第一章　行列式

行列式是线性代数的基础，它的理论是人们从解线性方程租的需要中建立和发展起来的，它在数学的许多分支中都有着非常广泛的应用，是一种常用的计算工具. 本章主要介绍行列式的定义、性质及计算方法.

第一节　行列式的概念

一、二、三阶行列式

行列式的概念起源于解线性方程组，因此我们首先讨论解方程组的问题.

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1}$$

为消去 x_2，用 a_{22} 和 $-a_{12}$ 分别乘第1个和第2个方程的两边，然后相加，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2；$$

同理，消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21} .$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组（1）的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}，\quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{2}$$

为了便于记忆和应用方便，我们引进新的符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{3}$$

称 D 为**二阶行列式**. 它含有两行两列，横排叫做**行**，纵排叫做**列**. 组成行列式的数用 a_{ij} 表示，称为行列式 D 的第 i 行第 j 列**元素**. 同时 D 也称为方程组（1）的**系数行列式**.

二阶行列式的定义（3）可用**对角线法则**来记忆. 将行列式的左上角元素 a_{11} 到右下角元素 a_{22} 的连线称为行列式的**主对角线**；而右上角元素 a_{12} 到左下角元素 a_{21} 的连线称为行列式

的**副对角线**. 于是二阶行列式便等于主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积.

根据定义（3），容易得知，方程组的解中的两个分子可分别记为

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2，\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

显然 $D_i\ (i=1,2)$ 即为 D 中的第 i 列元素换成方程组的常数项 b_1， b_2 所得的行列式.

则当 $D\neq 0$ 时，二元线性方程组的解可以唯一地表示成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}，\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{4}$$

此为求解二元线性方程组的**克莱姆（Gramer）法则**.

例 1　用二阶行列式求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-3x_2=5, \\ 2x_1+\ \ x_2=3. \end{cases}$$

解　由于 $D=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=7\neq 0$，且

$$D_1=\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=14，\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-7，$$

因此，方程组的解是

$$x_1=\frac{D_1}{D}=2，\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-1.$$

对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{5}$$

作类似的讨论，我们引入**三阶行列式**的概念，并定义其值为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{aligned} &=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned} \tag{6}$$

也称 D 为线性方程组（5）的**系数行列式**. 再用线性方程组（5）的常数项 b_1， b_2， b_3 替换 D 中的第 $i\ (i=1,2,3)$ 列所得到的三阶行列式记为

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

则当 $D\neq 0$ 时，三元线性方程组的解可以唯一地表示成

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}. \tag{7}$$

此为求解三元线性方程组的**克莱姆**（Gramer）**法则**.

三阶行列式的值也可用**对角线法则**来帮助记忆. 如图 1 — 1 所示，其中每条实线（主对角线及平行于主对角线方向）上的三个元素的乘积带正号，每条虚线（副对角线及平行于副对角线方向）上的三个元素的乘积带负号，所得六项的代数和就是三阶行列式的值.

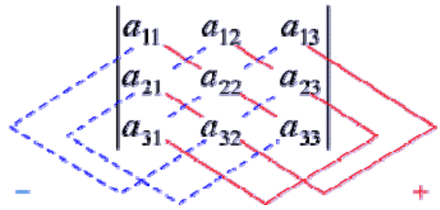

图 1 — 1

例 2 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 $D=2\times1\times1+3\times2\times1+(-1)\times(-2)\times1-1\times1\times1-3\times(-1)\times1-2\times(-2)\times2$

$=20$.

二、排列的逆序数与奇偶性

作为定义 n 阶行列式的准备，我们先来讨论一下排列的性质.

定义 1 由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列，记为 $i_1i_2\cdots i_n$.

例如，3241 是一个 4 级排列，53142 是一个 5 级排列. 显然，n 级排列共有 $n!$ 个. 其中，排列 $12\cdots n$ 称为**自然排列**.

定义 2 在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，若一个较大的数排在一个较小的数前面，则称这两个数构成一个逆序. 一个排列中逆序的总数，称为这个排列的逆序数，记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

由定义 2 可知，任一排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数为：

$\tau(i_1i_2\cdots i_n)=i_2$ 前面比 i_2 大的数的个数 + i_3 前面比 i_3 大的数的个数 + ⋯ + i_n 前面比 i_n 大的数的个数.

例如，在 4 级排列 3241 中，21，31，41，32，各构成一个逆序数，所以排列 3241 的逆序数 $\tau(3241)=4$. 同样可计算排列 53142 的逆序数为 $\tau(53142)=7$.

容易看出，自然排列的逆序数为0.

定义 3　逆序数为偶数的排列称为偶排列；逆序数为奇数的排列称为奇排列.

例如，排列3241是偶排列，排列53142是奇排列. 自然排列$12\cdots n$是偶排列.

