Exemplo 5.6.

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2+8x-24}}\,dx \;= ?$$

$$2x^2+8x-24 = 2\left(x^2+4x-12\right) = 2\left((x+2)^2-16\right)$$

Fazendo a mudança de variável

$$x+2 = 4\sec t \Leftrightarrow x = 4\sec t - 2 = h(t), t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

podemos resolver o problema. Como $h'(t) = 4\sec t\,\mathrm{tg}\,t$, determinamos a família de primitivas

$$\int \frac{1}{4\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,t} 4\sec t\,\mathrm{tg}\,t\,dt = \int \frac{1}{\sqrt{2}}\sec t\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\sec t + \mathrm{tg}\,t| + C, \text{ com } C\in\mathbb{R}.$$

Regressando à variável inicial, temos $h^{-1}(x) = \arccos\frac{4}{x+2}$ e recorrendo às fórmulas trigonométricas $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ e $1+\mathrm{tg}^2\,x = \sec^2 x$ obtemos:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2+8x-24}}\,dx \;= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{4}\left(x+2+\sqrt{x^2+4x-12}\right)\right| + C, \text{ com } C\in\mathbb{R}$$

Exercício 5.8 Calcule:

1. $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}\,dx;$
2. $\displaystyle\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}\,dx;$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x(3+\ln x)^3}\,dx;$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{8+2x-x^2}}\,dx;$
5. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}^3\,x}{\sqrt{\cos x}}\,dx;$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{5-x^2}}\,dx;$
7. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+2}}\,dx;$
8. $\displaystyle\int \sqrt{4+5x^2}\,dx;$
9. $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x}\,dx.$

5.7 Primitivas de Funções Racionais

Uma função racional é o quociente de dois polinómios, p e q, sendo $q(x)$ não nulo,

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Se $\mathrm{grau}(p) \geq \mathrm{grau}(q)$ então devemos fazer a divisão dos polinómios e obtemos $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$, em que $\mathrm{grau}(r) < \mathrm{grau}(q)$. Portanto, nesse caso,

$$\int f(x)dx = \int s(x)dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}dx$$

Exemplo 5.7. Sejam p e q os polinómios definidos por $p(x) = x^4+2x+1$ e $q(x) = x^3-x^2-2x$. Para determinar $\displaystyle\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ efetuamos a divisão dos polinómios já que $\mathrm{grau}(p) \geq \mathrm{grau}(q)$. Como $p(x) = (x+1)q(x) + 3x^2+4x+1$ vem,

$$\frac{p(x)}{q(x)} = (x+1) + \frac{3x^2+4x+1}{x^3-x^2-2x}.$$

Exemplo 5.7. Sejam p e q os polinómios definidos por $p(x) = x^4 + 2x + 1$ e $q(x) = x^3 - x^2 - 2x$. Para determinar $\int \frac{p(x)}{q(x)}\, dx$ efetuamos a divisão dos polinómios já que $\text{grau}(p) \geq \text{grau}(q)$. Como

$$\int \frac{x^4+2x+1}{x^3-x^2-2x}\, dx$$

$x^4+2x+1 \quad | \; x^3-x^2-2x$

$-x^4+x^3+2x^2 \quad\quad x+1$

x^3+2x^2+2x+1

$-x^3+x^2+2x$

$3x^2+4x+1$

$$= \int x+1 + \frac{3x^2+4x+1}{x^3-x^2-2x}\, dx$$

$$= \int x+1\, dx + \int \frac{3x^2+4x+1}{x^3-x^2-2x}\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + x +$$

$$\int \frac{3x^2+4x+1}{x^3-x^2-2x}\, dx$$

$$\frac{3x^2+4x+1}{x^3-x^2-2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$$

