第一节

向量及其线性运算

一、向量的概念

二、向量的线性运算

三、空间直角坐标系

四、利用坐标作向量的线性运算

五、向量的模、方向角、投影

一、向量的概念

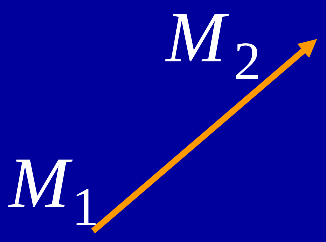
向量: 既有**大小**，又有**方向**的量称为向量 (或**矢量**).

表示法: 有向线段 $\overrightarrow{M_1 M_2}$，或 $\vec{a}$，或 $\boldsymbol{a}$.

向量的模： 向量的大小，记作 $|\overrightarrow{M_1 M_2}|$，或 $|\vec{a}|$，或 $|\boldsymbol{a}|$.

自由向量: 与起点无关的向量.

单位向量: 模为 1 的向量，记作 $\vec{e}$ 或 $\boldsymbol{e}$.

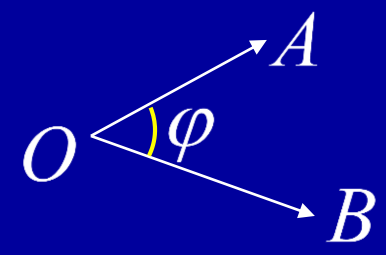


零向量: 模为 0 的向量，记作 $\vec{0}$，或 $\mathbf{0}$.

若向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 大小相等，方向相同，则称 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ **相等**，记作 $\vec{a}=\vec{b}$.

设有两非零向量 $\vec{a},\vec{b}$，任取空间一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，称 $\varphi=\angle AOB\ (0\le\varphi\le\pi)$ 为向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的**夹角**.

记作 $\widehat{(\vec{a},\vec{b})}=\varphi$ 或 $\widehat{(\vec{b},\vec{a})}=\varphi$



若向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为 0 或 π，则称 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ **平行**，记作 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$；

若向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为 $\pi/2$，称 a 与 b **垂直**. 记作 $a\perp b$.

零向量与任何向量的夹角可取 0 到 π 之间任何值.

零向量与任何向量平行或垂直.

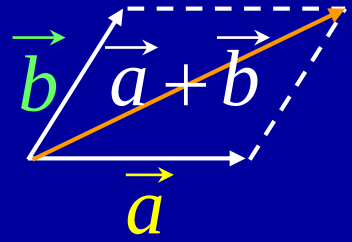
因平行向量可平移到同一直线上，故两向量平行又称两向量**共线**．

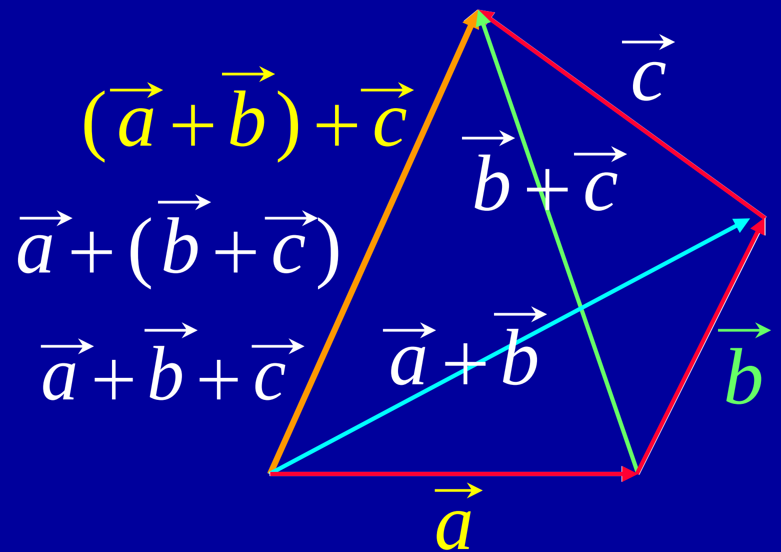
$k\,(\geq 3)$个向量把它们的起点放到同一点时，若 k 个终点和公共起点在一个平面上，称 k 个向量**共面**．

二、向量的线性运算

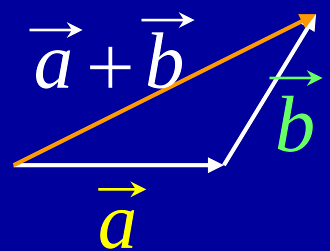
1. 向量的加减法

平行四边形法则:





三角形法则:

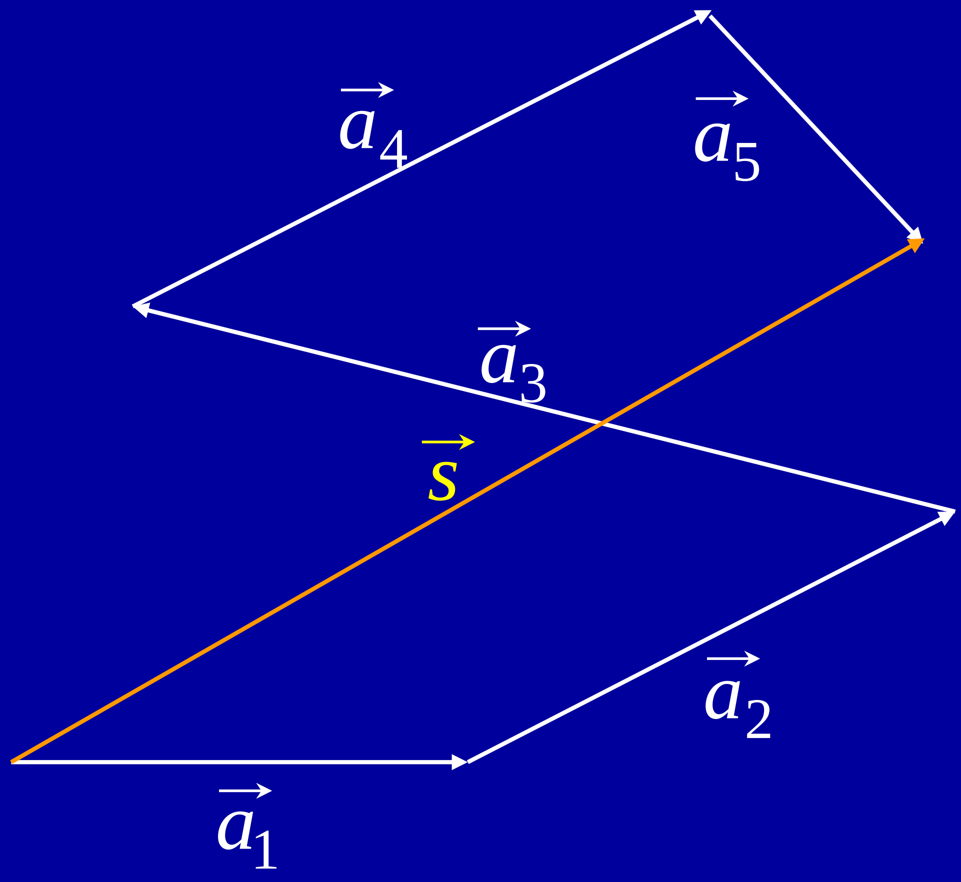


运算规律：交换律 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

结合律 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

三角形法则可推广到多个向量相加 .

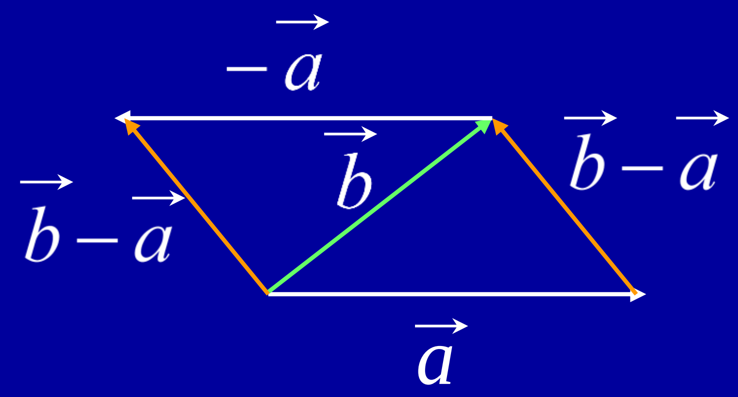
$$\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \vec{a}_5$$



2. 向量的减法

与 $\vec{a}$ 的模相同, 但方向相反的向量称为 $\vec{a}$ 的**负向量**, 记作 $-\vec{a}$; 由此，规定向量 b 与 a 的**差**

$$\vec{b}-\vec{a}=\vec{b}+(-\vec{a})$$



特别当 $\vec{b}=\vec{a}$ 时, 有

$$\vec{a}-\vec{a}=\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$$

三角不等式

$$|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}| \qquad |\vec{a}-\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$$

3. 向量与数的乘法

λ 是一个数，λ 与 $\vec{a}$ 的乘积是一个新向量，记作 $\lambda\vec{a}$.

