

1999 年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 曲线 $\begin{cases} x = e^t \sin 2t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$ 在点 $(0,1)$ 处的法线方程为_____.

(2) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\ln(x^2 + y) = x^3 y + \sin x$ 确定,则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} =$ _____.

(3) $\int \frac{x+5}{x^2-6x+13} dx =$ _____.

(4) 函数 $y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ 在区间 $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ 上的平均值为_____.

(5) 微分方程 $y'' - 4y = e^{2x}$ 的通解为_____.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}}, & x > 0, \\ x^2 g(x), & x \leq 0, \end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是有界函数,则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处()

(A) 极限不存在.

(B) 极限存在,但不连续.

(C) 连续,但不可导.

(D) 可导.

(2) 设 $\alpha(x) = \int_0^{5x} \frac{\sin t}{t} dt, \beta(x) = \int_0^{\sin x} (1+t)^{\frac{1}{t}} dt$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的()

(A) 高阶无穷小.

(B) 低阶无穷小.

(C) 同阶但不等价的无穷小.

(D) 等价无穷小.

(3) 设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,则()

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x)$ 必是偶函数.

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时, $F(x)$ 必是奇函数.

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时, $F(x)$ 必是周期函数.

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时, $F(x)$ 必是单调增函数.

(4) “对任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$, 总存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon$ ” 是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的()

(A) 充分条件但非必要条件.

(B) 必要条件但非充分条件.

(C) 充分必要条件.

(D) 既非充分条件又非必要条件.

(5) 记行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 为 $f(x)$, 则方程 $f(x) = 0$ 的根的个数为()

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

三、(本题满分 5 分)

$$\text{求} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x \ln(1 + x) - x^2}.$$

四、(本题满分 6 分)

$$\text{计算} \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx.$$

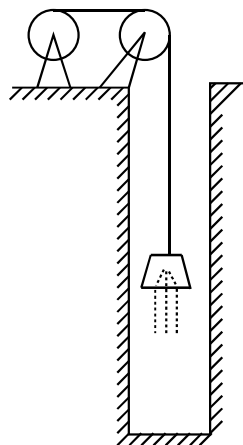
五、(本题满分 7 分)

$$\text{求初值问题} \begin{cases} (y + \sqrt{x^2 + y^2}) dx - x dy = 0 (x > 0), \\ y|_{x=1} = 0 \end{cases} \text{的解.}$$

六、(本题满分 7 分)

为清除井底的污泥,用缆绳将抓斗放入井底,抓起污泥后提出井口,已知井深 30m,抓斗自重 400N,缆绳每米重 50N,抓斗抓起的污泥重 2000N,提升速度为 3m/s. 在提升过程中,污泥以 20N/s 的速率从抓斗缝隙中漏掉. 现将抓起污泥的抓斗提升至井口,问克服重力需作多少焦耳的功?

(说明:① $1\text{N} \times 1\text{m} = 1\text{J}$; m, N, s, J 分别表示米,牛顿,秒,焦耳. ② 抓斗的高度及位于井口上方的缆绳长度忽略不计.)



七、(本题满分 8 分)

$$\text{已知函数 } y = \frac{x^3}{(x-1)^2}, \text{求}$$

- (1) 函数的增减区间及极值;
- (2) 函数图形的凹凸区间及拐点;
- (3) 函数图形的渐近线.

八、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上具有三阶连续导数,且 $f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$, 证明: 在开区间 $(-1, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f'''(\xi) = 3$.

九、(本题满分 8 分)

设函数 $y(x) (x \geq 0)$ 二阶可导,且 $y'(x) > 0, y(0) = 1$. 过曲线 $y = y(x)$ 上任意一点 $P(x, y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线, 上述两直线与 x 轴所围成的三角形的面积记为 S_1 , 区间 $[0, x]$ 上以 $y = y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2 , 并设 $2S_1 - S_2$ 恒为 1, 求此曲线 $y = y(x)$ 的方程.

十、(本题满分7分)

设 $f(x)$ 是区间 $[0, +\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数, $a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx (n = 1, 2, \dots)$, 证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

十一、(本题满分6分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 X 满足 $A^* X = A^{-1} + 2X$, 其中 A^* 是 A 的伴随矩阵, 求矩阵 X .

十二、(本题满分8分)

设向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 1, 3)^T, \alpha_2 = (-1, -3, 5, 1)^T, \alpha_3 = (3, 2, -1, p+2)^T, \alpha_4 = (-2, -6, 10, p)^T$.

- (1) p 为何值时, 该向量组线性无关? 并在此时将向量 $\alpha = (4, 1, 6, 10)^T$ 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示;
- (2) p 为何值时, 该向量组线性相关? 并在此时求出它的秩和一个极大线性无关组.