定义 4　在一个n级排列中，如果其中某两个数i，j互换位置，而其余的数不动，就得到一个新的排列，这样的变换称为一次对换，记为(i,j). 相邻两个数的对换称为邻换.

定理 1　一次对换改变排列的奇偶性.

证　先证一个特殊的情形，一次邻换改变排列的奇偶性.

设n级排列为$\cdots ij\cdots$，将相邻两个数i，j对换，得到一个新的排列$\cdots ji\cdots$. 由于除i，j之外其余的数不动，所以其余数之间的逆序没有变化.

若$i>j$，则新排列的逆序数比原排列减少1；若$i<j$，则新排列的逆序数比原排列增加1，所以一次邻换改变排列的奇偶性.

再证一般的情形.

设n级排列为$\cdots ia_1a_2\cdots a_m j\cdots$，要实现$i$，$j$的对换，得到新的排列$\cdots ja_1a_2\cdots a_m i\cdots$，可先将$i$与$a_1$对换，再把$i$与$a_2$对换，…，这样，经过$m+1$次邻换，得到排列$\cdots a_1a_2\cdots a_m ji\cdots$；同理，再把$j$对换到$a_1$之前，需要经过$m$次邻换. 这样，共经过$2m+1$次邻换，完成了$i$与$j$的对换. $2m+1$是奇数，所以新排列与原排列的奇偶性不同.

定理 2　当$n\geqslant 2$时，在所有的n级排列中，奇排列与偶排列的个数相等，各为$\dfrac{n!}{2}$个.

证　设所有的n级排列中，奇排列共有p个，偶排列共有q个. 对这p个奇排列施行同一个对换(i,j)，则由定理 1 可知，p个奇排列全部变成偶排列，由于偶排列一共只有q个，所以$p\leqslant q$；同理，将全部的偶排列施以同一对换(i,j)，则q个偶排列全部变为奇排列，于是又有$q\leqslant p$. 因此，$p=q$即奇排列与偶排列的个数相等. 又由于n级排列共有$n!$个，所以有$p=q=\dfrac{n!}{2}$.

定理 3　奇排列变成自然排列的对换次数为奇数，偶排列变成自然排列的对换次数为偶数.

由定理 1 可知，一次对换改变排列的奇偶性. 因为$12\cdots n$是偶排列，所以若排列$i_1i_2\cdots i_n$是奇（偶）排列，则必须经奇（偶）数次对换才能变成自然排列.

三、n阶行列式

本节依据二、三阶行列式的结构规律，来定义n阶行列式.

以三阶行列式为例

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{array}{l} =a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ \quad -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \end{array}.$$

由三阶行列式的展开式可得如下规律：

（1）三阶行列式的每一项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积；

（2）三阶行列式是$3!$项的代数和；

（3）每一项的符号是：当这一项元素的行指标是按自然排列时，如果元素的列指标为偶排列，则取正号；如果元素的列指标为奇排列，则取负号.

作为二、三阶行列式的推广，从而给出n阶行列式的定义.

定义 5　符号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{8}$$

称为n阶行列式. 它是$n!$项的代数和，这些项是一切可能的取自不同行与不同列的n个元素的乘积$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$. 项$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$的符号为$(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)}$，也就是说，当$i_1 i_2\cdots i_n$是偶排列时，这一项的符号为正，当$i_1 i_2\cdots i_n$是奇排列时，这一项的符号为负. 即

$$D=\sum_{i_1 i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}\ . \tag{9}$$

特别地，当$n=1$时，一阶行列式$|a|$就是数a.

例 3　计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}.$$

解　根据定义 5，D是一个$4!=24$项的代数和. 每一项都是位于D的不同行不同列的4个元素的乘积，然而在这个行列式里，除了$acfh$，$adeh$，$bdeg$，$bcfg$这四项外，其余的项都至少含有一个因子0，因而等于0. 与上面四项对应的排列依次为1234，1324，4321，4231，其中第1个和第3个是偶排列，第2个和第4个是奇排列. 因此

$$D=acfh-adeh+bdeg-bcfg\ .$$

例 4　计算n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 $a_{ii} \neq 0\ (i=1,2,\cdots,n)$.

该行列式主对角线下方的元素全为零，称为**上三角行列式**（主对角线上方的元素全为零，称为**下三角行列式**）.

