Matemática Discreta 2023/2024

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Sumário 1

Apresentação da UC.

Capítulo 1: A lógica de primeira ordem e demonstração automática

Proposições, conectivos, formulas;

Valoração; tabelas de verdade; tautologia, contingência, contradição.

Equivalentes lógicos.

Docentes

- António Jorge Monteiro Neves, Gab. 11.3.9, jorgeneves@ua.pt
- Maria Elisa Carrancho Fernandes, Gab. 11.3.44, maria.elisa@ua.pt
- Paula Cristina Roque da Silva Rama, Gab. 11.3.31, prama@ua.pt
- Alexandre Leite de Castro Madeira, Gab. 11.3.17, madeira@ua.pt
- Nelson José Rodrigues Faustino, Gab. 11.2.14, nfaust@ua.pt

6 Orientação Tutorial (OT)

6.1 Aulas OT

As aulas **OT (Orientação Tutorial)** funcionam nos seguintes horários:

- **OT1/OT2**: Segundas, 18h-19h, Sala 11.1.30;
- **OT3**: Terças, 19h-20h, Sala 11.1.31;
- **OT4/OT5**: Quintas, 18h-19h, Sala 11.1.28;

Nota importante:

Os alunos devem **avisar o respetivo docente (por email) se tencionam frequentar a aula OT**, até **às 14h do mesmo dia**.

9 Avaliação

9.1 Avaliação Discreta (AD)

Inicialmente, no PACO todos os alunos estão associados à **AD**, a qual inclui quatro elementos de avaliação, **MiniTeste 1 (MT1), Teste 1 (T1), MiniTeste 2 (MT2), Teste 2 (T2)**, tendo como objetivo motivar a aprendizagem dos estudantes de forma faseada por tópicos da matéria, avaliando-a de acordo com a seguinte calendarização:

- **MT1 (10%):** nas aulas **de 11 a 15 de março**, avaliando tópicos de **1LPO**;
- **T1 (40%): 12 de abril (sexta-feira, 16h30m)**, sobre **1LPO, 2PEC, 3AIC**;
- **MT2 (10%):** nas aulas **de 13 a 17 de maio**, sobre **4RFG**;
- **T2 (40%):** na data da época normal de exames (11 a 24 de junho) a fixar pelo Conselho Pedagógico, avaliando tópicos de **4RFG e 5ETG**;

Classificação Final de AD (NAD)

A nota **NAD** será o arredondamento às unidades do valor calculado pela fórmula:

$$\mathbf{NAD} = \max(\mathbf{NCMT}, \mathbf{NSMT}),$$

onde

$$\mathbf{NCMT} = \mathbf{0.1\ MT1 + 0.4\ T1 + 0.1\ MT2 + 0.4\ T2}$$

$$\mathbf{NSMT} = \mathbf{0.5\ T1 + 0.5\ T2}$$

Programa

1. Lógica de primeira ordem e demonstração automática
2. Princípios de enumeração combinatória
3. Agrupamentos e Identidades Combinatórias
4. Recorrência e Funções Geradoras
5. Elementos de Teoria dos Grafos

Capítulo 1

Lógica de Primeira Ordem e Demonstração Automática

1.1 Elementos da Lógica Proposicional

Fórmulas

Na lógica proposicional, uma **proposição** é uma afirmação que apenas toma o valor verdadeiro ou falso, mas não os dois ao mesmo tempo. Temos então alguns exemplos de proposições:

- Um número primo ímpar p é soma de dois quadrados se e só se p tem o resto 1 na divisão por 4.
- $\sqrt{2}$ é um número racional.
- $1 + 1 = 3$ e 11 é um número primo.

A partir deste momento, podemos fazer a distinção entre dois tipos de proposições:

- **atómicas**: proposições onde o valor de verdade é dado pelo contexto ou escolhido livremente.
- **compostas**: proposições compostas por outras proposições, ligadas pelos conectivos, onde o valor de verdade depende do valor de verdade das componentes.

- $\wedge$ representará a **conjunção** (« ... e ... »);
- $\vee$ representará a **disjunção** (« ... ou ... »);
- $\neg$ representará a **negação** (« não ... »);
- $\to$ representará a **implicação** ou **condicional** (« Se ... então ... »);
- $\leftrightarrow$ representará a **dupla implicação** ou **equivalência** (« ... se e só se ... »).

- « . . . mas . . . » pode ser substituido por « . . . e . . . »;
- « . . . só se . . . » pode ser substituido por « . . . implica . . . » ou « Se . . . então . . . »;
- « . . . excepto se . . . » pode ser substituido por « . . . ou . . . ».

A Maria foi à praia mas não foi tomar banho no mar.

A Maria vai à praia só se o tempo melhorar.

A Maria vai à praia excepto se começar a chover.

Uma **fórmula (bem formada)** é uma sequência finita de símbolos de um determinado alfabeto que é parte de uma linguagem formal. No caso da lógica proposicional, as fórmulas (bem formadas) são ditas **fórmulas proposicionais** e o alfabeto a considerar é composto pelos símbolos relativos aos conectivos $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \leftrightarrow, \bot, \top$ e uma escolha de variáveis proposicionais (diferentes destes símbolos), tipicamente denotados por $p, q, r, \ldots$. As fórmulas proposicionais podem então ser definidas recursivamente de acordo com as regras que abaixo se apresentam:

1. cada variável é uma fórmula e $\bot$ and $\top$ são fórmulas.

2. Se φ e ψ são fórmulas, então as expressões

$$(\neg\psi), \quad (\varphi \wedge \psi), \quad (\varphi \vee \psi), \quad (\varphi \rightarrow \psi), \quad (\varphi \leftrightarrow \psi)$$

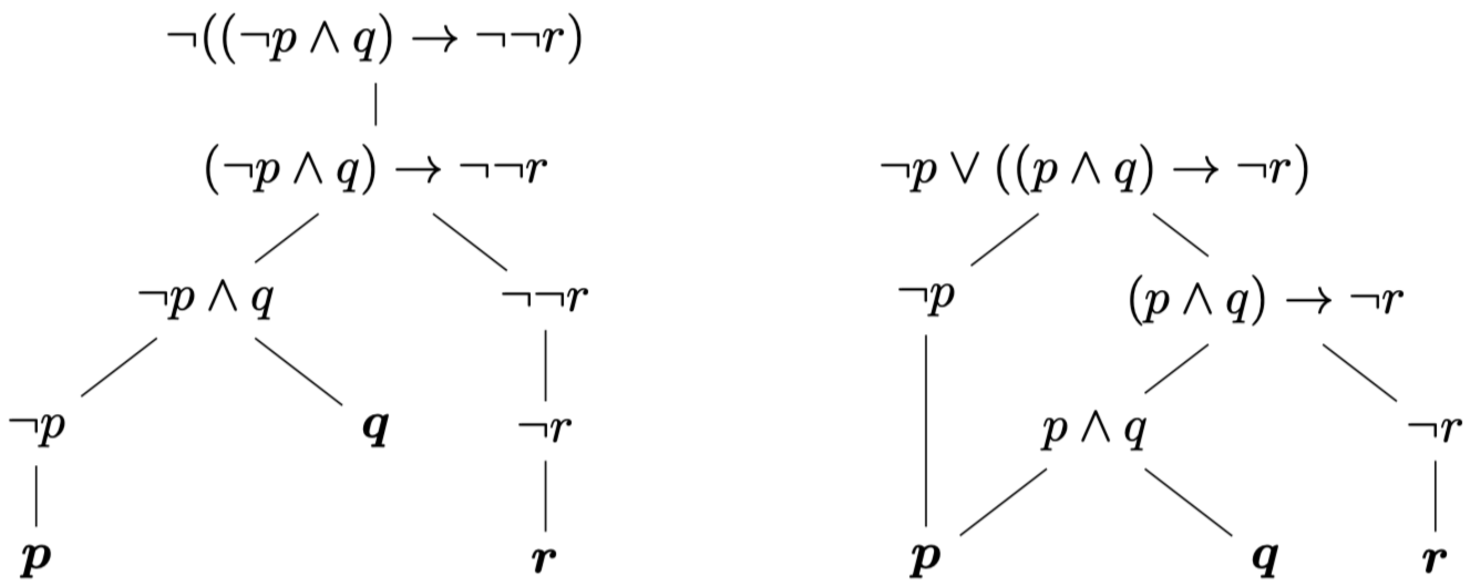
são fórmulas.

Exemplo 1.1.4. Se considerarmos p, q e r três variáveis, podemos ter os seguintes exemplos de fórmulas:

- $\bot,\ \top,\ p,\ q,\ r, \ldots$
- $p \vee q,\ p \to \bot,\ \neg\bot, \ldots$
- $(p \wedge q) \leftrightarrow q,\ (p \to q) \to (p \vee q), \ldots$
- $(p \wedge q) \to ((p \vee q) \to q), \ldots$

No entanto, se considerarmos o mesmo conjunto de variáveis, as sequências $(\bot\top)$, (pqr), $p\neg$, $p \leftrightarrow \vee$, $(\top \to)$, $(p \wedge q) \to r)$ ou $(p\wedge \to q)$ não são fórmulas.

Exemplo 1.1.5. As expressões $\neg((\neg p \wedge q) \to \neg\neg r)$ e $\neg p \vee ((p \wedge q) \to \neg r)$ são fórmulas. Efectivamente, se considerarmos as variáveis p, q, r, podemos seguir as árvores de construcção ilustradas abaixo.



Folha 0

1. Sejam p, q, r variáveis que representam as proposições

   p: *Sou responsável*;

   q: *Passo a Matemática Discreta*;

   r: *Vou de férias para as Bermudas.*

   Traduza as frases seguintes por meio de fórmulas proposicionais.

   a) Se passar a Matemática Discreta, vou de férias para as Bermudas.

   b) Para ir de férias para as Bermudas é suficiente que eu seja responsável.

   c) Passo a Matemática Discreta só se for responsável.

   d) Para passar a Matemática Discreta é necessário que eu seja responsável.

   e) Se passar a Matemática Discreta então vou de férias para as Bermudas caso seja responsável.

Semântica, Validade e Equivalência

Definição 1.1.6. Uma **valoração** (ou **interpretação**) de um conjunto V de variáveis proposicionais é uma função $v\colon V \to \{0,1\}$, onde 0 representa o valor lógico «falso» e 1 representa o valor lógico «verdadeiro».

Nota 1.1.8. Como visto anteriormente, os símbolos $\perp$ e $\top$ representam proposições atómicas especiais. Para qualquer valoração v, vamos convencionar $v(\top) = 1$ e $v(\perp) = 0$.

- se tivermos uma valoração $v\colon V \to \{0,1\}$, onde $V = \{p,q,r\}$, tal que $p, r \mapsto 1$ e $q \mapsto 0$, qual será o valor de verdade da seguinte fórmula?

$$((p \to (q \wedge r)) \leftrightarrow (\neg p \vee q))$$

tabela de verdade

φ	$\neg\varphi$
0	1
1	0

φ	ψ	$\varphi \land \psi$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

φ	ψ	$\varphi \to \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$v(\bot) = 0$$
$$v(\top) = 1$$
$$v(\varphi \wedge \psi) = v(\varphi) \wedge v(\psi)$$
$$v(\varphi \vee \psi) = v(\varphi) \vee v(\psi)$$
$$v(\varphi \rightarrow \psi) = v(\varphi) \rightarrow v(\psi)$$
$$v(\varphi \leftrightarrow \psi) = v(\varphi) \leftrightarrow v(\psi)$$
$$v(\neg\varphi) = \neg v(\varphi)$$

Exemplo 1.1.10. Suponhamos que $V = \{p, q\}$ e que temos uma valoração $v\colon V \to \{0, 1\}$ tal que $p \mapsto 1$ e $q \mapsto 0$. Então,

$$v(\neg p \rightarrow (p \vee q)) = ?$$

Definição 1.1.12. Uma fórmula diz-se:

- uma **tautologia** (ou **fórmula válida**) quando tiver o valor lógico 1 para <u>cada</u> interpretação;
- uma **contingência** (ou **fórmula consistente**) se existir uma interpretação com valor lógico 1;
- uma **contradição** (ou **inconsistência**) quando não for uma consistência, ou seja, quando tiver valor lógico 0 para <u>cada</u> interpretação.

Exemplo 1.1.13. As fórmulas $(p \wedge q) \to q$ e $(p \wedge q) \to p$ são tautologias.

Definição 1.1.14. As fórmulas φ e ψ dizem-se **equivalentes lógicas** ($\varphi \equiv \psi$) quando φ e ψ tem o mesmo valor lógico, para cada valoração.

Nota 1.1.15. $\varphi \equiv \psi$ se e só se a fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

Exemplo 1.1.16. Temos que $(\neg p \vee q) \equiv (p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p)$.

Exemplo 1.1.17. Dadas três variáveis proposicionais p, q, r e as fórmulas $\varphi = p \wedge (q \vee r)$ e $\psi = (p \wedge q) \vee r$, verifica-se que $\varphi \not\equiv \psi$.

Tautologias

$$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$$

$$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$$

$$((p \wedge q) \wedge r) \equiv (p \wedge (q \wedge r))$$

$$((p \vee q) \vee r) \equiv (p \vee (q \vee r))$$

$$(p \wedge p) \equiv p$$

$$(p \vee p) \equiv p$$

$$(p \wedge \top) \equiv p$$

$$(p \vee \bot) \equiv p$$

$$(p \wedge \bot) \equiv \bot$$

$$(p \vee \top) \equiv \top$$

$$(p \wedge (q \vee r)) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$(p \vee (q \wedge r)) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$$

$$\neg\neg p \equiv p$$

Leis de De Morgan

Exemplo 1.1.18. Consideremos as variáveis proposicionais p, q, r e uma fórmula φ, unicamente dependente destas. Apresentamos abaixo a tabela de verdade relativa a φ.

p	q	r	φ
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$\varphi = ?$

Sumário 2

- Formas normais.
- Conjuntos de fórmulas consistentes.
- Consequência semântica.
- Dedução.
- O método de resolução (lógica proposicional)

Formas Normais

Definição 1.1.19. Uma fórmula φ é dita um **literal** se φ for uma variável ou a negação de uma variável.

Teorema 1.1.20. *Para cada $j \in J$ (com J um subconjunto de índices), seja L_j um literal. Então, são equivalentes as seguintes afirmações:*

i) $\bigvee_{j \in J} L_j$ *é uma tautologia.*

ii) $\bigwedge_{j \in J} L_j$ *é uma contradição.*

iii) *Existem índices distintos $j_1, j_2 \in J$ tais que $L_{j_1} = \neg L_{j_2}$.*

Definição 1.1.21. Dizemos que a fórmula φ está na **forma normal conjuntiva** (**FNC**) quando $\varphi = \bigwedge_{i \in I} \varphi_i$ (para algum conjunto de índices I) e onde cada φ_i é da forma $\bigvee_{j \in J} L_j$ (para algum conjunto de índices J), com L_j literais. Nestas circunstâncias, diremos que as componentes φ_i serão $\vee$-**cláusulas**.

Nota 1.1.22. Muitas das vezes, consideramos ainda a forma normal conjuntiva dual, a **forma normal disjuntiva** (**FND**). Neste caso, uma fórmula φ estará nessa forma quando $\varphi = \bigvee_{i \in I} \varphi_i$, onde cada φ_i da forma $\bigwedge_{j \in J} L_j$, com L_j literais.

Exemplo 1.1.23. Consideremos as variáveis proposicionais p, q, r.

- $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge \neg r$ é uma FNC.
- $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee \neg r$ é uma FND.
- $p \wedge q \wedge r$ é uma FNC e uma FND.
- $(p \wedge (q \vee r)) \vee q$ não é nem FNC, nem FND.

Teorema 1.1.25. *Toda a fórmula da lógica proposicional é equivalente a uma fórmula na FNC (FND).*

Teorema 1.1.26. *Uma fórmula na FNC é uma tautologia se e só se cada uma das suas clausulas for uma tautologia. Dualmente, uma fórmula na FND é uma contradição se e só se cada uma das suas clausulas for uma contradição.*

Folha 0

2. Usando tautologias apropriadas, transforme as seguintes fórmulas na forma normal conjuntiva.

a) $p \vee (q \wedge (\neg p))$;

b) $\neg((\neg p) \wedge (\neg q))$;

c) $(p \wedge q) \vee (p \wedge (\neg q))$.

d) $(q \wedge \neg p \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q)$.

Definição 1.1.29. Um conjunto de fórmulas $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ dir-se-á **consistente** quando existir uma interpretação que é modelo de todas as fórmulas em $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, i.e., se existir uma interpretação de tal forma a que todas as fórmulas do conjunto sejam verdadeiras.

Exemplo 1.1.30. Consideremos as variáveis proposicionais p, q e um conjunto de fórmulas $\Gamma = \{\neg p, p \to q, q\}$. Rapidamente conseguimos ver que Γ é consistente: basta considerar a valoração tal que $p \mapsto 0$ e $q \mapsto 1$.

Definição 1.1.32. Uma fórmula ψ diz-se **consequência semântica** (ou **consequência lógica**) das fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ quando, para toda a valoração, se $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ têm valor 1, então ψ tem valor 1. Neste caso, escrevemos $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$.

Exemplo 1.1.33. Vamos verificar que $q \vee \neg p$ é consequência de $p \vee q$ e $p \to q$, ou seja, que $p \vee q, p \to q \vDash q \vee \neg p$.

Teorema 1.1.34. *Dadas fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ e ψ, temos que $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$ se e só se $((\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \to \psi)$ for uma tautologia.*

regras de inferência

$$\frac{\varphi \qquad \psi}{\varphi \wedge \psi}\,(\wedge\mathcal{I}) \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\,(\wedge\mathcal{E}_1) \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\,(\wedge\mathcal{E}_2)$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\,(\vee\mathcal{I}_1) \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\,(\vee\mathcal{I}_2) \qquad \frac{\varphi \vee \psi \qquad \boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \theta\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\\ \theta\end{array}}}{\theta}\,(\vee\mathcal{E})$$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}}{\varphi \to \psi}\,(\to \mathcal{I}) \qquad \frac{\varphi \qquad \varphi \to \psi}{\psi}\,(\to \mathcal{E})$$

$$\frac{\perp}{\varphi}\,(\perp\mathcal{E}) \qquad \frac{}{\varphi \vee \neg\varphi}\,(\mathrm{EM})$$

Definição 1.1.36. Uma fórmula ψ diz-se **consequência sintáctica** das fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ se, a partir destas, existir uma **prova** (**dedução**) de ψ (por aplicação das regras de inferência anteriormente introduzidas). Neste caso, escrevemos $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$.

