更多笔记资料公众号【考研666】免费分享

2004 年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分)

(1) 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$,则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$ ______.

(2) 设函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^3+3t+1,\\ y=t^3-3t+1\end{cases}$ 确定,则曲线 $y=y(x)$ 向上凸的 x 的取值范围为 ______.

(3) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=$ ______.

(4) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=\mathrm{e}^{2x-3z}+2y$ 确定,则 $3\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ______.

(5) 微分方程 $(y+x^3)\mathrm{d}x-2x\mathrm{d}y=0$ 满足 $y\big|_{x=1}=\dfrac{6}{5}$ 的特解为______.

(6) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{ABA}^*=2\boldsymbol{BA}^*+\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,$\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵,则 $|\boldsymbol{B}|=$ ______.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分)

(7) 把 $x\to0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x\cos(t^2)\,\mathrm{d}t$,$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$,$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin(t^3)\,\mathrm{d}t$ 排列起来,使排在后面的是前一个的高阶无穷小,则正确的排列次序是(　　)

(A) α,β,γ.　(B) α,γ,β.　(C) β,α,γ.　(D) β,γ,α.

(8) 设 $f(x)=|x(1-x)|$,则(　　)

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点,但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(B) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点,但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点,且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点,$(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}$ 等于(　　)

(A) $\int_1^2\ln^2x\,\mathrm{d}x$.　(B) $2\int_1^2\ln x\,\mathrm{d}x$.　(C) $2\int_1^2\ln(1+x)\,\mathrm{d}x$.　(D) $\int_1^2\ln^2(1+x)\,\mathrm{d}x$.

(10) 设函数 $f(x)$ 连续,且 $f'(0)>0$,则存在 $\delta>0$,使得(　　)

(A) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加.

(B) $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少.

(C) 对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$.

(D) 对任意的 $x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$.

更多考研精品资料　　关注淘宝店铺：光速考研工作室

更多笔记资料公众号【考研666】免费分享

(11) 微分方程 $y''+y=x^2+1+\sin x$ 的特解形式可设为(　　)

(A) $y^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$.

(B) $y^*=x(ax^2+bx+c+A\sin x+B\cos x)$.

(C) $y^*=ax^2+bx+c+A\sin x$.

(D) $y^*=ax^2+bx+c+A\cos x$.

(12) 设函数 $f(u)$ 连续,区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2y\}$,则 $\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 等于(　　)

(A) $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}f(xy)\mathrm{d}y$.

(B) $2\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}f(xy)\mathrm{d}x$.

(C) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)\mathrm{d}r$.

(D) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)r\mathrm{d}r$.

(13) 设 $\boldsymbol{A}$ 是3阶方阵,将 $\boldsymbol{A}$ 的第1列与第2列交换得 $\boldsymbol{B}$,再把 $\boldsymbol{B}$ 的第2列加到第3列得 $\boldsymbol{C}$,则满足 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{C}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为(　　)

(A) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.　(B) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.　(C) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$.　(D) $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(14) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 的任意两个非零矩阵,则必有(　　)

(A) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关.

(B) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关.

(C) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关.

(D) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关.

三、解答题(本题共9小题,满分94分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分10分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

(16)(本题满分10分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义,在区间 $[0,2]$ 上,$f(x)=x(x^2-4)$,若对任意的 x 都满足 $f(x)=kf(x+2)$,其中 k 为常数.

(Ⅰ)写出 $f(x)$ 在 $[-2,0)$ 上的表达式;

(Ⅱ)问 k 为何值时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(17)(本题满分11分)

设 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\mathrm{d}t$,

(Ⅰ)证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数;

(Ⅱ)求 $f(x)$ 的值域.

(18)(本题满分12分)

曲线 $y=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$ 与直线 $x=0,x=t(t>0)$ 及 $y=0$ 围成一曲边梯形. 该曲边梯形绕 x 轴旋转一周得一旋转体,其体积为 $V(t)$,侧面积为 $S(t)$,在 $x=t$ 处的底面积为 $F(t)$.

更多考研精品资料　关注淘宝店铺:光速考研工作室

更多笔记资料公众号 【考研666】免费分享

（Ⅰ）求$\dfrac{S(t)}{V(t)}$的值；

（Ⅱ）计算极限$\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{S(t)}{F(t)}$.

（19）（本题满分 12 分）

设 $e < a < b < e^2$，证明 $\ln^2 b - \ln^2 a > \dfrac{4}{e^2}(b-a)$.

（20）（本题满分 11 分）

某种飞机在机场降落时，为了减少滑行距离，在触地的瞬间，飞机尾部张开减速伞，以增大阻力，使飞机迅速减速并停下.

现有一质量为 9000kg 的飞机，着陆时的水平速度为 700 km/h. 经测试，减速伞打开后，飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比（比例系数为 $k = 6.0\times10^6$）. 问从着陆点算起，飞机滑行的最长距离是多少？

注：kg 表示千克，km/h 表示千米 / 小时.

（21）（本题满分 10 分）

设 $z = f(x^2 - y^2, e^{xy})$，其中 f 具有连续二阶偏导数，求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

（22）（本题满分 9 分）

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,\\ 2x_1 + (2+a)x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0,\\ 3x_1 + 3x_2 + (3+a)x_3 + 3x_4 = 0,\\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + (4+a)x_4 = 0,\end{cases}$$

试问 a 取何值时，该方程组有非零解，并求出其通解.

（23）（本题满分 9 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 4 & -3\\ 1 & a & 5\end{pmatrix}$的特征方程有一个二重根，求 a 的值，并讨论 $\boldsymbol{A}$ 是否可相似对角化.

更多考研精品资料　　关注淘宝店铺：光速考研工作室