

GUIÃO 1

FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

LINGUAGEM DA MATEMÁTICA

REVISÕES SOBRE FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

TEOREMAS SOBRE FUNÇÕES CONTÍNUAS E DERIVÁVEIS

PAULA OLIVEIRA

2021/22

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - UNIVERSIDADE DE AVEIRO

Capítulo 3

As funções trigonométricas

Neste capítulo vamos focar o nosso estudo nas funções trigonométricas inversas. Começamos por recordear as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente, introduzimos as funções secante, cossecante e cotangente e finalmente fazemos o estudo das funções arco seno, arco cosseno, arco tangente e arco cotangente.

3.1 Funções trigonométricas diretas

As funções trigonométricas seno, cosseno e tangente são definidas *geometricamente* no círculo trigonométrico, como estudado no Ensino Secundário.

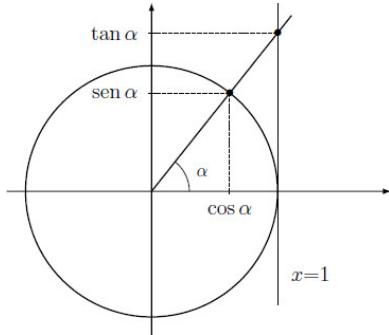


Figura 3.1: As funções seno, cosseno e tangente no círculo trigonométrico.

Exercício 3.1 Mostre que $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, determine domínio e contradomínio de sen , \cos , tg e prove que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Seja $p \in \mathbb{R}^+$ e D um subconjunto não vazio de \mathbb{R} verificando a propriedade

$$x \in D \text{ se e só se } x + p \in D.$$

Uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se **periódica** com período p se e só se

$$\forall x \in D, f(x + p) = f(x) \quad (3.1)$$

As funções trigonométricas são periódicas. O período das funções seno e cosseno é 2π e o período da função tangente é π . Contudo, poderíamos dizer que estas funções têm outros períodos, por exemplo, 4π já que

$$\operatorname{sen}(x + 4\pi) = \operatorname{sen} x; \cos(x + 4\pi) = \cos x \text{ e } \operatorname{tg}(x + 4\pi) = \operatorname{tg} x.$$

Usualmente diz-se que o menor $p \in \mathbb{R}^+$ que satisfaz a condição 3.1 é o **período** da função f .

Observação 3.1. Uma função constante é periódica e o seu período é qualquer $p > 0$.

3.1.1 As funções secante, cossecante e cotangente

Para além de seno, cosseno e tangente, outras funções trigonométricas são definidas conforme indicado no círculo trigonométrico da figura 3.2: secante (sec), cossecante (csc), cotangente (cotg).

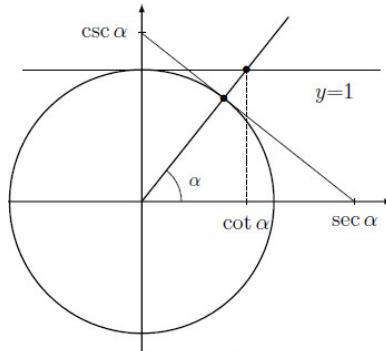


Figura 3.2: As funções cosecante (csc), secante (sec) e cotangente (cot) no círculo trigonométrico.

3.1.1.1 A função secante

Chama-se **secante** à função

$$\begin{aligned} \sec : D_{\sec} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sec x = \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

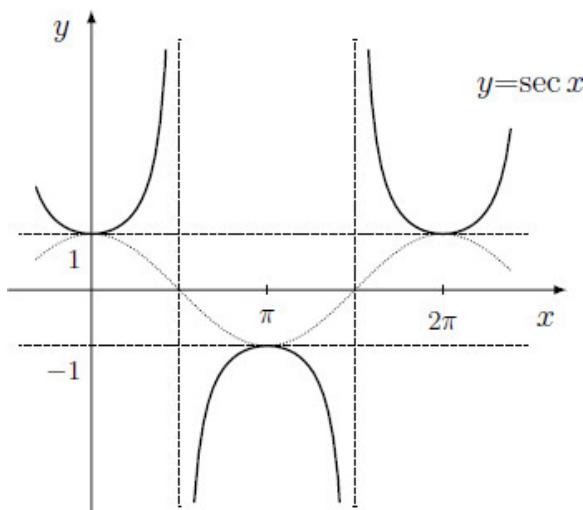


Figura 3.3: A função secante (sec).

Exercício resolvido 3.1. 1. Determine D_{\sec} e CD_{\sec} .

2. Qual o período? Em que intervalos é monótona?
3. Verifique que $1 + \tan^2 x = \sec^2 x, \forall x \in D_{\sec}$.
4. Determine, caso existam, os zeros desta função.

Resolução:

1. $D_{\sec} = \{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$ e $CD_{\sec} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, atendendo a que $-1 \leq \cos x \leq 1$.
2. O período é o mesmo da função cosseno: $p = 2\pi$. Monótona crescente em $\left]2k\pi + \frac{\pi}{2}, (2k+1)\pi\right[$ e em $\left]2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ (nos intervalos onde a função cosseno é decrescente) e é monótona decrescente em $\left](2k+1)\pi, (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ e em $\left]2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi\right[$ ($k \in \mathbb{Z}$) (nos intervalos onde a função cosseno é crescente).
4. A função não tem zeros já que o numerador da expressão que a define é diferente de zero.

