



Análise Matemática II

Atividade 02 – Métodos Numéricos para resolução de Sistemas de ED

Docente: Arménio Correia

Carlos Miguel Parreira Pais nº 2010017171 – LEI

José Fernando Esteves de Almeida nº 2019129077 – LEICE

Pedro Rodrigues nº2019136525 – LEICE

Coimbra, 09 de Maio de 2020

Índice

1. Introdução.....	3
1.1 Enunciado da atividade proposta e interpretação do mesmo	3
2. Métodos Numéricos para resolução de Sistemas de ED	5
2.0 Cálculo do Passo.....	5
2.1 Método de Euler	6
2.1.1 Fórmulas.....	6
2.1.2 Algoritmo/Função	8
2.2 Método de Euler Melhorado ou Modificado (Método de Heun)	9
2.2.1 Fórmulas.....	9
2.2.2 Algoritmo/Função	13
2.3 Método de Runge-Kutta de Ordem 2	14
2.3.1 Fórmulas.....	14
2.3.2 Algoritmo/Função	18
2.4 Método de Runge-Kutta de Ordem 4	19
2.4.1 Fórmulas.....	19
2.4.2 Algoritmo/Função	25
3. Exemplos de aplicação e teste dos métodos	26
3.1 Algoritmo de Resolução	26
3.2 Problema do Pêndulo.....	27
3.2 Movimento Livre Amortecido.....	30
3.3 Modelo Vibratório Mecânico	32
3.4 Movimento Harmónico Simples	34
3.5 Circuitos Elétricos em Série.....	36
4. Conclusão.....	38
5. Anexos.....	39
6. Bibliografia	42

1. Introdução

1.1 Enunciado da atividade proposta e interpretação do mesmo

Matlab .: Atividade02Trabalho - Métodos Numéricos para resolução de Sistemas de ED

No seguimento da aula teórico-prática online » PVI_SistemaEuaçõesDiferenciais - Problema do Pêndulo, implemente em Matlab:

- Método de Euler
- Método de Euler Melhorado
- Métodos de Runge-Kutta de ordem 2 (RK2) e de ordem 4 (RK4)

para resolver sistemas de equações diferenciais com condições iniciais.
Sempre que possível, obtenha a solução exata do problema de aplicação!

Sugestões:

- Utilize os documentos das aulas Práticas para desenvolver a actividade, assim como, a redefinição e adaptação das funções que implementou na actividade01.
- Utilize o exemplo/exercício sobre o pêndulo e outros, tais como: sistemas mecânicos mola-massa com amortecimento e sem amortecimento, circuitos elétricos modelados por ED de ordem 2 » para testar as funções implementadas.

Testes, exercícios e problemas

Equações Diferenciais de ordem 2 _ Problemas de aplicação.pdf

- Faça uma pesquisa sobre a aplicação de equações diferenciais lineares de 2ª ordem a outros problemas em áreas da engenharia, biologia ou economia. Resolva esses problemas de aplicação recorrendo à aplicação a criar nesta atividade.
- O tipo de interface para esta atividade é livre, no entanto, é de considerar a utilização de uma GUI semelhante às de outras atividades com a inclusão de um Menu Pop-up para escolha do problema de aplicação.
- Apresente um relatório da atividade.

Notas:

- Dúvidas e questões sobre esta atividade podem ser colocadas no tópico » Dúvidas e questões sobre a Atividade02 » do Fórum Matlab.
- Trabalho realizado em grupo de 4 alunos e apenas 1 aluno do grupo deve submeter o trabalho devidamente identificado e numa pasta (At02MNSED) compactada em modo zip. No ficheiro de relatório deve constar o nome completo dos alunos, assim como, o respetivo número de aluno e curso. Os grupos podem ter menos alunos, devem ser fixos para outras atividades/trabalhos de grupo a realizar até ao final do semestre e excepcionalmente estes trabalhos também podem ser feitos individualmente com informação prévia e justificação a enviar para o docente responsável pela unidade curricular.
- Comentar as funções principais recorrendo a uma mancha de comentários semelhante à utilizada na função NEulerSED e acrescentar alguns comentários ao longo do código que se acharem pertinente para explicarem linhas de código "inovadoras" que também devem constar no relatório.
- Outras observações serão colocadas no fórum e tópico de apoio e dúvidas sobre esta atividade (<https://moodle.isec.pt/moodle/mod/forum/discuss.php?d=23999>).

Este trabalho surge no âmbito da unidade curricular de Análise Matemática 2 – Matemática Computacional do curso de Engenharia Informática do Instituto Superior de Engenharia de Coimbra e consiste na redefinição e adaptação das funções implementadas anteriormente na Atividade01 (Métodos Numéricos para a resolução de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) e Problemas de Valor Inicial (PVI)) para a resolução de Sistemas de Equações Diferenciais com condições iniciais.

Pretende-se a implementação desses Métodos através do desenvolvimento de um GUI em linguagem de programação MATLAB, com o intuito de resolver exemplos/exercícios (Pêndulo, Sistemas Mecânicos Massa-Mola com amortecimento e sem amortecimento, circuitos elétricos modelados por equações de 2ª ordem, entre outros), de modo a testar as funções implementadas.

Por fim, é também pretendido apresentar uma breve pesquisa sobre a aplicação de equações diferenciais lineares de 2ª ordem a outros problemas em áreas da engenharia, biologia ou economia e resolver esses problemas de aplicação recorrendo à aplicação a criar nesta atividade.

O trabalho está dividido em 2 partes:

- 1ª Parte - Descrição de vários Métodos Numéricos e seus respetivos algoritmos e funções;
- 2ª Parte – Exemplos de aplicação e teste dos Métodos Numéricos.

2. Métodos Numéricos para resolução de Sistemas de ED

2.0 Cálculo do Passo

O valor do passo, h , será usado por todos os Métodos Numéricos implementados. Assim, a fim de evitar repetição e redundância, decidimos apresentar aqui a sua definição e fórmula de cálculo.

Este valor é o tamanho de cada subintervalos no intervalo original $[a, b]$, e pode ser calculado da seguinte forma:

$$h = \frac{(b - a)}{n}$$

onde:

- $h \rightarrow$ Tamanho de cada subintervalo (passo);
- $a \rightarrow$ Limite esquerdo do intervalo;
- $b \rightarrow$ Limite direito do intervalo;
- $n \rightarrow$ Número de sub-intervalos.

Importante: Quanto menor o valor de h , mais subintervalos irão existir dentro de um dado intervalo.

2.1 Método de Euler

2.1.1 Fórmulas

O método de Euler é um procedimento numérico de primeira ordem (y') para aproximar a solução da equação diferencial $y' = f(t, y)$ que satisfaz a condição inicial:

$$y(t_0) = y_0$$

O Método de Euler para resolver um Sistema de Equações é dado pelas seguintes equações:

Fórmula Geral (EDs 1º ordem):

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

onde:

- $y_{i+1} \rightarrow$ Próximo valor aproximado da solução do problema original (na abcissa t_{i+1});
- $y_i \rightarrow$ Valor aproximado da solução do problema original na abcissa atual;
- $h \rightarrow$ Valor de cada subintervalo (passo);
- $f(t_i, y_i) \rightarrow$ Valor de f no ponto (t_i, y_i) ;

Fórmula Geral modificada para um Sistema de Equações:

$$u_{i+1} = u_i + hf(t_i, u_i, v_i)$$

$$v_{i+1} = v_i + hg(t_i, u_i, v_i)$$

onde:

- $u_{i+1} \rightarrow$ Próxima ordenada da solução aproximada $y(t)$;
- $v_{i+1} \rightarrow$ Próxima ordenada da solução aproximada $y'(t)$
- $u_i \rightarrow$ Ordenada atual da solução aproximada $y(t)$;
- $v_i \rightarrow$ Ordenada da solução aproximada $y'(t)$;
- $h \rightarrow$ Valor de cada subintervalo (passo);
- $f(t_i, u_i, v_i) \rightarrow$ Valor de f no ponto (t_i, u_i, v_i) ;
- $g(t_i, u_i, v_i) \rightarrow$ Valor de g no ponto (t_i, u_i, v_i) .

2.1.2 Algoritmo/Função

Algoritmo:

1. Definir o valor do passo h ;
2. Criar um vetor u e um vetor v para guardar as soluções e atribuir $u_1 = u_0$ e $v_1 = v_0$;
3. Atribuir o primeiro valor de u e de v ;
4. Para i de 1 a n , fazemos o cálculo do método de Euler para a i ésima iteração no vetor u e o vetor v .

