第三章　线性方程组

线性方程组的求解是一个古老的问题，在我国古代名著《九章算术》中，求解一次方程组时使用的“直除法”，已经体现了矩阵初等变换的思想。在近代研究和生产中，很多复杂的实际问题都可以归结到求解线性方程组。第一章中我们已经初步讨论了解线性方程组的克莱姆法则，但是用克莱姆法则解线性方程组是有条件的. 它要求线性方程组中所含方程的个数与未知量的个数相等，而且系数行列式不能为零. 然而我们所遇到的许多线性方程组不满足或不完全满足上面的两个条件. 本章将讨论一般线性方程组的基本解法及 n 维向量的理论，进一步系统的对线性方程组进行研究，包括线性方程组解的判定、解的性质，并利用 n 维向量的线性关系，给出当线性方程组有无穷多解时解的结构.

第一节　高斯(Gauss)消元法

一、基本概念

线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

其中 x_j（$j=1,2,\cdots,n$）为未知量，a_{ij}（$i=1,2,\cdots,m$； $j=1,2,\cdots,n$）为方程组的系数，b_i（$i=1,2,\cdots,m$）为常数项.

线性方程组（1）用连加号表示为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i=1,2,\cdots,m). \tag{2}$$

按照矩阵乘法运算及矩阵相等的定义，线性方程组（1）的矩阵形式为

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}, \tag{3}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为线性方程组（1）的**系数矩阵**. 记

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}, \tag{4}$$

矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$称为线性方程组（1）的**增广矩阵**.

如果线性方程组（1）的常数项$b_1,b_2,\cdots,b_m$都为零，即

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0. \end{cases}$$

则称线性方程组（1）为**齐次线性方程组**，其矩阵形式为$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$.

如果线性方程组（1）的常数项$b_1,b_2,\cdots,b_m$不都为零（即至少有一个不为零），则称线性方程组（1）为**非齐次线性方程组**.

称$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$为非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$**对应的齐次线性方程组或导出方程组**.

二、高斯消元法

下面通过一个实例说明高斯消元法解一般线性方程组的方法和步骤.

例如，解方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=4, \\ x_1-2x_2+4x_3=7, \\ 2x_1+6x_2+7x_3=5. \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 7 \\ 2 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

第二个方程减去第一个方程，第三个方程减去第一个方程的2倍，得

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=4, \\ -4x_2+x_3=3, \\ 2x_2+x_3=-3. \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

第二个方程和第三个方程互换，得

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=4, \\ 2x_2+x_3=-3, \\ -4x_2+x_3=3. \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

第三个方程加上第二个方程的2倍，得

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=4, \\ 2x_2+x_3=-3, \\ 3x_3=-3. \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

解得$x_1=9,x_2=-1,x_3=-1$.

由上面解方程过程可以看出，一般对线性方程组进行三种运算：

1.互换两个方程的位置；

2.用一个非零常数乘以某个方程的左右两端；

3.用一个非零常数乘以某个方程的左右两端后加到另一个方程上去.

线性方程组上述的三种运算，相当于对应的增广矩阵进行了初等行变换，实质上，最终化成了行阶梯形矩阵.

利用初等行变换将线性方程组的增广矩阵化为行阶梯形矩阵，以此行阶梯形矩阵为增广矩阵对应的线性方程组与原线性方程组同解，再利用回代的方法求出解的过程，称为**高斯消元法**.

下面对一般的线性方程组（1）利用高斯消元法，讨论其解的情况.

对线性方程组（1）的增广矩阵（4）进行初等行变换，化为行阶梯形矩阵，如下：

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1n} & d_1 \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2r} & b_{2,r+1} & \cdots & b_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{rr} & b_{r,r+1} & \cdots & b_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

或

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & * & * & * & \cdots & \cdots & b_{1s} & * & \cdots & b_{1n} & d_1 \\ 0 & \cdots & 0 & b_{2i} & * & \cdots & \cdots & b_{2s} & * & \cdots & b_{2n} & d_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{rs} & * & \cdots & b_{rn} & d_r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

以行阶梯型矩阵（5）或（6）为增广矩阵对应的线性方程组与线性方程组（1）同解.因此，线性方程组（1）解的情况与以行阶梯型矩阵（5）或（6）为增广矩阵对应的线性方程组解的情况相同.为了讨论方便，我们把（5）所对应的线性方程组写出来，即

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots b_{1r}x_r + \cdots + b_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad b_{22}x_2 + \cdots b_{2r}x_r + \cdots + b_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad b_{rr}x_r + \cdots + b_{rn}x_n = d_r, \\ \qquad\qquad\qquad 0 = d_{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

其中$b_{ii}\neq 0\ (i=1,2,\cdots,r)$. 方程组中“$0=0$”是一些恒等式，可以去掉，并不影响方程组的解.

线性方程组（7）是否有解就取决于其中最后一个方程

$$0=d_{r+1} \tag{8}$$

是否有解，即是否存在一组数$x_1=a_1,x_2=a_2,\cdots,x_n=a_n$，使得（8）成为恒等式. 这就给出了线性方程组(1)是否有解的一个重要结论：当$d_{r+1}=0$时，线性方程组(1)有解；当$d_{r+1}\neq 0$时，线性方程组（1）无解.

在有解的情况下，我们来求解，分两种情形来讨论：

1. 当$r=n$时，方程组（7）为下列形式

$$\begin{cases} b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1n}x_n=d_1, \\ \qquad b_{22}x_2+\cdots+b_{2n}x_n=d_2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad b_{nn}x_n=d_n. \end{cases} \tag{9}$$

其中$b_{ii}\neq 0\ (i=1,2,\cdots,n)$. 从最后一个方程开始，用回代的方法，逐个唯一地可以解出$x_n,x_{n-1},\cdots,x_1$. 此时，原线性方程组（1）有唯一解.

2. 当$r<n$时，方程组（7）为下列形式

$$\begin{cases} b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1r}x_r+b_{1,r+1}x_{r+1}+\cdots+b_{1n}x_n=d_1, \\ \qquad b_{22}x_2+\cdots+b_{2r}x_r+b_{2,r+1}x_{r+1}+\cdots+b_{2n}x_n=d_2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad b_{rr}x_r+b_{r,r+1}x_{r+1}+\cdots+b_{rn}x_n=d_r. \end{cases} \tag{10}$$

将每个方程中后$n-r$个未知量项移至等号的右侧，有

$$\begin{cases} b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1r}x_r=d_1-b_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-b_{1n}x_n, \\ \qquad b_{22}x_2+\cdots+b_{2r}x_r=d_2-b_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-b_{2n}x_n, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad b_{rr}x_r=d_r-b_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-b_{rn}x_n. \end{cases} \tag{11}$$

取$x_{r+1}=k_1,x_{r+2}=k_2,\cdots,x_n=k_{n-r}$，其中$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$为任意常数，从最后一个方程开始，用回代的方法，可以解出方程组（11），也就是原线性方程组（1）有如下无穷多个解：

$$\begin{cases} x_1 \ = p_{10} + p_{11}k_1 + p_{12}k_2 + \cdots + p_{1,n-r}k_{n-r}, \\ x_2 \ = p_{20} + p_{21}k_1 + p_{22}k_2 + \cdots + p_{2,n-r}k_{n-r}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r \ = p_{r0} + p_{r1}k_1 + p_{r2}k_2 + \cdots + p_{r,n-r}k_{n-r}, \\ x_{r+1} = k_1, \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n \ = k_{n-r}. \end{cases}$$

其中 $p_{ij}\ (i=1,2,\cdots,r;\ j=0,1,2,\cdots,n-r)$ 为固定常数，$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为相互独立的任意常数. 此处，$x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 称为线性方程组的 $n-r$ 个自由未知量.

另外，$r>n$ 的情况不可能出现.

总结上述过程可知，如果当 $d_{r+1}\neq 0$，则有 $R(\boldsymbol{A})=r$，而 $R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r+1$，即 $R(\boldsymbol{A})\neq R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$，此时线性方程组（1）无解；如果当 $d_{r+1}=0$，则有 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r$，此时线性方程组（1）有解. 而当 $r=n$ 时，有唯一解；当 $r<n$ 时，有无穷多个解.

由以上讨论，可得如下定理.

