第二章　矩阵

矩阵是线性代数最基本的概念之一，是数学中的一个重要内容, 矩阵方法是解决许多实际问题的重要工具. 在实际工作中, 表面上没有联系的东西, 归结为矩阵问题后可以完全统一起来, 并且使情况变得更加简化. 这一章的目的主要是介绍矩阵的概念及其运算, 同时引入矩阵的初等变换和矩阵的秩的概念, 并给出利用初等变换求逆矩阵和矩阵的秩的方法.

第一节　矩阵的概念

在经济模型、工程计算等问题中，我们经常利用矩阵这一有力工具, 下面引入矩阵的概念.

含有 n 个未知量 m 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases}$$

的系数可排列成一个 m 行、n 列的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

这样的表称为 $m\times n$ **矩阵**, 我们用字母 $\boldsymbol{A}$ 等表示. a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**元素**, 它位于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行、第 j 列的交叉处. 一般情况下，有定义如下：

定义 1　设 $m\times n$ 个数 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$, 按一定顺序排成 m 行、n 列的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

此数表称为 m 行 n 列矩阵, 简称 $m\times n$ 矩阵. 矩阵一般用大写字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\cdots$表示, 有时亦记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n,}$, 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$.

1. 在 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中，

（1）当 $m=n$, 称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵. 即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

其中元素 $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ 所形成的线，称为矩阵的**主对角线**.

（2）当 $a_{ij} \in \mathbf{R}$ $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$，称 $\boldsymbol{A}$ 为**实矩阵**.

（3）当 $a_{ij} \in \mathbf{C}$ $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$，称 $\boldsymbol{A}$ 为**复矩阵**.

（4）当 $m=1, n>1$, 称 $\boldsymbol{A}$ 为**行矩阵**, 即

$$\boldsymbol{A}=(a_{11} \quad a_{12} \quad \ldots \quad a_{1n}).$$

（5）若 $m>1, n=1$, 称 $\boldsymbol{A}$ 为**列矩阵**, 即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

（6）所有元素都是 0 的矩阵, 称为**零矩阵**，记作 $\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$.

（7）若 $\boldsymbol{A}$ 主对角线以外的元素全为零，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n **阶对角矩阵,**

$$\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}),$$

即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

（8）主对角线上的元素全为1, 其余元素全为 0 的 n 阶方阵, 称为 n **阶单位矩阵**, 记为 $\boldsymbol{E}_n$ 或者 $\boldsymbol{E}$, 即

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

（9）主对角线上的元素全为非零常数 k 的 n 阶对角矩阵, 称为 n **阶数量矩阵**, 记作 $k\boldsymbol{E}$ 或 $k\boldsymbol{E}_n$, 即

$$kE=\begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}.$$

（10）主对角线下(上)方的元素全为零的方阵，称为**上(下)三角矩阵**, 即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

（11）若矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的行数、列数分别相等，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是**同型矩阵**.

2. 在讨论企业管理的数学问题中, 常常用到矩阵.

例如, 关于钢材的供销问题：若钢材有 m 个产地 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 和 n 个销地 $B_1,B_2,\cdots,B_n$, 那么钢材的调运方案就可用一个矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

来表示, 其中 a_{ij} 表示由产地 A_i 运到销地 B_j 的数量.

在许多实际问题中, 会遇到一组变量由另一组变量表示的问题，如变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 可由变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性表示为

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n, \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{cases}$$

称之为由变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的线性变换，它的系数够成的矩阵 $(a_{ij})_{m\times n}$ (称为**系数矩阵**) 是确定的；反之, 如果给出了一个矩阵是线性变换的系数矩阵, 则线性变换也就确定了. 从这个意义上讲, 线性变换与矩阵之间存在着一一对应的关系, 因此可以利用矩阵来研究线性变换.

第二节　矩阵的运算

矩阵的运算可以认为是矩阵之间一些最基本的关系. 具体内容包括矩阵的加法、矩阵与

数的乘法、矩阵的乘法以及矩阵的转置等.

一、矩阵的线性运算

矩阵相等：设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$， 若 $a_{ij}=b_{ij}$ $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$，称矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ **相等**, 记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

注：只有同型矩阵, 才有可能相等.

定义 1 设有两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，那么 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, 规定为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

注：只有当两个矩阵同型时, 才能进行加法运算.

定义 2 数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积记作 $k\boldsymbol{A}$，规定为

$$k\boldsymbol{A}=k(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

我们把矩阵的加法运算与数乘运算统称为矩阵的**线性运算**.

矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的全部元素改变符号后得到的新矩阵 $(-a_{ij})_{m\times n}$，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**, 记作 $-\boldsymbol{A}$，即

$$-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}.$$

由矩阵加法和负矩阵的概念, 矩阵的减法可定义为：

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}.$$

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为同型矩阵， k 、l 为常数，矩阵的线性运算满足如下的运算规律：

（1）交换律：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$ ；

（2）结合律：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

（3）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$，其中$\boldsymbol{O}$ 是与$\boldsymbol{A}$同型的零矩阵；

（4）$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$ ；

（5）$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$；

（6）$(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})$；

（7）$1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$；

（8）$0\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

例 1　已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&2&-1\\0&3&1&2\\2&1&0&-1\\1&-1&3&2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2&1&1&1\\1&2&2&1\\0&2&1&3\\-1&2&1&4\end{pmatrix},$$

求$4\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$.

解　由于

$$4\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&4&8&-4\\0&12&4&8\\8&4&0&-4\\4&-4&12&8\end{pmatrix},\quad 2\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-4&2&2&2\\2&4&4&2\\0&4&2&6\\-2&4&2&8\end{pmatrix},$$

所以

$$4\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&6&10&-2\\2&16&8&10\\8&8&2&2\\2&0&14&16\end{pmatrix}.$$

例 2　设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\4&3&5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}8&2&6\\5&3&4\end{pmatrix},$$

满足$2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{X}$，求$\boldsymbol{X}$.

解　由$2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{X}$ 知，

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}2&2&2\\-1&-1&-2\end{pmatrix}.$$

二、矩阵乘法

定义 3　设有两个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，那么规定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积是 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n).$$

并把此乘积记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$. 记号 $\boldsymbol{AB}$ 常读作 $\boldsymbol{A}$ 右乘 $\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 左乘 $\boldsymbol{A}$.

特别地，行矩阵 $\boldsymbol{P}_{1\times n}=(p_1\quad p_2\quad\cdots\quad p_n)$ 与列矩阵 $\boldsymbol{Q}_{n\times 1}=\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_n\end{pmatrix}$ 相乘, 即

$$\boldsymbol{PQ}=p_1q_1+p_2q_2+\cdots+p_nq_n.$$

一般情形　$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，

$$c_{ij}=(a_{i1}\quad a_{i2}\quad\cdots\quad a_{is})\begin{pmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{sj}\end{pmatrix}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$$

其中 $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$，

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1s}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2s}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{ms}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{s1}&b_{s2}&\cdots&b_{sn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{m1}&c_{m2}&\cdots&c_{mn}\end{pmatrix}.$$

注:（1）只有当 $\boldsymbol{A}$ 的列数与 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等时，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 才能相乘;

（2）$\boldsymbol{AB}$ 的行数 $=$ $\boldsymbol{A}$ 的行数，$\boldsymbol{AB}$ 的列数 $=$ $\boldsymbol{B}$ 的列数;

（3）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的先后次序不能改变.

例 3　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别是 $n\times 1$ 和 $1\times n$ 矩阵，且

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=(b_1\quad b_2\quad\cdots\quad b_n),$$

计算 $\boldsymbol{AB}$.

解 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1\quad b_2\quad\cdots\quad b_n)=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{pmatrix}$.

例 4 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-1\\0&3\\1&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&2&1&0\end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$..

解 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}3&-2&2&-3\\0&6&3&0\\1&0&1&-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{BA}$ 无意义.

例 5 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$..

解 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

注:（1）$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，此例说明矩阵的乘法不满足交换律. 即一般地，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$. 特殊地，如果 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **可交换**.

（2）上例同样说明两个非零矩阵的乘积可以是零矩阵, 即 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，但有可能 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$.

例 6 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{O},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&0\\0&-3\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{AC}$.

解 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$.

注:上例说明 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，未必有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$. 即矩阵乘法一般不满足消去律.

容易证明,矩阵的乘法满足以下运算律：

（1）结合律：$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

（2）左乘分配律：$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$；右乘分配律：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$；

（3）$k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$；

（4）设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times s$ 矩阵，则

$$E_m A_{m\times s} = A_{m\times s}, \quad A_{m\times s} E_s = A_{m\times s}.$$

例 7 如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

它的系数矩阵是

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

而

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

分别是 $n\times 1$ 与 $m\times 1$ 矩阵，那么该线性方程组的矩阵形式为 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$.

同样如果线性变换

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{cases}$$

它的系数矩阵是 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，而 $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ 分别是 $n\times 1$ 与 $m\times 1$ 矩阵，那么该线性变换的矩阵形式为 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{AX}$.