规定： $\lambda > 0$时，$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向，$|\lambda\vec{a}| = \lambda|\vec{a}|$;

$\lambda < 0$时，$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向，$|\lambda\vec{a}| = -\lambda|\vec{a}|$;

$\lambda = 0$时，$\lambda\vec{a} = \vec{0}$.

总之: $|\lambda\vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$

运算律：结合律 $\lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a}) = \lambda\mu\vec{a}$

分配律 $(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

$\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

加法和数乘运算称为线性运算

若 $\vec{a} \neq \vec{0}$，则有单位向量 $\vec{e}_a = \dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$. **因此** $\vec{a} = |\vec{a}|\,\vec{e}_a$

定理1. 设 $\vec{a}$ 为非零向量，则

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{b} = \lambda \vec{a} \quad (\lambda\text{ 为唯一实数})$$

证: "$\longrightarrow$". 设 $\vec{a} \parallel \vec{b}$，取 $\lambda = \pm \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$，$\vec{a}$，$\vec{b}$ 同向时取正号反向时取负号，则 $\vec{b}$ 与 $\lambda\vec{a}$ 同向，且

$$|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \, |\vec{a}| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

故 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$.

再证数 λ 的唯一性．设又有 $\vec{b} = \mu \vec{a}$，则 $(\lambda - \mu)\vec{a} = \vec{0}$

而 $|\vec{a}| \neq 0$，故 $|\lambda - \mu| = 0$，即 $\lambda = \mu$.

“ $\longleftarrow$ ” 已知 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, 则

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } \lambda=0 \text{ 时, } \vec{b}=\vec{0} \\ \text{当 } \lambda>0 \text{ 时, } \vec{a}, \vec{b} \text{ 同向} \\ \text{当 } \lambda<0 \text{ 时, } \vec{a}, \vec{b} \text{ 反向}\end{array}\right\} \Longrightarrow \vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$$

上述定理为数轴的建立提供了理论依据：

数轴建立的过程：给定一个点、一个方向及单位长度，就确定了一个数轴.

由于一个单位向量即确定了方向又给定了单位长度，故给定一个点和一个单位向量就确定了一条数轴.

O P

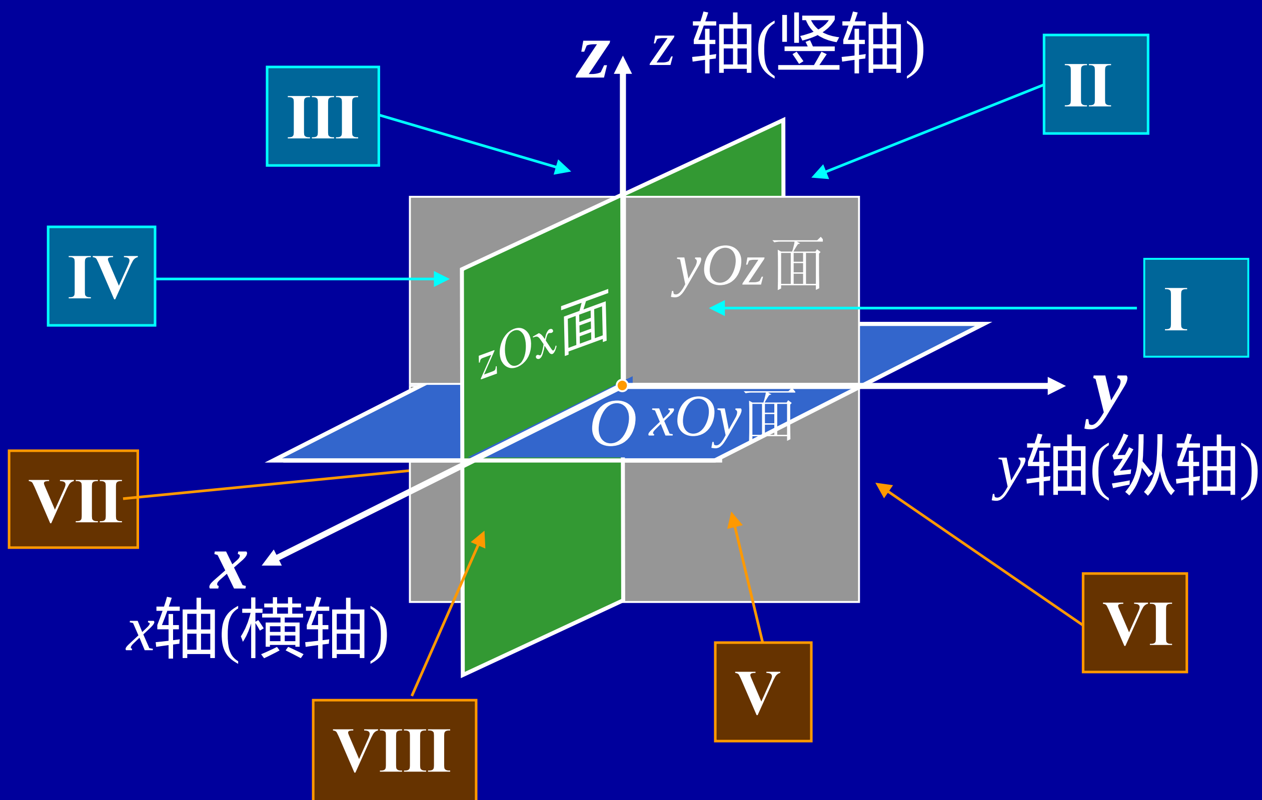
点 $P \xleftrightarrow{1--1}$ **向径** $\overrightarrow{OP}=x\vec{i} \xleftrightarrow{1--1}$ **实数** x

