Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Exame da Época Normal – Teste B**

1. Considere as funções reais de duas variáveis reais definidas por:

$f(x,y) = x^2 + y^2$;

$g(x,y) = \sqrt{f(x,y)}$; $\quad h(x,y) := \left| \begin{array}{l} \text{se} \quad x^2 + y^2 \le 16 \\ \text{então } z = -g(x,y) \end{array} \right.$; $\quad j(x,y) = \begin{cases} -\sqrt{32 - f(x,y)}, \text{ se } 16 < x^2 + y^2 \le 32 \\ h(x,y) \end{cases}$

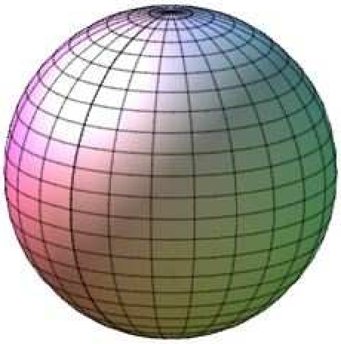

Figura 1

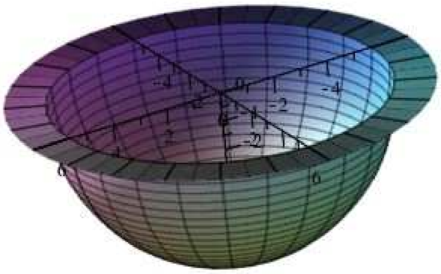

Figura 2

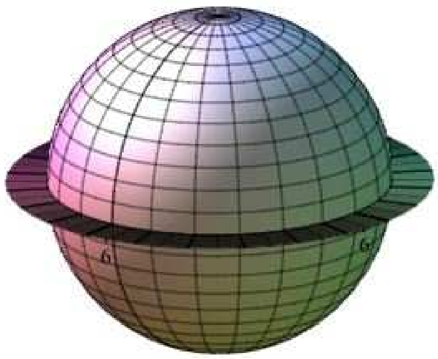

Figura 3

[1.0] **(a)** Determine o domínio da função j e represente-o geometricamente. O domínio é fechado? Justifique.

[1.0] **(b)** Defina a função j em forma de algoritmo e mostre que $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 16\right\}$ é uma curva de nível comum a todas as funções.

[2.0] **(c)** Identifique as superfícies associadas às funções e trace um esboço das mesmas.

[3.0] **(d)** Resolva apenas **<u>três</u>** das alíneas seguintes.

Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

i) Das figuras apresentadas, apenas a figura 2 representa o gráfico de uma função/campo escalar.

ii) O vetor $\left[x \quad 5 \quad \sqrt{7}\right]$ define a equação da reta tangente à curva de intersecção da superfície $z = j(x,y)$ com o plano $y = -5$ no ponto de coordenadas $P(0,-5,-\sqrt{7})$.

iii) A função j é contínua nos pontos do *cordão de soldadura* definido por $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 16\right\}$.

iv) As funções f, g e h têm um mínimo absoluto em $(0,0)$ e a função j não tem extremos.

v) A função seguinte, definida em Maple, é simétrica da função j

```
M:=(x, y)->piecewise(x^2+y^2 <= 16, sqrt(x^2+y^2),
                     16 < x^2+y^2 <= 32, sqrt(32-x^2-y^2), undefined)
```

[3.0] **(e)** Das alíneas seguintes resolva apenas **<u>duas</u>**

i) Supondo que a temperatura em qualquer ponto do plano xOy é dada por $T = g(x,y)$, as taxas de variação máxima e mínima da temperatura no ponto $P(-1,-1)$ ocorrem na direção e sentido dos vetores $\vec{w} = \langle 2,2 \rangle$ e $\vec{\mathbf{v}} = \langle -2,-2 \rangle$ respetivamente? Justifique a sua resposta.

ii) Supondo que o potencial em qualquer ponto do plano xOy é dado por $V = f(x,y)$, utilizando diferenciais, obtenha uma aproximação da diferença do potencial entre os pontos $(-1,-1)$ e $(-1.33,-1.33)$.

iii) Mostre que se $z = \left(g(x,y)\right)^2$, $y = \rho \operatorname{sen}\theta$ e $x = \rho\cos\theta$, então $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial \rho^2}$.

iv) Determine a equação do plano tangente à superfície definida por $z = 4 - f(x-2, y-2)$ se $(x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 16$, no ponto $P\left(2,2,4\right)$. Represente a superfície e o plano tangente.

