2014 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 当 $x\to 0^+$ 时,若 $\ln^{\alpha}(1+2x)$,$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小量,则 α 的取值范围是(　　)

(A) $(2,+\infty)$.　(B) $(1,2)$.　(C) $\left(\frac{1}{2},1\right)$.　(D) $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

(2) 下列曲线中有渐近线的是(　　)

(A) $y=x+\sin x$.　(B) $y=x^2+\sin x$.　(C) $y=x+\sin\frac{1}{x}$.　(D) $y=x^2+\sin\frac{1}{x}$.

(3) 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数,$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$,则在区间 $[0,1]$ 上,(　　)

(A) 当 $f'(x)\geqslant 0$ 时,$f(x)\geqslant g(x)$.　(B) 当 $f'(x)\geqslant 0$ 时,$f(x)\leqslant g(x)$.

(C) 当 $f''(x)\geqslant 0$ 时,$f(x)\geqslant g(x)$.　(D) 当 $f''(x)\geqslant 0$ 时,$f(x)\leqslant g(x)$.

(4) 曲线 $\begin{cases}x=t^2+7,\\ y=t^2+4t+1\end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的曲率半径是(　　)

(A) $\frac{\sqrt{10}}{50}$.　(B) $\frac{\sqrt{10}}{100}$.　(C) $10\sqrt{10}$.　(D) $5\sqrt{10}$.

(5) 设函数 $f(x)=\arctan x$. 若 $f(x)=xf'(\xi)$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2}=$(　　)

(A) 1.　(B) $\frac{2}{3}$.　(C) $\frac{1}{2}$.　(D) $\frac{1}{3}$.

(6) 设函数 $u(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,在 D 的内部具有 2 阶连续偏导数,且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$,则(　　)

(A) $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的边界上取得.

(B) $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的内部取得.

(C) $u(x,y)$ 的最大值在 D 的内部取得,最小值在 D 的边界上取得.

(D) $u(x,y)$ 的最小值在 D 的内部取得,最大值在 D 的边界上取得.

(7) 行列式 $\begin{vmatrix}0 & a & b & 0\\ a & 0 & 0 & b\\ 0 & c & d & 0\\ c & 0 & 0 & d\end{vmatrix}=$(　　)

(A) $(ad-bc)^2$.　(B) $-(ad-bc)^2$.　(C) $a^2d^2-b^2c^2$.　(D) $b^2c^2-a^2d^2$.

(8) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维向量,则对任意常数 k,l,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的(　　)

(A) 必要非充分条件.　(B) 充分非必要条件.

(C) 充分必要条件.　(D) 既非充分也非必要条件.

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分，把答案填在题中横线上.）

(9) $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x =$ ______.

(10) 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数，且 $f'(x) = 2(x-1)$，$x \in [0, 2]$，则 $f(7) =$ ______.

(11) 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $\mathrm{e}^{2yz} + x + y^2 + z = \frac{7}{4}$ 确定的函数，则 $\mathrm{d}z\Big|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} =$ ______.

(12) 曲线 L 的极坐标方程是 $r = \theta$，则 L 在点 $(r, \theta) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程是______.

(13) 一根长度为 1 的细棒位于 x 轴的区间 $[0, 1]$ 上，若其线密度 $\rho(x) = -x^2 + 2x + 1$，则该细棒的质心坐标 $\bar{x} =$ ______.

(14) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1，则 a 的取值范围是______.

三、解答题（本题共 9 小题，共 94 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

(15)（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\int_1^x \left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}} - 1\right) - t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$.

(16)（本题满分 10 分）

已知函数 $y = y(x)$ 满足微分方程 $x^2 + y^2y' = 1 - y'$，且 $y(2) = 0$，求 $y(x)$ 的极大值与极小值.

(17)（本题满分 10 分）

设平面区域 $D = \{(x, y) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$. 计算 $\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有 2 阶连续导数, $z=f(e^x\cos y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}.$$

若 $f(0)=0, f'(0)=0$, 求 $f(u)$ 的表达式.

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$, $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 单调增加, $0\leqslant g(x)\leqslant 1$. 证明:

(Ⅰ) $0\leqslant \int_a^x g(t)\,dt\leqslant x-a,\ x\in[a, b]$;

(Ⅱ) $\int_a^{a+\int_a^b g(t)\,dt} f(x)\,dx\leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx$.

(20)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}, x\in[0, 1]$. 定义函数列:

$$f_1(x)=f(x),\quad f_2(x)=f(f_1(x)),\quad \cdots,\quad f_n(x)=f(f_{n-1}(x)),\quad \cdots.$$

记 S_n 是由曲线 $y=f_n(x)$, 直线 $x=1$ 及 x 轴所围平面图形的面积. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nS_n$.

（21）（本题满分 11 分）

已知函数 $f(x, y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1)$，且 $f(y, y) = (y+1)^2 - (2-y)\ln y$，求曲线 $f(x, y) = 0$ 所围图形绕直线 $y = -1$ 旋转所成旋转体的体积.

（22）（本题满分 11 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

（Ⅰ）求方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系；

（Ⅱ）求满足 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

（23）（本题满分 11 分）

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.