2005年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分)

(1) 设 $y=(1+\sin x)^x$,则 $\mathrm{d}y\Big|_{x=\pi}=$ ______.

(2) 曲线 $y=\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为______.

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}=$ ______.

(4) 微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\dfrac{1}{9}$ 的解为______.

(5) 当 $x\to 0$ 时,$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小量,则 $k=$ ______.

(6) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为3维列向量,记矩阵

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\quad \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3).$$

如果 $|\boldsymbol{A}|=1$,那么 $|\boldsymbol{B}|=$ ______.

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分)

(7) 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内(　　)

(A) 处处可导.　　(B) 恰有一个不可导点.

(C) 恰有两个不可导点.　　(D) 至少有三个不可导点.

(8) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数,"$M\Leftrightarrow N$"表示"M 的充分必要条件是 N",则必有(　　)

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数.

(9) 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^2+2t,\\ y=\ln(1+t)\end{cases}$ 确定,则曲线 $y=y(x)$ 在 $x=3$ 处的法线与 x 轴交点的横坐标是(　　)

(A) $\dfrac{1}{8}\ln 2+3$.　　(B) $-\dfrac{1}{8}\ln 2+3$.　　(C) $-8\ln 2+3$.　　(D) $8\ln 2+3$.

(10) 设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$,$f(x)$ 为 D 上的正值连续函数,a,b 为常数,则 $\displaystyle\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma=$ (　　)

(A) $ab\pi$.　　(B) $\dfrac{ab}{2}\pi$.　　(C) $(a+b)\pi$.　　(D) $\dfrac{a+b}{2}\pi$.

(11) 设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\displaystyle\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)\mathrm{d}t$,其中函数 φ 具有二阶导数,ψ 具有一阶导数,则必有(　　)

(A) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　(B) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　(C) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　(D) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

(12) 设函数 $f(x) = \dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}} - 1}$，则(　　)

(A) $x = 0, x = 1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点.

(B) $x = 0, x = 1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(C) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，$x = 1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(D) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，$x = 1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

(13) 设 λ_1, λ_2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2)$ 线性无关的充分必要条件是(　　)

(A) $\lambda_1 \neq 0$.　(B) $\lambda_2 \neq 0$.　(C) $\lambda_1 = 0$.　(D) $\lambda_2 = 0$.

(14) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n \geqslant 2)$ 阶可逆矩阵，交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}^*, \boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，则(　　)

(A) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得 $\boldsymbol{B}^*$.

(B) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得 $\boldsymbol{B}^*$.

(C) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得 $-\boldsymbol{B}^*$.

(D) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得 $-\boldsymbol{B}^*$.

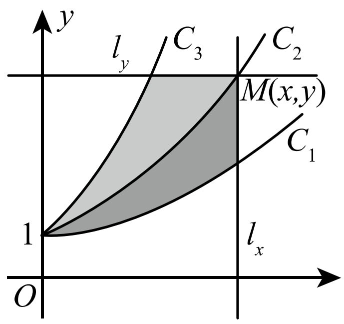
三、解答题(本题共 9 小题，满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0) \neq 0$，求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x (x-t)f(t)\,dt}{x\int_0^x f(x-t)\,dt}$.

(16)(本题满分 11 分)

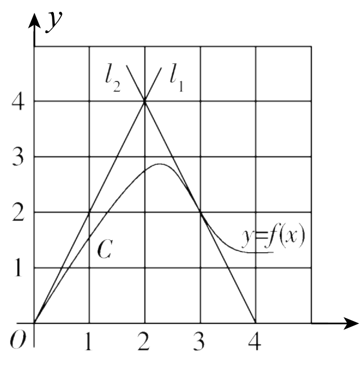
如图，C_1 和 C_2 分别是 $y = \dfrac{1}{2}(1 + e^x)$ 和 $y = e^x$ 的图像，过点(0,1)的曲线 C_3 是一单调增函数的图像，过 C_2 上任一点 $M(x,y)$ 分别作垂直于 x 轴和 y 轴的直线 l_x 和 l_y. 记 C_1, C_2 与 l_x 所围图形的面积为 $S_1(x)$；C_2, C_3 与 l_y 所围图形的面积为 $S_2(y)$. 如果总有 $S_1(x) = S_2(y)$，求曲线 C_3 的方程 $x = \varphi(y)$.



(17)(本题满分 11 分)

如图，曲线 C 的方程为 $y = f(x)$，点(3,2)是它的一个拐点，直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点(0,0)与(3,2)处的切线，其交点为(2,4). 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数，计算定积分

$$\int_0^3 (x^2 + x) f'''(x)\,dx.$$



(18)(本题满分12分)

用变量代换 $x=\cos t(0<t<\pi)$ 化简微分方程 $(1-x^2)y''-xy'+y=0$,并求其满足 $y\Big|_{x=0}=1$, $y'\Big|_{x=0}=2$ 的特解.

(19)(本题满分12分)

已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=0$, $f(1)=1$. 证明:

(Ⅰ)存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f(\xi)=1-\xi$;

(Ⅱ)存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$,使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

(20)(本题满分10分)

已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y$,并且 $f(1,1)=2$. 求 $f(x,y)$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+\dfrac{y^2}{4}\leqslant 1\right\}$ 上的最大值和最小值.

(21)(本题满分9分)

计算二重积分 $\iint\limits_D |x^2+y^2-1|\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

(22)(本题满分9分)

确定常数 a,使向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,a)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(a,1,1)^{\mathrm{T}}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,a)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2=(-2,a,4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_3=(-2,a,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示,但向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(23)(本题满分9分)

已知3阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行是 (a,b,c), a,b,c 不全为零,矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{pmatrix}$($k$ 为常数),且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解.