EXAME DA ÉPOCA NORMAL - TESTE A+B » Data: 27/06/2019 Código da prova: **2706201901**

Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Duração:** 2h30+30m

Nome do aluno: **Número:**

1. Considere a equação não linear $\left|\ln(x)\right| - e^{x} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

[0.5] **(a)** Indique um intervalo de amplitude inferior a 1 no qual a equação dada tem uma única raiz x^* real positiva. Justifique a sua resposta.

[0.5] **(b)** Determine um valor aproximado da raiz localizada utilizando o método da bisseção uma vez. Indique a precisão do resultado obtido.

[0.5] **(c)** O resultado obtido na alínea anterior é uma aproximação inicial favorável à aplicação do método de Newton-Raphson ou das tangentes? Obtenha um valor aproximado da raiz efetuando uma iteração.

[1.5] **(d)** Complete a função seguinte e averigue se a script imediatamente a seguir traduz corretamente a resolução em MATLAB da equação não linear dada. Justifique a sua resposta, corrigindo se for esse o caso os erros existentes na *script*.

```
function x = MTangentes(f,dfdx,x0,kmax,tol)
 k=_________; x(k)=_________;
 while(__________)
     x(k+1)=____________________________;
     if(_________________________________)  return;  end
     k=__________;
end
```

```
% Script01 de interface do MTangentes
Clear;clc;
strF='abs(exp(x))-ln(x)';
f=@(x) vectorize(eval(strF));

while(1)
    a=str2num(input('a=','s'));    b=str2num(input('b=','s'));
    if ~((isscalar(a)&&isreal(a))&&(isscalar(b)&&isreal(b))&& b>a) continue end;
    if (f(a)*f(b)>0) break; end
end
df     = diff(f('x')); % Derivada simbólica
dfdx   = @(x) eval(vectorize(char(df)));
d2fdx2 = @(x) eval(vectorize(char(diff(df))));

while(1)
    x0 = str2num(input('x0=','s'));
    if ~(isscalar(x0)&& isreal(x0)) continue; end
    if(f(x0)*d2fdx2(x0)<0) break; end
end
kmax = input('k_max='); tol  = str2num(input('tol=','s'));

xT = MTangentes(dfdx,f,x0,kmax,tol) % Chamada do método das tangentes
```

2. A figura 1 representa um protótipo de uma afiadeira, cujos contornos são definidos por:

- Circunferência de raio 1;
- Arcos de parábolas de eixo vertical com vértices $v_1 = (0,2)$ e $v_2 = (0,-2)$;
- Segmentos de reta.

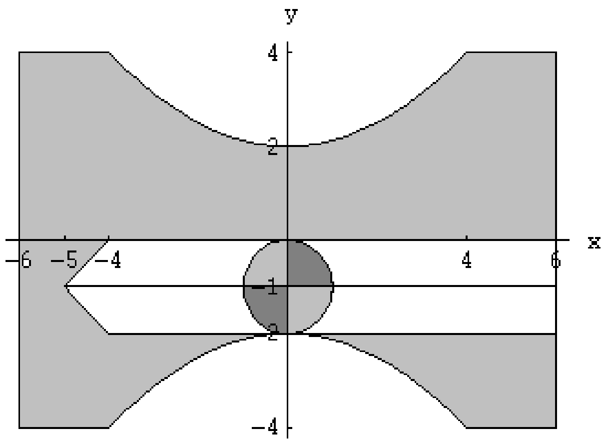

Figura 1 – afiadeira

[2.0] **(a)** Complete as tabelas de diferenças divididas seguintes e usando a interpoladora de Newton determine a equação da parábola e do segmento de reta com declive negativo.

x_i	$f(x_i)$	$f_{i,i+1}$	$f_{i,i+2}$
-4	_?_		
		-1/2	
_?_	2		_?_
		1/2	
4	4		

x_i	$g(x_i)$	$g_{i,i+1}$
-5	_?_	
		_?_
-4	_?_	

[2.5] **(b)** Usando a regra dos trapézios composta com $n = 2$ e a regra de Simpson simples, obtenha um valor aproximado para o integral $I = \int_{-4}^{4} (1/8\, x^2 + 2)dx$. Interprete os resultados obtidos e determine o erro cometido.