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，k 为正整数，方阵 $\boldsymbol{A}$ 的**正整数幂**定义为：

$$\boldsymbol{A}^1 = \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{A}^{k+1} = \boldsymbol{A}^k \boldsymbol{A} \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

规定 $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{E}$.

注：显然只有方阵的幂才有意义.

由于矩阵乘法满足结合律，所以方阵幂的运算满足如下运算律：

(1) $\boldsymbol{A}^k \boldsymbol{A}^l = \boldsymbol{A}^{k+l}$；

(2) $(\boldsymbol{A}^k)^l = \boldsymbol{A}^{kl}$；

其中k,l是正整数.

但因矩阵的乘法一般不满足交换律，所以对于两个n阶方阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$，一般来说

$$(\boldsymbol{AB})^k \neq \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k.$$

例8　设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均为$n$阶方阵, 则等式

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$$

成立的充要条件是$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$可交换.

证　(必要性) 由已知可知

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2,$$

又因为矩阵乘法满足分配律可知

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2,$$

则

$$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{AB},$$

即

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}.$$

(充分性) 由于

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2,$$

因为

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA},$$

显然有

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2.$$

例 9　设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 求$\boldsymbol{A}^k\ (k=2,3,\cdots)$.

解 1　$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2^2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2^2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2^3&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

用数学归纳法可以验证：$\boldsymbol{A}^k=\begin{pmatrix}1&0&k\\0&2^k&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

解 2　$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$,

$$\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{CB}\Rightarrow(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})^k=\boldsymbol{B}^k+k\boldsymbol{B}^{k-1}\boldsymbol{C}+\cdots+\boldsymbol{C}^k,$$

$$\boldsymbol{C}^2=\boldsymbol{O}\Rightarrow\boldsymbol{A}^k=(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})^k=\boldsymbol{B}^k+k\boldsymbol{B}^{k-1}\boldsymbol{C}$$

$$=\begin{pmatrix}1&&\\&2^k&\\&&1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1&&\\&2^{k-1}&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&&\\&2^k&\\&&1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&k\\0&2^k&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

三、转置矩阵与对称矩阵

定义 4　设 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},$$

把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行与列互换, 且不改变原来各元素的顺序而得到的 $n\times m$ 矩阵

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵, 记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{A}'$.

注：显然 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行第 j 列元素等于 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行第 i 列元素. 与行列式不同, 一个矩阵经转置后一般来说与原来的矩阵不会相等.

由矩阵转置的定义, 易得如下的运算律：

（1）$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$;

（2）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

（3）$(kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}$；

同时, 可以证明

（4）$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$， $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，记 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$， $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{D}=(d_{ij})_{n\times m}$， 显然 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 都是 $n\times m$ 矩阵，下面仅需证明 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的对应元素相等.

由矩阵乘法的定义， $\boldsymbol{C}$ 的第 j 行第 i 列元素为

$$c_{ji}=(a_{j1}\quad\cdots\quad a_{js})\begin{pmatrix}b_{1i}\\ \vdots\\ b_{si}\end{pmatrix}=a_{j1}b_{1i}+\cdots+a_{js}b_{si},$$

而 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 得第 i 行为 $(b_{1i}\quad b_{2i}\quad\cdots\quad b_{si})$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的第 j 列元素为 $(a_{j1}\quad a_{j2}\quad\cdots\quad a_{js})$，所以 $\boldsymbol{D}$ 的第 i 行第 j 列元素为

$$d_{ij}=(b_{1i}\quad\cdots\quad b_{si})\begin{pmatrix}a_{j1}\\ \vdots\\ a_{js}\end{pmatrix}=b_{1i}a_{j1}+\cdots+b_{si}a_{js}=c_{ji},$$

故 $d_{ij}=c_{ji}\ (i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)$， 即 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

注：式(4)可以推广到有限多个矩阵的情形，即

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{k-1}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}.$$

定义 5　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，即 $a_{ij}=a_{ji}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵. 若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$， 即 $a_{ij}=-a_{ji}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$， 则称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵.

例如

$$\begin{pmatrix}2&7&9\\7&8&0\\9&0&11\end{pmatrix},$$

是3阶对称矩阵，而

$$\begin{pmatrix}0&7&9\\-7&0&0\\-9&0&0\end{pmatrix},$$

是3阶反对称矩阵.

例 10　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶反对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶对称矩阵, 证明：$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}$ 是 n 阶反对称矩阵.

证 因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$ 由转置的运算律可知

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}} &= (\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \\
&= \boldsymbol{B}(-\boldsymbol{A})+(-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=-(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}).
\end{aligned}
$$

所以结论成立.

四、方阵的行列式

定义 6 由 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的元素按照原来的相对位置构成的行列式，称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式, 记作 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det \boldsymbol{A}$.

注：方阵与行列式是两个不同的概念，方阵是数表，而行列式是数值.

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，k 为任意常数，方阵的行列式满足如下的运算律：

（1）$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$；

（2）$|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$；

（3）$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$；

（4）$|\boldsymbol{A}^k|=|\boldsymbol{A}|^k$.

注：当 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为同阶方阵时，一般情况下，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，而 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$.

例 11 设

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},
$$

求 $|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$.

解 1 $|\boldsymbol{A}|=-3$，$|\boldsymbol{B}|=12$，则 $|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|=-36$.

解 2 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 6 & 14 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}$，$|\boldsymbol{AB}|=\begin{vmatrix} 6 & 14 \\ 9 & 15 \end{vmatrix}=-36$.

例 12 设 $\boldsymbol{A}$ 设 n 阶方阵, 满足 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，且 $|\boldsymbol{A}|=-1$，求 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$.

解 由于

$$
|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=-|(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}|=-|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|.
$$

所以 $2|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$，即 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$.

第三节　逆矩阵

由矩阵的运算可知，零矩阵与任一同型矩阵相加，结果是原矩阵. 单位矩阵与任一矩阵相乘(只要乘法可行)，结果还是原矩阵. 可以说零矩阵类似于数的运算中零的作用，而单位矩阵类似于数的运算中数1的作用.

在数的运算中，设数 $a \neq 0$, 则存在 a 的唯一的逆元(即倒数) $a^{-1} = 1/a$，使 $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$. 我们自然要问，在矩阵运算中，对于给定的矩阵 $\boldsymbol{A}$，是否也存在一个与之对应的矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$，使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$ 呢？下面我们讨论这个问题.

一、逆矩阵的定义

定义 1　对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，若存在一个 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，满足 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，并称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

显然，若 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 也是 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵.

例如设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

有 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}$，　因此，$\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

定理 1　若 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵唯一.

证　设 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，则一定有

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{AC} = \boldsymbol{CA} = \boldsymbol{E},$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{BE} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{AC}) = (\boldsymbol{BA})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{EC} = \boldsymbol{C}.$$

注：由逆矩阵的唯一性，我们通常将 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵记作 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

二、方阵可逆的充要条件

定义 2　设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，$|\boldsymbol{A}|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}，以 A_{ij} 为元素组成的 n 阶方阵

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，记作 $\boldsymbol{A}^*$.

例 1　求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵，并计算 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*$.

解　$|\boldsymbol{A}|=3$，且

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=5;\qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1;\qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1;\qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=-1;\qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=2;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1.$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

由矩阵的乘法，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}.$$

一般地，有

定理 2　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}.$$

证 $\boldsymbol{AA}^{*}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} \sum a_{1k}A_{1k} & \sum a_{1k}A_{2k} & \cdots & \sum a_{1k}A_{nk} \\ \sum a_{2k}A_{1k} & \sum a_{2k}A_{2k} & \cdots & \sum a_{2k}A_{nk} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum a_{nk}A_{1k} & \sum a_{nk}A_{2k} & \cdots & \sum a_{nk}A_{nk} \end{pmatrix},$$

其中每个$\sum$ 均对k从 1 到n求和. 根据行列式的性质

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=\begin{cases} |\boldsymbol{A}|, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$$

从而

$$\boldsymbol{AA}^{*}=\begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}| & & & \\ & |\boldsymbol{A}| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\boldsymbol{A}| \end{pmatrix}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}.$$

定理 3 n阶矩阵$\boldsymbol{A}$ 为可逆的充分必要条件是$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}.$$

证 （必要性）已知$\boldsymbol{A}^{-1}$存在，则有$\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{E}$. 两边取行列式，由$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{-1}|=1$ ，从而$|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

（充分性）已知$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则有$\boldsymbol{AA}^{*}=\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$， $\boldsymbol{A}\dfrac{\boldsymbol{A}^{*}}{|\boldsymbol{A}|}=\dfrac{\boldsymbol{A}^{*}}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$.

由定义知$\boldsymbol{A}$为可逆矩阵，且$\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}$.

推论 1 设$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$是n阶方阵，满足$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$, 则$\boldsymbol{A}$可逆, 且$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

证 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，两边取行列式得，$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=1$ ，可知$|\boldsymbol{A}|\neq 0$ ，即$\boldsymbol{A}$可逆，

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{EB}=\boldsymbol{B}.$$

推论 2 设$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$是n阶方阵，满足$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$, 则$\boldsymbol{A}$可逆, 且$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

例 2 利用伴随矩阵求方阵

$$A=\begin{pmatrix}2&2&2\\1&2&3\\1&3&6\end{pmatrix}$$

的逆矩阵.