Função (MATLAB):

```
function [t,u,v]=N_EulerSED(f,g,a,b,n,u0,v0)
h=(b-a)/n; % Valor de cada subintervalo (passo)

t=a:h:b; % Alocação de memória
u=zeros(1,n+1); % Alocação de memória
v=zeros(1,n+1); % Alocação de memória

u(1)=u0; % O primeiro valor de u é sempre u0
v(1)=v0; % O primeiro valor de v é sempre v0

for i=1:n % O número de iterações vai ser igual a n
    u(i+1)=u(i)+h*f(t(i),u(i),v(i)); % Aproximação do método de Euler para a iésima iteração
    v(i+1)=v(i)+h*g(t(i),u(i),v(i)); % Aproximação do método de Euler para a iésima iteração
end
```


2.2 Método de Euler Melhorado ou Modificado (Método de Heun)

2.2.1 Fórmulas

Este método também se pode referir como Método de Euler Melhorado ou Modificado, ou um método de Runge-Kutta de ordem 2.

O Método de Heun para resolver um PVI é dado pelas seguintes equações:

Fórmula Geral (EDs 1º ordem):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$$

onde:

- $y_{i+1} \rightarrow$ Próximo valor aproximado da solução do problema original (na abcissa t_{i+1});
- $y_i \rightarrow$ Valor aproximado da solução do problema original na abcissa atual;
- $h \rightarrow$ Valor de cada subintervalo (passo);
- $k_1 \rightarrow$ Inclinação no início do intervalo;
- $k_2 \rightarrow$ Inclinação no fim do intervalo.

Cálculo de k_1 :

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$

- $k_1 \rightarrow$ Inclinação no início do intervalo;
- $f(t_i, y_i) \rightarrow$ Valor de f no ponto (t_i, y_i) .

Cálculo de k_2 :

$$k_2 = h * f(t_{i+1}, y_i + k_1)$$

- $k_2 \rightarrow$ Inclinação no fim do intervalo;
- $t_{i+1} \rightarrow$ Próxima abcissa do intervalo escolhido;
- $h \rightarrow$ Tamanho de cada subintervalo (passo);
- $y_i \rightarrow$ Valor aproximado da solução do problema original na abcissa atual;
- $k_1 \rightarrow$ Inclinação no início do intervalo.

Fórmula Geral modificada para um Sistema de Equações:

$$u_{i+1} = u_i + h * u_k$$

$$v_{i+1} = v_i + h * v_k$$

onde:

- $u_{i+1} \rightarrow$ Aproximação do método de Heun para a i ésima iteração;
- $v_{i+1} \rightarrow$ Aproximação do método de Heun para a i ésima iteração;
- $u_i \rightarrow$ Ordenada atual da função aproximada $y(t)$;
- $v_i \rightarrow$ Ordenada atual da função aproximada $y'(t)$;
- $h \rightarrow$ Valor de cada subintervalo (passo);
- $u_k \rightarrow$ Cálculo da média das inclinações;
- $v_k \rightarrow$ Cálculo da média das inclinações.

Cálculo de u_k :

$$u_k = \frac{1}{2} * (u_{k1} + u_{k2})$$

- $u_k \rightarrow$ Cálculo da média das inclinações;
- $u_{k1} \rightarrow$ Inclinação no início do intervalo;
- $u_{k2} \rightarrow$ Inclinação no fim do intervalo.

Cálculo de v_k :

$$v_k = \frac{1}{2} * (v_{k1} + v_{k2})$$

- $v_k \rightarrow$ Cálculo da média das inclinações;
- $v_{k1} \rightarrow$ Inclinação no início do intervalo;
- $v_{k2} \rightarrow$ Inclinação no fim do intervalo.

Cálculo de u_{k1} :

$$u_{k1} = f(t_i, u_i, v_i)$$

- $u_{k1} \rightarrow$ Inclinação no início do intervalo;
- $f(t_i, u_i, v_i) \rightarrow$ Valor de f no ponto (t_i, u_i, v_i) .

Cálculo de v_{k1} :

$$v_{k1} = g(t_i, u_i, v_i)$$

- $v_{k1} \rightarrow$ Inclinação no início do intervalo;
- $g(t_i, u_i, v_i) \rightarrow$ Valor de g no ponto (t_i, u_i, v_i) .

Cálculo de u_{k2} :

$$u_{k2} = f(t_{i+1}, u_i + u_{k1} * h, v_i + v_{k1} * h)$$

- $u_{k2} \rightarrow$ Inclinação no fim do intervalo;
- $t_{i+1} \rightarrow$ Próxima abcissa do intervalo escolhido;
- $u_{k1} \rightarrow$ Inclinação no início do intervalo;
- $h \rightarrow$ Tamanho de cada subintervalo (passo);
- $u_i \rightarrow$ Ordenada atual da solução aproximada $y(t)$;
- $v_i \rightarrow$ Ordenada atual da solução aproximada $y'(t)$;
- $v_{k1} \rightarrow$ Inclinação no início do intervalo.

Cálculo de v_{k2} :

$$v_{k2} = g(t_{i+1}, u_i + u_{k1} * h, v_i + v_{k1} * h)$$

- $v_{k2} \rightarrow$ Inclinação no fim do intervalo;
- $t_{i+1} \rightarrow$ Próxima abcissa do intervalo escolhido;
- $u_{k1} \rightarrow$ Inclinação no início do intervalo;
- $h \rightarrow$ Tamanho de cada subintervalo (passo);
- $u_i \rightarrow$ Ordenada atual da função aproximada $y(t)$;
- $v_i \rightarrow$ Ordenada atual da função aproximada $y'(t)$;
- $v_{k1} \rightarrow$ Inclinação no início do intervalo.

2.2.2 Algoritmo/Função

Algoritmo:

1. Definir o passo h ;
2. Criar um vetor u e um vetor v para guardar as soluções e atribuir $u_1 = u_0$ e $v_1 = v_0$;
3. Atribuir o primeiro valor de u e de v ;
4. Cálculo da inclinação no início do intervalo;
5. Cálculo da inclinação no fim do intervalo;
6. Cálculo da média das inclinações;
7. Cálculo do valor aproximado para a i ésima iteração.

Função (MATLAB):

```
function [t,u,v] = N_HeunSED(f,g,a,b,n,u0,v0)
    h = (b-a)/n; % Valor de cada subintervalo (passo)

    t = a:h:b; % Alocação de memória
    u = zeros(1, n+1); % Alocação de memória
    v = zeros(1, n+1); % Alocação de memória

    u(1) = u0; % O primeiro valor de u é sempre u0
    v(1) = v0; % O primeiro valor de v é sempre v0

    for i=1:n % O número de iterações vai ser igual a n
        uK1 = f(t(i),u(i),v(i)); % Inclinação no início do intervalo
        vK1 = g(t(i),u(i),v(i)); % Inclinação no início do intervalo

        uK2 = f(t(i+1), u(i) + uK1*h, v(i) + vK1*h); % Inclinação no fim do intervalo
        vK2 = g(t(i+1), u(i) + uK1*h, v(i) + vK1*h); % Inclinação no fim do intervalo

        uK = 0.5*(uK1 + uK2); % Cálculo da média das inclinações
        vK = 0.5*(vK1 + vK2); % Cálculo da média das inclinações

        u(i + 1) = u(i) + h*uK; % Aproximação do método de Heun para a iésima iteração
        v(i + 1) = v(i) + h*vK; % Aproximação do método de Heun para a iésima iteração
    end
end
```

2.3 Método de Runge-Kutta de Ordem 2

2.3.1 Fórmulas

É um método de passo simples que requer apenas derivadas de primeira ordem e pode fornecer aproximações precisas.

O Método de RK2 para resolver um PVI é dado pelas seguintes equações:

Fórmula Geral (EDs 1º ordem):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2), i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$$

onde:

- $y_{i+1} \rightarrow$ Próximo valor aproximado da solução do problema original (na abscissa t_{i+1});
- $y_i \rightarrow$ Valor aproximado da solução do problema original na abscissa atual;
- $k_1 \rightarrow$ Inclinação no início do intervalo;
- $k_2 \rightarrow$ Inclinação no fim do intervalo.

Cálculo de k_1 :

$$k_1 = h * f(t_i, y_i)$$

- $k_1 \rightarrow$ Inclinação no início do intervalo;
- $h \rightarrow$ Valor de cada subintervalo (passo);
- $f(t_i, y_i) \rightarrow$ Valor de f no ponto (t_i, y_i) ;

Cálculo de k_2 :

$$k_2 = h * f(t_{i+1}, y_i + k_1)$$

- $k_2 \rightarrow$ Inclinação no fim do intervalo;
- $t_i \rightarrow$ Abcissa atual do intervalo escolhido;
- $h \rightarrow$ Tamanho de cada subintervalo (passo);
- $y_i \rightarrow$ Valor aproximado da solução do problema original na abcissa atual;
- $k_1 \rightarrow$ Inclinação no início do intervalo.

Fórmula Geral modificada para um Sistema de Equações:

$$u_{i+1} = u_i + u_k$$

$$v_{i+1} = v_i + v_k$$

onde:

- $u_{i+1} \rightarrow$ Aproximação do método de RK2 para a i ésima iteração;
- $v_{i+1} \rightarrow$ Aproximação do método de RK2 para a i ésima iteração;
- $u_i \rightarrow$ Ordenada atual da solução aproximada $y(t)$;
- $v_i \rightarrow$ Ordenada atual da solução aproximada $y'(t)$;
- $u_k \rightarrow$ Cálculo da média das inclinações;
- $v_k \rightarrow$ Cálculo da média das inclinações.

