

2012 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共8小题,每小题4分,共32分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

- (1) 曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 的渐近线的条数为()
 (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.
- (2) 设函数 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$, 其中 n 为正整数, 则 $f'(0) =$ ()
 (A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$. (B) $(-1)^n(n-1)!$.
 (C) $(-1)^{n-1}n!$. (D) $(-1)^nn!$.
- (3) 设 $a_n > 0 (n = 1, 2, \cdots)$, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的()
 (A) 充分必要条件. (B) 充分非必要条件.
 (C) 必要非充分条件. (D) 既非充分也非必要条件.
- (4) 设 $I_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2} \sin x dx (k = 1, 2, 3)$, 则有()
 (A) $I_1 < I_2 < I_3$. (B) $I_3 < I_2 < I_1$. (C) $I_2 < I_3 < I_1$. (D) $I_2 < I_1 < I_3$.
- (5) 设函数 $f(x, y)$ 可微, 且对任意的 x, y 都有 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} > 0$, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} < 0$, 则使不等式 $f(x_1, y_1) < f(x_2, y_2)$ 成立的一个充分条件是()
 (A) $x_1 > x_2, y_1 < y_2$. (B) $x_1 > x_2, y_1 > y_2$.
 (C) $x_1 < x_2, y_1 < y_2$. (D) $x_1 < x_2, y_1 > y_2$.
- (6) 设区域 D 由曲线 $y = \sin x, x = \pm \frac{\pi}{2}, y = 1$ 围成, 则 $\iint_D (xy^5 - 1) dx dy =$ ()
 (A) π . (B) 2. (C) -2. (D) $-\pi$.
- (7) 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix}$, 其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数, 则下列向量组线性相关的为()
 (A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$. (C) $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$. (D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.
- (8) 设 A 为 3 阶矩阵, P 为 3 阶可逆矩阵, 且 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 若 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 $Q^{-1}AQ =$ ()
 (A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. (C) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) 设 $y = y(x)$ 是由方程 $x^2 - y + 1 = e^y$ 所确定的隐函数,则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} =$ _____.

(10) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2} \right) =$ _____.

(11) 设 $z = f\left(\ln x + \frac{1}{y}\right)$, 其中函数 $f(u)$ 可微, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

(12) 微分方程 $y dx + (x - 3y^2) dy = 0$ 满足条件 $y|_{x=1} = 1$ 的解为 $y =$ _____.

(13) 曲线 $y = x^2 + x (x < 0)$ 上曲率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的点的坐标是_____.

(14) 设 A 为 3 阶矩阵, $|A| = 3$, A^* 为 A 的伴随矩阵, 若交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B , 则 $|BA^*| =$ _____.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1+x}{\sin x} - \frac{1}{x}$, 记 $a = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(I) 求 a 的值;

(II) 若当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) - a$ 与 x^k 是同阶无穷小量, 求常数 k 的值.

(16) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

(17) (本题满分 12 分)

过点 $(0, 1)$ 作曲线 $L: y = \ln x$ 的切线, 切点为 A , 又 L 与 x 轴交于 B 点, 区域 D 由 L 与直线 AB 围成. 求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

(18) (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D xy d\sigma$, 其中区域 D 由曲线 $r = 1 + \cos \theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ 与极轴围成.

(19) (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 及 $f''(x) + f(x) = 2e^x$.

(I) 求 $f(x)$ 的表达式;

(II) 求曲线 $y = f(x^2) \int_0^x f(-t^2) dt$ 的拐点.

(20) (本题满分 10 分)

证明: $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2} (-1 < x < 1)$.

(21) (本题满分 10 分)

(I) 证明方程 $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$ (n 为大于 1 的整数) 在区间 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 内有且仅有一个实根;

(II) 记(I) 中的实根为 x_n , 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求此极限.

(22) (本题满分 11 分)

$$\text{设 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(I) 计算行列式 $|\mathbf{A}|$;

(II) 当实数 a 为何值时, 方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{\beta}$ 有无穷多解, 并求其通解.

(23) (本题满分 11 分)

$$\text{已知 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}, \text{二次型 } f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{x} \text{ 的秩为 } 2.$$

(I) 求实数 a 的值;

(II) 求正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Qy}$ 将 f 化为标准形.