定理 1　线性方程组（1）有解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$. 进一步，当 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r=n$ 时，（1）有唯一解；当 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r<n$ 时，（1）有无穷多个解，此时含有 $n-r$ 个自由未知量.

推论　线性方程组（1）的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，且 $R(\boldsymbol{A})=n$，则线性方程组（1）有唯一解.

实质上，上述的推论就是第一章中的克莱姆法则.

对于齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{12}$$

其矩阵形式为

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}, \tag{13}$$

增广矩阵如下

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{O})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{pmatrix},$$

易知，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{O})$. 因此，齐次线性方程组（12）总有解. 很显然，$x_1=0,x_2=0,\cdots,$

$x_n = 0$就是（12）的一组解，称其为齐次线性方程组（12）的**零解**. 如果齐次线性方程组（12）的一组解 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中至少有一个不为零，称其为齐次线性方程组（12）的**非零解**.

根据定理 1，可得下列结论.

定理 2 齐次线性方程组（12）只有零解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A}) = n$；齐次线性方程组（12）有非零解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A}) < n$.

推论 设齐次线性方程组（12）的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，则齐次线性方程组（12）只有零解的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$；齐次线性方程组（12）有非零解的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}| = 0$.

注：如果齐次线性方程组（12）的系数矩阵 $\boldsymbol{A}_{m \times n}$，满足 $m < n$，即方程的个数小于未知数的个数，那么齐次线性方程组（12）必有非零解.

例 1 求解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

解 对该方程组的增广矩阵施行初等行变换

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -18 & 18 \end{pmatrix},$$

由于 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 4$，故方程组有唯一解. 与原方程组同解的方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ -x_2 - 3x_3 + x_4 = -9, \\ -x_3 + 4x_4 = -6, \\ -18x_4 = 18. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 2, \\ x_4 = -1. \end{cases}$$

例 2 求解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad\quad - 3x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -16. \end{cases}$$

解　对该方程组的增广矩阵施行初等行变换

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 6 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -16 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

由于 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) = 3 < 4$，故方程组有无穷多解. 与原方程组同解的方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad\quad - 3x_4 = -1, \\ \quad - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ \qquad\qquad\qquad x_4 = -1. \end{cases}$$

取 x_3 为自由变量，解得

$$\begin{cases} x_1 = -k - 2, \\ x_2 = k - 2, \\ x_3 = k, \\ x_4 = -1 \end{cases} \quad （k\text{ 为任意常数}）.$$

例 3　求解方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

解　对该方程组的增广矩阵施行初等行变换

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

由于 $2 = R(\boldsymbol{A}) \neq R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) = 3$，故方程组无解.

例 4　求解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

解　对该方程组的系数矩阵施行初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&3\\1&2&1&1\\1&1&-3&1\\1&1&3&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&1&0&-2\\0&0&2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

由于 $R(\boldsymbol{A})=3<4$，故齐次线性方程组具有非零解. 与原方程组同解的方程组为

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+3x_4=0,\\ \quad x_2 \qquad -2x_4=0,\\ \qquad 2x_3+\ x_4=0.\end{cases}$$

取 x_4 为自由变量，解得

$$\begin{cases}x_1=-\dfrac{9}{2}k,\\ x_2=2k,\\ x_3=-\dfrac{1}{2}k,\\ x_4=k\end{cases}\quad（k\text{ 为任意常数}）.$$

例 5　λ 为何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+\ x_2+\ x_3=0,\\ x_1+\lambda x_2+\ x_3=0,\\ x_1+\ x_2+\lambda x_3=0.\end{cases}$$

有非零解?

解　要使该齐次线性方程组有非零解只需其系数行列式

$$\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=0,$$

即

$$(1-\lambda)\left(2-\lambda-\lambda^2\right)=0,$$

故 $\lambda=-2$ 或 $\lambda=1$ 时，齐次线性方程组有非零解.

例 6　讨论方程组

$$\begin{cases}x_1+\ x_2+\ x_3+\ x_4+\ x_5=1,\\ 3x_1+2x_2+\ x_3+\ x_4-3x_5=a,\\ \qquad x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3,\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-\ x_5=b\end{cases}$$

的解的情况；若有解，求出它的全部解.

解　增广矩阵

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\3&2&1&1&-3&a\\0&1&2&2&6&3\\5&4&3&3&-1&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&a\\0&0&0&0&0&b-2\end{pmatrix},$$

当 $a\neq 0$ 或 $b\neq 2$ 时，$2=R(\boldsymbol{A})\neq R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3$，方程组无解；

当 $a=0$ 且 $b=2$ 时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=2<5$，方程组有无穷多解. 与原方程组同解的方程组为

$$\begin{cases}x_1+x_2+\ \ x_3+\ \ x_4+\ \ x_5=1,\\ \qquad x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3.\end{cases}$$

令 $x_3=k_1,\ x_4=k_2,\ x_5=k_3$（$k_1,k_2,k_3$ 为任意常数），解得

$$\begin{cases}x_1=-2+k_1+k_2+5k_3,\\x_2=3-2k_1-2k_2-6k_3,\\x_3=k_1,\\x_4=k_2,\\x_5=k_3\end{cases}\qquad（k_1,k_2,k_3\text{ 为任意常数}）.$$

第二节　n 维向量及其运算

本节我们将把解析几何中的平面向量和空间向量的有关概念及运算推广到一般的 n 维向量.

一、n 维向量的概念

定义 1　由数域 $\mathbf{F}$ 上的 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的 n 元有序数组

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

称为数域 $\mathbf{F}$ 上的一个 n 维向量，记作 $\boldsymbol{\alpha}$，其中 $a_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第 i 个分量.

n 维向量写成行矩阵的形式，称为**行向量**，记为

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)；$$

写成列矩阵的形式，称为**列向量**，记为

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},$$

或

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}.$$

所有分量为零的向量称为**零向量**，记作$\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0)$.

分量都是实数的向量称为**实向量**．如不特别指出，本书讨论的都是实向量.

在平面直角坐标系中，平面上的向量$\overrightarrow{OM}$可用它的终点坐标(x,y)表示，其中x,y都是实数. 因此，$\overrightarrow{OM}$是实数域上的二维向量.

在空间直角坐标系中，空间中的向量$\overrightarrow{OM}$与实有序数组(x,y,z)一一对应. 因此，$\overrightarrow{OM}$是实数域上的三维向量. n维向量则是二维、三维向量的推广.

例 1（1）记录有60人的某班学生的化学成绩，其分别为$x_1,x_2,\cdots,x_{60}$，则可将其记为一个60维的向量$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_{60})$；

（2）一批工业产品发送到4个地区的数量分别为x_1,x_2,x_3,x_4，则可记为一个4维向量$\boldsymbol{\beta}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$.

定义２ 如果n维向量$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$与$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，满足

$$a_i=b_i\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

则称向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$相等，记作$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

定义３ 给定向量$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，称向量

$$(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$$

为向量$\boldsymbol{\alpha}$的负向量，记作$-\boldsymbol{\alpha}$.

二、向量的线性运算

由于向量可以看成是特殊的矩阵，因此，我们可以类似的定义向量的运算.

定义４ 设n维向量$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，则向量

$$(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$$

称为向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的和，记为$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$. 也就是说，两个$n$维向量的和仍是$n$维向量，其分量为两个向量对应分量之和.

根据向量的加法和负向量的定义，可以定义向量的减法：

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})=(a_1-b_1,a_2-b_2,\cdots,a_n-b_n).$$

定义５　设$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$是一个$n$维向量，$k$为常数，则向量

$$(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$$

称为数k与向量$\boldsymbol{\alpha}$的乘积，记为$k\boldsymbol{\alpha}$. 即数k与n维向量的乘积仍为n维向量，其分量是数k与向量$\boldsymbol{\alpha}$对应分量的乘积.

例２　利用向量的线性运算直接计算得

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+1\\1+2\\1+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix},\quad 3\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times1\\3\times2\\3\times3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}.$$

向量的加法与数乘这两种运算统称为**向量的线性运算**. 向量的线性运算满足如下运算规律：

设$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$为$n$维向量，$k,l$为实数，则有

（1）$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$；

（2）$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$；

（3）$\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$；

（4）$\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$；

（5）$k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$；

（6）$(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$；

（7）$(kl)\boldsymbol{\alpha}=k(l\boldsymbol{\alpha})=l(k\boldsymbol{\alpha})$；

（8）$1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$.

