- Um ponto $c \in \text{Int}(D_f)$ é de inflexão para f se e só se f'' muda de sinal em c.

  f'' pode mudar de sinal em c sem existir no ponto. Consequentemente, só zeros de f'' ou pontos onde f'' não existe podem ser pontos de inflexão de f.

Exercício 4.9 Verifique que $f(x) = \operatorname{sen} x$ tem pontos de inflexão em $x = k\pi$ para todo o $k \in \mathbb{Z}$.

Exercício 4.10 Estude a concavidade de $f(x) = x^3 - 12x$ indicando, os pontos de inflexão, caso existam.

Exercício 4.11 Estude a concavidade das seguintes funções e averigue se 0 é ponto de inflexão.

1. $f(x) = |x|(mx + q)$ e $g(x) = mx^2 + q|x|$, com $m, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (esboce e analise o gráfico!);
2. $h(x) = x\sqrt{|x|}$ e $k(x) = x^2\sqrt{|x|}$.

Exercício 4.12 Esboce o gráfico das seguintes funções

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}, \qquad g(x) = \frac{e^x}{x}, \qquad h(x) = 5|x|e^{-|x|}.$$

e estude a função quanto a

- domínio;
- sinal e zeros;
- assíntotas;
- intervalos de monotonia e pontos de extremo;
- concavidade e pontos de inflexão;
- contradomínio.

4.3 Teorema e regra de Cauchy

Sejam f, g : $[a, b] \to \mathbb{R}$ duas funções nas condições do Teorema de Lagrange. Então existem dois pontos c_1, $c_2 \in]a, b[$, em geral distintos, tais que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c_1)}{g'(c_2)}$$

supondo $g'(c_2) \neq 0$ (o que implica, pelo Teorema de Lagrange que seja $g(b) \neq g(a)$).
O Teorema de Cauchy, no entanto, permite expressar aquela razão à custa de um único ponto $c \in]a, b[$.

Teorema 4.7. ***(Teorema de Cauchy)*** *Sejam f e g duas funções contínuas no intervalo $[a, b]$ e deriváveis em $]a, b[$. Se $g'(x) \neq 0, \forall x \in]a, b[$, então existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Demonstração. Das hipóteses relativas à continuidade e diferenciabilidade da função g e ao facto de ser $g'(x) \neq 0, \forall x \in]a, b[$, resulta, pelo Teorema de Rolle, que se tem $g(b) - g(a) \neq 0$ e, sendo assim, está bem definido o primeiro membro da igualdade a demonstrar.
Considere-se agora a função auxiliar

$$\varphi(x) = (g(b) - g(a))f(x) - (f(b) - f(a))g(x)$$

definida em $[a, b]$. É de imediata verificação que
(1) φ é contínua em $[a, b]$;
(2) φ é derivável em $]a, b[$;
(3) $\varphi(a) = \varphi(b)$.
Então φ satisfaz as condições do Teorema de Rolle e, portanto, existe $c \in]a, b[$ tal que $\varphi'(c) = 0$. Consequentemente, vem

$$0 = (g(b) - g(a))f'(c) - (f(b) - f(a))g'(c)$$

donde resulta a igualdade pretendida. □

Este teorema é também conhecido por Teorema dos Acréscimos Finitos Generalizado.

Observação 4.2. Substituindo no Teorema de Cauchy $g(x)$ por x obtém-se o Teorema de Lagrange.

