12(b) [Folha 1] Verifique que a equação $x + \ln(x) = 0$ tem uma única solução e aproxime-a, efectuando 2 iterações de um método numérico à sua escolha. Apresente um majorante para o erro dessa estimativa.

Formulário

Objectivo: determinar a solução x da equação $f(x) = 0$ que pertence ao intervalo $[a, b]$

Método da bissecção: $x_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}\,,\ \ n = 1, 2, \ldots$ com $\Delta x_n \leq |x_n - x_{n-1}|$

Método de Newton: $x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}\,,\ \ n = 1, 2, \ldots$ com $\Delta x_n \approx |x_n - x_{n-1}|$

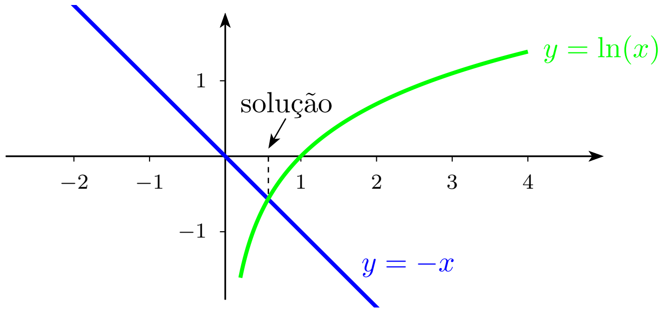
x	$\sqrt{x}$	x^2	e^x	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
−1.00	–	1.00	0.37	–	−1.00	−0.84	0.54
−0.90	–	0.81	0.41	–	−1.11	−0.78	0.62
−0.80	–	0.64	0.45	–	−1.25	−0.72	0.70
−0.75	–	0.56	0.47	–	−1.33	−0.68	0.73
−0.70	–	0.49	0.50	–	−1.43	−0.64	0.76
−0.60	–	0.36	0.55	–	−1.67	−0.56	0.83
−0.50	–	0.25	0.61	–	−2.00	−0.48	0.88
−0.40	–	0.16	0.67	–	−2.50	−0.39	0.92
−0.30	–	0.09	0.74	–	−3.33	−0.30	0.96
−0.25	–	0.06	0.78	–	−4.00	−0.25	0.97
−0.20	–	0.04	0.82	–	−5.00	−0.20	0.98
−0.10	–	0.01	0.90	–	−10.00	−0.10	1.00
0.00	0.00	0.00	1.00	–	–	0.00	1.00
0.10	0.32	0.01	1.11	−2.30	10.00	0.10	1.00
0.20	0.45	0.04	1.22	−1.61	5.00	0.20	0.98
0.25	0.50	0.06	1.28	−1.39	4.00	0.25	0.97
0.30	0.55	0.09	1.35	−1.20	3.33	0.30	0.96
0.40	0.63	0.16	1.49	−0.92	2.50	0.39	0.92
0.50	0.71	0.25	1.65	−0.69	2.00	0.48	0.88
0.60	0.77	0.36	1.82	−0.51	1.67	0.56	0.83
0.70	0.84	0.49	2.01	−0.36	1.43	0.64	0.76
0.75	0.87	0.56	2.12	−0.29	1.33	0.68	0.73
0.80	0.89	0.64	2.23	−0.22	1.25	0.72	0.70
0.90	0.95	0.81	2.46	−0.11	1.11	0.78	0.62
1.00	1.00	1.00	2.72	0.00	1.00	0.84	0.54

Exercício 12 (b)

Comecemos por localizar e separar as soluções da equação, recorrendo ao método gráfico (na forma clássica). Atendendo a que

$$\underbrace{x + \ln(x)}_{f(x)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\ln(x)}_{f_1(x)} = \underbrace{-x}_{f_2(x)}\,,$$

então as soluções da equação correspondem às abcissas dos pontos de intersecção dos gráficos das funções $f_1(x) = \ln(x)$ e $f_2(x) = -x$.



Do gráfico verifica-se que existe uma intersecção (e portanto uma solução da equação) e que pertence ao intervalo $[0.1, 1]$ (note-se que o domínio $]0, +\infty[$ da equação não inclui o valor $x = 0$!).