$(x-2)(x+1) \quad x(x+1) \quad x(x-2)$

$x^3-x^2-2x = x(x-2)(x+1)$

$$\frac{3x^2+4x+1}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+1)}$$

$$3u^2+4u+1 = A(u-2)(u+1) + Bu(u+1) + Cu(u-2) \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

$$u = 0 \Rightarrow 0+0+1 = A\times(-2)\times 1 + 0 + 0 \Leftrightarrow A = -1/2$$

$$u = 2 \Rightarrow 12+8+1 = 0 + B\times 2\times 3 + 0 \Leftrightarrow 6B = 21$$

$$B = 7/2$$

$$u = -1 \Rightarrow \cancel{3} - \cancel{4} + \cancel{1} = 0 + 0 + C\times(-1)\times(-3) \Rightarrow C = 0$$

$$\int \frac{3u^2+4u+1}{u^3-u^2-2u}\,du = \int \frac{A}{u} + \frac{B}{u-2} + \frac{C}{u+1}\,du$$

$$= \int \frac{-\frac{1}{2}}{u} + \frac{7/2}{u-2}\,du = -\frac{1}{2}\ln|u| + \frac{7}{2}\ln|u-2| + C,$$

$$C \in \mathbb{R}$$

Então,

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int \left((x+1) + \frac{3x^2+4x+1}{x^3-x^2-2x} \right) dx$$

Para integrar a segunda parcela decompomos o denominador em elementos simples, de 1º e/ou 2º grau:

$$q(x) = x(x^2-x-2) = x(x+1)(x-2)$$

e podemos reescrever a fração como segue:

$$\frac{3x^2+4x+1}{x^3-x^2-2x} = \frac{3x^2+4x+1}{x(x+1)(x-2)}.$$

Esta fração pode ser decomposta numa soma de "frações simples":

$$\frac{3x^2+4x+1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$$

onde A, B e C são constantes a determinar. Se reduzirmos as frações simples ao mesmo denominador obtemos a igualdade seguinte:

$$\frac{3x^2+4x+1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A(x+1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+1)}{x(x+1)(x-2)}.$$

Como os denominadores são iguais, para que as frações sejam iguais devemos igualar os numeradores:

$$3x^2+4x+1 = A(x+1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+1).$$

Pela igualdade de polinómios deduz-se que:

$$(A+B+C)x^2 + (-A-2B+C)x - 2A = 3x^2+4x+1, \text{ ou seja,}$$

$$\begin{cases} A+B+C=3 \\ -A-2B+C=4 \\ -2A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{1}{2} \\ B=0 \\ C=\dfrac{7}{2} \end{cases}$$

Um outro processo para determinar A, B e C consiste em utilizar o seguinte resultado:

Dois polinómios são iguais se $\forall x_0 \in \mathbb{R},\ p(x_0) = q(x_0)$.

Então, em particular,

$$A(x+1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+1) = 3x^2+4x+1, \text{ para } x=0,\ x=2 \text{ e } x=-1.$$

$$\begin{array}{lll} \text{Se } x=0, & \text{resulta} & -2A=1 \Leftrightarrow A=-\dfrac{1}{2} \\ \text{Se } x=-1, & \text{resulta} & 3B=0 \Leftrightarrow B=0 \qquad\qquad \text{Parece mais simples !!!} \\ \text{Se } x=2, & \text{resulta} & 6C=21 \Leftrightarrow C=\dfrac{7}{2} \end{array}$$

Determinados os coeficientes (por um processo ou por outro):

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4+2x+1}{x^3-x^2-2x}\,dx &= \int \left[x+1-\frac{1}{2x}+\frac{21}{6(x-2)} \right] dx \\ &= \frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{21}{6}\ln|x-2|+C,\ C\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Este processo pode ser utilizado em qualquer fraçao de polinómios, tendo em conta os resultados seguintes.

Teorema 5.5. *Todo o polinómio de coeficientes reais pode ser decomposto num produto de fatores do primeiro e/ou segundo grau (em que cada um dos fatores terá uma multiplicidade maior ou igual a* 1*).*

Um polinómio de grau n admite sempre n raízes complexas[2], não necessariamente distintas, ou seja, podem ser simples ou múltiplas. Para além disso, se admitir a raiz $a+bi$ (com $b \neq 0$) também admite a raiz $a-bi$.