Do ponto de vista prático, uma das aplicações mais importantes do Teorema de Cauchy é a seguinte
Teorema 4.8. ***(Regra de Cauchy)*** *Sejam f e g duas funções definidas e deriváveis em todos os pontos de um intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$. Suponha-se que $a \in \tilde{\mathbb{R}}$ é um dos extremos de I e que $g'(x) \neq 0$ em todo o ponto $x \in I$.*
Se, quando $x \to a$, $f(x)$ e $g(x)$ tendem simultaneamente para zero ou ambas para infinito (podendo ser $+\infty$, $-\infty$ ou uma para $+\infty$ e outra para $-\infty$) e existe em $\tilde{\mathbb{R}}$ o limite de $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ quando $x \to a$, então existe o limite de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ em $\tilde{\mathbb{R}}$ quando $x \to a$ e

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser vista em [Campos Ferreira, Introdução à Análise Matemática, Cap.IV]. □

Visto que a regra de Cauchy é aplicável tanto ao caso do limite superior como ao caso do limite inferior do intervalo aberto I então, por combinação destas duas situações, pode obter-se

Corolário 7. *Sejam I um intervalo aberto, c um ponto de I e f e g duas funções deriváveis em $I \setminus \{c\}$. Se $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in I \setminus \{c\}$, e se as funções f e g tendem ambas para zero quando $x \to c$ ou ou ambas para infinito quando $x \to c$, então*

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

sempre que o limite do segundo membro exista em $\tilde{\mathbb{R}}$.

Exemplo 4.6. Seja $\alpha \in \mathbb{R}^+$ uma constante. O limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$$

assume a forma indeterminada $\dfrac{\infty}{\infty}$.
Como as funções $f(x) = \ln x$ e $g(x) = x^\alpha$ são deriváveis em $]0, +\infty[$ e $g'(x) \neq 0$ neste intervalo, pode aplicar-se a regra de Cauchy, obtendo-se então

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^\alpha)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha - 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$$

logo
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0.$$

Observação 4.3. **(a)** Observe-se que pode existir o limite de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ e, verificando-se todas as outras condições da regra de Cauchy (Teorema 4.8), não existir o limite de $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. É o que se passa no caso em que
$$f(x)=x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\quad \text{e}\quad g(x)=x$$
e se consideram os limites quando $x\to 0$.
$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\left(2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$
Este limite não existe, contudo, existe o limite
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}x\cos\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

(b) Se $f'(x)$ e $g'(x)$ tendem ambas para zero ou para infinito quando $x\to a$ e a regra de Cauchy é aplicável a $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, tem-se
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$
e assim sucessivamente.
(c) Os símbolos $0\times\infty$ ou $+\infty-\infty$ que podem surgir no cálculo do limite de $f(x)g(x)$ ou de $f(x)-g(x)$, respetivamente, reduzem-se a $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$ pelas seguintes transformações
$$f(x)g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$
$$f(x)-g(x)=f(x)g(x)\left[\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}\right].$$
(d) No caso da potência exponencial
$$f(x)^{g(x)},\ f(x)>0,\ \forall x\in I$$
podem levantar-se indeterminações tendo em conta que
$$f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln(f(x))}.$$

Teorema 4.9. *Seja f uma função definida num intervalo aberto I e n vezes derivável num ponto $c\in I$. Se*
$$f(c)=f'(c)=\ldots=f^{(n-1)}(c)=0$$
então
$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{(x-c)^n}=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

Demonstração. A demonstração pode fazer-se por indução sobre n.
(1) Se $n = 1$, uma vez que $f(c) = 0$, vem

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$$

(resulta da definição de derivada de f em c).
(2) Suponha-se a afirmação verdadeira para $n = p$, ou seja, se

$$f(c) = f'(c) = \ldots = f^{(p-1)}(c) = 0$$

então verifica-se

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{(x - c)^p} = \frac{f^{(p)}(c)}{p!}. \tag{4.2}$$

Suponha-se ainda que $f(c) = f'(c) = \ldots = f^{(p-1)}(c) = f^{(p)}(c) = 0$.
Usando a regra de Cauchy vem

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{(x - c)^{p+1}} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{(p + 1)(x - c)^p} = \frac{1}{(p + 1)} \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{(x - c)^p} \tag{4.3}$$

e, como $f'(c) = (f')'(c) = \ldots = (f')^{(p-1)}(c) = 0$, então de (4.2) resulta

