

2016 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共8小题,每小题4分,共32分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设 $\alpha_1 = x(\cos \sqrt{x} - 1)$, $\alpha_2 = \sqrt{x} \ln(1 + \sqrt[3]{x})$, $\alpha_3 = \sqrt[3]{x+1} - 1$. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时,以上3个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是()

- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. (B) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1$. (C) $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3$. (D) $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$.

(2) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x < 1, \\ \ln x, & x \geq 1, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是()

- (A) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x - 1), & x \geq 1. \end{cases}$ (B) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x + 1) - 1, & x \geq 1. \end{cases}$

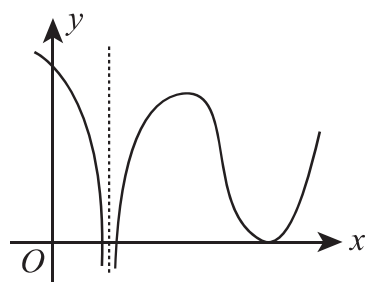
- (C) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x + 1) + 1, & x \geq 1. \end{cases}$ (D) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geq 1. \end{cases}$

(3) 反常积分 ① $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$, ② $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$ 的敛散性为()

- (A) ① 收敛, ② 收敛. (B) ① 收敛, ② 发散.
(C) ① 发散, ② 收敛. (D) ① 发散, ② 发散.

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其导函数的图形如图所示, 则()

- (A) 函数 $f(x)$ 有2个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有2个拐点.
(B) 函数 $f(x)$ 有2个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有3个拐点.
(C) 函数 $f(x)$ 有3个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有1个拐点.
(D) 函数 $f(x)$ 有3个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有2个拐点.



(5) 设函数 $f_i(x)$ ($i = 1, 2$) 具有二阶连续导数, 且 $f_i''(x_0) < 0$ ($i = 1, 2$). 若两条曲线 $y = f_i(x)$ ($i = 1, 2$) 在点 (x_0, y_0) 处具有公切线 $y = g(x)$, 且在该点处曲线 $y = f_1(x)$ 的曲率大于曲线 $y = f_2(x)$ 的曲率, 则在 x_0 的某个邻域内, 有()

- (A) $f_1(x) \leq f_2(x) \leq g(x)$. (B) $f_2(x) \leq f_1(x) \leq g(x)$.
(C) $f_1(x) \leq g(x) \leq f_2(x)$. (D) $f_2(x) \leq g(x) \leq f_1(x)$.

(6) 已知函数 $f(x, y) = \frac{e^x}{x-y}$, 则()

- (A) $f'_x - f'_y = 0$. (B) $f'_x + f'_y = 0$. (C) $f'_x - f'_y = f$. (D) $f'_x + f'_y = f$.

(7) 设 A, B 是可逆矩阵, 且 A 与 B 相似, 则下列结论错误的是()

- (A) A^T 与 B^T 相似. (B) A^{-1} 与 B^{-1} 相似.
(C) $A + A^T$ 与 $B + B^T$ 相似. (D) $A + A^{-1}$ 与 $B + B^{-1}$ 相似.

(8) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$ 的正、负惯性指数分别为1, 2, 则()

- (A) $a > 1$. (B) $a < -2$. (C) $-2 < a < 1$. (D) $a = 1$ 或 $a = -2$.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) 曲线 $y = \frac{x^3}{1+x^2} + \arctan(1+x^2)$ 的斜渐近线方程为_____.

(10) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{1}{n} + 2 \sin \frac{2}{n} + \cdots + n \sin \frac{n}{n} \right) =$ _____.

(11) 以 $y = x^2 - e^x$ 和 $y = x^2$ 为特解的一阶非齐次线性微分方程为_____.

(12) 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且 $f(x) = (x+1)^2 + 2 \int_0^x f(t) dt$, 则当 $n \geq 2$ 时, $f^{(n)}(0) =$ _____.

(13) 已知动点 P 在曲线 $y = x^3$ 上运动, 记坐标原点与点 P 间的距离为 l . 若点 P 的横坐标对时间的变化率为常数 v_0 , 则当点 P 运动到点 $(1, 1)$ 时, l 对时间的变化率是_____.

(14) 设矩阵 $\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$ 与矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 等价, 则 $a =$ _____.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

(16) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x) = \int_0^1 |t^2 - x^2| dt (x > 0)$, 求 $f'(x)$, 并求 $f(x)$ 的最小值.

(17) (本题满分 10 分)

已知函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $(x^2 + y^2)z + \ln z + 2(x + y + 1) = 0$ 确定, 求 $z = z(x, y)$ 的极值.

(18) (本题满分 10 分)

设 D 是由直线 $y = 1$, $y = x$, $y = -x$ 围成的有界区域, 计算二重积分 $\iint_D \frac{x^2 - xy - y^2}{x^2 + y^2} dx dy$.

(19) (本题满分 10 分)

已知 $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = u(x)e^x$ 是二阶微分方程 $(2x - 1)y'' - (2x + 1)y' + 2y = 0$ 的两个解. 若 $u(-1) = e$, $u(0) = -1$, 求 $u(x)$, 并写出该微分方程的通解.

(20) (本题满分 11 分)

设 D 是由曲线 $y = \sqrt{1 - x^2}$ ($0 \leq x \leq 1$) 与 $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) 围成的平面区域, 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积.

(21) (本题满分 11 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上连续, 在 $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ 内是函数 $\frac{\cos x}{2x - 3\pi}$ 的一个原函数, 且 $f(0) = 0$.

(I) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上的平均值;

(II) 证明 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ 内存在唯一零点.

(22) (本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a-2 \end{pmatrix}$, 且方程组 $Ax = \beta$ 无解.

(I) 求 a 的值;

(II) 求方程组 $A^T Ax = A^T \beta$ 的通解.

(23) (本题满分 11 分)

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(I) 求 A^{99} ;

(II) 设 3 阶矩阵 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 满足 $B^2 = BA$. 记 $B^{100} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 分别表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合.