2003 年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分)

(1) 若 $x \to 0$ 时,$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小,则 $a=$______.

(2) 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $xy+2\ln x=y^4$ 所确定,则曲线 $y=f(x)$ 在点(1,1)处的切线方程是______.

(3) $y=2^x$ 的麦克劳林公式中 x^n 项的系数是______.

(4) 设曲线的极坐标方程为 $\rho=e^{a\theta}(a>0)$,则该曲线上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积为______.

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维列向量,$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置,若 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=$______.

(6) 设3阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为3阶单位矩阵,若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$,则 $|\boldsymbol{B}|=$______.

二、选择题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分)

(1) 设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均为非负数列,且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1,\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有(　　)

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立.　　(B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在.　　(D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.

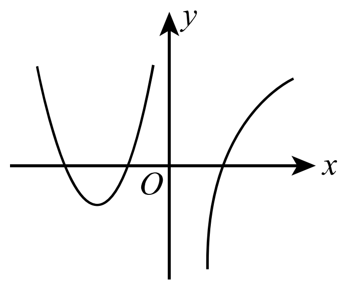
(2) 设 $a_n=\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{n}{n+1}}x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\,dx$,则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n$ 等于(　　)

(A) $(1+e)^{\frac{3}{2}}+1$.　　(B) $(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}}-1$.　　(C) $(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}}+1$.　　(D) $(1+e)^{\frac{3}{2}}-1$.

(3) 已知 $y=\dfrac{x}{\ln x}$ 是微分方程 $y'=\dfrac{y}{x}+\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 的解,则 $\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 的表达式为(　　)

(A) $-\dfrac{y^2}{x^2}$.　　(B) $\dfrac{y^2}{x^2}$.　　(C) $-\dfrac{x^2}{y^2}$.　　(D) $\dfrac{x^2}{y^2}$.

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,其导函数的图形如图所示,则 $f(x)$ 有(　　)



(A) 一个极小值点和两个极大值点.

(B) 两个极小值点和一个极大值点.

(C) 两个极小值点和两个极大值点.

(D) 三个极小值点和一个极大值点.

(5) 设 $I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}dx,I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\tan x}dx$,则(　　)

(A) $I_1>I_2>1$.　　(B) $1>I_1>I_2$.　　(C) $I_2>I_1>1$.　　(D) $1>I_2>I_1$.

(6) 设向量组 Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示,则(　　)

(A) 当 $r<s$ 时,向量组 Ⅱ 必线性相关.

(B) 当 $r>s$ 时,向量组 Ⅱ 必线性相关.

(C) 当 $r<s$ 时,向量组 Ⅰ 必线性相关.

(D) 当 $r>s$ 时,向量组 Ⅰ 必线性相关.

三、(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0,\\ 6, & x=0,\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}, & x>0,\end{cases}$ 问 a 为何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续;a 为何值时, $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点?

四、(本题满分 9 分)

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=1+2t^2,\\ y=\displaystyle\int_1^{1+2\ln t}\frac{e^u}{u}du,\end{cases}$ $(t>1)$ 所确定,求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=9}$.

五、(本题满分 9 分)

计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx$.

六、(本题满分 12 分)

设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数,且 $y'\neq0$, $x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数.

(1) 试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\dfrac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程;

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0$, $y'(0)=\dfrac{3}{2}$ 的解.

七、(本题满分 12 分)

讨论曲线 $y=4\ln x+k$ 与 $y=4x+\ln^4x$ 的交点个数.

八、(本题满分 12 分)

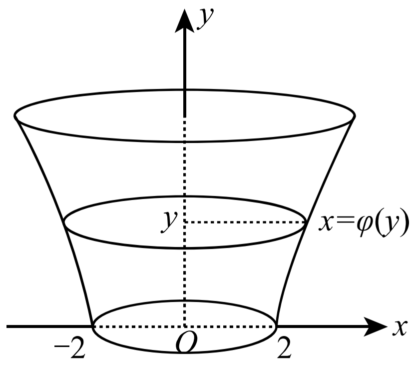
设位于第一象限的曲线 $y=f(x)$ 过点 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$,其上任一点 $P(x,y)$ 处的法线与 y 轴的交点为 Q,且线段 PQ 被 x 轴平分.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 的方程;

(2) 已知曲线 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上的弧长为 l,试用 l 表示曲线 $y=f(x)$ 的弧长 s.

九、(本题满分 10 分)

有一平底容器,其内侧壁是由曲线 $x=\varphi(y)(y\geqslant 0)$ 绕 y 轴旋转而成的旋转曲面(如图),容器的底面圆的半径为 2m. 根据设计要求,当以 $3\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$ 的速率向容器内注入液体时,液面的面积将以 $\pi\mathrm{m}^2/\mathrm{min}$ 的速率均匀扩大(假设注入液体前,容器内无液体).



(1) 根据 t 时刻液面的面积,写出 t 与 $\varphi(y)$ 之间的关系式;

(2) 求曲线 $x=\varphi(y)$ 的方程.

(注:m 表示长度单位米,min 表示时间单位分.)

十、(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,在开区间 (a,b) 内可导,且 $f'(x)>0$. 若极限 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在,证明:

(1) 在 (a,b) 内 $f(x)>0$;

(2) 在 (a,b) 内存在点 ξ,使 $\dfrac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}=\dfrac{2\xi}{f(\xi)}$;

(3) 在 (a,b) 内存在与(2)中 ξ 相异的点 η,使

$$f'(\eta)(b^2-a^2)=\frac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

十一、(本题满分 10 分)

若矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{pmatrix}$ 相似于对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,试确定常数 a 的值,并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

十二、(本题满分 8 分)

已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1: ax+2by+3c=0,$$
$$l_2: bx+2cy+3a=0,$$
$$l_3: cx+2ay+3b=0.$$

试证:这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a+b+c=0$.