2000 年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x - x}{\ln(1+2x^3)} =$ ______.

(2) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2^{xy}=x+y$ 所确定,则 $\mathrm{d}y\Big|_{x=0} =$ ______.

(3) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+7)\sqrt{x-2}} =$ ______.

(4) 曲线 $y=(2x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线方程为______.

(5) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}$ 为4阶单位矩阵,且 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$,则$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{-1}=$ ______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设函数 $f(x)=\dfrac{x}{a+\mathrm{e}^{bx}}$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续,且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$,则常数 a,b 满足(　　)

(A) $a<0,b<0$.　　(B) $a>0,b>0$.

(C) $a\leqslant 0,b>0$.　　(D) $a\geqslant 0,b<0$.

(2) 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$,且 $f'(0)=0$,则(　　)

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C) 点$(0,f(0))$是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值,点$(0,f(0))$也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(3) 设函数 $f(x),g(x)$ 是大于零的可导函数,且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$,则当 $a<x<b$ 时,有(　　)

(A) $f(x)g(b)>f(b)g(x)$.　　(B) $f(x)g(a)>f(a)g(x)$.

(C) $f(x)g(x)>f(b)g(b)$.　　(D) $f(x)g(x)>f(a)g(a)$.

(4) 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$,则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 为(　　)

(A) 0.　　(B) 6.　　(C) 36.　　(D) ∞.

(5) 具有特解 $y_1=\mathrm{e}^{-x},y_2=2x\mathrm{e}^{-x},y_3=3\mathrm{e}^{x}$ 的 3 阶常系数齐次线性微分方程是(　　)

(A) $y'''-y''-y'+y=0$.　　(B) $y'''+y''-y'-y=0$.

(C) $y'''-6y''+11y'-6y=0$.　　(D) $y'''-2y''-y'+2y=0$.

三、(本题满分 5 分)

设 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$,计算 $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

四、(本题满分 5 分)

设 xOy 平面上有正方形 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$ 及直线 $l:x+y=t(t\geqslant 0)$. 若 $S(t)$ 表示正方形 D 位于直线 l 左下方部分的面积,试求 $\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t(x\geqslant 0)$.

五、(本题满分 5 分)

求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)(n\geqslant 3)$.

六、(本题满分 6 分)

设函数 $S(x)=\int_0^x|\cos t|\,\mathrm{d}t$,

(1) 当 n 为正整数,且 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时,证明:$2n\leqslant S(x)<2(n+1)$;

(2) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}$.

七、(本题满分 7 分)

某湖泊的水量为 V,每年排入湖泊内含污染物 A 的污水量为 $\dfrac{V}{6}$,流入湖泊内不含 A 的水量为 $\dfrac{V}{6}$,流出湖泊的水量为 $\dfrac{V}{3}$. 已知 1999 年底湖中 A 的含量为 $5m_0$,超过国家规定指标. 为了治理污染,从 2000 年初起,限定排入湖泊中含 A 污水的浓度不超过 $\dfrac{m_0}{V}$. 问至多需经过多少年,湖泊中污染物 A 的含量才可降至 m_0 以内?(注:设湖水中 A 的浓度是均匀的).

八、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续,且 $\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x=0$,$\int_0^\pi f(x)\cos x\,\mathrm{d}x=0$. 试证明:在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2,使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

九、(本题满分 7 分)

已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数,它在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x),$$

其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x 高阶的无穷小,且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6,f(6))$ 处的切线方程.

十、(本题满分 8 分)

设曲线 $y=ax^2(a>0,x\geqslant 0)$ 与 $y=1-x^2$ 交于点 A,过坐标原点 O 和点 A 的直线与曲线 $y=ax^2$ 围成一平面图形. 问 a 为何值时,该图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积最大?最大体积是多少?

十一、(本题满分 8 分)

函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导,$f(0)=1$,且满足等式

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=0.$$

（1）求导数 $f'(x)$；

（2）证明：当 $x\geqslant 0$ 时，不等式 $\mathrm{e}^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 1$ 成立.

十二、（本题满分 6 分）

设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，其中 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置，求解方程

$$2\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\gamma}.$$

十三、（本题满分 7 分）

已知向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}a\\2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}b\\1\\0\end{pmatrix}$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}9\\6\\-7\end{pmatrix}$ 具有相同的秩，且 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，求 a,b 的值.