

行列式

定义

逆序数定义

行列式定义

行列式性质

(1) 行列互换，行列式的值不变。

(2) 两行（列）互换，行列式变号。

(3) 某行（列）乘以k，行列式变为k倍。

(4) 某行（列）加上另一行（列）的k倍，行列式不变。

(5) 行列式中有两行（列）完全相同，则行列式的值为0。

(6) 行列式中有两行（列）成比例，则行列式的值为0。

(7) 行列式中有一行（列）全为0，则行列式的值为0。

重要行列式

上下三角主对角

上下三角副对角

一杠一星 两杠一星

爪形（箭头）

弓形

么字形

同行（列）同数

行（列）和相等

ab型（特殊化）

范德蒙

X形

三对角行列式（难）

拉普拉斯

余子式与代数余子式定义

按行（列）展开定理

展开定理！！！！

行列式公式！！！！

设A,B为n阶矩阵，则

(1) $|kA| = k^n |A|$;

(2) $|AB| = |A||B|$;

(3) $|A^T| = |A|$;

(4) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$;

(5) $|A| = |A|^T$;

(6) 设A的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ，则 $|A| = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$;

(7) 若A与B相似，则 $|A| = |B|$ 。

行列式求法

(1) 数字行列式：利用重要行列式或展开定理；

(2) 抽象行列式：利用行列式的性质或公式。

Cramer法则（不重要）

设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

系数矩阵的行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组有唯一解 $x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}$ ，其中

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & b_i & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i-1} & b_i & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & b_i & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i=1,2,\dots,n)$$

推论：齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

只有零解 $\Leftrightarrow D \neq 0$ ；有非零解 $\Leftrightarrow D = 0$ 。

代数余子式求和

法一：构造的余子式求和

法二：展开定理

法三：构造矩阵

| | |
|-----------------|-------|
| ▼ 行列式 | |
| • 定义 | |
| • 行列式性质 | (2) 3 |
| ▼ 重要行列式 | |
| • 上下三角主对角 | (2) 4 |
| • 上下三角副对角 | (2) 4 |
| • 一杠一星 两杠一星 | |
| • 爪形（箭头） | |
| • 弓形 | |
| • 么字形 | |
| • 同行（列）同数 | |
| ▼ 行（列）和相等 | |
| • ab型（特殊化） | (2) 4 |
| • 范德蒙 | (2) 5 |
| • X形 | |
| • 三对角行列式（难） | (1) 3 |
| • 拉普拉斯 | (2) 5 |
| ▼ 展开定理！！！！ | |
| • 余子式与代数余子式定义 | (2) 6 |
| • 按行（列）展开定理2 | (2) 7 |
| • 行列式公式！！！！ | (2) 8 |
| • 行列式求法 | (2) 8 |
| • Cramer法则（不重要） | (2) 9 |
| • 代数余子式求和★★★★ | |