



Folha Prática 5

Equações Diferenciais Ordinárias

Exercícios Propostos

1. Verifique se as seguintes funções são solução (em \mathbb{R}) das equações diferenciais dadas:

(a) $y = \sin x - 1 + e^{-\sin x}$ $\frac{dy}{dx} + y \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x);$
(b) $z = \cos x$ $z'' + z = 0;$
(c) $y = \cos^2 x$ $y'' + y = 0;$
(d) $y = Cx - C^2$ ($C \in \mathbb{R}$) $(y')^2 - xy' + y = 0.$

2. Indique uma equação diferencial para a qual a família de curvas indicada constitui um integral geral.

(a) $y = Cx$, $C \in \mathbb{R}$ (retas do plano não verticais que passam pela origem);
(b) $y = Ax + B$, $A, B \in \mathbb{R}$ (retas do plano não verticais);
(c) $y = e^{Cx}$, $C \in \mathbb{R}$.

3. Considere a família de curvas sinusoidais definidas por

$$y = A \sin(x + B) \quad \text{com} \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Indique uma EDO de terceira ordem para a qual estas funções constituam uma família de soluções

4. (a) Determine a solução geral da equação diferencial $y'' - \sin x = 0$.
(b) Mostre que a função definida por $\varphi(x) = 2x - \sin x$ é uma solução particular da EDO da alínea anterior, que satisfaz as condições $\varphi(0) = 0$ e $\varphi'(0) = 1$.

5. Determine a solução geral das seguintes EDOs:

(a) $y' - \frac{1}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x} = 0;$
(b) $y' - \sqrt{1-x^2} = 0;$
(c) $y' - \frac{x^4+x^2+1}{x^2+1} = 0.$

6. Determine um integral geral para cada uma das seguintes EDOs de variáveis separáveis:

(a) $x + yy' = 0;$
(b) $xy' - y = 0;$
(c) $(t^2 - xt^2) \frac{dx}{dt} + x^2 = -tx^2;$
(d) $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0.$

7. Resolva os seguintes problemas de Cauchy:

- (a) $xy' + y = y^2$, $y(1) = 1/2$;
- (b) $xy + x + y'\sqrt{4+x^2} = 0$, $y(0) = 1$;
- (c) $(1+x^3)y' = x^2y$, $y(1) = 2$.

8. Verifique que as seguintes equações diferenciais são homogéneas e determine um seu integral geral.

- (a) $(x^2 + y^2)y' = xy$;
- (b) $y'\left(1 - \ln\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}$, $x > 0$.

9. Considere a equação diferencial $y' = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x)$, $x > 0$.

- (a) Verifique que se trata de uma equação diferencial homogénea.
- (b) Determine um integral geral desta EDO.

10. Resolva as seguintes equações diferenciais exatas:

- (a) $(2x + \operatorname{sen} y)dx + x \cos y dy = 0$;
- (b) $(2xy - x - e^y)dx = (xe^y + y - x^2)dy$;
- (c) $\left(\frac{y}{x} + 6x\right)dx + (\ln x - 2)dy = 0$.

11. Resolva a equação $e^x \sec y - \operatorname{tg} y + y' = 0$ sabendo que ela admite um fator integrante da forma $\mu(x, y) = e^{\beta x} \cos y$.

12. Resolva as seguintes equações diferenciais, usando em cada caso o fator integrante indicado:

- (a) $y dx + (y^2 - x) dy = 0$ [$\mu(y) = y^{-2}$];
- (b) $(2y - x^3)dx + x dy = 0$ [$\mu(x) = x$];

13. Resolva as seguintes equações diferenciais lineares usando fatores integrantes:

- (a) $y' + 2y = \cos x$;
- (b) $x^3y' - y - 1 = 0$;
- (c) $\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2+1}y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$, $x \neq 0$.

14. Considere a EDO $x^2y' + 2xy = 1$ em $]0, +\infty[$. Mostre que qualquer solução desta EDO tende para zero quando $x \rightarrow +\infty$.

