ALGEBRA PARCIAL 2 - RESUMEN | FRASCINO JUAN PABLO

CONICAS

EXISTEN 4:

- CIRCUNFERENCIA
- ELIPSE
- PARABOLA
- HIPERBOLA

ECUACION GENERAL DE 2DO GRADO

$$Ax^2 + By^2 + \underbrace{Cxy}_{\text{NO LO UTILIZAMOS}} + Dx + Ey + F = 0$$

• CIRCUNFERENCIA

CONDICIONES: • A, B y C NO PUEDEN SER CERO SIMULTEAMENTE

- $x^2 = y^2$
- $x^2 \wedge y^2 = 1 \wedge 1$ (O QUE SE PUEDA SACAR F.C)
- NO TENER TERMINO EN XY

$$\boxed{\frac{(D)^2}{4} + \frac{(E)^2}{4} - F > 0}$$

• TIENE QUE CUMPLIR !!!

ECUACION CANONICA O ANALITICA DE LA CIRCUNFERENCIA:

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2}$$

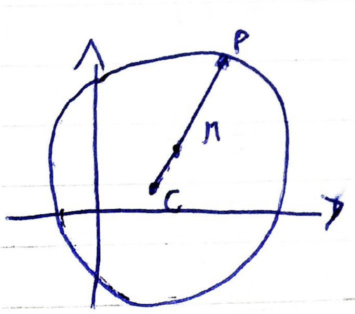
r = radio

CUADRADO DE BINOMIO $= (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (SIMBOLO DEL MEDIO)

ECUACION GENERAL O DESARROLLADA DE LA CIRCUNFERENCIA

$$\boxed{x^2 + y^2 + \overset{(-2\cdot x_0)}{D}x + \overset{(-2\cdot y_0)}{E}y + \overset{(x_0^2 + y_0^2 - r^2)}{F} = 0}$$

PARA OBTENERLA DESARROLLAMOS LA CANONICA/ANALITICA



EN UNA CIRCUNFERENCIA LA DISTANCIA ENTRE UN PUNTO Y EL CENTRO ES SIEMPRE EL RADIO

PUNTO = $(x_0 ; y_0)$

CENTRO = $(x ; y)$ → CALCULAR CENTRO: $\left(\frac{-D}{2} ; \frac{-E}{2} \right)$

CALCULAR RADIO ← RADIO = r

$$\sqrt{\frac{(D)^2}{4} + \frac{(E)^2}{4} - F} = r$$

AREA CIRCULO = $r^2 \cdot \pi$

LONGITUD CIRCULO = $2 \cdot r \cdot \pi$

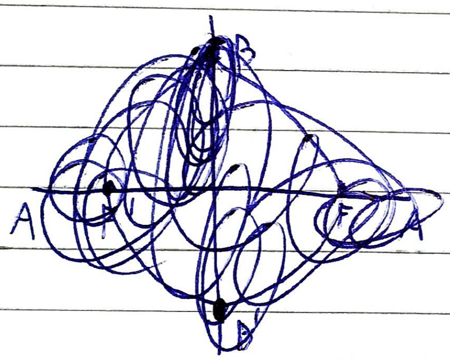
· ELIPSE

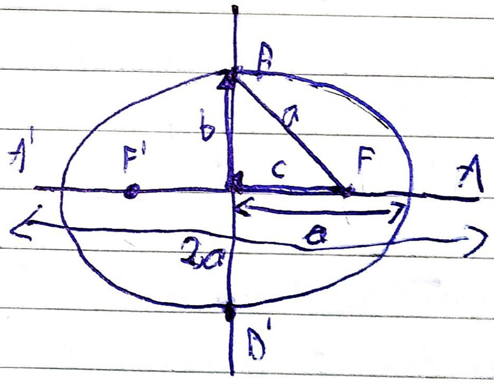
CONDICIONES:

- EL SIGNO DE $A(x^2)$ Y EL DE $B(y^2)$ TIENE QUE SER IGUALES
  $\left.\begin{array}{l} \text{Si } +x^2 \Rightarrow +y^2 \\ \text{Si } -x^2 \Rightarrow -y^2 \end{array}\right\}$ E VICEVERSA
- NO HAYA xy
- $\boxed{e = \dfrac{c}{a} < 1}$ QUE LA EXCENTRICIDAD SEA MENOR QUE 1

