2001 年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$______.

(2) 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$ 所确定,则曲线 $y=f(x)$ 在点$(0,1)$处的法线方程为______.

(3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 x\,dx=$______.

(4) 过点 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ 且满足关系式 $y'\arcsin x+\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}=1$ 的曲线方程为______.

(5) 设方程组 $\begin{pmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ 有无穷多解,则 $a=$______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于(　　)

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) $\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1.\end{cases}$

(2) 设当 $x\to 0$ 时,$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小,$x\sin x^n$ 是比 $e^{x^2}-1$ 高阶的无穷小,则正整数 n 等于(　　)

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

(3) 曲线 $y=(x-1)^2(x-3)^2$ 的拐点个数为(　　)

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

(4) 已知函数 $f(x)$ 在区间 $(1-\delta,1+\delta)$ 内具有二阶导数,$f'(x)$ 严格单调减少,且 $f(1)=f'(1)=1$,则(　　)

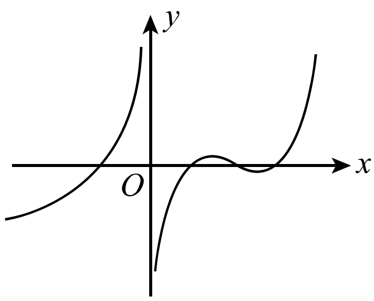
(A) 在 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内均有 $f(x)<x$.

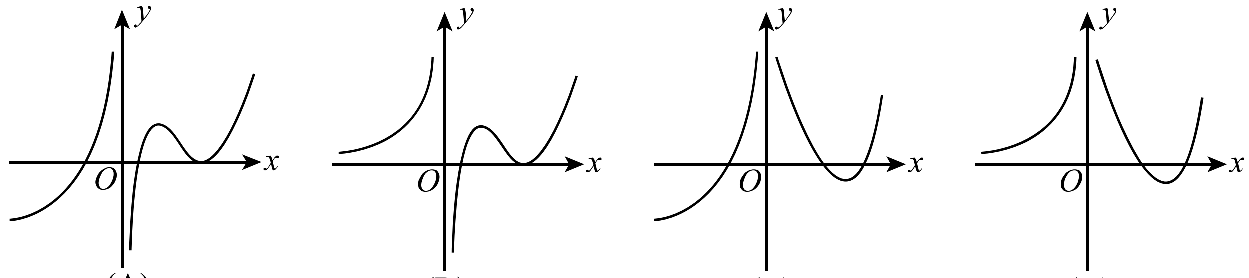
(B) 在 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内均有 $f(x)>x$.

(C) 在 $(1-\delta,1)$ 内,$f(x)<x$,在 $(1,1+\delta)$ 内,$f(x)>x$.

(D) 在 $(1-\delta,1)$ 内,$f(x)>x$,在 $(1,1+\delta)$ 内,$f(x)<x$.

(5) 已知函数 $y=f(x)$ 在其定义域内可导,它的图形如右图所示,则其导函数 $y=f'(x)$ 的图形为(　　)





(A) (B) (C) (D)

三、(本题满分 6 分)

求$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

四、(本题满分 7 分)

求极限$\lim\limits_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$,记此极限为$f(x)$,求函数$f(x)$的间断点并指出其类型.

五、(本题满分 7 分)

设$\rho=\rho(x)$是抛物线$y=\sqrt{x}$上任一点$M(x,y)(x\geqslant 1)$处的曲率半径,$s=s(x)$是该抛物线上介于点$A(1,1)$与M之间的弧长,计算$3\rho\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}s^2}-\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right)^2$的值.

(在直角坐标系下曲率公式为$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$.)

六、(本题满分 7 分)

设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上可导,$f(0)=0$,且其反函数为$g(x)$.若$\int_0^{f(x)}g(t)\mathrm{d}t=x^2\mathrm{e}^x$,求$f(x)$.

七、(本题满分 7 分)

设函数$f(x)$,$g(x)$满足$f'(x)=g(x)$,$g'(x)=2\mathrm{e}^x-f(x)$,且$f(0)=0$,$g(0)=2$,求$\int_0^{\pi}\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]\mathrm{d}x$.

八、(本题满分 9 分)

设L是一条平面曲线,其上任意一点$P(x,y)(x>0)$到坐标原点的距离恒等于该点处的切线在y轴上的截距,且L经过点$\left(\frac{1}{2},0\right)$.

(1)试求曲线L的方程;

(2)求L位于第一象限部分的一条切线,使该切线与L以及两坐标轴所围图形的面积最小.

九、(本题满分 7 分)

一个半球体状的雪堆,其体积融化的速率与半球面面积S成正比,比例常数$K>0$.假设在融化过程

中雪堆始终保持半球体状,已知半径为 r_0 的雪堆在开始融化的 3 小时内,融化了其体积的$\frac{7}{8}$,问雪堆全部融化需要多少小时?

十、(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ $(a>0)$ 上具有二阶连续导数, $f(0)=0$.

(1) 写出 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式;

(2) 证明在 $[-a,a]$ 上至少存在一点 η,使 $a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x$.

十一、(本题满分 6 分)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$,且矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AXA}+\boldsymbol{BXB}=\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{BXA}+\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵,求 $\boldsymbol{X}$.

十二、(本题满分 6 分)

已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,若 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+t\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+t\boldsymbol{\alpha}_4$, $\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4+t\boldsymbol{\alpha}_1$,讨论实数 t 满足什么关系时, $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.