Cálculo de u_k :

$$u_k = \frac{(u_{k1} + u_{k2})}{2}$$

- $u_k \rightarrow$ Cálculo da média das inclinações;
- $u_{k1} \rightarrow$ Inclinação no início do intervalo;
- $u_{k2} \rightarrow$ Inclinação no fim do intervalo.

Cálculo de v_k :

$$v_k = \frac{(v_{k1} + v_{k2})}{2}$$

- $v_k \rightarrow$ Cálculo da média das inclinações;
- $v_{k1} \rightarrow$ Inclinação no início do intervalo;
- $v_{k2} \rightarrow$ Inclinação no fim do intervalo.

Cálculo de u_{k1} :

$$u_{k1} = h * f(t_i, u_i, v_i)$$

- $u_{k1} \rightarrow$ Inclinação no início do intervalo;
- $h \rightarrow$ Tamanho de cada subintervalo (passo);
- $f(t_i, u_i, v_i) \rightarrow$ Valor de f no ponto (t_i, u_i, v_i) .

Cálculo de v_{k1} :

$$v_{k1} = h * g(t_i, u_i, v_i)$$

- $v_{k1} \rightarrow$ Inclinação no início do intervalo;
- $h \rightarrow$ Tamanho de cada subintervalo (passo);
- $t_i \rightarrow$ Abcissa atual do intervalo escolhido;
- $u_i \rightarrow$ Ordenada atual da solução aproximada $y(t)$;
- $v_i \rightarrow$ Ordenada atual da solução aproximada $y'(t)$;
- $g(t_i, u_i, v_i) \rightarrow$ Valor de g no ponto (t_i, u_i, v_i) .

Cálculo de u_{k2} :

$$u_{k2} = h * f(t_{i+1}, u_i + u_{k1}, v_i + v_{k1})$$

- $u_{k2} \rightarrow$ Inclinação no fim do intervalo;
- $h \rightarrow$ Tamanho de cada subintervalo (passo);
- $t_{i+1} \rightarrow$ Próxima abcissa do intervalo escolhido;
- $u_{k1} \rightarrow$ Inclinação no início do intervalo;
- $u_i \rightarrow$ Ordenada atual da solução aproximada $y(t)$;
- $v_i \rightarrow$ Ordenada atual da solução aproximada $y'(t)$;
- $v_{k1} \rightarrow$ Inclinação no início do intervalo.

Cálculo de v_{k2} :

$$v_{k2} = h * g(t_{i+1}, u_i + u_{k1}, v_i + v_{k1})$$

- $v_{k2} \rightarrow$ Inclinação no fim do intervalo;
- $h \rightarrow$ Tamanho de cada subintervalo (passo);
- $t_{i+1} \rightarrow$ Próxima abcissa do intervalo escolhido;
- $u_{k1} \rightarrow$ Inclinação no início do intervalo;
- $u_i \rightarrow$ Ordenada atual da solução aproximada $y(t)$;
- $v_i \rightarrow$ Ordenada atual da solução aproximada $y'(t)$;
- $v_{k1} \rightarrow$ Inclinação no início do intervalo.

2.3.2 Algoritmo/Função

Algoritmo:

1. Definir o passo h ;
2. Criar um vetor u e um vetor v para guardar as soluções e atribuir $u_1 = u_0$ e $v_1 = v_0$;
3. Atribuir o primeiro valor de u e de v ;
4. Cálculo da inclinação no início do intervalo;
5. Cálculo da inclinação no fim do intervalo;
6. Cálculo da média das inclinações;
7. Cálculo do valor aproximado para a iésima iteração.

Função (MATLAB):

```
function [t,u,v] = N_RK2SED(f,g,a,b,n,u0,v0)
    h = (b-a)/n; % Valor de cada subintervalo (passo)

    t = a:h:b; % Alocação de memória
    u = zeros(1, n+1); % Alocação de memória
    v = zeros(1, n+1); % Alocação de memória

    u(1) = u0; % O primeiro valor de u é sempre u0
    v(1) = v0; % O primeiro valor de v é sempre v0

    for i=1:n % O número de iterações vai ser igual a n
        uK1 = h*f(t(i), u(i), v(i)); % Inclinação no início do intervalo
        vK1 = h*g(t(i), u(i), v(i)); % Inclinação no início do intervalo

        uK2 = h*f(t(i + 1), u(i) + uK1, v(i) + vK1); % Inclinação no fim do intervalo
        vK2 = h*g(t(i + 1), u(i) + uK1, v(i) + vK1); % Inclinação no fim do intervalo

        uK = (uK1 + uK2)/2; % Cálculo da média das inclinações
        vK = (vK1 + vK2)/2; % Cálculo da média das inclinações

        u(i + 1) = u(i) + uK; % Aproximação do método de RK2 para a iésima iteração
        v(i + 1) = v(i) + vK; % Aproximação do método de RK2 para a iésima iteração
    end
end
```

2.4 Método de Runge-Kutta de Ordem 4

2.4.1 Fórmulas

O método de Runge-Kutta de ordem 4 não necessita do cálculo de qualquer derivada de f , mas depende de outra função que é definida avaliando f em diferentes pontos.

O método RK4 para resolver um PVI é dado pelas seguintes equações:

Fórmula Geral (EDs 1º ordem):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad i = 0, 1, \dots$$

onde:

- $y_{i+1} \rightarrow$ Aproximação pelo método RK4 de $y(x_{n+1})$;
- $y_i \rightarrow$ Valor de y na i ésima iteração;
- $h \rightarrow$ Valor de cada subintervalo (passo).

e:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_1\right) \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_2\right) \\ k_4 &= f(x_i + h, y_i + h k_3) \end{aligned}$$

onde:

- $k_1 \rightarrow$ Inclinação no início do intervalo;
- $k_2 \rightarrow$ Inclinação no ponto médio do intervalo;
- $k_3 \rightarrow$ Inclinação (novamente) no ponto médio do intervalo;
- $k_4 \rightarrow$ Inclinação no final do intervalo.

Média ponderada das inclinações: $\frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$

Fórmula Geral modificada para um Sistema de Equações:

$$u_{i+1} = u_i + u_k$$

$$v_{i+1} = v_i + v_k$$

onde:

- $u_{i+1} \rightarrow$ Aproximação do método de RK4 para a i ésima iteração;
- $v_{i+1} \rightarrow$ Aproximação do método de RK4 para a i ésima iteração;
- $u_i \rightarrow$ Ordenada atual da solução aproximada $y(t)$;
- $v_i \rightarrow$ Ordenada atual da solução aproximada $y'(t)$;
- $u_k \rightarrow$ Cálculo da média das inclinações;
- $v_k \rightarrow$ Cálculo da média das inclinações.

Cálculo de u_k :

$$u_k = \frac{(u_{k1} + 2 * u_{k2} + 2 * u_{k3} + u_{k4})}{6}$$

- $u_k \rightarrow$ Cálculo da média das inclinações;
- $u_{k1} \rightarrow$ Inclinação no início do intervalo;
- $u_{k2} \rightarrow$ Inclinação no ponto médio do intervalo;
- $u_{k3} \rightarrow$ Inclinação (novamente) no ponto médio do intervalo;
- $u_{k4} \rightarrow$ Inclinação no fim do intervalo.

Cálculo de v_k :

$$v_k = \frac{(v_{k1} + 2 * v_{k2} + 2 * v_{k3} + v_{k4})}{6}$$

- $v_k \rightarrow$ Cálculo da média das inclinações;
- $v_{k1} \rightarrow$ Inclinação no início do intervalo;
- $v_{k2} \rightarrow$ Inclinação no ponto médio do intervalo;
- $v_{k3} \rightarrow$ Inclinação (novamente) no ponto médio do intervalo;
- $v_{k4} \rightarrow$ Inclinação no fim do intervalo.

Cálculo de u_{k1} :

$$u_{k1} = h * f(t_i, u_i, v_i)$$

- $u_{k1} \rightarrow$ Inclinação no início do intervalo;
- $h \rightarrow$ Tamanho de cada subintervalo (passo);
- $f(t_i, u_i, v_i) \rightarrow$ Valor de f no ponto (t_i, u_i, v_i) .

Cálculo de v_{k1} :

$$v_{k1} = h * g(t_i, u_i, v_i)$$

- $v_{k1} \rightarrow$ Inclinação no início do intervalo;
- $h \rightarrow$ Tamanho de cada subintervalo (passo);
- $g(t_i, u_i, v_i) \rightarrow$ Valor de g no ponto (t_i, u_i, v_i) .

