Chapitre 2

COMPLEXITÉ DES ALGORITHMES ITERATIFS

Définitions et notations

1 Boucle

Compteur, indice, compte tours de la boucle

pour i de l à u faire

S1(i)

S2(i)

.

Sm(i)

fin pour

instruction

Borne inférieure (lower)

Borne supérieure (upper)

Corps de la boucle

i Є [l…u] est appelée itération de la boucle

Définitions et notations

Nid de boucles (ensemble de q boucles imbriquées)

pour i_1 de l_1 à u_1 faire
    pour i_2 de l_2 à u_2 faire
        pour i_q de l_q à u_q faire
            corps $(i_1, i_2, \dots, i_q)$
        fin pour
    fin pour
fin pour

l_1 , u_1 sont des constantes
l_2 , u_2 sont fonctions de i_1
l_3 , u_3 sont fonctions de i_1 , i_2

l_k , u_k sont fonctions de $i_1 , \dots i_{k-1}$

l_q , u_q sont fonctions de $i_1 , \dots i_{q-1}$

On les suppose affines

Définitions et notations

- Un nid de boucle est dit **parfait** si l'imbrication est parfaite et toutes les instructions se trouvent dans la boucle la plus interne (comme le nid présenté précédemment)
- Autrement, le nid est dit **imparfait** ou non parfait
- Exemple :

pour i_1 de l_1 à u_1 faire
    S1(i_1)
    pour i_2 de l_2 à u_2 faire
        S2(i_1 , i_2)
    fin pour
    pour i_3 de l_3 à u_3 faire
        S3 (i_1, i_2 ,i_3)
        pour i_4 de l_4 à u_4 faire
            S4 (i_1, i_2 ,i_3 ,i_4)
        fin pour
    fin pour
fin pour

Calcul de complexité
Cas d'une boucle

1 Boucle

pour i de l à u faire

corps(i) $\longrightarrow$ c(i)

fin pour

La complexité de la boucle s'écrit : $\mathcal{C} = \sum_{i=1}^{u} c(i)$

Si c(i) est une constante c alors :

$$\mathcal{C} = c * (u-l+1)$$

Calcul de complexité
Cas d’une boucle

Exemple 1 : B1

pour i de 1 à n faire

    A[i] = B[i] * B[i] + 4 * C[i]

fin pour

- La complexité du corps C(i) = 3 (constante)
- La complexité de B1 :

$$\mathcal{T}(n) = \sum_{i=1}^{n} 3 = 3n = O(n)$$

Calcul de complexité
Cas d'une boucle

Exemple 2 : B2

pour i de 1 à n faire

    A[i] = puissance(B[i], i)

fin pour

```
puissance(x, i)
 {  p = x
    pour j de 2 à i faire
      p = p * x
    fin pour
    return p
}
```

$\mathcal{C}$(puissance) = i-1

- La complexité du corps C(i) = i-1
- La complexité de B2 $\mathcal{T}$(n) = $\sum_{i=1}^{n}(i-1)$

$$\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2} + O(n) = O(n^2)$$

Calcul de complexité
Cas de deux boucles

2 Deux boucles

pour i1 de l1 à u1 faire

pour i2 de l2 à u2 faire

corps (i1, i2) $\longrightarrow$ C(i1, i2)

fin pour

fin pour

La complexité des boucles s'écrit

$$\mathcal{T} = \sum_{i1=l1}^{u1} \sum_{i2=l2}^{u2} C(i1, i2)$$

Calcul de complexité
Cas de plusieurs boucles

q boucles

pour i_1 de l_1 à u_1 faire
    pour i_2 de l_2 à u_2 faire

        pour i_q de l_q à u_q faire
            corps (i_1, i_2 , … ,i_q) → *C(i1, i2, …iq)*
        fin pour

    fin pour
fin pour

La complexité des boucles s'écrit :

$$\mathcal{T} = \sum_{i1=l1}^{u1} \sum_{i2=l2}^{u2} \cdots \sum_{iq=lq}^{uq} C(i1, i2, \ldots, iq)$$