O problema reduz-se assim a primitivar fatores do tipo:

$$\frac{A}{(x-\alpha)^r} \text{ e } \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^s}$$

Observe-se que se $r \neq 1$ (Caso em que o polinómio do denominador tem raízes reais múltiplas),

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^r}dx = \frac{A}{(1-r)(x-\alpha)^{r-1}} + C, C \in \mathbb{R}$$

e se $r=1$

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^r}dx = \int \frac{A}{x-\alpha}dx = A\ln|x-\alpha| + C, C \in \mathbb{R}$$

Exemplo 5.8. Como calcular $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3}dx$?

$$\begin{aligned} \frac{x^2+1}{(x-1)^3} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} \\ x^2+1 &= Ax^2 + (-2A+B)x + A - B + C. \end{aligned}$$

Donde: $A=1,\ B=2$ e $C=2$.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+1}{(x-1)^3}dx &= \int \frac{1}{x-1}dx + 2\int \frac{1}{(x-1)^2}dx + 2\int \frac{1}{(x-1)^3}dx \\ &= \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C,\ \ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Se os fatores são de 2º grau, as coisas complicam-se... Caso em que o polinómio do denominador tem raízes complexas.

Exemplo 5.9. Como calcular $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{(2x+1)(x^2+1)}dx$?

$$\frac{x^2+x+1}{(2x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Donde: $A = \dfrac{3}{5},\ B = \dfrac{1}{5}$ e $C = \dfrac{2}{5}$.

$$\int \frac{x^2+x+1}{(2x+1)(x^2+1)}dx = \frac{3}{5}\int \frac{1}{2x+1}dx + \int \frac{\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{3}{10}\ln|2x+1| + \frac{1}{5}\int \frac{x}{x^2+1}dx + \frac{2}{5}\int \frac{1}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{3}{10}\ln|2x+1| + \frac{1}{10}\ln(x^2+1) + \frac{2}{5}\arctan x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

[2] Observemos que uma raiz real é complexa com parte imaginária nula.

Exemplo 5.8. Como calcular $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3}dx$?

$$\frac{u^2+1}{(u-1)^3} = \underset{(u-1)^2}{\frac{A}{u-1}} + \underset{(u-1)}{\frac{B}{(u-1)^2}} + \frac{C}{(u-1)^3}$$

$$u^2+1 = A(u-1)^2 + B(u-1) + C$$

$$\left(u = 1 \Rightarrow 1+1 = 0+0+C \Leftrightarrow C = 2\right)$$

$$u^2+1 = A(u^2-2u+1) + B(u-1) + C$$

$$u^2+1 = Au^2 + (-2A+B)u + A - B + C$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ -2A+B = 0 \\ A-B+2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \\ 1 = 1 \ \checkmark \end{cases}$$

$$\int \frac{u^2+1}{(u-1)^3}\,du = \int \left(\frac{A}{u-1} + \frac{B}{(u-1)^2} + \frac{C}{(u-1)^3}\right) du$$

$$= \int \frac{1}{u-1} + 2(u-1)^{-2} + 2(u-1)^{-3}\,du$$

$$= \ln|u-1| + 2\,\frac{(u-1)^{-2+1}}{-2+1} + 2\,\frac{(u-1)^{-3+1}}{-3+1} + C,$$

$C \in \mathbb{R}$.

Atendendo ao Teorema 5.5, podemos afirmar que qualquer polinómio $q(x)$, admite a seguinte fatorização em polinómios irredútiveis:

$$q(x) = \alpha(x - a_1)^{r_1}...(x - a_n)^{r_n}(x^2 + b_1x + c_1)^{s_1}...(x^2 + b_mx + c_m)^{s_m},$$

com $b_j^2 - 4c_j < 0, j = 1\ldots, m$ e

$$(r_1 + ... + r_n) + 2(s_1 + ... + s_m) = \text{grau}(q).$$

Então,

$$\begin{aligned}\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\overbrace{\left(\frac{A_{i1}}{(x-a_i)} + ... + \frac{A_{ir_i}}{(x-a_i)^{r_i}}\right)}^{\text{raiz } a_i \text{ com multiplicidade } r_i} +\\ + \frac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^{m}\underbrace{\left(\frac{B_{j1}x + C_{j1}}{(x^2 + b_jx + c_j)} + ... + \frac{B_{js_j}x + C_{js_j}}{(x^2 + b_jx + c_j)^{s_j}}\right)}_{\text{raiz } \alpha_j \pm \beta_j i \text{ com mult. } s_j \text{ cada uma}},\end{aligned}$$

onde $A_{i1}, \ldots, A_{ir_i} (i = 1\ldots, n)$ e $B_{j1}, C_{j1}, \ldots B_{js_j}, C_{js_j} (j = 1\ldots, m) \in \mathbb{R}$.

