Guião 1

Funções reais de variável real

Linguagem da matemática

Revisões sobre funções reais de variável real

Funções trigonométricas inversas

Teoremas sobre funções contínuas e deriváveis

Paula Oliveira

2021/22

Departamento de Matemática - Universidade de Aveiro

Conteúdo

1 A linguagem da Matemática **1**

1.1 Definições e Teoremas 1

1.2 Conceitos de Supremo e Ínfimo 5

1.2.1 Axioma do Supremo 6

1.3 Distância no Conjunto dos Números Reais 6

1.3.1 Aproximação de Números Reais 7

1.3.2 Vizinhança 7

1.4 A reta “acabada” 8

1.5 Topologia da reta $\mathbb{R}$ 8

1.5.1 Conjunto aberto, conjunto fechado 9

1.5.2 Ponto de acumulação e ponto isolado 10

1.6 Soluções dos exercícios do capítulo 12

2 Funções reais de variável real: recordar **13**

2.1 Conceito de função 13

2.2 Função composta 14

2.3 Funções injetivas e funções sobrejetivas 15

2.4 Funções monótonas 16

2.5 A função inversa 16

2.6 Funções pares e ímpares 17

2.7 Função limitada 18

2.8 As funções exponencial e logarítmica 19

2.9 Limites de funções reais de variável real 19

2.9.1 Definição sequencial de limite 20

2.9.2 Limite usando vizinhanças 21

2.9.3 Limites infinitos e limites “no infinito” 22

2.9.4 Limites laterais 23

2.9.5 Propriedades dos limites 23

2.9.6 Teoremas sobre Limites 25

2.10 Funções contínuas 26

2.10.1 Propriedades das funções contínuas 27

2.10.2 Assíntotas 28
2.11 Funções deriváveis 29
2.11.1 Derivada de uma função num ponto 30
2.11.2 Reta tangente 31
2.11.3 Noção de diferencial 31
2.11.4 Derivadas laterais 33
2.11.5 Continuidade e derivabilidade 33
2.11.6 Função derivada 33
2.11.7 Limites laterais da função derivada 34
2.11.8 Regras de derivação 34
2.11.9 Derivadas de ordem superior 35
2.11.10 Derivada da função composta 35
2.11.11 Derivada da função inversa 36
2.12 Soluções dos exercícios do capítulo 36

3 As funções trigonométricas **39**
3.1 Funções trigonométricas diretas 39
3.1.1 As funções secante, cossecante e cotangente 40
3.2 Funções trigonométricas inversas 42
3.2.1 Função arco seno 42
3.2.2 Função arco coseno 43
3.2.3 Função arco tangente 45
3.2.4 Função arco cotangente 46
3.3 Exercícios 47
3.4 Soluções dos exercícios do capítulo 48

4 Teoremas sobre funções contínuas e funções deriváveis **50**
4.1 Teoremas sobre funções contínuas 50
4.1.1 Teorema de Bolzano 50
4.1.2 Teorema de Weierstrass 51
4.2 Teoremas sobre funções deriváveis 54
4.2.1 O Teorema de Rolle 54
4.2.2 O Teorema de Lagrange 55
4.2.3 Máximos e mínimos locais 58
4.2.4 Convexidade, concavidade e pontos de inflexão 59
4.3 Teorema e regra de Cauchy 62
4.4 Soluções dos exercícios do capítulo 68

Capítulo 1

A linguagem da Matemática

Neste capítulo vamos fazer uma introdução à linguagem usada em Cálculo e recordar algumas propriedades da Lógica.

O intuito é ajudar o estudante a entender um texto matemático, a saber distinguir definições de teoremas e conseguir elaborar demonstrações simples.

A implicação material pode ser definida usando outros conetivos lógicos. Pela sua definição, a implicação material $P \Rightarrow Q$ só é falsa quando P é Verdadeira e Q é Falsa, ou seja, quando $\sim P$ é Falsa e Q é Falsa. Esta é exatamente a propriedade da disjunção de $\sim P$ e Q, logo

$$\boxed{P \Rightarrow Q \text{ é equivalente a } \sim P \vee Q.}$$

Usando as leis de De Morgan pode-se verificar que

$$\boxed{\sim (P \Rightarrow Q) \text{ é equivalente a } P \wedge \sim Q.}$$

"Se m e n são pares então mn é par" é um teorema, contudo, a sua recíproca, "Se mn é par então m e n são pares", não é um teorema.

(prova direta, indireta e redução ao absurdo, condição necessária, suficiente)

1.5 Topologia da reta $\mathbb{R}$

Interior - $a \in A$ diz-se *ponto interior* do conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, se existe uma vizinhança $\mathcal{V}(a)$ de a, contida em A, $\mathcal{V}(a) \subseteq A$, isto é, $a \in A$ é ponto interior a A se e só se

$$\exists \delta > 0 : \underbrace{]a-\delta, a+\delta[}_{\mathcal{V}_\delta(a)} \subseteq A.$$

O *interior de* A é o conjunto de todos os pontos interiores de A e denota-se por $\mathrm{Int}(A)$.