解 因为$|A|=2\neq 0$, 所以A^{-1}存在，先求A的伴随矩阵A^*.

$$A_{11}=3,\ A_{12}=-3,\ A_{13}=1,$$

$$A_{21}=-6,\ A_{22}=10,\ A_{23}=-4,$$

$$A_{31}=2,\ A_{32}=-4,\ A_{33}=2,$$

所以

$$A^*=\begin{pmatrix}3&-6&2\\-3&10&-4\\1&-4&2\end{pmatrix},$$

故

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&-6&2\\-3&10&-4\\1&-4&2\end{pmatrix}.$$

注：显然，若$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}\neq 0$, 则$n$阶对角矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&&&\\&a_{22}&&\\&&\ddots&\\&&&a_{nn}\end{pmatrix}$$

可逆，且

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}a_{11}&&&\\&a_{22}&&\\&&\ddots&\\&&&a_{nn}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}a_{11}^{-1}&&&\\&a_{22}^{-1}&&\\&&\ddots&\\&&&a_{nn}^{-1}\end{pmatrix}.$$

例 3 设A是n阶方阵，满足$A^2-2A-4E=O$,

（1）证明A可逆，求A^{-1};

（2）证明$A+E$可逆，并求$(A+E)^{-1}$.

证　(1) 由 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，可知 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=4\boldsymbol{E}$，即 $\boldsymbol{A}(\frac{\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}}{4})=\boldsymbol{E}$，由定理 3 的推论 1 可知 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$.

(2) 由 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，可知 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}$，即 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$. 由定理 3 的推论 1 可知 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$.

定义 3　若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵；若 $|\boldsymbol{A}|=0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为奇异矩阵.

三、可逆矩阵的性质

设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶可逆矩阵，数 $k\neq 0$，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 具有如下性质：

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 亦可逆，且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，数 $k\neq 0$，则 $k\boldsymbol{A}$ 亦可逆，且 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$.

(3) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵且均可逆，则 $\boldsymbol{AB}$ 亦可逆，且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

注：此性质可推广到有限个同阶可逆矩阵的情形，即若 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n$ 均是 n 阶可逆矩阵，则 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_n$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_n)^{-1}=\boldsymbol{A}_n^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}$.

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 亦可逆，且 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$.

(5) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则有 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}$.

我们只证（3）、（4）, 其余的留给读者自己证明.

证　(3) 由于

$$(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BB}^{-1})\boldsymbol{A}^{-1}$$

$$=\boldsymbol{AEA}^{-1}=\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{E},$$

由定理 3 得的推论 1 可知，$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

(4) 由转置的运算律可知

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E},$$

再由定理 3 的推论 1 可知 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$.

例 4　设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，证明

（1）若$|\boldsymbol{A}|=0$，则$|\boldsymbol{A}^*|=0$；

（2）$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

证　（1）若$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，则$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$，结论显然.

若$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，（反证法）则若$|\boldsymbol{A}^*|\neq 0$，则$\boldsymbol{A}^*$可逆. 又$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，则有$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}^*)^{-1}\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}$，这与$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$矛盾，故$|\boldsymbol{A}^*|=0$.

（2）由伴随矩阵的性质可知$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，两端取行列式得到

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^n|\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}|^n,$$

由（1）知当$|\boldsymbol{A}|=0$时，$|\boldsymbol{A}^*|=0$结论成立. 当$|\boldsymbol{A}|\neq 0$时，由上式得到$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

注：设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$是n阶可逆矩阵，数$k\neq 0$，伴随矩阵的运算规律还有：

（1）$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$；（2）$(k\boldsymbol{A})^*=k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$；（3）$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$；

（4）$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*$；（5）$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

四、用逆矩阵求解线性方程组

含有n个未知量n个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

的矩阵形式为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$$

其中，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{A}$为线性方程组的系数矩阵.

下面求解上述线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$.

当$|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，$\boldsymbol{A}^{-1}$存在，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$两端左乘$\boldsymbol{A}^{-1}$，得$\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}.$$

例 5　求解下列方程组

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+3x_3=2, \\ x_1-\ x_2 \qquad\quad =2, \\ -x_1+2x_2+\ x_3=4. \end{cases}$$

解　将方程组写成矩阵形式 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

计算得 $|\boldsymbol{A}|=-1\neq 0$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 因而有 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -18 \\ -20 \\ 26 \end{pmatrix},$$

从而方程组的解为 $x_1=-18,\quad x_2=-20,\quad x_3=26.$

例 6　设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}=6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BA}$，且

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/7 \end{pmatrix},$$

求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解　由 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{BA}=6\boldsymbol{A}$，得 $(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{BA}=6\boldsymbol{A}$. 上式两边右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 得

$$(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=6\boldsymbol{E},$$

$$\boldsymbol{B}=6(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E})^{-1}=6\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1}=6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$=6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

第四节　分块矩阵

对于行数和列数较高的矩阵，为了简化矩阵的运算，经常采用分块法，使大矩阵的运算化成若干小矩阵间的运算，同时也使原矩阵的结构简单而清晰.

一、分块矩阵的概念

用若干条横线与纵线将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 划分为若干个小矩阵，称这些小矩阵为 $\boldsymbol{A}$ 的**子块**(或**子矩阵**)，以 $\boldsymbol{A}$ 的每一个子块为一个元素构成的矩阵称为**分块矩阵**.

例如　矩阵

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix},$$

其中, 子块

$$A_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A_{12}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_{21}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{22}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

而 $\boldsymbol{A}$ 成为以 $\boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{A}_{12}, \boldsymbol{A}_{21}, \boldsymbol{A}_{22}$ 为元素的分块矩阵.

有时候，也常把矩阵按列分块：

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{c:c:c:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right)=(\boldsymbol{\beta}_1 \quad \boldsymbol{\beta}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\beta}_n),$$

称之为**列分块矩阵**，其中 $\boldsymbol{\beta}_j=(a_{1j} \quad a_{2j} \quad a_{3j} \quad a_{4j})^{\mathrm{T}} (j=1,2,\cdots,n)$ 是列矩阵.

例如 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{c:c:c:c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)=(\boldsymbol{\beta}_1 \quad \boldsymbol{\beta}_2 \quad \boldsymbol{\beta}_3 \quad \boldsymbol{\beta}_4),$$

其中 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4$ 都是列矩阵.

当把矩阵按行分块，即每一行为一子块，则 $\boldsymbol{A}$ 可以写成

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hdashline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hdashline a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{pmatrix},$$

称为**行分块矩阵**，其中 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in})(i=1,2,\cdots,m)$ 是行矩阵.

注：分块矩阵的特点：同行上的子矩阵有相同的行数，同列上的子矩阵有相同的列数.

二、分块矩阵的运算

分块矩阵的运算与普通矩阵的运算法则相类似，具体讨论如下：

1. 分块矩阵的加法

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵，采用同样的分块法，由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r}\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{s1} & \boldsymbol{B}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{sr}\end{pmatrix}.$$

其中 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 与 $\boldsymbol{B}_{ij}\,(i=1,2,\cdots,s;\ j=1,2,\cdots,r)$ 都是同型矩阵, 则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}+\boldsymbol{B}_{1r}\\ \boldsymbol{A}_{21}+\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}+\boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2r}+\boldsymbol{B}_{2r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1}+\boldsymbol{B}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2}+\boldsymbol{B}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}+\boldsymbol{B}_{sr}\end{pmatrix}.$$

例 1　设有矩阵 $\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:cc}1 & 3 & 0 & 2\\ 2 & 4 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 4\\ \hdashline 1 & 1 & 3 & 4\\ 2 & 0 & 1 & 3\end{array}\right)$，$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{cc:cc}2 & 0 & 0 & 2\\ 3 & 5 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ \hdashline 0 & 1 & 2 & 4\\ 3 & 0 & 1 & 5\end{array}\right)$则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{cc:cc}3 & 3 & 0 & 4\\ 5 & 9 & 7 & 0\\ 0 & 2 & 6 & 5\\ \hdashline 1 & 2 & 5 & 8\\ 5 & 0 & 2 & 8\end{array}\right).$$

2. 数乘分块矩阵

设 k 为数，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix},$$

则

$$k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}k\boldsymbol{A}_{11} & k\boldsymbol{A}_{12} & \cdots & k\boldsymbol{A}_{1r}\\ k\boldsymbol{A}_{21} & k\boldsymbol{A}_{22} & \cdots & k\boldsymbol{A}_{2r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ k\boldsymbol{A}_{s1} & k\boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & k\boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix}.$$

3. 分块矩阵的转置

设

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},$$

则

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & A_{21}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{s1}^{\mathrm{T}} \\ A_{12}^{\mathrm{T}} & A_{22}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{s2}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^{\mathrm{T}} & A_{2r}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{sr}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

注： 特点:“大转”+“小转”.