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{(x - c)^p} = \frac{(f')^{(p)}(c)}{p!} = \frac{f^{(p+1)}(c)}{p!}. \tag{4.4}$$

De (4.3) e (4.4) obtém-se

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{(x - c)^{p+1}} = \frac{f^{(p+1)}(c)}{(p + 1)!}.$$

De (1) e (2) resulta provado o teorema. □

Teorema 4.10. ***(Regra de l'Hôpital)*** *Sejam f e g duas funções definidas num intervalo aberto I e deriváveis num ponto $c \in I$. Suponha-se que $g(x) \neq 0$ em $I \setminus \{c\}$, $f(c) = g(c) = 0$ e $g'(c) \neq 0$. Então, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tem limite quando $x \to c$ e*

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Demonstração. Em $I \setminus \{c\}$, tem-se

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}}{\dfrac{g(x) - g(c)}{x - c}}$$

donde, passando ao limite quando $x \to c$, se obtém o resultado pretendido. □

Exercício 4.13 Deduza os Teoremas de Rolle e de Lagrange a partir do Teorema de Cauchy.

Exercício 4.14 Calcule os seguintes limites $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ e $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ com $f(x) = x + \operatorname{sen} x$ e $g(x) = x + \cos x$. Pode aplicar a Regra de Cauchy para o cálculo destes limites?

Exercício 4.15 A Regra de Cauchy pode utilizar-se para limites laterais. Calcule o limite $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x \ln x$.

Exercício 4.16 Verifique que $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \frac{\frac{1}{x}}{e^{-\frac{1}{x}}}$ e aplique a regra aos limites $\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$ e $\lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{x}}{e^{-\frac{1}{x}}}$.

Exercício 4.17 Verifique que se f tiver assímptota não vertical direita $y = mx + b$ e $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = l$, então $m = l$ (analogamente à esquerda).

Exercício 4.18 Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{1-\cos x}$; (b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^4 - 2x^3 + 2x - 1}{x^3 - 3x + 2}$; (c) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$; (d) $\lim_{x\to 0^+} x^x$; (e) $\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{arccot} x$.

Analisemos agora um exemplo de uma função definida por ramos. Seja a um ponto de acumulação de D_f, domínio da função contínua dada por

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x < a \\ b & \text{se } x = a \\ h(x) & \text{se } x > a \end{cases}$$

Note-se que $b = \lim_{x\to a^-} g(x) = \lim_{x\to a^+} h(x)$ pela continuidade de f.

- A derivada de f coincide com a derivada de g para $x < a$ e com a derivada de h para $x > a$ (nos pontos em que g e h são deriváveis).

- Contudo $f'(a)$ pode existir ou não. Considerem-se as funções

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ \cos x & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad f_2(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

  Uma das derivadas existe e a outra não: $f_1'(0) = 0$ e $f_2'(0)$ não existe.

Lema 4.1. *Seja f contínua em a. Pode-se afirmar que*

$$\textit{Se } \lim_{x\to a^+} f'(x) = l \in \widetilde{\mathbb{R}} \textit{ então } f'_+(a) = l \quad \textit{e} \quad \textit{se } \lim_{x\to a^-} f'(x) = l \in \widetilde{\mathbb{R}} \textit{ então } f'_-(a) = l.$$

Exercício 4.19

Verifique que, nas condições do lema, pode usar a Regra de de l'Hôpital para calcular $f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ e $f'_-(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Teorema 4.11. *Seja f contínua em a. Se $\lim_{x\to a} f'(x) = l \in \mathbb{R}$ então $f'(a) = l$.*

Exemplo 4.7. Vamos caracterizar a derivada da função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \le 1 \\ 2x - 1 & \text{se } x > 1. \end{cases}.$$

A função f é contínua em $\mathbb{R}$ pois x^2 é contínua em $x \le 1$, $2x - 1$ é contínua em $x > 1$ e

$$f(1) = 1^2 = \lim_{x\to 1^+}(2x - 1).$$

Se $x < 1$ então $f'(x) = 2x$ e se $x > 1$ então $f'(x) = 2$.
Em $x = 1$ tem-se $f'_-(1) = f'_+(1) = 2$, ou seja, $f'(1) = 2$. Assim,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \le 1, \\ 2 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Exercício 4.20 Caracterize a derivada da função definida por

$$g(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ \arctan x & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

explicando porque é que $D_{g'} \neq \mathbb{R}$.