Cálculo de u_{k2} :

$$u_{k2} = h * f(t_i + \frac{h}{2}, u_i + 0.5 * u_{k1}, v_i + 0.5 * v_{k1})$$

- $u_{k2} \rightarrow$ Inclinação no ponto médio do intervalo;
- $h \rightarrow$ Tamanho de cada subintervalo (passo);
- $t_i \rightarrow$ Abcissa atual do intervalo escolhido;
- $u_{k1} \rightarrow$ Inclinação no início do intervalo;
- $u_i \rightarrow$ Ordenada atual da solução aproximada $y(t)$;
- $v_i \rightarrow$ Ordenada atual da solução aproximada $y'(t)$;
- $v_{k1} \rightarrow$ Inclinação no início do intervalo.

Cálculo de v_{k2} :

$$u_{k2} = h * g(t_i + \frac{h}{2}, u_i + 0.5 * u_{k1}, v_i + 0.5 * v_{k1})$$

- $v_{k2} \rightarrow$ Inclinação no ponto médio do intervalo;
- $h \rightarrow$ Tamanho de cada subintervalo (passo);
- $t_i \rightarrow$
- $u_{k1} \rightarrow$ Inclinação no início do intervalo;
- $u_i \rightarrow$ Ordenada atual da solução aproximada $y(t)$;
- $v_i \rightarrow$ Ordenada atual da solução aproximada $y'(t)$;
- $v_{k1} \rightarrow$ Inclinação no início do intervalo.

Cálculo de u_{k3} :

$$u_{k3} = h * f(t_i + \frac{h}{2}, u_i + 0.5 * u_{k2}, v_i + 0.5 * v_{k2})$$

- $u_{k3} \rightarrow$ Inclinação (novamente) no ponto médio do intervalo;
- $h \rightarrow$ Tamanho de cada subintervalo (passo);
- $t_i \rightarrow$ Abcissa atual do intervalo escolhido;
- $u_{k2} \rightarrow$ Inclinação no ponto médio do intervalo;
- $u_i \rightarrow$ Ordenada atual da solução aproximada $y(t)$;
- $v_i \rightarrow$ Ordenada atual da solução aproximada $y'(t)$;
- $v_{k2} \rightarrow$ Inclinação no ponto médio do intervalo.

Cálculo de v_{k3} :

$$v_{k3} = h * g(t_i + \frac{h}{2}, u_i + 0.5 * u_{k2}, v_i + 0.5 * v_{k2})$$

- $v_{k3} \rightarrow$ Inclinação (novamente) no ponto médio do intervalo;
- $h \rightarrow$ Tamanho de cada subintervalo (passo);
- $t_i \rightarrow$ Abcissa atual do intervalo escolhido;
- $u_{k2} \rightarrow$ Inclinação no ponto médio do intervalo;
- $u_i \rightarrow$ Ordenada atual da solução aproximada $y(t)$;
- $v_i \rightarrow$ Ordenada atual da solução aproximada $y'(t)$;
- $v_{k2} \rightarrow$ Inclinação no ponto médio do intervalo.

Cálculo de u_{k4} :

$$u_{k4} = h * f(t_{i+1}, u_i + u_{k3}, v_i + v_{k3})$$

- $u_{k4} \rightarrow$ Inclinação no final do intervalo;
- $h \rightarrow$ Tamanho de cada subintervalo (passo);
- $t_{i+1} \rightarrow$ Próxima abcissa do intervalo escolhido;
- $u_{k3} \rightarrow$ Inclinação no ponto médio do intervalo;
- $u_i \rightarrow$ Ordenada atual da solução aproximada $y(t)$;
- $v_i \rightarrow$ Ordenada atual da solução aproximada $y''(t)$;
- $v_{k3} \rightarrow$ Inclinação no ponto médio do intervalo.

Cálculo de v_{k4} :

$$v_{k4} = h * g(t_{i+1}, u_i + u_{k3}, v_i + v_{k3})$$

- $v_{k4} \rightarrow$ Inclinação no final do intervalo;
- $h \rightarrow$ Tamanho de cada subintervalo (passo);
- $t_{i+1} \rightarrow$ Próxima abcissa do intervalo escolhido;
- $u_{k3} \rightarrow$ Inclinação no ponto médio do intervalo;
- $u_i \rightarrow$ Ordenada atual da solução aproximada $y(t)$;
- $v_i \rightarrow$ Ordenada atual da solução aproximada $y''(t)$;
- $v_{k3} \rightarrow$ Inclinação no ponto médio do intervalo.

2.4.2 Algoritmo/Função

Algoritmo:

1. Definir o passo h ;
2. Criar um vetor u e um vetor v para guardar as soluções e atribuir $u_1 = u_0$ e $v_1 = v_0$;
3. Atribuir o primeiro valor de u e de v ;
4. Cálculo da inclinação no início do intervalo;
5. Cálculo da inclinação no ponto médio do intervalo;
6. Cálculo (novamente) da inclinação no ponto médio do intervalo;
7. Cálculo da inclinação no fim do intervalo;
8. Cálculo da média ponderada das inclinações;
9. Cálculo do valor aproximado para a iésima iteração.

Função (MATLAB):

```
function [t,u,v] = N_RK4SED(f,g,a,b,n,u0,v0)
    h = (b-a)/n;
    t = a:h:b;
    u = zeros(1, n+1);
    v = zeros(1, n+1);
    u(1) = u0;
    v(1) = v0;
    for i=1:n
        uK1 = h*f(t(i), u(i), v(i));
        vK1 = h*g(t(i), u(i), v(i));

        uK2 = h*f(t(i) + h/2, u(i) + 0.5*uK1, v(i) + 0.5*vK1);
        vK2 = h*g(t(i) + h/2, u(i) + 0.5*uK1, v(i) + 0.5*vK1);

        uK3 = h*f(t(i) + h/2, u(i) + 0.5*uK2, v(i) + 0.5*vK2);
        vK3 = h*g(t(i) + h/2, u(i) + 0.5*uK2, v(i) + 0.5*vK2);

        uK4 = h*f(t(i+1), u(i) + uK3, v(i) + vK3);
        vK4 = h*g(t(i+1), u(i) + uK3, v(i) + vK3);

        uK = (uK1 + 2*uK2 + 2*uK3 + uK4)/6;
        vK = (vK1 + 2*vK2 + 2*vK3 + vK4)/6;

        u(i+1) = u(i) + uK;
        v(i+1) = v(i) + vK;
    end
end
```

% Valor de cada subintervalo (passo)
 % Alocação de memória
 % Alocação de memória
 % Alocação de memória
 % O primeiro valor de y é sempre y0
 % O primeiro valor de y é sempre y0
 % O número de iterações vai ser igual a n
 % Inclinação no início do intervalo
 % Inclinação no início do intervalo
 % Inclinação no ponto médio do intervalo
 % Inclinação no ponto médio do intervalo
 % Inclinação (novamente) no ponto médio do intervalo
 % Inclinação (novamente) no ponto médio do intervalo
 % Inclinação no final do intervalo
 % Inclinação no final do intervalo
 % Cálculo da média ponderada das inclinações
 % Cálculo da média ponderada das inclinações
 % Aproximação do método de RK4 para a iésima iteração
 % Aproximação do método de RK4 para a iésima iteração

3. Exemplos de aplicação e teste dos métodos

3.1 Algoritmo de Resolução

A resolução e aplicação dos diferentes exercícios no nosso GUI segue sempre os mesmos 5 passos. Começamos, por hipótese, com uma Equação Diferencial de 2ª ordem, ou seja, do tipo:

$$Ay'' + By' + Cy + D = 0$$

Sendo y , A , B , C e D funções em t .

O objetivo é obter, numericamente, $y(t)$, solução da ED.

1º Passo – Resolver em ordem a y'' a equação dada:

$$y'' = -\frac{B}{A}y' - \frac{C}{A}y - \frac{D}{A}$$

2º Passo – Mudança de variável:

$$\begin{cases} u = y \\ v = y' \end{cases}$$

3º Passo – Derivar u e v e efetuar as devidas substituições:

$$\begin{aligned} \begin{cases} u' = y' \\ v' = y'' \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u' = v \\ v' = -\frac{B}{A}y' - \frac{C}{A}y - \frac{D}{A} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u' = v \\ v' = -\frac{B}{A}v - \frac{C}{A}u - \frac{D}{A} \end{cases} \end{aligned}$$

4º Passo – Definir os PVIs e o sistema de EDs.

$$\begin{cases} \begin{cases} u' = v \\ v' = -\frac{B}{A}v - \frac{C}{A}u - \frac{D}{A} \end{cases} \\ t \in [a, b] \\ \begin{cases} u(0) = u_0 \\ v(0) = v_0 \end{cases} \end{cases}$$

5º Passo – Aplicar Métodos Numéricos na GUI, com $f(t, u, v) = u'$ e $g(t, u, v) = v'$, de modo a obter uma aproximação de $y(t)$.

Aplicando, agora, este algoritmo a problemas concretos e reais:

3.2 Problema do Pêndulo

Example 13-A Motion of a Nonlinear Pendulum

The motion of a pendulum of length L subject to damping can be described by the angular displacement of the pendulum from the vertical, θ , as a function of time. (See Fig. 13.1.) If we let m be the mass of the pendulum, g the gravitational constant, and c the damping coefficient (i.e., the damping force is $F = -c\theta'$), then the ODE initial-value problem describing this motion is

$$\theta'' + \frac{c}{mL} \theta' + \frac{g}{L} \sin \theta = 0.$$

The initial conditions give the angular displacement and velocity at time zero; for example, if $\theta(0) = a$ and $\theta'(0) = 0$, the pendulum has an initial displacement, but is released with 0 initial velocity.

