绝密★启用前

考生编号	
姓名	

2024年全国硕士研究生招生考试

数学（二）

一、选择题：（1-10小题，每小题5分，共50分。下列每题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1. 函数 $f\left(x\right)=\left|x\right|^{\frac{1}{(1-x)(x-2)}}$ 的第一类间断点的个数为（　　）

（A） 3　　（B） 2　　（C）1　　（D）0

2. 已知 $\begin{cases} x=1+t^3 \\ y=e^{t^2} \end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[f\left(2+\dfrac{2}{x}\right)-f\left(2\right)\right]=$（　　）

（A） $2e$　　（B） $\dfrac{4}{3}e$　　（C） $\dfrac{2}{3}e$　　（D） $\dfrac{e}{3}$

3. 已知 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin t^3 dt$，$g(x)=\int_0^x f(t)dt$，则（　　）

（A） $f(x)$为奇函数，$g(x)$为奇函数　　（B） $f(x)$为奇函数，$g(x)$为偶函数

（C） $f(x)$为偶函数，$g(x)$为偶函数　　（D） $f(x)$为偶函数，$g(x)$为奇函数

4. 已知数列$\left\{a_n\right\}\left(a_n\neq 0\right)$，若$\left\{a_n\right\}$发散，则（　　）.

（A） $\left\{a_n+\dfrac{1}{a_n}\right\}$发散　　（B） $\left\{a_n-\dfrac{1}{a_n}\right\}$发散　　（C） $\left\{e^{a_n}+\dfrac{1}{e^{a_n}}\right\}$发散　　（D） $\left\{e^{a_n}-\dfrac{1}{e^{a_n}}\right\}$发散

5. 已知函数 $f\left(x,y\right)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{xy}, & xy\neq 0 \\ 0, & xy=0\end{cases}$，则在点$\left(0,0\right)$处（　　）.

（A） $\dfrac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}$连续，$f\left(x,y\right)$可微　　（B） $\dfrac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}$连续，$f\left(x,y\right)$不可微

（C） $\dfrac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}$不连续，$f\left(x,y\right)$可微　　（D） $\dfrac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}$不连续，$f\left(x,y\right)$不可微

6. 设$f\left(x,y\right)$是连续函数，则$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{\sin x}^{1}f\left(x,y\right)dy=$（　　）.

（A） $\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y}f\left(x,y\right)dx$　　（B） $\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}}f\left(x,y\right)dx$

（C） $\int_{0}^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y}f\left(x,y\right)dx$　　（D） $\int_{0}^{\frac{1}{2}}dy\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}}f\left(x,y\right)dx$

7. 设非负函数$f(x)$在$\left[0,+\infty\right)$上连续，给定以下三个命题：

（1）若$\int_0^{+\infty}f^2(x)dx$收敛，则$\int_0^{+\infty}f(x)dx$收敛；

（2）若存在$p>1$，使极限$\lim\limits_{x\to+\infty}x^p f(x)$存在，则$\int_0^{+\infty}f(x)dx$收敛；

（3）若$\int_0^{+\infty}f(x)dx$收敛，则存在$p>1$，使极限$\lim\limits_{x\to+\infty}x^p f(x)$存在；

其中正确的个数是（　　）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

8. 设A为三阶矩阵，$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，若$P^TAP^2=\begin{pmatrix}a+2c&0&c\\0&b&0\\2c&0&c\end{pmatrix}$，则矩阵$A$为（　　）

（A） $\begin{pmatrix}c&0&0\\0&a&0\\0&0&b\end{pmatrix}$　　（B） $\begin{pmatrix}b&0&0\\0&c&0\\0&0&a\end{pmatrix}$　　（C） $\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$　　（D） $\begin{pmatrix}c&0&0\\0&b&0\\0&0&a\end{pmatrix}$

9. 设A为四阶矩阵，A^*为A的伴随矩阵，若$A(A-A^*)=O$，且$A\neq A^*$，则$r(A)$的可能取值为（　　）

（A）0或1　　（B）1或3　　（C）2或3　　（D）1或2

10. 设A,B均为2阶矩阵，且$AB=BA$，则“A有两个不相等的特征值”是“B可对角化”的（　　）

（A）充要条件　　（B）充分非必要条件　　（C）必要非充分条件　　（D）既非充分又非必要条件

二、填空题：（11-16小题，每小题5分，共30分.）

11. 曲线$y^2=x$在点$(0,0)$处的曲率圆方程为__________

12. 函数$f(x,y)=2x^3-9x^2-6y^4+12x+24y$的极值点是____________

13. 微分方程 $y'=\frac{1}{(x+y)^2}$ 满足初始条件 $y(1)=0$ 的解为________

14. 已知函数 $f(x)=x^2(e^x-1)$，则 $f^{(5)}(1)=$________

15. 某物体以速度 $v(t)=t+k\sin\pi t$ 做直线运动，若它从 $t=0$ 到 $t=3$ 的时间段内平均速度是 $\frac{5}{2}$，则 $k=$______

16. 设向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}a\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\b\\a\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\a\\-1\\1\end{pmatrix}$，若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，且其中任意两个向量均线性无关，则

$ab=$________

三、解答题：(17-22 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. 设平面有界区域 D 位于第一象限，由曲线 $xy=\frac{1}{3}$，$xy=3$ 与直线 $y=\frac{1}{3}x$，$y=3x$ 围成，计算

$\iint\limits_D(1+x-y)dxdy$

18. 设 $y=y(x)$ 满足方程 $xy''+xy'-9y=0$, 且 $y|_{x=1}=2$，$y'|_{x=1}=6$

（1）利用变换 $x=e^t$ 化简方程, 并求 $y(x)$ 的表达式

（2）求 $\int_1^2 y(x)\sqrt{4-x^2}dx$

19. 设 $t>0$，求曲线 $y=\sqrt{x}e^{-x}$ 与直线 $x=t$，$x=2t$ 及 x 轴所围平面图形，绕 x 轴旋转所得的旋转体体积为 $V(t)$，求 $V(t)$ 的最大值.

20. 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导，$g(x,y)=f(2x+y,3x-y)$，且 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}-6\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=1$

（1）求 $\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}$

（2）若 $\frac{\partial f(u,0)}{\partial u}=ue^{-u}$, 且 $f(0,v)=\frac{1}{50}v^2-1$，求 $f(u,v)$ 的表达式

21. 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数，且 $f'(0)=f''(1)$，$|f(x)|\le 1$。证明：

（1）当 $x\in(0,1)$ 时，$|f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x|\le\frac{x(1-x)}{2}$

（2）$\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right|\le\frac{1}{12}$

22. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&a\\1&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\b&2\end{pmatrix}$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TBAx$

已知方程组 $Ax=0$ 的解是 $B^Tx=0$ 的解，但两个方程组不同解。

（1）求 a,b 的值，

（2）求正交矩阵 $x=Qy$ 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形

.