解 由 n 阶行列式的定义，应有 $n!$ 项，但由于 D 中许多元素为零，只考虑行列式的非零项即可. 项的一般形式为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

在行列式中第 n 行的元素除去 a_{nn} 以外全为零，从而 $j_n=n$. 在第 $n-1$ 行中，除去 $a_{n-1,n-1}$ 与 $a_{n-1,n}$ 外，其余的元素全为零，故 $j_{n-1}=n-1$ 或 $j_{n-1}=n$，但由于 $j_{n-1}\neq j_n$，所以 $j_{n-1}=n-1$. 这样逐步推上去，不难看出，在展开式中只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 一项不等于零，而这一项的列指标所组成的排列的逆序数是 $\tau(12\cdots n)=0$，故取正号. 于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

即上三角行列式的值等于主对角线上各元素的乘积. 同理可求得下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地，主对角线以外元素全为零的行列式，称为**对角行列式**，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理，可以定义关于副对角线的**对角行列式**及**三角行列式**. 利用行列式的定义，关于副对角线的**对角行列式**及**上、下三角行列式**，有如下结论：

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1};$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

在n阶行列式中，为了便于决定每一项的正负号，我们把n个元素的行指标排成自然排列，即$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$. 事实上，数的乘法是满足交换律的，因此这$n$个元素的次序是可以任意排布的.

例如，若n阶行列式的一般项写成$a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$，则

$$D=\sum_{i_1 i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)}a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}\ ; \qquad (10)$$

若n阶行列式的一般项写成$a_{i_1 j_1}a_{i_2 j_2}\cdots a_{i_n j_n}$，则

$$D=\sum(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)+\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}a_{i_1 j_1}a_{i_2 j_2}\cdots a_{i_n j_n}. \qquad (11)$$

其中$i_1 i_2\cdots i_n$； $j_1 j_2\cdots j_n$都是n级排列. 在此$\sum$表示对所有的n级排列的行指标$i_1 i_2\cdots i_n$（或对所有的n级排列的列指标$j_1 j_2\cdots j_n$）求和.

第二节　行列式的性质

当行列式的阶数n较大时，直接根据定义来计算行列式是较为繁琐的. 本节介绍行列式的一些性质，以此简化行列式的计算.

首先引入转置行列式的概念.

设n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

将行列式D的行与列互换后得到的行列式，称为D的**转置行列式**，记为D^{T}，即

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1　行列式与其转置行列式的值相等，即$D=D^{\mathrm{T}}$.

证　设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

记

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

显然有$a_{ij}=b_{ji}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$.由$n$阶行列式的定义（将行下标排成自然排列，对列下标的所有n级排列求和）得

$$D^{\mathrm{T}}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}.$$

再由n阶行列式的定义（将列下标排成自然排列，对行下标的所有n级排列求和）可知

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}.$$

所以有$D=D^{\mathrm{T}}$.

性质 2　交换行列式的两行（或两列），行列式改变符号.

证　设n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

将行列式D的第i行与第s行互换后，得到行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

取行列式D的任一项为

$$(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_s\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{nj_n},$$

则在D_1中与之对应的一项为

$$(-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n},$$

由第一节的定理 1，可得

$$(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_s\cdots j_n)}=(-1)(-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_i\cdots j_n)},$$

即D与D_1中对应项的符号相反，从而$D=-D_1$.

推论　若行列式有两行（列）的对应元素相同，则此行列式的值等于零.

证　将行列式中对应元素相同的两行（列）互换，有$D=-D$，所以$D=0$.

性质 3　用一个数k乘行列式，等于行列式某一行（列）的所有元素都乘以k，即

$$k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

也就是说，如果行列式某一行（列）的元素有公因子，则可以将公因子提到行列式外面.

证　右端$=\sum\limits_{j_1 j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$

$$=k\sum_{j_1 j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}=\text{左端}.$$

推论 1　若行列式有一行（列）元素全为零，则此行列式的值等于零.

推论 2　若行列式有两行（列）的对应元素成比例，则此行列式的值等于零.

性质 4　如果行列式的某一行（列）的各元素都是两项之和，则这个行列式就可以拆分为两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证　左端$\displaystyle =\sum_{j_1 j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(a_{ij_i}+b_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$

$$=\sum_{j_1 j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

$$+\sum_{j_1 j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n}=\text{右端}.$$

性质 5　将行列式的某一行（列）元素的k倍加到另一行（列）的对应元素上，则行列式的值不变，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证　右端$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D+0=$左端.

例 1　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1+a & 2+a & 3+a \\ 1+b & 2+b & 3+b \\ 1+c & 2+c & 3+c \end{vmatrix}.$$

解　把D的第1列元素的-1倍加到第2列和第3列的对应元素上，得

$$D=\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 2 \\ 1+b & 1 & 2 \\ 1+c & 1 & 2 \end{vmatrix},$$

这个行列式有两列元素对应成比例，所以$D=0$.

