2013 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设 $\cos x - 1 = x\sin \alpha(x)$,其中 $|\alpha(x)| < \dfrac{\pi}{2}$,则当 $x \to 0$ 时,$\alpha(x)$ 是(　　)

(A) 比 x 高阶的无穷小量.　　(B) 比 x 低阶的无穷小量.

(C) 与 x 同阶但不等价的无穷小量.　　(D) 与 x 等价的无穷小量.

(2) 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $\cos(xy) + \ln y - x = 1$ 确定,则 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(\dfrac{2}{n}\right) - 1\right] = $(　　)

(A) 2.　　(B) 1.　　(C) -1.　　(D) -2.

(3) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leqslant x < \pi, \\ 2, & \pi \leqslant x \leqslant 2\pi, \end{cases}$ $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$,则(　　)

(A) $x = \pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点.　　(B) $x = \pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点.

(C) $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处连续但不可导.　　(D) $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处可导.

(4) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1 < x < \mathrm{e}, \\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1} x}, & x \geqslant \mathrm{e}. \end{cases}$ 若反常积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛,则(　　)

(A) $\alpha < -2$.　　(B) $\alpha > 2$.　　(C) $-2 < \alpha < 0$.　　(D) $0 < \alpha < 2$.

(5) 设 $z = \dfrac{y}{x}f(xy)$,其中函数 f 可微,则 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = $(　　)

(A) $2yf'(xy)$.　　(B) $-2yf'(xy)$.　　(C) $\dfrac{2}{x}f(xy)$.　　(D) $-\dfrac{2}{x}f(xy)$.

(6) 设 D_k 是圆域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ 在第 k 象限的部分. 记 $I_k = \displaystyle\iint_{D_k}(y - x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ (k = 1, 2, 3, 4)$,则(　　)

(A) $I_1 > 0$.　　(B) $I_2 > 0$.　　(C) $I_3 > 0$.　　(D) $I_4 > 0$.

(7) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵. 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}$,且 $\boldsymbol{B}$ 可逆,则(　　)

(A) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价.

(B) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价.

(C) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价.

(D) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价.

(8) 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为(　　)

(A) $a = 0, b = 2$.　　(B) $a = 0$,b 为任意常数.

(C) $a = 2, b = 0$.　　(D) $a = 2$,b 为任意常数.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\left[2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=$ ______.

(10) 设函数 $f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$,则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y=0$ 处的导数 $\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0}=$ ______.

(11) 设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r=\cos 3\theta\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$,则 L 所围平面图形的面积是______.

(12) 曲线 $\begin{cases}x=\arctan t,\\ y=\ln\sqrt{1+t^2}\end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的法线方程为______.

(13) 已知 $y_1=\mathrm{e}^{3x}-x\mathrm{e}^{2x}$, $y_2=\mathrm{e}^{x}-x\mathrm{e}^{2x}$, $y_3=-x\mathrm{e}^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的3个解,则该方程满足条件 $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=1$ 的解为 $y=$ ______.

(14) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵,$|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式,A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式. 若 $a_{ij}+A_{ij}=0$ $(i,j=1,2,3)$,则 $|\boldsymbol{A}|=$ ______.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

当 $x\to 0$ 时,$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小量,求 n 与 a 的值.

(16)(本题满分 10 分)

设 D 是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$,直线 $x=a(a>0)$ 及 x 轴所围成的平面图形,V_x, V_y 分别是 D 绕 x 轴,y 轴旋转一周所得旋转体的体积. 若 $V_y=10V_x$,求 a 的值.

(17)(本题满分 10 分)

设平面区域 D 由直线 $x=3y$, $y=3x$ 及 $x+y=8$ 围成,计算 $\iint\limits_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

（18）（本题满分 10 分）

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有 2 阶导数，且 $f(1)=1$. 证明：

（Ⅰ）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$；

（Ⅱ）存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

（19）（本题满分 10 分）

求曲线 $x^3-xy+y^3=1\,(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离和最短距离.

（20）（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$，

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小值；

（Ⅱ）设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

(21)(本题满分 11 分)

设曲线 L 的方程为 $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x(1 \leqslant x \leqslant \mathrm{e})$,

(Ⅰ)求 L 的弧长;

(Ⅱ)设 D 是由曲线 L,直线 $x = 1$,$x = \mathrm{e}$ 及 x 轴所围平面图形,求 D 的形心的横坐标.

(22)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$. 当 a, b 为何值时,存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC} - \boldsymbol{CA} = \boldsymbol{B}$,并求所有矩阵 $\boldsymbol{C}$.

(23)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$,记

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$;

(Ⅱ)若 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量,证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.