例2 设

$$A=\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ \hdashline 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

则

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & A_{21}^{\mathrm{T}} \\ A_{12}^{\mathrm{T}} & A_{22}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ \hdashline 3 & 0 & 5 & 2 \end{array}\right).$$

4. 分块矩阵的乘法

将 A, B（A 的列数等于 B 的行数）分成

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{ms} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{sn} \end{pmatrix}.$$

其中 $A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{is}$ 的列数分别等于 $B_{1j}, B_{2j}, \cdots, B_{sj}$ 的行数，则有

$$C_{ij}=(A_{i1}\quad A_{i2}\quad\cdots\quad A_{is})\begin{pmatrix}B_{1j}\\B_{2j}\\\vdots\\B_{sj}\end{pmatrix}=A_{i1}B_{1j}+\cdots+A_{is}B_{sj}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

$$AB=\begin{pmatrix}C_{11}&C_{12}&\cdots&C_{1n}\\C_{21}&C_{22}&\cdots&C_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\C_{m1}&C_{m2}&\cdots&C_{mn}\end{pmatrix}.$$

注：在分块矩阵的乘法中，要求 A 的列划分方式与 B 的行划分方式相同.

例 3　用分块矩阵乘法计算 AB ，其中

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\hdashline -1&2&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}E&O\\A_{21}&E\end{pmatrix},\ B=\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\\hdashline 1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}B_{11}&E\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}.$$

解　$$AB=\begin{pmatrix}B_{11}&E\\A_{21}B_{11}+B_{21}&A_{21}+B_{22}\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\\hdashline -2&4&3&3\\-1&1&3&1\end{array}\right).$$

例 4　用分块矩阵乘法计算 AB ，其中

$$A=\left(\begin{array}{cc:c}1&0&1\\2&1&0\\\hdashline 2&3&3\\1&1&2\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix},\quad B=\left(\begin{array}{cc:cc:c}1&0&2&1&1\\0&1&3&1&0\\\hdashline 2&0&1&2&0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}&B_{13}\\B_{21}&B_{22}&B_{23}\end{pmatrix}.$$

解

$$AB=\begin{pmatrix}A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}&A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}&A_{11}B_{13}+A_{12}B_{23}\\A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}&A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}&A_{21}B_{13}+A_{22}B_{23}\end{pmatrix}.$$

而

$$A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}=\begin{pmatrix}3&0\\2&1\end{pmatrix},\ A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}=\begin{pmatrix}3&3\\7&3\end{pmatrix},$$

$$A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}=\begin{pmatrix}8&3\\5&1\end{pmatrix},\ A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}=\begin{pmatrix}16&11\\7&6\end{pmatrix},$$

$$A_{11}B_{13}+A_{12}B_{23}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ A_{21}B_{13}+A_{22}B_{23}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

故

$$
\boldsymbol{AB}=\left(\begin{array}{cc:cc:c}
3 & 0 & 3 & 3 & 1\\
2 & 1 & 7 & 3 & 2\\
\hdashline
8 & 3 & 16 & 11 & 2\\
5 & 1 & 7 & 6 & 1
\end{array}\right).
$$

三、分块对角矩阵与分块三角矩阵

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，如果 $\boldsymbol{A}$ 的分块矩阵除主对角线上有非零子块外，其余子块都是零子块，即

$$
\boldsymbol{A}=\operatorname{diag}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s\end{pmatrix}.
$$

其中，$\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$，$\cdots,\boldsymbol{A}_s$ 都是方阵，则称方阵 $\boldsymbol{A}$ 为**分块对角矩阵**，或称为**准对角矩阵**.

例如，设矩阵

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix},
$$

可将矩阵表示成分块对角矩阵

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & 0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{A}_2 & 0\\ 0 & 0 & \boldsymbol{A}_3\end{pmatrix},
$$

其中

$$
\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_3=(2).
$$

可以证明，准对角矩阵具有下述性质：

（1）$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}_1|\,|\boldsymbol{A}_2|\cdots|\boldsymbol{A}_s|$；

（2）$\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}_i\ (i=1,2,\cdots,s)$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s^{-1}\end{pmatrix}$；

（3）若有与 $\boldsymbol{A}$ 同阶的准对角矩阵 $\boldsymbol{B}$， $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & & & \\ & \boldsymbol{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{B}_s\end{pmatrix}$. 其中 $\boldsymbol{A}_i$ 与 $\boldsymbol{B}_i$

$(i=1,2,\cdots,s)$ 亦为同阶方阵，则有

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s\boldsymbol{B}_s\end{pmatrix}.$$

例 5　设 $\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{c:cc}5 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解　$\boldsymbol{A}_1=(5)$, $\boldsymbol{A}_1^{-1}=(1/5)$, $\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$.

于是，有

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2^{-1}\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c:cc}1/5 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 3\end{array}\right).$$

例 6　设 $\boldsymbol{A}_{m\times m}$ 与 $\boldsymbol{B}_{n\times n}$ 都可逆, $\boldsymbol{C}_{n\times m}$ ，证明三角分块矩阵可逆 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$, 并求 $\boldsymbol{M}^{-1}$.

解　设

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2\\ \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_4$ 分别是 m,n 阶方阵，令 $\boldsymbol{MX}=\boldsymbol{E}$, 得

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2\\ \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}.$$

比较等式两边对应的子块，可得矩阵方程组

$$\begin{cases}\boldsymbol{AX}_1=\boldsymbol{E}_m,\\ \boldsymbol{AX}_2=\boldsymbol{O},\\ \boldsymbol{CX}_1+\boldsymbol{BX}_3=\boldsymbol{O},\\ \boldsymbol{CX}_2+\boldsymbol{BX}_4=\boldsymbol{E}_n.\end{cases}$$

注意到 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 可逆，可解得

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{A}^{-1}, \\ \boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{O}, \\ \boldsymbol{X}_3 = -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}, \\ \boldsymbol{X}_4 = \boldsymbol{B}^{-1}. \end{cases}$$

所以

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}.$$

从而有 $\boldsymbol{M}$ 可逆，且

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^{-1} = \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}.$$

同理，还可以证明，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}.$$

可以证明，对于分块三角矩阵的行列式有如下性质：

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别为 m 阶和 n 阶方阵，$*$表示非零矩阵，则

（1）$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & * \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$，

（2）$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{m\times n}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

第五节　矩阵的初等变换与初等矩阵

矩阵的初等变换是矩阵的重要运算之一，在线性方程组的求解以及矩阵理论的研究等方面具有重要作用. 利用初等变换将矩阵 A 化为“形式简单”的矩阵 B，并通过矩阵 B 研究矩阵 A 的有关性质，在理论研究和实际计算中都是非常有意义的. 本节主要介绍初等变换和初等矩阵，并给出利用矩阵的初等变换求逆矩阵的方法.

一、矩阵的初等变换

定义 1　对矩阵施行以下三种变换称为矩阵的初等行(列)变换：

（1）交换矩阵的第 i 行(列)和第 j 行(列)，记为 $r(i, j)$ $(c(i, j))$；

（2）以数 $k \neq 0$ 乘以矩阵的第 i 行(列)，记为 $r[i(k)]$ $(c[i(k)])$.；

（3）把矩阵的第 i 行(列)所有元素的 k 倍加到第 j 行(列)对应元素上去, 记为 $r[j+i(k)]\quad (c[j+i(k)])$.

矩阵的初等行变换与初等列变换，统称为**初等变换**.

定义 2 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次初等变换成为矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 等价，记作 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$.

容易验证，矩阵的等价关系有下列性质：

（1）反身性：$\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{A}$；

（2）对称性：若 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}\cong\boldsymbol{A}$；

（3）传递性：若 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}\cong\boldsymbol{C}$, 则 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{C}$.

例 1 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&3\\1&0&2\end{pmatrix},$$

对其作如下初等变换：

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r(1,3)}\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&3\\1&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r[2(3)]}\begin{pmatrix}1&0&2\\6&3&9\\1&2&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r[1+3(2)]}\begin{pmatrix}3&4&2\\6&3&9\\1&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c[2+1(1)]}\begin{pmatrix}3&7&2\\6&9&9\\1&3&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}$$

所以 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$.

二、初等矩阵

定义 3 对单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 进行一次初等变换得到的矩阵，称为初等矩阵.

注：对单位矩阵进行一次初等列变换，相当于对单位矩阵进行一次同类型的初等行变换．因此，初等矩阵可分为以下3类：

1. 交换矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 行和第 j 行(或交换矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 列和第 j 列), 得

$$\boldsymbol{E}(i,j)=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&\\&&1&&&&&&\\&&&0&\cdots&1&&&\\&&&\vdots&\ddots&\vdots&&&\\&&&1&\cdots&0&&&\\&&&&&&1&&\\&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\ \\ \\ (i)\\ \\ (j)\\ \\ \\ \\ \end{array};$$

2. 以常数 k 乘以矩阵的第 i 行(列),得

$$\boldsymbol{E}[i(k)]=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&k&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{c}\\ \\ \\ (i)\\ \\ \\ \\ \end{array}\quad(k\neq 0);$$

3. 把矩阵的第 j 行所有元素的 k 倍加到第 i 行对应元素上去(或第 i 列所有元素的 k 倍加到第 j 列)对应元素上去，得

$$\boldsymbol{E}[i+j(k)]=\begin{pmatrix}1&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&\\&&1&&&&&&\\&&&1&\cdots&k&&&\\&&&&\ddots&\vdots&&&\\&&&&&1&&&\\&&&&&&1&&\\&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{c}\\ \\ \\ (i)\\ \\ (j)\\ \\ \\ \\ \end{array};$$

显然，初等矩阵具有如下性质：

（1）初等矩阵是可逆矩阵.

