2002 年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0,\\ ae^{2x}, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$______.

(2) 位于曲线 $y=xe^{-x}(0\leqslant x<+\infty)$ 下方,x 轴上方的无界图形的面积是______.

(3) 微分方程 $yy''+y'^2=0$ 满足初始条件 $y\Big|_{x=0}=1,y'\Big|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$ 的特解是______.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{1+\cos\dfrac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\dfrac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\dfrac{n\pi}{n}}\right)=$______.

(5) 矩阵 $\begin{pmatrix}0&-2&-2\\2&2&-2\\-2&-2&2\end{pmatrix}$ 的非零特征值是______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设函数 $f(u)$ 可导,$y=f(x^2)$,当自变量 x 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时,相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1,则 $f'(1)=$(　　)

(A) -1.　　(B) 0.1.　　(C) 1.　　(D) 0.5.

(2) 设函数 $f(x)$ 连续,则下列函数中,必为偶函数的是(　　)

(A) $\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$.　　(B) $\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$.

(C) $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t$.　　(D) $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$.

(3) 设 $y=y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y''+py'+qy=e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解,则当 $x\to 0$ 时,函数 $\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限(　　)

(A) 不存在.　　(B) 等于 1.　　(C) 等于 2.　　(D) 等于 3.

(4) 设函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界且可导,则(　　)

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(C) 当 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$.

(D) 当 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$ 存在时,必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$.

(5) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,向量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,而向量 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,则对于任意常数 k,必有(　　)

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关.

三、(本题满分 6 分)

已知曲线的极坐标方程是 $r=1-\cos\theta$,求该曲线上对应于 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 处的切线与法线的直角坐标方程.

四、(本题满分 7 分)

设 $f(x)=\begin{cases}2x+\frac{3}{2}x^2, & -1\leqslant x<0,\\ \frac{xe^x}{(e^x+1)^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$ 求函数 $F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t$ 的表达式.

五、(本题满分 7 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导, $f(x)>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$,且满足

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}},$$

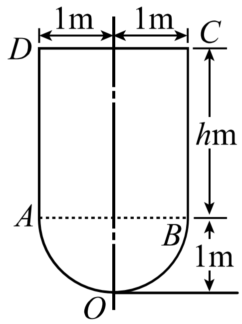
求 $f(x)$.

六、(本题满分 7 分)

求微分方程 $x\mathrm{d}y+(x-2y)\mathrm{d}x=0$ 的一个解 $y=y(x)$,使得由曲线 $y=y(x)$ 与直线 $x=1$, $x=2$ 以及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周的旋转体体积最小.

七、(本题满分 7 分)

某闸门的形状与大小如图所示,其中直线 l 为对称轴,闸门的上部为矩形 $ABCD$,下部由二次抛物线与线段 AB 所围成. 当水面与闸门的上端相平时,欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为 5∶4,闸门矩形部分的高 h 应为多少 m(米)?



八、(本题满分 8 分)

设 $0<x_1<3$, $x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\ (n=1,2,\cdots)$,证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在,并求此极限.

九、(本题满分 8 分)

设 $0<a<b$,证明不等式

$$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

十、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数,且 $f(0)\neq 0$, $f'(0)\neq 0$, $f''(0)\neq 0$. 证明:存在唯一的一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,使得当 $h\to 0$ 时, $\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)$ 是比 h^2 高阶的无穷小.

十一、(本题满分 6 分)

已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵,且满足 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵.

(1) 证明:矩阵 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆;

(2) 若 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$,求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

十二、(本题满分 6 分)

已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为 4 维列向量,其中 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$. 如果 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$,求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.