15. Resolva as seguintes equações diferenciais de Bernoulli:

- (a) $xy' + y = y^2 \ln x$, $x > 0$;
- (b) $y' - \frac{y}{2x} = 5x^2y^5$, $x \neq 0$.

$$(a) y' + \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x}y^2$$

16. Usando o método da variação das constantes, determine a solução geral das seguintes EDOs lineares:

- (a) $y' - \frac{2y}{x} = x^3$;
- (b) $y' \sin x + y \cos x = \sin^2 x$;
- (c) $y' - \frac{x}{x^2 + 1} y = \sqrt{x^2 + 1}$, (rever EDO do 13 (c)).

17. Determine a solução geral das seguintes EDOs lineares:

- (a) $y' + y = \sin x$;
- (b) $y'' - y + 2 \cos x = 0$;
- (c) $y'' + y' = 2y + 3 - 6x$;
- (d) $y'' - 4y' + 4y = x e^{2x}$;
- (e) $y'' + y' = e^{-x}$;
- (f) $y'' + 4y = \operatorname{tg}(2x)$;
- (g) $y''' + y' = \sin x$;
- (h) $y'' + 9y = \sin x - e^{-x}$.

18. Considere o problema de valores iniciais

$$y'' + 4y' + 4y = \cos(2x), \quad y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) = 1.$$

Justifique que este problema possui uma única solução (em \mathbb{R}) e determine-a.

19. Resolva o seguinte problema de valor inicial $\begin{cases} y' + y \cos x = \cos x \\ y(0) = 2 \end{cases}$.

20. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais:

- (a) $(1 + x^2)y' + 4xy = 0$;
- (b) $y'' + y + 2 \sin x = 0$;
- (c) $(1 + x^2)y' - y = 0$;
- (d) $y''' + 4y' = \cos x$;
- (e) $y' - 3x^2y = x^2$;
- (f) $y''' - 3y' + 2y = 12 e^x$.

21. Resolva a EDO $xy'' - y' = 3x^2$ (Sugestão: Efetue a mudança de variável $z = y'$).

22. Considere a EDO linear homogénea (de coeficientes não constantes)

$$(1-x)y'' + xy' - y = 0, \quad x \in]1, \infty[.$$

- (a) Mostre que $\{x, e^x\}$ forma um sistema fundamental de soluções da equação.
- (b) Obtenha a solução geral da EDO.
- (c) Resolva agora a EDO

$$(1-x)y'' + xy' - y = x^2 - 2x + 2, \quad x \in]1, \infty[,$$

começando por verificar que ela admite uma solução do tipo $y = \beta x^2$ para certo $\beta \in \mathbb{R}$.

Soluções

1. (a) Sim; (b) Sim; (c) Não; (d) Sim.
2. (a) $xy' - y = 0$; (b) $y'' = 0$; (c) $xy' - y \ln(y) = 0$.
3. $y''' + y' = 0$.
4. (a) $y = C_1x - \operatorname{sen} x + C_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
5. (a) $y = \ln(\operatorname{arctg} x) + C$, $C \in \mathbb{R}$;
 (b) $y = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + C$, $C \in \mathbb{R}$;
 (c) $y = \frac{x^3}{3} + \operatorname{arctg} x + C$, $C \in \mathbb{R}$.
6. (a) $x^2 + y^2 = C$, $C \in \mathbb{R}$;
 (b) $y = Cx$, $C \in \mathbb{R}$ (compare com o ex. 2(a));
 (c) $\frac{x}{t} = C e^{-\frac{1}{x}-\frac{1}{t}}$, $C \in \mathbb{R}$;
 (d) $y = \frac{1}{\ln|x^2-1| - C}$, $C \in \mathbb{R}$;
7. (a) $y = \frac{1}{x+1}$; (b) $y = -1 + 2e^{2-\sqrt{4+x^2}}$; (c) $y^3 = 4(1+x^3)$.
8. (a) $\ln|y| - \frac{x^2}{2y^2} = C$, $C \in \mathbb{R}$ ($y = 0$ é solução singular).
 (b) $y = x e^{Ky}$, $x > 0$, $K \in \mathbb{R}$.
9. (b) $y = x e^{Cx}$, $x > 0$, $C \in \mathbb{R}$.
10. (a) $x^2 + x \operatorname{sen} y = C$, $C \in \mathbb{R}$;
 (b) $x^2 + y^2 + 2xe^y - 2yx^2 = C$, $C \in \mathbb{R}$;
 (c) $y = \frac{C-3x^2}{\ln|x|-2}$, $C \in \mathbb{R}$.
11. $x + e^{-x} \operatorname{sen} y = C$, $C \in \mathbb{R}$ (um fator integrante é $\mu(x, y) = e^{-x} \cos y$).
12. (a) $x + y^2 = Cy$, $C \in \mathbb{R}$
 (b) $yx^2 - \frac{x^5}{5} = C$, $C \in \mathbb{R}$
13. (a) $y = \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \operatorname{sen} x + C e^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$;
 (b) $y = -1 + C e^{-\frac{1}{2x^2}}$, $x \neq 0$, $C \in \mathbb{R}$;
 (c) $y = (C+x)\sqrt{x^2+1}$, $C \in \mathbb{R}$.
14. Comece por verificar que a solução geral possui a forma $y = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}$, $C \in \mathbb{R}$.
15. (a) $y = \frac{1}{1+Cx+\ln x}$, $x > 0$, $C \in \mathbb{R}$ ($y = 0$ é solução singular).
 (b) $y^4 = \frac{x^2}{C-4x^5}$, $C \in \mathbb{R}$ ($y = 0$ é solução singular).

