

## 1988 年全国硕士研究生招生考试试题

## ( 试卷 III )

## 一、填空题( 本题共 5 小题, 每小题 4 分, 满分 20 分)

(1) 设  $f(x) = \begin{cases} 2x + a, & x \leq 0, \\ e^x(\sin x + \cos x), & x > 0 \end{cases}$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

(2) 设  $f(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} t \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2tx}$ , 则  $f'(t) =$  \_\_\_\_\_.

(3) 设  $f(x)$  连续, 且  $\int_0^{x^3-1} f(t) dt = x$ , 则  $f(7) =$  \_\_\_\_\_.

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x} =$  \_\_\_\_\_.

(5)  $\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx =$  \_\_\_\_\_.

## 二、选择题( 本题共 5 小题, 每小题 4 分, 满分 20 分)

(1)  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x + 1$  的图形在点  $(0, 1)$  处的切线与  $x$  轴交点的坐标是( )

(A)  $\left(-\frac{1}{6}, 0\right)$ .

(B)  $(-1, 0)$ .

(C)  $\left(\frac{1}{6}, 0\right)$ .

(D)  $(1, 0)$ .

(2) 若  $f(x)$  与  $g(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上皆可导, 且  $f(x) < g(x)$ , 则必有( )

(A)  $f(-x) > g(-x)$ .

(B)  $f'(x) < g'(x)$ .

(C)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

(D)  $\int_0^x f(t) dt < \int_0^x g(t) dt$ .

(3) 若函数  $y = f(x)$ , 有  $f'(x_0) = \frac{1}{2}$ , 则当  $\Delta x \rightarrow 0$  时, 该函数在  $x = x_0$  处的微分  $dy$  是( )

(A) 与  $\Delta x$  等价的无穷小.

(B) 与  $\Delta x$  同阶的无穷小.

(C) 比  $\Delta x$  低阶的无穷小.

(D) 比  $\Delta x$  高阶的无穷小.

(4) 由曲线  $y = \sin^{\frac{3}{2}} x (0 \leq x \leq \pi)$  与  $x$  轴围成的平面图形绕  $x$  轴旋转而成的旋转体的体积为( )

(A)  $\frac{4}{3}$ .

(B)  $\frac{4}{3}\pi$ .

(C)  $\frac{2}{3}\pi^2$ .

(D)  $\frac{2}{3}\pi$ .

(5) 设函数  $y = f(x)$  是微分方程  $y'' - 2y' + 4y = 0$  的一个解, 且  $f(x_0) > 0$ ,  $f'(x_0) = 0$ , 则  $f(x)$  在点  $x_0$  处( )

(A) 有极大值.

(B) 有极小值.

(C) 某邻域内单调增加.

(D) 某邻域内单调减少.

### 三、(本题共3小题,每小题5分,满分15分)

- (1) 已知  $f(x) = e^{x^2}$ ,  $f[\varphi(x)] = 1 - x$  且  $\varphi(x) \geq 0$ , 求  $\varphi(x)$  并写出它的定义域.
- (2) 已知  $y = 1 + xe^{xy}$ , 求  $y' \Big|_{x=0}, y'' \Big|_{x=0}$ .
- (3) 求微分方程  $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x(x^2 + 1)}$  的通解(一般解).

### 四、(本题满分12分)

作函数  $y = \frac{6}{x^2 - 2x + 4}$  的图形,并填写下表.

单调增加区间	
单调减少区间	
极值点	
极值	
凹(∪) 区间	
凸(∩) 区间	
拐点	
渐近线	

### 五、(本题满分8分)

将长为  $a$  的一段铁丝截成两段,一段围成正方形,另一段围成圆形,问这两段铁丝各长为多少时,正方形与圆形的面积之和为最小?

### 六、(本题满分10分)

设函数  $y = y(x)$  满足微分方程  $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$ , 且其图形在点  $(0, 1)$  处的切线与曲线  $y = x^2 - x + 1$  在该点处的切线重合,求函数  $y = y(x)$ .

### 七、(本题满分7分)

设  $x \geq -1$ , 求  $\int_{-1}^x (1 - |t|) dt$ .

### 八、(本题满分8分)

设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有连续导数,且  $m \leq f(x) \leq M$ .

- (1) 求  $\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{4a^2} \int_{-a}^a [f(t+a) - f(t-a)] dt$ ;
- (2) 证明:  $\left| \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(t) dt - f(x) \right| \leq M - m (a > 0)$ .