三、空间直角坐标系（参考系）

1. 空间直角坐标系的基本概念

过空间一定点 O，由三条两两垂直的数轴按**右手规则**组成一个**空间直角坐标系**.

- 坐标原点
- 坐标轴
- 坐标面
- 卦限(八个)



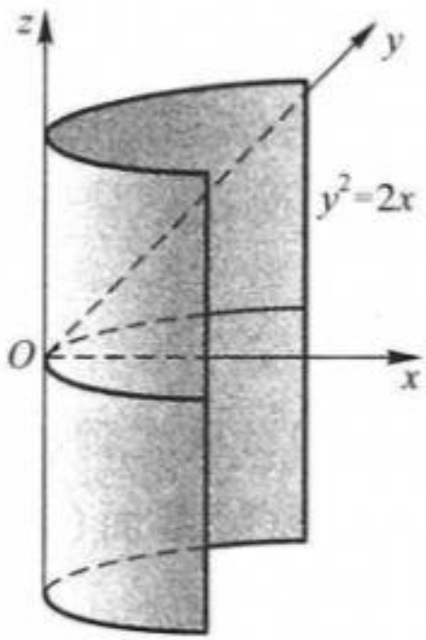


图 8－43

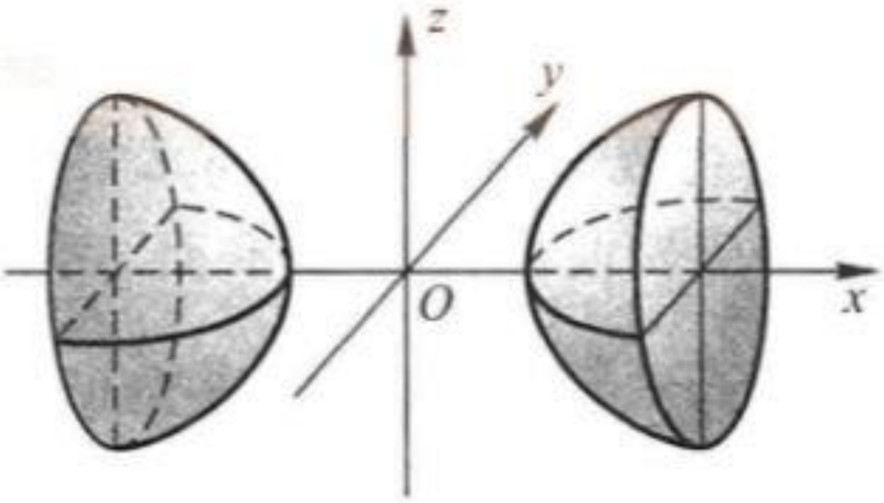


图 8－41

（课本P40页图）

2. 向量的坐标表示（向量数量化，即“解析”）

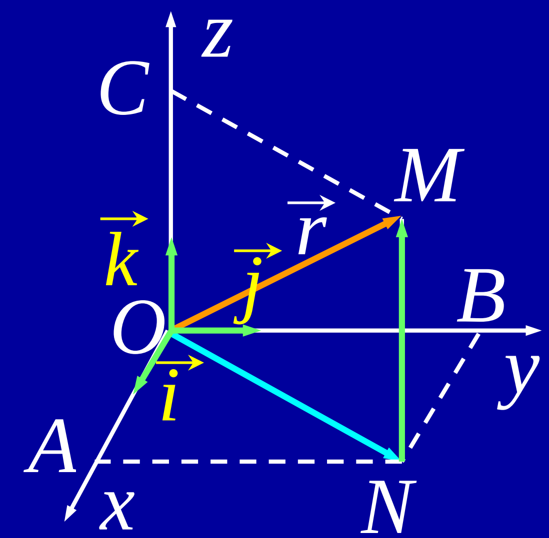
在空间直角坐标系下，任意向量 $\vec{r}$ 可用向径 $\overrightarrow{OM}$ 表示.

以 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 分别表示 x, y, z 轴上的单位向量，设点 M 的坐标为 $M(x, y, z)$，则

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{i},\quad \overrightarrow{OB} = y\vec{j},\quad \overrightarrow{OC} = z\vec{k}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \overset{\text{记}}{=} (x, y, z)$$



此式称为向量 $\vec{r}$ 的坐标分解式，$x\vec{i}, y\vec{j}, z\vec{k}$ 称为向量 $\vec{r}$ **沿三个坐标轴方向的分向量**，x, y, z 称为向量 $\vec{r}$ 的坐标.

在空间直角参考系下，既表示点 M 的**坐标**，亦表示以该点为终点，起点在原点的**向量**

在空间直角坐标系下

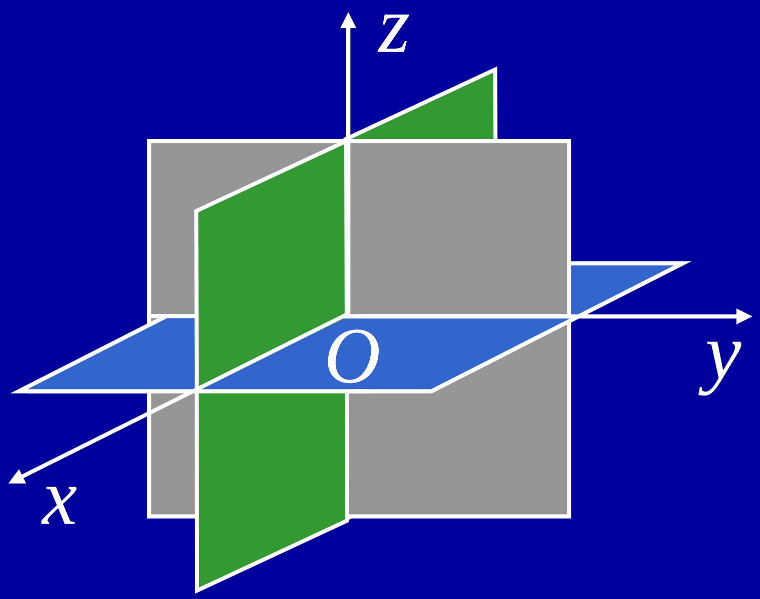
点 $M \xleftrightarrow{1--1}$ 有序数组 $(x, y, z) \xleftrightarrow{1--1}$ 向径 $\overrightarrow{OM}$

(向量 $\vec{r}$)

三元数组(x, y, z)到底表示点还是向量，题意中一般会表示出来，如：

点$M(x, y, z)$：表示点的坐标；

向量$\overrightarrow{OM} = (x, y, z)$：表示空间直角坐标系下的向量；



坐标轴：

$$x\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$y\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$z\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

坐标面：

xOy面 $\leftrightarrow z = 0$

yOz面 $\leftrightarrow x = 0$

zOx面 $\leftrightarrow y = 0$

四、利用坐标作向量的线性运算

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, λ 为实数，**则线性运算的坐标表示:**

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$$

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$$

平行向量对应坐标成比例: 当 $\vec{a}\neq\vec{0}$ 时,

$$\vec{b}//\vec{a} \Longleftrightarrow \vec{b}=\lambda\vec{a} \Longleftrightarrow \frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}$$

$$\boxed{\begin{aligned} b_x&=\lambda a_x\\ b_y&=\lambda a_y\\ b_z&=\lambda a_z\end{aligned}}$$

注意：当有至少一个分量为零时的处理.