16. (a) $y = \frac{x^4}{2} + Kx^2$, $K \in \mathbb{R}$;
(b) $y = \frac{x}{2} \operatorname{cosec} x - \frac{\cos x}{2} + K \operatorname{cosec} x$, $K \in \mathbb{R}$.

17. (a) $y = C_1 e^{-x} + \frac{\sin x}{2} - \frac{\cos x}{2}$;
(b) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \cos x$;
(c) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + 3x$;
(d) $y = \left(C_1 + C_2 x + \frac{x^3}{6} \right) e^{2x}$;
(e) $y = C_1 + (C_2 - x) e^{-x}$;
(f) $y = C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x) - \frac{1}{4} \cos(2x) \ln |\sec(2x) + \tan(2x)|$;
(g) $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x - \frac{x}{2} \sin x$;
(h) $y = C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x) + \frac{\sin x}{8} - \frac{e^{-x}}{10}$.

(C_1, C_2, C_3 são constantes reais arbitrárias).

18. $y = \frac{3}{4}(x - \pi) e^{2(\pi-x)} + \frac{\sin(2x)}{8}$.

19. $y = 1 + e^{-\sin x}$, $x \in \mathbb{R}$.

20. (a) $y = \frac{K}{(x^2 + 1)^2}$, $K \in \mathbb{R}$;
(b) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \cos x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$;
(c) $y = C e^{\operatorname{arctg} x}$, $C \in \mathbb{R}$;
(d) $y = C_1 + C_2 \cos(2x) + C_3 \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$;
(e) $y = K e^{x^3} - \frac{1}{3}$, $K \in \mathbb{R}$;
(f) $y = C_1 e^{-2x} + (C_2 + C_3 x + 2x^2) e^x$, $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

21. $y = Cx^2 + x^3 + K$, $C, K \in \mathbb{R}$.

22. (a) –
(b) $y = C_1 x + C_2 e^x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
(c) $y = C_1 x + C_2 e^x + x^2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

6. Determine um integral geral para cada uma das seguintes EDOs de variáveis separáveis:

(a) $x + yy' = 0$;

