2011 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共8小题,每小题4分,共32分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 已知当 $x \to 0$ 时,函数 $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小量,则(　　)

(A) $k = 1,\ c = 4$.　　(B) $k = 1,\ c = -4$.　　(C) $k = 3,\ c = 4$.　　(D) $k = 3,\ c = -4$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导,且 $f(0) = 0$,则 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$ (　　)

(A) $-2f'(0)$.　　(B) $-f'(0)$.　　(C) $f'(0)$.　　(D) 0.

(3) 函数 $f(x) = \ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为(　　)

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

(4) 微分方程 $y'' - \lambda^2 y = e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}\ (\lambda > 0)$ 的特解形式为(　　)

(A) $a(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})$.　　(B) $ax(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})$.

(C) $x(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$.　　(D) $x^2(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$.

(5) 设函数 $f(x), g(x)$ 均有二阶连续导数,满足 $f(0) > 0, g(0) < 0$,且 $f'(0) = g'(0) = 0$,则函数 $z = f(x)g(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是(　　)

(A) $f''(0) < 0,\ g''(0) > 0$.　　(B) $f''(0) < 0,\ g''(0) < 0$.

(C) $f''(0) > 0,\ g''(0) > 0$.　　(D) $f''(0) > 0,\ g''(0) < 0$.

(6) 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x)\,dx,\ J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cot x)\,dx, K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x)\,dx$,则 I, J, K 的大小关系为(　　)

(A) $I < J < K$.　　(B) $I < K < J$.　　(C) $J < I < K$.　　(D) $K < J < I$.

(7) 设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶矩阵,将 $\boldsymbol{A}$ 的第2列加到第1列得矩阵 $\boldsymbol{B}$,再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第2行与第3行得单位矩阵.

记 $\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A} =$ (　　)

(A) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$.　　(B) $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$.　　(C) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$.　　(D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$.

(8) 设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$ 是4阶矩阵, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 若 $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系可为(　　)

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3$.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$.　　(C) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$.

二、填空题(本题共6小题,每小题4分,共24分,把答案填在题中横线上.)

(9) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1 + 2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} =$ ______.

(10) 微分方程 $y' + y = e^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的解为 $y =$ ______.

(11) 曲线 $y = \int_0^x \tan t\,dt \left(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}\right)$ 的弧长 $s =$ ______.

(12) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$ $\lambda > 0$,则 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx =$ ______.

(13) 设平面区域 D 由直线 $y=x$,圆 $x^2+y^2=2y$ 及 y 轴所围成,则二重积分 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma=$ ______.

(14) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$,则 f 的正惯性指数为______.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

已知函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^\alpha}$. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=0$,试求 α 的取值范围.

(16)(本题满分 11 分)

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}t^3+t+\dfrac{1}{3}, \\ y=\dfrac{1}{3}t^3-t+\dfrac{1}{3} \end{cases}$ 确定,求 $y=y(x)$ 的极值和曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

(17)(本题满分 9 分)

设函数 $z=f(xy,yg(x))$,其中函数 f 具有二阶连续偏导数,函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$,求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

（18）（本题满分 10 分）

设函数 $y(x)$ 具有二阶导数，且曲线 $l: y = y(x)$ 与直线 $y = x$ 相切于原点. 记 α 为曲线 l 在点 (x, y) 处切线的倾角，若$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，求 $y(x)$ 的表达式.

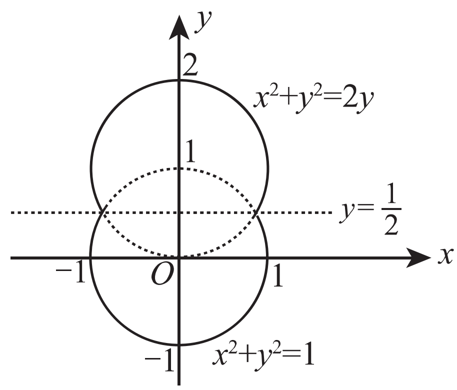
（19）（本题满分 10 分）

（Ⅰ）证明：对任意的正整数 n，都有$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ 成立；

（Ⅱ）设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\ (n = 1, 2, \cdots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

（20）（本题满分 11 分）

一容器的内侧是由图中曲线绕 y 轴旋转一周而成的曲面，该曲线由$x^2 + y^2 = 2y\ \left(y \geqslant \frac{1}{2}\right)$ 与 $x^2 + y^2 = 1\ \left(y \leqslant \frac{1}{2}\right)$ 连接而成.



（Ⅰ）求容器的容积；

（Ⅱ）若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出，至少需要做多少功？

（长度单位：m，重力加速度为 $g\ \mathrm{m/s^2}$，水的密度为 $10^3\ \mathrm{kg/m^3}$）

(21)(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数,且 $f(1, y) = f(x, 1) = 0$, $\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = a$,其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$,计算二重积分 $I = \iint\limits_D xyf''_{xy}(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(22)(本题满分 11 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (1, 3, 5)^{\mathrm{T}}$不能由向量组$\boldsymbol{\beta}_1 = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2 = (1, 2, 3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_3 = (3, 4, a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)将 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(23)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵,$\boldsymbol{A}$ 的秩为 2,且

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值与特征向量;

(Ⅱ)求矩阵 $\boldsymbol{A}$.