Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem:

$$a_0(x)\,y' + a_1(x)\,y = b(x)$$

onde a_0, a_1, b são funções definidas num certo intervalo I, com $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Deste modo, esta equação pode tomar a seguinte forma:

$$y' + p(x)\,y = q(x).$$

Quando $b \equiv 0$ ($q \equiv 0$), a equação diz-se incompleta ou homogénea.

Exemplos:

- $y' + xy = 1$ equação diferencial linear de 1.ª ordem completa.
- $y' + xy = 0$ equação diferencial linear de 1.ª ordem incompleta (ou homogénea).

Nota: Se $q \equiv 0$ ou se p e q forem funções constantes, a EDO é de variáveis separáveis.

Resolução de uma EDO linear de 1.ª ordem, usando um fator integrante

Para resolver a equação

$$y' + p(x)\, y = q(x),$$

basta determinar uma primitiva P da função p, multiplicar ambos os membros pelo fator integrante

$$\mu(x) = e^{P(x)}$$

e integrar de seguida em ordem a x.

Exemplo:

$$y' - y = -e^x$$

Um fator integrante é e^{-x}, pois $p(x) = -1$. Multiplicando ambos os membros da equação por e^{-x}, obtemos

$$e^{-x}y' - e^{-x}y = -1\,, \qquad \text{i.e.,} \qquad \tfrac{d}{dx}\left(e^{-x}y\right) = -1.$$

Integrando vem

$$e^{-x}y = \int(-1)\,dx = -x + C\,, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Assim, um integral geral da equação linear é

$$y = (C - x)\,e^x\,, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

$$y' - y = -e^x \quad , \quad p(x) = -1$$

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{-x}$$

$$e^{-x}\left(y' - y \right) = e^{-x}\left(-e^{x}\right)$$

$$\rightarrow \left(e^{-x} y\right)' = -e^{0}$$

$$\left(e^{-x} y\right)' = -1$$

$$e^{-x} y = -x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$y = -xe^{x} + ce^{x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

PVI associado a EDO linear de primeira ordem:

Teorema (existência e unicidade de solução):

Se p e q são funções contínuas num intervalo I, então o problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' + p(x)\,y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tem nesse intervalo uma e uma só solução.

Exemplo:

• $y' - y = (-e^x - \cancel{xe^x}) - (-\cancel{xe^x}) = -e^x$ ✓

$y(0) = -0e^0 = 0$ ✓

O problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' - y = -e^x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

tem como solução única $y = -xe^x$, para $x \in \mathbb{R}$. Porquê?

Equações de Bernoulli:

$$y' + a(x)\, y = b(x)\, y^{\alpha}\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- Se $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$, a equação é linear de 1.ª ordem.
- Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$, a equação é redutível a uma EDO linear de 1.ª ordem, usando a mudança de variável

$$z = y^{1-\alpha}.$$

De facto, a equação de Bernoulli pode escrever-se na forma

$$y^{-\alpha} y' + a(x)\, y^{1-\alpha} = b(x)$$

(eventualmente com $y \neq 0$).
Com a substituição $z = y^{1-\alpha}$, chegamos à equação linear de 1.ª ordem:

$$z' + (1-\alpha)a(x)\, z = (1-\alpha)\, b(x)\,.$$

Exemplo:

A equação

$$y' + y = e^x\, y^2$$

é uma equação de Bernoulli (com $\alpha = 2$). Tomando $z = 1/y$ ($y \neq 0$), obtemos

