RESUMEN ANALISIS MATEMATICO II

PLANOS

ECUACION GENERAL DEL PLANO:

$$\boxed{AX + By + CZ + D = 0} \quad \mathbb{R}^3$$

TRAZAS (Intersección con cada plano de COORDENADAS XY, YZ, XZ)

$\boxed{\cap_X \quad Y = Z = 0}$ $\boxed{\cap_Y \quad X = Z = 0}$ $\boxed{\cap_Z \quad Y = X = 0}$

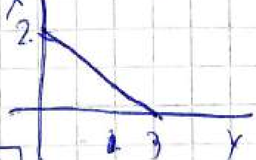
~~Para calcular la traza es~~
esto nos da la intersección con los ejes x, y, z

Si queremos calcular la TRAZA, el plano estar compuesto por un PAR de coordenadas, entonces lo que queda afuera es lo que vale cero al reemplazar en fórmula

ej: $\boxed{\cap_{XY} \quad Z = 0}$ $\boxed{\cap_{YZ} \quad X = 0}$ $\boxed{\cap_{XZ} \quad Y = 0}$

Luego si a estos le calculo la intersección con los ejes pertenecientes al plano coordenado como arriba, obtengo la TRAZA en $\mathbb{R}^2$

ej:



C.A $\mathbb{R}_3$

$\cap_{XY} \quad Z = 0 \Rightarrow$ $\cap_X$ $\mathbb{R}^2$ $Y = 0$

$\cap_Y \quad X = 0$

PLANOS COORDENADOS

- $X = 0 \equiv$ PLANO (Y, Z)
- $Y = 0 \equiv$ PLANO (X, Z)
- $Z = 0 \equiv$ PLANO (X, Y)

DOMINIO DE UNA FUNCION

El DOMINIO es un SUBCONJUNTO del plano (X, Y) o $Z=0$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \text{RESTRICCION}\}$$

I

$Z = \ln(A) \Rightarrow A > 0$

$Z = \dfrac{1}{\ln(A)} \Rightarrow A > 0,\; A \neq 1$

II

$Z = \sqrt[\text{PAR}]{A} \Rightarrow A \geq 0$

$Z = \dfrac{1}{\sqrt{A}} \Rightarrow A > 0$

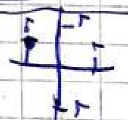
III

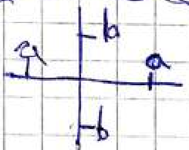
$Z =$ POLINOMIO

$D = \mathbb{R}^2$

Para resolver esto igualo ese "A" a cero y trato de encontrar el "limite" q̃ue sería una CURVA de AN. I

Estas CURVAS pueden ser:

- RECTA: $y = mx + b$ (✱ $m = \dfrac{3 \to \text{+ARRIBA / -ABAJO}}{1 \to \text{DERECHA}}$ $\quad b =$ COORD. ORIG.)
- CIRCUNFERENCIA: $x^2 + y^2 = r^2$ (✱ $\sqrt{r^2} = r \Rightarrow$ ) ✱ si $r=0$ es un punto
- ELIPSE: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $\quad a \neq b$

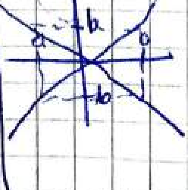
  ✱  ej: $27 = 9x^2 + 4y^2$

  $\dfrac{27}{27} = 1 = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{\frac{27}{4}}$

  $a = \sqrt{3}$

  $b = \sqrt{\frac{27}{4}}$
- PARABOLA: $y = ax^2 + bx + c$ (✱ $X_V = \dfrac{-b}{2a}$ $\quad Y_V = F(X_V)$

  APLICO CUADRATICA y tengo ∩ eje x)
- HIPERBOLA: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ✱ Saco a y b como elipse

  Hago cajo y marco asíntotas por los puntos
- HOMOGRAFICA: $\underline{A.V} \to$ DENOM LO QUE LO HACE CERO

  $\underline{A.H} \to$ DIVISION GRADOS X

Entonces, pasos:

1° Busco la restricción

2° Igualo a cero y Busco la curva de MAT I

3° Hago el grafico y Busco un valor "fuera" y uno "dentro" de la curva

4° Hago la tabla y evaluo la restricción ORIGINAL, para el punto que me de VERDADERO, ese area relleno como mi Dom

* $\leq \geq$ ◯ Parte del Area

$<\ >$ ◌ : No parte del Area

5° Escribo analíticamente $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \text{RESTRICCION}\}$, y termino el grafico

CURVAS DE NIVEL

Son las proyecciones de planos paralelos al plano (X, Y) o donde varia su $Z = K$ ("altura") intersectando a una superficie $Z = F(x,y)$

* Esta interseccion siempre nos da una curva de MAT 1, como las explicadas en la pag anterior.

