**Instituto Superior de Engenharia de Coimbra**
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Análise Matemática I - **Engenharia Informática 2019/2020**

4.1 Cálculo integral: integral definido e aplicações — Aulas TP+P: Folha 7

Regras de integração numérica

---

1. Considere a região $\mathcal{B} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \geq 1-y^2 \quad \wedge \quad y \leq -\ln(x) \quad \wedge \quad -1 \leq y \leq 0\right\}$.

   (a) Represente graficamente a região $\mathcal{B}$.

   (b) Usando integrais, indique expressões simplificadas que permitam calcular a área de $\mathcal{B}$

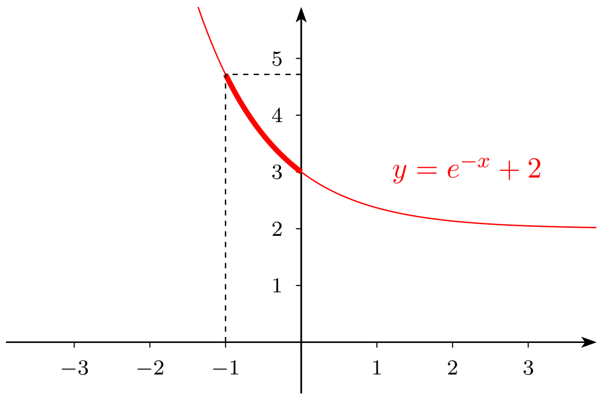
      i. em função da variável $x$;

      ii. em função da variável $y$.

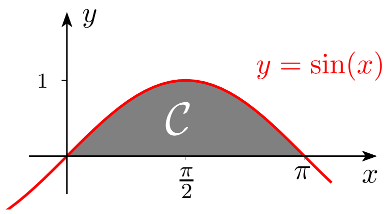
   (c) Explique as vantagens da expressão da alínea b(ii) e, a partir dela, calcule o valor exacto da área de $\mathcal{B}$ .

   (d) Tendo em conta a expressão da alínea b(ii) calcule uma aproximação para a área de $\mathcal{B}$ recorrendo à regra dos trapézios e a uma partição uniforme em 4 sub-intervalos.

   (e) Tendo em conta o gráfico da figura seguinte, calcule um majorante para o erro da estimativa da alínea anterior. Confirme o resultado, tendo em conta as alíneas (c) e (d).




2. Considere a região sombreada $\mathcal{C}$ representada na figura seguinte.




   (a) Usando integrais, calcule a área de $\mathcal{C}$ .

   (b) Tendo em conta o integral da alínea (b), calcule aproximações com 1 casa decimal correcta para a área de $\mathcal{C}$ , recorrendo

      i. à regra dos trapézios e ao Geogebra;

      ii. à regra de Simpson.

12(c) [Folha 1] Verifique que a equação $x + \ln(x) = 0$ tem uma única solução e aproxime-a, efectuando 2 iterações de um método numérico à sua escolha. Apresente um majorante para o erro dessa estimativa.

Regra dos trapézios: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}\Big[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big]$

$$\text{com} \quad \Delta x \leq \frac{(b-a)^3}{12\,n^2} \times M_2\,, \quad \text{onde } M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|$$

Regra de Simpson: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\Big[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\cdots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\Big]$

Nota: $n$ tem que ser **par**!

$$\text{com} \quad \Delta x \leq \frac{(b-a)^5}{180\,n^4} \times M_4\,, \quad \text{onde } M_4 = \max_{[a,b]} |f''''(x)|$$