$$z' - z = -e^x,$$

cujo integral geral é

$$z = (C - x)\, e^x\,, \qquad C \in \mathbb{R},$$

Ver slide 23

Assim, um integral geral da equação de Bernoulli é

$$y = \frac{e^{-x}}{C - x}\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

$y' + y = e^x y^2$, $\alpha = 2$

$z = y^{1-\alpha}$, $z = y^{-1}$, $z' = -y^{-2} \cdot y'$

(1) Multiplicar a equação por y^{-2}

$$y^{-2} y' + y^{-1} = e^x$$

(2) Mudar de variável

$$-z' + z = e^x$$

(3) Escrever a equação na forma normal

$$z' - z = -e^x$$

(4) Fator integrante $\mu(x) = e^{-x}$

$$e^{-x}(z' - z) = e^{-x}(-e^x)$$

$$(z e^{-x})' = -1$$

$$\longrightarrow z e^{-x} = -x + C$$

$$z = -x e^x + C e^x$$

$$\boxed{z = y^{-1} = \frac{1}{y}}$$

$$\frac{1}{y} = (C - x)e^x \Rightarrow y = \frac{1}{(C-x)e^x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Equações Lineares de Ordem Arbitrária:

$$\underbrace{a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y}_{L y} = b(x)$$

onde

$b\colon I \to \mathbb{R}$;

Eq. homogén

$a_i\colon I \to \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$, com $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

$f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$

$\downarrow$

$y' = f(x,y)$

coeficientes da equação

- Se $b \equiv 0$, a equação diz-se incompleta (ou homogénea); Caso contrário, a equação diz-se completa (ou não homogénea);
- Se os coeficientes da equação são funções constantes, a equação diz-se de linear de coeficientes constantes.

Exemplos

1.
$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$$

EDO linear homogénea de segunda ordem com coeficientes constantes;

2.
$$e^x\, y' - \cos x\, y = x$$

EDO linear completa de primeira ordem;

3.
$$y^{(5)} + 2y' = 0$$

EDO linear homogénea de quinta ordem com coeficientes constantes.

Equação homogénea associada a uma EDO linear

Se na equação

$$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = b(x)$$

tomarmos $b(x) \equiv 0$, obtemos a chamada equação homogénea associada.

Exemplo:

A equação homógenea associada à equação completa

$$y'' + y = \cos(x)$$

é a equação

$$y'' + y = 0\,.$$

Solução geral de uma EDO linear completa

Teorema:

A solução geral de uma equação linear completa obtém-se adicionando uma qualquer sua solução (particular) à solução geral da equação homogénea associada.

Exemplo:

$$y' - 2y = e^{5x}$$

A equação homogénea associada é a equação

$$y' - 2y = 0 \, ,$$

cuja solução geral é dada por $y_h = C\,e^{2x}$, com $C \in \mathbb{R}$.

Uma solução da EDO completa é $y_p = \frac{1}{3}\,e^{5x}$ [Verifique!].

Assim, a solução geral da equação completa é

$$y = \underbrace{C\,e^{2x}}_{y_h} + \underbrace{\frac{1}{3}\,e^{5x}}_{y_p} \, , \quad C \in \mathbb{R}.$$

Solução geral de uma EDO linear completa

Teorema:

A solução geral de uma equação linear completa obtém-se adicionando uma qualquer sua solução (particular) à solução geral da equação homogénea associada.

Exemplo: $$y' - 2y = e^{5x}$$

- $y' - 2y = 0$ (eq. linear hom. associada)

$$\frac{dy}{dx} = 2y \qquad \frac{1}{y}\,dy = 2\,dx$$

$$y_H = c\,e^{2x}, \quad c \in \mathbb{R}$$

- Solução particular de $y' - 2y = e^{5x}$

$$\underline{y = Ke^{5x}}$$

$$5Ke^{5x} - 2Ke^{5x} = e^{5x}$$

$$3K = 1 \Leftrightarrow K = 1/3$$

$$y_P = \frac{1}{3}e^{5x}$$

$$y = y_H + y_P$$

EDO linear homogénea – conjunto das soluções

$\mathcal{L}0 = 0$

$\mathcal{L}\{\alpha y + \beta w\} = \alpha \mathcal{L}\{y\} + \beta \mathcal{L}\{w\}$

Considere-se a EDO:

$$\overbrace{a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y}^{\mathcal{L}y} = 0 \qquad (4)$$

onde $a_i\colon I \to \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$, com $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Teorema:

Sejam $y\colon I \to \mathbb{R}$, $w\colon I \to \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) $y \equiv 0$ é solução de (4);

(ii) Se y e w são soluções de (4), então $y + w$ é solução de (4);

(iii) Se y é solução de (4), então αy é solução de (4);

Isto é, o conjunto das soluções de (4) é um subespaço vetorial do espaço vetorial das funções reais de variável real definidas em I.

