1992 年全国硕士研究生招生考试试题

(试卷 Ⅲ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $\begin{cases} x = f(t) - \pi, \\ y = f(e^{3t} - 1), \end{cases}$ 其中 f 可导,且 $f'(0) \neq 0$,则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0} =$ ______.

(2) 函数 $y = x + 2\cos x$ 在 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为______.

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{e^x - \cos x} =$ ______.

(4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2 + 1)} =$ ______.

(5) 由曲线 $y = xe^x$ 与直线 $y = ex$ 所围成的图形的面积 $S =$ ______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 当 $x \to 0$ 时,$x - \sin x$ 是 x^2 的(　　)

(A) 低阶无穷小.　　(B) 高阶无穷小.

(C) 等价无穷小.　　(D) 同阶但非等价的无穷小.

(2) 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 0, \\ x^2 + x, & x > 0, \end{cases}$ 则(　　)

(A) $f(-x) = \begin{cases} -x^2, & x \leqslant 0, \\ -(x^2 + x), & x > 0. \end{cases}$　　(B) $f(-x) = \begin{cases} -(x^2 + x), & x < 0, \\ -x^2, & x \geqslant 0. \end{cases}$

(C) $f(-x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 0, \\ x^2 - x, & x > 0. \end{cases}$　　(D) $f(-x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 0, \\ x^2, & x \geqslant 0. \end{cases}$

(3) 当 $x \to 1$ 时,函数 $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限(　　)

(A) 等于 2.　　(B) 等于 0.

(C) 为 ∞.　　(D) 不存在但不为 ∞.

(4) 设 $f(x)$ 连续,$F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} f(t^2)\,dt$,则 $F'(x)$ 等于(　　)

(A) $f(x^4)$.　　(B) $x^2 f(x^4)$.　　(C) $2xf(x^4)$.　　(D) $2xf(x^2)$.

(5) 若 $f(x)$ 的导函数是 $\sin x$,则 $f(x)$ 有一个原函数为(　　)

(A) $1 + \sin x$.　　(B) $1 - \sin x$.　　(C) $1 + \cos x$.　　(D) $1 - \cos x$.

三、(本题共 5 小题,每小题 5 分,满分 25 分)

(1) 求 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{3 + x}{6 + x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$.

(2) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y - xe^y = 1$ 所确定,求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$ 的值.

(3) 求$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$.

(4) 求$\int_0^{\pi} \sqrt{1-\sin x}\mathrm{d}x$.

(5) 求微分方程$(y-x^3)\mathrm{d}x-2x\mathrm{d}y=0$的通解.

四、(本题满分9分)

设$f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x \leqslant 0,\\ \mathrm{e}^{-x}, & x>0,\end{cases}$求$\int_1^3 f(x-2)\mathrm{d}x$.

五、(本题满分9分)

求微分方程$y''-3y'+2y=x\mathrm{e}^x$的通解.

六、(本题满分9分)

计算曲线$y=\ln(1-x^2)$上相应于$0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$的一段弧的长度.

七、(本题满分9分)

求曲线$y=\sqrt{x}$的一条切线l,使该曲线与切线l及直线$x=0,x=2$所围成的平面图形面积最小.

八、(本题满分9分)

已知$f''(x)<0,f(0)=0$,证明对任何$x_1>0,x_2>0$,有$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.