(b) $xy' - y = 0$; $, u > 0$

(a) $yy' = -u$

$$y \frac{dy}{du} = -u$$

$$y dy = -u du$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{u^2}{2} + C, C \in \mathbb{R}$$

$$u^2 + y^2 = C, C \in \mathbb{R}.$$

(1) $uy' - y = 0$

$$uy' = y$$

$$u \frac{dy}{du} = y$$

(2) $dy = y du$
 $\frac{1}{y} dy = \frac{1}{u} du$

$$\rho_M|y| = \rho_M|u| + K$$

(3) $C \rho_M|y| = C \rho_M|u| + K$

$$|y| = e^K \cdot e^{\rho_M|u|}$$

$$|y| = e^K |u|$$

(4) $y = \frac{\pm e^K}{C} |u|$

$$y = c|u|$$

$$y = c|u|, c \in \mathbb{R},$$

$(y=0)$ também é solução de $uy' - y = 0$

$$(c) (1+x^3)y' = x^2y, \quad y(1) = 2.$$

$$(1+e^3) \frac{dy}{du} = e^2 y$$

$$\frac{1}{y} dy = \frac{e^2}{1+e^3} du$$

$$\ln y = \frac{1}{3} \ln(1+e^3) + C$$

$$\ln 2 = \frac{1}{3} \ln(1+1) + C$$

$$\ln 2 = \ln(2^{1/3}) + C$$

$$C = \ln\left(\frac{2}{2^{1/3}}\right) = \ln(2^{2/3}) \\ = \frac{2}{3} \ln 2$$

$$\ln y = \frac{1}{3} \ln(1+e^3) + \frac{2}{3} \ln 2$$

$$\frac{1}{3} \ln(1+e^3) + \frac{2}{3} \ln 2$$

$$y = e^c$$

$$y = e^{\ln\left((1+e)^{1/3} \times 2^{2/3}\right)} = \\ = \sqrt[3]{4+4e^3}$$

13. Resolva as seguintes equações diferenciais lineares usando fatores integrantes:

$$\rightarrow \text{(a)} \quad y' + 2y = \cos x;$$

$$\rightarrow \text{(b)} \quad x^3y' - y - 1 = 0;$$

$$\text{(a)} \quad \mu(u) = e^{\int 2 du} = e^{2u}$$

$$e^{2u}(y' + 2y) = e^{2u} \cos u$$

$$(ye^{2u})' = e^{2u} \cos u$$

$$ye^{2u} = \int e^{2u} \cos u du$$

$$y(u) = e^{-2u} \int e^{2u} \cos u du \quad \xrightarrow{\text{(para partes dupla vez)}}$$

$$= e^{-2u} \left(\frac{e^{2u}}{5} (\sin u + 2 \cos u) + C \right)$$

$$\text{(b)} \quad x^3y' - y - 1 = 0;$$

$$y' - \frac{1}{x^3}y = \frac{1}{x^3}, \quad p(u) = -u^{-3}$$

$$\underline{\frac{1}{2u^2}}$$

$$\mu(u) = e^{\frac{1}{2u^2}}$$

$$e^{\frac{1}{2u^2}} \left(y' - \frac{1}{x^3}y \right) = e^{\frac{1}{2u^2}} \left(\frac{1}{x^3} \right)$$

$$\int -u^{-3} du = -\frac{u^{-3+1}}{-3+1} =$$

$$= -\frac{u^{-2}}{-2} = \frac{1}{2u^2}$$

$$\left(y e^{\frac{1}{2}u^2} \right)' = e^{\frac{1}{2}u^2} \cdot \frac{1}{u^3}$$

$$y e^{\frac{1}{2}u^2} = \int e^{\frac{1}{2}u^2} \cdot u^{-3} du$$

$$y e^{\frac{1}{2}u^2} = -e^{\frac{1}{2}u^2} + C$$

$$y = -1 + C e^{-\frac{u^2}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

15. Resolva as seguintes equações diferenciais de Bernoulli:

$$\rightarrow \text{(a)} \quad xy' + y = y^2 \ln x, \quad x > 0;$$

$$\text{(b)} \quad y' - \frac{y}{2x} = 5x^2y^5, \quad x \neq 0.$$

$$\text{(a)} \quad y' + \frac{1}{u}y = \frac{\ln u}{u}y^2 \rightarrow \text{Bernoulli com } d=2$$

$$y^{-2}y' + \frac{1}{u}y^{-1} = \frac{\ln u}{u}$$

$$z = y^{-2}$$

$$z' = -y^{-2}y'$$

$$-z' + \frac{1}{u}z = \frac{\ln u}{u}$$

$$z - \frac{1}{u}z = -\frac{\ln u}{u}$$

$$M(u) = e^{-\ln u} = e^{\ln u^{-1}} = u^{-1} = \frac{1}{u}$$

$$\frac{1}{u}\left(z - \frac{1}{u}z\right) = \frac{1}{u}\left(-\frac{\ln u}{u}\right)$$