例 2　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&2&-3&-4\\-1&-2&5&-8\\0&1&-2&1\\1&3&-5&10\end{vmatrix}.$$

解 把D的第1行元素的1倍和-1倍分别加到第2行和第4行的对应元素上，得

$$D=\begin{vmatrix}1&2&-3&-4\\0&0&2&-12\\0&1&-2&1\\0&1&-2&14\end{vmatrix},$$

第3行元素的-1倍加到第4行的对应元素上，然后交换行列式的第2行和第3行，得

$$D=\begin{vmatrix}1&2&-3&-4\\0&0&2&-12\\0&1&-2&1\\0&0&0&13\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&-3&-4\\0&1&-2&1\\0&0&2&-12\\0&0&0&13\end{vmatrix}=-26.$$

例 3 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}a&b&b&b\\b&a&b&b\\b&b&a&b\\b&b&b&a\end{vmatrix}.$$

解 可以看出，该行列式每一列四个元素之和都等于$a+3b$. 连续利用性质 5，将2、3、4行逐一加到第1行上去，然后再提取公因子，得

$$D=\begin{vmatrix}a+3b&a+3b&a+3b&a+3b\\b&a&b&b\\b&b&a&b\\b&b&b&a\end{vmatrix}=(a+3b)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\b&a&b&b\\b&b&a&b\\b&b&b&a\end{vmatrix},$$

再把第1行的$-b$倍分别加到其余各行，得

$$D=(a+3b)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&a-b&0&0\\0&0&a-b&0\\0&0&0&a-b\end{vmatrix}=(a+3b)(a-b)^3.$$

例 4 证明

$$D=\begin{vmatrix}c_1+a_1&a_1+b_1&b_1+c_1\\c_2+a_2&a_2+b_2&b_2+c_2\\c_3+a_3&a_3+b_3&b_3+c_3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}.$$

证 由性质 4，得

$$D=\begin{vmatrix} c_1 & a_1+b_1 & b_1+c_1 \\ c_2 & a_2+b_2 & b_2+c_2 \\ c_3 & a_3+b_3 & b_3+c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & a_1+b_1 & b_1+c_1 \\ a_2 & a_2+b_2 & b_2+c_2 \\ a_3 & a_3+b_3 & b_3+c_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1+c_1 \\ c_2 & a_2 & b_2+c_2 \\ c_3 & a_3 & b_3+c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & b_1+c_1 \\ c_2 & b_2 & b_2+c_2 \\ c_3 & b_3 & b_3+c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & b_1+c_1 \\ a_2 & b_2 & b_2+c_2 \\ a_3 & b_3 & b_3+c_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

第三节　行列式的展开与行列式计算举例

一、行列式按行（列）展开

一般而言，低阶行列式的计算比高阶行列式的计算要简便，本节我们主要考虑如何将高阶行列式转化为低阶行列式. 为此，先介绍余子式和代数余子式的概念.

定义 1　在 n 阶行列式 D 中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列后，剩余的元素按原次序构成一个 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}. 称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式，记为 A_{ij}，即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

例 1　在四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

中，求元素 $a_{34}=-2$ 的余子式和代数余子式.

解　$M_{34}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}=6$，$A_{34}=(-1)^{3+4}M_{34}=-6$.

定理 1　一个 n 阶行列式 D，如果其第 i 行（或第 j 列）的元素除 a_{ij} 外都为零，则该行

列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积，即 $D=a_{ij}A_{ij}$.

证 先证一个特殊的情形，设第1行元素除 a_{11} 外都为零，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

由行列式的定义得

$$D=a_{11}\sum_{j_2j_3\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_2j_3\cdots j_n)}a_{2j_2}a_{3j_3}\cdots a_{nj_n}=a_{11}M_{11}=a_{11}A_{11}.$$

再证一般的情形，设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D 的第 i 行元素除 a_{ij} 外都为零. 可利用特殊情形的结论，首先，将第 i 行依次与第 $i-1$ 行，第 $i-2$ 行，…，第1行交换，这样，就将第 i 行换到了第1行，交换的次数为 $i-1$ 次；再将第 j 列依次与第 $j-1$ 列，第 $j-2$ 列，…，第1列交换，这样，a_{ij} 就换到了左上角，交换的次数为 $j-1$ 次. 总之，共经过 $i+j-2$ 次交换，将 a_{ij} 换到了左上角，所得行列式记为 D_1. 显然，$D=(-1)^{i+j-2}D_1=(-1)^{i+j}D_1$，而元素 a_{ij} 在 D_1 中的余子式仍是 a_{ij} 在 D 中的余子式 M_{ij}. 由于 a_{ij} 位于 D_1 中第1行第1列，利用前面的结果，有 $D_1=a_{ij}M_{ij}$，于是 $D=(-1)^{i+j}D_1=(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}$.

定理2 行列式 D 等于它任意一行(列)的所有元素与它们对应的代数余子式乘积的和. 换句话说，行列式 D 可按任一行（列）展开，即

$$D=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\qquad(i=1,2,\cdots,n),\tag{1}$$

或

$$D=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n).\tag{2}$$

证 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

由定理 1 知，$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad (i=1,2,\cdots,n)$.