3. Considere o seguinte problema de valor inicial $y' + yt^2 = y, \quad y(0) = 6, \quad t \in [0,2]$

[0.5] **(a)** Mostre que $y(t) = 6 \times \exp\left(t - \frac{t^3}{3}\right)$ é a solução exata do PVI.

Apresente a instrução em Matlab através da qual, utilizando uma função da *Symbolic Math Toolbox*, se obtém a solução exata do PVI dado.

[2.0] **(b)** Relativamente ao PVI da alínea anterior, complete a tabela seguinte e interprete os resultados obtidos.

			Aproximações				Erros			
i	t_i	$y(t_i)$ Exata	y_i Euler	y_i EulerM	y_i RK2	y_i RK4	$\|y(t_i) - y_i\|$ Euler	$\|y(t_i) - y_i\|$ EulerM	$\|y(t_i) - y_i\|$ RK2	$\|y(t_i) - y_i\|$ RK4
0	0	6					0	0	0	0
1					9	11.5938		2.6864		
2	2	3.0805		-4.5					7.5805	1.2086

4. Considere as funções reais de duas variáveis reais definidas por:

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\ ; \qquad g(x,y):=\left|\begin{array}{l}\text{se} \quad x^2+y^2\le 16\\ \text{então}\ \ z=f(x,y)\end{array}\right. ; \qquad h(x,y)=\begin{cases} g(x,y) \\ \text{sqrt}(32-f^2(x,y)),\ \text{se}\ 16<x^2+y^2\le 32\end{cases}$$

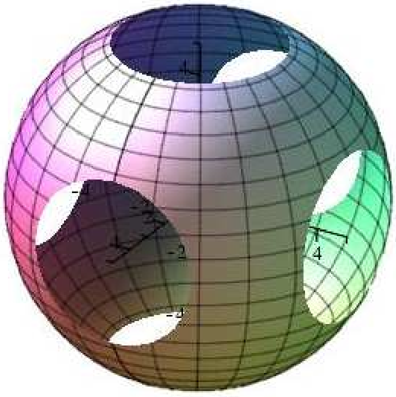

Figura 2

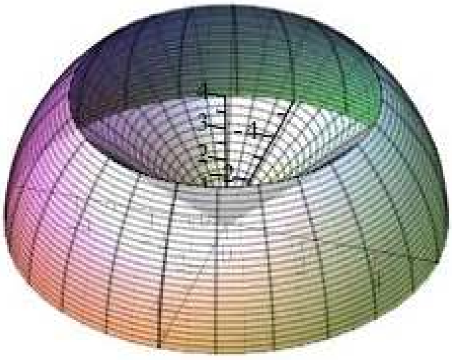

Figura 3

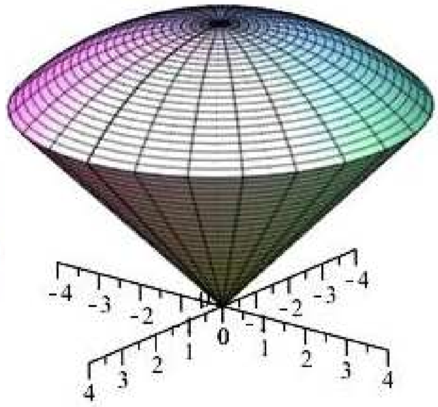

Figura 4

[1.0] **(a)** Determine o domínio das funções e represente-os geometricamente.

[1.5] **(b)** Defina a função h em forma de algoritmo e trace um esboço do seu gráfico.

[1.5] **(c)** Resolva apenas **<u>duas</u>** das alíneas seguintes.