Teorema 1.1.39 (Correção). *Toda a consequência sintática do cálculo proposicional é também uma consequência semântica.*

Teorema 1.1.40 (Completude). *Toda a consequência semântica do cálculo proposicional é também uma consequência sintáctica.*

Teorema 1.1.42. *Seja* ψ *uma fórmula e* Γ *um conjunto de fórmulas. Então* $\Gamma \vDash \psi$ *se e só se* $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ *é inconsistente.*

regra de resolução:

$$\boxed{\dfrac{\neg\psi \vee \theta \qquad \psi \vee \varphi}{\theta \vee \varphi}\,(\mathrm{Res})}$$

Em particular, se tivermos $\theta = \bot$ e $\theta = \varphi = \bot$, conseguimos derivar, respectivamente

$$\boxed{\dfrac{\neg\psi \qquad \psi \vee \varphi}{\varphi}} \quad \text{e} \quad \boxed{\dfrac{\neg\psi \qquad \psi}{\bot}}$$

Teorema 1.1.43. *Para cláusulas* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, *o conjunto* $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ *é inconsistente se e só se* $\Gamma \vdash \bot$.

Nota 1.1.45. Para verificar se $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$ devemos:

1. converter as fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ na FNC.

2. negar a fórmula ψ e converter $\neg\psi$ na FNC.

3. aplicar a regra de resolução às cláusulas obtidas acima até:
   - obter $\perp$;
   - não conseguirmos aplicar a regra de resolução (sem obter $\perp$).

Exemplo 1.1.46. Vamos verificar $p \to q, q \to r \vDash p \to r$.

Exemplo 1.1.47. Será que $p, p \to q, \neg(r \wedge \neg q) \models r$?

Sumário 3

- Resolução de exercícios de aplicação do método de resolução.
- Alfabeto de 1ª ordem: variáveis, símbolos, quantificares, predicados e funções.
- Termos.
- Alcance de um quantificado; variáveis livres e ligadas.
- Tradução de formulas para a linguagem corrente e vice-versa.

Folha 0

3. Utilizando o método de resolução, justifique que

   a) $p,\ p \to q \models q$;

   b) $p \vee q,\ p \to r,\ q \to r \models r$.

4. Utilizando o método de resolução, verifique a correção de cada uma das seguintes deduções:

   a) Chove se e só se levo guarda-chuva. Hoje não levo guarda-chuva. Logo, hoje não chove.

   b) Chove se levo guarda-chuva. Hoje não levo guarda-chuva. Logo, hoje não chove.

   c) Se o mordomo cometeu o crime, então ele vai estar nervoso quando interrogado. O mordomo estava nervoso quando interrogado. Logo, o mordomo cometeu o crime.

   d) r é uma condição suficiente para q. Além disso, verifica-se r ou a negação de p. Logo, se q não for verdadeiro, não se verifica p.

   e) De $\neg(p \vee q)$ deduz-se $\neg p$.

1.2 Sintaxe e Semântica de lógica de primeira ordem

$$\forall x \forall y\ ((\mathrm{par}(x) \wedge \mathrm{par}(y)) \to \mathrm{par}(x+y))$$

$$\forall x\ (\mathrm{gato}(x) \to \mathrm{garras}(x))$$

Definição 1.2.1. Um **alfabeto de 1ª ordem** consiste:

1. numa colecção de **variáveis**;
2. nos **símbolos** «$\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, \neg, \top, \bot$» da lógica proposicional;
3. nos **quantificadores**: os símbolos «$\exists$» (existe) e «$\forall$» (para todos);
4. no símbolo de **igualdade** «$=$».

Além dos pontos expostos acima, e dependendo do contexto, podemos ainda ter:

- uma coleção de **símbolos de constantes**;
- uma coleção de **símbolos de função** (cada símbolo de função tem uma **aridade** $n \in \mathbb{N}$ — o número de argumentos);
- uma coleção de **símbolos de predicado** (ou **relação**) (cada símbolo de predicado tem uma **aridade** $n \in \mathbb{N}$ — o número de argumentos);

Definição 1.2.3. Vamos introduzir o conceito de **termo** de forma recursiva:

- cada variável e cada símbolo de constante são termos;
- se f é um símbolo de função de aridade n e se $t_1, \ldots, t_n$ são termos, então $f(t_1, \ldots, t_n)$ também é um termo.

Exemplo 1.2.4. Consideremos uma linguagem com as variáveis x, y, z, um símbolo constante a, um símbolo de função unária i e um símbolo de função binária m. Então, as seguintes expressões são termos:

- x, y, z, a;
- $i(a), i(x), m(z, y), m(a, z), \ldots$;
- $m(i(x), x), i(m(z, a)), m(m(a, y), i(x)), \ldots$.

Definição 1.2.5. Da mesma forma que fizemos para os termos, vamos agora introduzir, recursivamente, o conceito de **fórmula**. Comecemos com os **átomos** (ou **fórmulas atómicas**):

- $P(t_1, \ldots, t_n)$ é um átomo, onde P é um símbolo de predicado com n argumentos e $t_1, \ldots, t_n$ são termos;
- $t_1 = t_2$ é um átomo, onde t_1, t_2 são termos;
- $\perp$ e $\top$ são átomos;

A partir daqui, e considerando os átomos como «elementos primitivos», podemos construir recursivamente as fórmulas a partir dos conectivos lógicos e dos quantificadores apresentados anteriormente:

- se φ e ψ são fórmulas, então

$$(\varphi \wedge \psi), \quad (\varphi \vee \psi), \quad (\varphi \to \psi), \quad (\neg \varphi), \quad \perp, \quad \top,$$

  são fórmulas;
- se φ é uma fórmula e x é uma variável, então $\forall x\, \varphi$ e $\exists x\, \varphi$ são fórmulas.

Exemplo 1.2.6.

$$\underbrace{\forall x, y, z \ \underbrace{\overbrace{(x < y)}^{\text{fórmula}} \rightarrow \overbrace{(\underbrace{x + z}_{\text{termo}} < \underbrace{y + z}_{\text{termo}})}^{\text{fórmula}}}_{\text{fórmula}}}_{\text{fórmula}}$$

Nota 1.2.7. Nas fórmulas da forma $\forall x \varphi$ (resp. $\exists x \varphi$), dizemos que a fórmula φ é o **alcance do quantificador** $\forall$ (resp. $\exists$).

Exemplo 1.2.8. No que se segue, gato e garras são símbolos de função unária e a é um símbolo de constante.

- $\forall x\ (\mathrm{gato}(x) \to \mathrm{garras}(x))$
- $(\forall x\ \exists y\ x < y) \wedge (a < x)$
- $\forall x\ \exists y\ (x < y \wedge a < x)$

o alcance de «∀» / alcance de «∃»

Definição 1.2.9. A ocorrência de uma variável numa fórmula diz-se **ligada** se esta estiver dentro do alcance de um quantificador utilizado para essa mesma variável. Por outro lado, a ocorrência de uma variável dir-se-á **livre** se não for ligada.

Nota 1.2.10. Uma variável numa fórmula φ dir-se-á livre quando ocorrer pelo menos uma vez livre em φ. Adicionalmente, diremos que φ é **fechada** quando esta não tiver variáveis livres.

Folha 1

1. Indique quais as ocorrências livres e ligadas de cada uma das variáveis das seguintes fórmulas:

   a) $\exists y\, P(x, y)$

   b) $(\forall x\, (P(x) \to Q(x))) \to (\neg(P(x)) \vee Q(y))$

   c) $\exists x\, (P(y, z) \wedge \forall y(\neg Q(x, y) \vee P(y, z)))$;

   d) $P(a, f(a, b))$;

   e) $\exists x\, (P(x) \to \neg Q(x))$;

   f) $\forall x\, ((P(x) \wedge C(x)) \to \exists y L(x, y))$.

NOTA. x, y, z, a, b são variáveis.

2. Exprima por meio de fórmulas bem formadas as seguintes afirmações:

a) Todas as aves têm penas.

b) Todas as crianças são mais novas que os seus pais.

c) Todos os insectos são mais leves do que algum mamífero.

d) Nenhum número é menor do que zero.

e) Zero é menor do que qualquer número.

f) Alguns números primos não são pares.

g) Todo o número par é número primo.

3. No que se segue, $c(x)$, $s(x)$ e $d(x)$ representam as afirmações «x é uma explicação clara», «x é satisfatória» e «x é uma desculpa», respectivamente. Admita que o universo do discurso para x é o conjunto de todos os textos em Português. Traduza as seguintes fórmulas bem formadas para linguagem comum:

a) $\forall x \; c(x) \to s(x)$;

b) $\exists x \; d(x) \;\wedge\; \neg\, s(x)$;

c) $\exists x \; d(x) \;\wedge\; \neg\, c(x)$.

Sumário 4

- Estrutura, valoração, interpretação e modelo.
- Validade de uma formula
- Formas normais
- Forma normal prenex

O que significa, por exemplo, a fórmula $x = c$?

Definição 1.2.12. Uma **estrutura** $\mathcal{M}$ para um alfabeto de 1ª ordem consiste num conjunto D (domínio) onde:

- a cada símbolo de constante a, associamos um **elemento** $a^{\mathcal{M}} \in D$;
- a cada símbolo de função f (de aridade n), associamos uma **função** $f^{\mathcal{M}}: D^n \to D$;
- a cada símbolo de predicado P (de aridade n), associamos um **subconjunto** $P^{\mathcal{M}} \subseteq D^n$.

Definição 1.2.13. Dada uma estrutura $\mathcal{M}$, uma **valoração** v em $\mathcal{M}$ associará a cada variável x um elemento $v(x) \in D$. Adicionalmente, designamos o par $(\mathcal{M}, v)$ por **interpretação**.

Dada agora uma interpretação $(\mathcal{M}, v)$ de uma linguagem, é comum definirmos (de forma recursiva - à semelhança da lógica proposicional) a interpretação dos termos:

$$v(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(v(t_1), \ldots, v(t_n)) \in D.$$

Exemplo 1.2.14. Consideremos a linguagem com um símbolo de função binária f e um símbolo de constante a. Para a interpretação $(\mathcal{M}, v)$, com $D = \mathbb{Z}$ e

$$f^{\mathcal{M}} \colon D^2 \to D \quad \text{tal que} \quad (n, m) \mapsto |n| - |m|, \quad a^{\mathcal{M}} = 0, \quad v(x) = -2 \quad \text{e} \quad v(y) = 1,$$

temos:

- $v(f(f(x, a), f(y, f(x, a)))) =$?

O que significa, por exemplo, a fórmula $x = c$?

Nota 1.2.17. Dizer que uma dada fórmula φ é **válida** numa interpretação $(\mathcal{M}, v)$ é o mesmo que dizer que $(\mathcal{M}, v)$ é um **modelo** para φ. Usualmente, denotamos esta relação por $(\mathcal{M}, v) \vDash \varphi$.

O que significa, por exemplo, a fórmula $\exists x\ x = c$?

$$v^{\frac{x}{a}}(y) = \begin{cases} v(y), & \text{se } y \text{ é diferente de } x, \\ a, & \text{se } y \text{ é igual a } x. \end{cases}$$

Definição 1.2.16. Dada uma interpretação $(\mathcal{M}, v)$ de um alfabeto de $1^{\underline{a}}$ ordem, definimos recursivamente o conceito de **validade** de uma fórmula em $(\mathcal{M}, v)$ da seguinte forma:

- $(\mathcal{M}, v) \vDash t_1 = t_2$ quando $v(t_1) = v(t_2)$;
- $(\mathcal{M}, v) \vDash P(t_1, \ldots, t_n)$ quando $(v(t_1), \ldots, v(t_n)) \in P$;
- $(\mathcal{M}, v) \vDash \top$ e **não** $(\mathcal{M}, v) \vDash \bot$;
- $(\mathcal{M}, v) \vDash (\varphi \wedge \psi)$ quando $(\mathcal{M}, v) \vDash \varphi$ e $(\mathcal{M}, v) \vDash \psi$;
- $(\mathcal{M}, v) \vDash (\varphi \vee \psi)$ quando $(\mathcal{M}, v) \vDash \varphi$ ou $(\mathcal{M}, v) \vDash \psi$;
- $(\mathcal{M}, v) \vDash (\varphi \to \psi)$ quando $(\mathcal{M}, v) \vDash \varphi$ implicar $(\mathcal{M}, v) \vDash \psi$;
- $(\mathcal{M}, v) \vDash \exists x\ \varphi$ quando, para algum $a \in D$, $(\mathcal{M}, v^{\frac{x}{a}}) \vDash \varphi$;
- $(\mathcal{M}, v) \vDash \forall x\ \varphi$ quando, para todo o $a \in D$, $(\mathcal{M}, v^{\frac{x}{a}}) \vDash \varphi$.

Exercício: Sejam $\mathscr{M}$ uma estrutura com

• $D = \{1,2,3\}$; $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,3), (3,2)\}$; $S = \{1,3\}$

e v uma valorarão com $v(x) = 3$ e $v(y) = 2$.

Verifique a validade das seguintes fórmulas:

(a) $R(x, y)$ (b) $S(y)$ (c) $\forall y\ (S(x) \wedge R(x, y))$ (d) $\exists x \forall y (S(x) \wedge R(x, y))$

Folha 1

9. Considere um universo X com os objetos A, B e C (isto é, X=$\{A, B, C\}$) e uma linguagem onde α, β e γ são símbolos de constante, f é um símbolo de função com um argumento e R é um símbolo de predicado com dois argumentos. Considere a seguinte interpretação:

símbolos de constante: $\alpha \mapsto A$, $\beta \mapsto A$ e $\gamma \mapsto B$;

símbolo de função f: $f(A) = B$, $f(B) = C$, $f(C) = C$.

símbolo de predicado R: $\{(B, A), (C, B), (C, C)\}$.

Com esta interpretação, avalie as seguintes fórmulas:

a) $R(\alpha, \beta)$;

b) $\exists x\ f(x) = \beta$;

c) $\forall w\ R(f(w), w)$.

Definição 1.2.22. Uma fórmula diz-se:

- uma **tautologia** (ou **fórmula válida**) quando for válida para qualquer interpretação;
- uma **contingência** (ou **fórmula consistente**) se existir uma interpretação para a qual seja válida;
- uma **contradição** (ou **inconsistência**) quando não for uma consistência, ou seja, quando for inválida para qualquer interpretação.

Definição 1.2.24. Duas fórmulas φ e ψ dizem-se **equivalentes** ($\varphi \equiv \psi$) quando $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

Definição 1.2.25. Uma fórmula ψ diz-se **consequência semântica** (ou **consequência lógica**) das fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ quando, para toda a interpretação $(\mathcal{M}, v)$, se $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ são válidas em $(\mathcal{M}, v)$, então ψ é válida em $(\mathcal{M}, v)$. Neste caso, escrevemos $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$.

Exemplo 1.2.27. O nosso objectivo será fazer a dedução de

$$\frac{\text{Todos os gatos têm garras} \qquad \text{Tom é um gato}}{\text{Tom tem garras}}$$

1.3 Formas Normais

Definição 1.3.1. Na lógica de 1ª ordem, uma fórmula φ é dita um **literal** se for um átomo ou uma negação de um átomo.

- φ está na FNC se $\varphi = \bigwedge_{i\in I} \varphi_i$, onde cada $\varphi_i = \bigvee_{j\in J} L_j$ e cada L_j é um literal;

Definição 1.3.2. Uma fórmula da forma $Qx_1 \cdots Qx_n\ \varphi$, onde φ é uma fórmula sem quantificadores e Q denota «$\exists$» ou «$\forall$» diz-se na **forma normal prenex** (**FNP**).

Nota 1.3.3. Relativamente a uma fórmula $Qx_1 \cdots Qx_n\ \varphi$ na FNP, é comum designamos a parte inicial («$Qx_1 \cdots Qx_n$») por **prefixo** e «φ» por **matriz** da fórmula.

É agora absolutamente legítimo perguntarmos de que forma podemos obter/transformar uma dada fórmula na sua FNP.

- Mover as negações («$\neg$») para o interior das fórmulas:

$$\boxed{\neg\forall x\ \varphi \equiv \exists x\ \neg\varphi} \quad \text{e} \quad \boxed{\neg\exists x\ \varphi \equiv \forall x\ \neg\varphi}$$

- Mover os quantificadores para o exterior das fórmulas:
  - $(\forall x\ \varphi) \wedge (\forall x\ \psi) \equiv \forall x\ (\varphi \wedge \psi)$;
  - $(\exists x\ \varphi) \vee (\exists x\ \psi) \equiv \exists x\ (\varphi \vee \psi)$;
  - supondo que ψ não contém a variável x:

$$(\forall x\ \varphi) \wedge \psi \equiv \forall x\ (\varphi \wedge \psi), \qquad (\exists x\ \varphi) \wedge \psi \equiv \exists x\ (\varphi \wedge \psi),$$
$$(\forall x\ \varphi) \vee \psi \equiv \forall x\ (\varphi \vee \psi), \qquad (\exists x\ \varphi) \vee \psi \equiv \exists x\ (\varphi \vee \psi).$$

Exemplo 1.3.4. Vamos transformar a fórmula $(\forall x\ P(x)) \to (\exists x\ Q(x))$ para a forma normal prenex.

Exemplo 1.3.5. Vamos transformar a fórmula

$$\forall x\, \forall y\, (\exists z (P(x,z) \wedge P(y,z))) \to (\exists u\, Q(x,y,u))$$

para a forma normal prenex.

Folha 1

7. Obtenha, na forma mais simplificada possível, a negação da seguinte fórmula

$$\forall y\, \exists x\ \left(\left(q(x) \to p(y) \right) \vee \left(p(y) \wedge q(x) \right) \right) .$$

Sumário 5

- Forma normal de Skolem.
- Substituição.

Folha 1

11. Transforme as seguintes fórmulas na forma normal disjuntiva prenex e na forma normal conjuntiva prenex:

   a) $(\forall x\, S(x)) \to (\exists z\, P(z))$;

   b) $\neg(\forall x\, (S(x) \to P(x)))$;

   c) $\forall x\, (P(x) \to (\exists y\, Q(x,y)))$;

   d) $\exists x\, (\neg(\exists y\, P(x,y)) \to (\exists z\, (Q(z) \to R(x))))$;

   e) $\forall x\, \exists y\, \exists z\, ((\neg P(x,y) \wedge Q(x,z)) \vee R(x,y,z))$.

Forma Normal de Skolem e Eliminação dos Quantificadores «∃»

Definição 1.3.7. Uma fórmula diz-se na **forma normal de Skolem** (**FNS**) se for uma FNP, estando a matriz na FNC e sendo o prefixo composto apenas por quantificadores universais («∀»).

Exemplo 1.3.10. Vamos aplicar o procedimento descrito anteriormente por forma a obter a FNS da fórmula

$$\exists x\ \forall y\ \forall z\ \exists u\ \forall v\ \exists w\ P(x, y, z, u, v, w).$$

Exemplo 1.3.11. Vamos obter a FNS da fórmula

$$\forall x\ \exists y\ \exists z\ ((\neg P(x, y) \land Q(x, z)) \lor R(x, y, z)).$$

Nota 1.3.9. As funções e constantes utilizadas para substituição das variáveis existentes (no procedimento acima) são ditas **funções de Skolem**.

