

2021 研究生入学考试考研数学试卷 (数学二)

一、选择题: 1~10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的. 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1. $\int_0^{x^2} (e^{t^3} - 1) dt$ 是 x^7 的

- (A) 低阶无穷小 (B) 等价阶无穷小 (C) 高阶无穷小 (D) 同阶但非等价无穷小

2. $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处

- (A) 连续且取得极大值 (B) 连续且取得极小值
(C) 可导且导数为零 (D) 可导且导数不为零

3. 有一圆柱体, 底面半径与高随时间的变化率分别为 2cm/s , -3cm/s , 当底面半径为 10cm , 高为 5cm 时, 圆体的体积与表面积随时间的变化速率为

- (A) $125\pi\text{cm}^3/\text{s}, 40\pi\text{cm}^2/\text{s}$ (B) $125\pi\text{cm}^3/\text{s}, -40\pi\text{cm}^2/\text{s}$
(C) $-100\pi\text{cm}^3/\text{s}, 40\pi\text{cm}^2/\text{s}$ (D) $-100\pi\text{cm}^3/\text{s}, -40\pi\text{cm}^2/\text{s}$

4. 函数 $f(x) = ax - b \ln x (a > 0)$ 有 2 个零点, 则 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是

- (A) $(e, +\infty)$ (B) $(0, e)$ (C) $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ (D) $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$

5. 设函数 $f(x) = \sec x$ 在 $x = 0$ 处的 2 次泰勒多项式为 $1 + a + bx^2$, 则

- (A) $a = 1, b = -\frac{1}{2}$ (B) $a = 1, b = \frac{1}{2}$ (C) $a = 0, b = -\frac{1}{2}$ (D) $a = 0, b = \frac{1}{2}$

6. 设函数 $f(u, v)$ 可微且 $f(x+1, e^x) = x(x+1)^2$, $f(x, x^2) = 2x^2 \ln x$, 则 $df(1, 1) =$

- (A) $dx + dy$ (B) $dx - dy$ (C) dy (D) $-dy$

7. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 则 $\int_0^1 f(x) dx =$

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{2n} & \text{(B)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{n} \\ \text{(C)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k-1}{2n}\right) \frac{1}{n} & \text{(D)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{2n}\right) \frac{2}{n} \end{aligned}$$

8. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_3 - x_1)^2$ 的正惯性指数和负惯性指数分别为

(A) 2, 0 (B) 1, 1 (C) 2, 1 (D) 1, 2

9. 设 3 阶矩阵 $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. 若向量组 a_1, a_2, a_3 可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示出, 则

(A) $Ax = 0$ 的解均为 $Bx = 0$ 解 (B) $A^T x = 0$ 的解均为 $B^T x = 0$ 解
(C) $Bx = 0$ 的解均为 $Ax = 0$ 解 (D) $B^T x = 0$ 的解均为 $A^T x = 0$ 解

10. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, 若三角可逆矩阵 P 和上三角可逆矩阵 Q , 使得 PAQ 为

对角矩阵, 则 P 、 Q 分别取

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{(B)} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{(C)} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{(D)} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

二、填空题: 11 ~ 16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

11. $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| 3^{-x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

12. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2e^t + t + 1 \\ y = 4(t-1)e^t + t^2 \end{cases}$ 确定, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t=0} = \underline{\hspace{2cm}}.$

13. 设函数 $Z = Z(x, y)$ 由方程 $(x+1)z + y \ln z - \arctan(2xy) = 1$ 确定, 则

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0,2)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

14. 已知函数 $f(t) = \int_1^{t^2} dx \int_{\sqrt{x}}^t \sin \frac{x}{y} dy$, 则 $f'(\frac{\pi}{2}) = \underline{\hspace{2cm}}.$

15. 微分方程 $y''' - y = 0$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

16. 多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 的 x^3 项的系数为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题: 17 ~ 22 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 请将答案写在答题纸指定位置上.

17. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \int_0^x e^{t^2} dt}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right).$

18. 设函数 $f(x) = \frac{x|x|}{1+x}$, 求函数 $f(x)$ 的凹凸性及渐近线.

19. 设函数 $f(x)$ 满足 $\int \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{6} x^2 - x + c$, L 为曲线 $y = f(x) (4 \leq x \leq 9)$. 记 L 的长

度为 S , L 绕 x 轴旋转的旋转曲面的面积为 A , 求 S 和 A .

20. $y = y(x) (x > 0)$ 是微分方程 $xy' - 6y = -6$ 满足 $y(\sqrt{3}) = 10$ 的解.

(1) 求 $y(x)$;

(2) 设 p 为曲线 $y(x)$ 上的一点, 记 p 处法线在 y 轴上的截距为 I_p . I_p 最小时, 求 p 的坐标.

21. 设 D 由曲线 $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2 (x \geq 0, y \geq 0)$ 与 x 轴围成, 求 $\iint_D xy dx dy$.

22. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & b \end{pmatrix}$ 仅有两个不同特征值, 若 A 相似于对角矩阵. 求 a, b . 求逆矩阵

P , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$.