Qual o <u>valor lógico</u> das seguintes afirmações? <u>Justifique a sua resposta</u>.

i) Das figuras 2, 3 e 4, apenas a figura 4 representa o gráfico de uma função real de duas variáveis reais.

ii) Por definição, a derivada parcial da função h em ordem a y no ponto $(0,5)$ é dada por:

$$\frac{\partial h}{\partial y}(5,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{h(\Delta y,0)-h(5,0)}{\Delta y}=0$$

iii) O vetor $\begin{bmatrix}5 & y & \sqrt{7}\end{bmatrix}$ define parametricamente a equação da reta tangente à curva de intersecção da superfície de equação $z=h(x,y)$ com o plano $x=5$ no ponto de coordenadas $P(5,0,\sqrt{7})$.

iv) A função seguinte, definida em Maple, é simétrica da função h

```
M:=(x,y)->piecewise(x^2+y^2>16,sqrt(32-x^2-y^2),sqrt(x^2+y^2))
```

[1.0] **(d)** Seja j um campo escalar definido por $j(x,y)=\sin(f^2(x,y)-(x^2-x)-(y^2+y))$

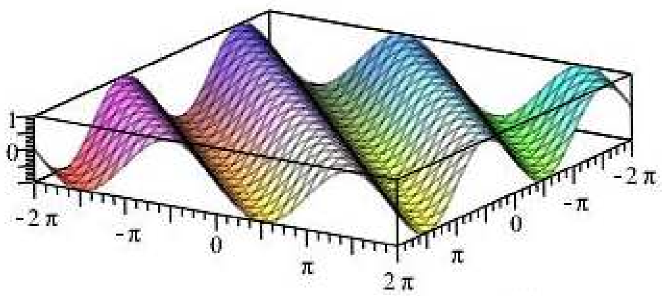

Figura 5 – gráfico de $z=j(x,y)$

Das alíneas seguintes resolva apenas **<u>uma</u>**

i) Supondo que o potencial em qualquer ponto do plano xOy é dada por $V=j(x,y)$, determine a taxa de variação do potencial no ponto $P\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$ na direção do vetor que faz um ângulo de 90º com a direção positiva do eixo dos x e interprete o resultado obtido.

ii) Utilizando diferenciais, obtenha uma aproximação da diferença de potencial entre os pontos $P\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$ e . $Q\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{180}\right)$.

iii) Mostre que se $z = \arcsin(j((x-1)^2,(y-1)^2))$, $x = 1+\cos(\theta)$ e $y = 1+\sin(\theta)$, então $\frac{1}{2}\frac{dz}{d\theta} = -\sin(2\theta)$.

iv) Determine a equação do plano tangente à superfície definida por $z = j(x,y)$, no ponto $P\left(0,-\frac{\pi}{2},1\right)$.

5. No **convívio de São João em Cidadelhe (Vale do Côa, Pinhel) o largo de São Sebastião "das orelhas grandes"** foi enfeitado com balões cujo formato é igual ao da figura seguinte, isto é, sólido composto por duas partes:

- Segmento de esfera de raio $r = \sqrt{32}$ seccionado por um cone de raio $r = 4$ e altura $h = 4$
- Cilindro de raio $r = \sqrt{32}$ e altura $h = \sqrt{32}$