例2. 求解以向量为未知元的线性方程组

$$\begin{cases} 5\vec{x}-3\vec{y}=\vec{a} & ① \\ 3\vec{x}-2\vec{y}=\vec{b} & ② \end{cases}$$

其中 $\vec{a}=(2,1,2), \vec{b}=(-1,1,-2)$.

解: 2×① - 3×②，得

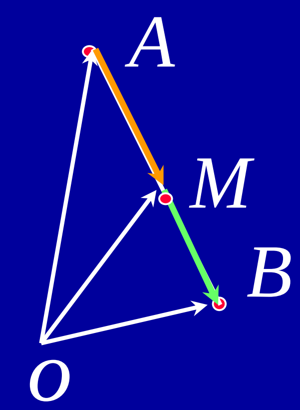
$$\vec{x}=2\vec{a}-3\vec{b}=(7,-1,10)$$

代入②得

$$\vec{y}=\frac{1}{2}(3\vec{x}-\vec{b})=(11,-2,16)$$

例3. 已知两点 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ 及实数 $\lambda \neq -1,$ 在AB所在直线上求一点 M, 使 $\overrightarrow{AM} = \lambda\, \overrightarrow{MB}$.

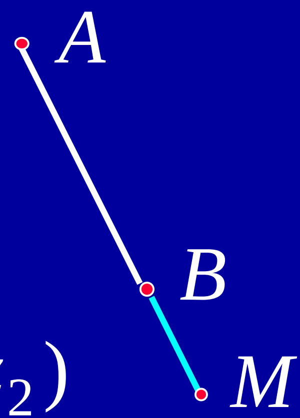
解: 设 M 的坐标为(x, y, z), 如图所示



$$\overrightarrow{AM} = \lambda\, \overrightarrow{MB}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$$



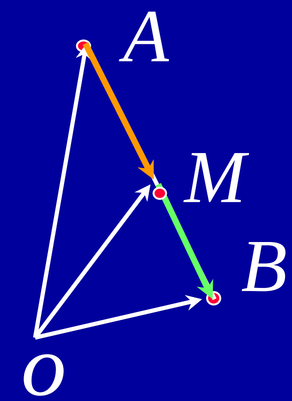
得 $$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA} + \lambda\, \overrightarrow{OB})$$

即 $$(x, y, z) = \frac{1}{1+\lambda}(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2)$$

说明: 由

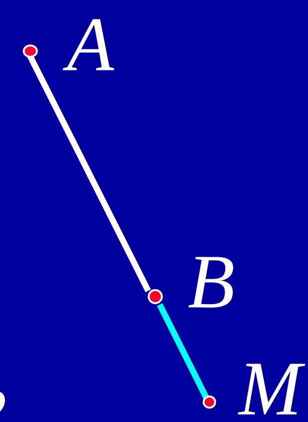
$$(x,y,z)=\frac{1}{1+\lambda}\left(x_1+\lambda x_2,\, y_1+\lambda y_2,\, z_1+\lambda z_2\right)$$

得**定比分点公式:**



$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},$$

$$z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$



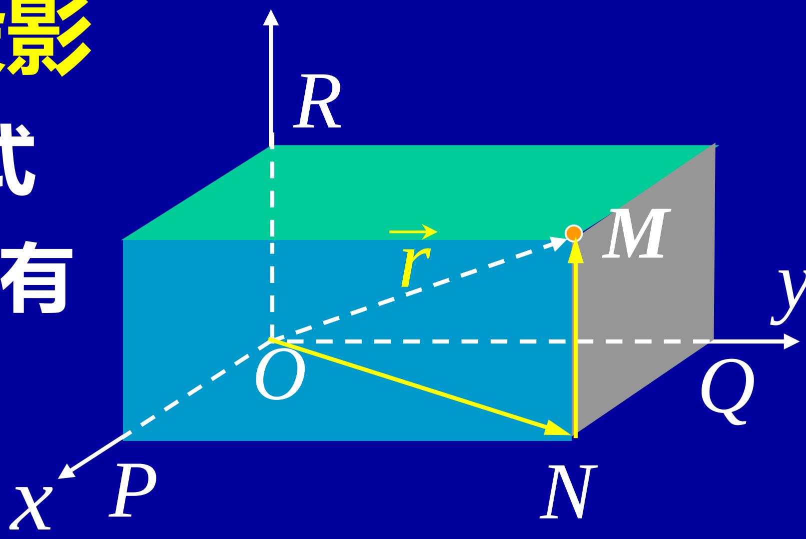
当 $\lambda=1$ 时, 点 M 为 AB 的中点 ,于是得

中点公式:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

五、向量的模、方向角、投影

1. 向量的模与两点间的距离公式



设 $\vec{r}=(x,y,z)$, 作 $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$, **则有**