3.1.1.2 A função cossecante

Chama-se **cossecante** à função

$$\begin{aligned} \csc : D_{\csc} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \csc x = \frac{1}{\sin x} \end{aligned}$$

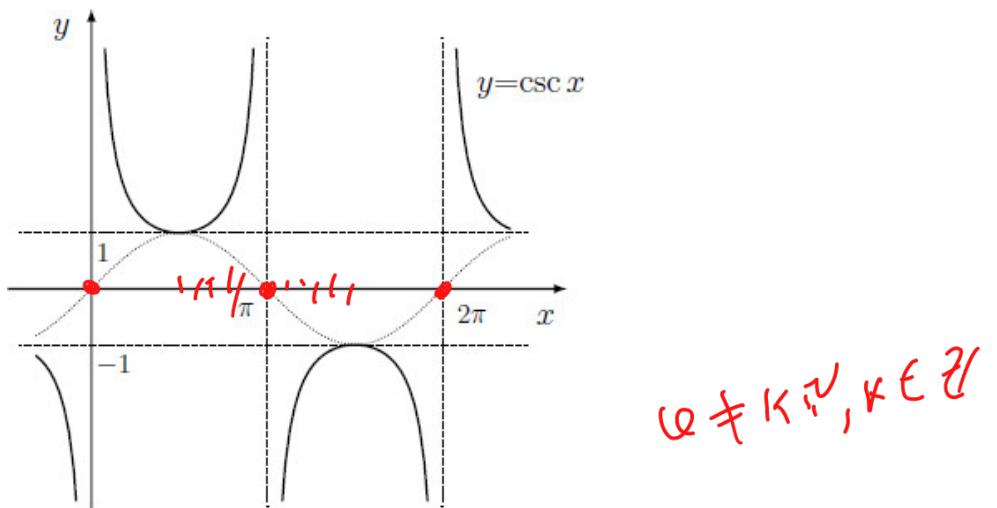


Figura 3.4: A função cossecante (\csc).

Exercício 3.2 Determine D_{\csc} e CD_{\csc} . Qual o período? Em que intervalos é monótona? Determine, caso existam, os zeros da função.

3.1.1.3 A função cotangente

Chama-se **cotangente** à função

$$\begin{aligned} \cotg : D_{\cotg} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cotg x = \frac{\cos x}{\sin x} \end{aligned}$$

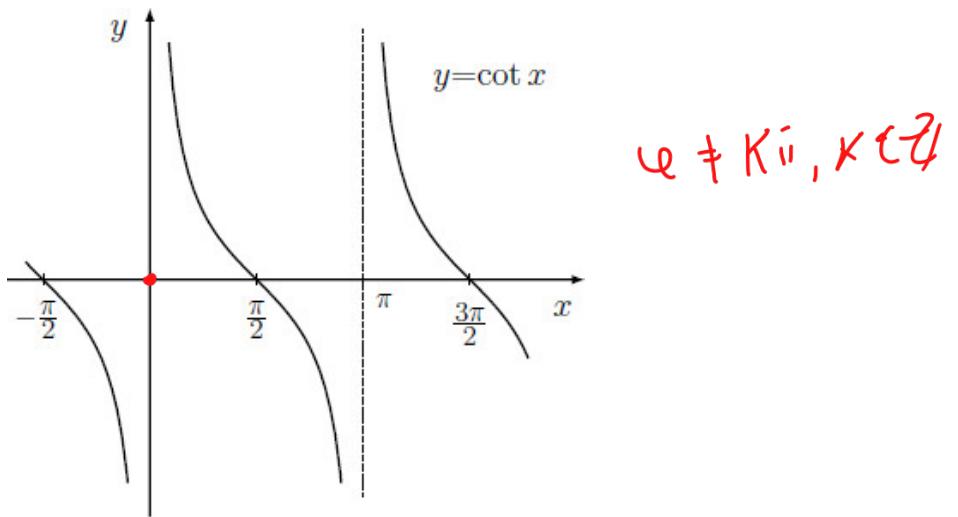


Figura 3.5: A função cotangente.

Exercício 3.3 Determine $D_{\cot g}$ e $CD_{\cot g}$. Qual o período? Em que intervalos é monótona? Determine os zeros desta função. Verifique que $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$, $\forall x \in D_{\cot g}$.