$$\left(z \cdot \frac{1}{u}\right)' = -\frac{\ln u}{u^2}$$

$$z \cdot \frac{1}{u} = - \int \underbrace{\ln u}_{\checkmark} \cdot \underbrace{\frac{1}{u^2}}_{u'} du$$

$$z \cdot \frac{1}{u} = - \left(-\frac{1}{u} \ln u - \int -\frac{1}{u} \cdot \frac{1}{u^2} du \right)$$

$$z \cdot \frac{1}{u} = \left(+ \frac{1}{u} \ln u - \frac{u^{-1}}{-1} + C \right)$$

$$z = + \ln u + 1 + C u \quad y = \frac{1}{C u + \ln u + 1}$$

$$(b) \quad y' - \frac{y}{2x} = 5x^2y^5, \quad \underline{\underline{x}} \quad x \neq 0.$$

16. Usando o método da variação das constantes, determine a solução geral das seguintes EDOs lineares:

$$(a) y' - \frac{2y}{x} = x^3;$$

$$(b) y' \sin x + y \cos x = \sin^2 x;$$

$$\rightarrow (c) y' - \frac{x}{x^2+1} y = \sqrt{x^2+1}, \quad (\text{rever EDO do 13 (c)}).$$

① Escrever a eq. na forma
normal *

$$y' + p(u)y = q(u) *$$

$$M(u) = e^{\int p(u) du}$$

$$(uy)' = M(u)q(u)$$

② Determinar o fator integrante

$$M(u) = e^{\int -\frac{u}{u^2+1} du} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2} \ln(u^2+1)} =$$

$$= e^{\ln((u^2+1)^{-\frac{1}{2}})} =$$

$$= (u^2+1)^{-\frac{1}{2}}$$

③ Multiplicar a eq. por μ

$$(u^2+1)^{-\frac{1}{2}} y' + (u^2+1)^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{u}{u^2+1} \right) y = (u^2+1)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{u^2+1}$$

$$(u^2+1)^{-\frac{1}{2}} y' - (u^2+1)^{-\frac{3}{2}} \cdot u y = (u^2+1)^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$$

$$((u^2+1)^{-\frac{1}{2}} y)' = 1$$

$$(u^2+1)^{-\frac{1}{2}} y = u + C, C \in \mathbb{R}.$$

$$y = (u+C) \sqrt{u^2+1}, C \in \mathbb{R}$$

~~$u \sqrt{u^2+1} + C$~~

L equações lineares homogêneas associadas

17. Determine a solução geral das seguintes EDOs lineares:

- (a) $y' + y = \sin x;$
- (b) $y'' - y + 2\cos x = 0;$
- (c) $y'' + y' = 2y + 3 - 6x;$
- (d) $y'' - 4y' + 4y = x e^{2x};$
- (e) $y'' + y' = e^{-x};$
- (f) $y'' + 4y = \operatorname{tg}(2x);$
- (g) $y''' + y' = \sin x;$
- (h) $y'' + 9y = \sin x - e^{-x}.$

$$R \rightarrow e^{Rx}$$

$$\alpha \pm i\beta \rightarrow e^{\alpha x} \cos(\beta x), e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

(f) L. Hom. ass.

$$y'' + 4y = 0 \quad P(r) = R^2 + 4$$

$$P(r) = 0 \Leftrightarrow R = \pm 2i$$

$$\downarrow$$

$$e^{0u} \cos(2u), e^{0u} \sin(2u)$$

$$SFS = \{ \cos(2u), \sin(2u) \}$$

$$Y_H = C_1 \cos(2u) + C_2 \sin(2u), C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