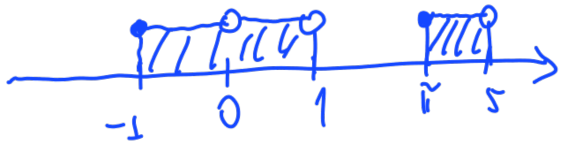
Exterior - $a \in \mathbb{R}\backslash A$ diz-se *ponto exterior* a $A \subseteq \mathbb{R}$ se existe uma vizinhança $\mathcal{V}(a)$ de a contida no complementar de A, $\mathcal{V}(a) \subseteq \mathbb{R} \setminus A$, isto é,

$$\exists \delta > 0 :]a-\delta, a+\delta[\subseteq \mathbb{R} \setminus A.$$

$a \in \mathbb{R}$ é ponto exterior de A se e só se é ponto interior de $\mathbb{R}\backslash A$. (Porquê?)

O *exterior* de A é o conjunto de todos os pontos exteriores de A e denota-se por $\mathrm{Ext}(A)$.

Exemplo 1.12. Seja $A = [-1, 0[\cup]0, 1[\cup[\pi, 5[$.



$\mathrm{int}(A) =]-1, 0[\cup]0, 1[\cup]\pi, 5[$

a é ponto fronteira de A se

$\forall \delta > 0.\ ]a-\delta, a+\delta[\cap A \neq \emptyset \ \land$

$]a-\delta, a+\delta[\cap (\mathbb{R}\backslash A) \neq \emptyset$

Fronteira - Um ponto $a \in \mathbb{R}$ diz-se *ponto fronteira* de $A \subseteq \mathbb{R}$ se toda a vizinhança de a interseta A e interseta o complementar de A ($\mathbb{R} \backslash A$), isto é,

$$\forall \delta > 0,]a-\delta, a+\delta[\cap A \neq \emptyset \wedge]a-\delta, a+\delta[\cap \mathbb{R} \setminus A \neq \emptyset.$$

$a \in \mathbb{R}$ é ponto fronteira de A se e só se é ponto fronteira de $\mathbb{R} \backslash A$. (Porquê?)

A *fronteira* de A é o conjunto de todos os pontos fronteira de A e denota-se por $\operatorname{Frt}(A)$.

Fecho (ou aderência) - O conjunto formado pelos pontos fronteira e pelos pontos interiores de $A \subseteq \mathbb{R}$ designa-se por *fecho ou aderência de A* e denota-se por $\overline{A}$, $\overline{A} = \operatorname{Int}(A) \cup \operatorname{Frt}(A)$. Os pontos de $\overline{A}$ designam-se por pontos aderentes ou pontos de aderência.

Exercício 1.7 Seja $A =]-\infty, 1] \cup \{3\} \cup]10, 35]$. Determine:

- O interior de A;
- O complementar de A;
- O exterior de A;
- A fronteira de A;
- O fecho de A.

Fronteira de $[0,1] \cap \mathbb{Q}$?

1.5.1 Conjunto aberto, conjunto fechado

Aberto - Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ diz-se *aberto* em $\mathbb{R}$ se $A = \text{Int}(A)$.

Fechado - Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ diz-se *fechado* em $\mathbb{R}$ se o seu complementar é aberto, isto é, se $\mathbb{R} \setminus A = \text{Ext}(A)$.

Exemplo 1.14. Seja $A = [2, 8] \cup \{0, 1, 9\}$.

1.5.2 Ponto de acumulação e ponto isolado

Seja $A \subseteq \mathbb{R}$. Um ponto $a \in \mathbb{R}$ diz-se ***ponto de acumulação*** de A se toda a vizinhança de a, $\mathcal{V}(a)$, interseta $A \setminus \{a\}$:

$$\forall \mathcal{V}(a), \mathcal{V}(a) \ \cap \ A \setminus \{a\} \ \neq \ \emptyset$$

Usando as vizinhanças centradas no ponto, podemos escrever a definição de ponto de acumulação na forma:

$a \in \mathbb{R}$ é *ponto de acumulação* de A se e só se $\forall \delta > 0, \ ]a-\delta, a+\delta[\ \cap \ A \ \setminus \{a\} \ \neq \ \emptyset.$

Ao conjunto dos pontos de acumulação de A chama-se ***derivado*** **de** A e denota-se por A'.

Um ponto $a \in A$ diz-se ***ponto isolado de*** A se existe uma vizinhança de a, $\mathcal{V}(a)$, que interseta A apenas no ponto a:

$$\exists \mathcal{V}(a) : \mathcal{V}(a) \cap A = \{a\}.$$

Exemplo 1.15. Seja $A \ =]-\sqrt{7}, 3] \ \cup \ \{\pi\}$.