EDO linear homogénea – conjunto das soluções (cont.)

Na verdade, o conjunto das soluções de uma EDO linear homógenea é um subespaço vetorial de dimensão n, como se conclui do seguinte teorema:

Teorema: Toda a equação linear homogénea de ordem n

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0,$$

num dado intervalo I ($a_0, a_1, \ldots a_n$ contínuas em I; $a_0(x) \neq 0$ para todo o $x \in I$) admite n soluções, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, linearmente independentes e qualquer sua solução, y, pode escrever-se como sua combinação linear, *i.e.*,

$$y = C_1\varphi_1 + \cdots + C_n\varphi_n, \text{ para } C_j \in \mathbb{R}\,.$$

Qualquer conjunto de n soluções linearmente independente de uma EDO linear homogénea de ordem n é designado por sistema fundamental de soluções dessa equação.

Exemplo:

$$y'' + y = 0 \tag{5}$$

$\varphi_1(x) = \cos x$, $\varphi_2(x) = \sin x$ são soluções desta equação diferencial e são linearmente independentes. Ver slide 7

Assim, $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$ é sistema fundamental de soluções de (5).

Logo, a solução geral da equação é

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Observações:

1. A resolução de uma EDO linear homogénea reduz-se à determinação de um sistema fundamental de soluções. Todavia, para $n > 1$, não existe método geral que permita obter um tal conjunto de soluções.
2. Se a EDO linear homogénea tiver coeficientes constantes, um sistema fundamental de soluções pode ser obtido a partir do conhecimento das raízes do chamado polinómio caraterístico(ver 39 e seguintes).

$y'' + y = 0$

$\varphi_1(x) = \cos x$

$\varphi_1'' + \varphi_1 = -\cos x + \cos x = 0$

$\varphi_2(x) = \sin x$

$\varphi_2'' + \varphi_2 = -\sin x + \sin x = 0$

$\alpha \cos x + \beta \sin x = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

φ_1 e φ_2 são linearmente independentes

$SFS = \{\cos x, \sin x\}$

Solução geral $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Como obter uma solução particular de uma EDO linear completa?

Método da variação das constantes é um método de determinação de uma solução particular de uma equação linear completa que

- pressupõe o conhecimento da solução geral da equação homogénea associada:

$$y_h = C_1\varphi_1(x) + \cdots + C_n\varphi_n(x)\,, \quad C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R},$$

  onde $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ é um sistema fundamental de soluções desta equação.

- procura obter uma solução particular da equação completa da forma

$$y_p = C_1(x)\varphi_1(x) + \cdots + C_n(x)\varphi_n(x)\ ,$$

  admitindo que as constantes são funções (de x) diferenciáveis, determinando-as da forma como é indicada no slide seguinte.

Método da variação das constantes (cont.)

1. As funções $C_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ determinam-se calculando as suas derivadas que constituem a solução do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} C_1' \varphi_1 + \cdots + C_n' \varphi_n = 0 \\ C_1' \varphi_1' + \cdots + C_n' \varphi_n' = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ C_1' \varphi_1^{(n-2)} + \cdots + C_n' \varphi_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1' \varphi_1^{(n-1)} + \cdots + C_n' \varphi_n^{(n-1)} = \frac{b}{a_0} \end{cases}$$