Vamos determinar aproximações, para essa solução, recorrendo aos métodos da bissecção e de Newton. De acordo com o enunciado, vamos efectuar 2 iterações em cada caso.

Método da bissecção:

Resolução com utilização de calculadora: $f(x) = x + \ln(x)$

n	$[a,b]$	x_n	Δx_n	$f(a)$	$f(x)$	$f(b)$
1	$[0.1,\ 1]$	0.55	$\frac{1-0.1}{2} = 0.45$	$f(0.1) \simeq -2.2$	$f(0.55) \simeq -0.05$	$f(1) = 1$
2	$[0.55,\ 1]$	0.775	$\frac{1-0.55}{2} = 0.225$	$f(0.55) \simeq -0.05$	$f(0.775) \simeq 0.52$	$f(1) = 1$

Neste caso, tem-se $\overline{x} = 0.775$, tal que $\Delta x \leq 0.225$.

Resolução sem utilização de calculadora: neste caso todos os cálculos terão que ser efectuados com recurso à tabela dada no formulário, pelo que é necessário efectuar algumas adaptações ao método. Uma vez que a tabela só tem uma quantidade finita de valores (na sua maioria apenas com 1 casa decimal), sempre que o valor de x_n tiver mais casas decimais que os valores apresentados na tabela, teremos que arredondar o valor obtido. Nessas condições o ponto calculado não será exactamente o ponto médio do intervalo, pelo que o majorante para o erro também não será metade da amplitude do intervalo, mas sim a amplitude do semi-intervalo que conterá a solução.

n	$[a,\ b]$	x_n	$f(a)$	$f(x_n)$	$f(b)$	Δx_n
1	$[0.1,\ 1]$	$0.55 \simeq 0.6$	$f(0.1) = 0.1 + \ln(0.1) \simeq -2.20$	$f(0.6) = 0.6 + \ln(0.6) \simeq 0.09$	$f(1) = 1 + \ln(1) = 1$	$\lvert 0.6 - 0.1\rvert = 0.5$
2	$[0.1,\ 0.6]$	$0.35 \simeq 0.4$	$f(0.1) \simeq -2.20$	$f(0.4) = 0.4 + \ln(0.4) \simeq -0.52$	$f(0.6) \simeq 0.09$	$\lvert 0.6 - 0.4\rvert = 0.2$

Neste caso, tem-se $\overline{x} = 0.4$, tal que $\Delta x \leq 0.2$.

Método de Newton:

Resolução com utilização de calculadora: $f(x) = x + \ln(x)$ e $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$

n	x_n	Δx_n
0	0.1	–
1	$0.1 - \frac{f(0.1)}{f'(0.1)} \simeq 0.3$	$\lvert 0.3 - 0.1\rvert = 0.2$
2	$0.3 - \frac{f(0.3)}{f'(0.3)} \simeq 0.51$	$\lvert 0.51 - 0.3\rvert = 0.21$

Neste caso, tem-se $\overline{x} = 0.51$, tal que $\Delta x \simeq 0.21$.

Resolução sem utilização de calculadora: tal como no método da bissecção, poderá ser necessário efectuar arredondamentos nas aproximações calculadas, sempre que os valores obtidos não constarem da tabela.

n	x_n	Δx_n
0	0.1	–
1	$0.1 - \frac{f(0.1)}{f'(0.1)} = 0.1 - \frac{0.1+\ln(0.1)}{1+\frac{1}{0.1}} \simeq 0.1 - \frac{-2.2}{11} = 0.3$	$\lvert 0.3 - 0.1\rvert = 0.2$
2	$0.3 - \frac{f(0.3)}{f'(0.3)} = 0.3 - \frac{0.3+\ln(0.3)}{1+\frac{1}{0.3}} \simeq 0.3 - \frac{-0.9}{4.33} \simeq 0.51$	$\lvert 0.51 - 0.3\rvert = 0.21$

Neste caso, tem-se $\overline{x} = 0.51$, tal que $\Delta x \simeq 0.21$.