Exercício 3.4

1. A igualdade $\cot g x = \frac{1}{\tan x}$ é verdadeira para todo $x \in D_{\cot g}$? E $\cot g(x - \frac{\pi}{2}) = -\tan x$?
2. Para que valores de x é verdadeira a igualdade $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sec x}{\csc x}$?
3. Mostre que se $x \neq \frac{n\pi}{2}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$\tan x + \cot g x = \sec x \csc x \quad \text{e} \quad (\tan x + \cot g x)^2 = \sec^2 x + \csc^2 x$$

- 4. Explique porque as funções trigonométricas não são invertíveis

3.2 Funções trigonométricas inversas

Como se referiu, as funções trigonométricas não admitem inversa, já que, sendo periódicas não são injetivas. Contudo, podemos considerar restrições aos domínios dessas funções, onde o conjunto das imagens continua a ser o contradomínio da função original, mas o domínio escolhido faz com que as restrições a essas funções sejam funções injetivas.

3.2.1 Função arco seno

A **restrição** da função seno ao intervalo $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ é **injetiva**, logo a função

$$\begin{aligned} S : \quad & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R} \\ & x \quad \mapsto \quad S(x) = \sin x \end{aligned}$$

é invertível. À sua inversa chama-se **arco seno** e denota-se por arcsen.

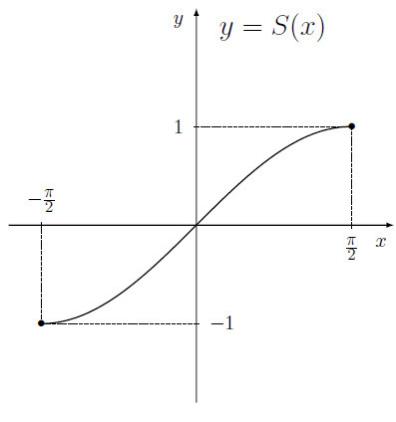


Figura 3.6: A restrição da função seno ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

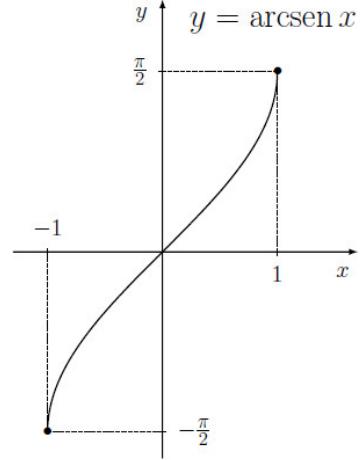


Figura 3.7: A função arco-seno.

Como o contradomínio de S é $[-1, 1]$, a inversa de S é a função

$$\begin{aligned} S^{-1} : [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto S^{-1}(x) = \arcsen x \end{aligned}$$

com contradomínio $CD_{S^{-1}} = D_S = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Assim, usando a definição de S ,

$$\forall x \in [-1, 1], \forall y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], y = \arcsen x \Leftrightarrow \sin y = x.$$

Pelas propriedades da função inversa escreve-se também

$$\forall x \in [-1, 1], \text{sen}(\arcsen x) = x \quad \text{e} \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \arcsen(\text{sen } x) = x.$$

Exercício 3.5

1. Seja f definida por $f(x) = \arcsen(\text{sen } x)$. Pode-se afirmar que $f(x) = x$, $\forall x \in D_f$?
2. Mostre que se $-1 \leq x \leq 1$ então $\cos(\arcsen x) = \sqrt{1 - x^2}$.
3. Considere a função dada por $f(x) = \arcsen(\ln x)$.
 - (a) Determine o domínio e o contradomínio de f .
 - (b) Determine, caso existam, os zeros de f .

A função $f(x) = \text{sen } x$ é invertível e tem derivada $f'(x) = \cos x$ não nula no intervalo $D_f =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Portanto a sua inversa é derivável (aplica-se o teorema da função inversa) e

$$\forall y \in CD_f =]-1, 1[, (\arcsen y)' = \frac{1}{\cos(\arcsen y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

3.2.2 Função arco coseno

A restrição da função coseno ao intervalo $[0, \pi]$ é injetiva. Assim, a função

$$\begin{aligned} C : [0, \pi] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto C(x) = \cos x \end{aligned}$$

é invertível. A sua inversa, designada por **arco coseno**, denota-se por \arccos .

3. Considere a função dada por $f(x) = \arcsen(\ln x)$.

(a) Determine o domínio e o contradomínio de f .

(b) Determine, caso existam, os zeros de f .

$$D_{g \circ h} = \{ u \in \mathbb{R} : u \in D_h \wedge h(u) \in D_g \}$$

$$D_f = \{ u \in \mathbb{R} : u \in D_{\ln} \wedge \ln u \in D_{\arcsen} \} = [\frac{1}{e}, e]$$
$$u > 0 \wedge -1 \leq \ln u \leq 1 \}$$

$$\frac{1}{e} \leq u \leq e$$

$$\underline{CD_f} \quad \frac{1}{e} \leq u \leq e \quad \ln\left(\frac{1}{e}\right) \leq \ln(u) \leq \ln(e)$$
$$-1 \leq \ln(u) \leq 1$$

$$-\pi/2 \leq \arcsen(\ln u) \leq \pi/2$$

$$CD_f = [-\pi/2, \pi/2]$$

$$\arcsen(\ln u) = 0 \Leftrightarrow \ln u = 0 \Leftrightarrow u = 1$$

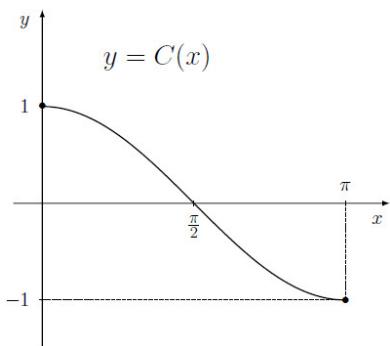


Figura 3.8: A restrição da função cosseno ao intervalo $[0, \pi]$.