- no caso $\exists x_1 \; Q_2 x_2 \cdots Q_n x_n \; \varphi$:
  1. escolhemos um novo símbolo de constante (digamos c);
  2. substituimos todas as ocorrências livres de x_1 em $Q_2 x_2 \; \cdots \; Q_n x_n \; \varphi$ por c;
  3. eliminamos $\exists x_1$ do prefixo.
- no caso $\forall x_1 \; \cdots \; \forall x_{k-1} \; \exists x_k \; Q_{k+1} x_{k+1} \; \cdots \; Q_n x_n \; \varphi \; (k > 1)$:
  1. escolhemos um novo símbolo de função (digamos f) de aridade $k - 1$;
  2. substituimos todas as ocorrências livres de x_k em $Q_{k+1} x_{k+1} \; \cdots \; Q_n x_n \; \varphi$ por $f(x_1, \ldots, x_{k-1})$;
  3. eliminamos $\exists x_k$ do prefixo.

Folha 1

12. Encontre a forma standard de Skolem das seguintes fórmulas:

a) $\neg((\forall x\, P(x)) \rightarrow (\exists y\, P(y)))$

b) $\neg((\forall x\, P(x)) \rightarrow (\exists y\, \forall z\, Q(y, z)))$

c) $\forall x\, \exists y\, \exists z\, ((\neg P(x, y) \wedge Q(x, z)) \vee R(x, y, z))$

1.4 Unificação

Substituições

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Term} \arrow[r, "\widehat{\sigma}"] & \mathrm{Term} \\
\mathrm{Vars} \arrow[u, hook] \arrow[ur, "\sigma"'] &
\end{tikzcd}$$

Exemplo 1.4.6. Consideremos o termo $t = s(x, f(y,u), h(x,z))$ e a substituição

$$\theta = \{f(x,z)/x, g(y, f(x,y))/y, h(x,y)/z, v/u\}.$$

Exemplo 1.4.7. Vamos considerar as fórmulas $E_1 = F(x, y, g(z))$ e $E_2 = P(h(x), z, f(y))$ e a substituição $\theta = \{a/x, f(b)/y, c/z\}$.

Folha 1

14. Calcule $E\Theta$ em cada um dos seguintes casos:

a) $\Theta = \{a/x, f(z)/y, g(x)/z\}$, $E = P(h(x), z, f(z))$;

b) $\Theta = \{f(y)/x, a/y\}$, $E = F(a, h(a), x, h(y))$;

Definição 1.4.8. Consideremos duas substituições $\sigma, \theta \colon \mathrm{Vars} \to \mathrm{Term}$. Então, a **composta** de θ após σ é a função $\theta \vartriangle \sigma = \widehat{\theta} \circ \sigma$.

Exemplo 1.4.10. $\theta = \{f(y)/x, z/y, x/u\}$

$$\sigma = \{a/x, g(x)/y, y/z\}$$

Sumário 6

- Unificação.
- Unificador mais geral.
- As regras da dedução: Resolvente binária e Fator. Exemplos.
- O algoritmo de resolução

Unificadores

Definição 1.4.14. Consideremos $\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_n\}$ um conjunto de expressões (termos, fórmulas). Uma substituição $\sigma\colon \text{Vars} \to \text{Term}$ diz-se um **unificador** de $\mathcal{E}$ quando, para todas as expressões $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{E}$, se tiver $E_1\sigma = \cdots = E_n\sigma$.
Adicionalmente, dizemos que o conjunto $\mathcal{E}$ de expressões é **unificável** quando existir um tal unificador.

Exemplo 1.4.15.

- $\mathcal{E} = \{Q(x), Q(a)\}$ é unificável, com $\sigma = \{a/x\}$;
- $\mathcal{E} = \{R(x, y), Q(z)\}$ não é unificável;
- $\mathcal{E} = \{f(x), f(f(z))\}$ é unificável, com $\sigma = \{f(z)/x\}$;
- $\mathcal{E} = \{f(x), f(f(x))\}$ não é unificável;
- $\mathcal{E} = \{Q(a, y), Q(x, f(b))\}$ é unificável, com $\sigma = \{a/x, f(b)/y\}$.

Definição 1.4.16. Seja $\mathcal{E}$ um conjunto de expressões. Um unificador σ de $\mathcal{E}$ é dito **unificador mais geral** (**u.m.g.**) de $\mathcal{E}$ quando, para cada unificador θ de $\mathcal{E}$, existir uma substituição λ tal que

$$\theta = \lambda \vartriangle \sigma,$$

ou seja, que cada unificador de $\mathcal{E}$ se pode descrever como a composição de uma substituição com o unificador mais geral.

Definição 1.4.17. O **conjunto das diferenças**, $\mathcal{D}$, de um conjunto de expressões não vazio, $\mathcal{E}$, obtém-se determinando o primeiro símbolo (a contar da esquerda), no qual nem todas as expressões de $\mathcal{E}$ têm exactamente os mesmos símbolos, extraindo a sub-expressão que começa com o símbolo em causa e ocupa essa posição.

Exemplo 1.4.18. $\mathcal{E} = \{P(a), P(x)\} \quad \mathcal{D} = \{a, x\}$

Algoritmo: Determinação do u.m.g. de um conjunto $\mathcal{E}$ (**Robinson**, 1965).

Entrada: conjunto (finito) de expressões $\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_n\}$;

Resultado: u.m.g. σ_k de $\mathcal{E}$ (caso exista);

$k = 0$, $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$ e $\sigma_0 = \varepsilon$;

repetir até retornar algo

    se $|\mathcal{E}_k| = 1$ **então**

        retorna σ_k;

    fim

    determinar o conjunto $\mathcal{D}_k = \{D_1, \ldots\}$ das diferenças de $\mathcal{E}_k$;

    se existir $p \in \mathrm{Vars}$ e $t \in \mathrm{Term}$ tal que $\{p, t\} \subseteq \mathcal{D}_k$ e p não ocorra em t **então**

        $\sigma_{k+1} = (t/p) \vartriangle \sigma_k$;

        $\mathcal{E}_{k+1} = \mathcal{E}_k(t/p)$;

        $k = k + 1$;

    senão

        retorna «$\mathcal{E}$ não é unificável»;

    fim

Exemplo 1.4.19. Vamos considerar $\mathcal{E} = \{P(y, z), P(x, h(y)), P(a, h(a))\}$, onde x, y, z são variáveis, a é um símbolo de constante, h é um símbolo de função unária e P é um símbolo de predicado binário. Apliquemos então o algoritmo de Robinson para encontrar (caso exista) um u.m.g. para $\mathcal{E}$.

Exemplo 1.4.20. Consideremos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z), P(x, h(y)), P(a, h(a))\}$, onde x, y, z são variáveis, a é um símbolo de constante, h é um símbolo de função unária e P é um símbolo de predicado binário. Vamos aplicar o alg. de Robinson para encontrar (caso exista) um u.m.g. para $\mathcal{E}$.

Folha 1

15. Para cada um dos seguintes conjuntos de fórmulas indique, justificando, se são ou não unificáveis. Em caso afirmativo, encontre um seu unificador mais geral. Tenha em atenção que «a» e «b» denotam constantes.

a) $\{P(f(x), z), P(y, a)\}$;

b) $\{P(f(x), x), P(z, a)\}$;

c) $\{P(a, x, f(g(y))), P(b, h(z, w), f(w))\}$;

d) $\{S(x, y, z), S(u, g(v, v), v)\}$;

e) $\{P(x, x), P(y, f(y))\}$;

f) $\{Q(f(a), g(x)), Q(y, y)\}$;

g) $\{Q(f(x), y), Q(z, g(w))\}$.

1.5 Método da Resolução de Robinson

Definição 1.5.1. Se literais φ e ψ de uma cláusula $C = \varphi \vee \psi \vee \theta \vee \dots$ admitirem um u.m.g. σ, então $(\psi \vee \theta \vee \dots)\sigma$ será dito um **factor** de C.

Exemplo 1.5.2. $C = P(x) \vee P(f(y)) \vee \neg Q(x)$

Definição 1.5.3. Sejam $C_1 = \neg\psi \vee \theta \vee \dots$ e $C_2 = \varphi \vee \gamma \vee \dots$ cláusulas sem variáveis em comum. Se ψ e φ admitirem um u.m.g. σ, então a cláusula

$$(\theta \vee \cdots \vee \gamma \vee \dots)\sigma$$

é dita uma **resolvente binária** de C_1 e C_2.

Exemplo 1.5.4. $C_1 = P(x) \vee Q(x) \qquad C_2 = \neg P(a) \vee R(x)$

Definição 1.5.5. Uma **resolvente** de duas cláusulas C_1 e C_2 é uma resolvente binária de (um factor de) C_1 e de (um factor de) C_2.

Exemplo 1.5.6.

$$C_1 = P(x) \vee P(f(y)) \vee R(g(y))$$

$$C_2 = \neg P(f(g(a))) \vee Q(b)$$

Sumário 7

- O algoritmo de resolução: resolução de exercícios.
- Princípio da Gaiola de Pombos e princípio de Dirichlet.
- Generalização do Princípio da Gaiola de Pombos.

Método de Resolução

Recordemos que verificar $\Gamma \models \psi$, é o mesmo que mostrar que $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ é inconsistente.

- transformar todas as fórmulas na FNS
- «ignorar» os quantificadores $\forall$
- renomear as variáveis em cada cláusula por forma a torná-las distintas
- aplicar sucessivamente as duas regras

$$\frac{\neg\psi \vee \theta \qquad \varphi \vee \gamma}{(\theta \vee \gamma)\ \text{u.m.g.}(\varphi, \psi)}\ (\text{BR}) \qquad \frac{\varphi \vee \psi \vee \theta}{(\varphi \vee \theta)\ \text{u.m.g.}(\varphi, \psi)}\ (\text{Fator})$$

Exemplo 1.5.8

- Ninguém que realmente aprecia Beethoven falha de manter o silêncio durante a sonata *Mondschein* (ao Luar);
- Os porquinhos-da-índia são completamente ignorantes no que diz respeito à música;
- Ninguém que é completamente ignorante no que diz respeito à música consegue manter silêncio durante a sonata *Mondschein* (ao Luar);
- Portanto, os porquinhos-da-índia nunca realmente apreciam Beethoven.

Folha 1

19. Considere as seguintes fórmulas da lógica de primeira ordem:

F1: $\forall x\,(G(x) \rightarrow \forall y(P(y) \rightarrow L(x,y)))$

F2: $\exists x\,G(x)$

F3: $\exists x\,\forall y\,(P(y) \rightarrow L(x,y))$

Usando o princípio da resolução mostre que F3 é consequência de F1 e F2.

Capítulo 2

Princípios de Enumeração Combinatória

2.2 O Princípio da Gaiola dos Pombos

O **princípio da gaiola dos pombos**

se tivermos n pombos para distribuir por m gaiolas, com $n > m$, haverá pelo menos uma gaiola com dois pombos.

De uma maneira matematicamente mais formal, podemos traduzir a ideia da seguinte forma: considerando um conjunto A e $(A_i)_{1\leq i\leq m}$ uma família de subconjuntos de A (dois-a-dois distinta), com $A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$, se $|A| > m$, então $|A_i| > 1$, para algum $1 \leq i \leq m$.

Outra formulação possível prende-se com o conceito de injectividade de uma função: consideremos A, B dois conjuntos e $f\colon A \to B$ uma função; se $|A| > |B|$, então f não poderá ser injectiva (neste caso, a contraposição é mais óbvia: se $f\colon A \to B$ é injectiva, então $|A| \leq |B|$).

Exemplo 2.2.2. Consideremos uma sala com 13 pessoas. Então existirão, pelo menos, duas pessoas a fazer anos no mesmo mês.

Exemplo 2.2.3. Consideremos 50 pessoas numa sala de $7m \times 7m$. Então, haverá duas pessoas que estão a uma distância inferior a $1.5m$.

Folha 2

2. Mostre que num conjunto de cinco números inteiros positivos (arbitrários), existem pelo menos dois com o mesmo valor para o resto da divisão por 4.

princípio de Dirichlet

Teorema 2.2.4. *Para todos os $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, existem números inteiros p e q com $q \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $|q\alpha - p| < \frac{1}{n}$.*

Exemplo 2.2.5. Vamos agora mostrar que, dado um subconjunto de $\{1, \ldots, 2n\}$ com $n+1$ elementos, existirão pelo menos dois elementos distintos x, y nesse subconjunto tais que $x \mid y$ («x divide y») ou $y \mid x$ («y divide x»).

Exemplo 2.2.6. Num torneio em que participam $n \geq 2$ equipas de futebol, todas as equipas jogam uma vez umas com as outras. Vamos mostrar que em cada jornada, pelo menos duas equipas realizaram o mesmo número de jogos até esta jornada.

Sumário 8

- Generalização do Princípio da Gaiola de Pombos.
- O princípio da bijecção.
- O príncipio da adição e o princípio da multiplicação.
- O príncipio da multiplicação generalizada.

Generalização

se temos mais do que mk pombos e m gaiolas, então haverá uma gaiola a ter, no mínimo, $k+1$ pombos

De uma maneira matematicamente mais formal, podemos traduzir a ideia da seguinte forma: considerando um conjunto A e $(A_i)_{1\leq i\leq m}$ uma famĺia de subconjuntos de A (dois-a-dois disjuntos), com $A=\bigcup_{i=1}^{m} A_i$; se $km<|A|$, então $|A_i|>k$, para algum $1\leq i\leq m$.

Folha 2

1. A familia Ferreira tem 13 filhos, para além de dois progenitores. Recorrendo ao princípio da gaiola dos pombos responda às seguintes questões:

   a) Quantas pessoas desta família pode garantir que:

      i. Nasceram no mesmo mês?

      ii. Nasceram no mesmo dia da semana?

   b) No próximo sábado, os Ferreira vão dar uma festa para a qual os filhos podem convidar os seus amigos mais próximos. Quantos amigos vão ser convidados por forma a garantir que pelo menos 3 dos convidados são amigos do mesmo filho dos Ferreira?

3. Mostre que escolhendo cinco números inteiros (distintos) entre 1 e 8, dois deles têm soma igual a 9.

7. Durante o mês de Janeiro, o João bebeu 42 cafés. Dado que o João bebe pelo menos um café por dia, mostre que num certo número de dias consecutivos o João bebeu exatamente 17 cafés.

2.3 O Princípio da Bijecção

O **princípio da bijecção** é outra das importantes ferramentas da combinatória que nos auxilia na contagem de elementos. Este diz-nos basicamente que se A e B são conjuntos finitos e se existe uma função bijectiva $f\colon A \to B$, então $|A| = |B|$. Tipicamente utilizamos este princípio quando é mais fácil contar os elementos de um destes conjuntos.

Exemplo 2.3.1. Existe uma bijecção entre o conjunto C dos números naturais com 4 algarismos em $A = \{1, 2, \ldots, 9\}$ e o conjunto A^4. De facto, se pensarmos na função $f\colon A^4 \to C$ que a cada quádruplo (a_1, a_2, a_3, a_4) faz corresponder $a_1 10^3 + a_2 10^2 + a_3 10 + a_4$, obtemos a bijecção pretendida.

Exemplo 2.3.2. Vamos determinar o número de subconjuntos de $X = \{1, \ldots, n\}$. Se considerarmos $\mathcal{P}(X)$ como o conjunto dos subconjuntos de X e $\mathbb{B}^n$ como o conjunto das sequências binárias de comprimento n, conseguimos ver que a função

$$\begin{aligned} f\colon \mathcal{P}(X) &\longrightarrow \mathbb{B}^n \\ A &\longmapsto f(A) = x_1 \ldots x_n, \quad \text{onde} \quad x_i = \begin{cases} 1, & i \in A, \\ 0, & i \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$

é uma bijecção.

Exemplo 2.3.3. Consideremos $k, n \in \mathbb{N}$, com $k \leq n$. Vamos tentar determinar quantos são os números inferiores a 10^n de tal forma que a soma dos seus algarismos seja igual a k.

2.4 Os Princípios da Adição e Multiplicação

O **princípio da adição** diz-nos que, para $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos finitos dois-a-dois disjuntos (i.e., tais que $A_i \cap A_j = \varnothing$, quando $i \neq j$), temos

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Por outro lado, o **princípio da multiplicação** diz-nos que, para $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos finitos, a cadinalidade do produto entre estes é igual ao produto das cardinalidades de todos, i.e.,

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_n|.$$

- **Exemplo 2.4.2.**

  - Qual é o número de números naturais com 4 algarismos que se pode escrever com os dígitos $1, \ldots, 9$?

  - Qual é o número de números naturais com 4 algarismos que se podem escrever com os dígitos $0, \ldots, 9$ e que são divisíveis por 5?

- **Exemplo 2.4.4.** Vamos calcular quantos números existem com 4 algarismos distintos.

- **Exemplo 2.4.5.** Vamos calcular quantos números existem com 4 algarismos distintos em 1, ..., 9, um deles igual a 5.

23. São conhecidos os seguintes factos:

- Todo e qualquer cavalo é mais rápido do que todo e qualquer galgo;
- Existe pelo menos um galgo que é mais rápido do que todo e qualquer coelho;
- Para todos e quaisquer x, y e z, se x é mais rápido do que y e y é mais rápido do que z, então x é mais rápido do que z.
- Roger é um coelho;
- Harry é um cavalo.

Folha 1

a) Usando os predicados

- Cavalo(x) representa «x é um cavalo»;
- Galgo(x) representa «x é um galgo»;
- Coelho(x) representa «x é um coelho»;
- MaisRápido(x, y) representa «x é mais rápido do que y»;

represente os factos conhecidos na lógica de primeira ordem.

b) Mostre, usando resolução, que Harry é mais rápido do que Roger.

Sumário 9

- O príncipio da adição e o princípio da multiplicação.
- O príncipio da multiplicação generalizada.
- O princípio de inclusão-exclusão

- MT1

Folha 2

8. Sejam A e B conjuntos tais que $|A| = 2$ e $|B| = 3$.

   a) Quantas funções podemos definir com conjunto de partida A e conjunto de chegada B? Se $|A|=3$ e $|B| = 2$, qual seria a resposta à pergunta anterior? Indique o princípio combinatório utilizado.

   a) Quantas funções injectivas podemos definir com conjunto de partida A e conjunto de chegada B?

13. Qual é o número de palavras com k carateres que se podem formar considerando um alfabeto de n letras,

a) sem qualquer restrição.

b) não podendo existir duas letras consecutivas repetidas.

c) e que sejam palíndromos (i.e., palavras cujos elementos equidistantes dos extremos são iguais; por exemplo: ana, rever, ertutre).

14. Quantos números entre 1000 e 9999 se podem formar:

a) contendo o dígito 1.

b) com todos os dígitos distintos e contendo os dígitos 1 e 2 em posições adjacentes com o 1 a preceder o 2.

c) com dígitos ímpares a ocupar as posições ímpares (onde a primeira posição corresponde às unidades) e dígitos pares a ocupar posições pares.

o princípio da inclusão-exclusão

Teorema 2.4.6 (Inclusão-Exclusão)**.** *Dados conjuntos finitos arbitrários* $A_1, \ldots, A_n$ *(não necessariamente dois-a-dois disjuntos) temos que*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| \right).$$

Exemplo 2.4.7. Vamos determinar o número de números entre 1 e 1000 que são divisíveis por 3 ou por 5.