Exemplo 5.10. Para determinar o integral $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 + 2x + 15}dx$ podemos escrever

$$\frac{x}{x^2 + 2x + 15} = \frac{x + 1 - 1}{x^2 + 2x + 15}$$

atendendo a que $(x^2 + 2x + 15)' = 2x + 2 = 2(x + 1)$. Assim,

$$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 15}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x + 1)}{x^2 + 2x + 15}dx - \int \frac{1}{x^2 + 2x + 15}dx$$

O primeiro integral é agora imediato; para calcular o segundo, observemos que

$$x^2 + 2x + 15 = (x + 1)^2 + 14 = 14\left(\left(\frac{x + 1}{\sqrt{14}}\right)^2 + 1\right)$$

e portanto

$$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 15}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x + 1)}{x^2 + 2x + 15}dx - \frac{1}{14}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{14}}\right)^2 + 1}dx.$$

Integrando vem:

$$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 15}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 5) - \frac{\sqrt{14}}{14}\arctan\frac{x + 1}{\sqrt{14}} + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Exemplo 5.11. A primitiva da função $\dfrac{1}{(1 + x^2)^2}$, ou das suas variantes $\dfrac{1}{(a^2 + x^2)^2}$, aparece frequentemente na decomposição em elementos simples, por isso é importante que se perceba a sua determinação.

Como calcular

$$\int \frac{1}{(1 + x^2)^2}\,dx?$$

Fazendo a substituição $x = g(t) = \operatorname{tg} t$, porque $1 + \operatorname{tg}^2 t = \sec^2 t$ temos que

$$\frac{1}{(1 + x^2)^2} = \frac{1}{(1 + \operatorname{tg}^2 t)^2} = \frac{1}{\sec^4 t}$$

Exemplo 5.10. Para determinar o integral $\displaystyle\int \frac{x+0}{\underbrace{x^2+2x+15}}dx$ podemos escrever

$$\Delta = 4-60 = -56 < 0$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2u+2+K}{u^2+2u+15}\,du$$

$$\frac{1}{2}\times(2+K) = 0$$

$$K = -2$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2u+2}{u^2+2u+15}\,du + \frac{1}{2}\int \frac{-2}{u^2+2u+15}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(u^2+2u+15\right) - \int \frac{1}{u^2+2u+15}\,du$$

$$\int \frac{1}{u^2+2u+15}\,du = \int \frac{1}{(u+1)^2+14}\,du =$$

$$= \frac{1}{14}\cdot\sqrt{14}\int \frac{1 \times \overbrace{\frac{1}{\sqrt{14}}}^{u'}}{\Big(\underbrace{\frac{u+1}{\sqrt{14}}}_{u}\Big)^2+1}\,du =$$

$$= \frac{\sqrt{14}}{14}\arctan\left(\frac{u+1}{\sqrt{14}}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx? =$$

$$u^2+1=0 \Rightarrow$$
$$u^2=-1$$
$$u=\pm i$$

$$= \int \frac{1}{(1+tg^2t)^2}\cdot \sec^2 t\,dt =$$

$\sin^2 t+\cos^2 t = 1$

div. por $\cos^2 t$

$tg^2 t+1 = \sec^2 t$

$u = tg\,t$

$du = \sec^2 t\,dt$

$$= \int \frac{1}{\sec^4 t}\cdot \sec^2 t\,dt =$$

$$= \int \frac{1}{\sec^2 t}\,dt =$$

$$= \int \cos^2(t)\,dt = \int \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + C = \frac{t}{2}+\frac{1}{2}\sin t\cos t + C$$

$t = \arctan u$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\arctan u}_{t} + \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{\frac{1}{1+u^2}}}_{\cos t} \times \underbrace{\sqrt{1-\frac{1}{1+u^2}}}_{\sin t} + C$$

