mathbb{R}^+$, então $f(t) = g(t)$.

Observação 5.5 Antes do problema da unicidade poderia colocar-se a questão da própria existência de transformada inversa. É possível indicar condições "necessárias" para que uma dada função seja uma transformada de Laplace. Na verdade, é possível provar que se uma função f é seccionalmente contínua em $[0, +\infty[$ e de ordem exponencial, então

$$\lim_{s \to +\infty} \mathcal{L}\{f\}(s) = 0.$$

Antes de calcularmos algumas transformadas inversas, registamos duas propriedades que podem ser provadas sem grande dificuldade.

Proposição 5.7 (linearidade da transformada inversa)
Suponha-se que F e G (definidas num mesmo domínio) admitem transformada de Laplace inversa. Então as funções $F + G$ e αF ($\alpha \in \mathbb{R}$) também admitem transformada inversa e

(i) $\mathcal{L}^{-1}\{F + G\} = \mathcal{L}^{-1}\{F\} + \mathcal{L}^{-1}\{G\}$;

(ii) $\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F\}$.

Exemplo 5.12 Vamos calcular a transformada inversa da função $\dfrac{e^{-s}}{s(s+1)}$. Lembrando que $\mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$ e $\mathcal{L}\{e^{-t}\} = \dfrac{1}{s+1}$, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s+1)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s}\Big(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\Big)\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s} \cdot \frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s} \cdot \frac{1}{s+1}\Big)\right\} \\
&= H_1(t) - H_1(t)e^{-(t-1)}
\end{aligned}$$

Proposição 5.8

Se F admite transformada de Laplace inversa, então $F(s-\lambda)$ também admite transformada inversa para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\{F(s-\lambda)\} = e^{\lambda t}\,\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}}$$

Exemplo 5.13 Como $\mathcal{L}\{t^2\} = \dfrac{2}{s^3}$ para $s > 0$, temos [Justifique!]:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s-2)^3}\right\} = \frac{3}{2}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-2)^3}\right\} = \frac{3}{2}\,e^{2t}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} = \frac{3}{2}\,e^{2t}\,t^2, \qquad t \geq 0.$$

Se observarmos as transformadas de Laplace já calculadas, constatamos que, em geral, estas são dadas por funções racionais (em s) em que o grau do polinómio do numerador é inferior ao grau do polinómio do denominador. A ideia passa então por decompor tais fracções em *frações simples*[37]. Vamos ilustrar tal facto no âmbito da resolução do problema indicado em (5.2). A este respeito, já vimos que a transformada de Laplace da função $y = y(t)$ que procuramos é dada por

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2+2s+10)}, \quad s > 0.$$

Decompondo o lado direito em frações simples, obtemos

$$Y(s) = \frac{1}{10}\,\frac{1}{s} - \frac{1}{10}\,\frac{s+2}{s^2+2s+10}, \quad s > 0. \qquad \text{[Verifique!]}$$

Assim, a solução do problema pode ser determinada do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \frac{1}{10}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{10}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+1)^2+9}\right\} \\
&= \frac{1}{10} - \frac{1}{10}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+9} + \frac{1}{(s+1)^2+9}\right\} \\
&= \frac{1}{10} - \frac{1}{10}\,e^{-t}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} - \frac{1}{10}\,e^{-t}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\} \\
&= \frac{1}{10} - \frac{1}{10}\,e^{-t}\cos(3t) - \frac{1}{30}\,e^{-t}\,\mathrm{sen}(3t), \quad t \geq 0.
\end{aligned}$$

[37] A decomposição em frações simples já foi discutida em Cálculo I quando se tratou a primitivação de funções racionais.

Terminamos este capítulo com uma referência à convolução de funções, operação que é bastante útil em certas aplicações. Define-se o *produto de convolução* de duas funções f e g por

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\,, \qquad t \geq 0$$

(desde que aquele integral exista). Usando uma mudança de variável apropriada ($u = t - \tau$, com t fixo), podemos verificar que $f * g = g * f$ (*i.e.*, a operação de convolução é comutativa).

Uma das propriedades interessantes da transformada de Laplace reside no facto de transformar o produto de convolução num produto usual de funções. Mais precisamente, vale o seguinte resultado:

Proposição 5.9 (transformada da convolução)
Se f e g são funções seccionalmente contínuas em $[0, +\infty[$ e ambas de ordem exponencial s_0, para algum $s_0 \in \mathbb{R}$, então, para $s > s_0$, tem-se

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{(f * g)(t)\right\}(s) = F(s)G(s)}$$

(onde $F(s)$ e $G(s)$ denotam as transformadas de Laplace das funções $f(t)$ e $g(t)$, respetivamente).