Folha 2

10. Qual o número de números naturais não superiores a 1000 que não são divisíveis por 4, nem por 6, nem por 9?

12. Num universo de 200 estudantes, 50 estudam Matemática, 140 estudam Economia e 24 estudam ambos os cursos. Dos 200 estudantes, 60 são mulheres, das quais 20 estudam Matemática, 45 estudam Economia e 16 delas estudam ambos os cursos. Determine, para o universo de estudantes considerado, quantos homens é que não estudam nem Matemática nem Economia.

Sumário 10

Agrupamentos e Identidades Combinatórias (Capítulo 3)

- Arranjos com repetição
- Arranjos sem repetição
- Combinações sem repetição
- Algumas propriedades do binomial

Capítulo 3

Agrupamentos e Identidades Combinatórias

3.1 Permutações e Arranjos

Definição 3.1.1. Um **arranjo com repetição** de n elementos k a k é uma «maneira» de escolher k elementos entre n com repetição e dependente da ordem, ou seja, uma função do tipo

$$f\colon \{1,\ldots,k\} \longrightarrow \{1,\ldots,n\}.$$

É usual denotarmos o número de arranjos com repetição de n elementos k a k por $A^r(n,k)$.

$$\boxed{A^r(n,k) = \underbrace{n \times \cdots \times n}_{k\text{vezes}} = n^k.}$$

Exemplo 3.1.3. Suponhamos que fazemos a pergunta «Qual é o dia da semana do seu aniversário» a 6 pessoas. O número de respostas possível, de acordo com o conceito que acabámos de definir, é dado por $\cdots$

Exemplo 3.1.4. Suponhamos que se encontra ao nosso dispor um número ilimitado de bolas vermelhas, azuis e verdes. Sabendo que as bolas da mesma cor são indistinguíveis, de qual será o número de sequências que podemos formar com 5?

Definição 3.1.5. Um **arranjo sem repetição** (ou **arranjo simples**) de n elementos k a k é uma «maneira» de escolher k elementos entre n sem repetição e dependendo da ordem, ou seja, é uma função injectiva do tipo

$$f\colon \{1,\ldots,k\} \longrightarrow \{1,\ldots,n\}.$$

Aqui, denotaremos o número de arranjos sem repetição de n elementos k a k por $A^s(n,k)$.

$$\boxed{A^s(n,k) = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.}$$

Exemplo 3.1.7. De acordo com o conceito agora introduzido, torna-se extremamente fácil calcular o número de formas distintas de sentar k pessoas retiradas de um grupo de n pessoas num banco corrido. De facto, a resposta será $A^s(n,k)$.

Exemplo 3.1.8. Vamos calcular o número de alinhamentos possíveis de 12 escuteiros de tal forma que dois deles (fixos) sejam sempre vizinhos um do outro.

Exemplo 3.1.9. Vamos calcular a soma de todos os números obtidos por permutações dos dígitos 23456789.

3.2 Combinações

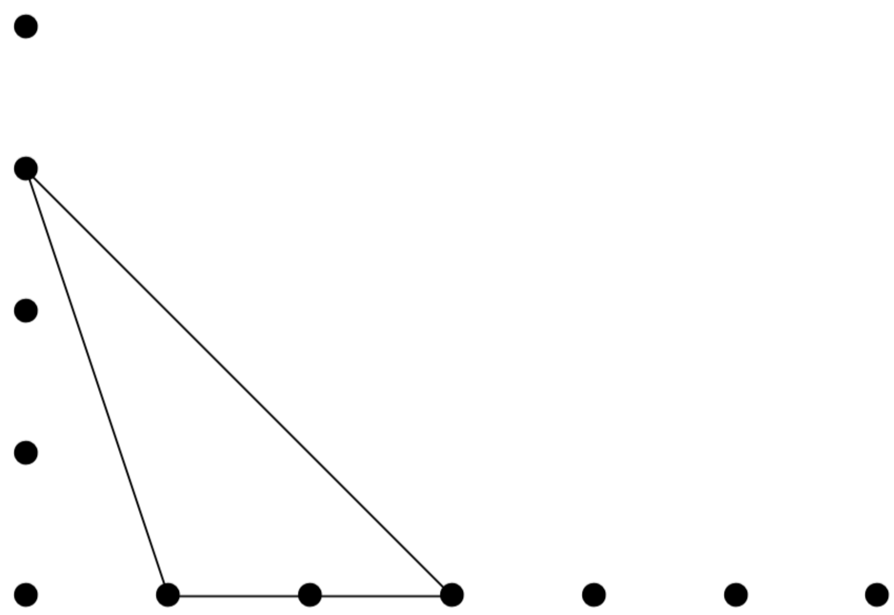
Definição 3.2.1. Uma **combinação sem repetição** (ou **combinação simples**) de n elementos k a k é um subconjunto de k elementos de um conjunto de n elementos. Denotarmos o número de combinações simples de n elementos k a k por $\binom{n}{k}$.

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{A^s(n,k)}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}}$$

Exemplo 3.2.4. Sabendo que existem apenas 6 tipos diferentes de bilhetes da lotaria, podemos pensar em quantas maneiras existem de comprar 3 bilhetes diferentes.

Exemplo 3.2.5. Num grupo de 16 raparigas e 15 rapazes, quantos grupos de 5 pessoas conseguimos formar com, pelo menos, 3 rapazes?

Exemplo 3.2.6. Vamos considerar o conjunto dos triângulos (com ângulos não nulos) cujos vértices são os pontos mostrados na figura abaixo.



Podemos perguntar qual será o tamanho de um tal conjunto de triângulos?

Exemplo 3.2.7. Para um truque de magia, pedimos a um colega que tire três cartas de um baralho clássico com 52 cartas. Como sabemos, o número de maneiras distintas que de obter essas três cartas é dado por $\cdots$

Alterando ligeiramente o truque, pedimos agora que o colega retire 3 cartas, mas que a primeira não seja do naipe $\spadesuit$

Quantos conjuntos distintos de 3 cartas podemos agora ter?

Exemplo 3.2.8. Suponhamos um conjunto X de tal forma que $|X| = x$. Se adicionarmos 8 elementos a X, as possibilidades de escolha de 2 elementos de X aumentam em 11 vezes. Quantos elementos tem X?

Folha 3

2. Considere uma grelha $n \times n$ onde A é o ponto $(0, 0)$ e B é o ponto (n, n).

   a) Determine o número de caminhos mais curto, sobre a grelha, entre A e B;

   [**Sugestão:** determine uma bijeção entre o conjunto dos caminhos mais curtos entre A e B e as sequências binárias com n zeros e n uns.]

   b) Suponha que $n = 5$ e determine o número de caminhos mais curtos, sobre a grelha, entre A e B, que passam pelo ponto $(3, 2)$.

Matemática Discreta

Teste $N^0 1$ de Matemática Discreta 26 de Abril de 2019

Responda de forma cuidada e justificadamente a cada uma das questões.

Tempo para a realização desta prova: 2 horas.

2- Na tribo do Sol, os mais poderosos nascem com um sinal na pele com a forma de um quarto crescente e sabe-se que esta é uma característica hereditária. Considere os seguintes predicados:
$Q(x)$- "x tem o sinal em forma de quarto crescente",
$P(x, y)$ - "x é pai de y",

*(1)***a)** Escreva uma formula em linguagem de primeira ordem que descreve a característica de hereditariedade acima referida;

*(2)***b)** Sabendo que o grande chefe Xu tem um sinal de quarto crescente e o feiticeiro Pi é neto do grande chefe Xu, use o principio da resolução para mostrar que o feiticeiro Pi tem um sinal de quarto crescente.

Revisão: Princípio de resolução

Sumário 11

- O triângulo de Pascal
- A fórmula binomial de Newton
- Combinações com repetição

Teorema 3.2.9. *Sejam* $n, k \in \mathbb{N}$, *com* $k \leq n$. *Então:*

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;

2. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ $\qquad$ (*supondo* $n, k > 0$);

3. $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Teorema 3.2.11. *Consideremos $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então,*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

De forma mais genérica, para todos os $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Esta última é a conhecida ***fórmula binomial de Newton****. O elemento $\binom{n}{k}$ (número de combinações de n elementos k a k) é ainda dito* ***coeficiente binomial****.*

Exemplo 3.2.14. Utilizando o Teorema Binomial, vamos mostrar que, se $n \in \mathbb{N}$, então $6^n - 5n \equiv 1 \pmod{25}$, ou seja, $6^n - 5n = 1 + 25k$ para algum $k \in \mathbb{N}$.

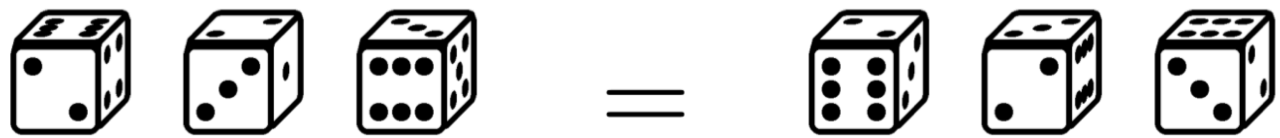
Definição 3.2.22. Seja X um conjunto finito. Um **multiconjunto** M em X é um par (X, ν) onde $\nu\colon X \to \mathbb{N}$.

Definição 3.2.24. Uma **combinação com repetição** de n elementos k a k é um multiconjunto de k elementos num conjunto de n elementos. O número de combinações com repetição de n elementos k a k denota-se por $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$.

Teorema 3.2.25. *O número de combinações com repetição de $n > 0$ elementos k a k é igual ao número de soluções em $\mathbb{N}$ da equação $x_1 + \cdots + x_n = k$. Portanto,*

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}$$

Exemplo 3.2.27. Consideremos a contagem de alguns lançamentos de três dados cúbicos (regulares). Aqui, dois resultados serão ditos iguais se, independentemente da ordem, os dados mostrarem as mesmas faces, i.e.,



Quantos resultados diferentes existem?

Exemplo 3.2.28. Vamos determinar o número de possibilidades de colocação de 20 bolas indistinguíveis em 5 caixas numeradas, com pelo menos duas bolas em cada caixa.

Folha 3

3. Qual o número de possibilidades de se distribuírem 8 presentes por 5 crianças, em cada uma das seguintes condições:

   a) os presentes são todos iguais,

   b) os presentes são todos distintos.

Sumário 12

- Permutações com repetição.
- A fórmula multinomial.
- Identidades Combinatórias

Folha 3

4. Suponha que tem 20 cartas idênticas e 12 envelopes. De quantas maneiras pode colocar as cartas nos envelopes admitindo que deve haver pelo menos uma carta em cada envelope?

5. Uma empresa vai distribuir 6 bolas de basquetebol iguais e 7 bolas de futebol diferentes por 5 clubes. De quantas maneiras é possível fazer esta distribuição?

7. b) Obtenha, em termos de combinações com repetição, o número de soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 11$, com $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$. Qual o número de soluções se x_1, x_2, x_3 são inteiros não negativos tais que $x_1 \geq 1$ e $x_2 \geq 2$?

3.3 Permutações e Multinómios

«*Quantos números de telefone da rede fixa podem ser atribuídos com dois* 2 *(incluindo já o* 2 *inicial), quatro* 3*, dois* 6 *e um* 9*?*»

Definição 3.3.1. Seja $M = (X, \nu)$ um multiconjunto de tamanho n. Uma **permutação de** M (ou **permutação com repetição**) é uma sequência $s = (x_1, \dots, x_n)$ de elementos de X tal que cada $x \in X$ ocorre $\nu(x)$ vezes em s.

Teorema 3.3.2. *O número de permutações do multiconjunto* $\{x_1^{n_1}, \dots, x_k^{n_k}\}$ *de tamanho* n *é*

$$\frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

Exemplo 3.3.3. Pelo nosso exemplo acima, o número de permutações do multiconjunto $\{2, 3, 3, 3, 3, 6, 6, 9\}$ de 8 elementos é ...

Definição 3.3.5. Seja X um conjunto de n elementos e sejam $n_1, n_2, \ldots, n_k$ números naturais com $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. O número de sequências $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ de k subconjuntos de X dois a dois disjuntos e com $|A_i| = n_i$, $i = 1, \ldots, k$, designa-se por **coeficiente multinomial** e denota-se por

$$\binom{n}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_k}.$$

Teorema 3.3.6. *Seja X um conjunto de n elementos e sejam $n_1, n_2, \ldots, n_k$ números naturais, com $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. Então,*

$$\binom{n}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot \cdots \cdot n_k!}.$$

- Se $n_1 = \cdots = n_k = 1$, então $\binom{n}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_k} = n!$;
- Se $k = 2$, então o coeficiente multinomial $\binom{n}{n_1\ n - n_1}$ torna-se no coeficiente binomial $\binom{n}{n_1}$.

Folha 3

10. O Departamento de Codificação dos Serviços Secretos foi encarregado de encriptar uma mensagem que será enviada ao seu agente secreto 007. A mensagem que vai ser transmitida através de um dos seus canais de comunicação, é constituída por 12 símbolos diferentes e 45 espaços em branco iguais.

    a) Quantas mensagens diferentes podem ser formadas a partir dos 12 símbolos e dos 45 espaços em branco?

    b) Pretende-se que na mensagem a enviar existam pelo menos 3 espaços em branco entre cada dois símbolos consecutivos. Quantas mensagens com estas características podem ser enviadas?

11. a) De quantas maneiras podemos dispôr as letras da palavra PARALELEPÍPEDO em sequências com ou sem significado?

    b) Nas sequências anteriores, em quantas não aparecem os três P's seguidos?

Teorema 3.3.8. *Consideremos* $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$. *Então,*

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^n &= \sum_{n_1+\cdots+n_k=n} \binom{n}{n_1 \ \dots \ n_k} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k} \\ &= \sum_{n_1+\cdots+n_k=n} \binom{n}{n_1 \ \dots \ n_k} \prod_{1\leq i\leq k} a_i^{n_i}.\end{aligned}$$

Exemplo 3.3.11. Vamos determinar o coeficiente de a^2b^4d na expansão de $(3a+5b-2c+d)^7$.

3.4 Identidades Combinatórias

Exemplo 3.4.1. Para todos os $n, m \in \mathbb{N}$, temos que

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{k}{n} = \binom{m+1}{n+1}.$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
\end{array}$$

Ideia: Um subconjunto de $\{1, \ldots, m+1\}$ com $n+1$ elementos pode ter valor máximo $n+1, n+2, \ldots, m+1$

Exemplo 3.4.4. Vamos verificar mais uma propriedade das somas diagonais do triângulo de Pascal:

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n+k}{k} = \binom{n+r+1}{r}.$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
\end{array}$$

Esta identidade é uma consequência da 3.4.1 e simetria do triângulo de Pascal

Exemplo 3.4.2. Consideremos $n, m, \ell \in \mathbb{N}$. Vamos demonstrar a **identidade (convolução) de Vandermonde**:

$$\sum_{k=0}^{\ell} \binom{n}{k}\binom{m}{\ell-k} = \binom{n+m}{\ell}.$$

Ideia: sejam *n* bolas verdes e *m* bolas azuis…

Exemplo 3.4.5. Vamos demonstrar a propriedade de **absorção** ligada aos coeficientes binomiais, i.e., que para $0 \leq k \leq n$ se tem

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Sumário 13 (TP9 apenas)

- Identidades Combinatórias
- Revisões.

Exemplo 3.4.7. Vamos demonstrar a **identidade dos subconjuntos** para os coeficientes binomiais, ou seja, que para quaisquer $0 \leq k \leq m \leq n$ se tem

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}.$$

Ideia: número de subconjuntos A e B com $A \subseteq B$ de $\{1,\ldots,n\}$

Exemplo 3.4.8. Para cada $n, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ de tal forma que $n_1 + \cdots + n_k = n$, é válida a seguinte igualdade:

$$\binom{n}{n_1 \; \ldots \; n_k} = \sum_{i=1}^{k} \binom{n-1}{n_1 \; \ldots \; (n_i - 1) \; \ldots \; n_k}.$$

Matemática Discreta 2022/23 Teste 1

1. Considere as seguintes afirmações:

   a) Cada filósofo escreve pelo menos um livro.

   b) Todos os alunos de um filósofo leem pelo menos um dos seus livros.

   Exprima as afirmações anteriores na linguagem de primeira ordem utilizando os seguintes símbolos de predicado com a respetiva interpretação:

   - $\text{Filo}(x)$ significa «x é filósofo»,
   - $\text{Livro}(y)$ significa «y é um livro».
   - $\text{Escrever}(x, y)$ significa «x escreve y».
   - $\text{Ler}(x, y)$ significa «x lê y».
   - $\text{AlunoDe}(y, x)$ significa «y é aluno de x».

2. Considere uma linguagem de primeira ordem com os símbolos de predicado P, Q, R de dois argumentos e as variáveis x, y, z, w, e considere as fórmulas

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \forall x \exists y\, (P(x,y) \wedge Q(x,y)),\\
\varphi_2 &= \forall x\, [((\exists y\, P(x,y)) \wedge (\exists z\, Q(x,z))) \to (\exists w R(x,w))],\\
\psi &= \forall x \exists w\, R(x,w).
\end{aligned}$$

Utilizando método de resolução, mostre que $\varphi_1, \varphi_2 \vDash \psi$.

3. Num estante encontram-se cinco livros diferentes em francês, sete livros diferentes em espanhol e onze livros diferentes em português. De quantas maneiras se pode escolher dois livros de línguas diferentes (independente da ordem)?

4. Um comboio tem quatro carruagens de primeira classe, sete de segunda classe, uma carruagem restaurante e duas de bagagem (aqui as carruagens do mesmo tipo não se distinguem). Qual é o número de possíveis sequências diferentes de carruagens

a) sem restrições.

b) quando as carruagens de primeira classe não podem estar separadas.

5. Determine o número de soluções da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$$

com $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $x_1 \leq 2$ e $x_2 \geq 3$.

Alternativa: De quantas maneiras se pode distribuir 15 bolas indistinguíveis por quatro caixas numeradas tal que há no máximo duas bolas na primeira caixa e pelo menos três bolas na segunda caixa.

6. Num grupo de 33 pessoas verifica-se o seguinte: em qualquer subconjunto de 9 pessoas deste grupo existem sempre (pelo menos) duas que têm a mesma altura.

   a) Mostre que o número de alturas diferentes entre as 33 pessoas do grupo é inferior a 9.

   b) Mostre que existem pelo menos 5 pessoas do grupo de 33, que têm exatamente a mesma altura.

7. Quantos inteiros positivos inferiores a 2001 são múltiplos de 3 ou 4, mas não são múltiplos de 5?

Universidade de Aveiro - Departamento de Matemática

Matemática Discreta 2017/2018 - UC 47166 (1^o Ano/2^o Sem)

Teste T1 (Avaliação Discreta) - 20/04/2018 **Duração: 2h**

6. Mostre que se $S \subseteq [15] = \{1, 2, 3, \ldots, 13, 14, 15\}$ e $|S| > 7$, então há pelo menos dois subconjuntos de S com três elementos com a mesma soma.

