

## 1987 年全国硕士研究生招生考试试题

## ( 试卷 III )

## 一、填空题( 本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分)

- (1) 设  $y = \ln(1 + ax)$ , 其中  $a$  为非零常数, 则  $y' =$  \_\_\_\_\_,  $y'' =$  \_\_\_\_\_.
- (2) 曲线  $y = \arctan x$  在横坐标为 1 的点处的切线方程是 \_\_\_\_\_; 法线方程是 \_\_\_\_\_.
- (3) 积分中值定理的条件是 \_\_\_\_\_, 结论是 \_\_\_\_\_.
- (4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-2}{n+1} \right)^n =$  \_\_\_\_\_.
- (5)  $\int f'(x) dx =$  \_\_\_\_\_,  $\int_a^b f'(2x) dx =$  \_\_\_\_\_.

## 二、( 本题满分 6 分)

求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ .

## 三、( 本题满分 7 分)

设  $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases}$  求  $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ .

## 四、( 本题满分 8 分)

计算定积分  $\int_0^1 x \arcsin x dx$ .

## 五、( 本题满分 8 分)

设  $D$  是由曲线  $y = \sin x + 1$  与三条直线  $x = 0, x = \pi, y = 0$  围成的曲边梯形, 求  $D$  绕  $Ox$  轴旋转一周所生成的旋转体的体积.

## 六、证明题( 本题满分 10 分)

- (1) 若  $f(x)$  在  $(a, b)$  内可导, 且导数  $f'(x)$  恒大于零, 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  内单调增加.
- (2) 若  $g(x)$  在  $x = c$  处二阶导数存在, 且  $g'(c) = 0, g''(c) < 0$ , 则  $g(c)$  为  $g(x)$  的一个极大值.

## 七、( 本题满分 10 分)

计算不定积分  $\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$ , 其中  $a, b$  是不全为 0 的非负常数.

## 八、(本题满分 10 分)

- (1) 求微分方程  $x \frac{dy}{dx} = x - y$  满足条件  $y \Big|_{x=\sqrt{2}} = 0$  的特解.
- (2) 求微分方程  $y'' + 2y' + y = xe^x$  的通解.

## 九、选择题(本题共 4 小题,每小题 4 分,满分 16 分)

- (1)  $f(x) = |x \sin x| e^{\cos x} (-\infty < x < +\infty)$  是( )
- (A) 有界函数. (B) 单调函数.
- (C) 周期函数. (D) 偶函数.
- (2) 函数  $f(x) = x \sin x$  ( )
- (A) 当  $x \rightarrow \infty$  时为无穷大. (B) 在  $(-\infty, +\infty)$  内有界.
- (C) 在  $(-\infty, +\infty)$  内无界. (D) 当  $x \rightarrow \infty$  时有有限极限.
- (3) 设  $f(x)$  在  $x = a$  处可导, 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x) - f(a-x)}{x}$  等于( )
- (A)  $f'(a)$ . (B)  $2f'(a)$ .
- (C) 0. (D)  $f'(2a)$ .
- (4) 设  $I = t \int_0^{\frac{s}{t}} f(tx) dx$ , 其中  $f(x)$  连续,  $s > 0, t > 0$ , 则  $I$  的值( )
- (A) 依赖于  $s, t$ . (B) 依赖于  $s, t, x$ .
- (C) 依赖于  $t, x$ , 不依赖于  $s$ . (D) 依赖于  $s$ , 不依赖于  $t$ .

## 十、(本题满分 10 分)

在第一象限内求曲线  $y = -x^2 + 1$  上的一点, 使该点处的切线与所给曲线及两坐标轴所围成的图形面积为最小, 并求此最小面积.