Calcul de complexité

Formules de calcul des sommes

$$\sum_{i=1}^{n} cste = \mathrm{n} * cste$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^{\alpha} = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \mathrm{O}(\mathrm{n}^{\alpha})$$

On pourra aussi utiliser :

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{i} = 2^{n+1} - 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} x^{i} = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

Calcul de complexité

Exemples de calcul des sommes

$$\sum_{i=1}^{n}(n+1) = n*(n+1) = n^2 + O(n) = O(n^2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} j = j*n = O(n*j) = O(n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} 3i = 3*(1+2+\cdots+n) = \frac{3n^2}{2} + O(n) = O(n^2)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(n-i+1) = \sum_{i=1}^{n}(n+1) - \sum_{i=1}^{n} i = n^2 + O(n) - \left(\frac{n^2}{2} + O(n)\right) = \frac{n^2}{2} + O(n) = O(n^2)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(n-i+1) = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2}{2} + O(n) = O(n^2)$$

$$\sum_{j=i}^{n} j = \sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{i-1} j = \frac{n^2}{2} + O(n) - \left(\frac{i^2}{2} + O(i)\right) = \frac{n^2}{2} - \frac{i^2}{2} + O(n) + O(i)$$

Calcul de complexité

Exemples : Cas de deux boucles

Exemple 3 : N3 : 2 boucles [l1 =1, u1=n, l2=1, u2=n]

Soit C(i1, i2) = 1

$$\mathcal{T}(n) = \sum_{i1=1}^{n} \sum_{i2=1}^{n} 1 = \sum_{i1=1}^{n} n = n^2 = O(n^2)$$

Soit C(i1, i2) = 3

$$\mathcal{T}(n) = \sum_{i1=1}^{n} \sum_{i2=1}^{n} 3 = \sum_{i1=1}^{n} 3n = 3n^2 = O(n^2)$$

Calcul de complexité

Exemples : Cas de deux boucles

- **Exemple 4 : N4 :2 boucles [l1 =1, u1=n, l2=1, u2=i1]**

Soit C(i1, i2) = 1

$$\mathcal{T}(n) = \sum_{i1=1}^{n} \sum_{i2=1}^{i1} 1 = \sum_{i1=1}^{n} i1 = n^2/2 + O(n) = O(n^2)$$

Exemple 5 : N5 :2 boucles [l1 =1, u1=n, l2=i1, u2=n]

Soit C(i1, i2) = 1

$$\mathcal{T}(n) = \sum_{i1=1}^{n} \sum_{i2=i1}^{n} 1 = \sum_{i1=1}^{n} (n - i1 + 1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i = n^2/2 + O(n) = O(n^2)$$

Calcul de complexité : Illustration des exemples 4 et 5

0 0	0	0	0	0
0	0 0	0	0	0
0	0	0 0	0	0
0	0	0	0 0	0
0	0	0	0	0 0

```
N4 :pour i1 de 1 à n
        pour i2 de 1 à i1
          M (i1, i2)=0
        fin pour
    fin pour
```

```
N5 : pour i1 de 1 à n
        pour i2 de i1 à n
          M (i1, i2)=0
        fin pour
    fin pour
```

Calcul de complexité

Exemples : Cas de deux boucles

- **Exemple 6 : N6 2 boucles [l1 =1, u1=n, l2=1, u2=n]**

Soit C(i1, i2) = i1 + 3

$$\mathcal{T}(n) = \sum_{i1=1}^{n} \sum_{i2=1}^{n} (i1 + 3) = \sum_{i1=1}^{n} n\,(i1 + 3)$$

