

2010 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内.)

- (1) 函数 $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为()
 (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.
- (2) 设 y_1, y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个特解, 若常数 λ, μ 使 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是该方程的解, $\lambda y_1 - \mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解, 则()
 (A) $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}$. (B) $\lambda = -\frac{1}{2}, \mu = -\frac{1}{2}$.
 (C) $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{1}{3}$. (D) $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{2}{3}$.
- (3) 曲线 $y = x^2$ 与曲线 $y = a \ln x (a \neq 0)$ 相切, 则 $a =$ ()
 (A) $4e$. (B) $3e$. (C) $2e$. (D) e .
- (4) 设 m, n 均是正整数, 则反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 的收敛性()
 (A) 仅与 m 的取值有关. (B) 仅与 n 的取值有关.
 (C) 与 m, n 的取值都有关. (D) 与 m, n 的取值都无关.
- (5) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$ 确定, 其中 F 为可微函数, 且 $F'_2 \neq 0$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$ ()
 (A) x . (B) z . (C) $-x$. (D) $-z$.
- (6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} =$ ()
 (A) $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$. (B) $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy$.
 (C) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy$. (D) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$.
- (7) 设向量组 I: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由向量组 II: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示. 下列命题正确的是()
 (A) 若向量组 I 线性无关, 则 $r \leq s$. (B) 若向量组 I 线性相关, 则 $r > s$.
 (C) 若向量组 II 线性无关, 则 $r \leq s$. (D) 若向量组 II 线性相关, 则 $r > s$.
- (8) 设 A 为 4 阶实对称矩阵, 则 $A^2 + A = O$. 若 A 的秩为 3, 则 A 相似于()
 (A) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

$$(C) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(D) \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

二、填空题(本题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 把答案填在题中横线上.)

(9) 3 阶常系数线性齐次微分方程 $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$ 的通解为 $y =$ _____.

(10) 曲线 $y = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$ 的渐近线方程为_____.

(11) 函数 $y = \ln(1 - 2x)$ 在 $x = 0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0) =$ _____.

(12) 当 $0 \leq \theta \leq \pi$ 时, 对数螺线 $r = e^\theta$ 的弧长为_____.

(13) 已知一个长方形的长 l 以 2 cm/s 的速率增加, 宽 w 以 3 cm/s 的速率增加, 则当 $l = 12$ cm, $w = 5$ cm 时, 它的对角线增加的速率为_____.

(14) 设 A, B 为 3 阶矩阵, 且 $|A| = 3, |B| = 2, |A^{-1} + B| = 2$, 则 $|A + B^{-1}| =$ _____.

三、解答题(本题共 9 小题, 共 94 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t) e^{-t^2} dt$ 的单调区间与极值.

(16) (本题满分 10 分)

(I) 比较 $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1 + t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| dt$ ($n = 1, 2, \dots$) 的大小, 说明理由;

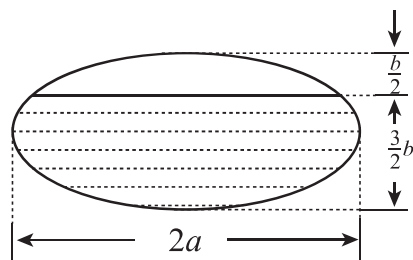
(II) 记 $u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1 + t)]^n dt$ ($n = 1, 2, \dots$), 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

(17) (本题满分 11 分)

设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2t + t^2, \\ y = \psi(t) \end{cases} (t > -1)$ 所确定, 其中 $\psi(t)$ 具有 2 阶导数, 且 $\psi(1) = \frac{5}{2}, \psi'(1) = 6$, 已知 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{4(1+t)}$, 求函数 $\psi(t)$.

(18) (本题满分 10 分)

一个高为 l 的柱体形贮油罐, 底面是长轴为 $2a$, 短轴为 $2b$ 的椭圆. 现将贮油罐平放, 当油罐中油面高度为 $\frac{3}{2}b$ 时 (如图), 计算油的质量. (长度单位为 m, 质量单位为 kg, 油的密度为常量 ρ , 单位为 kg/m^3).



(19) (本题满分 11 分)

设函数 $u = f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足等式 $4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. 确定 a, b 的值, 使等式在变换 $\xi = x + ay, \eta = x + by$ 下简化为 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.

(20) (本题满分 10 分)

计算二重积分 $I = \iint_D r^2 \sin \theta \sqrt{1 - r^2 \cos 2\theta} dr d\theta$, 其中 $D = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \sec \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}$.

(21) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 在开区间 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = \frac{1}{3}$.

证明: 存在 $\xi \in (0, \frac{1}{2}), \eta \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使得: $f'(\xi) + f'(\eta) = \xi^2 + \eta^2$.

(22) (本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 已知线性方程组 $Ax = b$ 存在两个不同的解.

(I) 求 λ, a ;

(II) 求方程组 $Ax = b$ 的通解.

(23) (本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}$, 正交矩阵 Q 使 $Q^T A Q$ 为对角矩阵, 若 Q 的第 1 列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T$, 求 a, Q .