这是因为 $|\boldsymbol{E}(i,j)|=-1$，$|\boldsymbol{E}[i(k)]|=k\neq 0$，$|\boldsymbol{E}[i+j(k)]|=1$.

（2）初等矩阵的逆矩阵仍然是同类型的初等矩阵.

$[\boldsymbol{E}(i,j)]^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j)$，$[\boldsymbol{E}(i(k))]^{-1}=\boldsymbol{E}[i(\frac{1}{k})]$，$[\boldsymbol{E}(i+j(k))]^{-1}=\boldsymbol{E}[i+j(-k)]$.

定理 1 对一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行一次初等行变换，相当于给 $\boldsymbol{A}$ 左乘一个 m 阶同类型的初等矩阵，对 $\boldsymbol{A}$ 进行一次初等列变换，相当于给 $\boldsymbol{A}$ 右乘一个 n 阶同类型的初等矩阵.

证 我们只证初等行变换的情形，初等列变换的情形可同样证明. 将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分块

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \cdots\\ \boldsymbol{A}_i\\ \cdots\\ \boldsymbol{A}_j\\ \cdots\\ \boldsymbol{A}_m\end{pmatrix};$$

其中 $\boldsymbol{A}_k=(a_{k1}\quad a_{k2}\quad\cdots\quad a_{kn})(k=1,2,\cdots,m)$. 由矩阵的分块乘法，得

$$\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \cdots\\ \boldsymbol{A}_j\\ \cdots\\ \boldsymbol{A}_i\\ \cdots\\ \boldsymbol{A}_m\end{pmatrix};$$

这相当于把 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行和第 j 行交换.

$$\boldsymbol{E}[i(k)]\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \cdots\\ k\boldsymbol{A}_i\\ \cdots\\ \boldsymbol{A}_j\\ \cdots\\ \boldsymbol{A}_m\end{pmatrix};$$

这相当于用 k 乘 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行.

$$\boldsymbol{E}[i+j(k)]\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \cdots\\ \boldsymbol{A}_i+k\boldsymbol{A}_j\\ \cdots\\ \boldsymbol{A}_j\\ \cdots\\ \boldsymbol{A}_m\end{pmatrix}$$

这相当于把 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行的 k 倍加到第 i 行. 证毕.

推论 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 等价的充分必要条件是存在初等方阵 $\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_s,\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_t$，使得

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_s\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_t.$$

三、用初等变换求逆矩阵

在本章的第三节中，我们给出了求逆矩阵的公式法——伴随矩阵法. 但对于较高阶的矩阵，用伴随矩阵法求逆矩阵的计算量太大. 下面给出另一种简单可行的方法——初等变换法.

定理 2 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则可以通过初等行变换将 $\boldsymbol{A}$ 化为单位矩阵 $\boldsymbol{E}$.

证 因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆，即 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，因此 $\boldsymbol{A}$ 的第一列元素不全为零，不妨设 $a_{11}\neq 0$（否则通过初等行变换使第一行，第一列交叉处的元素不为零）. 将 $\boldsymbol{A}$ 的第一行元素乘以 $1/a_{11}$，然后再将变换后的第一行乘以 $-a_{i1}$ 加到第 i 行，$i=2,\cdots,n,$ 使第一列其他元素全化为零，得到如下形式的矩阵：

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boldsymbol{A}_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

由定理 1 知，$\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{P}_m\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}$，其中 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_m$ 是对 $\boldsymbol{A}$ 作上述初等行变换所对应的初等矩阵，由 $|\boldsymbol{A}|\neq 0,|\boldsymbol{P}_i|\neq 0(i=1,2,\cdots,m)$，则 $|\boldsymbol{B}_1|\neq 0$，所以 $|\boldsymbol{A}_1|\neq 0$，于是 $\boldsymbol{A}_1$ 的第一列元素不全为零，这样可以用同样的方法，使 $\boldsymbol{B}_1$ 的第二行第二列交叉处的元素化为 1，第二列的其他元素全化为零，而得到

$$\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \boldsymbol{A}_2 & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix},$$

这样一直进行下去，最终就把 $\boldsymbol{A}$ 化成了单位矩阵 $\boldsymbol{E}$.

推论 1 方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为有限个初等矩阵的乘积.

证 （必要性）已知 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，由定理 2 可知，存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_s$ 使得

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A},$$

从而

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_s^{-1}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_s^{-1},$$

而 $\boldsymbol{P}_1^{-1},\boldsymbol{P}_2^{-1},\cdots,\boldsymbol{P}_s^{-1}$ 也是初等矩阵.

（充分性）显然成立.

推论 2　方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{E}$.

下面介绍矩阵求逆的另一种方法（初等行变换法）：

当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，由上述推论可知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s$.（$\boldsymbol{P}_i$ 都是初等矩阵）

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{P}_s^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{P}_s^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^{-1}\end{array}\right\}\Rightarrow\ \boldsymbol{P}_s^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1}(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{E}\mid\boldsymbol{A}^{-1}).$$

由此可得：对 $n\times 2n$ 矩阵 $(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{E})$ 施行初等行变换，当前 n 列（$\boldsymbol{A}$ 的位置）成为 $\boldsymbol{E}$ 时，则后 n 列（$\boldsymbol{E}$ 的位置）为 $\boldsymbol{A}^{-1}$. 即

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{E})\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{E}\mid\boldsymbol{A}^{-1}).$$

例 2　求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&3&4\end{pmatrix}$.

解

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\1&3&4&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r[2+1(-2)],r[3+1(-1)]}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-3&-4&-2&1&0\\0&1&1&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r(2,3)}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&1&-1&0&1\\0&-3&-4&-2&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{r[3+2(3)]}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&3&0&-2\\0&1&1&-1&0&1\\0&0&-1&-5&1&3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r[2+3(1)],r[1+3(1)]}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-2&1&1\\0&1&0&-6&1&4\\0&0&-1&-5&1&3\end{array}\right)\xrightarrow{r[3(-1)]}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-2&1&1\\0&1&0&-6&1&4\\0&0&1&5&-1&-3\end{array}\right)$$

故

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\-6&1&4\\5&-1&-3\end{pmatrix}.$$

例 3　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&&&\\a&1&&\\a^2&a&1&\\a^3&a^2&a&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解　$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\a&1&0&0&0&1&0&0\\a^2&a&1&0&0&0&1&0\\a^3&a^2&a&1&0&0&0&1\end{array}\right)$，依次作初等行变换 $r[4+3(-a)]$，$r[3+2(-a)]$，$r[2+1(-a)]$可得

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{E})\to\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-a&1&0&0\\0&0&1&0&0&-a&1&0\\0&0&0&1&0&0&-a&1\end{array}\right),$$

故

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&\\-a&1&&\\&-a&1&\\&&-a&1\end{pmatrix}.$$

定理 3　设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵，则 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$ 的充分必要条件是存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

证　（必要性）已知 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$，由定理 1 的推论可知，存在 m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_s$ 和 n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_t$，使得

$$\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_t=\boldsymbol{B},$$

令

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_1\ ,\quad \boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_t$$

则有 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

（充分性）已知 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$，则由定理 2 的推论 1 知，$\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 都可以表示为有限个初等矩阵的乘积，即

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_s\ ,\quad \boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_t.$$

故

$$\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_t=\boldsymbol{B},$$

再由定理 1 的推论可知 $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}$.

例 4　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

解　事实上，当 $\boldsymbol{A}$ 经过初等行变换变成 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ 经过同样的初等行变换就变成了 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，即

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{E}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}).$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&1&1\\0&1&1&1&1&2\\1&0&1&1&2&1\end{array}\right)\xrightarrow{\boldsymbol{r}[3+1(-1)],\boldsymbol{r}[3+2(1)]}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&1&1\\0&1&1&1&1&2\\0&0&21&1&2&2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r[1+2(-1)]}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&0&0&-1\\0&1&1&1&1&2\\0&0&2&1&2&2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r[3(\frac{1}{2})]}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&0&0&-1\\0&1&1&1&1&2\\0&0&1&1/2&1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\boldsymbol{r}[2+3(-1)],\boldsymbol{r}[1+3(1)]}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/2&1&0\\0&1&0&1/2&0&1\\0&0&1&1/2&1&1\end{array}\right),$$

故

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1/2&1&0\\1/2&0&1\\1/2&1&1\end{pmatrix}.$$

第六节　矩阵的秩

对于一般的 $m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，不存在通常意义上的逆矩阵. 然而，我们可以通过引入矩阵秩的概念来研究矩阵的性质，这在下一章线性方程组的理论中，有其十分重要的作用.

