

2018 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + ax^2 + bx)^{\frac{1}{x^2}} = 1$, 则()

(A) $a = \frac{1}{2}, b = -1$.

(B) $a = -\frac{1}{2}, b = -1$.

(C) $a = \frac{1}{2}, b = 1$.

(D) $a = -\frac{1}{2}, b = 1$.

(2) 下列函数中,在 $x = 0$ 处不可导的是()

(A) $f(x) = |x| \sin |x|$.

(B) $f(x) = |x| \sin \sqrt{|x|}$.

(C) $f(x) = \cos |x|$.

(D) $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$.

(3) 设函数 $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 2 - ax, & x \leq -1, \\ x, & -1 < x < 0, \\ x - b, & x \geq 0. \end{cases}$ 若 $f(x) + g(x)$ 在 \mathbf{R} 上连续,

则()

(A) $a = 3, b = 1$.

(B) $a = 3, b = 2$.

(C) $a = -3, b = 1$.

(D) $a = -3, b = 2$.

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导,且 $\int_0^1 f(x) dx = 0$, 则()

(A) 当 $f'(x) < 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$.

(B) 当 $f''(x) < 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$.

(C) 当 $f'(x) > 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$.

(D) 当 $f''(x) > 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$.

(5) 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx$, $K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sqrt{\cos x}) dx$, 则()

(A) $M > N > K$.

(B) $M > K > N$.

(C) $K > M > N$.

(D) $K > N > M$.

(6) $\int_{-1}^0 dx \int_{-x}^{2-x^2} (1-xy) dy + \int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} (1-xy) dy = ()$

(A) $\frac{5}{3}$.

(B) $\frac{5}{6}$.

(C) $\frac{7}{3}$.

(D) $\frac{7}{6}$.

(7) 下列矩阵中,与矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似的为()

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$(C) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(D) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(8) 设 A, B 为 n 阶矩阵, 记 $r(X)$ 为矩阵 X 的秩, (X, Y) 表示分块矩阵, 则()

$$(A) r(A, AB) = r(A).$$

$$(B) r(A, BA) = r(A).$$

$$(C) r(A, B) = \max\{r(A), r(B)\}.$$

$$(D) r(A, B) = r(A^T, B^T).$$

二、填空题(本题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 把答案填在题中横线上.)

(9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 [\arctan(x+1) - \arctan x] = \underline{\hspace{2cm}}.$

(10) 曲线 $y = x^2 + 2\ln x$ 在其拐点处的切线方程是_____.

(11) $\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

(12) 曲线 $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 对应点处的曲率为_____.

(13) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $\ln z + e^{z-1} = xy$ 确定, 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(2, \frac{1}{2})} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(14) 设 A 为 3 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性无关的向量组. 若 $A\alpha_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $A\alpha_2 = \alpha_2 + 2\alpha_3$, $A\alpha_3 = -\alpha_2 + \alpha_3$, 则 A 的实特征值为_____.

三、解答题(本题共 9 小题, 共 94 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

求不定积分 $\int e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} dx.$

(16) (本题满分 10 分)

已知连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t) dt + \int_0^x t f(x-t) dt = ax^2.$

(I) 求 $f(x)$;

(II) 若 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的平均值为 1, 求 a 的值.

(17) (本题满分 10 分)

设平面区域 D 由曲线 $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$ 与 x 轴围成, 计算二重积分

$$\iint_D (x + 2y) dx dy.$$

(18) (本题满分 10 分)

已知常数 $k \geq \ln 2 - 1$. 证明: $(x - 1)(x - \ln^2 x + 2k \ln x - 1) \geq 0$.

(19) (本题满分 10 分)

将长为 2m 的铁丝分成三段, 依次围成圆、正方形与正三角形. 三个图形的面积之和是否存在最小值? 若存在, 求出最小值.

(20) (本题满分 11 分)

已知曲线 $L: y = \frac{4}{9}x^2 (x \geq 0)$, 点 $O(0, 0)$, 点 $A(0, 1)$. 设 P 是 L 上的动点, S 是直线 OA 与直线 AP 及曲线 L 所围图形的面积. 若 P 运动到点 $(3, 4)$ 时沿 x 轴正向的速度是 4, 求此时 S 关于时间 t 的变化率.

(21) (本题满分 11 分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1 (n = 1, 2, \dots)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

(22) (本题满分 11 分)

设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + ax_3)^2$, 其中 a 是参数.

(I) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解;

(II) 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形.

(23) (本题满分 11 分)

已知 a 是常数, 且矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(I) 求 a ;

(II) 求满足 $AP = B$ 的可逆矩阵 P .