例 3　设向量$\boldsymbol{\alpha}=(1,3,0,5)$，$\boldsymbol{\beta}=(1,2,1,1)$，求向量$\boldsymbol{\gamma}$，使得$2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\beta}$.

解　由已知得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}&=\frac{1}{3}(-2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=-\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}+\frac{1}{3}\boldsymbol{\beta}=-\frac{2}{3}(1,3,0,5)+\frac{1}{3}(1,2,1,1)\\&=(-\frac{2}{3},-2,0,-\frac{10}{3})+(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})=(-\frac{1}{3},-\frac{4}{3},\frac{1}{3},-3).\end{aligned}$$

第三节　向量组的线性相关性

一、线性组合

定义 1　给定 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$，如果存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m \tag{1}$$

成立，则称 $\boldsymbol{\beta}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合，或称 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示（或线性表出）.

例 1　任意一个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 都是 n 维向量组 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,\cdots,0)$，$\boldsymbol{e}_2=(0,1,\cdots,0)$，$\cdots$，$\boldsymbol{e}_n=(0,0,\cdots,1)$ 的一个线性组合. 其中向量组 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 称为 n 维基本（或单位）向量组.

事实上，指定数组 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，有 $\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{e}_n$ 成立，所以向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由向量组 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 线性表示.

例２　向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中任一向量都可由该向量组线性表示.

事实上，取定一组数 $0,0,\cdots,1,\cdots,0,0$，则有

$$\boldsymbol{\alpha}_i=0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+1\boldsymbol{\alpha}_i+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_m \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

成立，所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中每一个向量都可由该向量组线性表示.

例３　零向量是任一相同维数的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合.

事实上，取定数组 $0,0,\cdots,0$，有 $\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_m$ 成立，则零向量是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合.

由线性组合的定义，判别一个 n 维向量 $\boldsymbol{\beta}$ 是否是 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合，只需验证是否存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得（1）式成立. 即当

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_m=\begin{pmatrix}a_{1m}\\a_{2m}\\\vdots\\a_{nm}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

时，有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=k_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix}+\cdots+k_m\begin{pmatrix}a_{1m}\\a_{2m}\\\vdots\\a_{nm}\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta}. \qquad (2)$$

由向量的线性运算易知，（2）式即为如下非齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}k_1+a_{12}k_2+\cdots+a_{1m}k_m=b_1,\\a_{21}k_1+a_{22}k_2+\cdots+a_{2m}k_m=b_2,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}k_1+a_{n2}k_2+\cdots+a_{nm}k_m=b_n.\end{cases} \qquad (3)$$

那么，判别 $\boldsymbol{\beta}$ 是否是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合的问题，转化为讨论方程组（3）是否有解的问题. 有解，（1）式成立，$\boldsymbol{\beta}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合；无解，（1）式不成立，则 $\boldsymbol{\beta}$ 不是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合.

由此得到如下的定理：

定理 1　给定 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$，向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示的充分必要条件是方程组 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{\beta}$ 有解. 特别地，若方程组（1）有唯一解，则线性表示式是唯一的.

例 4　设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}9\\6\\7\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}$，判断 $\boldsymbol{\beta}$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示. 若能，求出表达式.

解　令 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，得非齐次线性方程组

$$\begin{cases}k_1+3k_2+9k_3=5,\\2k_1\qquad\;+6k_3=1,\\-3k_1+\;k_2+7k_3=0.\end{cases}$$

对方程组的增广矩阵作初等行变换化为行最简形矩阵，

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}1&3&9&5\\2&0&6&1\\-3&1&7&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1/2\\0&1&0&3/2\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

由于该线性方程组系数矩阵的秩与增广矩阵的秩相等且等于未知量的个数，故方程组有唯一解

$$k_1=\frac{1}{2},k_2=\frac{3}{2},k_3=0.$$

因此，由定理 1，向量$\boldsymbol{\beta}$能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，而且表示法唯一. 即

$$\boldsymbol{\beta}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{3}{2}\boldsymbol{\alpha}_2 .$$

根据线性方程组的相容性与其增广矩阵秩的关系，可得以下结论：

定理２　向量$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示的充分必要条件是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$构成的矩阵与向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$构成的矩阵有相同的秩，即

$$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}).$$

例５　判断向量$\boldsymbol{\beta}=(4,3,0,11)$是否是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,5)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,1,1)$的线性组合.

解　设$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}})$，$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})$，对$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})$作初等行变换，化为行最简形矩阵：

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&-1&3\\-1&1&0\\5&1&11\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

因为$R(\boldsymbol{A})=2$，$R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=3$，所以$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示.

二、向量组的线性相关性

定义２　给定向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，如果存在一组不全为零的实数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0} \tag{4}$$

成立，则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关，否则称该向量组线性无关. 即当且仅当$k_1=k_2=\cdots=k_m=0$时，上式才成立，则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关.

显然，含有零向量的向量组必线性相关.

定理３　向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ $(m\geq 2)$线性相关的充分必要条件是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中至少有一个向量可由其余向量线性表示.

证　（必要性）设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关，由定义 2，存在一组不全为零的实数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}.$$

不妨设$k_i\neq 0$，则有

$$\boldsymbol{\alpha}_i=-\frac{k_1}{k_i}\boldsymbol{\alpha}_1-\cdots-\frac{k_{i-1}}{k_i}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}-\frac{k_{i+1}}{k_i}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}-\cdots-\frac{k_m}{k_i}\boldsymbol{\alpha}_m,$$

即$\boldsymbol{\alpha}_i$可由其余向量线性表示.

（充分性）设

$$\boldsymbol{\alpha}_i=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+l_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+l_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

则有

$$l_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+l_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}-\boldsymbol{\alpha}_i+l_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$$

故有向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关.

例６　n维基本（或单位）向量组$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$线性无关.

证　对于n维基本向量组，假设存在一组数$k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得

$$k_1\boldsymbol{e}_1+k_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{e}_n=\mathbf{0}.$$

由向量的线性运算，得

$$k_1\boldsymbol{e}_1+k_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{e}_n=(k_1,k_2,\cdots,k_n)=(0,0,\cdots,0)=\mathbf{0},$$

从而得到唯一解$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$. 故向量组$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$线性无关.

值得注意的是，定理 3 并没有说向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关，则每个向量都可由其余向量线性表示. 事实上，若取由非零向量$\boldsymbol{\alpha}$与零向量$\mathbf{0}$两个向量构成的向量组，显然向量组线性相关，但是不存在数k，使得$\boldsymbol{\alpha}=k\mathbf{0}$成立，故向量$\boldsymbol{\alpha}$不是零向量的线性组合.

由定理３我们很容易得到下面的推论：

推论１　**向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\ (m\geq 2)$线性无关的充分必要条件是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中每个向量都不能由其余向量线性表示.**

判别n维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$的线性相关性，如果

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_m=\begin{pmatrix}a_{1m}\\a_{2m}\\\vdots\\a_{nm}\end{pmatrix},$$

由定义相当于讨论如下齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + a_{1m}k_m = 0, \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{2m}k_m = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}k_1 + a_{n2}k_2 + \cdots + a_{nm}k_m = 0 \end{cases}$$

有无非零解的问题. 其中，方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$. 如果系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A}) < m$，则齐次线性方程组有非零解，故向量组线性相关；若 $R(\boldsymbol{A}) = m$，则方程组仅有零解，故向量组线性无关.

由上面的讨论，得到如下定理：

定理４ n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关的充分必要条件是由这 m 个向量构成的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A}) < m$；线性无关的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A}) = m$.

定理５ $n+1$ 个 n 维向量构成的向量组必线性相关.

推论 线性无关的 n 维向量组最多含有 n 个 n 维向量.

例７ 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关.

证 设

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2) + k_2(\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3) + k_3(\boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\alpha}_1) = \boldsymbol{0},$$

整理得

$$(k_1 - k_3)\boldsymbol{\alpha}_1 + (k_2 - k_1)\boldsymbol{\alpha}_2 + (k_3 - k_2)\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0}.$$

因为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，有

$$k_1 - k_3 = k_2 - k_1 = k_3 - k_2 = 0.$$

即得到齐次线性方程组

$$\begin{cases} k_1 \qquad - k_3 = 0, \\ -k_1 + k_2 \qquad = 0, \\ \qquad -k_2 + k_3 = 0. \end{cases}$$

因这个方程组系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

则方程组有非零解，故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关.