Observação 4.4. Mesmo que os limites laterais da derivada f' não existam no ponto a, podem existir as derivadas laterais em a mas é preciso calculá-las pela definição. Note-se que, neste caso, a derivada pode existir em a mas não é contínua.

Exercício resolvido 4.2. Verifique que a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é contínua em $\mathbb{R}$.

Prove ainda que $f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$ e que não existe o $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$. Apesar disso, a função é derivável também em $x = 0$ e assim $D_{f'} = \mathbb{R}$.

De facto, pela definição,

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0} h \operatorname{sen} \frac{1}{h} = 0.$$

4.4 Soluções dos exercícios do capítulo

Exercício 4.1 O domínio da função é $[-4, 6[$. Em $x = -4$ a função tem um mínimo local, $f(-4) = 2$; não tem mínimo global. Tem o máximo local 3 (que é também máximo global) em $x = -3$, $x = -2$, $x \in [0, 1[$ e $x \in [4, 5]$. Tem o máximo local 2 em $x = 2$ e em $x \in [3, 4[$.

Exercício 4.2

1. f contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
2. $y = \frac{\pi+1}{2}$ é uma assíntota horizontal à direita; $y = 1$ é uma assíntota horizontal à esquerda e não tem assíntotas verticais.
3. $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ e $\left(-\dfrac{1}{\ln 2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Exercício 4.3 $g(0) = -\dfrac{\pi}{15} < 0$ e $g(2) = \dfrac{4\pi}{15} > 0$, como g é contínua em $[0, 2]$, g tem um zero neste intervalo.

Exercício 4.4 f é contínua em $]1, 2]$ mas não é limitada em $]1, 2]$. Não existe contradição com o Teorema de Weierstrass já que a continuidade não se verifica num intervalo fechado.

Exercício 4.5 $y - f(c) = \frac{e}{e-1}(x - c)$ onde $c = e + 1$.

Exercício 4.8 $f(1)$ é um mínimo local e absoluto.

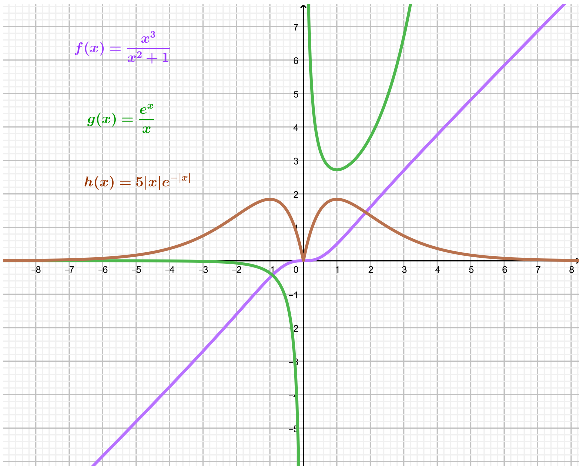
Exercício 4.10 $(0, f(0))$ ponto de inflexão; $]-\infty, 0]$ côncava; $[0, +\infty[$ convexa.

Exercício 4.11

1. $f(x) = |x|(mx + q)$ se $m > 0$ convexa em $]0, +\infty[$ e côncava em $]-\infty, 0[$; se $m < 0$ côncava em $]0, +\infty[$ e convexa em $]-\infty, 0[$; 0 é ponto de inflexão.
   $g(x) = mx^2 + q|x|$, se $m > 0$ convexa e se $m < 0$ côncava em $\mathbb{R}$ e 0 não é ponto de inflexão.
2. $h(x) = x\sqrt{|x|}$ convexa em $]0, +\infty[$ e côncava em $]-\infty, 0[$. 0 é ponto de inflexão.
   $k(x) = x^2\sqrt{|x|}$ convexa em $\mathbb{R}$ e 0 não é ponto de inflexão.