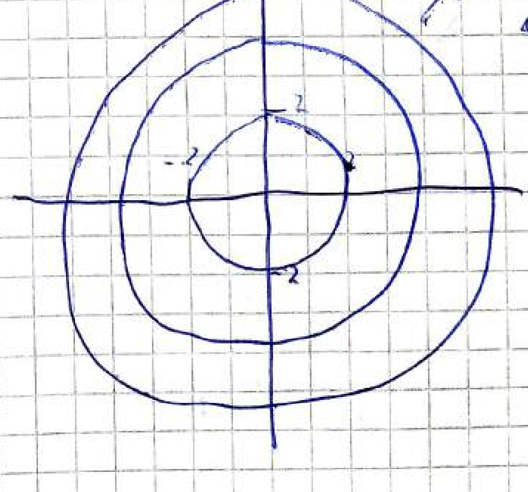
Reemplazo el K en el Z de la $F(x,y)$ y grafico la curva que desarrolla.

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 4 \end{cases}$$

$4 = x^2 + y^2$

$2^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow$ ◯

Para otros "Z" existen mas curvas



LIMITE DOBLE

El punto a donde tiende el limite ahora esta en un plano, por lo que existen infinitos caminos para llegar a él.

Para calcular el limite simplemente reemplazo el numero en la variable, como antes pero ahora para 2.

Ej: $\lim_{(x,y)\to(1,2)} x^2+2x = \lim_{(x,y)\to(1,2)} 1^2+2\cdot 2 = \boxed{5}$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x+y^3}{x+y^2} = \boxed{\frac{0}{0}} \rightarrow$ AQUI ESTA EL PROBLEMA ¡No puedo usar L'HOPITAL!

Al haber infinitos caminos no puedo recorrer todos para asegurar la existencia del limite, pero puedo asegurar la NO EXISTENCIA probando ciertos CAMINOS.

Estos METODOS o CAMINOS son: (Siempre que un camino NO asegure la NO existencia, debo usar otro hasta hacerlo)

- LIMITES SUCESIVOS o REITERADOS

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{si } L1 \neq L2 \Rightarrow \nexists \text{ Lim} \\ &L1 = \lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} F(x,y)\right] \\ &L2 = \lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} F(x,y)\right] \end{aligned}}$$

- LIMITES RADIALES

Si el limite radial queda dependiendo de "m" el limite doble no existe.

$$\boxed{LR = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y=mx}} F(x,y)}$$

Reemplazo todas "y" de mi limite por "mx", simplifico. Si se eliminan todos mx y quedo un numero existe el limite RADIAL, PERO NO ASEGURA al limite doble por lo que busco otros caminos.

Si me quedan mx en el resultado, es dependiente, ej:

LR dependiente $\Rightarrow \nexists$ Lim

mx

· LIMITE PARABOLICO

$$\boxed{L_P = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y = ax^2}} F(x,y)}$$

* TIP: Trato de EMPARDAR el grado del DENOM y NUM. de $F(x,y)$ cambiandole el grado o $y = ax^K$, ya que si tiene mismo grado = altas chances de resolver

Parecido al RADIAL pero ahora reemplazo la "y" por "ax^2", si queda dependiente en funcion de "a" el $\nexists$ Lim

CONTINUIDAD

Para que una funcion sea CONTINUA en un punto $P(x_0, y_0)$ se deben cumplir 3 cosas:

I) $\exists\ F(x_0, y_0)$ | Existe funcion en el $P(x_0, y_0)$ |

II) $\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F(x_0,y_0)$ | Existe limite finito para ese punto $P(x_0,y_0)$ |

III) $F(x_0, y_0) = L$ | el limite y el valor de la funcion en ese punto son iguales |.

Si se cumplen las 3 es CONTINUA

DISCONTINUIDAD EVITABLE

Si es discontinua pero EXISTE Limite Doble de la funcion en el punto $P(x_0,y_0)$ entonces es EVITABLE

I) $\nexists\ F(x_0, y_0)$

II) $\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F(x,y)$

* Para transformarla en CONTINUA la redefinimos asignandole como imagen al origen el valor del limite

Para resolver esto tengo que trabajar Algebraicamente la funcion hasta llegar a una forma:

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(algo)}{algo} = 1}$$

y luego

$$z = \begin{cases} \dfrac{sen(algo)}{algo} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ \underset{\text{val limite}}{0} & ; (x,y) = (0,0) \to \text{origen} \end{cases}$$

DISCONTINUIDAD ESENCIAL

Si es DISCONTINUA ~~EXISTE~~ y NO EXISTE LIMITE DOBLE es DISCONTINUA ESENCIAL y NO SE PUEDE SALVAR

DERIVADA PARCIAL

NOTACIONES

$$Z'_y \equiv F_y(x,y) \equiv \frac{\partial z}{\partial y}$$

POR DEFINICION:

• CON RESPECTO A X

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x, y_0) - F(x_0, y_0)}{x - x_0} = F'_x(x_0, y_0)}$$

• CON RESPECTO A Y

$$\boxed{\lim_{y \to y_0} \frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{F(x_0, y) - F(x_0, y_0)}{y - y_0} = F'_y(x_0, y_0)}$$

* Si al realizar esto me queda una indeterminación $\frac{0}{0}$ puedo utilizar L'HOPITAL (Porque es un limite simple, una sola variable)

POR TABLA / REGLAS:

• Cuando derivo con RESPECTO a X la "y" es CONSTANTE $\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}$

• Cuando derivo con RESPECTO a Y la "x" es CONSTANTE $\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}$

Luego de eso, se deriva de la misma manera que MAT I

Ej: $F(x,y) = 9 - x^2 - y^2$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = -2x$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -2y$$

TEOREMA de SCHWARZ (Derivadas Cruzadas

Si $F(x,y)$ es derivable en un entorno (x_0, y_0) entonces:

$$\boxed{F''_{xy} = F''_{yx}}$$

DERIVADA de FUNCION IMPLICITA

Cuando tengo una funcion donde $F(X,Y,Z)=0$, debo realizar otro camino

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{[F'_x]}{F'_z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{[F'_y]}{F'_z}}$$

Siempre que la funcion este igualada Cero (puedo hacer pasos para igualarla a cero si no lo esta y aplicar esto)

DERIVADA de una FUNCION COMPUESTA

Si tengo una funcion del estilo:

$$z = F(x,y) \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Entonces:

DERIVADA TOTAL DE $X(t)$ — MAT I — DERIVADA TOTAL DE $y(t)$

$$\boxed{\frac{\partial F(x,y)}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}}$$

DER. PARCIAL CON RESPECTO A X — MAT II — DER. PARCIAL CON RESPECTO A y

PLANO TANGENTE y RECTA NORMAL EN UN PUNTO

$$P_T = z - z_0 = z'_x(x-x_0) + z'_y(y-y_0)$$

EN EL PUNTO P_0

$$RN = \frac{x-x_0}{z'_x} = \frac{y-y_0}{z'_y} = \frac{z-z_0}{-1}$$

* Las derivadas z' son evaluadas en un punto P_0 en la formula

PLANO NORMAL

1° Evaluo la $F(t)$ en t (me da x_0, y_0, z_0)

2° Derivo la $F'(t)$ en t (me da A, B, C) => Por que es el vector $\vec{N}$

3° Reemplazo en la ecu Gral del plano

$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0)$ →

DIFERENCIAL

DIFERENCIAL TOTAL (dF) (Cuando varío la "X" y la "Y" al mismo tiempo)

$$\boxed{dF(P_0) = F'_x(P_0)\,\underset{\Delta x}{dx} + F'_y(P_0)\,\underset{\Delta y}{dy}}$$

$*\ (x_F - x_i)$ $\quad *\ (y_F - y_i)$

IGUALES

$$dx = \Delta x = (x_F - x_i)$$
$$dy = \Delta y = (y_F - y_i)$$
$$dz = z'_x(P_0)\,\Delta x + z'_y(P_0)\,\Delta y$$

DERIVADA DIRECCIONAL

$$\boxed{D_u F(P_0) = D_u F(x,y) = \nabla F(x,y) \cdot \vec{u}}$$

VECTOR GRADIENTE — PRODUCTO VECTORIAL — VECTOR UNITARIO

* La derivada direccional en un punto P_0 es igual producto ~~vectorial~~ (CAMBIAMOS X LA OTRA DE SU MISMO LUGAR) del ∇F y el $\vec{u}$

$$\boxed{\vec{\nabla} F = F'_x\,\check{i} + F'_y\,\check{j}}$$

* Luego evalúo en el punto y obtengo el VECTOR GRADIENTE

VECTOR CUALQUIERA

$$\boxed{\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{v_x\,\check{i} + v_y\,\check{j}}{|\vec{v}|} = \langle \cos\theta \,;\, \operatorname{sen}\theta \rangle}$$

* El módulo de $\vec{u}$ siempre da 1, por eso si el módulo de mi $\vec{v}$ cualquiera me da diferente lo divido sino lo 1 y se obvia

$$|\text{algo}| = \sqrt{(\text{algo})^2 + (\text{algo}_m)^2 \ldots}$$

CARACTERÍSTICAS:

- La MAYOR DERIVADA se obtiene en la DIRECCIÓN al ∇F

No existen direcciones con mayor valor que la del gradiente

- Su VALOR es el $|\nabla F|$ y lo calculo en un punto dado

Para (x,y) punto la derivada máxima es $|\vec{\nabla} F|_{(P)}$

~~Con los otros casos como en otra de~~

$$\boxed{D_u F(x,y,z) = \nabla F(x,y,z) \cdot \langle \cos\alpha \,;\, \cos\beta \,;\, \cos\gamma \rangle}$$

El módulo de los DIRECTORES es siempre 1 $\Rightarrow$ es Unitario $\vec{u}$

Cosenos DIRECTORES $\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma$

FUNCIONES VECTORIALES

Transformo un número real en un vector

$$\boxed{r(t) = \langle \underbrace{F(t)}_{x} ; \underbrace{g(t)}_{y} ; \underbrace{h(t)}_{z} \rangle = F(t)\,\check{i} + g(t)\,\check{j} + h(t)\,\check{k}}$$

- t es la variable independiente
- $F(t)$, $g(t)$ y $h(t)$ son funciones llamadas funciones componentes y representan x, y, z

DOMINIO: Intersección de los dominios de las funciones componentes

DERIVADAS:

$$\boxed{r'(t) = \langle F'(t) ; g'(t) ; h'(t) \rangle}$$

C se obtiene asignándole $\check{i}, \check{j}$ y $\check{k}$ a los valores de $F(t)$, $g(t)$, $h(t)$ en un punto k, luego igualas y despejas todo $r(k)$

INTEGRALES

$$\boxed{\int r(t)\,dt = \int F(t)\,dt\,\check{i} + \int g(t)\,dt\,\check{j} + \int h(t)\,dt\,\check{k} + \underbrace{C}_{\text{VECTOR}}}$$

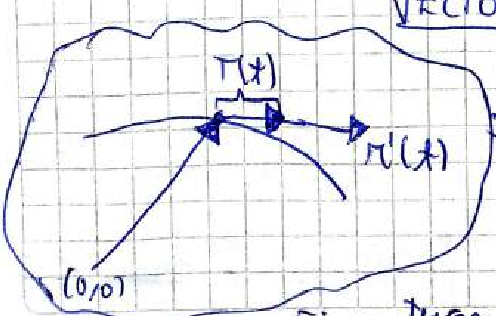
* Tanto derivada como integral se realiza haciéndolas una a una a cada función componente

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO / BARROW

$$\boxed{\int_a^b r(t) = \int r(t) \Big|_a^b = \int r(b) - \int r(a)}$$

* Realizo integral de cada componente, a la integral final la evalúo en b y le resto lo mismo evaluado en a

VECTOR TANGENTE UNITARIO ($T(t)$)



$$\boxed{T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}}$$

* Para graficar VECTORES unitarios
$\check{i}$ = − IZQ, + DER
$\check{j}$ = − ABAJO, + ARRIBA

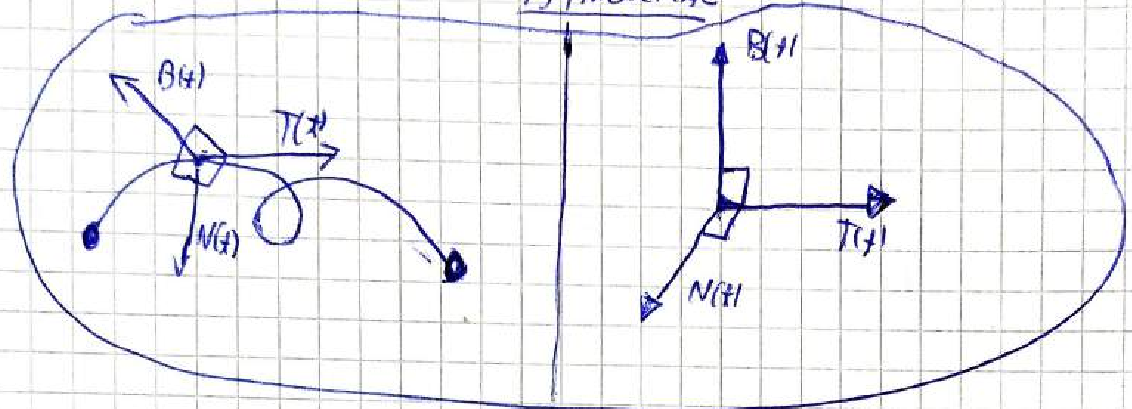
* Si no tengo un valor de "t" lo debo conseguir de las funciones componentes y un P_0 al despejar y reemplazar

LONGITUD DE ARCO y CURVATURA

$$\boxed{L=\int_{a=t_i}^{b=t_f}\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2+[h'(t)]^2}}$$

longitud de una curva en el espacio

VECTORES NORMAL y BINORMAL



Es un conjunto de vectores T, N, B que forman ángulos rectos entre ellos y que se mueven a lo largo de una curva cuando varía t