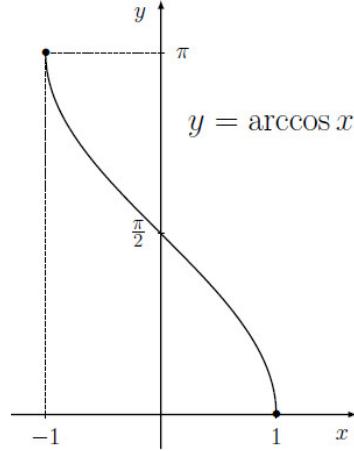


Figura 3.9: A função arco-cosseno.

Sendo $[-1, 1]$ o contradomínio de C , tem-se que

$$\begin{aligned} C^{-1} : [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto C^{-1}(x) = \arccos x \end{aligned}$$

O domínio da função \arccos é $[-1, 1]$ e, pela definição de C ,

$$\forall y \in [0, \pi], \forall x \in [-1, 1], y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x.$$

Como consequência das propriedades da função inversa obtém-se que

$$\forall x \in [-1, 1], \cos(\arccos x) = x \quad \text{e} \quad \forall x \in [0, \pi], \arccos(\cos x) = x.$$

Ver o vídeo da khan academy

https://youtu.be/-idIy_YsUGM

Exercício 3.6

1. Seja g definida por $g(x) = \cos(\arccos x)$. Pode-se afirmar que $g(x) = x, \forall x \in D_g$?
2. Considere a função dada por $f(x) = \arccos(e^x)$.
 - (a) Determine o domínio e o contradomínio de f .
 - (b) Determine, caso existam, os zeros de f .
3. Mostre que se $-1 \leq x \leq 1$ então $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$.

A função $f(x) = \cos x$ é invertível e tem derivada $f'(x) = -\sin x$ não nula no intervalo $D_f =]0, \pi[$. Portanto a sua inversa é derivável e

$$\forall y \in CD_f =]-1, 1[, (\arccos y)' = -\frac{1}{\sin(\arccos y)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Exercício 3.7 Caracterize a função inversa da função f e estude-a quanto à continuidade, sendo $f(x) = \pi - \arccos(2x + 1)$

2. Considere a função dada por $f(x) = \arccos(e^x)$.

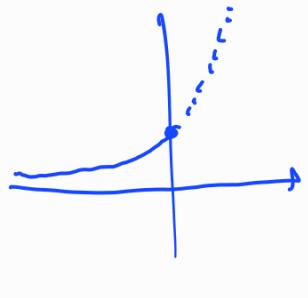
- (a) Determine o domínio e o contradomínio de f .
- (b) Determine, caso existam, os zeros de f .

$$\Rightarrow D_f = \{ u \in \mathbb{R} : u \in D_{\exp} \wedge e^u \in D_{\arccos} \} =]-4, 0]$$

$$-1 \in C^u \leq 1 \Leftrightarrow u \leq 0$$

$$\text{Se } u \in]-4, 0] \quad 0 < e^u \leq 1$$

$$0 \leq \arccos(e^u) < \frac{\pi}{2}$$



$$CD_f = [0, \pi_2]$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \arccos(e^x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Segunda aula da semana

- Resultados VeVox
- Propriedades das funções contínuas
- Derivada da composta e derivada da inversa
- Inversas das funções tangente e cotangente
- Exercícios

Definição 2.7. Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. f diz-se contínua se é contínua em todos os pontos de D .

Observação 2.4. 1. Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $A \subseteq D$. f é contínua em A se e só se $f|_A$ é contínua.

2. Se a função está definida num intervalo $[a, b]$, f diz-se contínua em a se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$. Analogamente, f diz-se contínua em b se $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

2.10.1 Propriedades das funções contínuas

Teorema 2.7. (Propriedades aritméticas das funções contínuas) Se $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas em $a \in D_f \cap D_g$ então as seguintes funções também são contínuas em a :

$$(a) \ f \pm g; \quad (b) \ f \cdot g; \quad (c) \ \frac{f}{g}, \text{ se } g(a) \neq 0.$$

A recíproca da proposição anterior é falsa. Dê exemplos de funções descontínuas em que

- $f \pm g$ seja contínua;
- $f \cdot g$ seja contínua;
- $\frac{f}{g}$, com $g(a) \neq 0$ seja contínua.

Teorema 2.8. (Composição de funções) Se $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tem limite $l \in \mathbb{R}$ quando x tende para a e $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $l \in D_g$ então a função composta $g \circ f$ tem limite $g(l)$ quando x tende para a :

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow a} f(x)) = g(l).$$

Como consequência, a composição de funções contínuas é contínua.