定理 3 行列式某一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \quad (i\neq j), \tag{3}$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \quad (i\neq j). \tag{4}$$

综合定理 2 和定理 3，可得关于代数余子式的重要性质：

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases} D, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{cases} \tag{5}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases} D, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{cases} \tag{6}$$

＊二、拉普拉斯 (Laplace) 展开

本节介绍行列式的拉普拉斯展开定理，这个定理可以看成是行列式按任一行（列）展开法则的推广.

首先，介绍行列式的子式，子式的余子式和子式的代数余子式的概念.

定义 2 在一个 n 阶行列式 D 中，任意取定 k 行 k 列 $(k\leqslant n)$，位于这些行和列交叉处的 k^2 个元素按原次序构成一个 k 阶行列式 M，称为行列式 D 的一个 k 阶子式. 在 D 中划去

这 k 行 k 列，余下的元素按原次序构成的 $n-k$ 阶行列式 M'，称为 k 阶子式 M 的余子式.

从定义 2 可以看出，M 也是 M' 的余子式，所以 M 和 M' 可以称为 D 的一对互余的子式.

定义 3　设 D 的 k 阶子式 M 在 D 中所处的行指标和列指标分别为 $i_1,i_2,\cdots,i_k$；$j_1,j_2,\cdots,j_k$，则称 $A=(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}M'$ 为子式 M 的代数余子式.

例 2　在四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 4 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 3\end{vmatrix}$$

中，取第1、2两行，写出其所有的二阶子式及相应的余子式和代数余子式.

解　在 D 中由第1、2两行元素组成的二阶子式共有六个：

$$M_1=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-3;\quad M_2=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4;\quad M_3=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0;$$

$$M_4=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix}=2;\quad M_5=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{vmatrix}=0;\quad M_6=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix}=0.$$

相应的余子式为

$$M_1'=\begin{vmatrix}4 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=13;\quad M_2'=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix}=-3;\quad M_3'=\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 0 & -1\end{vmatrix}=1;$$

$$M_4'=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix}=0;\quad M_5'=\begin{vmatrix}0 & 4\\ 0 & -1\end{vmatrix}=0;\quad M_6'=\begin{vmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0.$$

相应的代数余子式为

$$A_1=(-1)^{(1+2)+(1+2)}M_1'=M_1'=13;\qquad A_2=(-1)^{(1+2)+(1+3)}M_2'=-M_2'=3;$$

$$A_3=(-1)^{(1+2)+(1+4)}M_3'=M_3'=1;\qquad A_4=(-1)^{(1+2)+(2+3)}M_4'=M_4'=0;$$

$$A_5=(-1)^{(1+2)+(2+4)}M_5'=-M_5'=0;\qquad A_6=(-1)^{(1+2)+(3+4)}M_6'=M_6'=0.$$

定理 4（拉普拉斯定理）　在 n 阶行列式 D 中，任意取定 k 行（列）（$1\leqslant k\leqslant n-1$），则由这 k 行（列）元素所组成的一切 k 阶子式与它们的代数余子式的乘积之和等于行列式 D.

当 $k=1$ 时，拉普拉斯定理就是行列式按任一行（列）的展开式.

例 3　对例 2 应用拉普拉斯定理，取 D 的第1、2两行计算行列式 D 的值.

解　根据拉普拉斯定理，得

$$D=M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_6A_6=-3\times13+4\times3+0\times1+2\times0+0\times0+0\times0=-27.$$

推论 1 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & & & 0 & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & & & & \\ & & & & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ & * & & & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} \\ & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ll} \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ll} \end{vmatrix}.$$

证　因为前 m 行的全体 m 阶子式中，只有一个 m 阶子式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

可能不为零，而其它的 m 阶子式全为零，由拉普拉斯定理，可得结论成立.

推论 2 $\begin{vmatrix} & & & & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ & 0 & & & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \\ b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} & & & & \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} & & & * & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ll} & & & & \end{vmatrix}$

$$=(-1)^{(1+\cdots+m)+(l+1+\cdots+l+m)}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ll} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{ml}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ll} \end{vmatrix}.$$

例 4　k 取何值时，

$$D=\begin{vmatrix}k&1&0&0\\1&k&0&0\\0&0&k&2\\0&0&-1&1\end{vmatrix}=0\,.$$

解 根据拉普拉斯定理，得

$$D=\begin{vmatrix}k&1\\1&k\end{vmatrix}\begin{vmatrix}k&2\\-1&1\end{vmatrix}=(k^2-1)(k+2)=0\,,$$

所以$D=0\ \Leftrightarrow k=\pm1$或$k=-2$.