1. $T(t)=\dfrac{r'(t)}{\lvert r'(t)\rvert}$	2. $N(t)=\dfrac{T'(t)}{\lvert T'(t)\rvert}$	3. $B(t)=T(t)\times N(t)$

$$B(t)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ & \langle T(t)\rangle & \\ & \langle N(t)\rangle & \end{vmatrix}$$

$+ \quad - \quad +$

1. Pasamos i, j, k y luego los componentes de los vectores

2. Respeto los signos de la fórmula y por cada i, j, k tapo la fila y multiplico cruzando y resto los productos

"PRODUCTO VECTORIAL"

* El vector r(t) es el que me da el punto

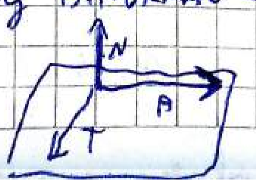
PLANOS

Si tomo 2 de los 3 vectores forman un plano y el vector que me queda pasaría a ser NORMAL a ese plano

• NORMAL y BINORMAL = PLANO NORMAL

• NORMAL y TANGENTE = PLANO OSCULADOR

• TANGENTE y BINORMAL = PLANO RECTIFICANTE



MOVIMIENTO EN EL ESPACIO

3 Características:

- VELOCIDAD = $V(t) = r'(t)$
- ACELERACION = $a(t) = v'(t) = r''(t)$
- RAPIDEZ = RAP = $|r'(t)| = |V(t)|$

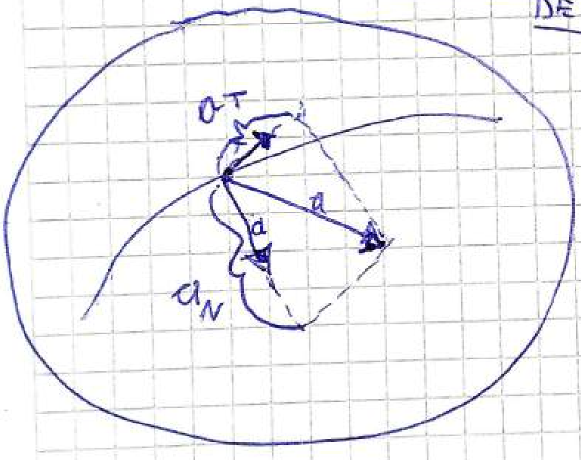
$$r(t) \xrightarrow{\text{DERIVO}} r'(t) = V(t) \xrightarrow{\text{DERIVO}} a(t)$$

$$a(t) \xrightarrow{\text{INTEGRO}} r'(t) = V(t) \xrightarrow{\text{INTEGRO}} r(t)$$

* La velocidad es siempre TANGENTE a la curva

* La aceleración queda por adentro de la curva

COMPONENTES TANGENCIALES Y NORMALES DE LA ACELERACION



$$\boxed{a_N = \frac{|r'(t) \overset{\text{vectorial}}{\times} r''(t)|}{|r'(t)|} \qquad a_T = \frac{r'(t) \overset{\text{escalar}}{\cdot} r''(t)}{|r'(t)|}}$$

ECUACIONES DIFERENCIALES

Vincula un Numero FINITO de VARIABLES con las DERIVADAS de uno de ellas

Ej: $y' = x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x$

Ecu dif ORDINARIA
1 solo VAR. INDEPEN.

RESUELVO

$dy = x\,dx$

$\int dy = \int x\,dx$

* INTEGRO AMBOS LADOS y Hago DESAPARECER los DIFERENCIALES

$\boxed{y = \frac{x^2}{2} + C}$ → PONGO UNA SOLA "C"

SOLUCION GENERAL
(FAMILIA DE CURVAS)

Si quiero

SOLUCION PARTICULAR
(UNA CURVA DE LA FAMILIA)

1° TOMO un punto
2° Reemplazo en la gral.
3° Hallo la constante "C"
4° Agrego "C" a la gral.

METODOS RESOLUCION ECU. DIF.

• VARIABLES SEPARADAS:

$\boxed{y' = P(x) \cdot Q(y)} = \frac{dy}{dx} = P(x) \cdot Q(y)$

* Debo separar cada Variable con su diferencial

$$\boxed{\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x)\,dx}$$

• HOMOGENEAS

$$\boxed{P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0}$$

* Ambas funciones (P y Q) deben ser del mismo grado "n" (X^n)
* Tener en cuenta que $Z = F(X,y)$ es HOMOGENEA si

$$\boxed{F(t\cdot x;\ t\cdot y) = t^n \cdot F(X,y)}$$

1° Una vez verificado las 2 casos (HOMO y = GRADO), divido por $\Rightarrow \boxed{X^n}$ ambas funciones