Analytic (closed-form) solutions rely on approximating $\sin \theta$; the exact solutions to this approximated system do not have the characteristics of the physical pendulum, namely, a decreasing amplitude and a decreasing period. (See Greenspan, 1974, for further discussion.)

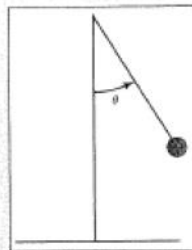


FIGURE 13.1a Simple pendulum.

No problema do Pêndulo, resolvido na aula, considerámos o seguinte:

$$\frac{C}{mL} = 0.3 \quad \frac{G}{L} = 1 \quad t \in [0, 15] \quad \theta = y$$

Como o pêndulo é, neste caso, largado com velocidade nula, no ponto em que a sua corda está perpendicular ao seu suporte, temos as condições iniciais:

$$y(0) = \frac{\pi}{2} \quad y'(0) = 0$$

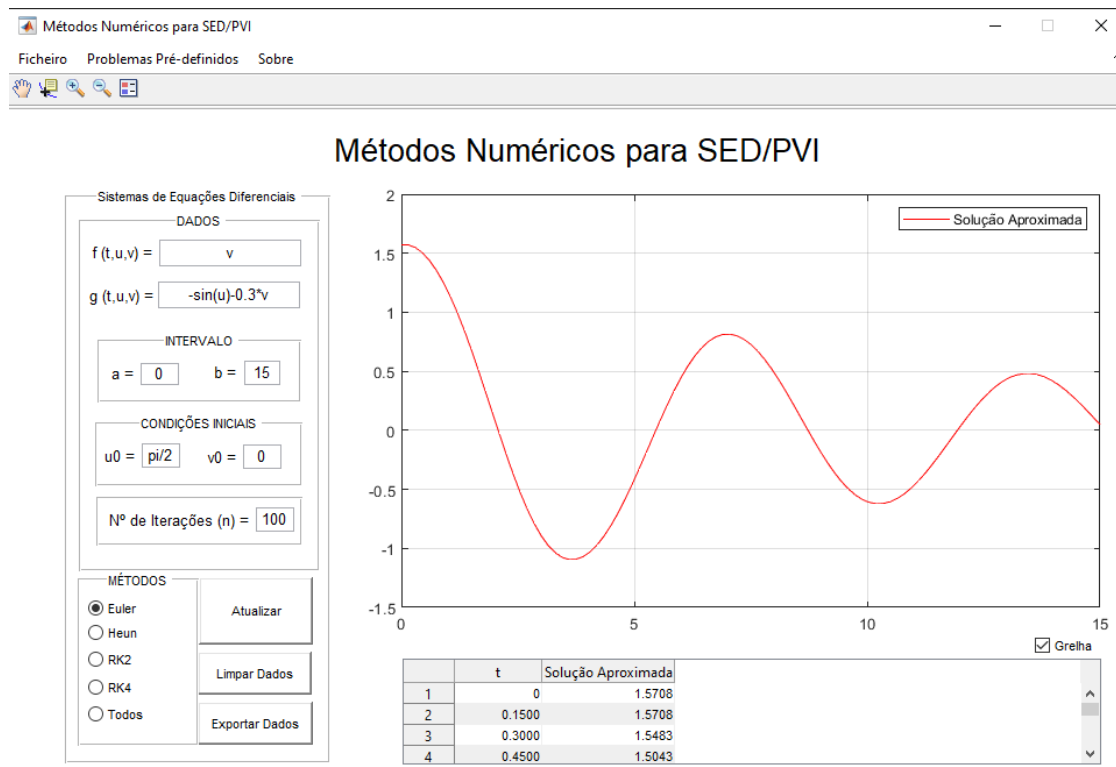
Assim, temos a seguinte equação diferencial:

$$y'' + 0.3y' + \sin(y) = 0$$

Aplicando agora o algoritmo de resolução apresentado no tópico 3.1, obtemos o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} u' = v \\ v' = -\sin(u) - 0.3v \end{array} \right. \\ t \in [0, 15] \\ \left\{ \begin{array}{l} u(0) = \frac{\pi}{2} \\ v(0) = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Aplicando esta informação na GUI (ou simplesmente carregando, no menu, no botão correspondente ao problema em questão) temos:



Nota: O Equação Diferencial do Problema do Pêndulo não é linear, logo não é possível calcular a solução exata através do MATLAB.

3.2 Movimento Livre Amortecido

c) Um peso de 6.4 lb provoca, numa mola, um alongamento de 1.28 ft . O sistema está sujeito à acção duma força amortecedora, numericamente igual ao dobro da sua velocidade instantânea. Determine a equação do movimento do peso, supondo que ele parte da posição de equilíbrio com uma velocidade dirigida para cima de 4 ft/s .

Resolução:

Sabe-se, pela lei de Hooke, que $W = ks$

No caso em estudo $k = \frac{6.4}{1.28} \Rightarrow k = 5 \text{ lb/ft}$. Como $W = mg$, tem-se $m = \frac{6.4}{32} \Rightarrow m = 0.2$

A equação que descreve o movimento livre amortecido é

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -Kx - b \frac{dx}{dt}$$

onde b é uma constante positiva e o sinal “-” indica que as forças amortecedoras actuam na direcção oposta ao movimento.

Então a equação diferencial de movimento de peso é $0.2x'' = -5x - 2x'$

$\Leftrightarrow x'' + 10x' + 25x = 0$ com $x(0) = 0$ e $x'(0) = -4$

A partir do enunciado, e considerando $x(t) = y(t)$, obtemos a seguinte equação diferencial:

$$y'' + 10y' + 25y = 0$$

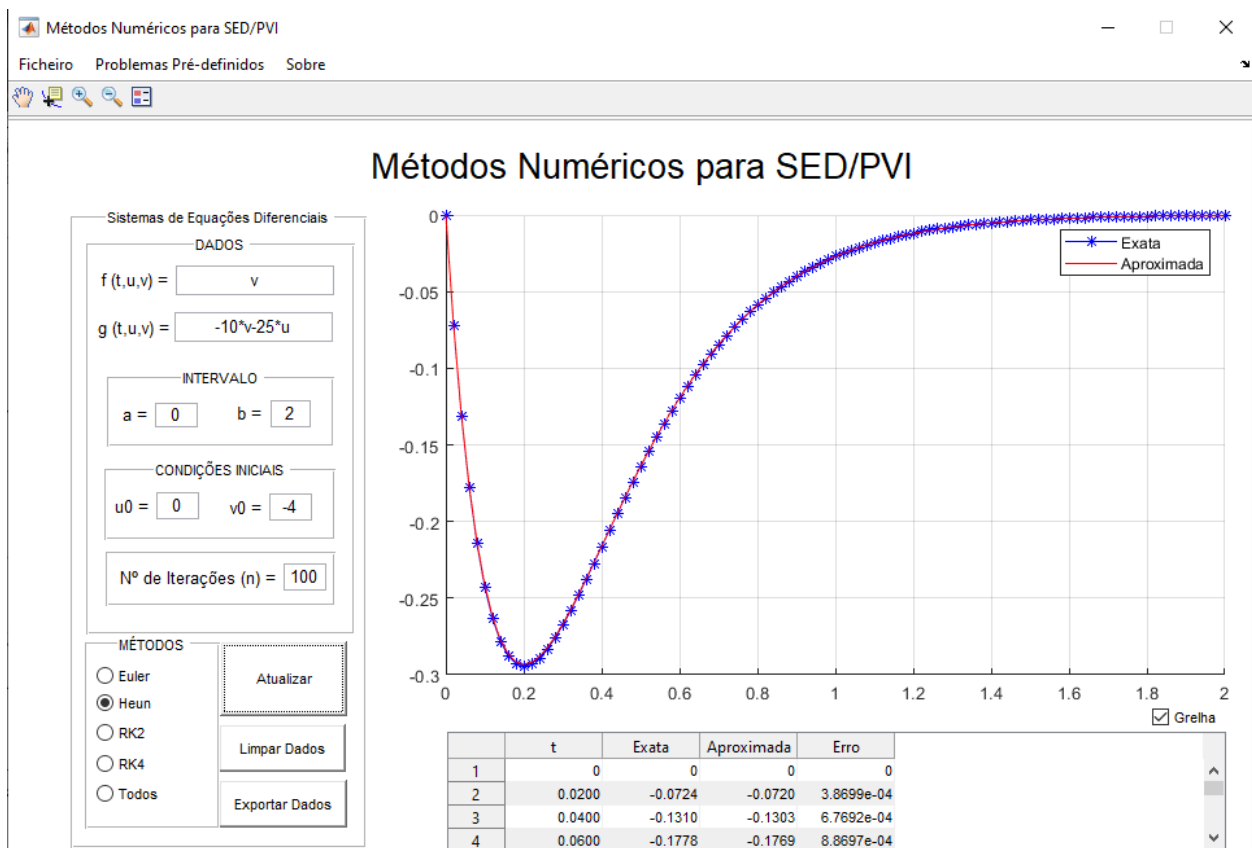
E também as condições iniciais:

$$y(0) = 0 \qquad y'(0) = -4$$

Aplicando agora o algoritmo de resolução apresentado no tópico 3.1, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \begin{cases} u' = v \\ v' = -10v - 25u \end{cases} \\ t \in [0, 2] \\ \begin{cases} u(0) = 0 \\ v(0) = -4 \end{cases} \end{cases}$$