$A = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$ $\quad A'$?

Capítulo 2

Funções reais de variável real: recordar

2.1 Conceito de função

Sejam A e B conjuntos não vazios. Uma **função** $f : A \to B$ é uma correspondência que <u>*a cada*</u> elemento $x \in A$ associa <u>*um único*</u> elemento $f(x) \in B$. Isto escreve-se

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \to & B \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array} \qquad \text{e, em notação lógica,} \qquad \forall x \in A, \exists^1 y \in B : y = f(x)$$

O quantificador $\exists^1$ significa "existe um e um só" ou "existe um único".

Chama-se **domínio** de f ao conjunto A, **conjunto de chegada** ao conjunto B e **contradomínio** (ou *conjunto das imagens*) de f ao conjunto dado por

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subseteq B$$

O domínio de f denota-se por D_f e o seu contradomínio por $CD_f = f(D_f)$.

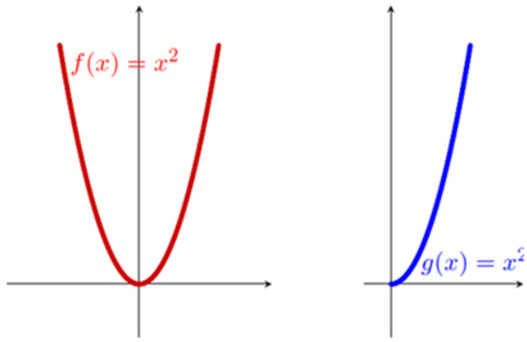


Figura 2.1: Gráfico das funções $f(x) = x^2$ com domínio $D_f = \mathbb{R}$ e $g(x) = x^2$ com domínio $D_g = \mathbb{R}_0^+$.

2.2 Função composta

Dadas duas funções $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se o contradomínio de f for um subconjunto do domínio de g ($CD_f \subseteq D_g$) pode definir-se a **função composta** $g \circ f$:

$$\begin{array}{rccl} g \circ f: & D_f & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Exemplo 2.4. Considere-se a função definida pela expressão analítica

$$f(x) = \sqrt{\frac{4-x}{x^2-2x}}.$$

2.3 Funções injetivas e funções sobrejetivas

Definição 2.1. *Uma função* $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *diz-se* ***injetiva*** *se*

$$\forall x, x' \in D_f,\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

Pode provar-se a injetividade de uma função usando o facto de que a função f é injetiva se e só se

$$\forall x, x' \in D_f,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Definição 2.2. *Uma função* $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *diz-se* ***sobrejetiva*** *se*

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in D_f : f(x) = y.$$

Pode mostrar-se que uma função real f é sobrejetiva mostrando que o seu contradomínio é $CD_f = \mathbb{R}$.

Uma função $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se **bijetiva** se é injetiva e sobrejetiva, ou seja,

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \exists^1 x \in D_f : y = f(x).$$

Exercício 2.3 Considere a família de funções $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f_a(x) = a^x$ com $a \in \mathbb{R}^+$. Existe alguma função desta família que não seja injetiva?

2.5 A função inversa

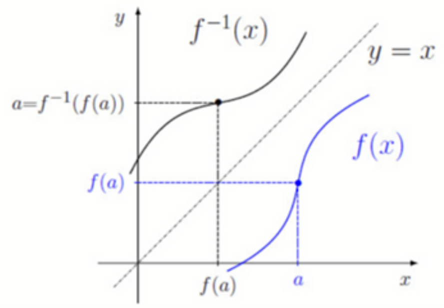
Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função **injetiva**. Então, a **cada** $y \in CD_f$ está associado um **único** $x \in D_f$ tal que $y = f(x)$. Por isso, conclui-se que existe uma função $g : CD_f \to \mathbb{R}$ tal que $y = f(x) \Rightarrow g(y) = x$.

Denota-se por f^{-1} a função (dita **inversa** de f) que satisfaz esta propriedade. Se existe, a inversa é **única**.

Uma função diz-se **invertível** se admite inversa.

f é invertível (com inversa g) se e só se existe $g : CD_f \to \mathbb{R} : \forall x \in D_f,\ (g \circ f)(x) = x$.

Observação 2.1. O gráfico de f^{-1} é obtido do gráfico de f por simetria em relação à reta $y = x$.



Exercício 2.7 Determine as inversas (com domínios!) de $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, de $g(x) = \sqrt{x}$ e de $f \circ g$.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$CD_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$y = \dfrac{1}{1+x}$

$1 + x = \dfrac{1}{y}$

$x = \dfrac{1}{y} - 1$

$f^{-1}(y) = \dfrac{1}{y} - 1$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $CD_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$