2° y reemplazo el "$\frac{y}{X^n}$" por "v" (debo reemplazar "dy") $dy = v\,dx + x\,dv$

3° me debe quedar todo lo "x" con dx y todo lo "v" con dv

4° Integro y vuelvo a reemplazar "v" por el valor original

PROP. LOGARITMICAS UTILES

- $A \ln B = \ln B^A$
- $\ln K = C$
- $\ln A + \ln B = \ln(A\cdot B)$
- $e^{\ln A} = A$

• PRIMER ORDEN

$$\boxed{y' + P(x)y = Q(x)}$$ * P(x) y Q(x) son Continuas

SOLUCION $\Rightarrow \boxed{y = u\cdot v}$ $\begin{cases} \boxed{u = e^{-\int P(x)\,dx}} \\ \boxed{v = \int Q(x)\cdot e^{\int P(x)\,dx}\,dx} \end{cases}$

Asi...

$$\boxed{y = e^{-\int P(x)\,dx}\cdot\left[\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C\right]}$$

· TOTALES EXACTAS :

$$\boxed{P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0}$$

Es total exacta si cumple LEY de SIMETRIA

$$\boxed{P'_y = Q'_x}$$

Si cumple, realizo:

1° $U(x,y) = \int P(x,y)\,dx + \alpha(y)$

2° $U(x,y) = \int Q(x,y)\,dy + \beta(x)$

3° Junto el resultado de ambos, pero si algo se repite en los 2, lo pongo 1 solo vez

y eso lo igualo "C" $= U(x,y) \,/\, \int dU = C \,/\, dU = 0$

Si NO CUMPLE la LEY de SIMETRIA

$$\boxed{U_x = e^{\int \frac{P'_y - Q'_x}{Q(x,y)}\,dx}}$$

Resuelvo y me va a quedar el FACTOR INTEGRANTE

Multiplico ambos lados del igual por este (uno se cancela con $\cancel{(=0)}$)

Me va a quedar simetrica, a partir de ahí resuelvo como ARRIBA

· BERNOULLI

Primer orden es caso particular de Bernoulli ($n=0$)

$$\boxed{y' + P(x)\,y = Q(x)\cdot y^n}$$

RESOLUCION : 1° divido por y^n ambos lados

2° Hago un cambio de variable con Z y Z', que me desaparezca y, ~~[illegible]~~

$\times$ multiplico por algo para que quede 1 en lado IZQ

3° Cuando quede en funcion de Z y X deberia llevarlo a PRIMER ORDEN y resolverlo con su METODO

INTEGRAL DOBLE

VOLUMEN

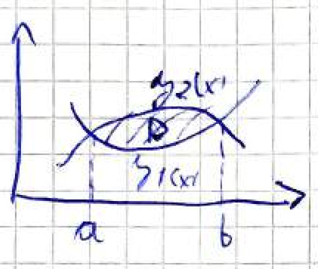
$$\boxed{V=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy}$$

AREA

$$\boxed{A=\iint_D 1\cdot dx\,dy}$$

$$\iint_D ? \Rightarrow \underbrace{\int_a^b}_{x}\ \underbrace{\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}}_{y(x)}$$

* A y B Busco INTERSECCION o INICIO FINAL (LIMITES en X)
* $y_2(x)$ TECHO, $y_1(x)$ PISO



* Cuando planteo la integral los diferenciales me deben envolver a sus integrales ej:

$$\int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\right] dx$$

Resuelvo de adentro para afuera NO OLVIDAR BARROW (b-a)

CAMBIO de COORDENADAS

COORDENADAS POLARES:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ x^2+y^2=r^2 \end{cases}$$

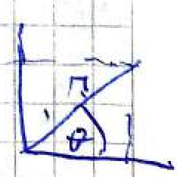
SI ES CIRCUNFERENCIA USO POLARES

1 si AREA

$$\boxed{V=\int_{a(\theta)}^{b(\theta)}\int_{\theta_1}^{\theta_2} F(r,\theta)\cdot \underset{\text{JACOBIANO}}{r}\,d\theta\,dr}$$

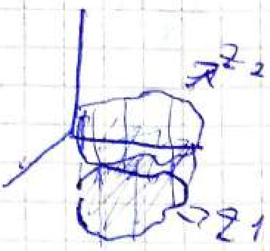
Valor INICIAL Y FINAL del RADIO

Valor INICIAL o FINAL del ÁNGULO



* Por lo general tomo un CUARTO de circunferencia (MULTIPLICO INTEGRAL por 4 luego) y θ va de 0 a $\frac{\pi}{2}$ (90 GRADOS)