Aplicando esta informação na GUI (ou simplesmente carregando, no menu, no botão correspondente ao problema em questão) temos:



3.3 Modelo Vibratório Mecânico

Modelos vibratórios mecânicos

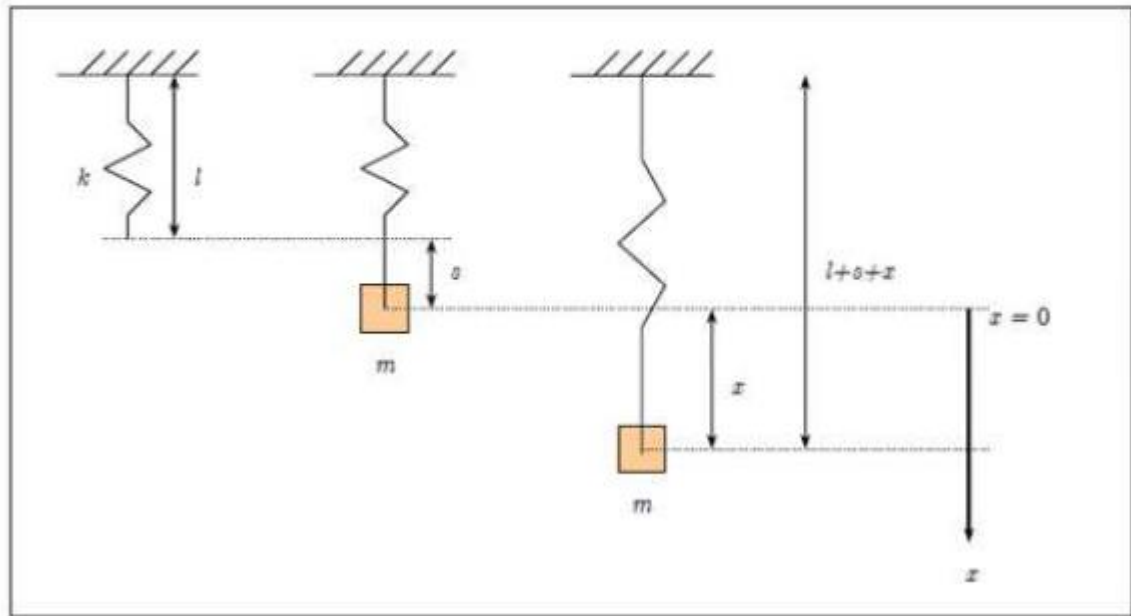
Nestes sistemas, o deslocamento x obedece à equação diferencial linear de 2ª ordem

$$mx'' + bx' + k(x) = f(t)$$

onde:

m = massa; x = deslocamento; b = factor de amortecimento;

k = constante da mola e $f(t)$ = força aplicada



2.

a) $x'' + 2x' + 2x = 4\cos t + 2\sin t, \quad x(0) = 0 \quad x'(0) = 3$

A partir do enunciado, e considerando $x(t) = y(t)$, obtemos a seguinte equação diferencial:

$$y'' + 2y' + 2y - 4\cos(t) + 2\sin(t) = 0$$

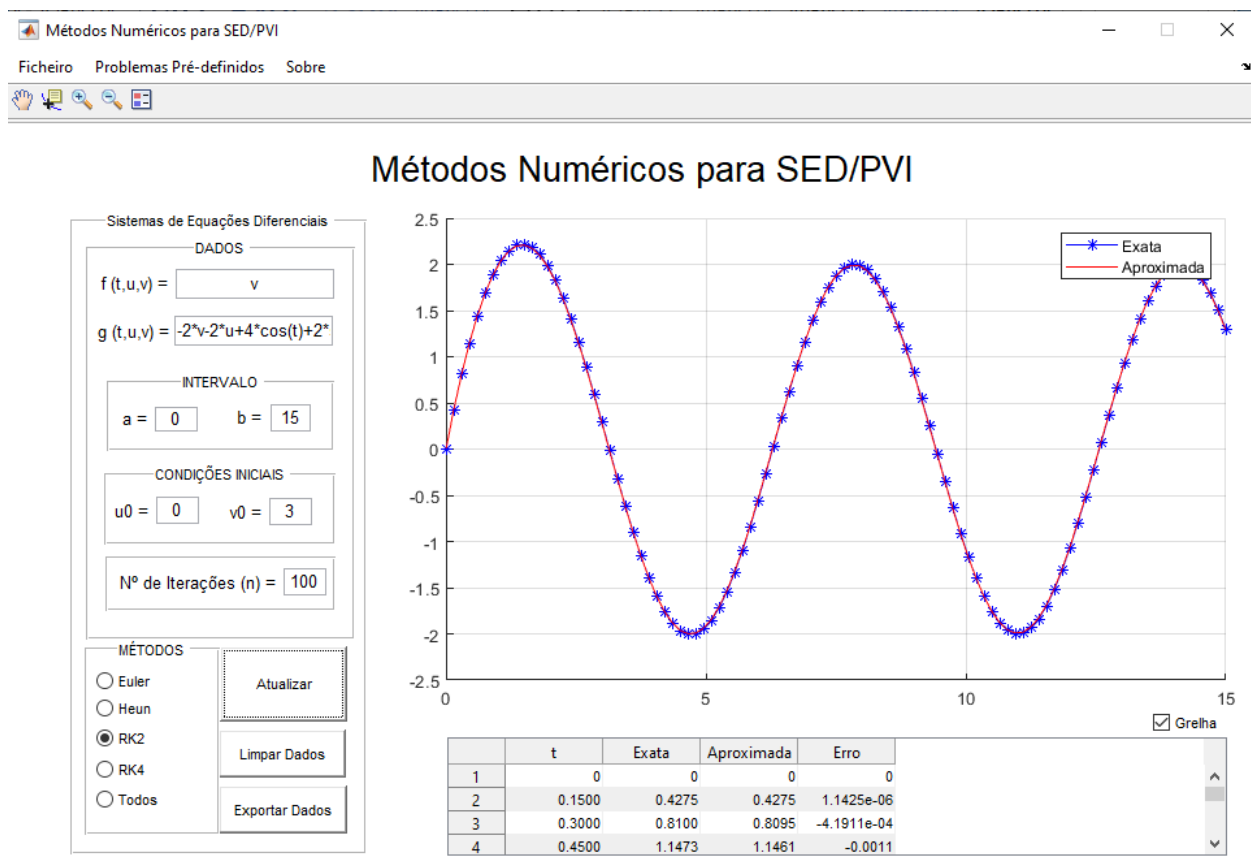
E também as condições iniciais:

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 3$$

Aplicando agora o algoritmo de resolução apresentado no tópico 3.1, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \begin{cases} u' = v \\ v' = -2v - 2u + 4\cos(t) + 2\sin(t) \end{cases} \\ t \in [0, 15] \\ \begin{cases} u(0) = 0 \\ v(0) = 3 \end{cases} \end{cases}$$

Aplicando esta informação na GUI (ou simplesmente carregando, no menu, no botão correspondente ao problema em questão) temos:



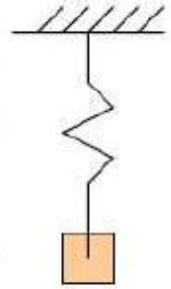
3.4 Movimento Harmónico Simples

b) A equação $mx'' + kx = 0$ descreve o movimento harmónico simples, ou movimento livre não amortecido, e está sujeita às condições iniciais $x(0) = a$ e $x'(0) = b$ representando, respectivamente, a medida do deslocamento inicial e a velocidade inicial.