| $x$ | $\sqrt{x}$ | $x^2$ | $e^x$ | $\ln(x)$ | $\frac{1}{x}$ | $\sin(x)$ | $\cos(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −1.00 | – | 1.00 | 0.37 | – | −1.00 | −0.84 | 0.54 |
| −0.90 | – | 0.81 | 0.41 | – | −1.11 | −0.78 | 0.62 |
| −0.80 | – | 0.64 | 0.45 | – | −1.25 | −0.72 | 0.70 |
| −0.75 | – | 0.56 | 0.47 | – | −1.33 | −0.68 | 0.73 |
| −0.70 | – | 0.49 | 0.50 | – | −1.43 | −0.64 | 0.76 |
| −0.60 | – | 0.36 | 0.55 | – | −1.67 | −0.56 | 0.83 |
| −0.50 | – | 0.25 | 0.61 | – | −2.00 | −0.48 | 0.88 |
| −0.40 | – | 0.16 | 0.67 | – | −2.50 | −0.39 | 0.92 |
| −0.30 | – | 0.09 | 0.74 | – | −3.33 | −0.30 | 0.96 |
| −0.25 | – | 0.06 | 0.78 | – | −4.00 | −0.25 | 0.97 |
| −0.20 | – | 0.04 | 0.82 | – | −5.00 | −0.20 | 0.98 |
| −0.10 | – | 0.01 | 0.90 | – | −10.00 | −0.10 | 1.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | – | – | 0.00 | 1.00 |
| 0.10 | 0.32 | 0.01 | 1.11 | −2.30 | 10.00 | 0.10 | 1.00 |
| 0.20 | 0.45 | 0.04 | 1.22 | −1.61 | 5.00 | 0.20 | 0.98 |
| 0.25 | 0.50 | 0.06 | 1.28 | −1.39 | 4.00 | 0.25 | 0.97 |
| 0.30 | 0.55 | 0.09 | 1.35 | −1.20 | 3.33 | 0.30 | 0.96 |
| 0.40 | 0.63 | 0.16 | 1.49 | −0.92 | 2.50 | 0.39 | 0.92 |
| 0.50 | 0.71 | 0.25 | 1.65 | −0.69 | 2.00 | 0.48 | 0.88 |
| 0.60 | 0.77 | 0.36 | 1.82 | −0.51 | 1.67 | 0.56 | 0.83 |
| 0.70 | 0.84 | 0.49 | 2.01 | −0.36 | 1.43 | 0.64 | 0.76 |
| 0.75 | 0.87 | 0.56 | 2.12 | −0.29 | 1.33 | 0.68 | 0.73 |
| 0.80 | 0.89 | 0.64 | 2.23 | −0.22 | 1.25 | 0.72 | 0.70 |
| 0.90 | 0.95 | 0.81 | 2.46 | −0.11 | 1.11 | 0.78 | 0.62 |
| 1.00 | 1.00 | 1.00 | 2.72 | 0.00 | 1.00 | 0.84 | 0.54 |

## Regras de integração numérica

O cálculo de um integral definido $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ recorrendo a primitivas (Teorema Fundamental do Cálculo),

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

nem sempre é possível, porque

- **existem funções que não têm primitiva elementar**, isto é, cuja primitiva não pode ser explicitada recorrendo a um número finito de operações elementares (soma, subtracção, multiplicação, divisão, composição e raiz) de funções polinomiais, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas ou trigonométricas inversas. É o que acontece, por exemplo, com as funções

$$e^{-x^2}, \quad \sin(x^2), \quad \cos(x^2), \quad \frac{\sin(x)}{x}, \quad \frac{\cos(x)}{x}, \quad \frac{1}{\ln(x)}.$$

- **nem sempre é conhecida a expressão analítica de** $f(x)$, (por exemplo, quando a função é estimada recorrendo a medições).

O uso de métodos de integração numérica permite determinar um valor aproximado do integral sem determinar a primitiva da função integranda. A ideia subjacente à integração numérica consiste em aproximar, no intervalo $[a,b]$, a função $f(x)$ através de uma função $g(x)$ com primitiva elementar,

$$f(x) \simeq g(x), \quad \text{em } [a,b],$$

considerando-se depois a aproximação

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b g(x)\,dx.$$

A escolha da função $g(x)$ origina diferentes famílias de fórmulas de integração numérica: regra dos trapézios, regra de Simpson, etc.

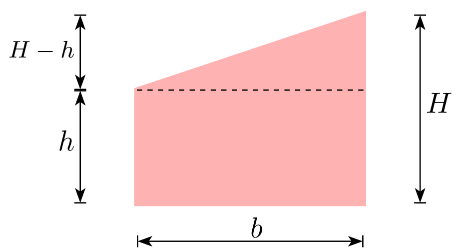
No que se segue vamos considerar $g(x) = p_n(x)$, o polinómio interpolador de grau $\leq n$ da função $f(x)$ no intervalo $[a,b]$, recorrendo a $n+1$ pontos igualmente espaçados no intervalo de integração. O intervalo $[a,\ b]$ ficará assim dividido em $n$ sub-intervalos de igual amplitude, $h$, dada por

$$h = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}.$$

Note-se que o grau do polinómio originará diferentes fórmulas de integração numérica mas, em qualquer caso, a primitivação do polinómio $p_n(x)$ não levantará qualquer dificuldade do ponto de vista algébrico.