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

RELACION FUNDAMENTAL DE LA ELIPSE





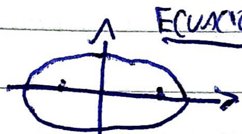
$$d(B,F) + d(B,F') = 2a$$
$$d(B,F) = d(B',F')$$
$$d(B,F) = a$$

EXCENTRICIDAD DE LA ELIPSE: $\boxed{e = \dfrac{c}{a}}$ (SIEMPRE < 1)

LADO RECTO

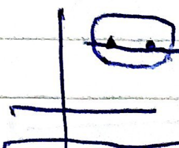
$$\boxed{L_R = \frac{2b^2}{a}}$$

ECUACION CARTESIANA



$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$



$$\boxed{\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2}}$$

La "a" va con el eje que cruce los focos

ECUACION GENERAL DE LA ELIPSE

$$+Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$$

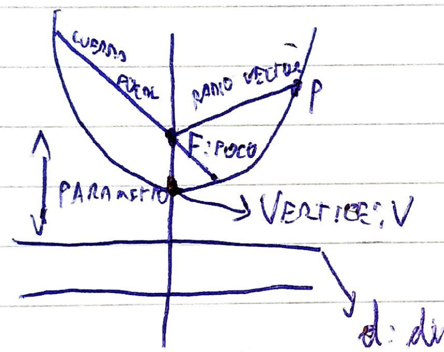
MISMO SIGNO

• PARABOLA

$$\boxed{Ax^2+By^2+Dx+Ey+F\,0}$$

Se debe cumplir:

* Ax^2 ^ By^2 no pueden ser 0 (cero) a la vez, pero uno debe serlo
* EL coeficiente cuadrático no nulo debe ser 1 (en caso que no, factor común)



V = Punto medio entre F y d

FOCO => F = $\boxed{\left(0;\frac{p}{2}\right)}$

d: $\boxed{y=-\frac{p}{2}}$ o $\boxed{y=\frac{p}{2}}$

d: directriz

RADIO VECTOR: = distancia de cualquier punto al foco

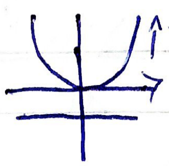
P = distancia FOCO Y DIRECTRIZ

$$\boxed{e=1=\frac{d(P,F)}{d(P,d)}}$$

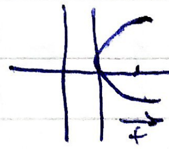
SIEMPRE 1 en PARABOLA

ECUACION PARABOLA

EJE EN ORIGEN (VERTICE ORIGEN)



$\boxed{x^2=2py}$



$\boxed{y^2=2px}$

EN CASO DE QUE SE ENCUENTRE DESPLAZADA

$$\boxed{\begin{array}{c}(x-\alpha)^2=2p(y-\beta)\\ \text{o} \quad (+\text{ o }-)\\ (y-\beta)^2=2p(x-\alpha)\end{array}}$$

ECUACION CARTESIANA O ORDINARIA

$\boxed{x^2=-2py}$

$\boxed{y^2=-2px}$

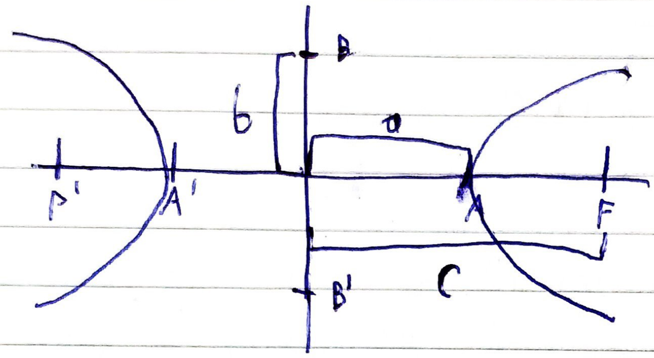
$LR=|2p|$ VALOR ABSOLUTO 2P

· HIPERBOLA

$$\boxed{Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Debe cumplir:

* $Ax^2 \wedge By^2$ deben tener SIGNOS DISTINTOS



$$\boxed{C^2 = a^2 + b^2}$$

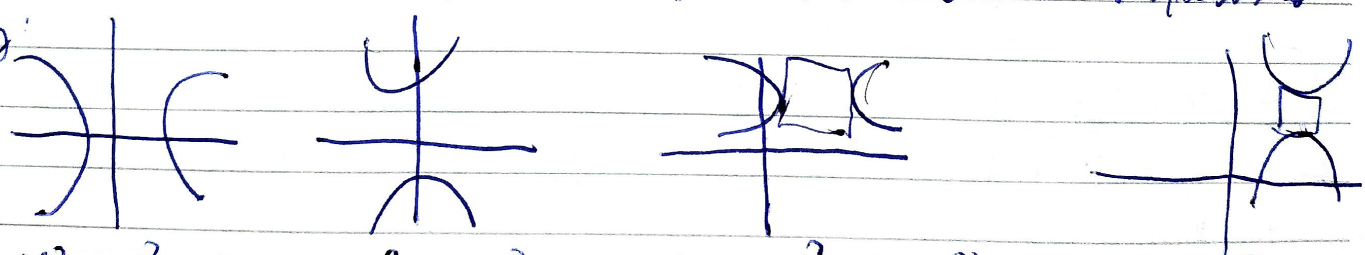
RELACION FUNDAMENTAL DE LA HIPERBOLA

ECUACION DE LA HIPERBOLA

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

TERMINO POSITIVO ME DICE A QUIEN ABRAZA / "a^2" va con el termino positivo

Ej:



$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\quad -\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ $\quad \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ $\quad -\frac{(x-\alpha)^2}{b^2} + \frac{(y-\beta)^2}{a^2} = 1$

$$\boxed{e = \frac{c}{a}} > 1$$

siempre

ESPACIOS VECTORIALES

UN CONJUNTO ES UN ESPACIO VECTORIAL SI CUMPLE LOS 10 AXIOMAS

5 DE LA SUMA

1. L.C.I (LEY DE COMPOSICIÓN INTERNA)

$\vec{u} \in V$, $\vec{v} \in V \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in V$

2. LA SUMA ES ASOCIATIVA

$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

3. LA SUMA ES CONMUTATIVA

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

4. EXISTE ELM. NEUTRO EN LA SUMA (0)

$\vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$

*ELM.: ELEMENTO

5. EXISTE ELM. INVERSO EN LA SUMA

$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

5 DEL PRODUCTO

6. L.C.E (LEY DE COMPOSICIÓN EXTERNA)

$\vec{v} \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (ESCALAR) $\Rightarrow \alpha \cdot \vec{v} \in V$

7. EL PRODUCTO ES DISTRIBUIBLE RESPECTO SUMA DE VECTORES

$\underset{\mathbb{R}}{\alpha}(\underset{V}{\vec{u}} + \underset{V}{\vec{v}}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

8. EL PRODUCTO ES DISTRIBUIBLE RESPECTO SUMA DE REALES

$(\underset{\mathbb{R}}{\alpha} + \underset{\mathbb{R}}{\beta}) \cdot \underset{V}{\vec{v}} = \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{v}$

9. EL PRODUCTO CUMPLE ASOCIATIVIDAD MIXTA

$\alpha \cdot (\beta\vec{v}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{v}$

10. EXISTE ELM. NEUTRO PARA PRODUCTO (1)

$1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

SUBESPACIOS VECTORIALES

PARA QUE EXISTA UN SUBESPACIO VECTORIAL SE DEBEN CUMPLIR:

$\boxed{\text{3 CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES}}$

ENTONCES W ES SUBESPACIO DE V SI:

1. $\vec{0}_v$ EXISTE EN W (TIENE QUE ESTAR EL VECTOR NULO)

2. SI $(\vec{u} \in W \wedge \vec{v} \in W) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in W$ L.C.I

3. SI $\vec{u} \in W \wedge \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \cdot \vec{u} \in W$ L.C.E

SUBESPACIOS TRIVIALES

EXISTEN 2 SUBESPACIOS TRIVIALES:

- SI MISMO, UN ESPACIO ES A SU VEZ SUBESPACIO DE SI MISMO
  Ej: V es SUBESPACIO DE V

- EL CONJUNTO DE VECTORES NULOS ES SUBESPACIO TRIVIAL $\{0_v\}$

PARA DEMOSTRAR O REFUTAR SUBESPACIOS

✓) CUANDO ES SUBESPACIO DEBO DEMOSTRAR CON LETRAS QUE CUMPLEN LAS 3 CONDICIONES DENTRO DE EL

X) CUANDO NO ES SUBESPACIO DEBO BUSCAR EL CONTRAEJEMPLO DE ALGUNA DE LAS 3 CONDICIONES PARA MOSTRAR QUE NO SE CUMPLE

COMBINACION LINEAL

COMBINO VARIOS VECTORES PARA FORMAR OTRO

$(5;1) = \alpha(1;3) + \beta(5;8)$

$W = \alpha \cdot \vec{N_1} + \beta \cdot \vec{N_2} + \ldots + \gamma \cdot \vec{V_m}$

HAY QUE ENCONTRAR LOS ESCALARES

1° PRIMERO DISTRIBUYO LOS ESCALARES A LOS ELEMENTOS DE LOS VECTORES

Ej $\alpha \cdot (N_1; N_2; N_3) \Rightarrow (N_1\alpha; N_2\alpha; N_3\alpha)$

2° LUEGO HAGO UN SISTEMA DE ECUACIONES ENTRE LOS ELEMENTOS EN SUS POCISIONES EN TODOS LOS VECTORES

Ej: $(1;2;3) = (\alpha; 5\alpha; 6\alpha) + (7\beta; 8\beta; 4\beta)$

$$\begin{cases} \alpha + 7\beta = 1 \\ 5\alpha + 8\beta = 2 \\ 6\alpha + 4\beta = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Y LO RESUELVO POR GAUSS-JORDAN

ESTO ME VA A DAR LOS VALORES DE LOS ESCALARES PARA QUE SE CUMPLA LA C.L (COMBINACION LINEAL)

SI LAS ENCONTRAMOS ES S.C.D

PROPIEDAD

$\{\Delta \neq 0\} = S.C.D \Rightarrow$ ES C.L

DETERMINANTE

$\{\Delta = 0\} \rightarrow S.C.I \Rightarrow \infty$ SOLUCIONES DE C.L

$\rightarrow$ S.I = NO ES C.L

CONJUNTO GENERADOR

Un conjunto $\{V_1; V_2; ...; V_n\}$ del espacio V

'es un CONJUNTO GENERADOR si el sistema que resuelve la ecuación encuentra LOS ESCALARES, osea es COMPATIBLE

Ej: $\{(1;3);(2;1)\}$ es conjunto generador de R^2?

1ro BUSCO COMBINACION LINEAR QUE GENERE EL VECTOR GENERICO

$\alpha(1;3) + B(2;1) = (X;Y)$ -> VECTOR GENERICO DE R^2

$(\alpha;3\alpha) + (2B;B) = (X;Y)$

$\begin{cases} \alpha + 2B = X \\ 3\alpha + B = Y \end{cases} = \left.\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$

EXISTEN LOS ESCALARES Y ES COMPATIBLE

$\alpha + 2B$
$3\alpha + B$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5 \neq 0$ -> DETERMINANTE DISTINTO DE CERO => C.L. S.C.D

PERO SI $\Delta = 0$ (FALTA UN ESCALAR) NO ES CONJUNTO GENERADOR PERO GENERA UN SUBESPACIO VECTORIAL

SUBESPACIO GENERADO

todos los vectores que se obtienen mediante C.L de n vectores es el SUBESPACIO GENERADO por esos n vectores.

Se simboliza: $gen(v_1; v_2; ...; v_n)$

Siendo

$gen\{v_1; v_2; ...; v_n\} = \{v \in V / v = \alpha \cdot v_1 + B \cdot v_2 + ... + \varphi v_n \text{ con } \alpha, B, ... \varphi \in R\}$

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

UNA COMBINACIÓN LINEAL DE N VECTORES POR N ESCALARES NOS TIENE QUE DAR EL VECTOR NULO

- ES LINEALMENTE INDEPENDIENTE SI EXISTE UNA ÚNICA SOLUCIÓN (LLAMADA TRIVIAL) DONDE TODOS LOS ESCALARES DE LA C.L VALEN CERO

- ES LINEALMENTE DEPENDIENTE SI EXISTE UNA UNA COMBINACIÓN NO TRIVIAL EN LA QUE HAYA UN ESCALAR QUE NO VALGA CERO Y NOS DE POR RESULTADO EL VECTOR NULO

$$\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 + \dots + \gamma \vec{v}_m = \vec{0}$$

