1998 年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$ ______.

(2) 曲线 $y=-x^3+x^2+2x$ 与 x 轴所围成的图形的面积 $A=$ ______.

(3) $\displaystyle\int\frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=$ ______.

(4) 设 $f(x)$ 连续,则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^x tf(x^2-t^2)\,\mathrm{d}t=$ ______.

(5) 曲线 $y=x\ln\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x}\right)(x>0)$ 的渐近线方程为______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,则下列断言正确的是(   )

(A) 若 $\{x_n\}$ 发散,则 $\{y_n\}$ 必发散.

(B) 若 $\{x_n\}$ 无界,则 $\{y_n\}$ 必有界.

(C) 若 $\{x_n\}$ 有界,则 $\{y_n\}$ 必为无穷小.

(D) 若 $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ 为无穷小,则 $\{y_n\}$ 必为无穷小.

(2) 函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 的不可导点的个数为(   )

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

(3) 已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$,其中 α 是比 $\Delta x(\Delta x\to 0)$ 高阶的无穷小,且 $y(0)=\pi$,则 $y(1)=$(   )

(A) $\pi\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$.　　(B) 2π.　　(C) π.　　(D) $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$.

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内连续,且 $f(a)$ 为其极大值,则存在 $\delta>0$,当 $x\in(a-\delta,a+\delta)$ 时,必有(   )

(A) $(x-a)[f(x)-f(a)]\geqslant 0$.　　(B) $(x-a)[f(x)-f(a)]\leqslant 0$.

(C) $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\geqslant 0(x\neq a)$.　　(D) $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\leqslant 0(x\neq a)$.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 是任一 $n(n\geqslant 3)$ 阶方阵,$\boldsymbol{A}^*$ 是其伴随矩阵,又 k 为常数,且 $k\neq 0,\pm 1$,则必有 $(k\boldsymbol{A})^*=$(   )

(A) $k\boldsymbol{A}^*$.　　(B) $k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$.　　(C) $k^n\boldsymbol{A}^*$.　　(D) $k^{-1}\boldsymbol{A}^*$.

三、(本题满分 5 分)

求函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内的间断点,并判断其类型.

四、(本题满分 5 分)

确定常数 a,b,c 的值,使$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x \dfrac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c(c\neq 0)$.

五、(本题满分 5 分)

利用代换 $y=\dfrac{u}{\cos x}$ 将方程

$$y''\cos x-2y'\sin x+3y\cos x=\mathrm{e}^x$$

化简,并求出原方程的通解.

六、(本题满分 6 分)

计算积分$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}}$.

七、(本题满分 6 分)

从船上向海中沉放某种探测仪器,按探测要求,需确定仪器的下沉深度 y(从海平面算起)与下沉速度 v 之间的函数关系. 设仪器在重力作用下,从海平面由静止开始垂直下沉,在下沉过程中还受到阻力和浮力的作用. 设仪器的质量为 m,体积为 B,海水比重为 ρ,仪器所受的阻力与下沉速度成正比,比例系数为 $k(k>0)$. 试建立 y 与 v 所满足的微分方程,并求出函数关系式 $y=y(v)$.

八、(本题满分 8 分)

设 $y=f(x)$ 是区间$[0,1]$上的任一非负连续函数.

(1) 试证存在$x_0\in(0,1)$,使得在区间$[0,x_0]$上以$f(x_0)$为高的矩形面积,等于在区间$[x_0,1]$上以 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形面积;

(2) 又设$f(x)$在区间$(0,1)$内可导,且$f'(x)>\dfrac{-2f(x)}{x}$,证明(1)中的 x_0 是惟一的.

九、(本题满分 8 分)

设有曲线 $y=\sqrt{x-1}$,过原点作其切线,求由此曲线、切线及 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体的表面积.

十、(本题满分 8 分)

设 $y=y(x)$ 是一向上凸的连续曲线,其上任意一点(x,y)处的曲率为$\dfrac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$,且此曲线上点$(0,1)$处的切线方程为 $y=x+1$,求该曲线的方程,并求函数 $y=y(x)$ 的极值.

十一、(本题满分 8 分)

设 $x\in(0,1)$,证明:

(1)$(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$;

(2) $\frac{1}{\ln 2}-1<\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}<\frac{1}{2}$.

十二、(本题满分 5 分)

设$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{-1}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 是 4 阶单位矩阵,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵,

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

求 $\boldsymbol{A}$.

十三、(本题满分 6 分)

已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,4,0,2)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,7,1,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1,a)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=(3,10,b,4)^{\mathrm{T}}$,问:

(1) a,b 取何值时,$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示?

(2) a,b 取何值时,$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示?并写出此表示式.