### Regra dos trapézios

Tendo em conta que a área de um trapézio é dada por

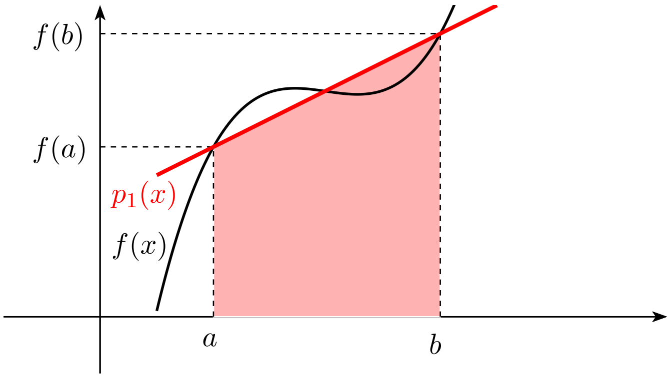



$$\text{Área(trapézio)} = \text{Área(rectângulo)} + \text{Área(triângulo)} = b \times h + \frac{b \times (H-h)}{2} = b\,\frac{h+H}{2}.$$

Se considerarmos

$$f(x) \simeq p_1(x), \quad \text{em } [a,b],$$

onde $p_1(x)$ é o **polinómio interpolador** de grau $\leq 1$ nos pontos $\big(a, f(a)\big)$ e $\big(b, f(b)\big)$, tem-se




$$\int_a^b f(x)\,dx \;\simeq\; \int_a^b p_1(x)\,dx \;=\; \underbrace{(b-a)\,\times\,\frac{f(a)+f(b)}{2}}_{\text{Área(trapézio)}}\,.$$

Esta regra numérica também pode, obviamente, ser deduzida analiticamente, mas essa dedução sai do âmbito desta UC.

A ideia anterior, de interpolar a função $f(x)$ recorrendo a um polinómio $p_n(x)$, pode ser generalizada para um polinómio de qualquer grau. Porém, essa não é a melhor opção, porque:

- os polinómios de grau elevado podem tornar-se fortemente oscilantes, o que pode dar origem a erros de truncatura elevados;

- para calcular um majorante para o erro de truncatura da aproximação, é necessário estimar o máximo (do módulo) de derivadas de ordem elevada (ordem $n+1$).

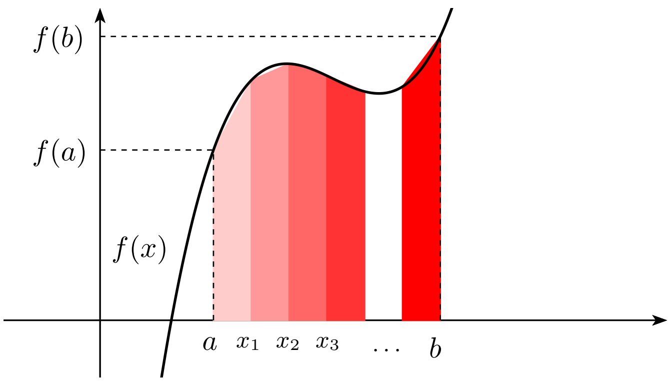
Por essas razões, em vez de recorrer fórmulas de integração que têm por base polinómios de grau elevado, recorre-se a regras compostas. A ideia subjacente às regras compostas é dividir o intervalo de integração $[a,b]$ num número suficientemente elevado de sub-intervalos, nos quais se aplica a regra simples.

Consideremos então uma partição do intervalo $[a,b]$ recorrendo a pontos igualmente espaçados

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\,,$$
$$\text{com} \quad h \;=\; x_{i+1} - x_i$$

e apliquemos a regra dos trapézios a cada um dos sub-intervalos

$$[x_0,\,x_1]\,, \quad [x_1,\,x_2]\,, \quad \cdots \quad [x_{n-1},\,x_n]\,.$$




Obtemos

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx \;&=\; \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \;+\; \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \;+\; \dots \;+\; \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx \\
&\simeq\; \frac{h}{2}\Big(f(x_0)+f(x_1)\Big) + \frac{h}{2}\Big(f(x_1)+f(x_2)\Big) + \cdots + \frac{h}{2}\Big(f(x_{n-1})+f(x_n)\Big) \\
&=\; \frac{h}{2}\Big(f(x_0) + 2\,f(x_1) + 2\,f(x_2) + \cdots + 2\,f(x_{n-2}) + 2\,f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big)\,,
\end{aligned}$$

Note-se que os pontos intermédios têm peso $2$, por intervirem como extremo superior num sub-intervalo e como extremo inferior no sub-intervalo seguinte, o que não acontece com os pontos $x_0 = a$ e $x_n = b$.

O facto de as abcissas dos pontos serem igualmente espaçadas não constitui uma limitação à aplicação da regra dos trapézios uma vez que, no caso de as abcissas não serem igualmente espaçadas, podemos recorrer à aplicação sucessiva da regra dos trapézios simples em cada sub-intervalo (e, eventualmente, à aplicação da regra dos trapézios composta quando os sub-intervalos sucessivos tiverem a mesma amplitude).