定理６ 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关，

则向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，且表示法唯一.

证 （1）先证向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示.

因向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m,l$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+l\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}.$$

而 $l\neq 0$.

事实上，若 $l=0$，则上式可化为

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}.$$

而 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 不全为零，从而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关. 这与已知矛盾，故 $l\neq 0$.

因为 $l\neq 0$，故有

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{k_1}{l}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{k_2}{l}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{k_m}{l}\boldsymbol{\alpha}_m,$$

即向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示.

（2）再证表示法的唯一性.

假设存在两组数 $l_1,l_2,\cdots,l_m$ 与 $p_1,p_2,\cdots,p_m$，使得

$$\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

$$\boldsymbol{\beta}=p_1\boldsymbol{\alpha}_1+p_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+p_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

同时成立. 两式相减得

$$(l_1-p_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(l_2-p_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(l_m-p_m)\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}.$$

由于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，则有

$$l_1-p_1=l_2-p_2=\cdots=l_m-p_m=0,$$

即

$$l_1=p_1,\ l_2=p_2,\cdots,l_m=p_m.$$

因此，表示式是唯一的.

由定理 6，很容易得到如下推论：

推论　若含有 n 个 n 维向量的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，则任意一个 n 维向量 $\boldsymbol{\beta}$ 都可由该向量组线性表示，且表示法唯一.

例 8　判断下列向量组是否线性相关？如果线性相关，试找出其中一个向量是其余向量的线性组合，并写出它的表达式

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,-2)$， （2）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(4,5,0)$.

解　（1）设存在数 k_1,k_2,k_3，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0},$$

即为齐次线性方程组

$$\begin{cases} k_1-k_2+\ k_3=0, \\ -k_1\qquad +3k_3=0, \\ k_1+k_2-2k_3=0. \end{cases}$$

为了求解该方程组，对系数矩阵作初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

则 $R(\boldsymbol{A})=3$，等于方程组中未知量的个数，故方程组仅有零解，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.

（2）设存在数 k_1,k_2,k_3，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0},$$

即为齐次线性方程组

$$\begin{cases} k_1+2k_2+4k_3=0, \\ \qquad\ k_2+5k_3=0. \end{cases}$$

令 $k_3=1,$ 可得一组非零解 $k_1=6,k_2=-5,k_3=1$

于是有 $6\alpha_1-5\alpha_2+\alpha_3=0$，这说明该向量组线性相关，并有 $-6\alpha_1+5\alpha_2=\alpha_3$.

下面给出向量组线性相关性的一些简单判别：

（1）单个非零向量线性无关；

（2）含有零向量的向量组线性相关；

（3）两个分量不为零的向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 线性相关（无关）的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的分量对应成比例（不成比例）；

（4）若部分向量组线性相关，则整体向量组线性相关；若整体向量组线性无关，则任一部分向量组线性无关；

（5）向量个数多于 n 的 n 维向量组线性相关.

第四节　极大线性无关组与向量组的秩

一、向量组间的关系

定义 1　设有两个向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t, \tag{2}$$

如果向量组（1）中的每个向量都可由向量组（2）线性表示，则称向量组（1）可以由向量组（2）线性表示. 如果两个向量组可以相互线性表示，则称向量组（1）与向量组（2）等价. 记作

$$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\} \cong \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t\}.$$

容易验证，等价的向量组有如下性质：

（1）自反性：

$$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\} \cong \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\};$$

（2）对称性：若

$$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\} \cong \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t\},$$

则

$$\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t\} \cong \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\};$$

（3）传递性：若

$$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\} \cong \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t\},$$

$$\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t\} \cong \{\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_m\},$$

则

$$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\} \cong \{\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_m\}.$$

例 1　向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,2,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = (2,2,2)$ 等价于部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$.

事实上，显然 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 中每一个向量都可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，即

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 0\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\alpha}_2 = 0\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2;$$

其次，向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 也可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，即

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 0\boldsymbol{\alpha}_2 + 0\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{\alpha}_2 = 0\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + 0\boldsymbol{\alpha}_3.$$

因此，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 等价于其部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$.

二、向量组的极大线性无关组

定义２　设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，如果它的一个部分组$\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir}$ $(r\le m)$满足：

（1）$\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir}$线性无关；

（2）向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中的每一个向量都可由部分组$\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir}$线性表示，

则称部分组$\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir}$是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$的一个极大线性无关组，简称为极大无关组.

显然，一个线性无关的向量组的极大线性无关组是向量组自身.

例 1 中，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的一个极大线性无关组. 容易验证，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$也是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的一个极大线性无关组. 由此可知，极大线性无关组可以不唯一.

定理 1　如果向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性表示，且$r>s$，则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性相关.

证　为了证明$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性相关，只需找到一组不全为零的数$x_1,x_2,\cdots,x_r$，使得

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0}. \tag{1}$$

由于向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性表示，即存在一组数$l_{ij}(i=1,2,\cdots,r;j=1,2,\cdots,s)$使得

$$\boldsymbol{\alpha}_i=\sum_{j=1}^{r}l_{ij}\boldsymbol{\beta}_j\quad(i=1,2,\cdots,r). \tag{2}$$

将（2）式代入（1）式可得

$$\sum_{j=1}^{s}(\sum_{i=1}^{r}l_{ij}x_i)\boldsymbol{\beta}_j=\mathbf{0}. \tag{3}$$

注意到$r>s$，齐次线性方程组

$$\sum_{i=1}^{r}l_{ij}x_i=0\quad(j=1,2,\cdots,s)$$

未知量的个数大于方程的个数，则该方程组有非零解，从而证明存在一组不全为零的数x_i $(i=1,2,\cdots,r)$使得（3）式成立. 也即证明了方程组（1）有非零解. 故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性相关.

定理 1 说明若个数多的向量组被个数少的向量组线性表示，则其必线性相关.

由定理 1 可以得到如下推论：

推论 1　如果向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性表示，且$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,$

$\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，则 $r \le s$.

推论２　两个等价的线性无关的向量组所含向量的个数相同.

定理２　一个向量组的极大线性无关组之间彼此等价，并与向量组自身等价. 其所有的极大线性无关组所含向量的个数相同.

定理 2 表明，向量组的极大线性无关组所含向量的个数与极大线性无关组的选择无关，它反映了向量组本身固有的性质.

三、向量组的秩及其与矩阵的秩的关系

定义３　向量组的极大线性无关组中所含向量的个数，称为向量组的秩.

显然，例 1 中向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为 2 .

等价的向量组有相同的秩.

对于 $m \times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

若把 $\boldsymbol{A}$ 按列分块，令 $\boldsymbol{\alpha}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{mi})^{\mathrm{T}}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ ，则有

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n).$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 组成的列向量组，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组.

若把 $\boldsymbol{A}$ 按行分块，令 $\boldsymbol{\beta}_j = (a_{j1}, a_{j2}, \cdots, a_{jn})$$(j = 1, 2, \cdots, m)$ ，则有

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_m \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 组成的行向量组，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组.

定义４　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行秩，列向量组的秩称为 $\boldsymbol{A}$ 的列秩.

定理３　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行秩等于列秩，且等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

证　设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$ ，$R(\boldsymbol{A}) = r$ ，则存在 $\boldsymbol{A}$ 中的某个 r 阶子式 $\boldsymbol{D}_r \ne 0$. 根据第三节定理 4，$\boldsymbol{A}$ 中 $\boldsymbol{D}_r$ 所在的 r 列向量线性无关；又因为 $\boldsymbol{A}$ 中所有的 $r+1$ 阶子式全为零，故 $\boldsymbol{A}$ 中任意 $r+1$ 个列向量线性相关. 因此，$\boldsymbol{D}_r$ 所在的 r 列向量就是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大线性无关组，故 $\boldsymbol{A}$ 的列秩为 r ，等于 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

同理，$\boldsymbol{A}$ 的行秩也等于 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

根据定理 3 知，求解一个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩，转化为求解由向量组构成的矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$ 的秩的问题.

下面我们给出一个求解向量组的秩和极大线性无关组的一般方法.

定理4　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等行变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组与 $\boldsymbol{B}$ 对应的列向量组具有相同的线性相关性.

例2　求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,4,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,3,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(3,5,2)$ 的一个极大线性无关组，并把其余向量用极大线性无关组线性表示.

