1991 年全国硕士研究生招生考试试题

(试卷Ⅲ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $y = \ln(1+3^{-x})$,则 $\mathrm{d}y =$ ______.

(2) 曲线 $y = \mathrm{e}^{-x^2}$ 的凸区间是______.

(3) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x =$ ______.

(4) 质点以速度 $t\sin(t^2)$ 米/秒作直线运动,则从时刻 $t_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 秒到 $t_2 = \sqrt{\pi}$ 秒内质点所经过的路程等于______米.

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} =$ ______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 若曲线 $y = x^2 + ax + b$ 和 $2y = -1 + xy^3$ 在点 $(1,-1)$ 处相切,其中 a,b 是常数,则(　　)

(A) $a = 0, b = -2$.　　(B) $a = 1, b = -3$.

(C) $a = -3, b = 1$.　　(D) $a = -1, b = -1$.

(2) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2-x, & 1 < x \leqslant 2, \end{cases}$ 记 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t, 0 \leqslant x \leqslant 2$,则(　　)

(A) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{1}{3} + 2x - \frac{x^2}{2}, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$

(B) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -\frac{7}{6} + 2x - \frac{x^2}{2}, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$

(C) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{x^2}{2}, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$

(D) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2x - \frac{x^2}{2}, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义,$x_0 \neq 0$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点,则(　　)

(A) x_0 必是 $f(x)$ 的驻点.　　(B) $-x_0$ 必是 $-f(-x)$ 的极小值点.

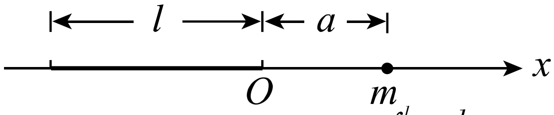
(C) $-x_0$ 必是 $-f(x)$ 的极小值点.　　(D) 对一切 x 都有 $f(x) \leqslant f(x_0)$.

(4) 曲线 $y = \frac{1+\mathrm{e}^{-x^2}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}$(　　)

(A) 没有渐近线.　　(B) 仅有水平渐近线.

(C) 仅有铅直渐近线.　　(D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线.

(5) 如图,x 轴上有一线密度为常数 μ,长度为 l 的细杆,若质量为 m 的质点到杆右端的距离为 a,已知引力系数为 k,则质点和细杆之间引力的大小为(　　)



(A) $\int_{-l}^{0}\frac{km\mu}{(a-x)^2}\mathrm{d}x$.　　(B) $\int_{0}^{l}\frac{km\mu}{(a-x)^2}\mathrm{d}x$.

(C) $2\int_{-\frac{l}{2}}^{0}\frac{km\mu}{(a+x)^2}\mathrm{d}x$.　　(D) $2\int_{0}^{\frac{l}{2}}\frac{km\mu}{(a+x)^2}\mathrm{d}x$.

三、(本题共 5 小题,每小题 5 分,满分 25 分)

(1) 设$\begin{cases}x=t\cos t,\\ y=t\sin t,\end{cases}$ 求$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(2) 计算$\int_{1}^{4}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+\sqrt{x})}$.

(3) 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2(\mathrm{e}^x-1)}$.

(4) 求$\int x\sin^2 x\mathrm{d}x$.

(5) 求微分方程 $xy'+y=x\mathrm{e}^x$ 满足 $y(1)=1$ 的特解.

四、(本题满分 9 分)

利用导数证明:当 $x>1$ 时,$\frac{\ln(1+x)}{\ln x}>\frac{x}{1+x}$.

五、(本题满分 9 分)

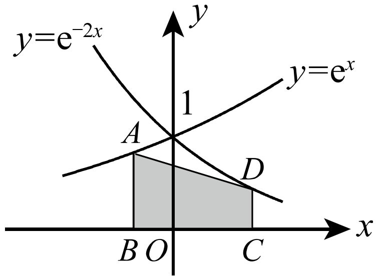
求微分方程 $y''+y=x+\cos x$ 的通解.

六、(本题满分 9 分)

曲线 $y=(x-1)(x-2)$ 和 x 轴围成一平面图形,求此平面图形绕 y 轴旋转一周所成的旋转体的体积.

七、(本题满分 9 分)

如图,A 和 D 分别是曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 和 $y=\mathrm{e}^{-2x}$ 上的点,AB 和 DC 均垂直 x 轴,且 $|AB|:|DC|=2:1$,$|AB|<1$,求点 B 和 C 的横坐标,使梯形 $ABCD$ 的面积最大.



八、(本题满分 9 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足 $f(x)=f(x-\pi)+\sin x$,且 $f(x)=x,x\in[0,\pi)$. 计算$\int_{\pi}^{3\pi}f(x)\mathrm{d}x$.