三、行列式计算举例

例 5 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&1&1&0\\1&0&2&-1\\3&-2&7&1\\0&2&-1&-6\end{vmatrix}.$$

解 将第2行的-2，-3倍分别加到第1和第3行上，然后按第1列展开，可得

$$D=\begin{vmatrix}0&1&-3&2\\1&0&2&-1\\0&-2&1&4\\0&2&-1&-6\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&-3&2\\-2&1&4\\2&-1&-6\end{vmatrix},$$

将第2行的1倍加到第3行上，然后按第3行展开，可得

$$D=-\begin{vmatrix}1&-3&2\\-2&1&4\\0&0&-2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&-3\\-2&1\end{vmatrix}=-10\,.$$

例 6 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&x&0&0\\-1&1-x&y&0\\0&-1&1-y&z\\0&0&-1&1-z\end{vmatrix}.$$

解 从第1行开始，依次把每行加至下一行，得

$$D=\begin{vmatrix}1&x&0&0\\0&1&y&0\\0&-1&1-y&z\\0&0&-1&1-z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&x&0&0\\0&1&y&0\\0&0&1&z\\0&0&-1&1-z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&x&0&0\\0&1&y&0\\0&0&1&z\\0&0&0&1\end{vmatrix}=1.$$

例 7 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

解　将行列式按第1列展开，得

$$D_n=(-1)^{1+1}a\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}b\begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix},$$

上面两个行列式分别为$n-1$阶上三角行列式和$n-1$阶下三角行列式，故

$$D_n=aa^{n-1}+(-1)^{n+1}bb^{n-1}=a^n+(-1)^{n+1}b^n.$$

例 8　计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

解　将行列式按第n行展开，得

$$D_n=(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}+x\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & x & -1 & \cdots & 0 \\ a_3 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix},$$

即

$$D_n=xD_{n-1}+(-1)^{n+1}a_n(-1)^{n-1}=xD_{n-1}+a_n,$$

因D_{n-1}与D_n有相同的形式，依此递推可得

$$D_{n-1}=xD_{n-2}+(-1)^n a_{n-1}(-1)^{n-2}=xD_{n-2}+a_{n-1},$$

$$D_{n-2}=xD_{n-3}+a_{n-2},$$

$$\cdots,$$

$$D_2=a_1x+a_2,$$

从而 $D_n = a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$.

例 9 证明 n 阶范德蒙（Vandermonde）行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(a_i - a_j).$$

即证明，对任意的 n $(n \geqslant 2)$， n 阶范德蒙行列式等于 a_1， a_2，…， a_n 这 n 个数的所有可能的差 $a_i - a_j$ $(1 \leqslant j < i \leqslant n)$ 的乘积.

证 用数学归纳法证明

当 $n = 2$ 时， $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$，结论成立.

假设结论对 $n-1$ 阶行列式成立，现在证明 n 阶行列式的情形.

从 D_n 的最后一行开始，第 n 行减去第 $n-1$ 行的 a_1 倍，第 $n-1$ 行减去第 $n-2$ 行的 a_1 倍，自下而上，依次地每一行减去它上一行的 a_1 倍，得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & \cdots & a_n(a_n - a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}$$

再按第1列展开，得

$$D_n = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & \cdots & a_n(a_n - a_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix},$$

上式右端的行列式是一个 $n-1$ 阶范德蒙行列式，由归纳法假设，得

$$D_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1)\prod_{2\le j<i\le n}(a_i - a_j) = \prod_{1\le j<i\le n}(a_i - a_j).$$

第四节 克莱姆（Gramer）法则

本节介绍应用行列式求解线性方程组的方法，即克莱姆法则．它是二元和三元线性方程组求解公式的推广．在此我们只考虑方程的个数与未知量的个数相等的情形.

设含有 n 个未知量 n 个方程的线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

它的系数可以构成一个 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为方程组（1）的**系数行列式**.

下面用消元法解 n 元线性方程组.

首先消去方程组（1）中的未知量 x_2， x_3，…， x_n，用 D 中的第1列元素的代数余子式 A_{11}， A_{21}，…， A_{n1} 分别乘方程组的第1个，第2个，…，第 n 个方程的两边，然后将 n 个方程相加，得

$$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1})x_1 + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \cdots + a_{n2}A_{n1})x_2 + \cdots$$

$$+ (a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + \cdots + a_{nn}A_{n1})x_n = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}.$$

写成行列式的形式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $Dx_1 = D_1$.

同理，可用 D 中的第 j $(j = 2,3,\cdots,n)$ 列元素的代数余子式 A_{1j}， A_{2j}，…， A_{nj} 依次乘方程组的每一个方程，然后将 n 个方程相加，得

$$Dx_2 = D_2，\ Dx_3 = D_3，\ \cdots，\ Dx_n = D_n.$$

其中

$$D_j=\sum_{i=1}^{n}b_iA_{ij}=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,j-1}&b_1&a_{1,j+1}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&\cdots&a_{2,j-1}&b_2&a_{2,j+1}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n,j-1}&b_n&a_{n,j+1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},$$

即D_j是把系数行列式D的第j $(j=1,2,\cdots,n)$列元素换成方程组的常数项b_1，b_2，⋯，b_n所得的行列式.