VOLUMEN del UN SOLIDO
LIMITADO POR 2 SUPERFICIES



$$\boxed{V=\iint_D (z_2 - z_1)\,dx\,dy}$$

1º Halla intersección entre z_1 y z_2

2º Grafica la intersección para hallar el dominio

3º Revisa cual es TECHO y cual es PISO

4to Integral con D del grafico de TECHO - PISO

~~• COORDENADAS CILINDRICAS~~

INTEGRALES
TRIPLES

$$\boxed{I=\int_{x}\int_{y(x)}\int_{z=f(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx}$$

* Si $f(x,y,z)=1$ -> Calculamos VOLUMEN (el mismo que las otras)

• COORDENADAS CILINDRICAS

Como las esfericas pero aplicadas integral triple $\mathbb{R}^3$

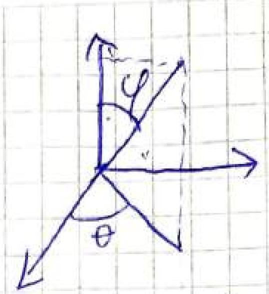
$$\boxed{I=\int_{r}\int_{\theta}\int_{z(r)} f(r,\theta,z)\,dz\,d\theta\,dr}$$

JACOBIANO = r
CILINDRICA

* para despejar z, tener en cuenta que $\boxed{x^2+y^2=r^2}$

$$\longrightarrow V=\int_{r}\int_{\theta}\int_{z(r)} 1\cdot r\,dz\,d\theta\,dr$$

COORDENADAS ESFERICAS



$$P(x,y,z) = \begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho^2 \cos\varphi \\ \text{radio: } \rho^2 = x^2+y^2+z^2 \\ \text{JACOBIANO} = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \end{cases}$$

$$\boxed{V = \int_\rho \int_\theta \int_\varphi \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \, d\theta \, d\rho}$$

* Por lo general tomo un OCTANTE (multiplico integral por 8) calculando que θ y φ varían de 0 a $\frac{\pi}{2}$ (90 grados)

$$\boxed{I = \int_\rho \int_\theta \int_\varphi F(\rho;\theta;\varphi) \, \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \, d\theta \, d\rho}$$

Luego de reemplazar x, y, z de la función

INTEGRAL CURVILINEA

Similar a una integral simple pero en vez de un intervalo [a,b] integro sobre una curva "C".

Hay que tener en cuenta el SENTIDO al RECORRER C.

- $+ \rightarrow$ ANTIHORARIO
- $- \rightarrow$ HORARIO

$$\boxed{\int_a^b F(x; g(x))\, dx + \int_a^b F(y; g(y))\, dy}$$

RESUELVO

1º Grafico la curva, y me fijo en la dirección del valor inicial y final, si es de a intervalos lo hago por tramos

2º Luego de obtener A y B, dejo la función en función de X, o reemplazo y

INTEGRAL CURVILÍNEA en CAMPOS VECTORIALES

$$\boxed{\int_C P(x,y)\,dx + \int_C Q(x,y)\,dy}$$

Puede aparecer ASÍ

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

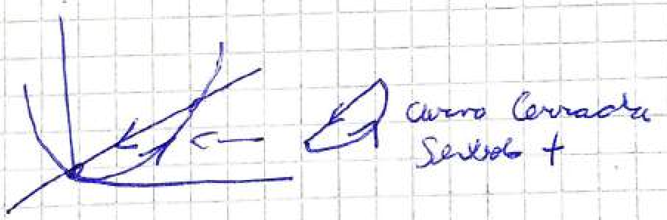
$$\vec{F}(x,y) = \langle P(x,y) ; Q(x,y) \rangle$$

INTEGRAL CURVILÍNEA de UNA CURVA CERRADA

- TEOREMA de GAUSS–GREEN

$$\boxed{\oint_{C^+} \left[P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \right] = \iint_D (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy}$$

Ej curva cerrada:



Si la Integral Normal, por curva cerrada DEBERÍA SEPARARLO en 2 CURVAS C1 y C2 y calcularla por separado y luego sumarla

$$\boxed{\oint_{C^+} \rightarrow = \int_{C1} + \int_{C2}} \ldots \int_{Cn}$$

n curvas que cierren

* reemplazo y por x de C1 y por x de C2 por separado

CERRADA

INTEGRAL de LINEA de un CAMPO CONSERVATIVO

Es CAMPO CONSERVATIVO si cumple LEY de SIMETRÍA

Por lo tanto su integral da 0,: $\boxed{P'_y = Q'_x}$

$$\oint_C [P\,dx + Q\,dy] = \iint_D \underbrace{(Q'_x - P'_y)}\,dx\,dy$$

$$\oint_C = \boxed{0}$$

TEOREMA FUNDAMENTAL de las INTEGRALES CURVILINEAS

La integral curvilínea entre 2 puntos A y B, donde toma una trayectoria dentro de un campo vectorial CONSERVATIVO es SIEMPRE LA MISMA, independientemente de la TRAYECTORIA.

