秩的性质

$A_{2\times3}$ 1×5

（1）设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，则 $r(A)\le\min\{m,n\}$； 秩小于行秩和列秩

（2）$r(A+B)\le r(A)+r(B)$； 和的秩…

pf: Ch3

（3）设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，B 为 $n\times s$ 阶矩阵，则 $r(AB)\le\min\{r(A),r(B)\}$； 乘积…

（4）$\max\{r(A),r(B)\}\le r(A\,\vdots\,B)\le r(A)+r(B)$； 秩之…

（5） $r(A)=r(kA)(k\neq 0)$； 乘非零常数…

（6）设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，P 为 m 阶可逆矩阵，Q 为 n 阶可逆矩阵，则 乘可逆…

$r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$；

pf: $r(A)\geq r(PA)$

$r(A)=r(EA)=r(P^{-1}PA) \leq r(PA)$

故 $r(A)=r(PA)$

（7）设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，若 $r(A)=n$，则 $r(AB)=r(B)$；若 $r(A)=m$，则 $r(CA)=r(C)$；

pr: Ch4

左乘… 右乘…

（8）$r(A)=r(A^T)=r(A^TA)=r(AA^T)$；乘转置…

（9）设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，B 为 $n\times s$ 阶矩阵，满足 $AB=O$，则 $r(A)+r(B)\le n$．

乘积为0…

【例 2.7】（2010，数一、二、三）设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，B 为 $n\times m$ 阶矩阵，满足 $AB=E$，则【　　】

2×2　2×3　$(n>m)$　$m\times m$　$|E|=1$

（A）$r(A)=m$，$r(B)=m$　　（B）$r(A)=m$，$r(B)=n$

（C）$r(A)=n$，$r(B)=m$　　（D）$r(A)=n$，$r(B)=n$

【详解】

经典结论. 由 $AB=E$，知 A 可逆 ×

$r\binom{A}{B}\le \binom{m}{n}$

$r\binom{A}{B}\ge r(AB)=r(E)=m$

故 $r\binom{A}{B}=m$.

【例 2.8】设 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&3\\0&0&3\end{pmatrix}$，则 $r(ABC)=$________.

【详解】

法一、先求 ABC

法二：由 $|A|=|E|=1$，$|C|=6$，得 $r(A)=r(C)=3$

又 $|B|=0$ 且 $\begin{vmatrix}-2&1\\1&-2\end{vmatrix}\neq 0$，从而 $r(B)=2$

故 $r(ABC)=r(B)=2$

秩的求法

（1）A 为数字矩阵：对 A 作初等行变换，化为行阶梯形矩阵，则 $r(A)$ 等于行阶梯形矩阵中非零行的行数；

$(n\geq 3)$

每行第一个非零元素下面元素均为0

（2）A 为抽象矩阵：利用秩的定义或性质.

$A_{10\times 10}$

$|A|=0$, 9×9 100个

例 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $r(A)=2$

【例 2.9】设

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&1&b\\2&a&3&4\\3&1&5&7\end{pmatrix}$$

且 $r(A)=2$，则 $a=$__________，$b=$__________.

【详解】

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&1&b\\2&a&3&4\\3&1&5&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&1&b\\0&0&a-1&ab-2b+2\\0&0&0&4-2b\end{pmatrix}$$

由 $r(A)=2$，得 $a=1,b=2$

专题四　伴随矩阵

定义

性质(降)

伴随矩阵的定义 设 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$，由 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 构成的矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 A 的伴随矩阵，记作 A^*.