Corolário 1. Se $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua em a e $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $f(a) \in D_g$ então a função composta $g \circ f$ é contínua em a .

Teorema 2.9. (Continuidade da função inversa) Seja D_f um intervalo de números reais, $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em D_f e invertível. Então a sua inversa, $f^{-1} : CD_f \rightarrow \mathbb{R}$, é contínua em CD_f .

Exercício 2.16

Caracterize a função inversa da função f e estude-a quanto à continuidade, sendo

$$(a) \ f(x) = e^{1-2x} \quad (b) \ f(x) = \frac{5 \ln(x-3) - 1}{4}$$

2.10.1.1 Mais algumas indeterminações

Se $h : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, é definida por $h(x) = f(x)^{g(x)}$ e $f(x) > 0, \forall x \in D$, pode usar-se a transformação

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

para efeitos de determinação do seu limite.

Como a função exponencial é contínua, se existir o $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)$ então,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)}.$$

Este facto usa-se para “levantar” indeterminações do tipo $0^0, 1^\infty$ e ∞^0 .

3.2.3 Função arco tangente

A função tangente não é injetiva no seu domínio mas a sua restrição ao intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ é. A função

$$\begin{aligned} T : & \quad]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto T(x) = \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

tem inversa, designada por **arco tangente** e denotada por \arctan , com domínio \mathbb{R} pois T é sobrejetiva

$$\begin{aligned} T^{-1} : & \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto T^{-1}(x) = \arctan x \end{aligned}$$

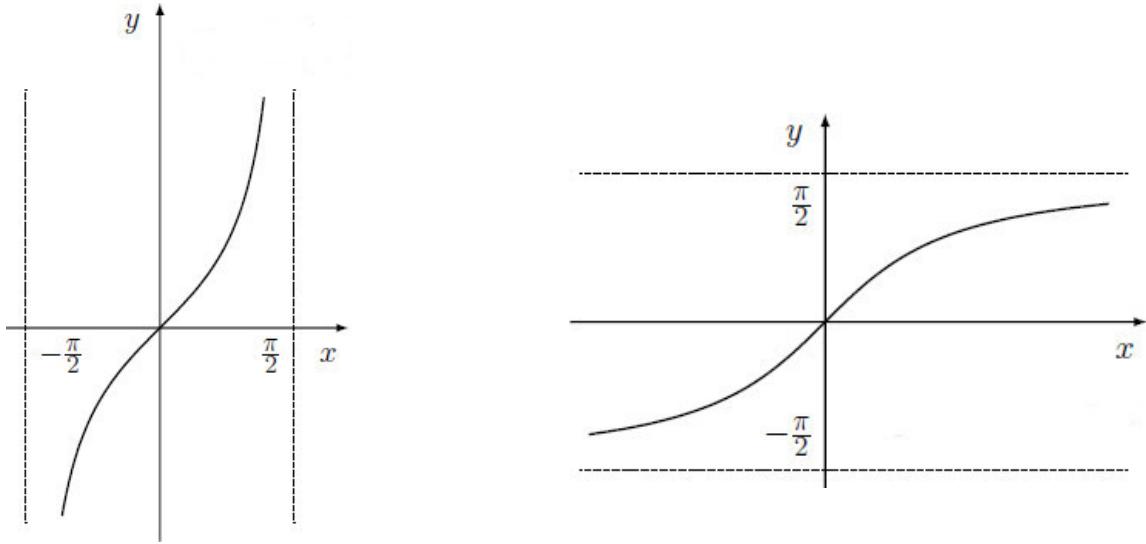


Figura 3.11: A função arcotangente.

Figura 3.10: A restrição da função tangente ao intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, y = \arctan x \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = x$$

Por definição de inversa:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{tg}(\arctan x) = x; \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \arctan(\operatorname{tg} x) = x.$$

A função $f(x) = \operatorname{tg} x$ é invertível e tem derivada $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$ não nula no intervalo $D_f = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Portanto a sua inversa é derivável e

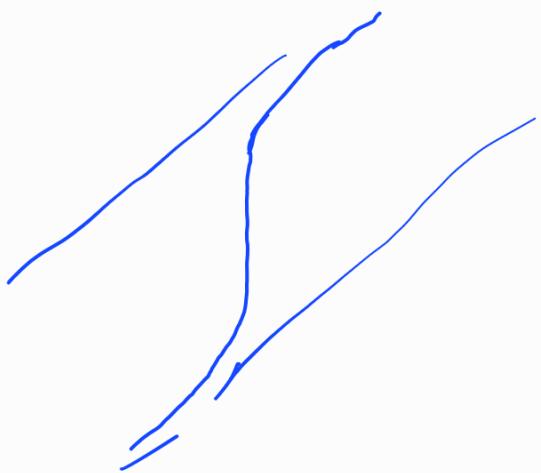
$$\forall y \in CD_f = \mathbb{R}, (\arctan y)' = \frac{1}{\sec^2(\arctan y)} = \frac{1}{1+y^2}.$$

Exercício 3.8 Mostre que as retas $y = x + \frac{\pi}{2}$ e $y = x - \frac{\pi}{2}$ são assíntotas ao gráfico da função $f(x) = x + \arctan x$.