2. A figura 4 representa um sólido, de densidade igual a 2, composto por três partes:

- Cone de raio $r = 4$ e altura $h = 4$;
- Cilindro de raio $r = 4$ e altura $h = 4$;
- Segmento de esfera de raio $r = \sqrt{32}$.

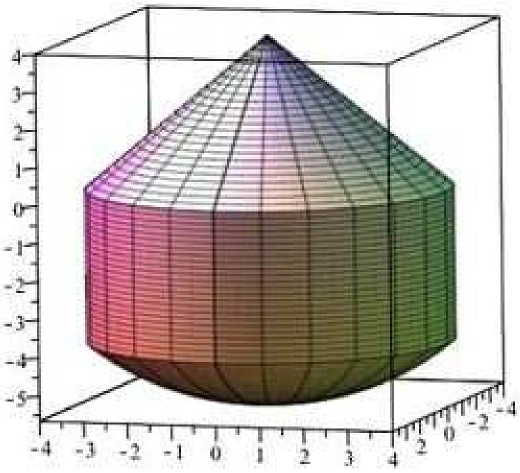

Figura 4

[3.0] **(a)** Associando os conjuntos seguintes a três sistemas de coordenadas 3D, mostre que o sólido é definido por $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, onde:

$$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 16 \wedge 0 \leq z \leq -\sqrt{x^2+y^2} + 4\right\}$$

$$S_2 = \left\{(\rho,\theta,z) : 0 \leq \rho \leq 4 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge -4 \leq z \leq 0\right\}$$

$$S_3 = \left\{(R,\theta,\varphi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge \tfrac{3}{4}\pi \leq \varphi \leq \pi \wedge -\tfrac{4}{\cos\varphi} \leq R \leq \sqrt{32}\right\}$$

[1.0] **(b)** As instruções seguintes permitem-lhe esboçar em MAPLE a superfície que limita o sólido definido na alínea anterior por S_1? Justifique.

```
> addcoords(MyCylindrical,[z,r,theta],[r*cos(theta),r*sin(theta),z])
> plot3d(4-r,r=0..4,theta=0..2*Pi,coords=MyCylindrical)
```

[3.0] **(c)** Calcule o volume e a massa do sólido.

[3.0] **(d)** Das alíneas seguintes resolva apenas **<u>três</u>**

i) Prove, usando coordenadas esféricas, que o volume de uma esfera de raio r é $\frac{4}{3}\pi r^3$.

ii) Mostre, que a área da superfície cónica que limita o sólido é igual a $A(S) = \pi r m = 16\sqrt{2}\pi$, em que r é o raio e m a medida da hipotenusa do triângulo que se obtém por projeção da superfície no plano yOz.

<u>Sugestão</u>: A área de uma superfície de equação $z = g(x,y)$ é dada por

$A(S) = \iint_D \sqrt{(g_x(x,y))^2 + (g_y(x,y))^2 + 1}\, dydx$, com g_x e g_y funções contínuas em D.

iii) Em coordenadas cartesianas o sólido com forma igual à de um lápis é definido por

$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 16 \wedge -\sqrt{32 - x^2 - y^2} \leq z \leq -\sqrt{x^2+y^2} + 4\right\}$? Justifique a sua resposta.

iv) Complete a função seguinte e associe-a a uma transformação/mudança de variáveis.

```
> Esfericas2Cartesianas :=proc(r, theta, phi)
   local x, y, z;
   if evalf(                              )
   then
        x :=                      ;
        y :=                      ;
        z :=                      ;
        return ([x, y, z]);
   else error "                          ";
   end if
   end proc
```

Nome Completo:____

Número:____

Nome/login utilizado no LVM:____

Curso

- ☐ Licenciatura em Eng. Informática
- ☐ Licenciatura em Eng. Informática – Pós-laboral
- ☐ Licenciatura em Informática – Curso Europeu

Trabalhador-Estudante

- ☐ Sim
- ☐ Não

Frequência às aulas de AM2

- ☐ Regime diurno
- ☐ Regime Pós-laboral

Atividades de aprendizagem e avaliação

- ☐ Não
- ☐ Sim
  - ☐ At01_Matlab - ACrescimento + Prog.Geométrica
  - ☐ At02_Matlab – Método da Secante e Método da Falsa Posição
  - ☐ At03_Matlab – Integração Numérica (Presencial)
  - ☐ At04_Matlab – Métodos de Euler e de Runge-Kutta com GUI
  - ☐ At05_TP_Maple – Cálculo Diferencial e Integral em IR^n
  - ☐ Participação nos fóruns (pelo menos 3 vezes)

Acompanhou registos sobre AM2 e outros em facebook/armeniocorreia

- ☐ Sim
- ☐ Não