Exercício 4.12

- $D_f = D_h = \mathbb{R}$; $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$ e $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$; g não tem zeros, $g(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$ e $g(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$; $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $h(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- $y = x$ assíntota bilateral para f; $x = 0$ assíntota vertical para g e $y = 0$ assíntota à esquerda para g; $y = 0$ assíntota bilateral para h.
- f é crescente em $\mathbb{R}$; g decrescente em $]-\infty, 0[$ e em $]010[$, crescente em $]1, +\infty[$ e mínimo local em $(1, g(1)) = (1, e)$; , intervalos de monotonia e pontos de extremo; h é crescente em $]-\infty, -1[$ e em $]0, 1[$, decrescente em $]-1, 0[$ e em $]1, +\infty[$, mínimo local e absoluto em $(0, h(0)) = (0, 0)$ e máximo local e absoluto em $(1, h(1)) = (1, 5/e)$ e em $(-1, h(-1)) = (1, 5/e)$
- f tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0[$ e voltada para cima em $]0, +\infty[$, $(0, f(0)) = (0, 0)$ é ponto de inflexão; g tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0[$ e voltada para cima em $]0, +\infty[$, não tem ponto de inflexão; h tem concavidade voltada para cima em $]-\infty, -2[$ e em $]2, +\infty[$ e tem concavidade voltada para baixo em $]-2, 0[$ e em $]0, 2[$, pontos de inflexão $(-2, h(-2)) = (-2, 10/e^2)$ e $(2, h(2)) = (2, 10/e^2)$.
- $CD_f = \mathbb{R}$; $CD_g =]-\infty, 0[\cup [e, +\infty[$; $CD_h =]0, 5/e]$.



Exercício 4.14 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 2$. Não.

Exercício 4.15 0

Exercício 4.16 $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{x}}{e^{-\frac{1}{x}}} = 0.$

Exercício 4.18 (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \operatorname{sen} x}{1-\cos x} = 2$; (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-2x^3+2x-1}{x^3-3x+2} = 0$; (c) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$; (d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 1$; (e) $\lim\limits_{x\to +\infty} x \operatorname{arccot} x = 1$.

Exercício 4.20

$$g(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{1+x^2} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Cálculo I

Cálculo com funções de uma variável

2009/10

Virgínia Santos

Departamento de Matemática

Universidade de Aveiro

Definição 3.1. Ao polinómio p_n definido por

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}(x-a)^k \\ &= f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2\,!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n\,!}(x-a)^n \end{aligned}$$

chamamos **polinómio de Taylor de ordem n da função f no ponto a.**

No caso em que $a=0$ o polinómio de Taylor de ordem n da função f no ponto $a=0$ é o polinómio

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k\,!}x^k \\ &= f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2\,!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}x^n \end{aligned}$$

que se designa por **polinómio de Mac-Laurin de ordem n da função f.**

Fórmula de Taylor

O teorema que apresentamos a seguir, habitualmente designado por **Teorema de Taylor**, dá-nos uma expressão para o erro que se comete quando se aproxima f pelo seu polinómio de Taylor de ordem n no ponto a.

Proposição 3.4. *Sejam f uma função real de variável real definida num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e $a \in I$. Suponhamos que f é $n+1$ vezes diferenciável em todo o ponto de I. Então, para todo o $b \in I \setminus \{a\}$, existe ξ entre a e b tal que*

$$\underbrace{f(b)}_{\substack{\shortparallel \\ a+h}} = f(a)+\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)\,!}(\underbrace{b-a}_{h})^{n+1}\,.$$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + R(h), \quad \lim_{h\to 0} \frac{R(h)}{h^2} = 0$$

Exemplo: Para f(x) = sin(x) e a=0 obter os polinómios de Taylor e ver no GeoGebra os gráficos.