Derivando $\operatorname{tg} t$, obtém-se $\sec^2 t$, assim, a função a primitivar é

$$\int \frac{1}{\sec^4 t}\ \sec^2 t\, dt = \int \frac{1}{\sec^2 t}\, dt = \int \cos^2 t\, dt$$

Como $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$, vem

$$\int \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int (\cos(2\,t)+1)\ dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\,t)\right) + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Como $\operatorname{sen}(2t) = 2\operatorname{sen} t \cos t$

$$\int \frac{1}{\sec^2 t}\, dt = \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \cos t + \frac{1}{2}t + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Como $\operatorname{tg} t = x$, resulta que $\sec^2 t = x^2+1$ e vem

$$\cos^2 t = \frac{1}{x^2+1} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}^2 t = 1 - \cos^2 t = \frac{x^2}{x^2+1}.$$

Regressando à variável inicial x temos:

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\ \arctan x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Exemplo 5.12. Vamos determinar o integral indefinido $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx$.

Atendendo a que $(x^2+2x+3)' = 2x+2$ e que $x-1 = x+1-2$, podemos reescrever o integral da seguinte forma:

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx = \frac{1}{2}\int \left(\frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2} - \frac{4}{(x^2+2x+3)^2}\right) dx$$

ou seja,

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}\, dx - \int \frac{2}{(x^2+2x+3)^2}\, dx.$$

O primeiro integral é imediato,

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}\, dx = -\frac{1}{2(x^2+2x+3)} + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}.$$

Quanto ao segundo integral, vamos recorrer ao exemplo 5.11. Começamos por transformar a função integranda:

$$\frac{2}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{2}{4\left(\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)^2}.$$

Faz-se agora a substituição

$$\frac{x+1}{\sqrt{2}} = \operatorname{tg} t \Leftrightarrow x = \sqrt{2}\operatorname{tg} t - 1$$

no integral $\displaystyle\int \frac{2}{(x^2+2x+3)^2}\, dx$ e o integral a determinar será

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{(\operatorname{tg}^2 t+1)^2}\,\sqrt{2}\sec^2 t\, dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \cos^2 t\, dt = \frac{\sqrt{2}}{4}\,(t+\operatorname{sen}(2\,t))+C_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}\,(t+2\operatorname{sen}(t)\cos(t))+C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Regressando à variável inicial,

$$\int \frac{2}{(x^2+2x+3)^2}\, dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+(x+1)^2}}\cdot\frac{x+1}{\sqrt{2+(x+1)^2}}\right) + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R},$$

Exemplo 5.12. Vamos determinar o integral indefinido $\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx$.

$$\to \frac{1}{2}\int \frac{2u+2+K}{(u^2+2u+3)^2}\,du$$

$$\frac{1}{2}\times(2+K)=-1$$

$$2+K=-2$$

$$K=-4$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{2u+2}{(u^2+2u+3)^2}\,du-2\int \frac{1}{(u^2+2u+3)^2}\,du$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{(u^2+2u+3)^{-2+1}}{-2+1}$$

$$\int \frac{1}{(u^2+2u+3)^2}\,du=\int \frac{1}{((u+1)^2+2)^2}\,du=$$

$$u+1=\sqrt{2}\,tg\,t$$

$$du=\sqrt{2}\sec^2 t\,dt$$

$$=\int \frac{1}{((\sqrt{2}\,tg\,t)^2+2)^2}\cdot\sqrt{2}\sec^2 t\,dt=$$

$$=\int \frac{\sqrt{2}\sec^2 t}{(2\,tg^2 t+2)^2}\,dt=$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{\sec^2 t}{(tg^2 t + 1)^2}\, dt =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{\sec^2 t}{\sec^4 t}\, dt = \frac{\sqrt{2}}{4} \int \cos^2 t\, dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8} \int 1 + \cos(2t)\, dt =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8} \left(t + \frac{\sin(2t)}{2} \right) + C$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8} \left(t + \cos t \sin t \right) + C$$

$$u + 1 = \sqrt{2}\, tg\, t \qquad tg\, t = \frac{u+1}{\sqrt{2}} \qquad t = \arctan\left(\frac{u+1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\underbrace{\arctan\left(\frac{u+1}{\sqrt{2}}\right)}_{t} + \underbrace{\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{u+1}{\sqrt{2}}\right)^2}}}_{\cos t} \times \sqrt{1 - \frac{1}{1+\left(\frac{u+1}{\sqrt{2}}\right)^2}} \right) + C,\ C \in \mathbb{R}$$

ou escrito de forma simplificada,

$$\int \frac{2}{(x^2+2x+3)^2}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{2}(x+1)}{2+(x+1)^2}\right) + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Finalmente,