2. Calculando primitivas $G_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, das funções que se obtêm da resolução do sistema anterior, podemos escrever a seguinte solução particular da equação completa:

$$y_p = G_1(x)\varphi_1(x) + \cdots + G_n(x)\varphi_n(x).$$

Exemplo: $$y'' + y = \operatorname{cosec} x\,,\ \ x \in]0, \pi[\tag{6}$$

1. A solução geral da equação homogénea associada é

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

▸ Ver slide 33

2. Procure-se uma solução particular da forma

$$y_p = C_1(x) \cos x + C_2(x) \text{ sen } x,$$

onde

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \text{ sen } x = 0 \\ C_1'(x)(-\text{ sen } x) + C_2'(x) \cos x = \operatorname{cosec} x. \end{cases}$$

3. Da resolução do sistema obtemos $C_1'(x) = -1$ e $C_2'(x) = \operatorname{cotg} x$. Logo, podemos tomar

$$C_1(x) = -x \quad \text{e} \quad C_2(x) = \ln(\text{ sen } x)\,, \quad 0 < x < \pi\,.$$

Exemplo: $\quad y'' + y = \operatorname{cosec} x, \ x \in]0, \pi[$

1. A solução geral da equação homogénea associada é

$$y_H = C_1 \underbrace{\cos x}_{\varphi_1} + C_2 \underbrace{\sin x}_{\varphi_2}, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \to y'' + y = 0$$

$$y_p = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$$

$$\begin{cases} C_1'(x)\varphi_1 + C_2'(x)\varphi_2 = 0 \\ C_1'(x)\varphi_1' + C_2'(x)\varphi_2' = \operatorname{cosec} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x)\cos x = \frac{1}{\sin x} \end{cases}$$

1ª EQ: $C_2'(x) = -\frac{\cos x}{\sin x} C_1'(x)$

2ª EQ: $C_1'(x)(-\sin x) + \left(-\frac{\cos x}{\sin x} C_1'(x)\right)\cos x = 1/\sin x$

$$C_1'(x)\left(\sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right) = 1/\sin x \Leftrightarrow C_1'(x) = -1 \Leftarrow$$

$$C_1(x) = -x$$

1ª EQ: $C_2'(x) = -\frac{\cos x}{\sin x}(-1)$

$$C_2'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \Leftarrow C_2(x) = \ln(\sin x)$$

$$y = y_H + y_p = \underbrace{C_1\cos x + C_2\sin x}_{y_H} + \underbrace{(-x)\cos + \ln(\sin x)\cdot\sin x}_{y_p}, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Exemplo (cont.):

4. Assim, uma solução particular é

$$y_p = -x\cos x + \text{sen } x \ln(\text{sen } x).$$

5. Logo, a solução geral da equação completa (6) é

$$\begin{aligned} y &= \underbrace{C_1\cos x + C_2 \text{ sen } x}_{y_h} \underbrace{-x\cos x + \text{sen } x \ln(\text{sen } x)}_{y_p}, \quad 0 < x < \pi, \\ &= (C_1 - x)\cos x + (C_2 + \ln(\text{sen } x)) \text{ sen } x\,, \qquad 0 < x < \pi, \end{aligned}$$

onde C_1, C_2 são constantes reais arbitrárias.

Princípio de sobreposição

$\mathcal{L}y = b_1(x) + b_2(x)$

$\mathcal{L}\{y_1 + y_2\} = \mathcal{L}\{y_1\} + \mathcal{L}\{y_2\}$
$= b_1(x) + b_2(x)$

Teorema:

Suponha-se que y_1 é uma solução (particular) da equação

$$\mathcal{L}y = a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)\,y = b_1(x)\,, \to y_1$$

e que y_2 é uma solução (particular) da equação

$$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)\,y = b_2(x)\,. \to y_2$$

Então $y_1 + y_2$ é uma solução (particular) da equação

$$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = b_1(x) + b_2(x).$$

EDO lineares com coeficientes constantes

EDO linear de ordem n com coeficientes constantes tem a forma:

$$a_0\, y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = b(x)\ ,$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ com $a_0 \neq 0$.