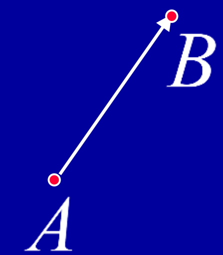
$$\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

由勾股定理得

$$|\vec{r}|=|OM|=\sqrt{|OP|^2+|OQ|^2+|OR|^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

（模为坐标的平方和再开方）

对两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 与 $B(x_2,y_2,z_2)$, **因**



$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

得两点间的距离公式:

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

例5. 在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 及 $B(3,5,-2)$ 等距离的点 .

解: 设该点为 $M(0,0,z)$, 因为 $|MA|=|MB|$,

$$\sqrt{(-4)^2+1^2+(7-z)^2}=\sqrt{3^2+5^2+(-2-z)^2}$$

解得 $z=\frac{14}{9}$, 故所求点为 $M(0,0,\frac{14}{9})$.

思考:

(1) 如何求在 xOy 面上与 A , B 等距离之点的轨迹方程?

(2) 如何求在空间与 A , B 等距离之点的轨迹方程 ?

提示:

(1) 设动点为 $M(x,y,0)$,利用 $|MA|=|MB|$, 得

$$14x+8y+28=0,\ 且\ z=0$$

(2) 设动点为 $M(x,y,z)$,利用 $|MA|=|MB|$, 得

$$7x+4y-9z+14=0$$

例6. 已知两点 $A(4,0,5)$ 和 $B(7,1,3)$,求$\overrightarrow{AB}$的单位向量 $\vec{e}$.

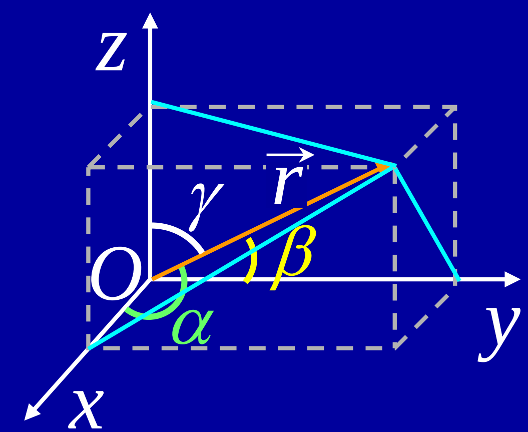
解:

$$\vec{e}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{1}{\sqrt{14}}(3,1,-2)$$

$$=\left(\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{-2}{\sqrt{14}}\right)$$

2. 方向角与方向余弦

给定 $\vec{r}=(x,y,z)\neq\vec{0}$, 称 $\vec{r}$ **与三坐标轴的夹角** α **,** β **,** γ **为其方向角.**



方向角的余弦称为其方向余弦.

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{r}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{y}{|\vec{r}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\vec{r}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

方向余弦的性质：$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

向量 $\vec{r}$ 的单位向量：

$$\vec{e}_r=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

例7. 已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$ 和 $M_2(1,3,0)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角 .

解:

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(1-2,\ 3-2,\ 0-\sqrt{2})$$

$$=(-1,\ 1,\ -\sqrt{2})$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\quad \cos\beta=\frac{1}{2},\quad \cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\quad \beta=\frac{\pi}{3},\quad \gamma=\frac{3\pi}{4}$$

例8. 设点 A 位于第一卦限, 向径 $\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴 y 轴的夹角依次为 $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$, 且 $|\overrightarrow{OA}| = 6$,求点 A 的坐标 .

解: 已知 $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4}$, 则

$$\cos^2\gamma = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta = \frac{1}{4}$$

因点 A 在第一卦限 , 故 $\cos\gamma = \frac{1}{2}$, 于是

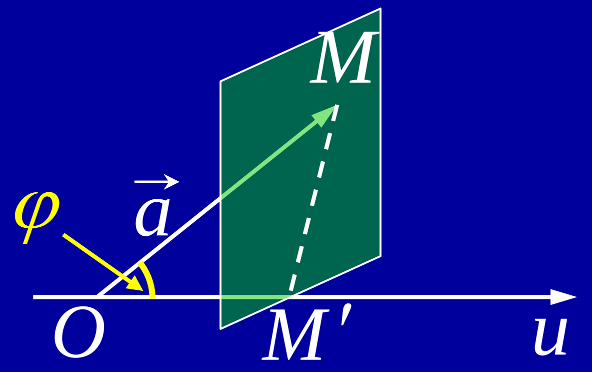
$$\overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OA}|\, \vec{e}_{OA} = 6(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

$$= 6\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) = (3, 3\sqrt{2}, 3)$$

故点 A 的坐标为 $(3, 3\sqrt{2}, 3)$.