Universidade de Aveiro - Departamento de Matemática

Matemática Discreta 2017/2018 - UC 47166 (1^o Ano/2^o Sem)

Teste T1 (Avaliação Discreta) - 20/04/2018 **Duração: 2h**

3. Admita que o universo do discurso é o conjunto dos humanos e considere os seguintes predicados:

- RNC$(x) \equiv$ "x é um recém-nascido";
- ILG$(x) \equiv$ "x é ilógico";
- LCC$(x) \equiv$ "x lida com crocodilos";
- MNP$(x) \equiv$ "x é menosprezado".

(a) Usando os predicados acima definidos, represente em lógica de primeira ordem cada uma das seguintes afirmações:

F1. Os recém-nascidos são ilógicos.

F2. Quem lida com crocodilos não é menosprezado.

F3. As pessoas ilógicas são menosprezadas.

(b) Aplicando o princípio da resolução mostre que a partir de F1, F2 e F3 se pode concluir que os recém-nascidos não conseguem lidar com crocodilos.

Revisão: Princípio de resolução

Universidade de Aveiro - Departamento de Matemática

Matemática Discreta 2017/2018 - UC 47166 (1^o Ano/2^o Sem)

Teste T1 (Avaliação Discreta) - 20/04/2018 **Duração: 2h**

1. Supondo p, q e r proposições atómicas, considere as fórmulas bem formadas:

$$F: \ (p \vee q) \to r \qquad \text{e} \qquad G: (\neg r \to \neg p) \vee (\neg r \to \neg q)$$

Averigue, justificando, qual das seguintes respostas é a correta:

(a) F e G são logicamente equivalentes;
(b) $F \models G$;
(c) $G \models F$;
(d) Todas as anteriores;
(e) Nenhuma das anteriores.

Matemática Discreta

Teste $N^0 1$ de Matemática Discreta 22 de Abril de 2016

Responda de forma cuidada e justificadamente a cada uma das questões.

Tempo para a realização desta prova: 2 horas.

4-

(1,5)**b)** *Sabendo que um saco contém 10 bolas vermelhas e 10 bolas azuis, utilizando o princípio da gaiola dos pombos, indique o número de bolas que devem ser retiradas deste saco para se ter a garantia de que foram selecionadas pelo menos três bolas da mesma cor.*

7- *Considere o conjunto* $\mathcal{M}_{2\times 3}$ *das matrizes com duas linhas e três colunas cujos elementos pertencem ao conjunto* $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

(1)**a)** *Determine a cardinalidade de* $\mathcal{M}_{2\times 3}$.

(1)**b)** *Determine o número de matrizes pertencentes a* $\mathcal{M}_{2\times 3}$ *cujos elementos da primeira linha são todos distintos entre si.*

Matemática Discreta

Teste $N^0 1$ de Matemática Discreta — 26 de Abril de 2019

Responda de forma cuidada e justificadamente a cada uma das questões.

Tempo para a realização desta prova: 2 horas.

5- Uma empresa de desenvolvimento de software tem 100 informáticos. Destes, 45 programam em Java, 30 em C++, 20 em Python, 6 em C++ e Java, 1 em Java e Python, 5 em C++ e Python, e apenas uma pessoa programa nas três linguagens.

*(1,5)***a)** Determine o número de informáticos que programam em Python e não programam em Java nem em C++.

*(1,5)***b)** O número de informáticos que não programam em nenhuma das três linguagens.

Mudança de Docente
Aulas 14-17

Sumário 18 (TP2)

- Resolução de equações e de sistemas usando a série geradora.

Exemplo 4.5.49. Qual o número p_n de partições ordenadas (E_1, E_2) de $\{1, \ldots, n\}$ em duas partes não-vazias?

Lema 4.5.35. *Dada uma sucessão $(\mathcal{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (de séries formais de $\mathbb{C}[[x]]$ com coeficiente constante nulo) que convirja para a série nula, temos que*

$$\exp(\sum_k \mathcal{A}_k) = \prod_k \exp(\mathcal{A}_k).$$

Em particular, tem-se que $\exp(kx) = \exp(x)^k$*, para* $k \in \mathbb{Z}$.

4.5.7 Revisitar as Equações de Recorrência

- **Exemplo 4.5.60.** Equação de recorrência: $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} \quad (n \geq 2), \quad a_0 = 3,\, a_1 = 4.$

- **Exemplo 4.5.61.** Vamos resolver o sistema de equações de recorrência

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + b_{n-1} + 1 \\ b_n &= a_{n-1} + 2b_{n-1} + 2^{n-1} \end{aligned}\right\} \quad (n \geq 1) \quad \text{e} \quad a_0 = b_0 = 0.$$

Resumindo, para resolver uma equação de recorrência com séries geradoras devemos:

- Desenvolver a série ordinária $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (ou a série exponencial $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$) utilizando a equação de recorrência e as condições iniciais.

- Obter tipicamente

$$\mathcal{A} = \frac{\text{polinómio 1}}{\text{polinómio 2}} = \frac{\text{polinómio 1}}{(1-\lambda_1 x)^{n_1} \dots (1-\lambda_k x)^{n_k}}.$$

- Escrever $\mathcal{A}$ na forma

$$\mathcal{A} = \text{polinómio} + \left(\dots + \frac{\text{constante}}{1-\lambda_i x} + \frac{\text{constante}}{(1-\lambda_i x)^2} + \dots \right).$$

- Recordar (e utilizar) que

$$\frac{1}{(1-\lambda x)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{m-1} \lambda^n x^n.$$

Folha 4

21. Considere a relação de recorrência $u_n - 2u_{n-1} = 4^n$, $n \geq 1$, $u_0 = 1$.

a) Mostre que a série geradora da sucessão (u_n) é $\frac{1}{(1-2x)(1-4x)}$.

b) Determine uma fórmula não recursiva para u_n, $n \geq 0$.

22. a) Escreva a série/função geradora ordinária $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ (com $a_n = n$) como um quociente de polinómios (uma função racional).

b) Mostre que $\frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$ é a série geradora da sucessão definida por $a_n = n^2$.

c) Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $a_0 = 0$, $a_1 = \alpha$ e

$$a_n = a_{n-2} - n^2, \ n \geq 2.$$

Obtenha a função geradora ordinária desta sucessão como soma de funções racionais. Use as respostas das questões anteriores.

d) Obtenha uma fórmula fechada para a sucessão dada na alínea anterior.

Sumário 19

- Binomial generalizado
- Resolução de exercícios de revisão do capítulo 4.

Consideremos agora o *coeficiente binomial generalizado*: para $r \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$\binom{r}{n} = \frac{\overbrace{r(r-1)\ldots(r-n+1)}^{n \text{ fatores}}}{n!}, \qquad \text{em particular} \quad \binom{r}{0} = 1\,.$$

Folha 4

24. Determine os números binomiais generalizados $\binom{\frac{1}{2}}{3}$ e $\binom{-2}{3}$.

Pelos resultados do **Cálculo**, a série de Taylor da função f definida por $f(x) = (1+x)^r$ é dado por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n,$$

e este série converge absolutamente em $]-1,1[$ para $f(x)$. Sendo assim, *definimos a série formal de potências* $(1+x)^r$ (com $r \in \mathbb{R}$) por

$$(1+x)^r := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n \,.$$

Por exemplo, concluímos, para todos os $r, s \in \mathbb{R}$ e todo o $n \in \mathbb{N}$:

$$\binom{r+s}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} \,.$$

Folha 4

8. Sendo $p(x) = 2x^2 + x$, determine uma fórmula fechada para o cálculo da soma $S_n = \sum_{i=0}^{n} p(i)$ começando por estabelecer uma equação de recorrência apropriada.

9. Determine a equação de recorrência linear não homogénea com solução geral $a_n = (c_1 + c_2 n)2^n + c_3 + 4n$, onde c_1, c_2 e c_3 são constantes.

Exame de recurso, 28 de Junho de 2023

5. (2 val) Determine a sucessão $(a_n)_{n\geq 0}$ que tem como série geradora a série $\frac{x}{(1-x)^3}$.
6. (3 val) Resolva a relação de recorrência

$$na_n - (5n-5)a_{n-1} = 5^n + 4,$$

onde $a_0 = 10$.

[Sugestão: Efetuar a substituição $b_n = na_n$.]

Teste 2, 14 de Junho de 2023

1. (4 val) Um hotel tem 20 quartos que vão ser pintados usando 5 cores. Cada quarto é pintado com uma única cor. Considere que só tem tinta azul (uma das cinco cores) para pintar três quartos e o mesmo acontece relativamente à tinta verde, e tem tinta suficiente de cada uma das restantes três cores para pintar todos os quartos.

   a) Determine a série geradora correspondente ao problema de determinação do número de possibilidades de pintar n quartos com as cinco cores.

   b) A partir da série geradora obtida em (1a) obtenha o valor do coeficiente que dá a solução do problema para os 20 quartos.

Sumário 20

- Resolução de exercícios de revisão do capítulo 4.

3. (5 val) Considere o número a_n de sequências de comprimento $n \in \mathbb{N}$ nos algarismos «0» e «1» e no símbolo «X», que não contêm dois algarismos consecutivos.

a) Justifique que a sucessão $(a_n)_{n\geq 0}$ satisfaz a equação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, e indique as condições iniciais.

b) Determine a função (ou série) geradora de $(a_n)_{n\geq 0}$.

c) Resolva a equação de recorrência indicada em (3a), determinando uma fórmula fechada para a_n.

Nota. Se não resolveu a questão (3a), considere os valores iniciais $a_0 = a_1 = 1$.

TESTE 2, 29 de Junho de 2022,

(2) Utilizando séries de potências formais, determine o número de maneiras de distribuir 8 bolas não distinguíveis por 5 caixas numeradas de modo que a primeira caixa recebe no máximo 2 bolas.

(3) Considere a sucessão $(a_n)_{n\geq 0}$, onde $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 3$, para $n \geq 2$. Determine uma fórmula não recursiva para a_n.

Matemática Discreta 2020/2021

(5.0) 1. Resolva a seguinte relação de recorrência, justificando todos os passos:

$$a_n = 4a_{n-2} + 2^n, \quad n \geq 2, \quad a_0 = 2, \ a_1 = 1.$$

(2.5) 2. Determine a sucessão $(b_n)_{n\geq 0}$ associada à função geradora $\mathcal{B}(x) = \dfrac{x}{(1+2x)(1-x)}$.

(2.5) 3. Considere o problema de determinar o número de maneiras de distribuir n melões por 4 caixas, de modo que uma caixa fique com, pelo menos, 2 melões, outra com, no máximo, 4 melões, não havendo restrições nas restantes, para $n \geq 2$. Mostre que, a solução do problema pode ser obtida a partir da função geradora:

$$\mathcal{F}(x) = \frac{x^2 - x^7}{(1-x)^4}\ .$$

Equações de Recorrência

(1,5) **a)** As casas da Praia Branquinha caracterizam-se por ter um friso de azulejos alinhados. Os azulejos que compõem o friso podem ser azuis ou pintados com um nó de marinheiro. Existem **12** nós de marinheiro diferentes. Entre dois azulejos pintados deve ser colocado pelo menos um azulejo azul (é possível repetir nós no friso e é possível que um friso tenha apenas azulejos azuis).

Seja a_n o número de possibilidades para um friso com n azulejos. Determine uma formula recursiva para a_n.

b) Determine uma formula fechada para cada uma das equações de recorrência
(1,5) **i.** $n(a_n-4a_{n-2})+8a_{n-2}=0$ com $a_0=0$ e $a_1=1$.
(1,0) **ii.** Sabendo que 2^{n+1} é solução particular da equação $u_n-u_{n-1}=2^n$, resolva a equação $u_n-u_{n-1}=2^n+7$ com $u_0=0$.

Funções Geradoras

(4,0) **(a)** Determine a função geradora da sucessão $(a_n)_{n\geq 0}$ tal que $a_0=1$, $a_1=0$ e $a_n=2a_{n-1}+3a_{n-2}-n$, $n\geq 2$.

(1,0) **(b)** Determine a sucessão (u_n) associada à função geradora $f(x)=\dfrac{1}{2x^2+x-1}$.

Formulário: $\dfrac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Sumário 21

Capítulo 5: Elementos de Teoria dos Grafos

- Grafos orientados e não orientados; grafos simples; incidência e adjacência; Ordem e dimensão de um grafo; Grafos e digrafos simples; Grafos simples complementares.
- Vizinhança e grau de um vertice.
- Representação por matrizes.

Capítulo 5

Elementos da Teoria dos Grafos

Exemplo 5.2.5. O Sr. e a Sra. Silva convidaram quatro casais para jantar em casa. Alguns são amigos do Sr. Silva e outros amigos da Sra. Silva. Em casa do casal Silva os convidados que já se conheciam cumprimentaram-se com um aperto de mão e os restantes apenas se saudaram.

Depois de todos terem chegado o Sr. Silva observou:

"*se me excluir a mim, todos deram um número diferente de apertos de mão*"

Quantos apertos de mão deu o Sr. Silva?

5.1 Conceitos Fundamentais

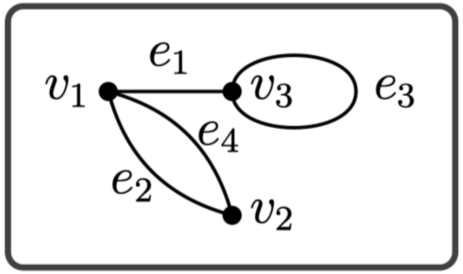
Definição 5.1.1. Designamos por **grafo** (**não orientado**) um terno $G = (V, E, \psi)$, onde:

- V é um conjunto (diremos que os elementos de V são **vértices**),
- E é um conjunto (diremos que os elementos de E são **arestas**),
- ψ é uma função (de facto, **função de incidência**)

$$\psi\colon E \longrightarrow \{A \subseteq V \mid 1 \leq |A| \leq 2\}.$$

Se $\psi(e) = \{u, v\}$, u e v dizem-se os **pontos extremos** da aresta e.

Exemplo 5.1.2.



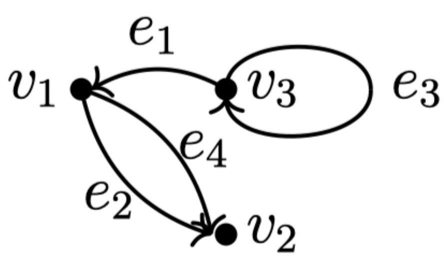
Definição 5.1.3. Designa-se por **grafo orientado** (ou **digrafo**) um terno $\vec{G} = (V, E, \psi)$ onde

- V é um conjunto (diremos que os elementos de V são **vértices**),
- E é um conjunto (diremos que os elementos de E são **arcos**),
- ψ é uma função (**função de incidência** do grafo)

$$\psi \colon E \longrightarrow V \times V.$$

Se $\psi(e) = (u, v)$, u diz-se **cauda** de e e v **cabeça** de e.

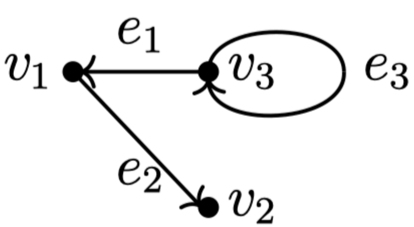
Exemplo 5.1.4.



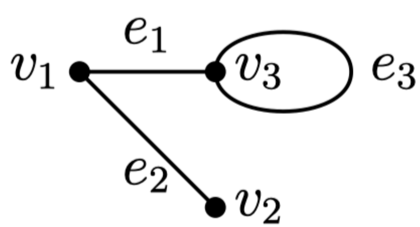
$$\overrightarrow{G} = (V, E, \psi) \longrightarrow G = (V, E, \widehat{\psi})$$

$$\widehat{\psi}(e) = \{u, v\} \qquad \text{precisamente quando} \qquad \psi(e) = (u, v) \quad \text{ou} \quad \psi(e) = (v, u)$$

- **Exemplo 5.1.5.**

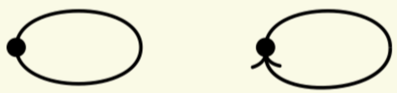


$$\longmapsto$$

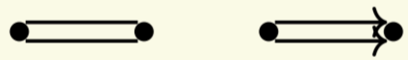


Definição 5.1.6. Consideremos um grafo $G = (V, E, \psi)$, resp., um digrafo $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$.

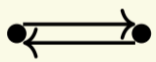
- Uma aresta (um arco) com os pontos extremos iguais diz-se **lacete**.



- Arestas com os mesmos vértices extremos designam-se por **arestas paralelas**, e arcos com a mesma cauda e a mesma cabeça designam-se por **arcos paralelos**.
  - paralelas:

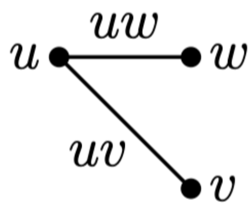


  - não paralelas:



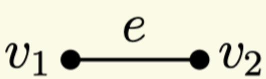
- G (respetivamente $\overrightarrow{G}$) diz-se **simples** quando não contém arestas (arcos) paralelas(os) nem lacetes.

Nota 5.1.11. Num grafo (respectivamente digrafo) simples, cada aresta (arco) a é completamente determinada(o) pelos vértices extremos u e v (cauda u e cabeça v). Neste caso escrevemos da forma mais sugestivo uv em lugar de a.



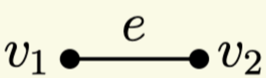
Com esta notação, o (di)grafo (V, E, ψ) é completamente determinado por (V, E) (ou seja, podemos «dispensar» ψ).

- Uma aresta (um arco) diz-se **incidente** nos seus vértices extremos.



a arresta e é incidente nos vértices v_1 e v_2.

- Os vértices v_1 e v_2 dizem-se **adjacentes** se existir uma aresta (um arco) com pontos extremos v_1 e v_2.



os vértices v_1 e v_2 são adjacentes.

- Arestas (arcos) incidentes num mesmo vértice dizem-se **adjacentes**.

as arrestas e_1 e e_2 são adjacentes.

Definição 5.1.7. Um grafo $G = (V, E, \psi)$ respetivamente digrafo $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$ diz-se **finito** quando os conjuntos V e E são finitos.

Exemplo 5.1.8. Designa-se por **grafo trivial** um grafo simples com um único vértice, ou seja, tal que $|V| = 1$ e $E = \varnothing$.

No que se segue, consideremos tipicamente grafos finitos.

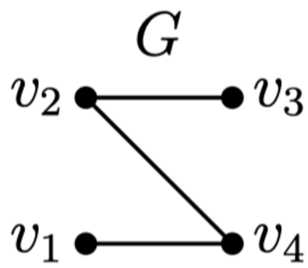
Definição 5.1.10. Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito.

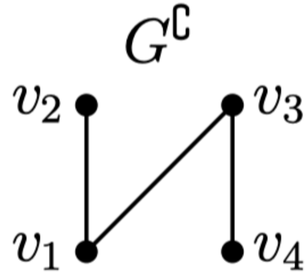
- **ordem de G:** $\nu(G) = |V|$ (o número de vértices).

