2006 年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分)

(1) 曲线 $y = \dfrac{x + 4\sin x}{5x - 2\cos x}$ 的水平渐近线方程为______.

(2) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^3}\displaystyle\int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续,则 $a =$ ______.

(3) 反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{(1 + x^2)^2} =$ ______.

(4) 微分方程 $y' = \dfrac{y(1 - x)}{x}$ 的通解是______.

(5) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y = 1 - x\mathrm{e}^y$ 确定,则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} =$ ______.

(6) 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{E}$ 为 2 阶单位矩阵,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{B} + 2\boldsymbol{E}$,则 $|\boldsymbol{B}| =$ ______.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分)

(7) 设函数 $y = f(x)$ 具有二阶导数,且 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$,Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量,Δy 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分,若 $\Delta x > 0$,则(　　)

(A) $0 < \mathrm{d}y < \Delta y$.　(B) $0 < \Delta y < \mathrm{d}y$.　(C) $\Delta y < \mathrm{d}y < 0$.　(D) $\mathrm{d}y < \Delta y < 0$.

(8) 设 $f(x)$ 是奇函数,除 $x = 0$ 外处处连续,$x = 0$ 是其第一类间断点,则 $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是(　　)

(A) 连续的奇函数.　(B) 连续的偶函数.

(C) 在 $x = 0$ 间断的奇函数.　(D) 在 $x = 0$ 间断的偶函数.

(9) 设函数 $g(x)$ 可微,$h(x) = \mathrm{e}^{1+g(x)}$,$h'(1) = 1$,$g'(1) = 2$,则 $g(1)$ 等于(　　)

(A) $\ln 3 - 1$.　(B) $-\ln 3 - 1$.　(C) $-\ln 2 - 1$.　(D) $\ln 2 - 1$.

(10) 函数 $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-2x} + x\mathrm{e}^x$ 满足的一个微分方程是(　　)

(A) $y'' - y' - 2y = 3x\mathrm{e}^x$.　(B) $y'' - y' - 2y = 3\mathrm{e}^x$.

(C) $y'' + y' - 2y = 3x\mathrm{e}^x$.　(D) $y'' + y' - 2y = 3\mathrm{e}^x$.

(11) 设 $f(x,y)$ 为连续函数,则 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r$ 等于(　　)

(A) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}x \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.　(B) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

(C) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}y \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$.　(D) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

(12) 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数,且 $\varphi'_y(x,y) \neq 0$. 已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y) = 0$ 下的一个极值点,下列选项正确的是(　　)

(A) 若 $f'_x(x_0,y_0) = 0$,则 $f'_y(x_0,y_0) = 0$.　(B) 若 $f'_x(x_0,y_0) = 0$,则 $f'_y(x_0,y_0) \neq 0$.

(C) 若 $f'_x(x_0,y_0) \neq 0$,则 $f'_y(x_0,y_0) = 0$.　(D) 若 $f'_x(x_0,y_0) \neq 0$,则 $f'_y(x_0,y_0) \neq 0$.

(13) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 n 维列向量,$\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵,下列选项正确的是(　　)

(A) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,则 $\boldsymbol{A\alpha}_1, \boldsymbol{A\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关.

(B) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,则 $\boldsymbol{A\alpha}_1, \boldsymbol{A\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关.

(C) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,则 $\boldsymbol{A\alpha}_1, \boldsymbol{A\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关.

(D) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关.

(14) 设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶矩阵,将 $\boldsymbol{A}$ 的第2行加到第1行得 $\boldsymbol{B}$,再将 $\boldsymbol{B}$ 的第1列的 -1 倍加到第2列得 $\boldsymbol{C}$,记 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,则(　　)

(A) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$.　　(B) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{-1}$.　　(C) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$.　　(D) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}$.

三、解答题(本题共9小题,满分94分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15) (本题满分10分)

试确定常数 A,B,C 的值,使得 $\mathrm{e}^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)$,其中 $o(x^3)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小量.

(16) (本题满分10分)

求 $\displaystyle\int\frac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

(17) (本题满分10分)

设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0\}$,计算二重积分 $I=\displaystyle\iint\limits_D\frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(18) (本题满分12分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi,x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$.

(Ⅰ) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求该极限;　(Ⅱ) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

(19) (本题满分10分)

证明:当 $0<a<b<\pi$ 时,$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a$.

(20) (本题满分12分)

设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数,且 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足等式 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

(Ⅰ) 验证 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$;　(Ⅱ) 若 $f(1)=0,f'(1)=1$,求函数 $f(u)$ 的表达式.

(21) (本题满分12分)

已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases}x=t^2+1,\\y=4t-t^2,\end{cases}(t\geqslant 0)$.

(Ⅰ) 讨论 L 的凹凸性;

(Ⅱ) 过点 $(-1,0)$ 引 L 的切线,求切点 (x_0,y_0),并写出切线的方程;

(Ⅲ) 求此切线与 L(对应于 $x\leqslant x_0$ 的部分)及 x 轴所围成的平面图形的面积.

(22) (本题满分9分)

已知非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1,\\4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1,\\ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1\end{cases}$ 有三个线性无关的解.

(Ⅰ) 证明方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=2$;　(Ⅱ) 求 a,b 的值及方程组的通解.

(23) (本题满分9分)

设3阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为3,向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个解.

(Ⅰ) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量;　(Ⅱ) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$.