$f(x) = \sin x \quad , \quad f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \quad , \quad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x \quad , \quad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \quad , \quad f'''(0) = -1$

$f^{IV}(x) = \sin x \quad , \quad f^{IV}(0) = 0$

$f^{V}(x) = \cos x \quad , \quad f^{(V)}(0) = 1$

$$P_5(x) = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!}$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Exemplo 3.2.

2. Vamos determinar o polinómio de Taylor de ordem três da função f definida, para todo o $x \in \mathbb{R}$, por $f(x) = \operatorname{sen} x + x$ em torno do ponto $a = \pi$.

   Temos
$$p_3(x) = f(\pi) + f'(\pi)(x-\pi) + \frac{f''(\pi)}{2}(x-\pi)^2 + \frac{f'''(\pi)}{3!}(x-\pi)^3 \,.$$

   Como
$$\begin{array}{rcl} f(\pi) & = & \pi \\ f'(\pi) & = & \cos x + 1|_{x=\pi} \\ & = & 0 \\ f''(\pi) & = & -\operatorname{sen} x|_{x=\pi} \\ & = & 0 \\ f'''(\pi) & = & -\cos x|_{x=\pi} \\ & = & 1 \end{array}$$

   vem que
$$p_3(x) = \pi + \frac{1}{6}(x-\pi)^3 \,.$$

Exemplo 3.6.

1. Consideremos a função f definida por $f(x) = \sqrt{x+1}$, para todo o $x \geq -1$.

   Vamos determinar o polinómio de Mac-Laurin de ordem dois da função f e utilizar este polinómio para obter um valor aproximado de $\sqrt{2}$.

   Temos
   $$p_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 .$$

   Como $f(0) = 1$,
   $$f'(0) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}\Big|_{x=0} = \frac{1}{2} ,$$

   e
   $$f''(0) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}\Big|_{x=0} = -\frac{1}{4}$$

   temos
   $$p_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 .$$

   Uma vez que $\sqrt{2} = f(1)$ obtém-se
   $$\sqrt{2} \cong p_2(1) = \frac{11}{8} .$$

A Fórmula de Taylor de ordem n, a Série de Taylor e a majoração do erro são assuntos abordados em Cálculo II C.

Em Cálculo I C, como indicado no plano de aulas e competências, precisa apenas saber aplicar a fórmula:

- com n=1 para obter a aproximação linear
- com n=2 num ponto crítico no estudo de extremos

Exemplo: $f(x) = x \sin(x)$ em 0

Cálculo I

Cálculo com funções de uma variável

2009/10

Virgínia Santos

Departamento de Matemática

Universidade de Aveiro

Definição 3.1. Ao polinómio p_n definido por

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ &= f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

chamamos **polinómio de Taylor de ordem n da função f no ponto a**.

No caso em que $a=0$ o polinómio de Taylor de ordem n da função f no ponto $a=0$ é o polinómio

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \\ &= f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \end{aligned}$$

que se designa por **polinómio de Mac-Laurin de ordem n da função f**.

Fórmula de Taylor

O teorema que apresentamos a seguir, habitualmente designado por **Teorema de Taylor**, dá-nos uma expressão para o erro que se comete quando se aproxima f pelo seu polinómio de Taylor de ordem n no ponto a.

Proposição 3.4. *Sejam f uma função real de variável real definida num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e $a \in I$. Suponhamos que f é $n+1$ vezes diferenciável em todo o ponto de I. Então, para todo o $b \in I \setminus \{a\}$, existe ξ entre a e b tal que*

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Exemplo: Para $f(x) = \sin(x)$ e $a=0$ obter os polinómios de Taylor e ver no GeoGebra os gráficos.

P(x)=TaylorPolynomial(sin(x),0,9)

Exemplo 3.2.