Definição 5.1.12. Seja $G = (V, E)$ um grafo simples. O **grafo complementar** de G é o grafo $G^{\complement} = (V, E^{\complement})$ com o mesmo conjunto de vértices e com

$$uv \in E^{\complement} \iff uv \notin E.$$

Exemplo 5.1.13.





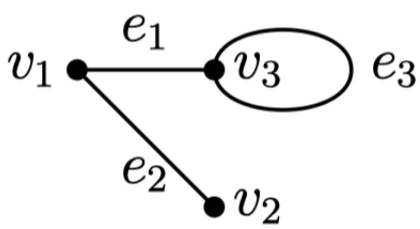
5.2 Vizinhanças e Graus

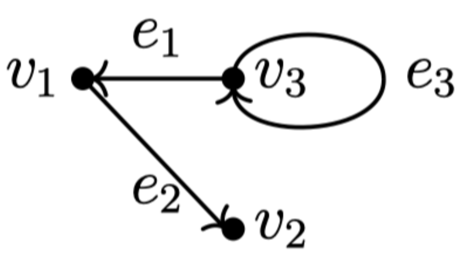
Definição 5.2.1.
- Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo e $v \in V$.

  O conjunto de todos os vértices adjacentes a v designa-se por **vizinhança** de v e denota-se por $\mathcal{N}_G(v)$ (ou simplesmente $\mathcal{N}(v)$).

- Seja $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$ um digrafo e $v \in V$. A **vizinhança de entrada** de v é o conjunto $\mathcal{N}^-(v)$ de todos os vértices u tal que existe um $e \in E$ com $\psi(e) = (u, v)$, e a **vizinhança de saída** de v é o conjunto $\mathcal{N}^+(v)$ de todos os vértices u tal que existe um $e \in E$ com $\psi(e) = (v, u)$.

Exemplo 5.2.2.





Definição 5.2.3. Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito com $V \neq \varnothing$.

- Seja $v \in V$. O **grau** de v é o número $d(v)$ de arestas incidentes em v (onde cada lacete conta duas vezes).
- O **maior grau dos vértices** do grafo G denota-se por $\Delta(G)$:
$$\Delta(G) := \max\{d(v) \mid v \in V\}.$$
- O **menor grau dos vértices** do grafo G denota-se por $\delta(G)$:
$$\delta(G) := \min\{d(v) \mid v \in V\}.$$

Nota 5.2.4. No caso de um digrafo $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$, consideremos ainda

- **o semigrau de entrada**: $d^-(v) = |\{e : \exists u \in V,\, \psi(e) = (u, v)\}|$.

  Ou seja, $d^-(v)$ é o número de arcos com «cabeça em v».

- **o semigrau de saida**: $d^+(v) = |\{e : \exists u \in V,\, \psi(e) = (v, u)\}|$.

  Ou seja, $d^+(v)$ é o número de arcos com «cauda em v».

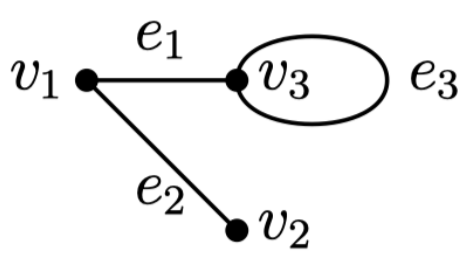
- $d(v) = d^-(v) + d^+(v)$.

Definição 5.2.6. Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo (finito). A **matriz de incidência** (aresta-vértice) de G é a matriz do tipo $\nu \times \varepsilon$ definida por

$$V \times E \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (v,e) \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{se } v \notin \psi(e), \\ 1 & \text{se } \psi(e) = \{u,v\} \text{ com } u \neq v, \\ 2 & \text{se } \psi(e) = \{v\}. \end{cases}$$

Nota 5.2.7. Para cada $a \in E$, a soma sobre todos os elementos da «coluna e» é 2. Para cada $v \in V$, a soma sobre todos os elementos da «linha v» é o grau de v.

Exemplo 5.2.9.

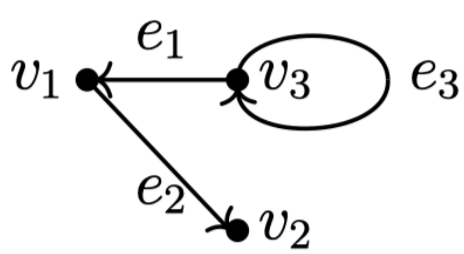


Seja $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$ um digrafo (finito) sem lacetes. A **matriz de incidência** (aresta-vértice) de $\overrightarrow{G}$ é a matriz do tipo $\nu \times \varepsilon$ definida por

$$V \times E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (v, e) \longmapsto \begin{cases} -1 & \text{se existe } u \in V \text{ com } (u, v) = \psi(e), \\ 1 & \text{se existe } u \in V \text{ com } (v, u) = \psi(e), \\ 0 & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Nota 5.2.8. Para cada $e \in E$, a soma sobre todos os elementos da «coluna e» é 0. Para cada $v \in V$, a soma sobre todos os elementos da «linha v» é igual a $d^+(v) - d^-(v)$.

Exemplo 5.2.9.



Teorema 5.2.10. *Para todo o grafo $G = (V, E, \psi)$ finito, a soma dos graus dos seus vértices é igual ao dobro do número de arestas, i.e.,*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Corolário 5.2.11. *O número de vértices de grau ímpar é par.*

Teorema 5.2.12. *Para todo o digrafo $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$ finito,*

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = |E|.$$

Definição 5.2.13. • Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo (finito). A **matriz de adjacência** de G é a matriz do tipo $\nu \times \nu$ com entrada (u, v) igual a **número de arestas entre u e v (cada lacete conta duas vezes)**., ou seja,

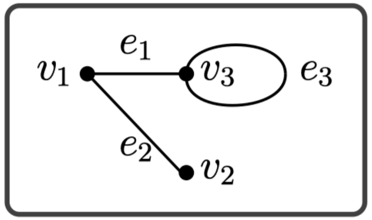
$$V \times V \longmapsto \mathbb{R}, \quad (u, v) \longmapsto \begin{cases} |\{a \in E \mid \psi(a) = \{u, v\}\}| & \text{se } u \neq v; \\ 2|\{a \in E \mid \psi(a) = \{u, u\}| & \text{se } u \neq u. \end{cases}$$

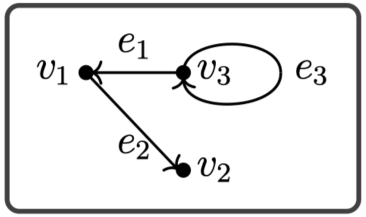
Nota: Esta matriz é simétrica e a soma sobre os elementos da coluna u (ou linha u) é igual ao grau de u.

• Seja $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$ um digrafo (finito). A **matriz de adjacência** de $\overrightarrow{G}$ é a matriz do tipo $\nu \times \nu$ definida pela aplicação

$$V \times V \longmapsto \mathbb{R}, \quad (u, v) \longmapsto |\{a \in E : \psi(a) = (u, v)\}|.$$

Exemplo 5.2.14.





Folha 5

2. Sabendo que a matriz de incidência, M_G, de um grafo G, é tal que

$$M_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

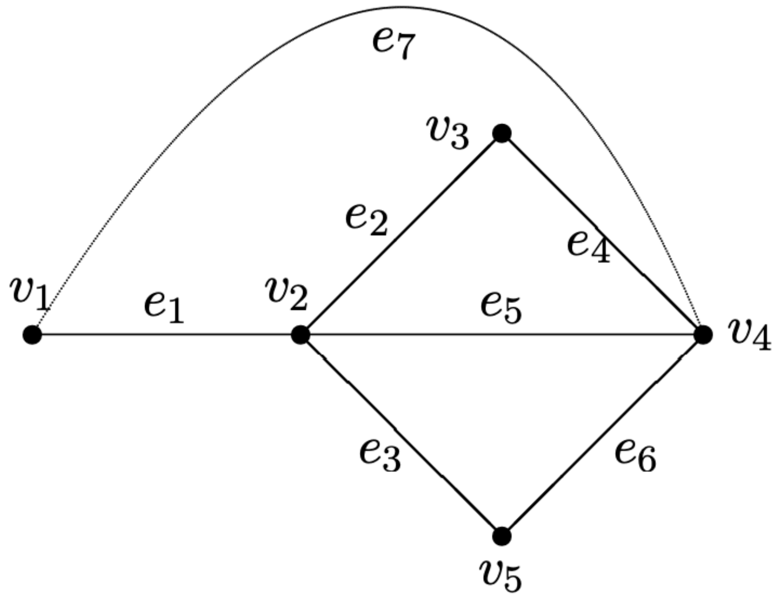
represente graficamente G.

Sumário 22

- Isomorfismos entre grafos
- MT2

Folha 5

3. Determine as matrizes de incidência e de adjacência do grafo representado na figura a seguir:



4. Considere o digrafo $\acute{D}$ que traduz a seguinte relação: as cobras comem sapos e pássaros, os pássaros e aranhas comem insetos, os sapos comem aranhas e insetos.

   (a) Represente graficamente $\overrightarrow{D}$.

   (b) Obtenha as matrizes de adjacência e de incidência de $\overrightarrow{D}$.

5. (a) Prove que um grafo regular de grau r com p vértices tem $\frac{p \times r}{2}$ arestas.

   (b) Mostre que o grafo completo K_p tem $\binom{p}{2}$ arestas.

   (c) Seja q um inteiro tal que $0 \leq q \leq \binom{p}{2}$.

      i. Determine o número de grafos simples com vértices $\{1, 2, \ldots, p\}$ e exactamente q arestas.

   (d) Qual o número de grafos simples com vértices $\{1, 2, \ldots, p\}$?

6. Mostre que se G é um grafo de ordem n e dimensão m então

$$\delta(G) \leq \frac{2m}{n} \leq \Delta(G).$$

7. Seja G um grafo simples de ordem $\nu(G) \geq 2$. Mostre que existem pelo menos dois vértices com o mesmo grau.

9. Qual o número de arestas de um grafo simples G, sabendo que $\nu(G) = 56$ e $\varepsilon(G^c) = 80$?

10. Quantos vértices poderá ter um grafo simples regular com 24 arestas?

4. Isomorfismos de grafos e subgrafos

Definição

Sejam os grafos $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ e $H = (V_H, E_H, \psi_H)$. Um **isomorfismo** de G em H é um par $f\colon V_G \longrightarrow V_H$ e $h\colon E_G \longrightarrow E_H$ de funções bijetivas tais que, para todos os $e \in E_G$ e $u, v \in V_G$,

$$(\psi_G(e) = \{u, v\}) \iff (\psi_H(h(e)) = \{f(u), f(v)\}).$$

No caso de digrafos, escreve-se (u, v) e $(f(u), f(v))$ em vez de $\{u, v\}$ e de $\{f(u), f(v)\}$, respetivamente.

Nota

No caso de grafos simples, e denotando as arestas da forma «uv», a função h acima é completamente determinada por f:

$$h(uv) = f(u)f(v).$$

Portanto, um isomorfismo entre grafos simples (V_G, E_G) e (V_H, E_H) é dado por uma função bijetiva $f : V_G \longrightarrow V_H$ tal que, para todos os $u, v \in V_G$:

$$uv \in E_G \implies f(u)f(v) \in E_H.$$

Definição

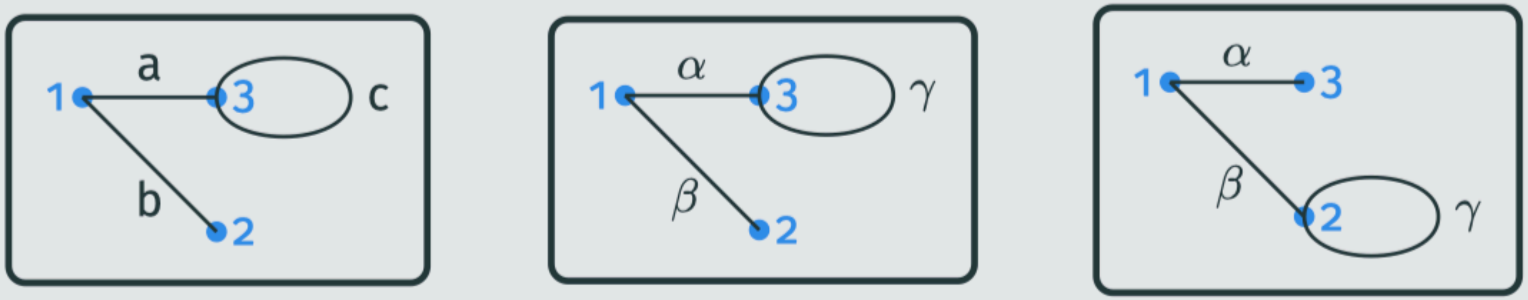
(Di)grafos G e H dizem-se **isomorfos** quando existe um isomorfismo entre eles, e escreve-se $G \simeq H$ neste caso.

Sumário 23

- Isomorfismos entre grafos (continuação)
- Subgrafos
- Conceitos métricos em grafos
- Grafos Conexos

Nota

Intuitivamente, grafos isomorfos são «iguais a menos da etiquetação dos vértices e aresta».



Nota

Grafos isomorfos têm «as mesmas propriedades».

Mais concretamente, sendo o par $f\colon V_G \longrightarrow V_H$ e $h\colon E_G \longrightarrow E_H$ um isomorfismo entre os grafos $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ e $H = (V_H, E_H, \psi_H)$ (finitos). Então:

- Os grafos têm a mesma ordem e a mesma dimensão:

$$\nu(G) = \nu(H) \quad \text{e} \quad \epsilon(G) = \epsilon(H).$$

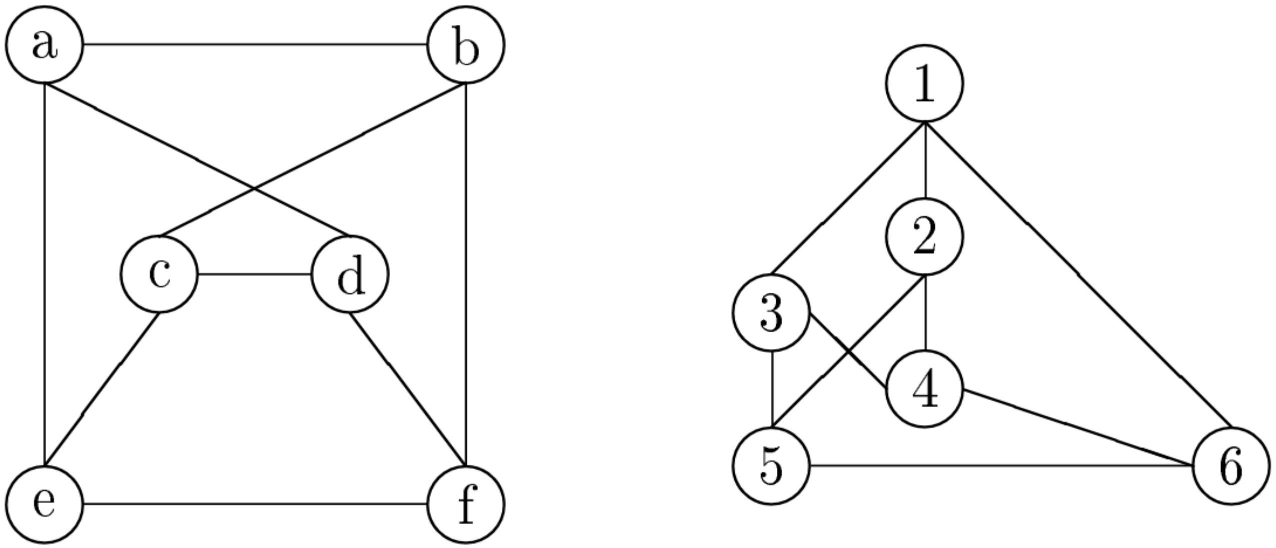
- G é simples se e só se H é simples.
- Vértices correspondentes têm o mesmo grau:

$$\text{para cada } v \in V_G,\ d_G(v) = d_H(\varphi(v)).$$

- Portanto: $\quad \Delta(G) = \Delta(H) \quad \text{e} \quad \delta(G) = \delta(H).$

13. Diga, justificando, se os grafos representados a seguir são isomorfos.

Folha 5



12. Mostre que, existem:

    (a) quatro grafos simples não isomorfos de ordem **3**;

    (b) onze grafos simples não isomorfos de ordem **4**.

15. Mostre que nenhum grafo com **14** vértices é isomorfo ao seu complementar.

Definição

Sejam $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ e $H = (V_H, E_H, \psi_H)$ grafos. O grafo H diz-se **subgrafo** de G quando $V_H \subseteq V_G$, $E_H \subseteq E_G$ e ψ_H é a restrição de ψ_G ao conjunto E_H.

Neste caso também se diz que G é um **supergrafo** de H.

Nota

Cada grafo é subgrafo de si próprio. Se H é um subgrafo de G e $H \neq G$, então diz-se que H é um subgrafo próprio de G.

Definição

Um subgrafo $H = (V_H, E_H, \psi_H)$ de $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ diz-se **abrangente** quando $V_H = V_G$.

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo e sejam $\widehat{V} \subseteq V$ e $\widehat{E} \subseteq E$.

- O **subgrafo $G[\widehat{V}]$ de G induzido por $\widehat{V}$** é o grafo cujo conjunto de vértices é $\widehat{V}$ e cujo conjunto de arestas é o conjunto das arestas de G com extremos em $\widehat{V}$.
- O **subgrafo $G[\widehat{E}]$ de G induzido por $\widehat{E}$** é o grafo cujo conjunto de arestas é $\widehat{E}$ e cujo conjunto de vértices é constituído pelos vértices extremos das arestas de $\widehat{E}$.

Nota

- Por definição, $G[V - \widehat{V}]$ é o sugrafo gerado pelo complemento de $\widehat{V}$, e escrevemos simplesmente $G - \widehat{V}$. Ainda mais, se $\widehat{V} = \{v\}$, escreve-se simplesmente $G - v$.
- Denota-se por $G - \widehat{E}$ o subgrafo abrangente cujo conjunto de arestas é $E - \widehat{E}$. Se $\widehat{E} = \{e\}$ escreve-se simplesmente $G - e$.

  Atenção: Em geral $G[E - \widehat{E}]$ e $G - \widehat{E}$ são distintos.

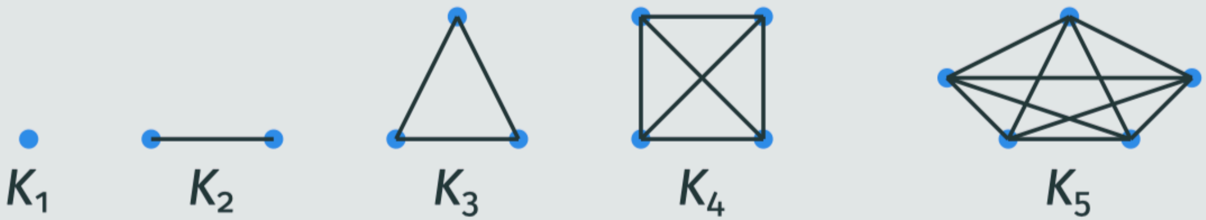
Definição

Um grafo simples G diz-se **completo** quando todos os pares de vértices são adjacentes. Um grafo $G = (V, E, \psi)$ diz-se **nulo** quando $E = \varnothing$; ou seja, quando não tem arestas.

