

## 1996 年全国硕士研究生招生考试试题

## ( 试卷 III )

## 一、填空题( 本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分)

(1) 设  $y = (x + e^{-\frac{x}{2}})^{\frac{2}{3}}$ , 则  $y' \Big|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(2)  $\int_{-1}^1 (x + \sqrt{1-x^2})^2 dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(3) 微分方程  $y'' + 2y' + 5y = 0$  的通解为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

(4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[ \sin \ln \left( 1 + \frac{3}{x} \right) - \sin \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right] = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(5) 由曲线  $y = x + \frac{1}{x}$ ,  $x = 2$  及  $y = 2$  所围图形的面积  $S = \underline{\hspace{2cm}}$ .

## 二、选择题( 本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分)

(1) 设当  $x \rightarrow 0$  时,  $e^x - (ax^2 + bx + 1)$  是比  $x^2$  高阶的无穷小, 则( )

(A)  $a = \frac{1}{2}, b = 1$ . (B)  $a = 1, b = 1$ . (C)  $a = -\frac{1}{2}, b = -1$ . (D)  $a = -1, b = 1$ .

(2) 设函数  $f(x)$  在区间  $(-\delta, \delta)$  内有定义, 若当  $x \in (-\delta, \delta)$  时, 恒有  $|f(x)| \leq x^2$ , 则  $x = 0$  必是  $f(x)$  的( )

(A) 间断点. (B) 连续而不可导的点.  
(C) 可导的点, 且  $f'(0) = 0$ . (D) 可导的点, 且  $f'(0) \neq 0$ .

(3) 设  $f(x)$  处处可导, 则( )

(A) 当  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ , 必有  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$ .  
(B) 当  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$ , 必有  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .  
(C) 当  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , 必有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$ .  
(D) 当  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$ , 必有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

(4) 在区间  $(-\infty, +\infty)$  内, 方程  $|x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x = 0$  ( )

(A) 无实根. (B) 有且仅有一个实根.  
(C) 有且仅有两个实根. (D) 有无穷多个实根.

(5) 设  $f(x), g(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 且  $g(x) < f(x) < m$  ( $m$  为常数), 由曲线  $y = g(x), y = f(x)$ ,  $x = a$  及  $x = b$  所围平面图形绕直线  $y = m$  旋转而成的旋转体体积为( )

(A)  $\int_a^b \pi [2m - f(x) + g(x)] [f(x) - g(x)] dx$ .

(B)  $\int_a^b \pi [2m - f(x) - g(x)] [f(x) - g(x)] dx$ .

(C)  $\int_a^b \pi [m - f(x) + g(x)] [f(x) - g(x)] dx$ .

(D)  $\int_a^b \pi [m - f(x) - g(x)] [f(x) - g(x)] dx$ .

### 三、(本题共6小题,每小题5分,满分30分)

(1) 计算  $\int_0^{\ln 2} \sqrt{1 - e^{-2x}} dx$ .

(2) 求  $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$ .

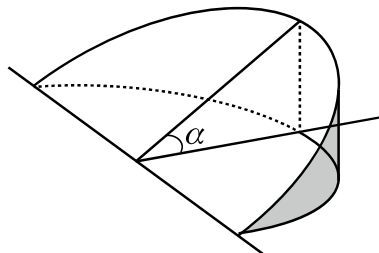
(3) 设  $\begin{cases} x = \int_0^t f(u^2) du, \\ y = [f(t^2)]^2, \end{cases}$  其中  $f(u)$  具有二阶导数, 且  $f(u) \neq 0$ , 求  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ .

(4) 求函数  $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$  在点  $x = 0$  处带拉格朗日型余项的  $n$  阶泰勒展开式.

(5) 求微分方程  $y'' + y' = x^2$  的通解.

(6) 设有一正椭圆柱体, 其底面的长、短轴分别为  $2a, 2b$ , 用过此柱体底面的短轴且与底面成  $\alpha$  角 ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ) 的平面截此柱体, 得一楔形体

(如图), 求此楔形体的体积  $V$ .



### 四、(本题满分8分)

计算不定积分  $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx$ .

### 五、(本题满分8分)

设函数  $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x^2, & x < -1, \\ x^3, & -1 \leq x \leq 2, \\ 12x - 16, & x > 2. \end{cases}$

(1) 写出  $f(x)$  的反函数  $g(x)$  的表达式;

(2)  $g(x)$  是否有间断点、不可导点, 若有, 指出这些点.

### 六、(本题满分8分)

设函数  $y = y(x)$  由方程  $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$  所确定, 试求  $y = y(x)$  的驻点, 并判别它是否为极值点.

### 七、(本题满分8分)

设  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上具有二阶导数, 且  $f(a) = f(b) = 0, f'(a)f'(b) > 0$ . 证明: 存在  $\xi \in (a, b)$  和  $\eta \in (a, b)$ , 使  $f(\xi) = 0$  及  $f''(\eta) = 0$ .

### 八、(本题满分8分)

设  $f(x)$  为连续函数,

(1) 求初值问题  $\begin{cases} y' + ay = f(x), \\ y|_{x=0} = 0 \end{cases}$  的解  $y(x)$ , 其中  $a$  是正常数;

(2) 若  $|f(x)| \leq k$  ( $k$  为常数), 证明: 当  $x \geq 0$  时, 有  $|y(x)| \leq \frac{k}{a}(1 - e^{-ax})$ .