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx = -\frac{1}{2(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{2}(x+1)}{2+(x+1)^2}\right) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Exercício 5.9 Calcule:

1. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)^3}\,dx;$

2. $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}\,dx;$

3. $\displaystyle\int \frac{3x^2+2x-3}{x^3+2x^2+x}\,dx;$

4. $\displaystyle\int \frac{x^4-3}{x^3+2x^2+x}\,dx;$

5. $\displaystyle\int \frac{5x^3-3x^2+7x-3}{(x^2+1)^2}\,dx.$

5. $\displaystyle\int \frac{5x^3 - 3x^2 + 7x - 3}{(x^2+1)^2}\,dx.$

$$\frac{5u^3-3u^2+7u-3}{(u^2+1)^2} = \frac{Au+B}{u^2+1} + \frac{Cu+D}{(u^2+1)^2}$$

(u^2+1)

$$5u^3-3u^2+7u-3 = (Au+B)(u^2+1)+Cu+D$$

$$5u^3-3u^2+7u-3 = Au^3+Au+Bu^2+B+Cu+D$$

$$5u^3-3u^2+7u-3 = Au^3+Bu^2+(A+C)u+B+D$$

$$\begin{cases} A=5 \\ B=-3 \\ A+C=7 \\ B+D=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=5 \\ B=-3 \\ C=2 \\ D=0 \end{cases}$$

$$\int \frac{5u^3-3u^2+7u-3}{(u^2+1)^2}\,du = \int\left(\frac{Au+B}{u^2+1} + \frac{Cu+D}{(u^2+1)^2}\right)du$$

$$= \int \frac{5u-3}{u^2+1}\,du + \int \frac{2u}{(u^2+1)^2}\,du$$

Soluções dos exercícios

Exercício 5.1

Função	Primitiva	Domínio
$f(x) = 2e^{2x}$	$F(x) = e^{2x}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$F(x) = -\ln(\cos x)$	$x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
$f(x) = x^5$	$F(x) = \frac{x^6}{6}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt[3]{x}$	$F(x) = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{7}$	$F(x) = \sqrt{7}\,x$	$x \in \mathbb{R}$

Exercício 5.2

1. $x^4 - \dfrac{5}{2}x^2 + 9x + C$ 2. $\dfrac{5}{4}x^4 + 2\operatorname{sen} x + C$ 3. $2t^4 - 4\sqrt{t^3} - \dfrac{1}{2t^2} + C$ 4. $\operatorname{tg} x + C$
5. $\dfrac{x^3}{3} - 2x - \dfrac{1}{x} + C$ 6. $-\sqrt{3}\cos x + \dfrac{1}{2}\ln|x| + C$ 7. $\dfrac{2}{5}\sqrt{x^5} + x + C$ 8. $\dfrac{1}{\cos u} + C$

, com $C \in \mathbb{R}$.

Exercício 5.3

1. $\dfrac{(g(x))^{n+1}}{n+1} + C$ 2. $\operatorname{sen}(g(x)) + C$ 3. $-\cos(g(x)) + C$
4. $\operatorname{tg}(g(x)) + C$ 5. $-\operatorname{cotg}(g(x)) + C$ 6. $\operatorname{arcsen}(g(x)) + C$
7. $e^{g(x)} + C$ 8. $\dfrac{a^{g(x)}}{\ln a} + C$ 9. $\ln|g(x)| + C$
10. $\arctan((g(x))) + C$ 11. $-\ln|\cos(g(x))| + C$ 12. $\dfrac{n}{n+1}\sqrt[n]{g(x)^{n+1}} + C$

, com $C \in \mathbb{R}$

Exercício 5.5

1. $\dfrac{\sqrt{7}}{7}\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{7}}\right) + C$;
2. $\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{\sqrt{8}}\right) + C$;
3. $-2\sqrt{1-x} + C$;
4. $-\dfrac{1}{6}e^{3\cos^2 x} + C$;
5. $\dfrac{1}{2}\arctan(e^{2x}) + C$;
6. $-\ln|\cos x| + C$;
7. $-\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) + C$;
8. $\dfrac{1}{2}e^{x^2+4x+3} + C$.