**Erro da regra dos trapézios**

Prova-se que o erro que se comete ao aproximar o integral $\int_a^b f(x)\,dx$ recorrendo à regra dos trapézios é majorado através da desigualdade

$$E_T \;\leq\; \frac{(b-a)^3}{12\,n^2}\,M_2\,, \qquad \text{onde } M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|\,.$$

**Observação 1**

- *Se aumentarmos o número de sub-intervalos, o intervalo* $[a,b]$ *permanece inalterado pelo que os valores de* $(b-a)^3$ *e do máximo da segunda derivada também permanecem inalterados. Mas como o valor de* $n$ *aumenta, então o erro de arredondamento diminui.*
- *A regra dos trapézios fornece resultados exactos sempre que a função* $f(x)$ *é um polinómio de grau* $\leq 1$.

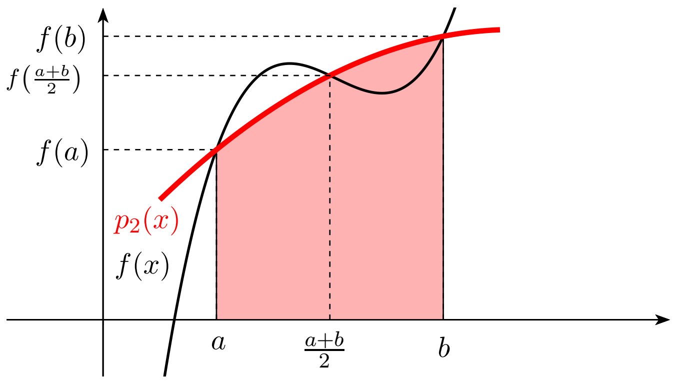
## Regra de Simpson

Outra possibilidade é considerar a aproximação

$$f(x) \;\simeq\; p_2(x)\,, \quad \text{em } [a,b]\,,$$

onde $p_2(x)$ é o **polinómio interpolador** de grau $\leq 2$ que tem por base os três pontos igualmente espaçados

$$\Big(a, f(a)\Big)\,, \quad \Big(\frac{a+b}{2}, f\big(\frac{a+b}{2}\big)\Big)\,, \quad \Big(b, f(b)\Big)\,:$$




Após algumas manipulações matemáticas, verifica-se que

$$\int_a^b f(x)\,dx \;\simeq\; \int_a^b p_2(x)\,dx \;\simeq\; \frac{h}{3}\Big(f(a) + 4f\big(\frac{a+b}{2}\big) + f(b)\Big), \quad \text{onde} \quad h = \frac{b-a}{2}\,.$$

A estratégia que foi usada para construir a regra dos trapézios composta também pode ser usada para construir a regra de Simpson composta. Considera-se uma partição do intervalo $[a,b]$ recorrendo a um **número ímpar de pontos** igualmente espaçados (ou seja, a um número **par**, $n$, de intervalos),

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\,,$$
$$\text{com} \quad h = x_{i+1} - x_i$$

e aplica-se a regra de Simpson a cada um dos sub-intervalos

$$[x_0, x_2]\,, \quad [x_2, x_4]\,, \quad \cdots \quad [x_{n-2}, x_n]\,.$$

Tem-se então

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \;+\; \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx \;+\; \ldots \;+\; \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx \\
&\simeq \frac{h}{3}\Big(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\Big)+\frac{h}{3}\Big(f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\Big)+\cdots \\
&= \frac{h}{3}\Big(f(x_0)+4\,f(x_1)+2\,f(x_2)+4\,f(x_3)+\cdots+2\,f(x_{n-2})+4\,f(x_{n-1})+f(x_n)\Big)\,.
\end{aligned}$$

Os pesos dos pontos intermédios são alternadamente $4$ e $2$, começando e acabando em $4$.

Note-se que $h$ é o espaçamento entre pontos e não a amplitude de cada intervalo onde foi aplicada a regra de Simpson simples!

Tal como foi referido para a regra dos trapézios, a limitação de que as abcissas dos pontos sejam igualmente espaçadas também não constitui uma limitação à aplicação da regra de Simpson, desde que existam trios de pontos igualmente espaçados e sucessivos.

**Erro da regra de Simpson**

Prova-se que o erro que se comete ao aproximar o integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ através da regra de Simpson é majorado através da seguinte desigualdade:

$$E_S \;\leq\; \frac{(b-a)^5}{180\,n^4}\,M_4\,, \qquad \text{onde } M_4 = \max_{[a,b]} |f''''(x)|\,.$$

**Observação 2**

- *Quando se aumenta o número de sub-intervalos, o intervalo* $[a,b]$ *permanece inalterado pelo que os valores de* $(b-a)^5$ *e do máximo da derivada de quarta ordem permanecem também inalterados. Mas como o valor de* $n$ *aumenta, então o erro de arredondamento diminui.*

- *A fórmula de Simpson* ***é exacta para polinómios de grau*** $\leq 3$. *Este resultado é surpreendente, uma vez que a fórmula de Simpson resulta da aproximação da função* $f(x)$ *recorrendo a polinómios* $p_2$ *de grau* $\leq 2$*!*