1997 年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{x^{-2}}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$ ______.

(2) 设 $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$,则 $y''\Big|_{x=0}=$ ______.

(3) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}}=$ ______.

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+8}=$ ______.

(5) 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,t,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-4,5,-2)$ 的秩为 2,则 $t=$ ______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $x\to 0$ 时,$\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^x$ 与 x^n 是同阶无穷小,则 n 为( )

(A)1. (B)2. (C)3. (D)4.

(2) 设在闭区间 $[a,b]$ 上 $f(x)>0$, $f'(x)<0$, $f''(x)>0$. 记 $S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, $S_2=f(b)(b-a)$, $S_3=\dfrac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$,则( )

(A) $S_1<S_2<S_3$. (B) $S_2<S_1<S_3$. (C) $S_3<S_1<S_2$. (D) $S_2<S_3<S_1$.

(3) 已知函数 $y=f(x)$ 对一切 x 满足 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-\mathrm{e}^{-x}$,若 $f'(x_0)=0\,(x_0\neq 0)$,则( )

(A) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C) $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值,$(x_0,f(x_0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(4) 设 $F(x)=\displaystyle\int_x^{x+2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t\,\mathrm{d}t$,则 $F(x)$( )

(A) 为正常数. (B) 为负常数. (C) 恒为零. (D) 不为常数.

(5) 设函数 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $g[f(x)]=$( )

(A) $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ (B) $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ (D) $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

三、(本题共 6 小题,每小题 5 分,满分 30 分)

(1) 求极限 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

(2) 设函数 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=\arctan t,\\2y-ty^2+e^t=5\end{cases}$ 所确定,求 $\dfrac{dy}{dx}$.

(3) 计算 $\int e^{2x}(\tan x+1)^2dx$.

(4) 求微分方程 $(3x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy)dy=0$ 的通解.

(5) 已知 $y_1=xe^x+e^{2x}$,$y_2=xe^x+e^{-x}$,$y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的三个解,求此微分方程.

(6) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$,且 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 是3阶单位矩阵,求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

四、(本题满分8分)

λ 取何值时,方程组 $\begin{cases}2x_1+\lambda x_2-x_3=1,\\\lambda x_1-x_2+x_3=2,\\4x_1+5x_2-5x_3=-1\end{cases}$ 无解,有唯一解或有无穷多解?并在有无穷多解时写出方程组的通解.

五、(本题满分8分)

设曲线 L 的极坐标方程为 $r=r(\theta)$,$M(r,\theta)$ 为 L 上任一点,$M_0(2,0)$ 为 L 上一定点. 若极径 OM_0,OM 与曲线 L 所围成的曲边扇形面积值等于 L 上 M_0,M 两点间弧长值的一半,求曲线 L 的方程.

六、(本题满分8分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续,在开区间 $(0,1)$ 内大于零,并满足 $xf'(x)=f(x)+\dfrac{3a}{2}x^2$($a$ 为常数),又曲线 $y=f(x)$ 与 $x=1$,$y=0$ 所围的图形 S 的面积值为2,求函数 $y=f(x)$,并问 a 为何值时,图形 S 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积最小.

七、(本题满分8分)

设函数 $f(x)$ 连续,$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$,且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=A$($A$ 为常数),求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

八、(本题满分8分)

就 k 的不同取值情况,确定方程 $x-\dfrac{\pi}{2}\sin x=k$ 在开区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内根的个数,并证明你的结论.