解　由定理 4，首先把向量组按列排成矩阵 $\boldsymbol{A}$，再对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换化为行最简形矩阵，

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}2&1&2&3\\4&1&3&5\\2&0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1/2&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=\boldsymbol{C}.$$

显然 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{C})=2$. 因此，向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 的极大线性无关组中所含向量的个数为 2. 因为矩阵 $\boldsymbol{C}$ 中第一列向量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 和第二列向量 $\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关，则与其对应的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关. 从而，部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是所求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组.

其次，由矩阵 $\boldsymbol{C}$ 易知，

$$\boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2,\quad \boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2,$$

所以有

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2.$$

*第五节　向量空间

本节将介绍向量空间的概念和性质，讨论向量空间的基与坐标，并将这些理论应用于线性方程组的求解.

一、向量空间的定义

定义 1　设 $\mathbf{V}$ 是数域 $\mathbf{F}$ 上的 n 维向量构成的非空集合，若满足

（1）$\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{V}$，有 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{V}$；

（2）$\forall\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{V}$，$k\in\mathbf{F}$，有 $k\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{V}$，

则称集合 $\mathbf{V}$ 为数域 $\mathbf{F}$ 上的向量空间. 若 $\mathbf{F}$ 为实数域 $\mathbf{R}$，则称 $\mathbf{V}$ 为实向量空间，记为 $\mathbf{R}^n$.

定义 1 中条件（1）与（2）称为集合$\mathbf{V}$关于向量加法与数乘这两种运算封闭. 由n维向量构成的集合若构成向量空间，则必须关于向量加法及数乘运算封闭.

除非特别说明，本书的向量空间都是实数域$\mathbf{R}$上的向量空间.

例 1　实数域$\mathbf{R}$上的所有n维向量构成的集合构成一个向量空间，记为$\mathbf{R}^n$.

事实上，因为$\forall \boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in\mathbf{R}^n$，则有

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)\in\mathbf{R}^n;$$

又由$\forall \boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}^n$，$k\in\mathbf{R}$，有

$$k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)\in\mathbf{R}^n.$$

故集合$\mathbf{V}$构成一个向量空间.

单独一个零向量构成的向量空间称为**零空间**.

例 2　设$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$为两个已知的$n$维向量，则集合$\mathbf{V}=\left\{\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}\,\middle|\,k,l\in\mathbf{R}\right\}$也是一个向量空间.

事实上，若任取向量$\boldsymbol{x}_1=k_1\boldsymbol{\alpha}+l_1\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{x}_2=k_2\boldsymbol{\alpha}+l_2\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{V}$，则显然

$$\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2=(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}+(l_1+l_2)\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{V},$$

$$p\boldsymbol{x}_1=(k_1p)\boldsymbol{\alpha}+(l_1p)\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{V}.$$

其中$k_1,k_2,l_1,l_2,p\in\mathbf{R}$，故$\mathbf{V}$是一个向量空间.

上述向量空间称为**由向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$生成的向量空间**，记为$\mathbf{L}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$.

一般的，由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$所生成的向量空间为

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=\left\{\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\,\middle|\,k_1,k_2,\cdots,k_m\in\mathbf{R}\right\}.$$

定义 2　设$\mathbf{W}$是向量空间$\mathbf{V}$的一个非空子集，若$\mathbf{W}$中的所有元素对$\mathbf{V}$中定义的加法和数乘运算也构成一个向量空间，则称$\mathbf{W}$是$\mathbf{V}$的一个子空间.

由子空间的定义，我们很容易得到如下定理：

定理 1　设$\mathbf{V}$是向量空间，$\mathbf{W}$是$\mathbf{V}$的一个子集，则$\mathbf{W}$是$\mathbf{V}$的子空间的充分必要条件是满足下列条件

（1）$\mathbf{V}$的零向量$\mathbf{0}\in\mathbf{W}$；

（2）$\mathbf{W}$对$\mathbf{V}$的加法运算封闭，即如果$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{W}$，则$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{W}$；

（3）$\mathbf{W}$对$\mathbf{V}$的数乘运算封闭，即如果$\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{W}$，则对任意常数$k\in\mathbf{F}$，有$k\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{W}$.

二、向量空间的基和维数

定义３　设$\mathbf{V}$为向量空间，如果存在r个向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\in\mathbf{V}$，满足

（1）向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关；

（2）$\mathbf{V}$中任一向量都可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性表示，

则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$称为向量空间$\mathbf{V}$的一个基，$r$称为向量空间$\mathbf{V}$的维数，记为$\dim\mathbf{V}=r$，并称$\mathbf{V}$为$r$维向量空间.

规定零空间的维数为0.

显然，如果把向量空间$\mathbf{V}$看作向量组，则$\mathbf{V}$的基即为向量组的极大线性无关组；$\mathbf{V}$的维数就是向量组的秩. 又因为向量组的极大线性无关组可以不唯一，故向量空间的基也可不唯一.

例３　在三维几何空间$\mathbf{R}^3$中，已知单位向量组$\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)$，$\boldsymbol{e}_2=(0,1,0)$，$\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)$是线性无关的，且任一向量$\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^3$均可由$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$线性表示，则$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$是$\mathbf{R}^3$的一个基，$\dim(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=3$. 在$\mathbf{R}^n$中，单位向量组$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$是$\mathbf{R}^n$的一个基.

定理２　n维向量空间$\mathbf{V}$中的任意n个线性无关的向量都是$\mathbf{V}$的一个基.

证　设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$\mathbf{V}$中的任意$n$个线性无关的向量，$\forall\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{V}$，由第三节定理 5 可知，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}$线性相关. 再由第三节定理 6，故$\boldsymbol{\alpha}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示. 再由定义 3 可知，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是向量空间$\mathbf{V}$的一个基.

例４　证明$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,0,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,5,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$是$\mathbf{R}^4$的一个基.

解　由于矩阵$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$的行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&0&0&0\\0&1&0&0\\0&5&2&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}=4\neq0,$$

所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$是$\mathbf{R}^4$的一组基.

例５　设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,3)^{\mathrm{T}}$，求$\mathbf{L}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$的一个基和维数.

解　令$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，对$\boldsymbol{A}$作初等行变换得

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&4\\2&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

因为$R(\boldsymbol{A})=2$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，而$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是$\mathbf{L}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$的一个基，即$\dim\mathbf{L}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$.

若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$是向量空间$\mathbf{V}$的一个基，则$\mathbf{V}$可以表示为

$$\mathbf{V}=\left\{\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r\,\middle|\,k_1,k_2,\cdots,k_r\in\mathbf{R}\right\}.$$

因此，如果找到向量空间的一个基，那么向量空间的结构就得到了.

三、向量空间的坐标

定义４　设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$是向量空间$\mathbf{V}$的一个基，向量空间$\mathbf{V}$中的任一向量$\boldsymbol{\alpha}$的唯一表示式

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha}_r$$

中，由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$的系数构成的有序数组$(x_1,x_2,\cdots,x_r)$，称为向量$\boldsymbol{\alpha}$关于基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$的坐标，记为

$$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_r).$$

例６　设有$\mathbf{R}^3$的一个基$\boldsymbol{\alpha}_1=(-2,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-2,-5,-1)^{\mathrm{T}}$，求出向量$\boldsymbol{\alpha}=(4,12,6)^{\mathrm{T}}$在此基下的坐标.

解　设$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$，则得到非齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix}-2&-1&-2\\1&0&-5\\3&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\\boldsymbol{x}_2\\\boldsymbol{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\12\\6\end{pmatrix}.$$

对方程组的增广矩阵作初等行变换，有

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}-2&-1&-2&4\\1&0&-5&12\\3&1&-1&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&7\\0&1&0&-16\\0&0&1&-1\end{pmatrix}.$$

解得方程组的唯一解为

$$(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=(7,-16,-1)^{\mathrm{T}}.$$

此即为$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的坐标，且

$$\boldsymbol{\alpha}=7\boldsymbol{\alpha}_1-16\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3.$$

四、基变换与坐标变换

向量空间中，任一向量$\boldsymbol{\alpha}$在不同的基下坐标不同. 如例 6 中，在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下，$\boldsymbol{\alpha}$的坐标为$(7,-16,-1)$；而在单位向量组$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$下，$\boldsymbol{\alpha}$的坐标是$(4,12,6)$.