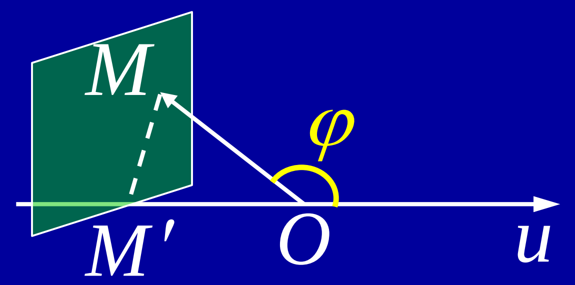
3. 向量在轴上的投影

设 $\vec{a}$ 与 u 轴正向的夹角为 φ，



则 $\vec{a}$ 在轴 u 上的投影为 $|\vec{a}|\cos\varphi$

记作 $\mathrm{Prj}_u\vec{a}$ 或 $(\vec{a})_u$，即



$$(\vec{a})_u = |\vec{a}|\cos\varphi$$

投影是一个数（可正可负）

例如，$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 在坐标轴上的投影分别为 a_x,a_y,a_z

投影的性质：

1) $(\vec{a}+\vec{b})_u=(\vec{a})_u+(\vec{b})_u$

2) $(\lambda\vec{a})_u=\lambda(\vec{a})_u$ （λ为实数）

向量的历史发展

数学小史

向量的建立经过了一个漫长的过程，所以不能说具体由哪个人建立起来的.

从数学发展史来看，历史上很长一段时间，空间的向量结构并未被数学家们所认识，直到19世纪末20世纪初，人们才把空间的性质与向量运算联系起来，使向量成为具有一套优良运算通性的数学体系。

向量能够进入数学并得到发展，首先应从复数的几何表示谈起.

18世纪末期，挪威测量学家威塞尔首次利用坐标平面上的点来表示复数a + bi，并利用具有几何意义的复数运算来定义向量的运算．把坐标平面上的点用向量表示出来，并把向量的几何表示用于研究几何问题与三角问题．

人们逐步接受了复数，也学会了利用复数来表示和研究平面中的向量，向量就这样平静地进入了数学。

但复数的利用是受限制的，因为它仅能用于表示平面，若有不在同一平面上的力作用于同一物体，则需要寻找所谓三维“复数”以及相应的运算体系．

19世纪中期，英国数学家汉密尔顿发明了四元数（包括数量部分和向量部分），以代表空间的向量．他的工作为向量代数和向量分析的建立奠定了基础．随后，电磁理论的发现者，英国的数学物理学家麦克思韦尔把四元数的数量部分和向量部分分开处理，从而创造了大量的向量分析。

哈密顿的公式是q = w + ix +jy +kz，w, x, y, z都是实数。哈密顿很快意识到他的公式包含两个不同的部分，第一项他称之为标量，“x, y, z是三个直角坐标分量，或者是投影在三个直角坐标轴上的量，他（指他自己）称之为三项式，也是它所表示的线。

三维向量分析的开创，以及同四元数的正式分裂，是英国的居伯斯和海维塞德于19世纪20年代各自独立完成的．他们提出，一个向量不过是四元数的向量部分，但不独立于任何四元数．他们引进了两种类型的乘法，即数量积和向量积．并把向量代数推广到变向量的向量微积分．从此，向量的方法被引进到分析和解析几何中来，并逐步完善，成为了一套优良的数学工具。

向量的概念在物理学上十分重要, 力, 速度或加速度这些有大小和方向的量都是向量, 而人们很早就已知道向量的合成服从平行四边形法则. 数学家们发现两个复数相加的结果正好对应于用平行四边形法则相加的向量的和. 用复数来表示向量及其运算的一个很大优点, 就是人们不一定要几何地作出这些运算, 但能够代数地研究它们, 就像是曲线的方程能用来表示曲线和研究曲线而带给人们便利一样.