$$= \sum_{i1=1}^{n} (ni1 + 3n)$$

$$= \sum_{i1=1}^{n} ni1 + \sum_{i1=1}^{n} 3n$$

$$= n\,(\frac{n2}{2} + O(n)) + 3\,n^2$$

$$= \frac{n^3}{2} + O(n^2) + 3n^2 = \frac{n^3}{2} + O(n^2) = O(n^3)$$

Calcul de complexité
Exemples : Cas de deux boucles

- **Exemple 7 : N7: [l1 =1, u1=n, l2=i1, u2=n]**

Soit C(i1, i2) = i1 + 2

$$\mathcal{T}(n) = \sum_{i1=1}^{n} \sum_{i2=i1}^{n} (i1 + 2)$$

$$= \sum_{i1=1}^{n} (n - i1 + 1)(i1 + 2)$$

$$= \sum_{i1=1}^{n} (ni1 + 2n - i1^2 - 2i1 + i1 + 2)$$

$$= \sum_{i1=1}^{n} (ni1 - i1^2 + O(n + i1))$$

$$= \frac{n^3}{2} - \frac{n^3}{3} + O(n^2) = \frac{n^3}{6} + O(n^2) = O(n^3)$$

Calcul de complexité

Exemples : Cas de deux boucles

- **Exemple 8 : N8 : [l1 =1, u1=n, l2=i1, u2=n]**

Soit $C(i1, i2) = 2i_2 + 6$

$$\sum_{i2=i1}^{n}(i_2) = \sum_{i2=1}^{n}(i_2) - \sum_{i2=1}^{i1-1}(i_2)$$

$$\mathcal{T}(n) = \sum_{i1=1}^{n}\sum_{i2=i1}^{n}(2i_2 + 6) =$$

$$\sum_{i1=1}^{n}[\sum_{i2=i1}^{n}(2i_2) + \sum_{i2=i1}^{n}(6)] =$$

$$\sum_{i1=1}^{n}[2(\sum_{i2=1}^{n}(i_2) - \sum_{i2=1}^{i1-1}(i_2)) + 6\,(n-i_1+1)] =$$

$$\sum_{i1=1}^{n}[2\ (\frac{n^2}{2} + O(n) - \frac{i_1^{\ 2}}{2} + O(i1)) + O(n)] =$$

$$\sum_{i1=1}^{n}(n^2 - i_1^{\ 2} + O(n+i_1)) =$$

$$\sum_{i1=1}^{n} n^2 - \sum_{i1=1}^{n} i_1^{\ 2} + \sum_{i1=1}^{n} O(n + i1) =$$

$$n^3 - \frac{n^3}{3} + O(n^2)$$

$$\rightarrow \mathcal{T}(n) = \frac{2n^3}{3} + O(n^2) = O(n^3)$$

Calcul de complexité

Exemples : Cas de trois boucles

Exemple 9 : N9 : 3 boucles [l1 =1, u1=n, l2=1, u2=n, l3 =1, u3=i1]

Soit C(i1, i2, i3) = 3

$$\mathcal{T}(n) = \sum_{i1=1}^{n} \sum_{i2=1}^{n} \sum_{i3=1}^{i1} 3 = \sum_{i1=1}^{n} \sum_{i2=1}^{n} 3i1$$

$$= \sum_{i1=1}^{n} (3ni1)$$

$$= 3n\left(\frac{n^2}{2} + O(n)\right)$$

$$\rightarrow \mathcal{T}(n) = \frac{3n^3}{2} + O(n^2) = O(n^3)$$

Ordre de complexité d'un nid de boucles

Soit N un nid de q boucles imbriquées de bornes affines avec un corps de complexité constante O(1), la complexité de N est donc polynômiale d'ordre q c'est-à-dire si n est le seul paramètre du pb : $\mathcal{C}(n)=O(n^q)$

Soit N un nid de q boucles imbriquées de bornes affines avec un corps de complexité polynômiale d'ordre r (exemple $O(i^r)$ ou $O(n^r)$ ou $O(n^2 i^{r-2})$), la complexité de N est donc polynômiale d'ordre q+r c'est-a-dire si n est le seul paramètre du pb : $\mathcal{C}(n)=O(n^{q+r})$

Ordre de complexité :
Exemples 10, 11, 12 et 13

N10:pour i1 de 1 à n
    pour i2 de 1 à 3i1 +4
        M (i1, i2)= M (i1, i2)*2-> O(1)
    fin pour
fin pour

2 boucles et un corps de complexité cste =O(1)(d'ordre 0)

Donc complexité de N1 est $O(n^2)$

N11:pour i1 de 1 à n
    pour i2 de i1 à 5i1 - 4
        M (i1, i2)= puissance (x,i2) -> O(i2)
    fin pour
fin pour