为了研究一个向量在不同基下的坐标之间的关系，我们首先给出过渡矩阵的概念.

定义５　设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$和向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$是$n$维向量空间$\mathbf{V}$的两个基，如果它们之间的关系可表为

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=c_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+c_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n,\\ \boldsymbol{\beta}_2=c_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+c_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \boldsymbol{\beta}_n=c_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+c_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n.\end{cases}\tag{1}$$

即

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C},\tag{2}$$

则称矩阵$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$为从基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$的过渡矩阵（或基变换矩阵）. 式（1）和式（2）称为基变换公式.

显然，过渡矩阵$\boldsymbol{C}$有如下的性质：

（1）$\boldsymbol{C}$的第i列是向量$\boldsymbol{\beta}_i$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的坐标，即

$$\boldsymbol{\beta}_i=c_{1i}\boldsymbol{\alpha}_1+c_{2i}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{ni}\boldsymbol{\alpha}_n=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}c_{1i}\\c_{2i}\\\vdots\\c_{ni}\end{pmatrix};$$

（2）$\boldsymbol{C}$是可逆矩阵，且$\boldsymbol{C}^{-1}$是从基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$到基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$的过渡矩阵，即

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{C}^{-1}.$$

例７　设$\mathbf{R}^3$中两组基$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$和$\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，求$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$到$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的过渡矩阵.

解　因为

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C},$$

即

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}\boldsymbol{C}.$$

解得过渡矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&-2\\0&-1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}.$$

对向量$\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{V}$，设它在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的坐标为$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则$\boldsymbol{\alpha}$可写成如下形式：

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix};$$

在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$下的坐标为$\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$时，有

$$\boldsymbol{\alpha}=y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+y_n\boldsymbol{\beta}_n=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}.$$

再由定义 5 得

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$$

即$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$．故有如下定理：

定理３　设向量空间$\mathbf{V}$的一组基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$到另一组基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$的过渡矩阵为$\boldsymbol{C}$，$\mathbf{V}$中的一向量在这两组基下的坐标分别为$\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{Y}$，则

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}.$$

$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$称为坐标变换公式（或基变换公式）.

例８　设有$\mathbf{R}^3$中的两组基$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$和$\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(2,3,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,3)^{\mathrm{T}}$，

（1）求从$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$到$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的过渡矩阵；

（2）求向量$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2-3\boldsymbol{\beta}_3$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的坐标.

解　（1）由$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C}$，有

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\boldsymbol{C}.$$

即

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}.$$

（2）设向量$\boldsymbol{\beta}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的坐标为$(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，由定理 3 知

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-2\\2\end{pmatrix},$$

则向量$\boldsymbol{\beta}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的坐标为$(-4,-2,2)^{\mathrm{T}}$.

第六节　线性方程组解的结构

本节我们讨论线性方程组解的结构，所谓解的结构问题就是解与解之间的关系问题. 在方程组无解及有唯一解的情况下，没有解的结构问题；方程组有多个解的情况下，才有解的结构问题. 下面我们将利用向量间的线性关系分别讨论齐次线性方程组和非齐次线性方程组解的结构，将证明虽然线性方程组有无穷多个解，但全部的解都可以用有限多个解表示出来.

一、齐次线性方程组解的结构

齐次线性方程组

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O} \tag{1}$$

有如下性质：

性质 1　如果$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$是（1）的解，则其线性组合

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s$$

也是（1）的解，其中$k_1,k_2,\cdots,k_s$为任意常数.

证　因为$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$是（1）的解，则有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{O},\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{O},\ \cdots,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_s=\boldsymbol{O},$$

因此

$$\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s)=k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_s=\boldsymbol{O}\text{，}$$

说明$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s$也是（1）的解.

定义 设$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$是（1）的解向量，并且满足：

①$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$线性无关；

②齐次线性方程组（1）的任意一个解向量都可以由$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$线性表示.

则称$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$是（1）的一个基础解系.

从上述定义可知，如果$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$是齐次线性方程组（1）的一个基础解系，则向量组$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$就是（1）的解向量组的一个极大线性无关组.

定理 1 设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，且$R(\boldsymbol{A})=r<n$，则齐次线性方程组（1）存在基础解系，并且基础解系中所含解向量的个数为$n-r$个.

证 先证齐次线性方程组（1）存在$n-r$个线性无关的解向量.

因为$R(\boldsymbol{A})=r$，所以可将矩阵$\boldsymbol{A}$进行初等行变换化成秩为r的行阶梯型矩阵，不妨设

$$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}_r=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2r} & b_{2,r+1} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{rr} & b_{r,r+1} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

其中$b_{ii}\neq 0\ (i=1,2,\cdots,r)$.

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$与$\boldsymbol{B}_r\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$为同解方程组，$\boldsymbol{B}_r\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$可改写为

$$\begin{cases} b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1r}x_r=-b_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-b_{1n}x_n, \\ \qquad b_{22}x_2+\cdots+b_{2r}x_r=-b_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-b_{2n}x_n, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad b_{rr}x_r=-b_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-b_{rn}x_n. \end{cases} \tag{2}$$

取 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 为自由未知量，令 $(x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 分别为

$$\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \cdots,\ \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

可得，方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 的 $n-r$ 个解

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}b'_{11}\\b'_{21}\\\vdots\\b'_{r1}\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}b'_{12}\\b'_{22}\\\vdots\\b'_{r2}\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{\xi}_{n-r}=\begin{pmatrix}b'_{1,n-r}\\b'_{2,n-r}\\\vdots\\b'_{r,n-r}\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

下面证明 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关.

设

$$k'_1\boldsymbol{\xi}_1+k'_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k'_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}=\mathbf{0},$$

即

$$k'_1\boldsymbol{\xi}_1+k'_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k'_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}=(*,\cdots,*,k'_1,k'_2,\cdots,k'_{n-r})^{\mathrm{T}}=(0,\cdots,0,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},$$

可得

$$k'_1=k'_2=\cdots=k'_{n-r}=0,$$

因此，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关.

再证齐次线性方程组（1）的任意一个解向量都可以由 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性表示.

任取自由未知量 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 的一组值

$$(k_1,k_2,\cdots,k_{n-r})^{\mathrm{T}},$$

代入方程组（2），可得一个解向量，设为

$$\boldsymbol{\eta}=(b_1,b_2,\cdots,b_r,k_1,k_2,\cdots,k_{n-r})^{\mathrm{T}}.$$

由性质 1，可知

$$\boldsymbol{\xi}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}$$

是（1）的解，故 $\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\xi}$ 也是（1）的解，且

$$\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_r \\ k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{n-r} \end{pmatrix} - k_1\begin{pmatrix} b'_{11} \\ b'_{21} \\ \vdots \\ b'_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - k_2\begin{pmatrix} b'_{12} \\ b'_{22} \\ \vdots \\ b'_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \cdots - k_{n-r}\begin{pmatrix} b'_{1,n-r} \\ b'_{2,n-r} \\ \vdots \\ b'_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

此解对于自由未知量的取值为 $x_{r+1}=0, x_{r+2}=0, \cdots, x_n=0$，此时将它们代入方程组（2），可得 $x_1=0, x_2=0, \cdots, x_r=0$，于是 $b'_1=0, b'_2=0, \cdots, b'_r=0$，故

$$\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0},$$

即

$$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\xi}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r},$$

因此，齐次线性方程组（1）的任意一个解向量 $\boldsymbol{\eta}$ 都可以由 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性表示.

综上，$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是方程组（1）的一个含有 $n-r$ 个解向量的基础解系.

定理 1 的证明过程说明了齐次线性方程组（1）$(\boldsymbol{A}_{m\times n}, R(\boldsymbol{A})<n)$ 确实存在基础解系，而且还提供了找基础解系的具体方法. 如果 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是方程组（1）的一个基础解系，则它的全体解可表示为

$$\boldsymbol{\xi}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}, \tag{3}$$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$ 为任意常数.（3）式描述了齐次线性方程组（1）的解的结构，即齐次线性方程组（1）的所有解可以用有限多个解线性表示.（3）式称为齐次线性方程组（1）的**通解**（或**一般解**）.

例 1　求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ \ x_3+4x_4=0, \\ x_1-x_2+3x_3-2x_4=0, \\ 2x_1+x_2+3x_3+5x_4=0, \\ 3x_1+x_2+5x_3+6x_4=0 \end{cases}$$

的一个基础解系及通解.

