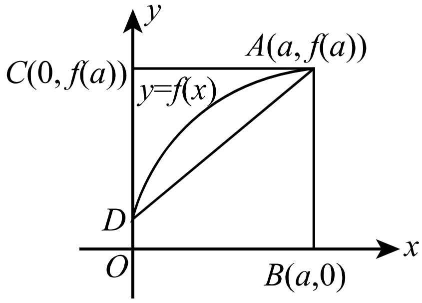
2008 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分)

(1) 设函数 $f(x)=x^2(x-1)(x-2)$,则 $f'(x)$ 的零点个数为(　　)

(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.

(2) 如图,曲线段的方程为 $y=f(x)$,函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有连续的导数,则定积分 $\int_0^a xf'(x)\,dx$ 等于(　　)



(A) 曲边梯形 $ABOD$ 的面积.

(B) 梯形 $ABOD$ 的面积.

(C) 曲边三角形 ACD 的面积.

(D) 三角形 ACD 的面积.

(3) 在下列微分方程中,以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$($C_1,C_2,C_3$ 为任意常数)为通解的是(　　)

(A)$y'''+y''-4y'-4y=0$.　　(B)$y'''+y''+4y'+4y=0$.

(C)$y'''-y''-4y'+4y=0$.　　(D)$y'''-y''+4y'-4y=0$.

(4) 设函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$,则 $f(x)$ 有(　　)

(A)1 个可去间断点,1 个跳跃间断点.　　(B)1 个可去间断点,1 个无穷间断点.

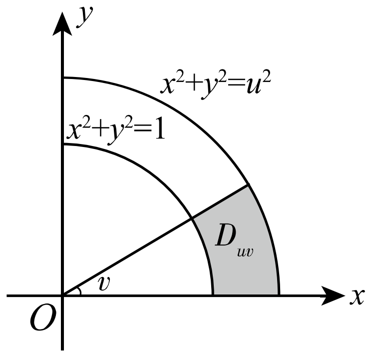
(C)2 个跳跃间断点.　　(D)2 个无穷间断点.

(5) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界,$\{x_n\}$ 为数列,下列命题正确的是(　　)

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.　　(B) 若 $\{x_n\}$ 单调,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛,则 $\{x_n\}$ 收敛.　　(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调,则 $\{x_n\}$ 收敛.

(6) 设函数 f 连续. 若 $F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\dfrac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$,其中区域 D_{uv} 为图中阴影部分,则 $\dfrac{\partial F}{\partial u}=$(　　)



(A)$vf(u^2)$.　　(B)$\dfrac{v}{u}f(u^2)$.

(C)$vf(u)$.　　(D)$\dfrac{v}{u}f(u)$.

(7) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$,则(　　)

(A)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.　　(B)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.

(C)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.　　(D)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.

(8) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$,则在实数域上与 $\boldsymbol{A}$ 合同的矩阵为(　　)

(A)$\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$.　　(B)$\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$.　　(C)$\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$.　　(D)$\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分)

(9) 已知函数 $f(x)$ 连续,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos[xf(x)]}{(e^{x^2}-1)f(x)}=1$,则 $f(0)=$ ______.

(10) 微分方程 $(y+x^2e^{-x})dx-xdy=0$ 的通解是 $y=$ ______.

(11) 曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程是______.

(12) 曲线 $y=(x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点坐标为______.

(13) 设 $z=\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$,则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$ ______.

(14) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,3,\lambda$. 若行列式 $|2\boldsymbol{A}|=-48$,则 $\lambda=$ ______.

三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 9 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=x(t), \\ y=\int_0^{t^2}\ln(1+u)du \end{cases}$ 确定,其中 $x(t)$ 是初值问题 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}-2te^{-x}=0, \\ x|_{t=0}=0 \end{cases}$ 的解,求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(17)(本题满分 9 分)

计算 $\int_0^1\dfrac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

(18)(本题满分 11 分)

计算 $\iint\limits_D \max\{xy,1\}dxdy$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$.

(19)(本题满分 11 分)

设 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上具有连续导数的单调增加函数,且 $f(0)=1$. 对任意的 $t\in[0,+\infty)$,直线 $x=0,x=t$,曲线 $y=f(x)$ 以及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周生成一旋转体. 若该旋转体的侧面积在数值上等于其体积的 2 倍,求函数 $f(x)$ 的表达式.

(20)(本题满分 11 分)

(Ⅰ) 证明积分中值定理:若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则至少存在一点 $\eta\in[a,b]$,使得 $\int_a^b f(x)dx=f(\eta)(b-a)$;

(Ⅱ) 若函数 $\varphi(x)$ 具有二阶导数,且满足 $\varphi(2)>\varphi(1)$,$\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)dx$,则至少存在一点 $\xi\in(1,3)$,使得 $\varphi''(\xi)<0$.

(21)(本题满分 11 分)

求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=4$ 下的最大值与最小值.

(22)(本题满分 12 分)

设 n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$,其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{pmatrix}_{n\times n}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)证明行列式 $|\boldsymbol{A}| = (n+1)a^n$;

(Ⅱ)当 a 为何值时,该方程组有唯一解,并求 x_1;

(Ⅲ)当 a 为何值时,该方程组有无穷多解,并求通解.

(23)(本题满分 10 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 $-1,1$ 的特征向量,向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$.

(Ⅰ)证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关;

(Ⅱ)令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$.