1995 年全国硕士研究生招生考试试题

(试卷 Ⅲ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $y = \cos(x^2)\sin^2\frac{1}{x}$,则 $y' =$ ______.

(2) 微分方程 $y'' + y = -2x$ 的通解为______.

(3) 曲线 $\begin{cases} x = 1 + t^2, \\ y = t^3 \end{cases}$ 在 $t = 2$ 处的切线方程为______.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n}\right) =$ ______.

(5) 曲线 $y = x^2 e^{-x^2}$ 的渐近线方程为______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义,$f(x)$ 为连续函数,且 $f(x) \neq 0$,$\varphi(x)$ 有间断点,则(　　)

(A) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点.　　(B) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点.

(C) $f[\varphi(x)]$ 必有间断点.　　(D) $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点.

(2) 曲线 $y = x(x-1)(2-x)$ 与 x 轴所围图形的面积可表示为(　　)

(A) $-\int_0^2 x(x-1)(2-x)\,dx$.

(B) $\int_0^1 x(x-1)(2-x)\,dx - \int_1^2 x(x-1)(2-x)\,dx$.

(C) $-\int_0^1 x(x-1)(2-x)\,dx + \int_1^2 x(x-1)(2-x)\,dx$.

(D) $\int_0^2 x(x-1)(2-x)\,dx$.

(3) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导,且对任意 x_1, x_2,当 $x_1 > x_2$ 时,都有 $f(x_1) > f(x_2)$,则(　　)

(A) 对任意 x, $f'(x) > 0$.　　(B) 对任意 x, $f'(-x) \leq 0$.

(C) 函数 $f(-x)$ 单调增加.　　(D) 函数 $-f(-x)$ 单调增加.

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 $f''(x) > 0$,则 $f'(1)$, $f'(0)$, $f(1) - f(0)$ 或 $f(0) - f(1)$ 的大小顺序是(　　)

(A) $f'(1) > f'(0) > f(1) - f(0)$.　　(B) $f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)$.

(C) $f(1) - f(0) > f'(1) > f'(0)$.　　(D) $f'(1) > f(0) - f(1) > f'(0)$.

(5) 设 $f(x)$ 可导,$F(x) = f(x)(1 + |\sin x|)$. 若 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导,则必有(　　)

(A) $f(0) = 0$.　　(B) $f'(0) = 0$.

(C) $f(0) + f'(0) = 0$.　　(D) $f(0) - f'(0) = 0$.

三、(本题共 6 小题,每小题 5 分,满分 30 分)

(1) 求$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

(2) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^y$ 确定,其中 f 具有二阶导数,且 $f'\neq1$,求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(3) 设$f(x^2-1)=\ln\dfrac{x^2}{x^2-2}$,且$f[\varphi(x)]=\ln x$,求$\int\varphi(x)dx$.

(4) 设$f(x)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{1}{x^2}, & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 试讨论$f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

(5) 求摆线$\begin{cases}x=1-\cos t,\\ y=t-\sin t\end{cases}$一拱$(0\leqslant t\leqslant2\pi)$ 的弧长 S.

(6) 设单位质点在水平面内作直线运动,初速度 $v\big|_{t=0}=v_0$. 已知阻力与速度成正比(比例常数为 1),问 t 为多少时此质点的速度为$\dfrac{v_0}{3}$?并求到此时刻该质点所经过的路程.

四、(本题满分 8 分)

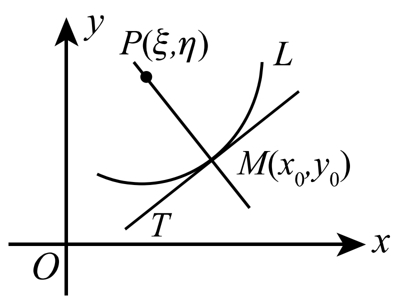
求函数$f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt$ 的最大值和最小值.

五、(本题满分 8 分)

设 $y=e^x$ 是微分方程 $xy'+p(x)y=x$ 的一个解,求此微分方程满足条件 $y\big|_{x=\ln2}=0$ 的特解.

六、(本题满分 8 分)

如图,设曲线 L 的方程为 $y=f(x)$,且 $y''>0$. 又 MT,MP 分别为该曲线在点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线和法线. 已知线段 MP 的长度为$\dfrac{(1+y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{y_0''}$(其中 $y_0'=y'(x_0)$,$y_0''=y''(x_0)$),试推导出点 $P(\xi,\eta)$ 的坐标表达式.



七、(本题满分 8 分)

设$f(x)=\int_0^x\dfrac{\sin t}{\pi-t}dt$,计算$\int_0^\pi f(x)dx$.

八、(本题满分 8 分)

设$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$,且$f''(x)>0$,证明$f(x)\geqslant x$.