解　对该方程组的系数矩阵施行初等行变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&4\\1&-1&3&-2\\2&1&3&5\\3&1&5&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&4\\0&1&-1&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

由于 $R(\boldsymbol{A})=2<4$，故原方程组的基础解系中含有两个解向量（自由未知量的个数也是两个）.

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+4x_4=0,\\ \qquad x_2-x_3+3x_4=0.\end{cases}$$

取 x_3,x_4 为自由未知量，令 $(x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$ 分别为

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

可得，原方程组的两个解向量

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\\1\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 就是原方程组的一个基础解系，方程组的通解为

$$\boldsymbol{\xi}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$$

$$=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\\1\end{pmatrix},$$

其中 k_1,k_2 为任意常数.

例 2　若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$. 证明：$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\le n$.

证　设矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$，则

$$\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{A\beta}_1,\boldsymbol{A\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{A\beta}_n)=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\cdots,\boldsymbol{0}),$$

于是，$\boldsymbol{A\beta}_j=\boldsymbol{0}$ $(j=1,2,\cdots,n)$，即矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 的解向量.

设 $R(\boldsymbol{A})=r$，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 的基础解系含有 $n-r$ 个解向量，于是，列向

量组$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\beta}_n$的秩$\leq n-r$，即$R(\boldsymbol{B})\leq n-r$，所以$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leq n$.

二、非齐次线性方程组解的结构

非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$与其导出方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$的解之间有如下关系：

性质 2　如果ξ_1,ξ_2是非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的解，则$\xi_2-\xi_1$是其导出方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$的解.

证　因为ξ_1,ξ_2是非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的解，则

$$\boldsymbol{A}(\xi_2-\xi_1)=\boldsymbol{A}\xi_2-\boldsymbol{A}\xi_1=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},$$

因此，$\xi_2-\xi_1$是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$的解.

性质 3　如果ξ_1是非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的解，$\xi_2$是其导出方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$的解，则$\xi_1+\xi_2$是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的解.

证　因为ξ_1是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的解，$\xi_2$是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$的解，则

$$\boldsymbol{A}(\xi_1+\xi_2)=\boldsymbol{A}\xi_1+\boldsymbol{A}\xi_2=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{b},$$

因此，$\xi_1+\xi_2$是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的解.

由性质 2、3 可以得到非齐次线性方程组解的结构定理:

定理 2　如果ξ_0是非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的一个特解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是其导出方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$的基础解系，则

$$\xi=\xi_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r},\tag{4}$$

是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的通解（$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$为任意常数）；（$\boldsymbol{A}_{m\times n}$, $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r<n$）.

证　由性质 3 知

$$\xi_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$$

是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的解. 设$\xi$是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的任意一个解，因为$\xi_0$是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的一个特解，由性质 2 知$\xi-\xi_0$是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$的解，则

$$\xi-\xi_0=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r},$$

即

$$\xi=\xi_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}.$$

由 $\boldsymbol{\xi}$ 的任意性，所以（4）是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

例 3　求解方程组

$$\begin{cases} x_1 - \ x_2 - \ x_3 + \ x_4 = 0, \\ x_1 - \ x_2 + \ x_3 - 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 6x_4 = -1. \end{cases}$$

解　对该方程组的增广矩阵施行初等行变换

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & -4 & 6 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

由于 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) = 2 < 4$，故方程组有无穷多解.

对应齐次线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + \ x_4 = 0, \\ \qquad\quad 2x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

取 x_2, x_4 为自由未知量，令 $(x_2, x_4)^{\mathrm{T}}$ 分别为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

就得到齐次线性方程组的一个基础解系，

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

原方程组同解的方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - \ x_3 + \ x_4 = 0, \\ \qquad\quad 2x_3 - 4x_4 = 1. \end{cases}$$

令 $x_2 = x_4 = 0$，得原方程组的一个特解

$$\boldsymbol{\xi}_0 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

故原方程组的通解为

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_0 + k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2$$

$$=\begin{pmatrix}1/2\\0\\1/2\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}\quad（k_1, k_2\text{ 为任意常数}）.$$

例4　已知

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix},\ \xi_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\4\end{pmatrix},\ \xi_3=\begin{pmatrix}4\\5\\-3\\11\end{pmatrix}$$

是非齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_1x_1+\ 2x_2+a_3x_3+a_4x_4=d_1,\\ 3x_1+b_2x_2+\ 4x_3+b_4x_4=d_2,\\ 4x_1+c_2x_2+\ 5x_3+c_4x_4=d_3\end{cases}$$

的三个解，求该非齐次线性方程组的通解.

解　设该非齐次线性方程组的矩阵形式为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$，由于 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解，所以

$$\xi_2-\xi_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix},\ \xi_3-\xi_1=\begin{pmatrix}3\\6\\-3\\9\end{pmatrix},$$

是其导出方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 的解. 又因为 $\xi_2-\xi_1, \xi_3-\xi_1$ 对应的分量不成比例，故

$$\xi_2-\xi_1, \xi_3-\xi_1$$

线性无关. 因此 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 的基础解系中含有解向量的个数 $[4-R(\boldsymbol{A})]\ge 2$，即 $R(\boldsymbol{A})\le 2$.

又因为 $\boldsymbol{A}$ 中有一个二阶子式 $\begin{vmatrix}3&4\\4&5\end{vmatrix}=-1\ne 0$，则 $R(\boldsymbol{A})\ge 2$. 所以 $R(\boldsymbol{A})=2$.

说明 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 的基础解系中含有两个解向量，故 $\xi_2-\xi_1, \xi_3-\xi_1$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 的一个基础解系. 所以 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\xi=\xi_1+k_1(\xi_2-\xi_1)+k_2(\xi_3-\xi_1)$$

$$=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}3\\6\\-3\\9\end{pmatrix}\quad（k_1, k_2\text{ 为任意常数}）.$$

习题三

1. 用高斯消元法解下列线性方程组.

（1）$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=-11, \\ -x_1-x_2+x_3=7, \\ 2x_1-3x_2+x_3=6, \\ -3x_1+x_2+2x_3=5. \end{cases}$ （2）$\begin{cases} 5x_1-x_2+2x_3+x_4=7, \\ 2x_1+x_2+4x_3-2x_4=1, \\ x_1-3x_2-6x_3+5x_4=0. \end{cases}$

（3）$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3-x_4=-1, \\ x_1+2x_2-3x_3-x_4=0, \\ 2x_1+x_2+x_3-6x_4=1, \\ 3x_1+2x_2-11x_3+3x_4=-10. \end{cases}$ （4）$\begin{cases} x_1-x_2-x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2+x_3-3x_4=0, \\ x_1-x_2-2x_3+3x_4=0. \end{cases}$

2. 讨论如下线性方程组，当 p,q 分别取何值时，方程的解不唯一.

（1）$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=0 \\ 2x_1+x_2-6x_3=-1 \\ 3x_1+2x_2+px_3=-1 \end{cases}$，（2）$\begin{cases} (q-3)x_1+x_2=0 \\ x_1+(q+1)x_2=0 \\ 3x_1+2x_2+qx_3=0 \end{cases}$

3. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,0,5)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,1,4)$，求向量 $\boldsymbol{\gamma}$，使得 $3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\gamma}=4\boldsymbol{\alpha}_2$.

4. 设 $3\boldsymbol{\alpha}+4\boldsymbol{\beta}=(2,1,1,2)$，$2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta}=(-1,2,3,1)$，求 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$.

5. 把向量 $\boldsymbol{\beta}$ 表示成向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合：

（1）$\boldsymbol{\beta}=(1,2,1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1,-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1,-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,-1,1)$；

（2）$\boldsymbol{\beta}=(0,0,0,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,3,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,0,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(0,1,-1,-1)$.

6. 证明：如果

$$a\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\-4\\4\end{pmatrix}=O$$

则 $a=b=c=0$

7. 判别向量组的线性相关性：

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$；

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,5)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,6)$；

（3）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14)^{\mathrm{T}}$.

8. 证明：线性无关的向量组的任何部分组也线性无关.

9. 证明：秩为r的向量组中，任何$r+1$个向量必线性相关.