一、矩阵秩的概念

定义 1　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 在 $\boldsymbol{A}$ 中选取 k 行与 k 列 $(1\le k\le \min\{m,n\})$，位于交叉处的 k^2 个数按照原来的相对位置构成 k 阶行列式，称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k 阶子式, 记作 D_k .

显然，对于给定的k，不同的k阶子式总共有$\mathrm{C}_m^k\mathrm{C}_n^k$个.

例 1　在矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 6 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

中，选定第1,3行和第3,4列，则位于交叉位置的元素所组成的2阶行列式

$$\begin{vmatrix}3 & 6\\ 0 & 5\end{vmatrix},$$

就是$\boldsymbol{A}$的一个2阶子式. 易见，$\boldsymbol{A}$共有2阶子式的个数为$C_4^2\cdot C_5^2=60$个.

定义 2　设A是$m\times n$矩阵，在矩阵A中有一个不等于零的r阶子式D，且所有$r+1$阶子式（如果存在的话）全等于零，则称D为矩阵A的最高阶非零子式，数r称为矩阵A的秩，记作$R(A)$. 并规定零矩阵的秩等于0.

由行列式的性质可知，在$\boldsymbol{A}$中当所有$r+1$阶子式全等于零时，所有高于$r+1$阶的子式也全等于零，因此矩阵$\boldsymbol{A}$的秩$R(\boldsymbol{A})$就是$\boldsymbol{A}$中不等于零的子式的最高阶数.

由秩的定义可见：

（1）若$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，则$R(\boldsymbol{A})\le\min\{m,n\}$；

（2）$k\ne 0$时，$R(k\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})$；

（3）$R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=R(\boldsymbol{A})$. 这是因为矩阵$\boldsymbol{A}$的每一个子式的转置都是其转置矩阵$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$中的一个子式；

（4）若矩阵$\boldsymbol{A}$中有一个r阶子式不等于零，则 $R(\boldsymbol{A})\ge r$；若$\boldsymbol{A}$中所有的$r+1$阶子式全等于零，则 $R(\boldsymbol{A})\le r$；

（5）对n阶方阵$\boldsymbol{A}$，若$|\boldsymbol{A}|\ne 0,$则$R(\boldsymbol{A})=n$；若$|\boldsymbol{A}|=0$，则$R(\boldsymbol{A})<n$. 反之亦然.

注：对于矩阵$\boldsymbol{A}_{m\times n}$，若$R(\boldsymbol{A})=m$，称$\boldsymbol{A}$为**行满秩矩阵**；若$R(\boldsymbol{A})=n$，称$A$为**列满秩矩阵.**

对于方阵$\boldsymbol{A}_{n\times n}$，若$R(\boldsymbol{A})=n$，称$\boldsymbol{A}$为**满秩矩阵**（可逆矩阵，非奇异矩阵）；若$R(\boldsymbol{A})<n$，称$A$为**降秩矩阵**（不可逆矩阵，奇异矩阵）.

例 2 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -3 & 8 & 2\\ 2 & 12 & -2 & 12\\ 1 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix}$，求 $R(\boldsymbol{A})$.

解 位于$1,2$行与$1,2$列处的一个2阶子式

$$D_2=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 2 & 12\end{vmatrix}=30\neq 0,$$

计算知，所有的3阶子式$D_3=0$，故$R(\boldsymbol{A})=2$.

例 3 已知矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1 & a\end{pmatrix}$$

的秩为3，求a的值.

解 由于$R(\boldsymbol{A})=3$，则$|\boldsymbol{A}|=0$，即

$$\begin{vmatrix}a & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1 & a\end{vmatrix}=(a+3)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1 & a\end{vmatrix}=(a+3)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & a-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a-1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a-1\end{vmatrix}$$

$$=(a+3)(a-1)^3=0.$$

由此得$a=-3$或$a=1$.

当$a=1$时，显然有$R(\boldsymbol{A})=1$.

当$a=-3$时，$\boldsymbol{A}$的左上角的3阶子式

$$\begin{vmatrix}-3 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 1\\ 1 & 1 & -3\end{vmatrix}=-16\neq 0.$$

故当且仅当$a=-3$时，$R(\boldsymbol{A})=3$.

二、用初等变换求矩阵的秩

定理 1 初等变换不改变矩阵的秩.

证 （1）交换矩阵$\boldsymbol{A}$的某两行，得到矩阵$\boldsymbol{B}$. 显然，$\boldsymbol{B}$的子式与$\boldsymbol{A}$中对应的子式或者相同，或者只差一个符号，故$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

（2）用数 $k(k \neq 0)$ 乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的某一行，得到矩阵 $\boldsymbol{B}$. 由于行列式的某一行乘以常数 $k(k \neq 0)$ 相当于 k 与行列式的乘积，所以 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 中对应的子式或者相等，或者是 $\boldsymbol{A}$ 的子式的 k 倍，所以 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B})$.

（3）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行的 k 倍加到第 i 行上去，得到矩阵 $\boldsymbol{B}$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \alpha_i \\ \cdots \\ \alpha_j \\ \cdots \end{pmatrix} \xrightarrow{r[i+j(k)]} \begin{pmatrix} \cdots \\ \alpha_i + k\alpha_j \\ \cdots \\ \alpha_j \\ \cdots \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}.$$

首先证明 $R(\boldsymbol{B}) \leq R(\boldsymbol{A})$, 设 $R(\boldsymbol{A}) = r$, 则有如下三种情形：

① $D_{r+1}^{(\boldsymbol{B})}$ (表示矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的一个 $r+1$ 阶子式) 不含第 i 行： $D_{r+1}^{(\boldsymbol{B})} = D_{r+1}^{(\boldsymbol{A})} = 0$

② $D_{r+1}^{(\boldsymbol{B})}$ 含第 i 行，不含第 j 行： $D_{r+1}^{(\boldsymbol{B})} = D_{r+1}^{(\boldsymbol{A})} \pm k\, D_{r+1}^{(\boldsymbol{A})} = 0$

③ $D_{r+1}^{(\boldsymbol{B})}$ 含第 i 行，且含第 j 行： $D_{r+1}^{(\boldsymbol{B})} = D_{r+1}^{(\boldsymbol{A})} = 0$

故 $\boldsymbol{B}$ 中所有的 $r+1$ 阶子式 $D_{r+1}^{(\boldsymbol{B})} = 0$, 所以 $R(\boldsymbol{B}) \leq r = R(\boldsymbol{A})$.

同理 $\boldsymbol{B} \xrightarrow{r[i+j(-k)]} \boldsymbol{A}$ ，又有 $R(\boldsymbol{A}) \leq R(\boldsymbol{B})$ ，于是可得 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B})$.

以上过程说明，矩阵经过一次初等行变换，矩阵的秩不会改变. 同理可证，经过一次初等列变换，矩阵的秩不会改变. 自然经过有限次初等变换，矩阵的秩仍然不变. 总之，初等变换不改变矩阵的秩.

推论 设 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶和 n 阶可逆矩阵，则对于任一 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ ，都有

$$R(PAQ) = R(A).$$

利用定义计算矩阵的秩，需要由高阶到低阶考虑矩阵的子式，当矩阵的行数与列数较多时，按定义求秩是非常麻烦的. 定理 1 为我们提供了一个求秩的思路，通过初等变换，将 $\boldsymbol{A}$ 转化为一个容易求秩的矩阵 $\boldsymbol{B}$. 为此，下面给出行阶梯形矩阵的定义.

定义 3 满足下面两个条件的矩阵称为行阶梯形矩阵

（1）若有零行，零行都在非零行的下方(元素全为零的行称为零行，否则称为非零行)；

（2）从第一行起，下面每一行自左向右第一个非零元素前面零的个数逐行增加.

定义 4 我们称矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为行最简形矩阵，它具有下列特征：

（1）是行阶梯形矩阵；

（2）各非零行的首非零元都是1；

（3）每个首非零元所在列的其余元素都是0 .

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

是行阶梯形矩阵.

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

是行最简形矩阵.

定理 2　任何一个秩为 r 的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 总可以经过有限次初等行变换化为行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}_r$，且 $\boldsymbol{B}_r$ 的非零行数为 r，即

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \boldsymbol{B}_{\mathrm{r}} = \begin{pmatrix} b_1 & * & \cdots & * & c_{1r+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & b_2 & \cdots & * & c_{2r+1} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_r & c_{rr+1} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

进一步，非零行数为 r 的行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}_r$ 可以经过有限次初等行变换（至多交换两列）化为行最简形矩阵 $\boldsymbol{C}_r$，即

$$\boldsymbol{B}_r \xrightarrow{\text{初等行变换，交换列}} \boldsymbol{C}_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & d_{1r+1} & \cdots & d_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & d_{2r+1} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & d_{rr+1} & \cdots & d_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & * \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

对 $\boldsymbol{C}_r$ 继续进行初等变换，最终将化成标准形矩阵 $\boldsymbol{D}_r$，即

$$\boldsymbol{C}_r \xrightarrow{\text{初等变换}} \boldsymbol{D}_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

注：定理 2 中，$\boldsymbol{D}_r$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的标准形. 因此定理 2 又可叙述为：任何一个秩为 r 的矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ 都可以通过初等变换化为标准形.

