

1990 年全国硕士研究生招生考试试题

(试 卷 III)

一、填空题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分)

(1) 曲线 $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ 上对应于 $t = \frac{\pi}{6}$ 处的法线方程是_____.

(2) 设 $y = e^{\tan \frac{1}{x}} \sin \frac{1}{x}$, 则 $y' =$ _____.

(3) $\int_0^1 x \sqrt{1-x} dx =$ _____.

(4) 下列两个积分的大小关系是: $\int_{-2}^{-1} e^{-x^3} dx$ _____ $\int_{-2}^{-1} e^{x^3} dx$.

(5) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则函数 $f[f(x)] =$ _____.

二、选择题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分)

(1) 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - ax - b \right) = 0$, 其中 a, b 是常数, 则()

(A) $a = 1, b = 1$.

(B) $a = -1, b = 1$.

(C) $a = 1, b = -1$.

(D) $a = -1, b = -1$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则 $d\left[\int f(x) dx\right]$ 等于()

(A) $f(x)$.

(B) $f(x) dx$.

(C) $f(x) + C$.

(D) $f'(x) dx$.

(3) 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数, 且 $f'(x) = [f(x)]^2$, 则当 n 为大于 2 的正整数时, $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 是()

(A) $n! [f(x)]^{n+1}$.

(B) $n [f(x)]^{n+1}$.

(C) $[f(x)]^{2n}$.

(D) $n! [f(x)]^{2n}$.

(4) 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $F(x) = \int_x^{e^{-x}} f(t) dt$, 则 $F'(x)$ 等于()

(A) $-e^{-x} f(e^{-x}) - f(x)$.

(B) $-e^{-x} f(e^{-x}) + f(x)$.

(C) $e^{-x} f(e^{-x}) - f(x)$.

(D) $e^{-x} f(e^{-x}) + f(x)$.

(5) 设 $F(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0, \\ f(0), & x = 0, \end{cases}$ 其中 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, $f'(0) \neq 0, f(0) = 0$, 则 $x = 0$ 是 $F(x)$ 的()

(A) 连续点.

(B) 第一类间断点.

(C) 第二类间断点.

(D) 连续点或间断点不能由此确定.

三、(本题共 5 小题, 每小题 5 分, 满分 25 分)

(1) 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = 9$, 求常数 a .

(2) 求由方程 $2y - x = (x - y) \ln(x - y)$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 的微分 dy .

(3) 求曲线 $y = \frac{1}{1+x^2} (x > 0)$ 的拐点.

(4) 计算 $\int \frac{\ln x}{(1-x)^2} dx$.

(5) 求微分方程 $x \ln x dy + (y - \ln x) dx = 0$ 满足条件 $y \Big|_{x=e} = 1$ 的特解.

四、(本题满分9分)

在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的第一象限部分上求一点 P , 使该点处的切线, 椭圆及两坐标轴所围图形面积为最小(其中 $a > 0, b > 0$).

五、(本题满分9分)

证明: 当 $x > 0$ 时, 有不等式 $\arctan x + \frac{1}{x} > \frac{\pi}{2}$.

六、(本题满分9分)

设 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt$, 其中 $x > 0$, 求 $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$.

七、(本题满分9分)

过点 $P(1,0)$ 作抛物线 $y = \sqrt{x-2}$ 的切线, 该切线与上述抛物线及 x 轴围成一平面图形. 求此平面图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.

八、(本题满分9分)

求微分方程 $y'' + 4y' + 4y = e^{ax}$ 的通解, 其中 a 为实数.