2 boucles et un corps de complexité =O(i2)(d'ordre 1)

Donc complexité de N1 est $O(n^3)$

N12:pour i1 de 1 à n
    pour i2 de 1 à 7i1 - 4
        M (i1, i2)= fonction(i1,i2)->i1*i2
    fin pour
fin pour

2 boucles et un corps de complexité =O(i1*i2)(d'ordre 2)

Donc complexité de N3 est $O(n^4)$

N13:pour i1 de 1 à n
    Produit-matrice() -> $O(n^3)$
fin pour

1 boucles et un corps de complexité =$O(n^3)$(d'ordre 3)

Donc complexité de N4 est $O(n^4)$

Complexité au pire et au meilleur des cas

Lorsqu'il y a des branchements (si alors ou si alors sinon) ou des boucles tant que ou répéter, la complexité dépend des données et n'est donc pas toujours la même.

Dans ce cas, on définit trois types de complexité :

- Complexité **au meilleur des cas** : C'est le plus petit nombre d'opérations qu'aura à exécuter l'algorithme
- Complexité **au pire des cas** : C'est le plus grand nombre d'opérations qu'aura à exécuter l'algorithme
- Complexité **en moyenne** : C'est la moyenne des complexités de l'algorithme

Complexité au pire et au meilleur des cas : Exemples

- **Exemple 14**:

Recherche de la première occurrence d'un élément x dans un tableau T de taille n

(boucle tant que avec un corps de complexité constante)

- Au meilleur des cas: x =T[1] -> 1 itération
- Au pire des cas : x= T[n] -> n itérations
- En moyenne -> n/2 itérations

somme des complexités divisée par leur nombre

$(1+2+3+\ldots+n)/n$ presque égal à $(n^2/2)/n=n/2$

Complexité au pire et au meilleur des cas : Exemples

- **Exemple 15** :

(Si alors sinon FinSi)

```
Pour i de 1à n
    Si A[i]=0 alors
        A[i]= B[i]*2
    Sinon
        pour j de 1à n
            A[i]= A[i]+B[j]*2
        Fin pour
    Fin Si
Fin Pour
```

- **Pire des cas :**

Tous les A[i] sont non nuls.

$\mathcal{C}_{Pire}$ (n)= n tests (o.l) et $2n^2$ o.a

$\mathcal{C}_{Pire}(n)=O(n^2)$

- **Meilleur des cas :**

Tous les A[i] sont nuls.

$\mathcal{C}_{Meilleur}$(n)= n tests (o.l) et n o.a

$\mathcal{C}_{Meilleur}(n)=O(n)$

Complexité au pire et au meilleur des cas : Exemples

- **Exemple 16** :

(Si alors FinSi)

```
Pour i de 1à n
  Si A[i]=0 alors
     Pour j de 1à n
       A[i,j]= B[i,j]*2
     Fin Pour
  Fin Si
Fin Pour
```

- **Pire des cas :**

Tous les A[i] sont nuls.

$\mathcal{C}_{Pire}$ (n)= n tests et n^2 o.a

$\mathcal{C}_{Pire}(n)=n^2+n=O(n^2)$

- **Meilleur des cas :**

Tous les A[i] sont non nuls.

$\mathcal{C}_{Meilleur}$(n)= n tests

$\mathcal{C}_{Meilleur}(n)=n=O(n)$

Complexité des nids imparfaits

Même principe de calcul pour les nids parfaits mais une somme peut contenir des sommes et des expressions.

