厦门大学《线性代数 II》课程期中考试卷

学院______年级______姓名________学号________

主考教师：　　　　试卷类型：（A 卷）　　2022.4.9

1.（8 分）计算行列式

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解：-42（过程 6 分，结果 2 分）

2.（8 分）若 AB=BA，则称矩阵 A 与 B 可交换。设$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，求所有与A可交换的矩阵。

解：设$B=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$与$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$可交换，则有$\begin{bmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+2c & 2b+c \\ c & d \end{bmatrix}$. (4 分)

解得 c=0, a=d.（3 分） 故所有与A可交换的矩阵全体$\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}: a,b\in F\right\}$. (1 分)

3.（8 分）设$A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$与$B=[\beta_1,\alpha_2,\alpha_3]$均为 3 阶矩阵，且|A|=1, |B|=4，试求 3 阶行列式|3A+B|.

解：|3A+B|=$|3\alpha_1+\beta_1,4\alpha_2,4\alpha_3|$（2 分）=16$|3\alpha_1+\beta_1,\alpha_2,\alpha_3|$=16$|3\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|$+16$|\beta_1,\alpha_2,\alpha_3|$=112.（6 分）

4.（8 分）令$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \\ 3 & -3 & 6 & 9 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$，求矩阵$A^{20}$.

解：因$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \\ 3 & -3 & 6 & 9 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}[1\ -1\ 2\ 3]\coloneqq\alpha\beta^T$ (4 分)

$\beta^T\alpha=[1\ -1\ 2\ 3]\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}=11$ (2 分)

故$A^{20}=(\alpha\beta^T)^{20}=\alpha(\beta^T\alpha)^{19}\beta^T$=$11^{19}A$. (2 分)

5.（8 分）求矩阵$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$的等价标准形。

解：（法一）

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}(4\text{分})\xrightarrow{\text{列}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\quad(4\text{分})$$

（法二）

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & -1 & -3\\ -1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -2 & -3\end{bmatrix}\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$（4 分）

故 R(A)=2, 从而 A 的等价标准形是$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$（4 分）

6.（10 分）用**克拉默法则**求解线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1\\ ax_1+bx_2+cx_3=0\\ a^2x_1+b^2x_2+c^2x_3=0\end{cases}$，其中 a, b, c 两两不等。

解：方程组的系数行列式为$|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}=(c-b)(c-a)(b-a)$.（2 分） 由于 a, b, c 两两不等，$|\mathrm{A}|\neq 0$. 由克拉默法则可知，方程组有唯一解。（2 分）

$B_1=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & b & c\\ 0 & b^2 & c^2\end{vmatrix}=bc(c-b)$, $B_2=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & 0 & c\\ a^2 & 0 & c^2\end{vmatrix}=ac(a-c)$, $B_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & 0\\ a^2 & b^2 & 0\end{vmatrix}=ab(b-a)$

（3 分）

得$x_1=\frac{B_1}{|\mathrm{A}|}=\frac{bc}{(c-a)(b-a)}$, $x_2=\frac{B_2}{|\mathrm{A}|}=\frac{ac}{(c-b)(a-b)}$, $x_3=\frac{B_3}{|\mathrm{A}|}=\frac{ab}{(c-a)(c-b)}$.（3 分）

7.（10 分）用**消元法**解下列线性方程组$\begin{cases} x_1-3x_3+2x_4-2x_5=1\\ x_2-2x_3+x_4=-2\\ -2x_1+3x_2+x_4-4x_5=-2\end{cases}$.

解：对方程组的增广矩阵作行初等变换，

$$[A,\beta]=\begin{bmatrix}1 & 0 & -3 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -2\\ -2 & 3 & 0 & 1 & -4 & -2\end{bmatrix}$$(1 分)

$$\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1 & 0 & -3 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 3\end{bmatrix}(3\text{ 分})\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1 & 0 & -3 & 0 & 6 & -5\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 4 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 3\end{bmatrix}$$（3 分）

故 R(A)=R$(A,\beta)=3<5$, 即原方程组有无穷多解（2 分），则由行最简形矩阵对应的同解方程组解得原方程组的通解为：$\begin{cases} x_1=3k_1-6k_2-5\\ x_2=2k_1-4k_2-5\\ x_3=k_1\\ x_4=4k_2+3\\ x_5=k_2\end{cases}$，其中$k_1$，$k_2$为任意常数。（1 分）