Exercício 3.9 Mostre que $\sec(\arctan x) = \sqrt{1+x^2}$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

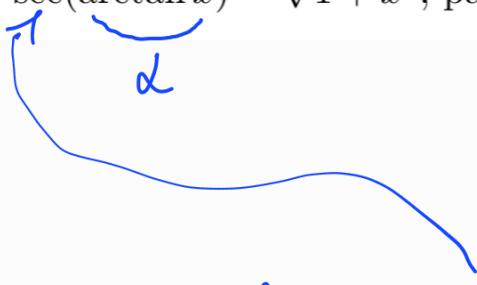
Ex. 3.8

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \left[f(u) - \left(u + \frac{\pi}{2} \right) \right] = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[\cancel{u + \arctan u} - \cancel{u} - \frac{\pi}{2} \right]$$
$$= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\arctan u - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$



Exercício 3.9 Mostre que $\sec(\arctan x) = \sqrt{1+x^2}$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{tg } \alpha = u$$



$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (\text{dividir por } \cos^2 \alpha)$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$$

$$\sec^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \iff \sec \alpha = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$
$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\sec(\arctan u) = \sqrt{1+u^2}$$

Exemplo 3.1. A função definida em $D_f =]0, +\infty[$, por

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x}, & x > 1 \\ \frac{\pi}{4} + \ln x, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

é contínua.

A função $l(x) = \ln x$ é contínua em \mathbb{R}^+ , logo a sua restrição ao intervalo $]0, 1[$ é contínua e portanto a função f é contínua em $]0, 1[$.

Considere-se a função invertível $a :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $a(x) = \arctan \frac{1}{x}$. A sua inversa é a função definida em $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}[$ por $f^{-1}(x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$.

Como a função tangente é contínua e não se anula neste intervalo, a função a é contínua em $]1, +\infty[$ e assim, f é contínua neste intervalo.

Falta analisar a continuidade de f em $x = 1$.

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{\pi}{4} + \ln x \right) = \frac{\pi}{4} = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \arctan \frac{1}{x}$$

logo f é contínua em $x = 1$.

3.2.4 Função arco cotangente

A função cotangente não é injetiva no seu domínio $D_{\cotg} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ mas a sua restrição a $]0, \pi[$ é. Assim,

$$\begin{aligned} G :]0, \pi[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto G(x) = \cotg x \end{aligned}$$

tem inversa, com domínio \mathbb{R} e contradomínio $]0, \pi[$. Chama-se **arco cotangente** e denota-se por arccot

$$\begin{aligned} G^{-1} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto G^{-1}(x) = \operatorname{arccot} x \end{aligned}$$

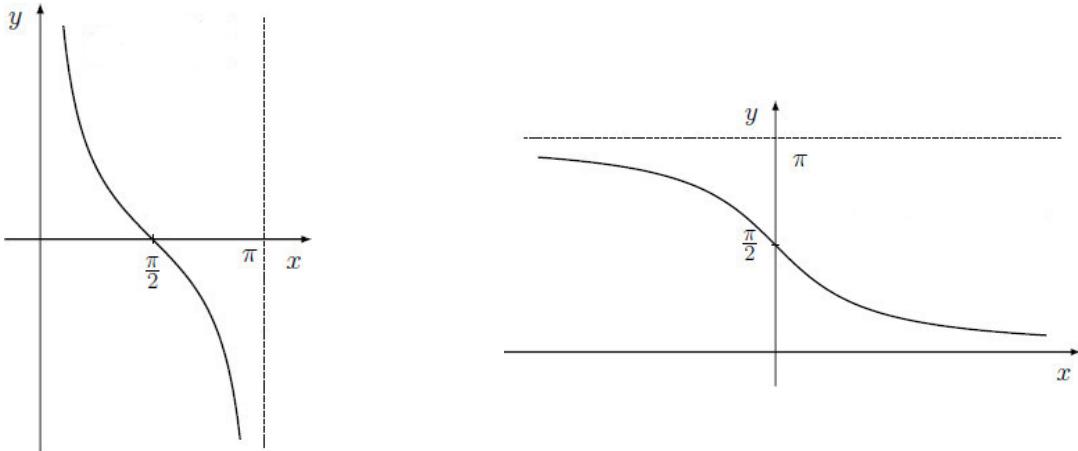


Figura 3.13: A função arco-cotangente.