显然：

（1）等秩的同型矩阵有相同的标准形；

（2）可逆的 n 阶矩阵的标准形是 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}$.

于是，由定理 1 和定理 2 可得如下推论：

推论　两个同型矩阵等价的充分必要条件是他们的秩相等.

实际上，行阶梯形矩阵的秩就是其非零行的行数，故行阶梯形矩阵的秩很容易判断. 由上述定理可知，矩阵都可以经过初等行变换化为阶梯形矩阵，因而可考虑借助初等变换来求矩阵的秩.

例 4　$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 & 2 \\ 2 & 12 & -2 & 12 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$，求 $R(\boldsymbol{A})$.

解

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow{r[2+3(-2)],r[1+3(-2)]} \begin{pmatrix} 0 & -9 & 6 & -6 \\ 0 & 6 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r(1,3),r[3+2(\frac{3}{2})]} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

已经经过初等行变换化为行阶梯形矩阵，且其非零行的行数为 2，故 $R(\boldsymbol{A}) = 2$.

进一步经过初等变换将 $\boldsymbol{A}$ 化为了如下的行最简形矩阵，

$$\xrightarrow{r[2(\frac{1}{6})]} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r[1+2(-3)]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

再经过初等列变换将 $\boldsymbol{A}$ 化为了如下的标准形矩阵，

$$\xrightarrow{c[3+1(-3)],c[4+1(-2)],c[3+2(\frac{2}{3})],c[4+2(\frac{-2}{3})]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*三、关于矩阵秩的一些重要结论

我们知道，$m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩有如下简单的不等式

$$R(\boldsymbol{A}) \le \min\{m, n\}.$$

下面讨论矩阵的乘积以及矩阵和的不等式.

定理 3 两矩阵乘积的秩不大于各因子矩阵的秩，即 $R(\boldsymbol{AB}) \le \min\{R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{B})\}$.

证 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别为 $m \times k$ 和 $k \times n$ 矩阵，且 $R(\boldsymbol{A}) = r$，由定理 2 可知，必有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_{m\times m}, \boldsymbol{Q}_{k\times k}$，使得

$$\boldsymbol{PAQ} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix},$$

即

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1},$$

于是，

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B},$$

令 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_1 \\ \boldsymbol{C}_2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}_1$ 为 $r \times n$ 矩阵，则

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_1 \\ \boldsymbol{C}_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_1 \\ \boldsymbol{O} \end{pmatrix},$$

从而，

$$R(AB) = R(P^{-1}\begin{pmatrix} C_1 \\ O \end{pmatrix}) = R(C_1) \le r = R(A).$$

同理 $R(AB) \le R(B)$.

由以上结论，可得 $R(\boldsymbol{AB}) \le \min\{R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{B})\}$.

定理 4 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，则 $R(\boldsymbol{AB}) \ge R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B}) - n$.

证 设 $R(\boldsymbol{A}) = r$，$R(\boldsymbol{B}) = s$，由定理 2 可知，必有 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{Q}_1$ 及 $\boldsymbol{P}_2$，$\boldsymbol{Q}_2$，使得

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{AQ}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{AQ}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_s & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix},$$

于是，$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{ABQ}_2=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{AQ}_1(\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1})\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{BQ}_2$. 令 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}=(c_{ij})_{n\times n}$，则

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{ABQ}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_s & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rs} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{\boldsymbol{C}}_{r\times s} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

其中,子矩阵 $\overline{\boldsymbol{C}}_{r\times s}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rs}\end{pmatrix}$ 是可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 中划去后 $n-r$ 行和后 $n-s$ 列而得到的矩阵. 因为任一矩阵每减少一行（或以列），其秩的减少不大于 1，故有

$$R(\overline{\boldsymbol{C}}_{r\times s})\ge R(\boldsymbol{C})-[(n-r)+(n-s)]=r+s-n.$$

其中 $R(\boldsymbol{C})=n$，因而

$$R(P_1ABQ_2)=R\begin{pmatrix}\overline{\boldsymbol{C}}_{r\times s} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=R(\overline{\boldsymbol{C}}_{r\times s})\ge r+s-n,$$

即 $R(\boldsymbol{AB})\ge R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})-n$.

注：从证明过程可知，上述定理对 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为 $m\times n$ 和 $n\times p$ 矩阵也成立. 因此有如下推论：

推论 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为 $m\times n$ 和 $n\times p$ 矩阵，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $R(A)+R(B)\le n$.

定理 5 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵，则 $R(A+B)\le R(A)+R(B)$.（证明略.）

例 5 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，$\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{B}^{-1}$，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，证明：

$$R(E-AB)+R(E+AB)=n.$$

证 因为 $\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{B}^{-1}$，所以 $\boldsymbol{ABAB}=\boldsymbol{E}$，从而 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{O}$，由定理 4 的推论可知，$R(E-AB)+R(E+AB)\le n$. 又 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})+(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})=2\boldsymbol{E}$，由定理 5 可知 $R(E-AB)+R(E+AB)\ge R(2E)=n$，因此 $R(E-AB)+R(E+AB)=n$.

习题二

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\2&1&2&1\\1&2&3&4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&3&2&1\\-2&1&-2&1\\0&-1&0&-1\end{pmatrix}$

（1）计算$3\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，$2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}$；

（2）若 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{X}$；

（3）若 $\boldsymbol{Y}$ 满足 $(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Y})+2(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{Y})=O$，求 $\boldsymbol{Y}$.

2. 计算下列矩阵的乘积：

（1）$\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\3\end{pmatrix}(3\quad 2\quad -1\quad 0)$；（2）$\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&1\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$；

（3）$(1\quad 2\quad 3\quad 4)\begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\end{pmatrix}$；（4）$(x_1\quad x_2\quad x_3)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$；

（5）$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$；（6）$\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&0&1\\0&0&2&1\\0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&1&2&-1\\0&0&-2&3\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$.

3. 设 $A=(1\quad 2\quad 3)$, $B=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&-1&1\\2&3&-1\end{pmatrix}$.

（1）计算 $2\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$；

（2）若 $2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{X}$，求 $\boldsymbol{X}$.

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&3&-1\\2&1&4\end{pmatrix}$.

（1）计算 $\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$；（2）问：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$ 吗？

5. 判断下列命题是否正确并说明理由：

（1）若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$；

（2）若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$；

（3）若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{AY}$， $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$；

（4）若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}=\pm\boldsymbol{E}$；

（5）设 $\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{E}$ 为 n 阶方阵，则 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$；

（6）若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有一行为零，则乘积矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 也有一行为零.

（7）若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有一列为零，则乘积矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 也有一列为零.

6. 计算：

（1）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3$；　　（2）$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^k$ (k 为正整数)；

（3）$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}^k$ (k 为正整数).

7. 已知两个线性变换

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + y_3, \\ x_2 = -2y_1+3y_2+2y_3, \\ x_3 = 4y_1+y_2+5y_3. \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = -3z_1+z_2, \\ y_2 = 2z_1+z_3, \\ y_3 = -z_2+3z_3. \end{cases}$$

利用矩阵乘法，求从 z_1,z_2,z_3 到 x_1,x_2,x_3 的线性变换.

8. 求与下列矩阵可交换的全体矩阵：

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$；　　（2）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$。

9. 证明：

（1）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵，则 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$ 也是对称阵；

（2）若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶对称阵，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$， $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$ 也是对称阵.

10. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶对称阵，证明 $\boldsymbol{AB}$ 是对称阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

11. （若 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}$ 称为反对称阵）对于任意的 n 阶矩阵 A，证明：

（1） $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是对称阵，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是反对称阵；

（2） $\boldsymbol{A}$ 可表示为对称矩阵和反对称矩阵之和.

12. 判断下列命题是否正确并说明理由：

（1）设 $\boldsymbol{A}$ 、$\boldsymbol{B}$ 、$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶方阵，则行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BA}|=0$ 的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}|=0$；

（2）设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times 1$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $1\times n$ 矩阵，则 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$；

（3）设 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵，若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$，则 $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|$；

（4）若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，则 $|\boldsymbol{A}|=\pm 1$.

13. 利用伴随矩阵法求下列矩阵的逆矩阵：

（1）$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$；　　（2）$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 5 & -4 & 1\end{pmatrix}$；　　（4）$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

14. 利用逆矩阵，求解下列方程组：

（1）$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=1\\ 2x_1+2x_2+5x_3=2\\ 3x_1+5x_2+x_3=3\end{cases}$；　　（2）$\begin{cases}x_1-x_2-x_3=2\\ 2x_1-x_2-3x_3=1\\ 3x_1+2x_2-5x_3=0\end{cases}$.

15. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{X}$，求 $\boldsymbol{X}$.

16. 证明下列命题：

（1）若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是同阶可逆矩阵，则 $(\boldsymbol{AB})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$；

（2）若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆且 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*$；

（3）若 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 $|\boldsymbol{A}^*|=0$；

（4）$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

17. 解下列矩阵方程：

（1）$\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}$；

（2）$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -4 & 3\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$.

18. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&-1\\0&1&4\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&6\\1&1\\2&-3\end{pmatrix}$，且满足 $\boldsymbol{AX}=2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

19. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 、 $\boldsymbol{B}$ 、 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 均可逆，证明：

$$(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}.$$

20. 用矩阵分块法求 $\boldsymbol{AB}$.

（1） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&2&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&2&0&0\\4&5&0&0\\0&0&4&1\\0&0&6&2\end{pmatrix}$；

（2） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1&2&-1\\0&1&3&2&-2\\-1&4&0&0&0\\0&2&0&0&0\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-3&0&0\\0&-2&0&0\\1&0&5&-1\\1&1&0&2\\0&0&3&0\end{pmatrix}$.

21. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&4&0&0\\4&-3&0&0\\0&0&2&0\\0&0&2&2\end{pmatrix}$，$k$ 为正整数，求 $\left|\boldsymbol{A}^8\right|,\boldsymbol{A}^4$.

22. 用矩阵分块的方法，证明下列矩阵可逆，并求其逆矩阵.

（1） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&0&0\\2&1&0&0\\0&0&2&5\\0&0&4&1\end{pmatrix}$；　（2） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta&0&0&0\\-\sin\theta&\cos\theta&0&0&0\\0&0&1&a&b\\0&0&0&1&a\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$.

23. 用初等变换将下列矩阵化为等价标准形.

（1） $\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\2&0&3&1\\3&0&4&-3\end{pmatrix}$；　（2） $\begin{pmatrix}1&-1&3&-4&3\\3&-3&5&-4&1\\2&-2&3&-2&0\\3&-3&4&-2&-1\end{pmatrix}$.

24. 用初等变换求下列矩阵的逆矩阵：

（1） $\begin{pmatrix}3&2&1\\3&1&5\\3&2&3\end{pmatrix}$；　（2） $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$.

25. 求下列矩阵的秩：

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$；　　（2）$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$；　　（4）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

26. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ 的秩 $R(A)=3$，则 $k=$_____.

26. 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}(1 \quad -1 \quad 0)\text{；}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & a & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

若 $R(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B})=2$，求 a.

27. 求 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{pmatrix}$ 的秩. [讨论参数]

28. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$，则

$$R(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=n.$$

29. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，证明

$$R(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases} n, & r(\boldsymbol{A})=n, \\ 1, & r(\boldsymbol{A})=n-1, \\ 0, & r(\boldsymbol{A})<n-1. \end{cases}$$

综合习题二

一、选择题

1. 初等矩阵（　　）.

（A）相乘仍为初等阵；（B）相加仍为初等阵；（C）都可逆；（D）以上都不对.

2. 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 \\ a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & a_4b_4 \end{pmatrix}，\ a_i \neq 0，\ b_i \neq 0 \quad (i=1,2,3,4)，$$

则 $r(\boldsymbol{A})=$（　　）.

（A）1；　（B）2；　（C）3；　（D）4.

3. $(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}+[(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}]^{-1}=$（　　）.

（A）$\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；　（B）$\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；　（C）$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}$；　（D）$\boldsymbol{C}$.

4. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，满足等式 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则必有（　　）.

（A）$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或者 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$；　（B）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$；

（C）$|\boldsymbol{A}|=0$ 或者 $|\boldsymbol{B}|=0$；　（D）$|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0$.

5. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $n(n\geq 2)$ 阶方阵，则必有（　　）.

（A）$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$；　（B）$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$；

（C）$\big||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}\big|=\big||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}\big|$；　（D）$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|$.

6. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 满足关系式 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵，则必有（　　）.

（A）$\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{E}$；　（B）$\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{E}$；　（C）$\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{E}$；　（D）$\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{E}$.

7. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} & & \boldsymbol{A}_1 \\ & \boldsymbol{A}_2 & \\ \boldsymbol{A}_3 & & \end{pmatrix}$ 为 n 阶方阵, 其中 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3$ 分别为 n_1,n_2,n_3 阶方阵，且

$n_1+n_2+n_3=n$，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$（　　）.

（A）$\begin{pmatrix} & & \boldsymbol{A}_1^{-1} \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & \\ \boldsymbol{A}_3^{-1} & & \end{pmatrix}$；　（B）$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^{-1} & & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & \\ & & \boldsymbol{A}_3^{-1} \end{pmatrix}$；

（C）$\begin{pmatrix} & & A_3^{-1} \\ & A_2^{-1} & \\ A_1^{-1} & & \end{pmatrix}$；（D）$\begin{pmatrix} A_3^{-1} & & \\ & A_2^{-1} & \\ & & A_1^{-1} \end{pmatrix}$.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}| = a \neq 0$，而 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^*|$ 等于（　　）.

（A）a；（B）$1/a$；（C）a^{n-1}；（D）a^n.

9. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 $n(n \geq 2)$ 阶方阵，则必有（　　）.

（A）若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆；（B）若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 可逆，则 $\boldsymbol{AB}$ 可逆；

（C）若 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 可逆；（D）若 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 可逆.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 阶矩阵，$\boldsymbol{C}$ 为 n 阶可逆矩阵，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，矩阵 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{AC}$ 的秩为 r_1，则（　　）.

（A）$r > r_1$；（B）$r < r_1$；（C）$r = r_1$；（D）r, r_1 的关系依 $\boldsymbol{C}$ 而定.

二、填空题

1. $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均是 n 阶对称矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 是对称矩阵的充要条件是________.

2. $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均是 n 阶方阵，则积 $\boldsymbol{AB}$ 是可逆矩阵的充要条件是________.

3. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等行变换后变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ ________.

4. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1} =$______，$(\boldsymbol{A}^*)^{-1} =$________.

5. 若 4×4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}| = 3$, $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^*| =$_______.

6. $\boldsymbol{A}$ 为 $n \times n$ 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1} =$________.

7. 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有一个 r 阶子式 $D \neq 0$，且 $\boldsymbol{A}$ 中所有的 $r+1$ 阶子式等于 0，则 $r(\boldsymbol{A}) =$__________.

8. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则逆矩阵 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=$_______.

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为可逆矩阵，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$为分块矩阵，则 $\boldsymbol{X}^{-1}=$________ .

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶方阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=a,|\boldsymbol{B}|=b,\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$，则

$|\boldsymbol{C}|=$_______.

11. 设 $\boldsymbol{A}=(1\quad 2\quad 3),\boldsymbol{B}=(1\quad 1\quad 1)$，则 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{100}=$________.

12. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 为3阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $t=$________.

三、计算题

1. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$，$A_{ij}$ 是 a_{ij} 的代数余子式，且 $A_{ij}=a_{ij}(i,j=1,2,3)$，$a_{11}\neq0$，求$|\boldsymbol{A}|$.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，且$|\boldsymbol{A}|<0$，求$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$.

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&6&0\\0&2&3\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&2&0\\-3&4&0\\2&0&1\end{pmatrix}$，求$\left|9(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^4\right|$.

4. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足如下关系式 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

5. 设 4 阶矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix},$$

且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足关系式 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 4 阶单位矩阵，$\boldsymbol{C}^{-1}$表示 $\boldsymbol{C}$ 的逆矩阵，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{C}$ 的转置矩阵，将上述关系式化简，并求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

6. 已知 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$，其中

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{A}^5$.

7. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵，试求出矩阵 $\boldsymbol{X}$.

8. 若3阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵为 $\boldsymbol{A}^*$，且 $|\boldsymbol{A}|=\dfrac{1}{2}$，求 $\left|(3\boldsymbol{A})^{-1}-2\boldsymbol{A}^*\right|$ 的值.

四、证明题

1. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&a_1b_3\\a_2b_1&a_2b_2&a_2b_3\\a_3b_1&a_3b_2&a_3b_3\end{pmatrix}$，证明 $\boldsymbol{A}^2=l\boldsymbol{A}$，并求 l.

2. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足条件 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$.

（1）证明 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 为可逆矩阵，其中 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵；

（2）已知 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-3&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

3. 已知对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，存在自然数 k，使得 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$. 试证明矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，写出其逆矩阵的表达式.（$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位方阵）

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，证明存在一可逆矩阵 $\boldsymbol{B}$ 及一幂等矩阵 $\boldsymbol{C}$（即 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^2$），使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 行对换后得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，证明 $\boldsymbol{B}$ 可逆，并求 $\boldsymbol{AB}^{-1}$.

6. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1&&&\\&a_2&&\\&&\ddots&\\&&&a_n\end{pmatrix}$，其中 $a_i\neq a_j(i\neq j;i,j=1,2,\cdots.n)$. 证明：与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的只能是对角矩阵.