17. Determine a solução geral das seguintes EDOs lineares:

(a) $y' + y = \sin x;$

→ (b) $y'' - y + 2\cos x = 0;$

(c) $y'' + y' = 2y + 3 - 6x;$

→ (d) $y'' - 4y' + 4y = x e^{2x};$

(e) $y'' + y' = e^{-x};$

(f) $y'' + 4y = \operatorname{tg}(2x);$

→ (g) $y''' + y' = \sin x;$

→ (h) $y'' + 9y = \sin x - e^{-x}.$

$b(u)$

(b) $\underline{y'' - y} = \underline{-2 \cos u}$

$$\left. \begin{array}{l} y'' - y = 0 \\ P(r) = r^2 - 1 = \\ (r-1)(r+1) \\ y_H = C_1 e^u + C_2 e^{-u} \end{array} \right\}$$

$\underline{-2 \cos u} = P_m(u) e^{\alpha u} \cos(\beta u)$

$\alpha = 0, \beta = 1, P_m(u) = -2$ (grau 0)

$\alpha + i\beta = i\sqrt{m^2} \text{ soluções de } f(z)$

$\Rightarrow K = 0$

$Y_p = e^K e^{\alpha u} \left(Q(u) \cos(\beta u) + R(u) \sin(\beta u) \right) =$

$= e^0 \cdot e^0 \cdot (A \cos u + B \sin u)$

$Y_p = A \cos u + B \sin u = C \cos u$

(d) $y'' - 4y' + 4y = x e^{2x};$

$b(u) = P_m(u) e^{\alpha u} \cos(\beta u) \text{ (OM)}$

$P_m(u) = u$ (grau 1), $\alpha = 2, \beta = 0$

$d+i\beta = 2$ e' reiz de P(n) com multiplicidade 2

$$\Rightarrow K = 2$$

$$Y_p = e^{Kx} e^{2u} \left(Q(u) \cos(\beta u) + R(u) \sin(\beta u) \right) =$$

$$= u^2 \cdot e^{2u} \cdot ((A u + B) \cos \vartheta + (C u + D) \sin \vartheta)$$

$$Y_p = (A u^3 + B u^2) \cdot e^{2u}$$

$$Y_p' = (2 A u^3 + (3 A + 2 B) u^2 + 2 B u) e^{2u}$$

$$Y_p'' = (4 A u^3 + (12 A + 4 B) u^2 + (6 A + 8 B) u + 2 B) e^{2u}$$

$$(d) \quad y'' - 4y' + 4y = x e^{2x}; \quad \Leftrightarrow$$

$$\cancel{((4A - 8A + 4A)u^3 + (12A + 4B - 12A - 8B + 4B)u^2)} \\ + (6A + 8B - 8B)u + 2B) e^{2u} = x e^{2u}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 6A = 1 \\ 2B = 0 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} A = 1/6 \\ B = 0 \end{array} \right.$$

$$Y_p = \frac{1}{6} u^3 e^{2u}$$

$$(g) \quad y''' + y' = \sin x;$$

$$(h) \quad y'' + 9y = \sin x - e^{-x}.$$

$$(g) \quad b(u) = \underbrace{1}_{P_m(u)} \times \underbrace{e^{ou}}_{d=0} \times \underbrace{\sin u}_{\beta=1} \quad \left(P(r) = r(r^2+1) \right)$$

(converg)

$$d + i\beta = 0 + i = i \quad \text{entferne } P(r) \Rightarrow K=1$$

$$Y_p = u^1 \cdot e^{ou} \cdot (A \cos u + B \sin u)$$

$$Y_p = Au \cos u + Bu \sin u$$

$$(h) \quad y'' + 9y = \sin x - e^{-x}.$$

$$\textcircled{1} \quad y'' + 9y = \sin x \rightarrow \alpha = 0, \beta = 1$$

$$\textcircled{2} \quad y'' + 9y = -e^{-x} \rightarrow \alpha = -1, \beta = 0$$

$$\left(\begin{array}{l} y'' + 9y = 0 \\ P(x) = x^2 + 9 \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{l} P(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3i \\ Y_H = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x), \\ C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

$$\textcircled{1} \quad y_{P_1} = e^{3x} \cdot (A \cos x + B \sin x)$$

$$\textcircled{2} \quad y_{P_2} = e^{-x} (A \cos x + B \sin x)$$