Com f nas mesmas condições da Proposição 5.9, para $s > \max\{0, s_0\}$ temos

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\}(s) = \frac{F(s)}{s}}$$

Note-se que a convolução pode ser usada para determinar transformadas inversas, tendo em conta a fórmula

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)G(s)\right\} = (f * g)(t)}$$

Exemplo 5.14 Recordando as transformadas do seno e do cosseno e a fórmula anterior para a convolução, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{s}{s^2+1}\right\} \\
&= (\mathrm{sen} * \cos)(t) \\
&= \int_0^t \mathrm{sen}\tau\ \cos(t-\tau)\,d\tau \\
&= \int_0^t \mathrm{sen}\tau\,(\cos t\cos\tau + \mathrm{sen}\tau\,\mathrm{sen}t)\,d\tau \\
&= \frac{t\,\mathrm{sen}t}{2}.
\end{aligned}$$

Exercício 3.1.1 Calcule as transformadas de Laplace das seguintes funções, indicando os respetivos domínios.

1. $f(t) = 1$.
2. $f(t) = e^t$.

Exercício 3.4.1 Determine a transformada de Laplace das funções, indicando os respetivos domínios:

1. $f(t) = t^2 + \cos(3t) + \pi$
2. $g(t) = 3e^{-2t} + \operatorname{sen}\left(\dfrac{t}{6}\right) + \cosh(4t)$
3. $h(t) = t^{10} + \dfrac{e^t}{3} + \cos^2(t)$
4. $j(t) = \operatorname{senh}(\sqrt{2}t) + \left(\frac{t}{2}\right)^2$

Exercício 3.5.1 Calcule as transformadas de Laplace de:

1. $f(t) = e^{2t}t^2$
2. $h(t) = e^{-t}\cosh(4t)$

3.8 Derivada da transformada

Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, integrável em $[0, b]$, para qualquer $b > 0$.
Se $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ existe para $s > s_f$, então

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n F^{(n)}(s), \quad s > s_f.$$

Exercício 3.8.1 Use a propriedade anterior para obter a Transformada de Laplace de:

1. $f(t) = te^{2t}$
2. $h(t) = (t^2 - 3t + 2)\operatorname{sen}(3t)$.

3.9 Transformada da derivada

Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ seccionalmente contínua. Admita-se que as derivadas f', f'', $\ldots$, $f^{(n-1)}$ são de ordem exponencial e que $f^{(n)}$ é seccionalmente contínua.
Se existem

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s),\ \mathcal{L}\{f'\}(s),\ \ldots,\ \mathcal{L}\{f^{(n-1)}\}(s)$$

para $s > s_f$, $s > s_{f'}$, $\ldots$, $s > s_{f^{(n-1)}}$, respetivamente, então

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \\ - s^{n-3} f''(0) - \ldots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),\end{aligned}$$

para $s > \max\{s_f, s_{f'}, s_{f''}, \ \ldots, s_{f^{(n-1)}}\}$.

Exercício 3.9.1 Supondo que $y = f(x)$ e as suas derivadas satisfazem as condições do Teorema anterior, determine em função de $F(s) = \mathcal{L}\{f\}$

1. $\mathcal{L}\{f''(t)\}$ sabendo que $f(0) = 1$ e $f'(0) = 2$.
2. $\mathcal{L}\{f''(t) + 3f'(t) - f(t)\}$ sabendo que $f(0) = 3$ e $f'(0) = 0$.
3. $\mathcal{L}\{f'''(t) - 2f''(t) - f'(t)\}$ sabendo que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ e $f''(0) = 0$.

Exercício 3.5.1 Calcule as transformadas de Laplace de:

1. $f(t) = e^{2t}t^2$
2. $h(t) = e^{-t}\cosh(4t)$

$$\left(\mathcal{L}\{t^2\}(s) = \underbrace{\frac{2}{s^3}}_{F(s)}, \ s > 0 \right)$$

$$1. \quad \mathcal{L}\{e^{2t}\underbrace{t^2}_{f(t)}\}(s) = F(s-2), \ s > 0 + \lambda$$

$$= \frac{2}{(s-2)^3}, \ s > \lambda$$

$$\left(\mathcal{L}\{\cosh(4t)\}(s) = \frac{s}{s^2-16}, \ s > 4 \right)$$

$$2. \quad \mathcal{L}\{e^{-t}\cosh(4t)\}(s) =$$

$$= \frac{s+1}{(s+1)^2 - 16}, \ s > -1 + 4 = 3$$

Determinar $y = y(t)$ tal que

$$y'' + 2y' + 10y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \tag{5.2}$$

$$\mathcal{L}\{y'' + 2y' + 10y\}(s) = \mathcal{L}\{1\}(s) \qquad \left(Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)\right)$$

$$\mathcal{L}\{y''\} + 2\mathcal{L}\{y'\} + 10\mathcal{L}\{y\} = 1/s$$

$$s^2Y(s) - s\underbrace{y(0)}_{=0} - \underbrace{y'(0)}_{=0} + 2\left(sY(s) - \underbrace{y(0)}_{=0}\right) + 10Y(s) = 1/s$$

$$s^2Y(s) + 2sY(s) + 10Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$(s^2 + 2s + 10)Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 10)} = \frac{1}{s\left((s+1)^2 + 9\right)}$$