TEOREMA FUNDAMENTAL de las INTEGRALES CURVILINEAS en el ESPACIO ($\mathbb{R}^3$)

$$\int_C [P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz] = \int_a^b du(x,y,z) = U_B - U_a \Big|_{\mathbb{R}^3}$$

* me da una integral con P, Q, R perteneciente a un campo vectorial y 2 punto $P_0(x,y,z)$, A y B.

1.ro Verificar que el campo sea conservativo, para eso el rot $\vec{F}$ tiene que ser 0.

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \Rightarrow \text{Tiene que dar } 0\check{i} + 0\check{j} + 0\check{k}$$

2.do $U(x,y,z)$ = Integro P, Q, R por separado y hago la técnica del "COMPARAR" (pongo todo excepto lo que se repite 1 vez)

3.ro $U_B - U_a \Rightarrow$ Resto U evaluado en el punto B menos evaluado en el punto A

INTEGRAL de SUPERFICIE
en CAMPOS ESCALARES

$$\boxed{\iint_S F(x,y,z)\, ds = \iint_R F \cdot |\vec{ds}|}$$

* Cuando parametrizo CURVA, 1 variable, una en función de otra

PASOS:

1ero) PARAMETRIZO SUPERFICIE $\boxed{\vec{r} = (x;\ y;\ z(x,y))}$

* Cuando parametrizo una SUPERFICIE me tiene que quedar con 2 VARIABLES, es decir una me quede en función de las otras 2

* Se puede aplicar cambio de ~~coordenadas~~ coordenadas

2do) CALCULO el DIFERENCIAL de SUPERFICIE (PARAMETRIZADA)

$$\vec{ds} = \pm \begin{vmatrix} \overset{+}{\check{i}} & \overset{-}{\check{j}} & \overset{+}{\check{k}} \\ \text{c/u componente de } \vec{r} \text{ derivada en "x"} & & \\ \text{c/u componente de } \vec{r} \text{ derivada en "y"} & & \end{vmatrix} dx\,dy = (\check{i} - \check{j} + \check{k})\, dx\,dy$$

3ero) CALCULO el MODULO de $|\vec{ds}|$

$$\sqrt{(\check{i})^2 + (\check{j})^2 + (\check{k})^2}$$

4to) PLANTEO INTEGRAL

Si AREA

$$\boxed{A = \iint_{S} 1 \cdot ds}$$
x y(x)

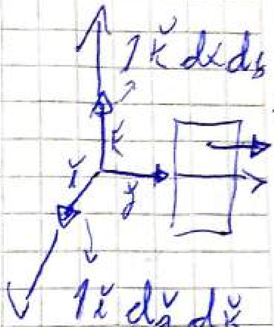
Si SUPERFICIE ~~[illegible]~~

$$I = \iint_S \underbrace{B(x,y,z)}_{\downarrow} \cdot ds$$

Entonces esto también se debe PARAMETRIZAR

INTEGRAL de SUPERFICIE en CAMPOS VECTORIALES

Es por ejemplo cuanto tengo flujo que atraviesa superficie



CUANDO VECTOR ELEMENTAL

$$\boxed{\iint_S \vec{F}\,(\vec{B}) \cdot d\vec{S}} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$$

PRODUCTO ESCALAR

PASOS:

1ro) PARAMETRIZO SUPERFICIE (Como en escalares)

2do) CALCULO $d\vec{S}$ (Como en escalares)

3ro) NO! Hago el modulo X lo dejo $d\vec{S}$

4to) PARAMETRIZO CAMPO VECTORIAL $\vec{F}$ o $\vec{B}$, lo dejo en función de "X" e "Y"

5to) REALIZO PRODUCTO ESCALAR (COMPONENTE CON SU COMPONENTE EN EL OTRO VECTOR, y me da UN NUMERO, NO VECTOR)

6to) PLANTEO la INTEGRAL $\boxed{\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}}$

TEOREMA de ROTOR / STOKES

$$\boxed{\oint_{C^+} \left[P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz \right] = \iint_S \text{rot}\,\vec{F} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{PRODUCTO ESCALAR}}}{\bullet} d\vec{s}}$$

PASOS:

1^er) PARAMETRIZO la "SUPERFICIE"

2^do) CALCULO $d\vec{s}$

3^ro) NO! hago el modulo, dejo $d\vec{s}$

4^to) ~~Rea~~ REALIZO el ROT $\vec{F}$

Recordemos:

$$\text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

5^to) REALIZO la INTEGRAL $\iint_S \left[\langle x_1, y_1, z(x_1,y_1) \rangle \bullet \langle x_2, y_2, z(x_2,y_2) \rangle \right] dy\,dx$

(* Para Techo piso Base la intersección de las 2 curvas)