Nota

- A menos de isomorfismo, existe um único grafo completo de ordem $n \in \mathbb{N}$. Denota-se este grafo por K_n, e tem-se $\epsilon(K_n) = \binom{n}{2}$.
- Cada grafo nulo é simples, de facto, os grafos nulos são precisamente os grafos complementares dos grafos completos. Portanto, denotamos o grafo nulo com n vértices por $K_n^\complement$.

Exemplos (Grafos completos)



Definição

Seja $k \in \mathbb{N}$. Um grafo G diz-se **k-regular** quando todos os seus vértices têm grau k. Um grafo G diz-se **regular** quando G é k-regular para algum $k \in \mathbb{N}$.

Nota

- Os grafos 3-regulares designam-se também por grafos cúbicos.
- O grafo K_n é $(n-1)$-regular. De facto, um grafo simples G com n vértices é $(n-1)$-regular se e só se G é completo.
- Um grafo G é 0-regular se e só se G é um grafo nulo.

Parte II

Caminhos de custo mínimo

1. ALGUNS CONCEITOS MÉTRICOS

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Um **passeio** em G é uma sequência

$$P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k)$$

finita onde $v_0, v_1, \ldots, v_k \in V$, $e_1, e_2, \ldots, e_k \in E$ e, para cada $i = 1, 2, \ldots, k$, $\psi(e_i) = v_{i-1}v_i$.

Neste caso diz-se que P é um passeio entre os vértices v_0 e v_k (ou um passeio-(v_0, v_k)). O vértice v_0 designa-se por vértice inicial do passeio P e v_k designa-se por vértice final do passeio P, os vértices $v_1, \ldots, v_{k-1}$ designam-se por vértices intermédios.

Nota

Num grafo simples, um passeio é determinado pela sequência dos sucessivos vértices; isto é, basta considerar

$$P = (v_0, v_1, \ldots, v_k).$$

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo.

- Um **trajeto** é um passeio sem arestas repetidas.
- Um trajeto diz-se **fechado** quando tem pelo menos uma aresta e o vértice inicial coincide com o vértice final ($v_0 = v_k$). Um trajeto fechado diz-se também **circuito**.
- Um **caminho** é um trajeto que não repete vértices.
- Um **ciclo** P em G é intuitivamente um «caminho fechado». Mais rigorosamente,
  1. P é um *lacete* $P = (v_0, e, v_0)$, ou
  2. $P = (v_0, a, v_1, b, v_0)$ com $v_0 \neq v_1$ e $a \neq b$, ou
  3. $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k, e_{k+1}, v_0)$ é um passeio com $k \geq 2$ e $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k)$ é um caminho.

Nota

Num grafo simples, um ciclo tem pelo menos três vértices.

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo e seja $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots e_k, v_k)$ um passeio de G. Então, o **comprimento de P** é

$$\mathrm{comp}(P) = k;$$

ou seja, $\mathrm{comp}(P)$ é o número de arestas (com eventual repetição) que o constitui.

Nota

No caso dos caminhos e dos trajetos, o comprimento coincide com o número de arestas.

Exemplos

Uma aresta é um caminho de comprimento 1 e um vértice é um caminho de comprimento 0.

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo (finito). Para $x, y \in V$, consideremos o conjunto

$$\mathcal{P}_{x,y} = \{\text{os caminhos entre } x \text{ e } y\}.$$

Designa-se por **distância** entre vértices de G a função

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}\colon V \times V &\longrightarrow \{0, 1, \dots, \nu(G), \infty\}\\ (x, y) &\longmapsto \begin{cases} \min\{\operatorname{comp}(P) \mid P \in \mathcal{P}_{x,y}\} & \text{se } \mathcal{P}_{x,y} \neq \varnothing,\\ \infty & \text{se } \mathcal{P}_{x,y} = \varnothing.\end{cases}\end{aligned}$$

Nota

Tem-se

$$\operatorname{dist}(x, x) = 0, \quad \operatorname{dist}(x, y) + \operatorname{dist}(y, z) \geq \operatorname{dist}(x, z),$$

e $\operatorname{dist}(x, y) = \operatorname{dist}(y, x)$, para todos os $x, y, z \in V$.

Teorema

Seja $G = (V, E)$ *um grafo simples finito.*

- G *contém um caminho* P *tal que* $comp(P) \geq \delta(G)$.
- *Se* $\delta(G) \geq 2$, *então* G *contém um ciclo* C *tal que* $comp(C) \geq \delta(G) + 1$.

Definição

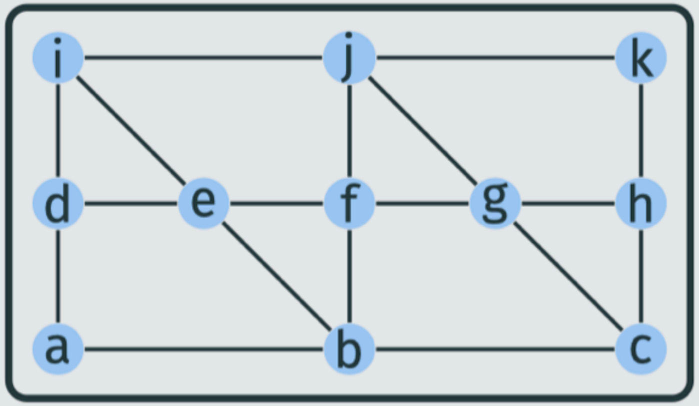
Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito com $V \neq \varnothing$.

- A **cintura** $g(G)$ de G é o comprimento de um circuito de menor comprimento em G se existe pelo menos um circuito em G; caso contrario $g(G) = \infty$.
- Seja $v \in V$. A maior distância entre v e todos os vértices de G designa-se por **excentricidade** de v e denota-se por $e(v)$.

  Mais formalmente: $e(v) = \max_{u \in V} \operatorname{dist}_G(u, v)$.
- A maior excentricidade dos seus vértices designa-se por **diâmetro** de G e denota-se por $\operatorname{diam}(G)$.

  Nota: $\operatorname{diam}(G) = \max_{x,y \in X} d(x, y)$.
- A menor excentricidade dos vértices de G designa-se por **raio** e denota-se por $r(G)$.
- Um vértice v diz-se **central** quando $e(v) = r(G)$. O conjunto dos vértices centrais designa-se por **centro** do grafo.

Considere o seguinte grafo G.



1. Determine a cintura do grafo G.
2. Determine a excentricidade dos vértices de G.
3. Determine o raio e o diâmetro de G.
4. Determine o centro de G.

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito com $V \neq \varnothing$. Então,

$$r(G) \leq \mathrm{diam}(G) \leq 2r(G).$$

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Os vértices $u, v \in V$ dizem-se **conexos** quando existe um caminho entre eles em G. O grafo G com pelo menos um vértice diz-se **conexo** quando todos os seus vértices são conexos. Um grafo não conexo diz-se **desconexo**.

Definição

Os subgrafos induzidos pelas classes de equivalência da relação de conexidade dizem-se **componentes conexas**. O número de componentes conexas de G denota-se por $\mathrm{cc}(G)$.

Nota

- Um grafo G é conexo se e só se $\mathrm{cc}(G) = 1$.
- As componentes conexas são precisamente os subgrafos (induzidos) conexos maximais.

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo conexo. Então, $\nu(G) \leq \varepsilon(G) + 1$.

Folha 5

25. Determine o número máximo de vértices que um grafo com 4 componentes conexas e 20 arestas pode ter.

11. Seja G um grafo simples. Demonstre ou refute as seguintes afirmações:

(a) se G é regular então G^c é um grafo regular.

(b) se G e G^c são ambos r-regulares então a ordem de G é par.

(c) se G é conexo então G^c é conexo.

(d) se G não é conexo então G^c é conexo.

Sumário 24

- Pontes.
- O problema das pontes de Königsberg.
- Grafos bipartidos.
- O Algoritmo de Dijkstra

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Uma aresta $a \in E$ diz-se uma **ponte** (ou uma **aresta de corte**) quando $\mathrm{cc}(G - a) > \mathrm{cc}(G)$.

Nota

Portanto, num grafo finito G, uma aresta a de G é uma ponte se e só se $\mathrm{cc}(G - a) > \mathrm{cc}(G)$, mais concretamente, se e só se $\mathrm{cc}(G - a) = \mathrm{cc}(G) + 1$.

Teorema

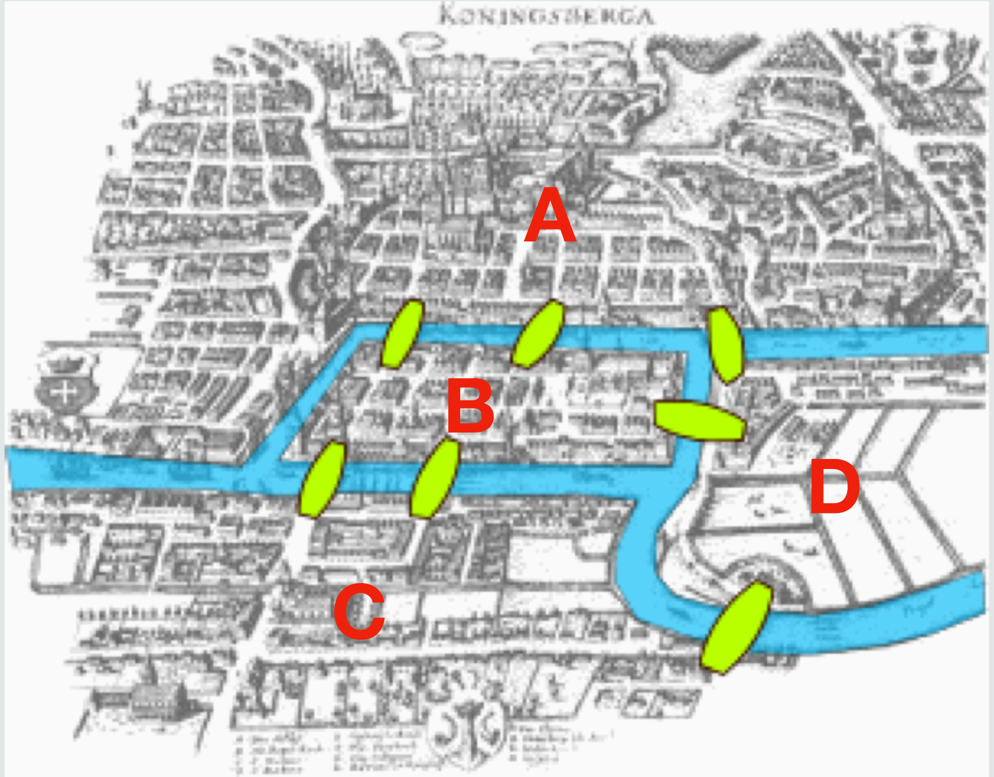
Uma aresta a de um grafo G é uma ponte se e só se a não pertence a nenhum ciclo de G.

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito. Um circuito em G diz-se **circuito de Euler** quando contém todas as arestas de G.

Teorema

Seja G um grafo finito e conexo. Então, G tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de G tem grau par.



Será possível cruzar as sete pontes de Königsberg numa caminhada contínua sem passar duas vezes por uma delas?

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito. Um trajeto em G diz-se **trajeto de Euler** quando contém todas as arestas de G.

Teorema

Seja G um grafo finito e conexo. Então, G tem um trajeto de Euler se e só o número de vértices de grau ímpar é 0 *ou* 2.

Definição

Um grafo $G = (V, E, \psi)$ diz-se **bipartido** quando existem subconjuntos não-vazios $X, Y \subseteq V$ de V com $V = X \cup Y$ e $X \cap Y = \varnothing$ tais que os grafos $G[X]$ e $G[Y]$ são nulos.

Isto é, não existem arestas entre qualquer par de vértices de X nem entre qualquer par de vértices de Y; ou seja, cada aresta de G tem um extremo em X e outro em Y.

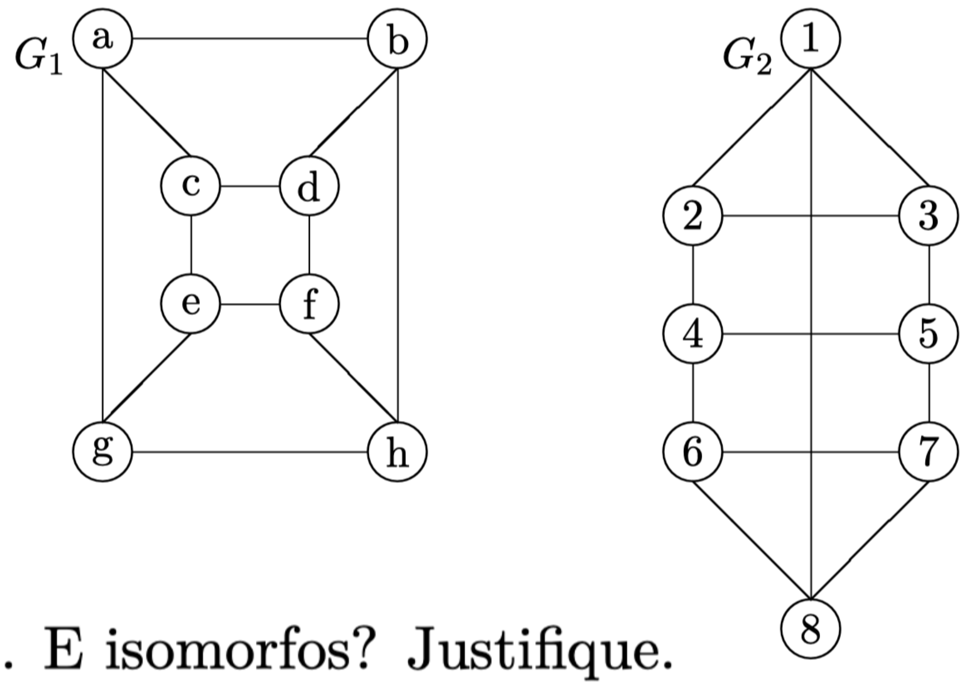
Uma tal partição $\{X, Y\}$ do conjunto V dos vértices de G designa-se por **bipartição dos vértices**. Neste caso denota-se G por (X, Y, E, ψ) (ou simplesmente (X, Y, E) se G é simples).

Teorema

Um grafo G é bipartido se e só se G não tem ciclos de comprimento ímpar.

16. Considere os seguintes grafos G_1 e G_2.

Folha 5



Diga se G_1 ou G_2 são grafos bipartidos. E isomorfos? Justifique.

O ALGORITMO DE DIJKSTRA

Folha 5

30. Uma rede rodoviária entre 6 povoações A, B, C, D, E e F é constituída por 8 estradas tal como se descreve a seguir:

- entre A e B com 30 Km;
- entre B e E com 20 Km;
- entre E e F com 40 Km;
- entre A e C com 22 Km;
- entre C e E com 12 Km;
- entre D e F com 18 Km;
- entre A e D com 30 Km;
- entre C e D com 36 Km;

a) Represente esta rede rodoviária por um grafo com pesos nas arestas.

b) Aplique o algoritmo de Dijkstra ao grafo para determinar o caminho mais curto entre a povoação D e a povoação B e a respectiva distância.

Definição

Um **grafo com custos não negativos nas arestas** $G = (V, E, W)$ é dado por um grafos simples (V, E) e uma **matriz de custos**

$$W \colon V \times V \longrightarrow [0, \infty]$$

tais que, $W(u, v) = W(v, u)$, $W(u, u) = 0$ e, para todos os $u \neq v \in V$, $W(u, v) = \infty$ se $uv \notin E$. (Logo, podemos dispensar E.)

Para um caminho $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ em G, o **custo de P** é

$$W(P) = \sum_{i=0}^{k-1} W(v_i, v_{i+1})$$

(onde $\alpha + \infty = \infty = \infty + \alpha$).

As variáveis

- `start` $=$ o vértice inicial.
- Para cada $v \in V$:
  - **marca**$(v) =$ «custo» do caminho de menor «custo» entre `start` e v (até o momento).
  - **ant**$(v) =$ antecessor de $v \neq$ `start` no caminho de menor «custo» entre `start` e v (até o momento).
- **temp** $=$ lista dos vértices com valores temporários.
- `menor` $=$ vértice de menor «custo» (neste momento).

O desenvolvimento

- Inicializar as variáveis:
    - Para cada $v \in V$: $\textbf{marca}(v) = \infty$, $\textbf{ant}(v) = \varnothing$.
    - $\textbf{marca}(\texttt{start}) = 0$.
    - $\textbf{temp} = V \setminus \{\texttt{start}\}$ e $\texttt{menor} = \texttt{start}$.
- Repetir:
    - $c_{\mathrm{aux}} = \infty$.
    - Para todo o v em **temp**:
        - Se $\textbf{marca}(v) > \textbf{marca}(\texttt{menor}) + W(\texttt{menor}, v)$, então

$$\begin{aligned} \textbf{marca}(v) &= \textbf{marca}(\texttt{menor}) + W(\texttt{menor}, v), \\ \textbf{ant}(v) &= \texttt{menor}\,. \end{aligned}$$

        - Se $\textbf{marca}(v) < c_{\mathrm{aux}}$ então $c_{\mathrm{aux}} = \textbf{marca}(v)$ e $v_{\mathrm{aux}} = v$ (lembrar do «menor custo»).
    - $\textbf{temp} = \textbf{temp} \setminus \{v_{\mathrm{aux}}\}$ e $\texttt{menor} = v_{\mathrm{aux}}$.

  Até $\texttt{menor} =$ o vértice terminal.

Folha 5

31. Seja G um grafo simples não orientado com conjunto de vertices $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e matriz de custos

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty \\ 5 & 0 & 8 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & 8 & 0 & 1 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & 1 & 0 & 3 & \infty & \infty \\ \infty & 6 & \infty & 3 & 0 & 3 & \infty \\ 7 & \infty & \infty & \infty & 3 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Verifique se G é um grafo bipartido.
- Aplique o algoritmo de Dijkstra para determinar um caminho de custo mínimo entre os vértices 1 e 4.

Sumário 25

- Carateriização de árvores e árvores abrangente.
- Contrações de arestas e fusão de extremos de uma aresta.
- Sobre o número de árvores abrangentes.
- A fórmula de Cayley.

Parte III
Árvores e florestas

Definição

Um grafo simples G diz-se uma **floresta** se G não contém ciclos. Uma floresta conexa designa-se por **árvore**.

Nota

Uma floresta é um grafo simples cujas componentes conexas são árvore.

Lema

Cada árvore finita com pelo menos dois vértices tem pelo menos dois vértices de grau 1 *(chamado* ***folhas****).*

Lema

Uma árvore com n *vértices tem precisamente* $n - 1$ *arestas.*

Teorema

Um grafo G *conexo com* $n \geq 1$ *vértices é uma árvore se e só se* G *tem* $n - 1$ *arestas.*

Teorema

Um grafo G *sem ciclos com* $n \geq 1$ *vértices é uma árvore se e só se* G *tem* $n - 1$ *arestas.*

Teorema

Para um grafo G com pelo menos um vértice, as seguintes afirmações são equivalentes.