2. Vamos determinar o polinómio de Taylor de ordem três da função f definida, para todo o $x \in \mathbb{R}$, por $f(x) = \operatorname{sen} x + x$ em torno do ponto $a = \pi$.

   Temos
$$p_3(x) = f(\pi) + f'(\pi)(x-\pi) + \frac{f''(\pi)}{2}(x-\pi)^2 + \frac{f'''(\pi)}{3\,!}(x-\pi)^3 \,.$$

   Como
$$\begin{array}{rcl} f(\pi) & = & \pi \\ f'(\pi) & = & \cos x + 1|_{x=\pi} \\ & = & 0 \\ f''(\pi) & = & -\operatorname{sen} x|_{x=\pi} \\ & = & 0 \\ f'''(\pi) & = & -\cos x|_{x=\pi} \\ & = & 1 \end{array}$$

   vem que
$$p_3(x) = \pi + \frac{1}{6}(x-\pi)^3 \,.$$

Exemplo 3.6.

1. Consideremos a função f definida por $f(x) = \sqrt{x+1}$, para todo o $x \geq -1$.

   Vamos determinar o polinómio de Mac-Laurin de ordem dois da função f e utilizar este polinómio para obter um valor aproximado de $\sqrt{2}$.

   Temos
   $$p_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 .$$

   Como $f(0) = 1$,
   $$f'(0) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}\Big|_{x=0} = \frac{1}{2} ,$$

   e
   $$f''(0) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}\Big|_{x=0} = -\frac{1}{4}$$

   temos
   $$p_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 .$$

   Uma vez que $\sqrt{2} = f(1)$ obtém-se
   $$\sqrt{2} \cong p_2(1) = \frac{11}{8} .$$

A Fórmula de Taylor de ordem n, a Série de Taylor e a majoração do erro são assuntos abordados em Cálculo II C.

Em Cálculo I C, como indicado no plano de aulas e competências, precisa apenas saber aplicar a fórmula:

- com n=1 para obter a aproximação linear
- com n=2 num ponto crítico no estudo de extremos

Exemplo: aproximação linear de exp(0,1)

$f(x) = e^x$, $a = 0$

$$\boxed{f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h}$$

$$e^{0,1} = f(0,1) = f(\underbrace{0}_{a} + \underbrace{0,1}_{h}) \approx f(0) + f'(0)h =$$

$1 + 1 \times 0,1 = 1,1.$

$(e^{0,1} = 1,105\ldots)$

Exemplo: aproximação linear de cos(7pi/12) , $a = \frac{6\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$

$f(x) = \cos x$, $f'(x) = -\sin x$

$f(a) = 0$, $f'(a) = -1$

$$\underbrace{\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)}_{} = f\left(\frac{7\pi}{12}\right) = f\left(\underbrace{\frac{6\pi}{12}}_{a} + \underbrace{\frac{\pi}{12}}_{h}\right) \approx f(a) + f'(a)h$$

$\|$

$-0,2588\ldots$

$\|$

$0 - \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{12}$

$\|$

$-0,26\ldots$

Exemplo: f(x) = x sin(x) em 0

$f'(x) = \sin x + x \cos x$

$f''(x) = \cos x + \cos x - x \sin x$

$= 2\cos x - x \sin x$

$f(0) = 0$

$f'(0) = 0$

$f''(0) = 2$

$$f(0+h) = f(0) + f'(0)\,h + \frac{f''(0)}{2!}h^2 + R(h)$$

$$f(0+h) = f(0) + h^2 + R(h)$$

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h^2} = 1 + \frac{R(h)}{h^2}$$

Exemplo: f(x)=cosh(x) em 0

$$\cosh(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

$$f'(x) = \sinh(x)$$

$$f''(x) = \cosh(x)$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(0) = 1$$

$$f(0+h) = f(0) + \underbrace{f'(0)h}_{=0} + \frac{f''(0)}{2}h^2 + R(h)$$