10. 命题“若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性相关，则$\boldsymbol{\alpha}_1$可由$\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示”是否正确？请举例说明。

11. 设$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\beta}_r=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_r$，且向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关，证明向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$线性无关.

12. 求下列向量组的秩及各向量组的一个极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组线性表示：

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,-3)$；

（2）$\boldsymbol{\beta}_1=(5,3,1,8)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(2,1,0,3)$，$\boldsymbol{\beta}_3=(1,1,1,2)$，$\boldsymbol{\beta}_4=(1,0,-1,1)$，$\boldsymbol{\beta}_5=(3,2,1,5)$.

13. 设向量组$\boldsymbol{\beta}_1=(1,-1,2,4)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(0,3,1,2)$，$\boldsymbol{\beta}_3=(3,0,7,14)$，$\boldsymbol{\beta}_4=(1,-1,2,0)$，$\boldsymbol{\beta}_5=(2,1,5,6)$，

（1）证明$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性无关；

（2）求向量组包含$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$的极大线性无关组.

14. 验证$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,1,2)^{\mathrm{T}}$是$\mathbf{R}^3$的一个基，并用这个基表示向量$\boldsymbol{\beta}=(5,0,7)^{\mathrm{T}}$.

15. 在$\mathbf{R}^3$中求向量$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$下的坐标，

（1）$\boldsymbol{\alpha}=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$；

（2）$\boldsymbol{\alpha}=(3,7,1)$，$\boldsymbol{\beta}_1=(1,3,5)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(6,3,2)$，$\boldsymbol{\beta}_3=(3,1,0)$.

16. 已知$\mathbf{R}^4$中有两个基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$和$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$，其中

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\quad \boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4.$$

（1）求从基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$的过渡矩阵；

（2）已知向量$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$下的坐标为$(1,2,3,4)$，求$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$下

的坐标.

17. 求下列齐次方程组的一个基础解系和通解.

（1）$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0, \\ 3x_1+2x_2+x_3-3x_5=0, \\ x_2+2x_3+3x_4+6x_5=0, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+2x_4-x_5=0 \end{cases}$　（2）$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+2x_4-x_5=0, \\ x_1+2x_2-x_3+3x_4-2x_5=0, \\ 2x_1+4x_2-7x_3+x_4+x_5=0. \end{cases}$

（3）$\begin{cases} x_1-x_2+5x_3-x_4=0, \\ x_1+x_2-2x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-x_2+8x_3+x_4=0, \\ x_1+3x_2-9x_3+7x_4=0. \end{cases}$　（4）$\begin{cases} x_1-2x_2-2x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2+x_3-3x_4=0, \\ x_1-x_2+x_3-2x_4=0. \end{cases}$

18. 利用非齐次方程组的解的结构，求方程组

$$\begin{cases} x_1+3x_2-x_3-2x_4=3, \\ x_1+4x_2+3x_3+5x_4=9, \\ 2x_1+7x_2+2x_3+3x_4=12, \\ 3x_1+10x_2+x_3+x_4=15 \end{cases}$$

的通解.

综合习题三

一、选择题

1. 若齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 有非零解，则非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$（　　）.
（A）有无穷多组解；　（B）有唯一解；　（C）无解；　（D）以上都不对.

2. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩不为零的充分必要条件是（　　）.

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 均不为零向量；　（B）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关；

（C）$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=m$；　（D）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 至少有一个非零向量.

3. 如果向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，则下列结论正确的是（　　）.

（A）存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$ 成立；

（B）存在一组全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$ 成立；

（C）存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$ 成立；

（D）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 对 $\boldsymbol{\beta}$ 的线性表达式唯一.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，若 $R(A)<n$，则（　　）.

（A） $\boldsymbol{A}$ 的任意一行（列）向量都是其余各行（列）向量的线性组合；
（B） $\boldsymbol{A}$ 的各行向量中至少有一个为零向量；
（C） $\boldsymbol{A}$ 的行（列）向量中必有一个行（列）向量是其余各行（列）向量的线性组合；
（D） $\boldsymbol{A}$ 的行（列）向量中必有两个行（列）向量对应元素成比例.

5. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩为 r，则下面结论正确的是(　　).

（A）必有 $r<m$；
（B）向量组中任意小于 r 个向量的部分组都线性无关；
（C）向量组中任意 r 个向量都线性无关；
（D）向量组中任意 $r+1$ 个向量（若存在）都线性相关.

6. n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关的充分必要条件是(　　).

（A）向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中有一个零向量；

（B）向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中任意两个向量的分量成比例；

（C）向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中有一个向量可由其余向量线性表示；

（D）向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中每个向量都是其余向量的线性组合.

7. 设向量组（1） $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 能由向量组（2） $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，则下面的结果正确的是(　　).

（A）当 $m<s$ 时，向量组（1）线性相关；
（B）当 $m>s$ 时，向量组（1）线性相关；
（C）当 $m<s$ 时，向量组（2）线性相关；
（D）当 $m>s$ 时，向量组（2）线性相关.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 仅有零解的充分条件是(　　).
（A） $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关；
（B） $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关；
（C） $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关；
（D） $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关.

9.设 n 元齐次线性方程组的一个基础解系为 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$，则(　　)也是该齐次线性方程组的基础解系.

（A） $\eta_1-\eta_2,\eta_2-\eta_3,\eta_3-\eta_4,\eta_4-\eta_1$；

（B） $\eta_1+\eta_2,\eta_2+\eta_3,\eta_3+\eta_4,\eta_4+\eta_1$；

（C） $\eta_1,\eta_1+\eta_2,\eta_1+\eta_2+\eta_3,\eta_1+\eta_2+\eta_3-\eta_4$；

（D） $\eta_1+\eta_2,\eta_2+\eta_3,\eta_3-\eta_4,\eta_4-\eta_1$.

10. 齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

的基础解系中含有解向量的个数是(　　).

（A）1；　　　（B）2；　　　（C）3；　　　（D）4.

二、填空题

1. 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解的充分必要条件是______________.

2. 若齐次线性方程组

$$\begin{cases} kx + y - 2z = 0, \\ x + ky + 2z = 0, \\ kx + y + kz = 0 \end{cases}$$

有非零解，且 $k^2 \neq 1$，则 k 的值为_________.

3. 设 n 阶矩阵 A 的各行元素之和均为零，且 A 的秩为 $n-1$，则线性方程组 $AX=O$ 的通解为_________.

4. 若 $\boldsymbol{\beta}=(1,2,t)$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,2,7)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,-4)$ 线性表示，则 $t=$______.

5. 若 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,5,2)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(3,-2,3,-4)$，$\boldsymbol{\beta}_3=(-1,1,t,3)$ 线性相关，则 $t=$_____.

6. 设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(2,3,4,5)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(3,4,5,6)$，$\boldsymbol{\beta}_3=(4,5,6,7)$，$\boldsymbol{\beta}_4=(5,6,7,8)$，则 $R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=$________.

三、计算题

1. 讨论方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda^2 x_3 = \lambda \end{cases}$$

的解的情况；有解时，求出其解.

2. 已知三阶矩阵 $A \neq 0$，且 A 的每一个列向量都是以下方程组的解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0, \\ x_1 - \lambda x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

求（1）λ 的值；（2）证明 $|A|=0$

3. 已知 $\mathbf{R}^4$ 中向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 下的表达式为 $\boldsymbol{\alpha}=4\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，又设 $\mathbf{R}^4$ 中的另一个基为 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=-3\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_4=4\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$ $+\boldsymbol{\alpha}_4$，

（1）求从基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的过渡矩阵；

（2）求向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 下的坐标.

4. 设向量组 $\boldsymbol{\beta}=(1,3,-3)$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a+2,-3a)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-b-2,$ $a+2b)$，试讨论当 a,b 为何值时，

（1）$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；

（2）$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一的线性表示，并求出表达式；

（3）$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但表达式不唯一，求出表达式.

5. 当 a 取何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1, \\ x_1+3x_2+6x_3+x_4=3, \\ x_1+5x_2+10x_3-x_4=5, \\ 3x_1+5x_2+10x_3+7x_4=a \end{cases}$$

有解？在方程组有解时，用其导出方程组的基础解系表示方程组的通解.

四、证明题

1. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}(m\geq 3)$ 线性相关，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关. 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示.

2. 设 $\boldsymbol{\xi}_0$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一个解向量，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 的一个基础解系. 证明 $\boldsymbol{\xi}_0,\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关.