- **Exemple 17** :

```
Pour i de 1à n
    A[i]= B[i]*2
    Pour j de 1à n
       A[i]= A[i]*A[i]-3
     Fin pour
     Pour j de 1à n
       Pour k de 1à n
         C[i,j]= C[i,j]+C[i,j]*2
      Fin pour
    Fin pour
Fin Pour
```

$$\mathcal{T}(n) = \sum_{i=1}^{n}(1 + \sum_{j=1}^{n} 2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} 2)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}(1 + 2n + \sum_{j=1}^{n} 2n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}(1 + 2n + 2n^2)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}(2n^2 + O(n))$$
$$= 2n^3 + O(n^2)$$

Remarque : Si les instructions sont de complexité constante, l'ordre de la complexité du nid correspond à l'imbrication du nid la plus profonde (3 dans cet exemple)

Complexité dépendant de plusieurs paramètres

On a toujours écrit : $\mathcal{P}(n)$ □ $\mathcal{A}(n)$ □ $\mathcal{C}(n)$ Mais on peut avoir : $\mathcal{P}(n,m)$ □ $\mathcal{A}(n,m)$ □ $\mathcal{C}(n,m)$

et en général : $\mathcal{P}(n1,n2,\ldots ns)$ □ $\mathcal{A}(n1,n2,\ldots ns)$ □ $\mathcal{C}(n1,n2,\ldots ns)$

- **Exemple 18** :

Somme de matrices (n,m)

```
Pour i de 1à n
    Pour j de 1à m
      C[i,j]= A[i,j]+B[i,j]
    Fin pour
Fin Pour
```

$\mathcal{T}(n,m) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} 1$

$= \sum_{i=1}^{n} m$

$= nm$ polynômiale d'ordre 2

- **Exemple 19** :Produit de matrices (n,p) et (p,m)

```
Pour i de 1à n
   Pour j de 1à m
      Pour k de 1à p
         C[i,j]= C[i,j]+A[i,k]*B[k,j]
      Fin pour
   Fin pour
Fin Pour
```

$\mathcal{T}(n,m) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} 2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} 2p = \sum_{i=1}^{n} 2mp = 2nmp$ polynômiale d'ordre 3

Complexité dépendant de plusieurs paramètres

Dans le cas de plusieurs paramètres, pour comparer 2 expressions de complexité ou simplifier un ordre de complexité contenant une somme de deux expressions, on a parfois besoin de discuter sur les paramètres. Il y a deux cas :

- Si les paramètres sont indépendants (exemple : nombre de lignes et de colonnes d'une matrice), la discussion se fait selon les expressions à comparer.
- Si les paramètres sont dépendants (exemple : nombre de sommets et d'arêtes d'un graphe), la discussion peut se faire selon la relation entre les paramètres
- **Exemples** :

✔ On peut ne pas avoir besoin de discuter :

❖ $O(n^2m+nm) = O(n^2m)$

✔ Si paramètres indépendants

❖ $O(n^2m+nm^2) = O(n^2m)$ si $m=O(n)$

$O(nm^2)$ si $n=O(m)$

✔ Si paramètres dépendants ($0<=m<=n(n+1)/2$ donc $m=O(1)$ ou $O(n)$ ou $O(n^2)$)

❖ $O(n^2m+nm^2) = O(n^2 +n)= O(n^2)$ si $m=O(1)$

$O(n^3+ n^3)= O(n^3)$ si $m=O(n)$

$O(n^4+ n^5)= O(n^5)$ si $m=O(n^2)$

Récapitulation : Evaluation de $\mathcal{C}(n)$ (séquence)

- Somme des coûts

Traitement 1 $\mathcal{C}_1(n)$

Traitement 2 $\mathcal{C}_2(n)$

$\mathcal{C}(n) = \mathcal{C}_1(n) + \mathcal{C}_2(n)$

Récapitulation : Evaluation de $\mathscr{C}(n)$ (branchement)

- Max des coûts

si (condition) alors
    Traitement 1 $\mathscr{C}_1(n)$
sinon
    Traitement 2 $\mathscr{C}_2(n)$

$\mathscr{C}(n) = \max(\mathscr{C}_1(n), \mathscr{C}_2(n))$

Récapitulation : Evaluation de $\mathcal{C}$(n) (boucle)

- Sommes des coûts de passages successifs

pour i de 1 à n faire
    Traitement $_i$ $\quad\quad \mathcal{C}_i(n)$ $\quad \Big\}\; \mathcal{C}(n) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{C}_i(n)$
finpour

$\mathcal{C}_i(n)$: coût de la $i^{\text{ème}}$ itération

Chapitre 2

COMPLEXITÉ DES ALGORITHMES ITERATIFS