Figura 3.12: A restrição da função cotangente ao intervalo $]0, \pi[$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in]0, \pi[, y = \operatorname{arccot} x \Leftrightarrow \cotg y = x.$$

Por definição de inversa:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cotg(\operatorname{arccot} x) = x; \forall x \in]0, \pi[, \operatorname{arccot}(\cotg x) = x.$$

A função $f(x) = \cot g x$ é invertível e tem derivada $f'(x) = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\csc^2 x$ não nula no intervalo $D_f =]0, \pi[$. Portanto a sua inversa é derivável e

$$\forall y \in CD_f = \mathbb{R}, (\arccot y)' = -\frac{1}{\csc^2(\arccot y)} = -\frac{1}{1+y^2}.$$


3.3 Exercícios

Exercício 3.10 Determine k por forma a que a função f seja contínua no seu domínio.

$$(a) f(x) = \begin{cases} \arcsen\left(\frac{1}{x}\right), & x > 1 \\ kx^2, & x \leq 1 \end{cases} \quad (b) f(x) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{2}{x}\right), & x \geq 2 \\ 2k e^{x-2}, & x < 2 \end{cases}$$

Exercício 3.11 Considere a função dada por $f(x) = \arctan \frac{1}{x+1}$.

1. Determine o domínio, o contradomínio e, caso existam, os zeros de f .
2. Estude f quanto à monotonía.

Exercício 3.12 Calcule, caso existam, os seguintes limites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen(5x)}{x} \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos \frac{1}{x} \quad (c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cotg \frac{2}{x} \quad (d) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{sen} x + e^x)$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(1-x) \quad (f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \quad (g) \lim_{x \rightarrow 0} \arccotg \frac{1}{x} \quad (h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \arccotg \frac{1}{x^2}$$

Exercício 3.13 Determine o domínio da função dada por $g(x) = \frac{3+2x^2}{\cotg x - 1}$.

Exercício 3.14 Caracterize a inversa da função h em $D \subseteq D_h$, sendo $h(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2})$ e D o maior intervalo tal que $h|_D$ seja invertível e $0 \in D$.

Exercício 3.15 Seja k a função dada por $k(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{2 \arcsen(1-x)}{3}$.

1. Represente o domínio de k sob a forma de intervalo de números reais.
2. Caracterize a função inversa de k .
3. Calcule $\operatorname{sen}(k(2))$.

Exercício 3.16 Considere a função dada por $f(x) = \arcsen\left(\frac{x+3}{x-2}\right)$. Determine:

1. o domínio de f ;
2. os valores de x tais que $f(x) \geq 0$.

Exercício 3.17 Determine o domínio e os zeros da função dada por

$$g(x) = \begin{cases} \arccos(x^2) & \text{se } x < 0 \\ e^{-x+1} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Exercício 3.11 Considere a função dada por $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right)$.

1. Determine o domínio, o contradomínio e, caso existam, os zeros de f .
2. Estude f quanto à monotonía.

$$]-\bar{\pi}_2, \bar{\pi}_2[\xrightarrow{\text{arctan}} \mathbb{R}$$

$$D_f = \{u \in \mathbb{R} : u \neq -1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$\frac{1}{u+1}$ tem e todos os valores reais exceto 0.

$$C_f =]-\bar{\pi}_2, \bar{\pi}_2[\setminus \{0\}$$

Não tem zeros pois $0 \notin C_f$.

$$(\arctan u)' = \frac{1}{1+u^2}$$

$$\left(\arctan\left(\frac{1}{u+1}\right)\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{u+1}\right)^2} \times \left(-\frac{1}{(u+1)^2}\right) < 0$$

F' decrescente em $]-\infty, -1[$ e e'

decrescente em $]-1, +\infty[$

$$\lim_{u \rightarrow -1^-} \begin{cases} f(u) = -\bar{\pi}_2 \\ \end{cases} \quad \lim_{u \rightarrow -1^+} \begin{cases} f(u) = \bar{\pi}_2 \\ \end{cases}$$

$$(2) D_1 = \{ u \in \mathbb{R} : (\underbrace{u > 1}_{\text{e}} \wedge u + 0 \wedge -1 \leq \frac{1}{u} \leq 1) \vee$$

Exercício 3.10 Determine k de forma a que a função f seja contínua no seu domínio.

$$(a) f(x) = \begin{cases} \arcsen\left(\frac{1}{x}\right), & x > 1 \\ kx^2, & x \leq 1 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{2}{x}\right), & x \geq 2 \\ 2k e^{x-2}, & x < 2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{u} \leq 1 \quad (=) \quad u \geq 1$$

$$u > 1$$

Para x maior do que 1 a função é contínua pois é uma composição de funções contínuas conhecidas (a inversa da função seno com um quociente de funções polinomiais).

$$\lim_{u \rightarrow 1^+} f(u) = \lim_{u \rightarrow 1^+} \arcsen\left(\frac{1}{u}\right) = \arcsen(1) = \frac{\pi}{2}$$

Pois ser contínua tem que existir o limite
ou seja, $\lim_{u \rightarrow 1^-} f(u) = \lim_{u \rightarrow 1^+} f(u)$ e
seja igual a $f(1)$. Logo $K = \frac{\pi}{2}$.

Exercício 3.18 Determine domínio, contradomínio e zeros da função dada por $h(x) = -\frac{\pi}{3} + \arccot(-3x)$.