EN SÍNTESIS:

FORMO MATRIZ CON LOS VECTORES COMO COLUMNAS

L.I = 1 SOLUCIÓN (0;0;0) $\Delta \neq 0$ S.C.D

L.D = ∞ SOLUCIONES $\Delta = 0$ S.C.I

SI EXISTE UNA
- FILA PROPORCIONAL A OTRA
- FILA LINEALMENTE DEPENDIENTE DE OTRA (Ej: Multiplos)
- FILA TODOS DE CEROS

BASE Y DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL

Un CONJUNTO DE VECTORES V ES: BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL

SI Y SOLO SI: LOS VECTORES V SON:
- → GENERADORES DEL ESPACIO VECTORIAL
- → SON LINEALMENTE INDEPENDIENTES

CONDICION NECESARIA Y SUFICIENTE:

n VECTORES L.I son BASE de R^n

Ej:

2 vectores L.I son BASE de R^2

NULIDAD/
DIMENSION: Es la CANTIDAD DE VECTORES en la BASE

Ej:

si $B = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_n\}$ es una base de V, la dimensión de V es n y lo indicamos como

(SI LA BASE ES EL VECTOR NULO, NO HAY DIMENSION) $\dim(V) = n$

TRANSFORMACIONES LINEALES

DE DONDE PARTO — A DONDE LLEGO

Es una función. Como toda función posee "DOMINIO" y "CODOMINIO", y estos son espacios vectoriales. TRAEN UNA FUNCION QUE TRANSFORMA

HAY (2) CONDICIONES PARA QUE SEA UNA TRANSFORMACION LINEAL:

$T: V \to W$ es T.L si y solo si:

1. $T(u+v) = T(u) + T(v) \quad \forall\, u \wedge v \in V$

2. $T(k \cdot v) = k \cdot T(v) \quad \forall\, v \in V \wedge \forall\, k \in \mathbb{R}$

PROPIEDADES:

- $T: V \to W$ NULO SE TRANSFORMA EN NULO
  $T(0_V) = 0_W$

- $T(-v) = T(-1 \cdot v) = -1 \cdot T(v) \Rightarrow T(-v) = -T(v)$

- Preserva combinaciones lineales
  POR LO TANTO: $T(u - v) = T(u) - T(v)$

NUCLEO DE UNA TRANSFORMACION LINEAL

El NUCLEO de una transformacion lineal es un subespacio de V (el nucleo nunca va a ser un conjunto vacio)

$T: V \to W$

$$\boxed{Nu(T) = \{ v \in V / T(v) = 0_W \}}$$

LLAMAMOS NUCLEO DE T ($Nu(T)$) AL CONJUNTO DE VECTORES DEL DOMINIO (V) CUYA IMAGEN DE T es 0_W

Ej: $v(v_1; v_2; v_3)$ $\quad Nu(T) = \{ (v_1; v_2; v_3) \in R^3 / T(v) = (0,0) \}$

$0_{R^2}(0;0)$

CONJUNTO DE VECTORES CUYA TRANSFORMACION ME DA EL VECTOR NULO DEL CODOMINIO

$T(v_1; v_2; v_3) = (0;0)$

$(v_1 - 2v_2; v_2 + 3v_3) = (0;0)$

$$\begin{cases} v_1 - 2v_2 = 0 \\ v_2 + 3v_3 = 0 \end{cases}$$

→ APLICAMOS GAUSS JORDAN Y LLEGAMOS A

$v_1 = -6v_3 \wedge v_2 = -3v_3$

$S = \{ (-6v_3; -3v_3; v_3) \wedge v_3 \in R \}$

$Nu(T) = \{ (v_1; v_2; v_3) \in R^3 / v_1 = -6v_3 ; v_2 = -3v_3 \wedge v_3 \in R \}$