Exercício 5.6

1. $x\arctan x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$;
2. $\dfrac{1}{2}(\operatorname{tg} x \sec x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|) + C$;
3. $\dfrac{2}{45}\cos(2x)\operatorname{sen}(7x) - \dfrac{7}{45}\operatorname{sen}(2x)\cos(7x) + C$;
4. $-\dfrac{3}{16}\operatorname{sen}(5x)\operatorname{sen}(3x) - \dfrac{5}{16}\cos(5x)\cos(3x) + C$;
5. $\dfrac{x^2}{2}\arctan x - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}\arctan x + C$;
6. $\dfrac{x3^x}{\ln 3} - \dfrac{3^x}{\ln^2 3} + C$;
7. $\dfrac{1}{2}\arctan x - \dfrac{1}{2}\dfrac{x}{1+x^2} + C$(Sugestão: $\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}\,x$);
8. $\dfrac{1}{2}(x\cos(\ln x) + x\operatorname{sen}(\ln x)) + C$;
9. $x\dfrac{(2x+5)^{11}}{22} - \dfrac{(2x+5)^{12}}{528} + C$;

com $C \in \mathbb{R}$

Exercício 5.7

1. $\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt[6]{x^3}-6\sqrt[6]{x}+6\arctan\sqrt[6]{x}+C$;

2. $e^x-\arctan(e^x)+C$;

3. $\frac{\ln^3 x}{3}-\ln x+\arctan(\ln x)+C$;

4. $2\,\mathrm{sen}\sqrt{x}-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+C$;

5. $\frac{\sqrt{(2x+3)^5}}{10}-\frac{\sqrt{(2x+3)^3}}{2}+C$;

6. $\ln(4x)-\ln 2\,\ln|\ln(4x)|+C$;

7. $-\frac{4\sqrt{(1-\sqrt{x})^3}}{3}+C$,

com $C\in\mathbb{R}$.

Exercício 5.8

1. $\mathrm{arcsen}\left(\frac{e^x}{2}\right)+C$;

2. $\frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2}-\frac{13}{9}\ln\left(\sqrt{9x^2+6x+2}-3x-1\right)+C$;

3. $-\frac{1}{2(3+\ln x)^2}+C$;

4. $\mathrm{arcsen}\left(\frac{x-1}{3}\right)+C$;

5. $-2\sqrt{\cos x}+\frac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x}+C$;

6. $-\frac{\sqrt{5-x^2}}{5x}+C$;

7. $-\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{2+x^2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(-\sqrt{2}+\sqrt{2+x^2}\right)+C$;

8. $\frac{1}{2}x\sqrt{4+5x^2}-2\frac{\ln\left(-x\sqrt{5}+\sqrt{4+5x^2}\right)}{\sqrt{5}}+C$;

9. $\sqrt{1-x}\left(\frac{4(1-x)^2}{5}-\frac{2(1-x)^3}{7}-\frac{2(1-x)}{3}\right)+C.$

com $C\in\mathbb{R}$,

Exercício 5.9

1. $-\frac{1}{2(x-2)^2}+C$, com $C\in\mathbb{R}$;
2. $\frac{1}{18}\left(\frac{3-6x}{(x+1)^2}+4\ln(x-2)-4\ln(x+1)\right)+C$, com $C\in\mathbb{R}$;
3. $-\frac{2}{x+1}-3\ln x+6\ln(x+1)+C$, com $C\in\mathbb{R}$;
4. $\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x+1}-3\ln x+6\ln(x+1)+C$, com $C\in\mathbb{R}$;
5. $-\frac{1}{x^2+1}+\frac{5}{2}\ln(x^2+1)-3\arctan x+C$, com $C\in\mathbb{R}$.