2007 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 10 小题,每小题 4 分,满分 40 分)

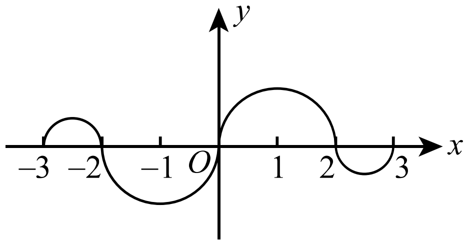
(1) 当 $x \to 0^+$ 时,与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是(　　)

(A) $1 - e^{\sqrt{x}}$.　(B) $\ln \dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$.　(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$.　(D) $1 - \cos\sqrt{x}$.

(2) 函数 $f(x) = \dfrac{(e^{\frac{1}{x}} + e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的第一类间断点是 $x =$ (　　)

(A) 0.　(B) 1.　(C) $-\dfrac{\pi}{2}$.　(D) $\dfrac{\pi}{2}$.

(3) 如图,连续函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-3,-2]$,$[2,3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周,在区间 $[-2,0]$,$[0,2]$ 上的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周. 设 $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$,则下列结论正确的是(　　)



(A) $F(3) = -\dfrac{3}{4}F(-2)$.　(B) $F(3) = \dfrac{5}{4}F(2)$.

(C) $F(-3) = \dfrac{3}{4}F(2)$.　(D) $F(-3) = -\dfrac{5}{4}F(-2)$.

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续,下列命题错误的是(　　)

(A) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f(0) = 0$.　(B) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在,则 $f(0) = 0$.

(C) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在.　(D) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在.

(5) 曲线 $y = \dfrac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 渐近线的条数为(　　)

(A) 0.　(B) 1.　(C) 2.　(D) 3.

(6) 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内具有二阶导数,且 $f''(x) > 0$,令 $u_n = f(n)$ $(n = 1,2,\cdots)$,则下列结论正确的是(　　)

(A) 若 $u_1 > u_2$,则 $\{u_n\}$ 必收敛.　(B) 若 $u_1 > u_2$,则 $\{u_n\}$ 必发散.

(C) 若 $u_1 < u_2$,则 $\{u_n\}$ 必收敛.　(D) 若 $u_1 < u_2$,则 $\{u_n\}$ 必发散.

(7) 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的一个充分条件是(　　)

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y) - f(0,0)] = 0$.

(B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$,且 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0$.

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y) - f(0,0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$.

(D) $\lim\limits_{x\to0}[f'_x(x,0)-f'_x(0,0)]=0$,且$\lim\limits_{y\to0}[f'_y(0,y)-f'_y(0,0)]=0$.

(8) 设函数$f(x,y)$连续,则二次积分$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}f(x,y)\mathrm{d}y$等于(　　)

(A) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(B) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x$.

(C) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(D) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$.

(9) 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关,则下列向量组线性相关的是(　　)

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1$.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$.

(10) 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,则$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$(　　)

(A) 合同且相似.　　(B) 合同,但不相似.

(C) 不合同,但相似.　　(D) 既不合同,也不相似.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分)

(11) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x^3}=$______.

(12) 曲线$\begin{cases}x=\cos t+\cos^2 t,\\y=1+\sin t\end{cases}$上对应于$t=\dfrac{\pi}{4}$的点处的法线斜率为______.

(13) 设函数$y=\dfrac{1}{2x+3}$,则$y^{(n)}(0)=$______.

(14) 二阶常系数非齐次线性微分方程$y''-4y'+3y=2\mathrm{e}^{2x}$的通解为______.

(15) 设$f(u,v)$是二元可微函数,$z=f\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{x}{y}\right)$,则$x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$______.

(16) 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,则$\boldsymbol{A}^3$的秩为______.

三、解答题(本题共 8 小题,满分 86 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(17)(本题满分 10 分)

设$f(x)$是区间$\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$上的单调、可导函数,且满足

$$\int_0^{f(x)}f^{-1}(t)\mathrm{d}t=\int_0^x t\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t,$$

其中f^{-1}是f的反函数,求$f(x)$.

(18)(本题满分 11 分)

设D是位于曲线$y=\sqrt{x}a^{-\frac{x}{2a}}(a>1,0\leqslant x<+\infty)$下方、$x$轴上方的无界区域.

(Ⅰ) 求区域D绕x轴旋转一周所成旋转体的体积$V(a)$;

（Ⅱ）当 a 为何值时，$V(a)$ 最小？并求此最小值.

（19）（本题满分 10 分）

求微分方程 $y''(x+y'^2)=y'$ 满足初始条件 $y(1)=y'(1)=1$ 的特解.

（20）（本题满分 11 分）

已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数，且 $f'(0)=1$，函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-xe^{y-1}=1$ 所确定. 设 $z=f(\ln y-\sin x)$，求 $\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$，$\left.\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

（21）（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值，$f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

（22）（本题满分 11 分）

设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2, & |x|+|y|\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1<|x|+|y|\leqslant 2,\end{cases}$$

计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 2\}$.

（23）（本题满分 11 分）

设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+2x_2+ax_3=0,\\ x_1+4x_2+a^2x_3=0,\end{cases}\qquad ①$$

与方程组

$$x_1+2x_2+x_3=a-1 \qquad ②$$

有公共解，求 a 的值及所有公共解.

（24）（本题满分 11 分）

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=-2$，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1 的一个特征向量. 记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

（Ⅰ）验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量，并求 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值与特征向量；

（Ⅱ）求矩阵 $\boldsymbol{B}$.