$(v_1; v_2; v_3) = (-6v_3; -3v_3; v_3)$

$= v_3 \cdot (-6; -3; 1)$

BASE de $Nu(T) = \{ (-6; -3; 1) \}$

$\dim Nu(T) = 1$

dim = nulidad

IMAGEN DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

LA IMAGEN DE T ES EL CONJUNTO DE VECTORES DE W QUE SON IMAGEN DE ALGUN VECTOR DE V

$$Im(T) = \{ w \in W : w = T(v) \text{ para algun } v \in V \}$$

Ej:

$$T(x;y;z) = (x-2y;y+3z)$$

$$= (x;0) + (-2y;y) + (0;3z)$$

$$= x(1;0) + y(-2;1) + z(0;3)$$

$Im(T) = (gen) \langle (1;0);(-2;1);(0;3) \rangle$ → CONJUNTO GENERADOR DE LA IMAGEN

BASE $Im(T) = \{(1;0);(0;3)\}$ → ELIGO 2 L.I PORQUE ESTA EN R^2

dim $Im(T)$ = rango = 2

PROPIEDAD NUCLEO E IMAGEN DE UNA TRANSFORMACION LINEAL

La dimensión del NUCLEO tambien se denomina NULIDAD

La dimensión de la IMAGEN se denomina RANGO

$$\boxed{\dim(V) = \dim Nu(T) + \dim Im(T)}$$

Ej:

$T: R^3 \to R^2$

Nulidad = 1 ⟹ 2 + 1 = 3 → Dimensión del espacio vectorial de Partida (DOMINIO)

Rango = 2

MATRIZ DE UNA T. L (TRANSFORMACION LINEAL)

Si $T: R^n \to R^m$ llamamos matriz (de una TL) a la matriz de orden $m \times n$ cuyas columnas sean las imágenes de los vectores canónicos del dominio

Osea si: Ej: $T: R^3 \to R^2$ $T(x;y;z) = (3x - 2y + z; x - z)$

Calculamos canonicos:

$$T(1;0;0) = (3;1)$$
$$T(0;1;0) = (-2;0)$$
$$T(0;0;1) = (1;-1)$$

Por lo tanto:

$$M_T \in R^{2\times 3} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Y podemos escribir:

$$T(x;y;z) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

TRANSFORMACION LINEAL INVERSIBLE

Una T.L posee inversa, si la matriz asociada a ella es inversible

Ej: $T: R^3 \to R^2 / T(x;y;z) = (x+y; y+z; x)$

$$M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|M_T| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow M_T \text{ es INVERSIBLE}$$

$\Delta \neq 0 \Rightarrow M_T^{-1}$ ✓

SI EL DETERMINANTE ES DISTINTO A CERO ENTONCES ES INVERSIBLE

Si buscamos la matriz inversa por Gauss-Jordan y la identidad obtenemos:

$$M_T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$T^{-1}: R^3 \to R^3 / T^{-1} = (M_T)^{-1}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z \\ X-Z \\ -X+Y+Z \end{pmatrix}$$

resulta:

$$T^{-1}: R^3 \to R^3 / T^{-1}(X;Y;Z) = (Z; X-Z; -X+Y+Z)$$

EXPRESIÓN DE UNA T.L A PARTIR DE UNA MATRIZ

Para hallar la expresión de la t.l., multiplicamos la matriz por un vector genérico del dominio (de la que parte A.K.A la de la izq.)

$T: R^4 \to R^3 \wedge M_T$

DOMINIO

$$M_T \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} X & Y & Z & T \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2X+Z \\ Y-T \\ 2X-Y+3T \end{pmatrix}$$

MATRIZ DE TRANSICIÓN O CAMBIO DE BASE

En el espacio vectorial R^3 consideramos la base canónica E de R^3 y la base $B = \{(1;1;1);(1;1;0);(1;0;0)\}$

- Vamos a buscar la matriz P de pasaje/transición de la base canónica E a la base B:

*SE SIMBOLIZA => $P_{E \to B}$

SIGUE OTRA PAG →

• PASOS

1. Expresamos a cada uno de los vectores de la base canonica/identidad como una COMBINACION LINEAL de los vectores de la NUEVA BASE

$$\alpha(1;1;1)+\beta(1;1;0)+\gamma(1;0;0)=(1;0;0)$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=1\\ \alpha+\beta=0\\ \alpha=0\end{cases} \Rightarrow \alpha=0;\ \beta=0;\ \gamma=1$$

$$\alpha(1;1;1)+\beta(1;1;0)+\gamma(1;0;0)=(0;1;0)$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha+\beta=1\\ \alpha=0\end{cases} \Rightarrow \alpha=0;\ \beta=1;\ \gamma=-1$$

$$\alpha(1;1;1)+\beta(1;1;0)+\gamma(1;0;0)=(0;0;1)$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha+\beta=0\\ \alpha=1\end{cases} \quad \alpha=1;\ \beta=-1;\ \gamma=0$$

