《概率论与数理统计 A》模拟试卷（一）标准答案

一、选择题（每小题 3 分，共 24 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	B	A	D	C	C	B	D

二、填空题（每小题 3 分，共 21 分）

题号	1	2	3	4	5	6
答案	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{1}{3}$	$\begin{cases} 2e^{-2x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$	16	$\dfrac{1}{2}$	$\hat{\mu}_3$

三、计算题（每小题 10 分，共 50 分）

1. 解：当 $0\le x\le 1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_0^2 (x^2+\dfrac{1}{3}xy)dy=2x^2+\dfrac{2}{3}x$

故 $\quad f_X(x)=\begin{cases} 2x^2+\dfrac{2}{3}x, & 0\le x\le 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ ————————————5 分

当 $0\le y\le 2$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_0^1 (x^2+\dfrac{1}{3}xy)dx=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}y,$

故 $\quad f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}y, & 0\le y\le 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ ————————————10 分

2. 解：(1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^1 Axdx=1$

解得 $A=2$. ————————————4 分

（2）$P(X<\dfrac{1}{2})=\int_0^{\frac{1}{2}} 2xdx=\dfrac{1}{4}$

设 Y："3 次观测中，观测值小于 $\dfrac{1}{2}$ 的次数"，则 $Y\sim B(3,\dfrac{1}{4})$，

$\quad P(Y\ge 1)=1-P(Y=0)=1-C_3^0(\dfrac{1}{4})^0(\dfrac{3}{4})^3=\dfrac{37}{64}$. ————————————10 分

3. 解：假设 $H_0:\mu=\mu_0=70$；$H_0:\mu\ne\mu_0$

选取统计量：$T=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s\big/\sqrt{n}}$

$\quad=\dfrac{66.5-70}{15\big/\sqrt{36}}=-1.4$ ————————————6 分

$|t_0|=1.4<2.0301=t_{0.025}(35)$

故接受 H_0，可认为这次该年级学生数学平均成绩为 70 分. ----------------------10 分

4. 解：似然函数 $L = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = (\theta + 1)^n (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\theta}$

$$\ln L = n \ln(\theta + 1) + \theta \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \quad\quad\quad\quad \text{------------------6 分}$$

令 $\quad \dfrac{d \ln L}{d \theta} = \dfrac{n}{\theta + 1} + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = 0$

解得 θ 的极大似然估计为 $\hat{\theta} = -\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i} - 1$ ----------------------10 分

5. 解：（1）$E(X) = -2 \times \dfrac{1}{6} + (-1) \times \dfrac{1}{6} + 0 \times \dfrac{1}{6} + 1 \times \dfrac{1}{6} + 2 \times \dfrac{1}{6} + 3 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}.$ ------------------4 分

（2）$E(X^2) = 4 \times \dfrac{1}{6} + 1 \times \dfrac{1}{6} + 0 \times \dfrac{1}{6} + 1 \times \dfrac{1}{6} + 4 \times \dfrac{1}{6} + 9 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{19}{6}$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \dfrac{19}{6} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{35}{12} \quad (\text{或 } 2.917) \quad \text{--------------------10 分}$$

四、证明题（8 分）证：由 $X_i \sim N(0, \sigma^2), i = 1, 2, \cdots, 9$

$$\dfrac{X_i}{\sigma} \sim N(0,1), i = 1, 2, \cdots, 9 \quad\quad\quad \text{----------------3 分}$$

$$\dfrac{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(3), \dfrac{X_4^2 + X_5^2 + \cdots + X_9^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(6)$$

且两者相互独立，则

$$Y = \dfrac{2(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)}{X_4^2 + X_5^2 + \cdots + X_9^2} = \dfrac{(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)/3}{(X_4^2 + X_5^2 + \cdots + X_9^2)/6} \sim F(3,6) \quad \text{--------------------10 分}$$