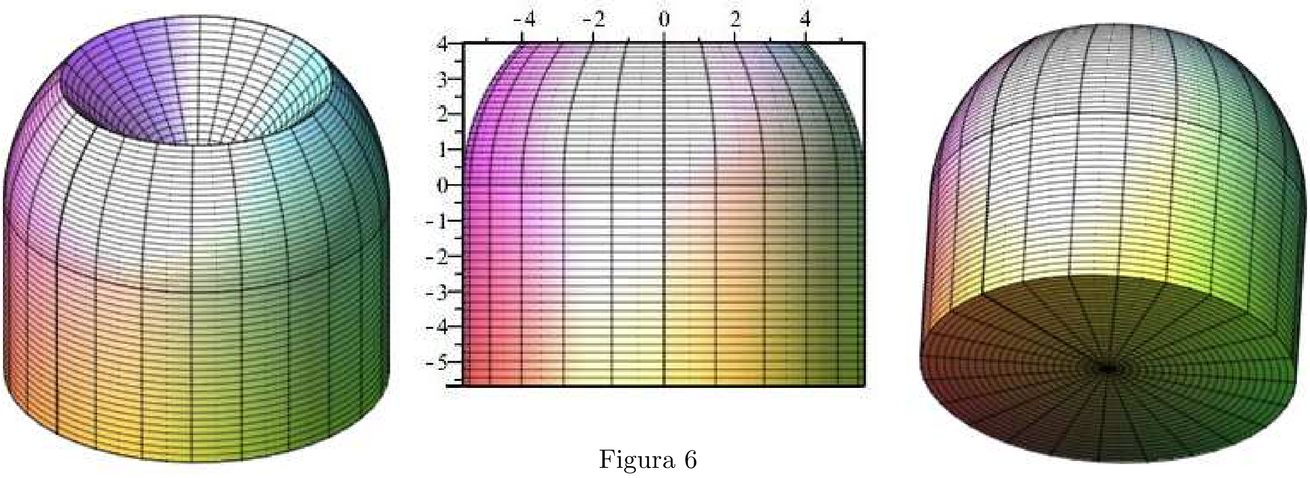

Figura 6

[2.0] **(a)** Associando os conjuntos seguintes a dois sistemas de coordenadas 3D, mostre que o sólido é definido por $S = S_1 \cup S_2$, onde:

$$S_1 = \left\{(R,\theta,\varphi) : 0 \le R \le \sqrt{32} \wedge 0 \le \theta \le 2\pi \wedge \tfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \tfrac{\pi}{2}\right\}$$

$$S_2 = \left\{(\rho,\theta,z) : 0 \le \rho \le \sqrt{32} \wedge 0 \le \theta \le 2\pi \wedge -\sqrt{32} \le z \le 0\right\}$$

[2.0] **(b)** Calcule o volume e a massa do sólido supondo que a sua densidade é constante e igual a 2.

[1.0] **(c)** Das alíneas seguintes resolva apenas <u>**uma**</u>

i) Usando o integral triplo deduza as fórmulas do volume de um cone e de um cilindro de raio r e altura h.

ii) Determine a área da superfície cónica do sólido da figura 6.

iii) Deduza a fórmula da transformação de coordenadas cilíndricas para cartesianas e o respetivo jacobiano.

iv) Complete a rotina seguinte em MAPLE e apresente uma 2ª versão em MATLAB com critérios de validação dos parâmetros de entrada.

```
Cilindricas2Cartesianas := proc(rho, theta, z)
   local x, y, z;
   x := ______________________________;
   y := ______________________________;
   z := ______________________________;
   return [___,___,___];
end proc;
```

Nome Completo:____

Número:____

Curso

- ☐ Licenciatura em Eng. Informática
- ☐ Licenciatura em Eng. Informática – Pós-laboral
- ☐ Licenciatura em Informática – Curso Europeu

Trabalhador-Estudante

- ☐ Sim
- ☐ Não

Frequência às aulas de AM2

- ☐ Regime diurno
- ☐ Regime Pós-laboral

Foi assíduo às aulas de AM2 (frequência a mais de 70% das aulas lecionadas)

- ☐ Sim
- ☐ Não

Fez atividades de aprendizagem e avaliação ao longo do semestre

- ☐ Não
- ☐ Sim
  - ☐ At01_Matlab – Integração Numérica (Presencial)
  - ☐ At02_Matlab – MNEDO_PVI
  - ☐ At03_Matlab – Máquina para derivação e integração
  - ☐ At01_TP – Cálculo Diferencial e Integral em IR^n
  - ☐ Participação nos fóruns temáticos de AM2 (pelo menos 3 vezes)

Acompanhou registos sobre AM2 e outros na página » facebook/armeniocorreia

- ☐ Sim
- ☐ Não