Use este conhecimento para dar uma interpretação física do problema de *Cauchy*

$$x'' + 16x = 0 \quad x(0) = 9 \quad x'(0) = 0$$

e resolva-o



A partir do enunciado, e considerando $x(t) = y(t)$, obtemos a seguinte equação diferencial:

$$y'' + 16y = 0$$

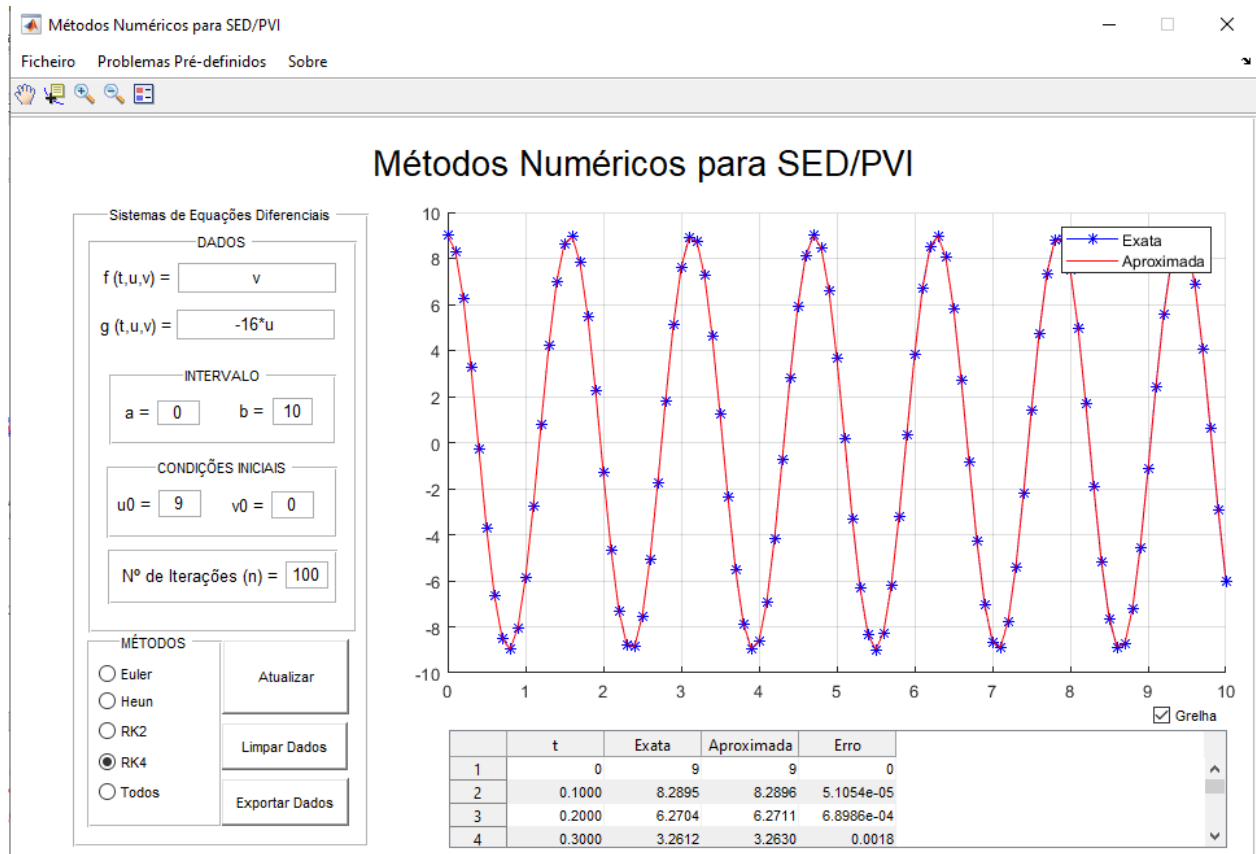
E também as condições iniciais:

$$y(0) = 9 \quad y'(0) = 0$$

Aplicando agora o algoritmo de resolução apresentado no tópico 3.1, obtemos o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} u' = v \\ v' = -16u \end{cases} \\ t \in [0, 10] \\ \begin{cases} u(0) = 9 \\ v(0) = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Aplicando esta informação na GUI (ou simplesmente carregando, no menu, no botão correspondente ao problema em questão) temos:



3.5 Circuitos Elétricos em Série

- Circuito eléctrico em série

$$Lq'' + r q' + \frac{1}{C} q = e(t) \quad (*)$$

L – Indutância

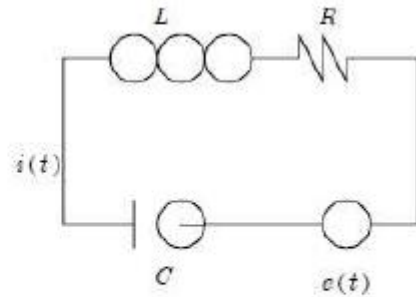
q – carga

R – Resistência

C – capacidade

$e(t)$ – força electromotriz

Pelas leis de *Kirchoff*, num circuito indutivo-restritivo-capacitivo (L - R - C) série, em que a corrente varia com o tempo, a carga q acumulada no condensador é dada pela equação diferencial linear de 2ª Ordem. (*)



CIRCUITOS ELÉTRICOS

Uma circuito possui um capacitor de $0,5 \times 10^{-1} F$, um resistor de 25Ω e um indutor de $5 H$, em série. O capacitor se encontra descarregado. No instante $t=0$ conecta-se esse circuito a uma bateria cuja tensão é de $10 e^{-t/4} V$, e o circuito é fechado. Determine a carga no capacitor em qualquer inste $t>0$.

A partir do enunciado e da explicação acima, obtemos a seguinte equação diferencial:

$$y'' + 5y' + 4y - 2e^{-\frac{t}{4}} = 0$$

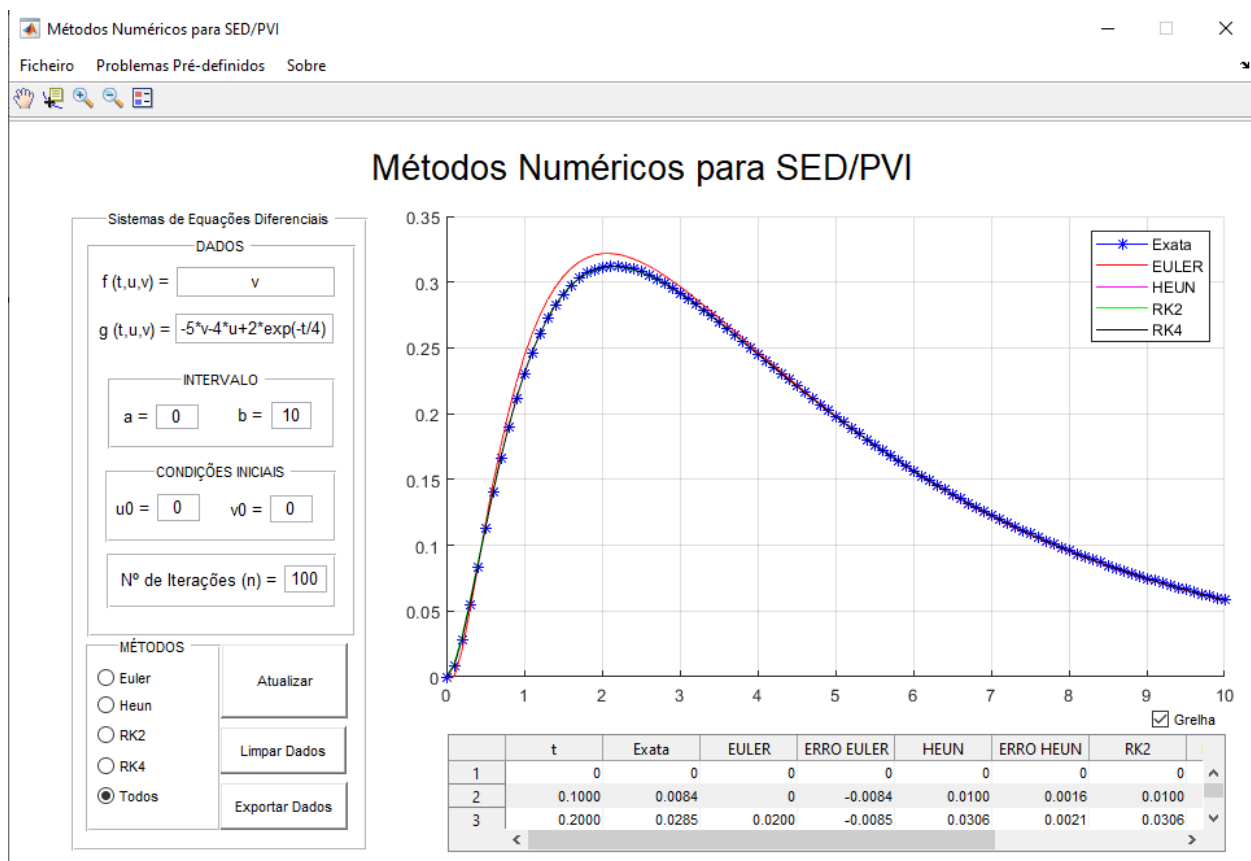
Considerando que o circuito se encontrava totalmente desligado no instante $t = 0$, temos:

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$$

Aplicando agora o algoritmo de resolução apresentado no tópico 3.1, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \begin{cases} u' = v \\ v' = -5v - 4u + 2e^{-\frac{t}{4}} \end{cases} \\ t \in [0, 10] \\ \begin{cases} u(0) = 0 \\ v(0) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Aplicando esta informação na GUI (ou simplesmente carregando, no menu, no botão correspondente ao problema em questão) temos:



4. Conclusão

Com este trabalho podemos concluir que, através da adaptação de métodos numéricos existentes (neste caso, Euler, Heun, RK2 e RK4), podemos aplicar esses mesmos métodos a Sistemas de Equações Diferenciais com condições iniciais, o que possibilita a resolução de problemas Equações Diferenciais de 2ª ordem.