Equação homogénea associada:

$$a_0\, y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = 0$$

Polinómio associado (polinómio caraterístico):

$$P(r) = a_0\, r^n + a_1\, r^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, r + a_n$$

As n raízes do polinómio P(r) permitem determinar n soluções linearmente independentes da equação homógenea, cada uma associada a cada uma dessas raízes (ver como no slide seguinte). Portanto, permitem determinar a solução geral da equação homógenea.

Construção dum sistema fundamental de soluções (base do subespaço das soluções) da EDO linear com coeficientes constantes e homogénea:

Considerem-se as raízes de P(r) identificadas e para cada uma delas real e para cada par delas complexas (se existirem) proceda-se à seguinte associação de soluções (no final do processo ter-se-à n soluções linearmente independentes):

- 1.º Caso: A raíz, r, é real simples.

  Solução: e^{rx}
- 2.º Caso: A raíz, r, é real de mutiplicidade k.

  Soluções: $e^{rx}, xe^{rx}, \ldots, x^{k-1}e^{rx}$
- 3.º Caso: As raízes são complexas conjugadas simples, $\alpha + \beta i$ e $\alpha - \beta i$.

  Soluções: $e^{\alpha x}\cos(\beta x) \quad \text{e} \quad e^{\alpha x}\,\text{sen}\,(\beta x)$
- 4.º Caso: As raízes são complexas conjugadas, $\alpha + \beta i$ e $\alpha - \beta i$, com multiplicidade k.

  Soluções: $e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,,\ \ x\,e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,, \ldots,\ \ x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x),$
  $e^{\alpha x}\ \text{sen}\,(\beta x)\,,\ \ x\,e^{\alpha x}\ \text{sen}\,(\beta x)\,, \ldots,\ \ x^{k-1}e^{\alpha x}\ \text{sen}\,(\beta x)$

Exemplo: $y^{(5)} + 2y^{(4)} + 4y^{(3)} + 8y^{(2)} + 4y' + 8y = 0$

$= (R+2)\left(R^2+2\right)^2$

Polinómio característico: $r^5 + 2r^4 + 4r^3 + 8r^2 + 4r + 8.$

Raízes do polinómio característico:

$$-2 \text{ (simples)};\ i\sqrt{2} \text{ e } -i\sqrt{2}, \text{ raízes duplas.}$$

Sistema fundamental de soluções:

$$\{e^{-2x},\ \cos(\sqrt{2}x),\ x\cos(\sqrt{2}x),\ \operatorname{sen}(\sqrt{2}x),\ x\operatorname{sen}(\sqrt{2}x)\}.$$

Assim, a solução geral da equação dada é

$$y = B\,e^{-2x} + \left(C_1 + C_2 x\right)\cos(\sqrt{2}x) + \left(D_1 + D_2 x\right)\operatorname{sen}(\sqrt{2}x),$$

com $B, C_1, C_2, D_1, D_2 \in \mathbb{R}$.

$$R = -2 \longrightarrow e^{-2u}$$

$$R = \pm\sqrt{2}\, i \longrightarrow e^{0u}\cos(\sqrt{2}u),\ u\, e^{0u}\cos(\sqrt{2}u)$$

(mult. 2)

$$e^{0u}\sin(\sqrt{2}u),\ u\, e^{0u}\sin(\sqrt{2}u)$$

$$SFS = \left\{ e^{-2u},\ \cos(\sqrt{2}u),\ \sin(\sqrt{2}u),\ u\cos(\sqrt{2}u),\ u\sin(\sqrt{2}u) \right\}$$

$$Y_H = C_1 e^{-2u} + C_2\cos(\sqrt{2}u) + C_3\sin(\sqrt{2}u) + C_4\, u\cos(\sqrt{2}u) + C_5\, u\sin(\sqrt{2}u),$$

$$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 \in \mathbb{R}.$$

Método dos Coeficientes Indeterminados:

- Método para determinar uma solução particular, aplicável às EDO lineares de coeficientes constantes completas

$$a_0\, y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = b(x) \tag{7}$$

com $b(x)$ da forma

$$b(x) = P_m(x)\, e^{\alpha x} \cos(\beta x) \quad \text{ou} \quad b(x) = P_m(x)\, e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x),$$

onde $P_m(x)$ denota um polinómio de grau $m \in \mathbb{N}_0$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Neste caso, prova-se que existe uma solução particular da equação (7) do tipo

$$y_p(x) = x^k\, e^{\alpha x} \left(Q(x) \cos(\beta x) + R(x) \operatorname{sen}(\beta x) \right) \tag{8}$$

onde

  (i) k é a multiplicidade de $\alpha + i\beta$, se $\alpha + i\beta$ for raiz do polinómio caraterístico da equação homogénea associada a (7); senão, $k = 0$;

  (ii) $Q(x)$, $R(x)$ são polinómios de grau m cujos coeficientes terão de ser determinados usando a EDO (7) e a expressão para a solução (8).

Exemplo (cálculo de solução particular de uma EDO linear de coeficientes constantes completa, usando o método dos coeficientes indeterminados):

$$y' - 3y = e^{3x}$$

Como

$$e^{3x} = P_m(x)\, e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

com $P_m(x) \equiv 1$ (grau zero), $m = 0$, $\alpha = 3$, $\beta = 0$ e 3 é raiz do polinómio característico, com multiplicidade 1, então a solução particular a procurar é da forma

$$y_p = x\ e^{3x} A\,, \quad \text{com } A \in \mathbb{R} \text{ a determinar.}$$

Substituíndo y_p e y_p' na equação:

$$\underbrace{A\, e^{3x} + 3Ax\, e^{3x}}_{y_p'} - 3(\underbrace{A\, x\, e^{3x}}_{y_p}) = e^{3x}$$

obtemos $(A-1)e^{3x} = 0$, e portanto $A = 1$. Assim, $y_p = xe^{3x}$.

$$y' - 3y = e^{3x}$$

- $y' - 3y = 0 \longrightarrow p(r) = r - 3$

raiz simples 3

$$y_H = c\,e^{3x}, \; c \in \mathbb{R}$$

$$b(x) = P_m(x)\, e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

$\alpha = 3$, $\beta = 0$, $P_m(x) = 1$ (grau 0),

k? $\alpha + i\beta = 3$ é raiz de $p(r)$ com mult. 1

$\Rightarrow k = 1$

$$y_p = x^k e^{\alpha x}\left(\underline{Q(x)} \cos(\beta x) + \underline{R(x)} \sin(\beta x)\right)$$

$$= x^1 \cdot e^{3x} \cdot \left(A \cos(0) + B \cdot \sin(0)\right)$$

$$= A x e^{3x}$$

Vamos substituir y por Axe^{3x} e y'

por $Ae^{3x} + 3Axe^{3x}$

na equação

$$y' - 3y = e^{3x}$$

$$(3Ax + A)e^{3x} - 3Axe^{3x} = e^{3x}$$

$$\cancel{3Axe^{3x}} + Ae^{3x} - \cancel{3Axe^{3x}} = e^{3x}$$

$$A = 1. \quad \therefore y_p = xe^{3x}$$

PVI associado a uma EDO linear de ordem arbitrária

Teorema (existência e unicidade de solução):

Se $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_{n-1}, a_n(x)$ e $b(x)$ são funções contínuas num intervalo I, $a_0(x) \neq 0$, para todo o $x \in I$, então o problema de Cauchy

$$\begin{cases} a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = b(x) \\ \\ y(x_0) = \beta_0, y'(x_0) = \beta_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = \beta_{n-1}\,, \end{cases}$$

onde $x_0 \in I$ e β_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, são reais dados, tem nesse intervalo uma e uma só solução.

Exemplo: O problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 2 \end{cases}$$

tem uma solução única em $\mathbb{R}$. Porquê? e Qual?