# 1994 年全国硕士研究生招生考试试题

## (试卷 Ⅲ)

**一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)**

(1) 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,则 $a=$______.

(2) 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t-\ln(1+t),\\ y=t^3+t^2\end{cases}$ 所确定,则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$______.

(3) $\dfrac{d}{dx}\left(\int_0^{\cos 3x}f(t)dt\right)=$______.

(4) $\int x^3e^{x^2}dx=$______.

(5) 微分方程 $ydx+(x^2-4x)dy=0$ 的通解为______.

**二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)**

(1) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$,则(　　)

(A) $a=1,b=-\dfrac{5}{2}$.　　(B) $a=0,b=-2$.

(C) $a=0,b=-\dfrac{5}{2}$.　　(D) $a=1,b=-2$.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3, & x\leqslant 1,\\ x^2, & x>1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的(　　)

(A) 左、右导数都存在.　　(B) 左导数存在,但右导数不存在.

(C) 左导数不存在,但右导数存在.　　(D) 左、右导数都不存在.

(3) 设 $y=f(x)$ 是满足微分方程 $y''+y'-e^{\sin x}=0$ 的解,且 $f'(x_0)=0$,则 $f(x)$ 在(　　)

(A) $x_0$ 的某个邻域内单调增加.　　(B) $x_0$ 的某个邻域内单调减少.

(C) $x_0$ 处取得极小值.　　(D) $x_0$ 处取得极大值.

(4) 曲线 $y=e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$ 的渐近线有(　　)

(A) 1 条.　　(B) 2 条.　　(C) 3 条.　　(D) 4 条.

(5) 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+x^2}\cos^4x\,dx$,$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3x+\cos^4x)dx$,$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3x-\cos^4x)dx$,则有(　　)

(A) $N<P<M$.　　(B) $M<P<N$.

(C) $N<M<P$.　　(D) $P<M<N$.

**三、(本题共 5 小题,每小题 5 分,满分 25 分)**

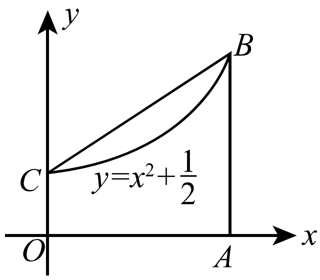
(1) 设 $y=f(x+y)$,其中 $f$ 具有二阶导数,且其一阶导数不等于 1,求 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(2) 计算 $\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$.

(3) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)$.

(4) 计算 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x+2\sin x}$.

(5) 如图,设曲线方程为 $y=x^2+\frac{1}{2}$,梯形 $OABC$ 的面积为 $D$,曲边梯形 $OABC$ 的面积为 $D_1$,点 $A$ 的坐标为 $(a,0)$,$a>0$. 证明:$\frac{D}{D_1}<\frac{3}{2}$.




**四、(本题满分 9 分)**

设当 $x>0$ 时,方程 $kx+\frac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个解,求 $k$ 的取值范围.

**五、(本题满分 9 分)**

设 $y=\frac{x^3+4}{x^2}$,

(1) 求函数的增减区间及极值;
(2) 求函数图形的凹凸区间及拐点;
(3) 求其渐近线;
(4) 作出其图形.

**六、(本题满分 9 分)**

求微分方程 $y''+a^2y=\sin x$ 的通解,其中常数 $a>0$.

**七、(本题满分 9 分)**

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且递减,证明:当 $0<\lambda<1$ 时,$\int_0^{\lambda}f(x)\mathrm{d}x\geqslant\lambda\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

**八、(本题满分 9 分)**

求曲线 $y=3-|x^2-1|$ 与 $x$ 轴围成的封闭图形绕直线 $y=3$ 旋转所得的旋转体体积.