【评注】设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，则

$$A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

主对角互换
副对角变号

若 A 可逆，则

$A^{*}=|A|A^{-1}$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例如 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，$A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

伴随矩阵的性质

（1） $AA^* = A^*A = |A|E \xrightarrow{|A|\neq 0} A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*, \boxed{A^* = |A|A^{-1}}$；△

Pr: $AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}$

$= |A|E$

同理 $A^*A = |A|E$

若$|A|\neq0$，则 $A\cdot\dfrac{A^*}{|A|}=E$，故 $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$，即$A^*=|A|A^{-1}$

（2）$(kA)^* = k^{\boxed{n-1}} A^*$；(98)

证：$(kA)^* = |kA|(kA)^{-1} = k^n|A| \cdot \frac{1}{k} A^{-1}$

$= k^{n-1} A^*$

（3）$(AB)^* = B^* A^*$；

证：$(AB)^* = |AB|(AB)^{-1} = |A||B| \cdot B^{-1} A^{-1}$

$= B^* \cdot A^*$

（4）$|A^*|=|A|^{\boxed{n-1}}$；

$|$Pr: $|A^*|=\big||A|A^{-1}\big|=|A|^n\cdot|A^{-1}|=|A|^{n-1}$

△总结：三个 $n-1$ 次 $\begin{cases}|A^*| \\ (kA)^* \\ ab\text{型}\end{cases}$

（5）$(A^T)^* = (A^*)^T$；

证：$(A^T)^* = |A^T|(A^T)^{-1} = |A|(A^{-1})^T$

$(A^*)^T = (|A|A^{-1})^T = |A|(A^{-1})^T$

（6）$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = \boxed{\dfrac{A}{|A|}}$；

Pr: $(A^{-1})^* = |A^{-1}|(A^{-1})^{-1} = \dfrac{A}{|A|}$

$(A^*)^{-1} = (\underline{|A|}A^{-1})^{-1} = \dfrac{A}{|A|}$

① 总结：上标运算 $\underline{n}$, T, -1, $*$ 可交换

高次幂

（7）$(A^*)^* = |A|^{\boxed{n-2}} A$；

kA

Pr. $\boxed{(A^*)}^* = |A^*|(A^*)^{-1} = |A|^{n-1} \frac{A}{|A|}$

$((A^*)^*)^* = |(A^*)^*| ((A^*)^*)^{-1} \quad = |A|^{n-2} A$

补例　设 A 为 4 阶矩阵，且 $r(A)=3$，则 $\left[(A^*)^T\right]^* =$ ________.

$$原式 = ((A^*)^*)^T = (\underbrace{|A|^{n-2}}_{0} A)^T = 0$$

（8）$r(A^*)=\begin{cases} n, r(A)=n \\ 1, r(A)=n-1 \\ 0, r(A)<n-1 \end{cases}$. 主线

【证明】当 $r(A)=n$ 时，$|A|\neq 0$，从而 $|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$，故 $r(A^*)=n$.

(强化)

当 $r(A)<n-1$ 时，A 所有的 $n-1$ 阶子式均为零，即 A 所有的余子式均为零，亦即 A 所有的代数余子式均为零，从而 $A^*=O$，故 $r(A^*)=0$.

当 $r(A)=n-1$ 时，A 有个 $n-1$ 阶子式非零，即 A 有个余子式非零，亦即 A 有个代数余子式非零，从而 $A^*\neq O$，故 $r(A^*)\geq 1$.又 $AA^*=|A|E=0$，故 $r(A)+r(A^*)\leq n$，从而 $r(A^*)\leq 1$，故 $r(A^*)=1$.

【例 2.10】（2003，数三）设 $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$，且 $r(A^*)=1$，则【　　】

（A）$a=b$ 或 $a+2b=0$　　（B）$a=b$ 或 $a+2b\neq 0$

（C）$a\neq b$ 且 $a+2b=0$　　（D）$a\neq b$ 且 $a+2b\neq 0$

【详解】由 $r(A^*)=1$，得 $r(A)=2$，故 A 有个2阶行列式非零且 $|A|=0$.

由 $|A|=(a+2b)(a-b)^2=0$，得 $a=b$ 或 $a+2b=0$

当 $a=b$ 时，$A=\begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}$，$r(A)\leq 1$ 矛盾，故 $a\neq b$ 且 $a+2b=0$