显然，当$D\neq 0$时，线性方程组（1）有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad \cdots,\quad x_n=\frac{D_n}{D}.$$

定理 1（克莱姆法则） 含有n个未知量，n个方程的线性方程组，当系数行列式$D\neq 0$时，则方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad \cdots,\quad x_n=\frac{D_n}{D},$$

其中D_j $(j=1,2,\cdots,n)$是D中第j列元素换成常数项b_1，b_2，⋯，b_n，其余各列不变而得到的行列式.

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\4x_1+x_2+2x_3=1,\\x_1-x_2+2x_3+x_4=1,\\5x_1+4x_3+2x_4=3.\end{cases}$$

解 方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\4&1&2&0\\1&-1&2&1\\5&0&4&2\end{vmatrix}=-7\neq 0,$$

故方程组有唯一解. 而

$$D_1=\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&1&2&0\\1&-1&2&1\\3&0&4&2\end{vmatrix}=-7,\qquad D_2=\begin{vmatrix}1&0&1&1\\4&1&2&0\\1&1&2&1\\5&3&4&2\end{vmatrix}=7,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&0&1\\4&1&1&0\\1&-1&1&1\\5&0&3&2\end{vmatrix}=7,\qquad D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&0\\4&1&2&1\\1&-1&2&1\\5&0&4&3\end{vmatrix}=-7,$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-1,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=-1,\quad x_4=\frac{D_4}{D}=1.$$

常数项全为零的线性方程组称为**齐次线性方程组**，即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \tag{2}$$

显然，齐次线性方程组总是有解的，因为$x_1 = 0$，$x_2 = 0$，…，$x_n = 0$就是方程组的一个解，称为**零解**，也就是说，齐次线性方程组必有零解. 当解$x_1 = k_1$，$x_2 = k_2$，…，$x_n = k_n$不全为零时，称为齐次线性方程组的**非零解**.

定理 2　如果齐次线性方程组（2）的系数行列式$D \neq 0$，则它只有零解.

证　由于$D \neq 0$，故齐次线性方程组有唯一解，又因为方程组已有零解，所以方程组只有零解.

推论　如果齐次线性方程组（2）有非零解，那么它的系数行列式$D = 0$.

例 2　当k取何值时，方程组

$$\begin{cases} kx + 2y + z = 0, \\ 2x + ky \qquad = 0, \\ \ x - \ y + z = 0 \end{cases}$$

有非零解.

解　齐次线性方程组有非零解，则系数行列式$D = 0$，计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k^2 - k - 6 = (k-3)(k+2) = 0,$$

所以当$k = 3$或$k = -2$时，方程组有非零解.

习题一

1. 计算下列行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$；　（2）$\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$；　（3）$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$；

（4）$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$；　（5）$\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 1 & a & -1 \\ a & 1 & a \end{vmatrix}$；　（6）$\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix}$.

2. 当k取何值时，

（1）$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 1 & x & 0 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix} \neq 0$；　　（2）$\begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ 2 & x & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

3. 求解下列线性方程组：

（1）$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 12, \\ 2x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ 2x_1 + 5x_2 = 4. \end{cases}$

（3）$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$　　（4）$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3, \\ -x_1 - 4x_2 + x_3 = 7, \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$

4. 确定下列排列的逆序数和奇偶性.

（1）3142；　（2）251463；　（3）6573412；

（4）$135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

5. 确定下列五阶行列式的项所带的符号.

（1）$a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}a_{55}$；　（2）$a_{31}a_{22}a_{53}a_{14}a_{45}$；　（3）$a_{21}a_{44}a_{35}a_{13}a_{52}$.

6. 已知 $f(x) = \begin{vmatrix} 2x & 0 & 1 & x \\ 1 & x & -1 & 2 \\ -1 & 1 & x & 3 \\ 1 & 2 & 1 & x \end{vmatrix}$，求 $f(x)$ 中 x^4 与 x^3 的系数.

7. 用定义计算行列式.

（1）$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$；　（2）$\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{vmatrix}$.

8. 利用行列式的性质证明：

（1）$\begin{vmatrix} c-a & a-b & b-c \\ b-c & c-a & a-b \\ a-b & b-c & c-a \end{vmatrix} = 0$；

（2）$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 + xb_1 & c_2 + xb_2 & c_3 + xb_3 \\ a_1 + yc_1 & a_2 + yc_2 & a_3 + yc_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a+b & b+c & c+a \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$；

（4） $$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ (a+2)^2 & (b+2)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

9. 计算下列行列式.