(i) *G é uma árvore.*

(ii) *G é «minimamente conexo»; ou seja, G é conexo e cada aresta é uma ponte.*

(iii) *G é «maximamente acíclico», ou seja, G não contém ciclos, mas acrescentando uma aresta obtém-se um ciclo.*

Definição

Seja G um grafo. Um subgrafo abrangente T de G diz-se **árvore abrangente** de G quando T é uma árvore.

Corolário

Cada grafo finito conexo admite uma árvore abrangente. (Por exemplo, podemos escolher um subgrafo «maximamente acíclico».)

Teorema

Um grafo finito G é uma floresta se e só se

$$\epsilon(G) = \nu(G) - \mathrm{cc}(G).$$

Folha 5

26. Seja $T = (V, E)$ uma árvore com pelo menos dois vértices. Mostre que T tem pelo menos duas folhas (vértices de grau 1).

27. Mostre que qualquer árvore com pelo menos dois vértices é um grafo bipartido.

28. Diga o que pode concluir relativamente a uma aresta e que pertence a todas as árvores abrangentes de um grafo conexo G.

Definição

Para um grafo finito G, $\tau(G)$ denota o **número de árvores abrangentes de G**.

Alguns casos particulares

- $\tau(G) = 0 \iff G$ é desconexo.
- $\tau(G) = 1 \impliedby G$ é uma árvore.
- Se G é um ciclo com k arestas, então $\tau(G) = k$
- Se $G =$  (k arestas paralelas), então $\tau(G) = k$.

  As árvores abrangentes de G são precisamente as arestas de G.
- Se $G =$ dois subgrafos G_1 e G_2 unidos por uma ponte ou por um único vértice em comum, então $\tau(G) = \tau(G_1) \cdot \tau(G_2)$.

  De facto, as árvores abrangentes de G correspondem aos pares (T_1, T_2) onde T_1 é uma árvore abrangente de G_1 e T_2 é uma árvore abrangente de G_2.

Folha 5

32. Determine o número de árvores abrangentes do grafo G, para o qual $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e $E(G) = \{13, 25, 34, 35, 46, 47, 58, 78\}$.

Fusão de extremos de uma aresta

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo e seja $a \in E$ com $\psi(a) = \{x, y\}$. Denotamos por $G//a$ o grafo obtido a partir de G por **fusão** de x e y. Mais concretamente, $G//a = (V', E', \psi')$ onde

$$V' = V \setminus \{x, y\} \cup \{v_a\}, \quad E' = E \setminus \{a\}$$

e $\psi(e) = \psi'(e)$ para toda a aresta $e \in E$ com $\psi(e) \cap \{x, y\} = \varnothing$, em todos os outros casos $\psi'(e)$ é dado por $\psi(e)$ com v_a em lugar de x respetivamente y.

Nota

Seja G um grafo finito e seja a uma aresta de G. Por definição,

$$\epsilon(G//a) = \epsilon(G) - 1.$$

Teorema

Seja G um grafo finito e sejam a, b arestas distintas de G. Então,

$$(G//a) - b = (G - b)//a,$$

ou seja, a operação de fusão de extremos de arestas comuta com a operação de eliminação de arestas.

Teorema

Seja G um grafo finito e conexo seja $a \in E(G)$ uma aresta de G que não é um lacete. Então,

$$\tau(G) = \tau(G - a) + \tau(G//a).$$

Teorema (Fórmula de Cayley)

Para cada $n \geq 1$, o número de árvores com n vértices (etiquetadas) é n^{n-2}.

Corolário

Para cada $n \geq 1$, $\tau(K_n) = n^{n-2}$.

Folha 5

33. Determine o número de árvores abrangentes do grafo que se obtém unindo um vértice do grafo completo de ordem 6, K_6, a um vértice de C_6 (ciclo de comprimento 6) por uma aresta.

Teste T2 (Avaliação Discreta) - 15/06/2018

2. A matriz $\mathcal{W}$ contém os custos de instalação (em milhares de euros) de uma rede de fibra ótica entre um conjunto de localizações $\{A, B, C, D, E, F, G\}$:

$$\mathcal{W} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 10 & \infty & \infty & \infty & \infty & 20 \\ 10 & 0 & 50 & \infty & 60 & 20 & \infty \\ \infty & 50 & 0 & 50 & 50 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 50 & 0 & 40 & \infty & \infty \\ \infty & 60 & 50 & 40 & 0 & 10 & \infty \\ \infty & 20 & \infty & \infty & 10 & 0 & 30 \\ 20 & \infty & \infty & \infty & \infty & 30 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) Desenhe o grafo $\mathcal{G}$ que tem como matriz de custos $\mathcal{W}$ e recorra ao algoritmo de Dijkstra para determinar o caminho de custo mínimo entre as localizações A e D, indicando o respetivo caminho e o custo do mesmo.

(b) Seja $\mathcal{H}$ o subgrafo de $\mathcal{G}$ induzido pelo subconjunto de vértices $\{B, C, D, E, F\}$. Aplicando uma fórmula recursiva adequada determine o número de árvores abrangentes de $\mathcal{H}$. Justifique.

(c) Obtenha, justificando, um subgrafo abrangente de $\mathcal{G}$ que seja conexo e bipartido, não se esquecendo de indicar a respetiva bipartição do conjunto dos seus vértices.

Folha 5

24. Seja G um grafo simples de ordem $\nu \geq 2$, tal que $d_G(u) + d_G(v) \geq \nu - 1$, para qualquer par de vértices distintos $u \neq v$. Mostre que:

a) G é conexo.

b) $\operatorname{diam}(G) \leq 2$.

Sumário 26

- Árvores abrangentes de custo mínimo
- O algoritmo de Kruskal
- O algoritmo de Prim

Folha 5

31. Seja G um grafo simples não orientado com conjunto de vértices $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e matriz de custos

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty \\ 5 & 0 & 8 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & 8 & 0 & 1 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & 1 & 0 & 3 & \infty & \infty \\ \infty & 6 & \infty & 3 & 0 & 3 & \infty \\ 7 & \infty & \infty & \infty & 3 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Determine uma árvore abrangente de G de custo mínimo aplicando o algoritmo de Kruskal.

O contexto

Consideremos grafos finitos $G = (V, E, \psi)$ com uma função

$$W \colon E \longrightarrow [0, \infty]$$

de «custos nas arestas». Dada um subgrafo H de G (com o conjunto de arestas $E' \subseteq E$), definimos o «custo de H» como

$$\sum_{e \in E'} W(e).$$

O objetivo

Para um grafo conexo finito $G = (V, E, \psi)$ com $W \colon E \longrightarrow [0, \infty]$, encontrar uma árvore abrangente de custo mínimo.

Convenção: A partir de agora todos os grafos são finitos.

O algoritmo de Kruskal

Descrição do algoritmo

Consideramos um grafo conexo $G = (V, E, \psi)$ e $W\colon E \longrightarrow [0, \infty]$.

1. Ordenar as arestas $(a_1, \dots, a_m)$ de G por ordem não decrescente do seu custo; ou seja,

$$W(a_1) \leq W(a_2) \leq \cdots \leq W(a_m).$$

2. $E' = \varnothing$, $i = 1$.
3. **Enquanto** $T = (V, E')$ não é conexa:
   - **Se** $(V, E' \cup \{a_i\})$ não tem ciclos, **então** $E' = E' \cup \{a_i\}$.
   - $i = i + 1$.
   - **Saltar para** o início de 3.
4. Devolver a árvore abrangente (V, E') de G de custo mínimo.

O algoritmo de Prim

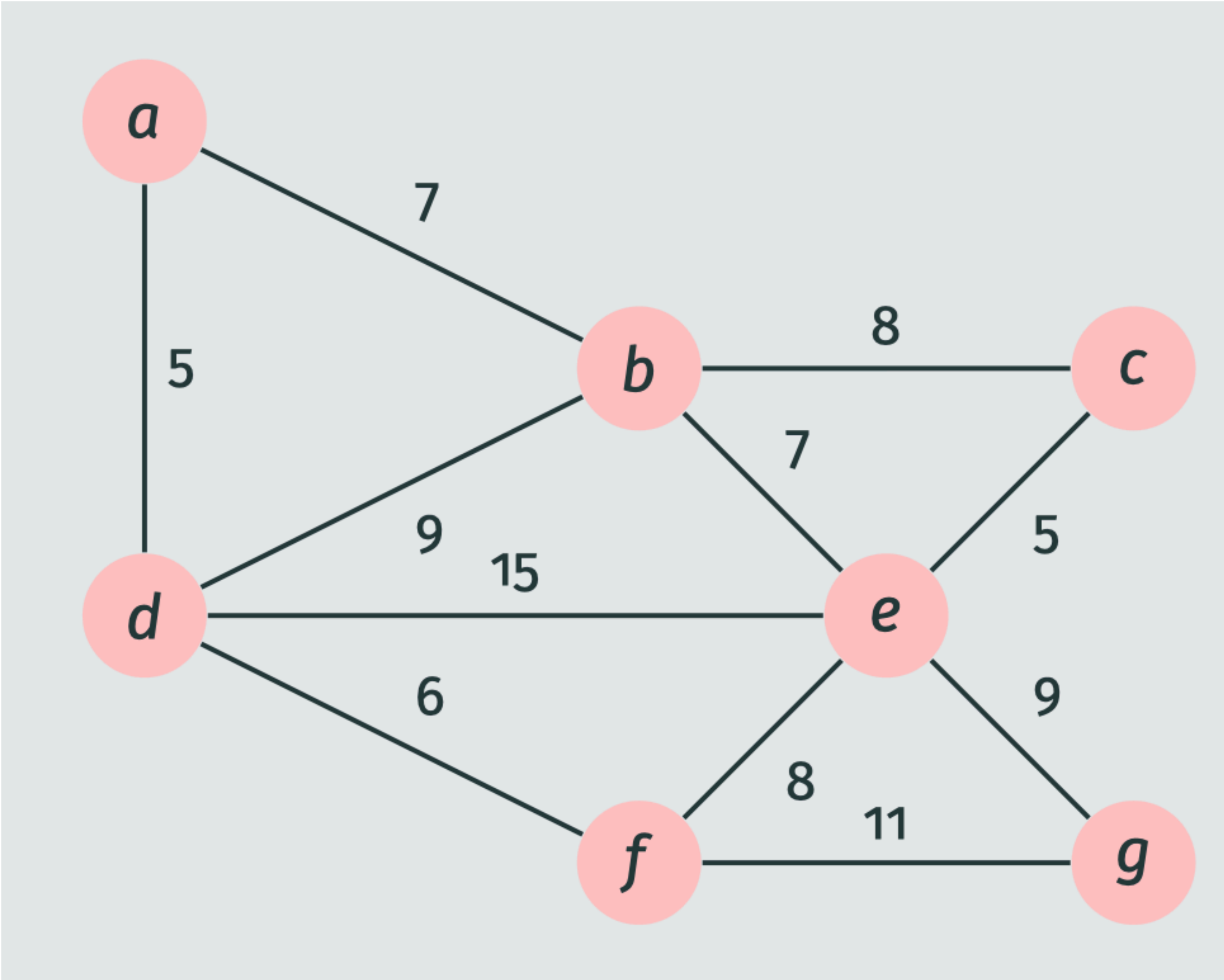
Descrição do algoritmo

Consideramos um grafo conexo $G = (V, E, \psi)$ e $W\colon E \longrightarrow [0, \infty]$.

1. Escolher um vértice $u \in V$.
2. $V' = \{u\}$ e $E' = \varnothing$.
3. **Enquanto** $V' \subsetneqq V$:
   - Entre todas as arestas $e \in E$ com

     $$\psi(e) = vw, \quad v \in V', \quad w \notin V',$$

     determinar uma aresta de menor custo: e^* com $\psi(e^*) = v^*w^*$, $v^* \in V'$ e $w^* \notin V'$.
   - $V' = V' \cup \{w^*\}$, $E' = E' \cup \{e^*\}$.
   - **Saltar para** o início de 3.
4. Devolver a árvore abrangente (V, E') de G de custo mínimo.


a
b
c
d
e
f
g
7
5
8
7
9
15
5
6
9
8
11

Folha 5

34. Considere um grafo G definido pela matriz de custos nas arestas:

$$\begin{bmatrix} 0 & 35 & 40 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 35 & 0 & 25 & 10 & \infty & \infty & \infty \\ 40 & 25 & 0 & 20 & 15 & \infty & \infty \\ \infty & 10 & 20 & 0 & 30 & 8 & 21 \\ \infty & \infty & 15 & 30 & 0 & 15 & 11 \\ \infty & \infty & \infty & 8 & 15 & 0 & 17 \\ \infty & \infty & \infty & 21 & 11 & 17 & 0 \end{bmatrix}$$

Construa uma árvore abrangente de custo mínimo de G com recurso aos algoritmos de Kruskal e de Prim.

Sumário 27 e 28

Revisões

TESTE 2, 29 de Junho de 2022,

(4) Seja G um grafo simples não orientado, com matriz de custos (ou pesos)

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 20 & 10 & \infty & \infty \\ 20 & 0 & \infty & \infty & 30 & 30 \\ 20 & \infty & 0 & 20 & \infty & \infty \\ 10 & \infty & 20 & 0 & 10 & 60 \\ \infty & 30 & \infty & 10 & 0 & 40 \\ \infty & 30 & \infty & 60 & 40 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Indique um subgrafo H de G com 5 vértices que seja bipartido e conexo (apresente uma figura com o subgrafo, identificando os vértices). Determine uma bipartição de H. Justifique.

b) Determine um caminho de custo mínimo entre os vértices **1** e **6**, aplicando o algoritmo de Dijkstra. Apresente todos os passos do algoritmo.

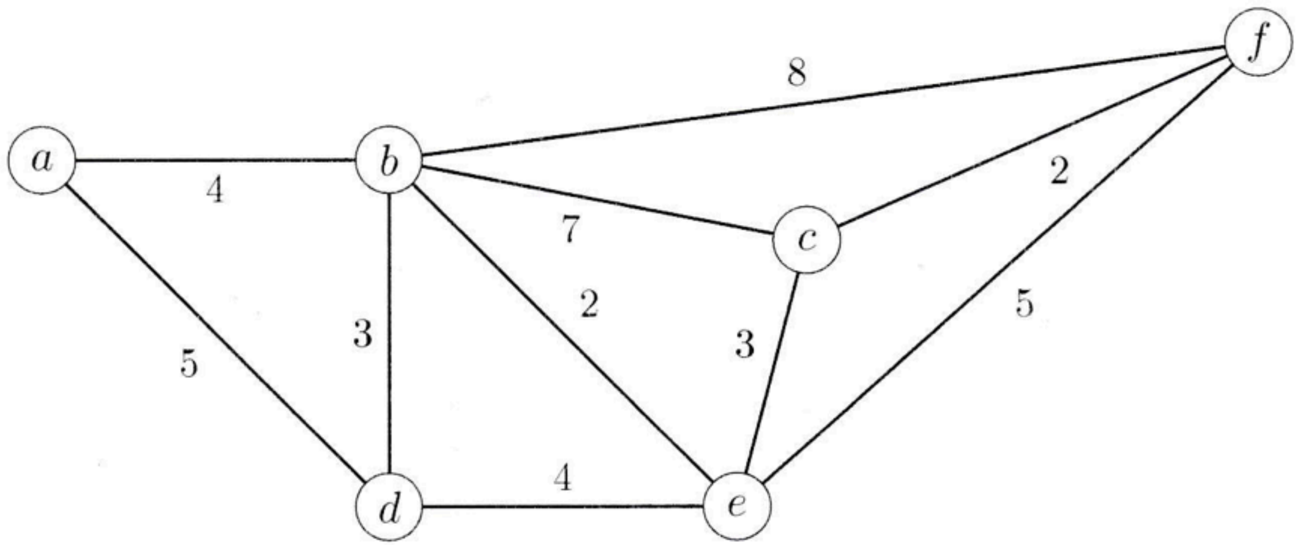
c) Considere o subgrafo F de G induzido pelo subconjunto de arestas $E' = \{12, 13, 14, 25, 34, 45\}$. Determine o número de árvores abrangentes de F, aplicando a fórmula recursiva e indicando em cada passo a aresta selecionada.

d) Determine uma árvore abrangente de G com custo mínimo, aplicando o algoritmo de Kruskal ou o algoritmo de Prim. Apresente todos os passos do algoritmo.

Exame de recurso, 28 de Junho de 2023.

7. (2 val) Seja G um grafo simples não orientado finito. Sabe-se que G tem 57 arestas e o seu grafo complementar $G^{\complement}$ tem 133 arestas. Indique, justificando, o número de vértices de G.

8. (3 val) Seja G o grafo simples não orientado com custos nas arestas representado na figura seguinte.



Determine uma árvore abrangente de G com custo mínimo, aplicando o algoritmo de Kruskal. Apresente todos os passos do algoritmo.

. (1 val) Seja G um grafo não orientado finito conexo e sejam C_1 e C_2 dois caminhos de maior comprimento (ou seja, com o maior número de arestas). Mostre que C_1 e C_2 têm pelo menos um vértice em comum.

Teste T2 (Avaliação Discreta) - 15/06/2018

5. Seja a_n o número de sequências ternárias de comprimento n, $n \in \mathbb{N}$, ou seja, sequências da forma $d_1\ d_2\ \ldots\ d_n$, com $d_i \in \{0, 1, 2\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, para as quais as ocorrências do digíto 0 se verificam sempre antes das do digíto 2. Por exemplo, para $n = 3$, as sequências 000, 002, 021, 222, são válidas, enquanto 200, 201, 202, 220, 210, 020 e 120 não são válidas. Obtenha, justificando, uma relação de recorrência para a_n, indicando também as respetivas condições iniciais.

Teste $N^0 2$ de Matemática Discreta 24 de junho de 2019

1- Sabendo que uma equação de recorrência linear homogénea tem como raízes características 1 com multiplicidade um e 2 com multiplicidade três, responda às seguintes questões.

(1) **1.1** Determine esta equação de recorrência.

(2) **1.2** Determine a solução geral desta equação de recorrência.

2- Responda às seguintes questões sobre funções geradoras.

(3) **2.1** Sabendo que a função geradora da sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ é $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)(1-2x)}$, determine uma fórmula fechada para $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

(3) **2.2** Determine o número de soluções inteiras não negativa da equação

$$x + 2y + 3z = 9,$$

a partir do polinómio gerador do número destas soluções.

Teste T2 (Avaliação Discreta) - 15/06/2018

4. O número de arestas e_n do grafo completo K_n, com $n \in \mathbb{N}$, satisfaz a seguinte relação de recorrência

$$e_n = e_{n-1} + n - 1, \quad \text{com} \quad n \geq 2 \quad \text{e} \quad e_1 = 0.$$

(a) Determine uma fórmula fechada para e_n, $n \in \mathbb{N}$, resolvendo a relação de recorrência dada.

(b) Obtenha na sua forma racional a função geradora da sucessão $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$.