3.4 Soluções dos exercícios do capítulo

Exercício 3.2 $D_{\csc} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ e $CD_{\csc} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. O período é 2π . Monótona crescente em $\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, (2k+1)\pi\right]$ e em $\left[(2k+1)\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ e é monótona decrescente em $\left[2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ e em $\left[(2k-1)\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi\right]$. A função não tem zeros.

Exercício 3.3 $D_{\cotg} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ e $CD_{\cotg} = \mathbb{R}$. Período = π . Monótona decrescente em $]k\pi, (k+1)\pi[$; zeros em $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Exercício 3.4

1. A igualdade $\cotg x = \frac{1}{\tg x}$ não é verdadeira para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, porque estes pontos pertencem ao domínio da cotangente mas não pertencem ao domínio da tangente. A igualdade $\cotg(x - \frac{\pi}{2}) = -\tg x$ é verdadeira para todos os pontos do domínio da cotangente.
2. $\frac{\sen x}{\cos x} = \frac{\sec x}{\csc x}$ para $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e para $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Exercício 3.5

1. $f(x) = x, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e não para $x \in D_f = \mathbb{R}$.
3. (a) $D_f = \left[\frac{1}{e}, e\right]$ e $CD_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
 (b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Exercício 3.6

1. Sim.
2. (a) $D_f =]-\infty, 0]; CD_f = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
 (b) $x = 0$.

Exercício 3.7 $f(x) = \pi - \arccos(2x+1)$ contínua em $D_f = [-1, 0]; CD_f = [0, \pi]$. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(\cos(\pi - x) - 1)$ é contínua em $D_{f^{-1}} = CD_f$.

Exercício 3.10 (a) $k = \frac{\pi}{2}$; (b) $k = 0$.

Exercício 3.11

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}; CD_f = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$; não tem zeros.
2. A função é decrescente em $]-\infty, -1[$ e em $]-1, +\infty[$.

Exercício 3.12 (a) Seja $y = \arcsen(5x)$, ou seja, $\sen y = 5x$. Se $x \rightarrow 0$ então $y \rightarrow 0$, logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen(5x)}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\frac{1}{5} \sen y} = \lim_{y \rightarrow 0} 5 \frac{y}{\sen y} = 5 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sen y}{y}} = 5;$$

(b) $\frac{\pi}{2}$;

(c) Como $\cotg y = \frac{\cos y}{\sen y}$ e se $x \rightarrow +\infty$, então $y = \frac{1}{x} \rightarrow 0$, temos,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cotg \frac{2}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} y \frac{\cos(2y)}{\sen(2y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{2y}{\sen(2y)} \cos(2y) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2};$$

- (d) $+\infty$; (e) $-\frac{\pi}{2}$; (f) e^2 ; (g) Não existe; (h) $\frac{\pi}{2}$.

Exercício 3.13 $D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi \wedge x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Exercício 3.14 $D = [-\pi, 0]$; $h^{-1}(x) = \arcsen(2x) - \frac{\pi}{2}$ e $D_{h^{-1}} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Exercício 3.15

1. $D_k = [0, 2]$.
2. $k^{-1}(x) = 1 - \sen\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{3}{2}x\right)$, $D_{k^{-1}} =$
3. $\sen(k(2)) = \frac{1}{2}$.

Exercício 3.16

1. $D_f = \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right]$;
2. $x \in]-\infty, -3]$.

Exercício 3.17 $D_g = [-1, +\infty[$; o único zero é $x = -1$.

Exercício 3.18 $D_h = \mathbb{R}$; $CD_h = \left] -\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right[$; o único zero é $x = -\frac{\sqrt{3}}{9}$.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen(5x)}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsen(5u)}{5u} \cdot 5 \right) =$$

$$y = \arcsen(5u), \quad 5u = \operatorname{sen}(y)$$

$$(u \rightarrow 0 \Rightarrow y = \arcsen(5u) \rightarrow 0)$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{y}{\operatorname{sen}y} \cdot 5 \right) = 1 \times 5 = 5.$$

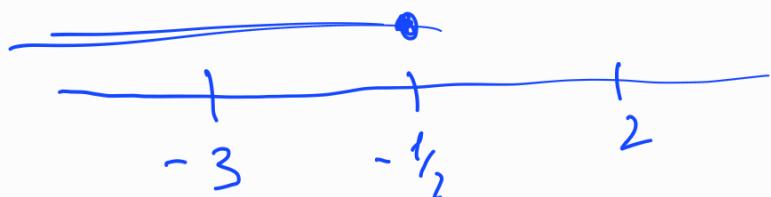
Exercício 3.16 Considere a função dada por $f(x) = \arcsen\left(\frac{x+3}{x-2}\right)$. Determine:

1. o domínio de f ;
2. os valores de x tais que $f(x) \geq 0$.

$$D_f = \left\{ u \in \mathbb{R} : -1 \leq \frac{u+3}{u-2} \leq 1 \wedge u \neq 2 \right\}$$

$$\left| \frac{u+3}{u-2} \right| \leq 1 \Leftrightarrow |u+3| \leq |u-2|$$

$$\Leftrightarrow |u-(-3)| \leq |u-2|$$



Ponto mais pertinho a -3 do que a 2.