8.（10 分）求矩阵$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 0 & 5 & 0\\ 3 & 2 & 3 & 6 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 5 & 3\\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2\end{bmatrix}$的秩及 A 的一个最高阶非零子式。

解：$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 0 & 5 & 0\\ 3 & 2 & 3 & 6 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 5 & 3\\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2\end{bmatrix}\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1 & 2 & 4 & 1 & 2\\ 0 & -4 & -9 & 3 & -5\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5\end{bmatrix}$

从而 R(A)=4. （6 分）由于$A=\begin{bmatrix}3&2&0&5\\3&2&3&6\\2&0&1&5\\1&2&4&1\end{bmatrix}\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1&2&4&1\\0&-4&-9&3\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$，故$\begin{vmatrix}3&2&0&5\\3&2&3&6\\2&0&1&5\\1&2&4&1\end{vmatrix}$是 A 的一个最高阶非零子式。（4 分）

9.（10 分）设$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\\3&5&1&7\end{bmatrix}$, 且 R(A)=3. 求常数 a, b 的值。

解：$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\\3&5&1&7\end{bmatrix}\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\0&1&a-2&2\\0&2&-2&4\end{bmatrix}\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\0&0&a-1&2-b\\0&0&0&4-2b\end{bmatrix}$(4 分)

由于 R(A)=3，可知|A|=2(a-1)(4-2b)=0. 从而 a=1, b=2. (3 分)。
但 R(A)=3，说明 a=1 和 b=2 不能同时成立。因此，我们得到所求的条件为：
（1）a=1 且$b\neq 2$; (2) $a\neq 1$ 且 $b=2$. (3 分)

10.（12 分）设$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$，且 AXA+BXB=AXB+BXA+A(A-B). 求矩阵 X. **(<u>逆矩阵必须使用初等变换计算</u>)**

解：由 AXA+BXB=AXB+BXA+A(A-B)可的(A-B)X(A-B)=A(A-B). (2 分)

因为$A-B=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$, |A-B|=1≠ 0, 所以$A-B$是可逆矩阵. (2 分)

从而 X=$(A-B)^{-1}A$. (2 分)
法一： 由

$$[A-B\ \ E]=\begin{bmatrix}1&-1&-1&1&0&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1&0&0&1&1&2\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{bmatrix}$$

得$(A-B)^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$. (4 分)

所以 X=$(A-B)^{-1}A=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&3&2\\2&2&1\\1&1&1\end{bmatrix}$. (2 分)

法二：$[A-B\ \ E]=\begin{bmatrix}1&-1&-1&1&0&0\\0&1&-1&1&1&0\\0&0&1&1&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1&0&0&4&3&2\\0&1&0&2&2&1\\0&0&1&1&1&1\end{bmatrix}$

从而 X=$(A-B)^{-1}A=\begin{bmatrix}4 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$. (6 分)

11.（8 分）设 A 是一个 n 阶矩阵，R(A)=1. 试证：

（1）A 可表成$A=\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}[b_1\ b_2 \cdots\ b_n]$.

(2) $A^2=kA$, 其中 k 是某个常数。

证明：（1）因为 R(A)=1，所以存在可逆矩阵 P，Q，使得$PAQ=\begin{bmatrix}E_1 & 0_{1\times(n-1)}\\ 0_{(n-1)\times 1} & 0_{(n-1)\times(n-1)}\end{bmatrix}$. (2 分)

设$P^{-1}=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$，$Q^{-1}=\begin{pmatrix}\beta_1^T\\ \beta_2^T\\ \vdots\\ \beta_n^T\end{pmatrix}$其中$\alpha_i$，$\beta_i(1\le i\le n)$是 n 维列向量。（1 分）于是

$A=P^{-1}\begin{bmatrix}E_1 & 0_{1\times(n-1)}\\ 0_{(n-1)\times 1} & 0_{(n-1)\times(n-1)}\end{bmatrix}Q^{-1}=\alpha_1\beta_1^T$. （2 分）

(2)设$k=\beta_1^T\alpha_1$，则 $A^2=\alpha_1\beta_1^T\alpha_1\beta_1^T=\alpha_1(\beta_1^T\alpha_1)\beta_1^T=k\alpha_1\beta_1^T=kA$. (3 分)