（1） $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix};$$

（2） $$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix};$$

（3） $$\begin{vmatrix} c & d & a & b \\ c & b & a & d \\ a & b & c & d \\ a & d & c & b \end{vmatrix};$$

（4） $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 4 & 16 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \\ 1 & -27 & 8 & 64 \end{vmatrix};$$

（5） $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & a-1 \\ 1 & -1 & a+1 & -1 \\ 1 & a-1 & 1 & -1 \\ a+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix};$$

（6） $$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}.$$

＊10. 利用拉普拉斯定理，计算下列行列式.

（1） $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

（2） $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

11. 解下列方程：

（1） $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3-x^2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & x^2+4 & 9 \\ 2 & 5 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0;$$

（2） $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix}.$$

12. 用克莱姆法则求解下列线性方程组.

（1） $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

（2） $$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 6x_4 = 13, \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 8, \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

综合习题一

一、选择题

1. 行列式 $\begin{vmatrix} k & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ k & 0 & k \end{vmatrix} \neq 0$ 的充要条件是（　　）.

（A）$k \neq 0$； （B）$k \neq -3$； （C）$k \neq 0$ 且 $k \neq -3$； （D）$k \neq 0$ 或 $k \neq -3$.

2. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & e \\ f & 0 & g & 0 \end{vmatrix} = $（　　）.

（A）$aceg$； （B）$-aceg$； （C）0； （D）$ac-eg$.

3. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = $（　　）.

（A）$n!$； （B）$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} n!$； （C）$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n!$； （D）$0$.

4. 设 A_{ij} 是 n 阶行列式 D 中元素 a_{ij} $(i, j = 1,2,\cdots,n)$ 的代数余子式，当 $i \neq j$ 时下列各式中错误的是（　　）.

（A）$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = D$；（B）$\sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj} = D$；（C）$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = 0$；（D）$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = D$.

5. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 16 & 9 \\ 8 & -1 & 64 & 27 \end{vmatrix} = $（　　）.

（A）120； （B）-120； （C）60； （D）-60.

6. 已知行列式 $\begin{vmatrix} a_{11}+2a_{12} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21}+2a_{22} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31}+2a_{32} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = k$，则 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = $（　　）.

（A）k； （B）$-k$； （C）$-2k$； （D）0.

7. 在三阶行列式 D 中，第 2 行元素依次为 2，1，-1，它们的余子式依次为 -5，2，6，则 $D = $（　　）.

（A）18； （B）14； （C）2； （D）6.

二、填空题

1. 如果排列$31i6j4$是偶排列，则$i=$________；$j=$________.

2. 四阶行列式中，包含$a_{21}a_{34}$并且带正号的项是________________.

3. 如果n阶行列式中零元素的个数大于n^2-n，则这个行列式的值为__________.

4. 设$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$，则元素$x$的余子式$M_{21}=$______；代数余子式$A_{21}=$______.

5. $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \end{vmatrix}=$__________.

6. 已知$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1$，则$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a+3 & 2b & 2c-1 \\ a+3 & b+3 & c+3 \end{vmatrix}=$__________.

7. 设a，b为实数，如果$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0$，则$a=$______；$b=$______.

8. $\begin{vmatrix} 103 & 100 & 200 \\ 198 & 200 & 399 \\ 301 & 300 & 602 \end{vmatrix}=$________.

三、计算题

1. 已知$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$，求（1）$A_{13}-A_{23}-A_{33}+A_{43}$；

（2）$A_{41}+A_{42}+2A_{43}+A_{44}$.

2. 计算下列行列式：

（1）$\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$；　（2）$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$，其中$a_i\neq 0\ (i=1,2,3,4)$；

（3）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$；　　（4）$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 1 & 1 & 4 & \cdots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n+1 \end{vmatrix}$；

（5）$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 2001 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2002 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2003 \end{vmatrix}$；

（6）$\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

3. 已知$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ x & 1 & 0 & 0 \\ y & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1$，求$x$，$y$，$z$.

4. λ为何值时，下列方程组有非零解.

（1）$\begin{cases} 2x_1+\lambda x_2+3x_3=0, \\ \lambda x_1- x_2-4x_3=0, \\ 4x_1+ x_2- x_3=0. \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} 3x_1+2x_2+ x_3=0, \\ \lambda x_1+ x_2-2x_3=0, \\ 2x_1+\lambda x_2+3x_3=0. \end{cases}$

5. 用克莱姆法则求解下列线性方程组.

（1）$\begin{cases} 3x_1+2x_2+ x_3=5, \\ 2x_1+3x_2+ x_3=1, \\ 2x_1+ x_2+3x_3=11. \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x_1+x_2+ x_3+ x_4=0, \\ 4x_1+x_2+2x_3 =1, \\ x_1-x_2+2x_3+ x_4=1, \\ 5x_1 +4x_3+2x_4=3. \end{cases}$

四、证明题

1. 证明等式

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0 .$$

2. 已知 $f(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & x+2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & x-6 \\ -1 & x-2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$，证明 $f'(x) = 0$ 有小于 1 的正根.