1989 年全国硕士研究生招生考试试题

(试卷 Ⅲ)

一、填空题(本题共 7 小题,每小题 3 分,满分 21 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0} x\cot 2x =$ ______.

(2) $\int_0^{\pi} t\sin t\mathrm{d}t =$ ______.

(3) 曲线 $y = \int_0^x (t-1)(t-2)\mathrm{d}t$ 在点(0,0)处的切线方程是______.

(4) 设 $f(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$,则 $f'(0) =$ ______.

(5) 设 $f(x)$ 是连续函数,且 $f(x) = x + 2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$,则 $f(x) =$ ______.

(6) 设 $f(x) = \begin{cases} a + bx^2, & x \leqslant 0, \\ \dfrac{\sin bx}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续,则常数 a 与 b 应满足的关系是______.

(7) 设 $\tan y = x + y$,则 $\mathrm{d}y =$ ______.

二、(本题共 5 小题,每小题 4 分,满分 20 分)

(1) 已知 $y = \arcsin \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$,求 y'.

(2) 求 $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}$.

(3) 求 $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}}$.

(4) 已知 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = \arctan t, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(5) 已知 $f(2) = \dfrac{1}{2}, f'(2) = 0$ 及 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 1$,求 $\int_0^1 x^2 f''(2x)\mathrm{d}x$.

三、选择题(本题共 6 小题,每小题 3 分,满分 18 分)

(1) 当 $x > 0$ 时,曲线 $y = x\sin\dfrac{1}{x}$(　　)

(A) 有且仅有水平渐近线.　　(B) 有且仅有铅直渐近线.

(C) 既有水平渐近线,也有铅直渐近线.　　(D) 既无水平渐近线,也无铅直渐近线.

(2) 若 $3a^2 - 5b < 0$,则方程 $x^5 + 2ax^3 + 3bx + 4c = 0$(　　)

(A) 无实根.　　(B) 有唯一实根.

(C) 有三个不同实根.　　(D) 有五个不同实根.

(3) 曲线 $y = \cos x\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$ 与 x 轴所围成的图形,绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积为(　　)

(A) $\dfrac{\pi}{2}$.　　(B) π.　　(C) $\dfrac{\pi^2}{2}$.　　(D) π^2.

(4) 设两函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $x=a$ 处取得极大值,则函数 $F(x)=f(x)g(x)$ 在 $x=a$ 处( )

(A) 必取极大值. (B) 必取极小值.

(C) 不可能取极值. (D) 是否取极值不能确定.

(5) 微分方程 $y''-y=e^x+1$ 的一个特解应具有形式(式中 a,b 为常数)( )

(A) ae^x+b. (B) axe^x+b. (C) ae^x+bx. (D) axe^x+bx.

(6) 设 $f(x)$ 在点 $x=a$ 的某个邻域内有定义,则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是( )

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f\left(a+\frac{1}{h}\right)-f(a)\right]$ 存在. (B) $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在.

(C) $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在. (D) $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在.

四、(本题满分 6 分)

求微分方程 $xy'+(1-x)y=e^{2x}(0<x<+\infty)$ 满足 $y(1)=0$ 的特解.

五、(本题满分 7 分)

设 $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$,其中 f 为连续函数,求 $f(x)$.

六、(本题满分 7 分)

证明方程 $\ln x=\frac{x}{e}-\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有且仅有两个不同实根.

七、(本题满分 11 分)

对函数 $y=\frac{x+1}{x^2}$ 填写下表.

单调减少区间	
单调增加区间	
极值点	
极值	
凹区间	
凸区间	
拐点	
渐近线	

八、(本题满分 10 分)

设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过原点,当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时,$y\geqslant0$. 又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$. 试确定 a,b,c 的值,使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.