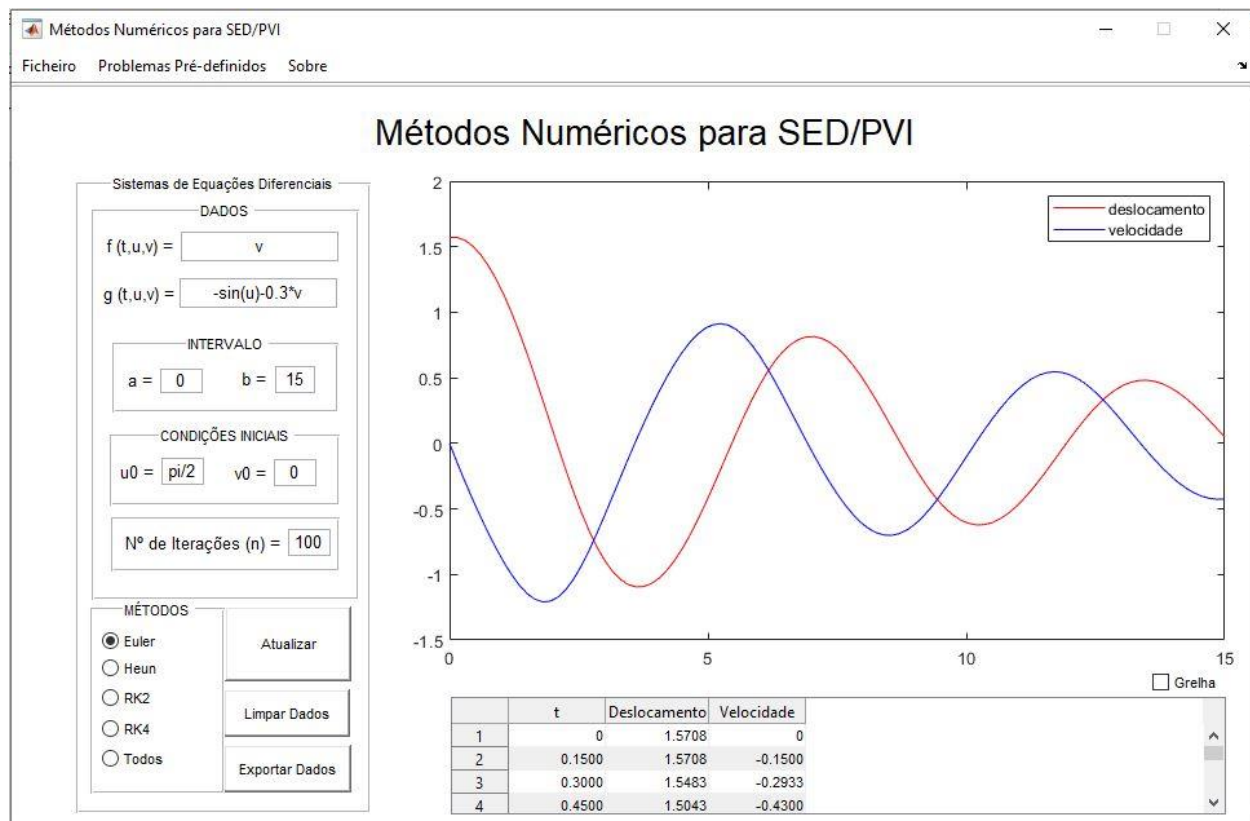
Como já visto anteriormente, verificamos que quanto maior for o número de subintervalos n , menor é o erro dos Métodos.

Relativamente à comparação entre os vários métodos, observamos que o método que verifica menor erro e, consequentemente, melhor aproximação ao valor exato, é, igualmente, o método de Runge-Kutta de ordem 4, que muitas vezes apresenta erros na ordem apenas das milésimas ou menor. Em contrapartida temos o método de Euler, cujo erro é relativamente grande comparado com todos os outros métodos implementados.

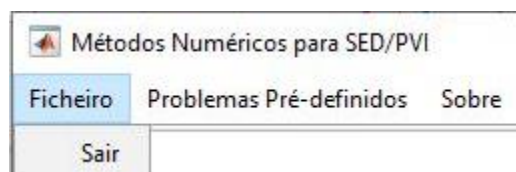
Por fim, é vemos que através de “simples” Equações Diferenciais de 2ª ordem é possível a resolução de diversos problemas de diversas áreas distintas (Engenharia, Biologia, Economia, entre outras), sendo usadas no dia-a-dia de certas profissões.

5. Anexos

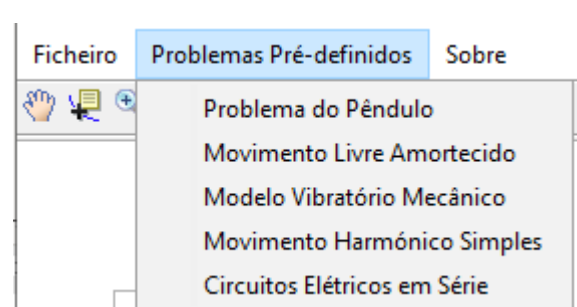
Vista do programa “Métodos Numéricos para SED/PVI”



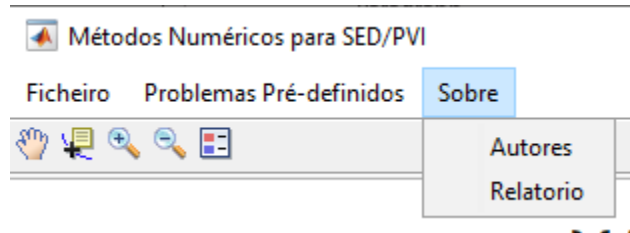
Menu Sair



Menu Problemas Pré-definidos



Menu Sobre



GUI Autores



Breve Explicação do Programa

Os valores das **funções** $f(t,u,v)$ e $g(t,u,v)$, assim como os valores do intervalo $[a,b]$, o número de iterações (n) e as condições iniciais u_0 e v_0 , são enviados das edit texts correspondentes para a função do Método selecionado (neste caso, para o **Método de Euler**) utilizando o botão **Atualizar**.

Métodos Numéricos
Método de Euler
Método de Heun
Método RK2
Método RK4

Os resultados da função são guardados em tabelas e enviados de volta para o programa, onde vai mostrar a tabela e o gráfico do método selecionado.

Sistemas de Equações Diferenciais

DADOS

$f(t,u,v) =$

$g(t,u,v) =$

INTERVALO

$a =$ $b =$

CONDIÇÕES INICIAIS

$u_0 =$ $v_0 =$

Nº de iterações (n) =

MÉTODOS

☒ Euler

☐ Heun

☐ RK2

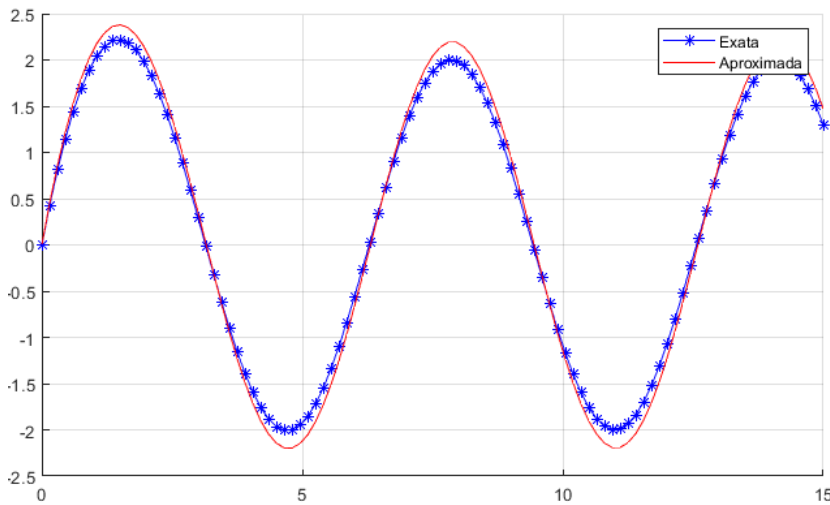
☐ RK4

☐ Todos

Atualizar

Limpar Dados

Exportar Dados



	t	Exata	Aproximada	Erro
1	0	0	0	0
2	0.1500	0.4275	0.4500	0.0225
3	0.3000	0.8100	0.8550	0.0450
4	0.4500	1.1473	1.2140	0.0667

6. Bibliografia

- <https://moodle.isec.pt/moodle/mod/forum/discuss.php?d=23998>
- <https://www.youtube.com/watch?v=BrYM8D8BUwM>
- <https://www.youtube.com/watch?v=fhRhQa-mE0>
- <https://www.youtube.com/watch?v=JifQBcyJ3qY>