2025考研线性代数基础班

主讲：晓千老师（满分教练）

利用矩阵的基本变换化简

$\begin{cases} + \\ k \\ \times \\ T \end{cases}$

主讲老师简介

姜晓千

中国人民大学博士

复习全书、660、150系列

主编、主讲

$$\underbrace{3+1}_{\times 5}+\underbrace{1}_{\times 12}=32$$

行列式
矩阵

向量
方程组

☆
特征
二次型

第一章 行列式

概念
重要
展开Th
公式
Cramer

$|A|=2$, $|A^{-1}|=\frac{1}{2}$, $|A^{*}|=2^{n-1}$

专题一　行列式的概念

定义

性质(5条)

逆序数的定义 在$1,2,\cdots,n$的一个全排列中，若两个数的前后次序与标准次序不同，则称这两个数逆序.一个排列中所有逆序的总数称为逆序数，记作τ.

大的数在小的数之前

例如 $\tau(54321)=4+3+2+1=10$

行列式的定义　n 阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \underbrace{\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}}_{n(n-1)\cdots 1 = n!} (-1)^{\boxed{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}} \underbrace{a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}}_{j_1 \neq j_2 \cdots \neq j_n}$$

即 $n!$ 项不同行不同列元素乘积的代数和.

【评注】由行列式的定义知 2 阶、3 阶行列式满足对角线法则，即 主 副

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc，\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

pr: $=(-1)^{\tau(12)}ad+(-1)^{\tau(21)}bc=ad-bc$

例如：爱的行列式

$$\begin{vmatrix} 我 & 0 & 生 \\ 0 & 有 & 0 \\ 你 & 0 & 幸 \end{vmatrix} = 我有幸一生有你，\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 34 & 1 & 34 \end{vmatrix} = 520$$

【例 1.1】（2021，数二、三）多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 项的系数为____________.

【详解】

含有 x^3 的项为 $(-1)^{\tau(2134)}x^3+(-1)^{\tau(4231)}4x^3$

$=-x^3-4x^3=-5x^3$ 故系数为 -5

行列式的性质（化简）

（1）行列式互换，行列式的值不变；

（2）两行（或列）互换，行列式变号；

（3）提公因子；

pr: 以2阶为例 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad-bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc-ad = -(ad-bc) = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = kad-kbc = k(ad-bc) = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

（4）拆行（或列）分配，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1j}+a'_{1j}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2j}+a'_{2j}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{nj}+a'_{nj}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

（5）一行（或列）乘 k 加到另一行（或列），行列式的值不变.

推论 两行（或列）成比例，行列式为零.

【例 1.2】$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}$.

【详解】

$$原式 = \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & 2 & 6 \\ \cdots & & 2 & 6 \\ & & 2 & 6 \\ & & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

专题二　重要行列式 (1-4)

后续每日课程更新/专业课二加v：1003019

1. 上（或下）三角、主对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

pf: $= (-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

$= a_{11}\cdots a_{nn}$

2. 关于副对角线的上（或下）三角、副对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \therefore & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \therefore & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \therefore & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\boxed{\frac{n(n-1)}{2}}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$\tau(n, n-1, \cdots 1)$

$n-1+n-2+\cdots=1$

Pr: $=(-1)\ a_{1n}\cdots a_{n1}$

$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}\cdots a_{n1}$

3.　n 阶 ab 型行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

pf：每行元素和相等，每列加到第一列

$$原式 = [a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & \cdots & b \\ \vdots & & & \\ 1 & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

后续每日课程更新/专业课二加v：1003019

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1 & b & \cdots & b\\ 0 & a-b & \cdots & 0\\ & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & a-b\end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

补例（1997，数四）设 n 阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

则 $|A|=$ $(-1)^{n-1}(n-1)$ ________.

4. 拉普拉斯展开式 (分块矩阵的行列式)

设 A 为 m 阶矩阵，B 为 n 阶矩阵，则 一个字母代表一个小块看成一个数

Laplace 1749

院长 拿破仑 总理

$$\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

$$\begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{\boxed{mn}}|A||B|$$

依次

pf:
$$\begin{vmatrix} O & \begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{matrix} \\ \begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \cdots & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{matrix} & O \end{vmatrix} = (-1)^{\overbrace{n+n+\cdots+n}^{m}} \begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{mn}|A||B|$$

【例 1.3】（2014，数一、二、三）$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$【 】

典型错误：$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D| - |B||C|$ ×

（A）$(ad-bc)^2$　（B）$-(ad-bc)^2$　（C）$a^2d^2-b^2c^2$　（D）$b^2c^2-a^2d^2$

【详解】

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix} = -(ad-bc)^2$$

补例（1996，数一）$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} =$【　　】

（A）$a_1a_2a_3a_4 - b_1b_2b_3b_4$　　（B）$a_1a_2a_3a_4 + b_1b_2b_3b_4$

（C）$(a_1a_2 - b_1b_2)(a_3a_4 - b_3b_4)$　　（D）$(a_2a_3 - b_2b_3)(a_1a_4 - b_1b_4)$

【详解】

△ Laplace 的推广.

【例 1.4】设 A 为 m 阶矩阵，B 为 n 阶矩阵，C 为 l 阶矩阵，$D=\begin{pmatrix} O & O & A \\ O & B & O \\ C & O & O \end{pmatrix}$.若 $|A|=a$，$|B|=b$，$|C|=c$，则 $|D|=$________.

【详解】

原式 $=(-1)^{m(n+l)}|A|\begin{vmatrix} O & B \\ C & O \end{vmatrix}$

$=(-1)^{m(n+l)}|A|\cdot(-1)^{nl}|B|\,|C|$

$=(-1)^{mn+ml+nl}abc$

5. 范德蒙行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

Pf: 归纳法 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$ . ...

【例 1.5】$\begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4^2 & 3^2 & 2^2 & 1 \\ 4^3 & 3^3 & 2^3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$ __________.

【详解】

原式 $= 10\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4^2 & 3^2 & 2^2 & 1 \\ 4^3 & 3^3 & 2^3 & 1 \end{vmatrix} = 10\times 12 = 120.$

【例 1.6】 设 a_1,a_2,a_3,a_4 为非零常数，则 $\begin{vmatrix} a_1^3 & a_1^2b_1 & a_1b_1^2 & b_1^3 \\ a_2^3 & a_2^2b_2 & a_2b_2^2 & b_2^3 \\ a_3^3 & a_3^2b_3 & a_3b_3^2 & b_3^3 \\ a_4^3 & a_4^2b_4 & a_4b_4^2 & b_4^3 \end{vmatrix} =$ __________.

【详解】

第 i 行提 a_i^3，得 原式 $= a_1^3\cdots a_4^3 \begin{vmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2 & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^3 \\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2 & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^3 \\ 1 & \frac{b_3}{a_3} & \left(\frac{b_3}{a_3}\right)^2 & \left(\frac{b_3}{a_3}\right)^3 \\ 1 & \frac{b_4}{a_4} & \left(\frac{b_4}{a_4}\right)^2 & \left(\frac{b_4}{a_4}\right)^3 \end{vmatrix}$

$$= a_1^3\cdots a_4^3 \cdot \prod_{1\le i<j\le 4}\left(\frac{b_j}{a_j}-\frac{b_i}{a_i}\right)$$