1993 年全国硕士研究生招生考试试题

(试卷 Ⅲ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x =$ ______.

(2) 函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin(x^2+y^2)+e^x-xy^2=0$ 所确定,则$\dfrac{dy}{dx}=$ ______.

(3) 设 $F(x)=\int_1^x\left(2-\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)dt\ (x>0)$,则函数 $F(x)$ 的单调减少区间是______.

(4) $\int\dfrac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}dx=$ ______.

(5) 已知曲线 $y=f(x)$ 过点 $\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$,且其上任一点 (x,y) 处的切线斜率为 $x\ln(1+x^2)$,则 $f(x)$ $=$ ______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 当 $x\to 0$ 时,变量$\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 是(　　)

(A) 无穷小.　　(B) 无穷大.

(C) 有界的,但不是无穷小.　　(D) 无界的,但不是无穷大.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2-1|}{x-1}, & x\neq 1,\\ 2, & x=1,\end{cases}$ 则在点 $x=1$ 处函数 $f(x)$(　　)

(A) 不连续.　　(B) 连续,但不可导.

(C) 可导,但导数不连续.　　(D) 可导,且导数连续.

(3) 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$ 设 $F(x)=\int_1^x f(t)dt\ (0\leqslant x\leqslant 2)$,则 $F(x)$ 为(　　)

(A) $\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3, & 0\leqslant x<1,\\ x, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{3}, & 0\leqslant x<1,\\ x, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

(C) $\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3, & 0\leqslant x<1,\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{3}, & 0\leqslant x<1,\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

(4) 设常数 $k>0$,函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内的零点个数为(　　)

(A)3.　　(B)2.　　(C)1.　　(D)0.

(5) 若 $f(x)=-f(-x)$,在 $(0,+\infty)$ 内 $f'(x)>0$, $f''(x)>0$,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内(　　)

(A) $f'(x)<0$, $f''(x)<0$.　　(B) $f'(x)<0$, $f''(x)>0$.

(C) $f'(x)>0$, $f''(x)<0$.　　(D) $f'(x)>0$, $f''(x)>0$.

三、(本题共 5 小题,每小题 5 分,满分 25 分)

(1) 设 $y = \sin[f(x^2)]$,其中 f 具有二阶导数,求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(2) 求 $\lim\limits_{x\to-\infty} x(\sqrt{x^2+100}+x)$.

(3) 求$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x}dx$.

(4) 求$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3}dx$.

(5) 求微分方程$(x^2-1)dy+(2xy-\cos x)dx=0$满足初值条件$y(0)=1$的特解.

四、(本题满分 9 分)

设二阶常系数线性微分方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma e^x$ 的一个特解为 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$,试确定常数 α,β,γ,并求该方程的通解.

五、(本题满分 9 分)

设平面图形 A 由 $x^2+y^2\leqslant 2x$ 与 $y\geqslant x$ 所确定,求图形 A 绕直线 $x=2$ 旋转一周所得旋转体的体积.

六、(本题满分 9 分)

作半径为 r 的球的外切正圆锥,问此圆锥的高 h 为何值时,其体积 V 最小,并求出该最小值.

七、(本题满分 9 分)

设 $x>0$,常数 $a>e$. 证明:$(a+x)^a<a^{a+x}$.

八、(本题满分 9 分)

设 $f'(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续,且 $f(0)=0$,证明:$\left|\displaystyle\int_0^a f(x)dx\right|\leqslant\dfrac{Ma^2}{2}$,其中 $M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant a}|f'(x)|$.