Por lo tanto $P_{E\to B}$ es:

$$P_{E\to B}=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\alpha & \beta & \gamma\end{array}\\ \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\end{array}$$

(cada columna son los escalares de cada C.L de los cada vector canonico)

• SI QUEREMOS BUSCAR LAS COORDENADAS DE UN VECTOR DE LA BASE CANONICA EN LA NUEVA BASE, SIMPLEMENTE LO MULTIPLICAMOS POR LA MATRIZ PASAJE/TRANSICION.

Ej:

$$[(3;4;5)]_B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

VECTOR EN "E" — VECTOR EN "B"

(SE PUEDE VERIFICAR HACIENDO C.L DE LOS COMPONENTES COMO ESCALARES POR LOS VECTORES DE B)

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

ENCONTRAR AUTOVALORES:

1º LE RESTO λ (LANDA) A CADA ELEMENTO DE LA DIAGONAL PRINCIPAL

Ej:

$$A=\begin{pmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}3-\lambda&2&4\\2&-\lambda&2\\4&2&3-\lambda\end{vmatrix} \rightarrow \boxed{\text{ESTO ES LA ECUACION CARACTERISTICA}}$$

TIP
LAPLACE = SI LA SUMA DE SUS POSICIONES ES PAR QUEDA POSITIVO SI ES IMPAR QUEDA NEGATIVO

2º UTILIZO LAPLACE PARA CALCULAR SU DETERMINANTE E IGUALO A CERO

$$3-\lambda\begin{vmatrix}-\lambda&2\\2&3-\lambda\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2&2\\4&3-\lambda\end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix}2&-\lambda\\4&2\end{vmatrix}=0$$

RESUELVO, AGRUPO Y QUEDA ALGO ASI:

$$\underbrace{-\lambda^3+6\lambda^2+15\lambda+8=0}_{\text{POLINOMIO CARACTERISTICO}}$$

AL RESOLVER EL POLINOMIO CARACTERISTICO HAY QUE TENER EN CUENTA:

- Si es de segundo grado lo resuelvo por calculadora y me va a dar 2 raices, si me da 1 es porque esa es doble
- Si es de tercer grado lo resuelvo por calculadora y me va a dar 3 raices, si me da 1 es porque es triple y si me da 2:
  - Una de las 2 es doble, por lo tanto elijo una de las 2 y aplico RUFFINI, ese ruffini me va a dar uno de segundo que lo meto en la calculadora y la que se repite es la doble.

ENCONTRAR AUTOVECTORES

1ro UNA VEZ HALLADOS LOS AUTOVALORES LO SIGUIENTE QUE TENEMOS QUE HACER ES REEMPLAZARLOS A CADA UNO POR EL λ (LANDA) DE LA ECUACION CARACTERISTICA

Ej: si $\lambda = -1$

2do A LA MATRIZ RESULTANTE DEL REEMPLAZO LA MULTIPLICO POR EL ~~[illegible]~~ VECTOR GENERICO/PREDETERMINADO $(x;y;z)$ por ejemplo Y ARMO UN SISTEMAS DE ECUACIONES IGUALADO A CERO

Ej: $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x+2y+4z=0 \\ 2x+y+2z=0 \\ 4x+2y+4z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2x+y+z=0 \\ y=-2x-2z \end{matrix}$

NOS QUEDA LA SOLUCION

$$S = \{(x; -2x-2z; z) \wedge \begin{matrix} x \in R \\ z \in R \end{matrix}\}$$

3ro FORMO EL ESPACIO PROPIO/SOLUCION TENIENDO EN CUANTA QUE QUEDA VARIABLE LIBRE ME VA A FORMAR UN VECTOR

$$(x; -2x; 0) + (0; -2z; z)$$
$$\Rightarrow x(1; -2; 0) + z(0; -2; 1)$$

ESPACIO SOLUCION/PROPIO $\{x(1;-2;0) + z(0;-2;1) \wedge x \in R \wedge z \in R\}$

4to FORMO EL AUTO VECTOR CON LOS VECTORES DEL ESPACIO

$$E_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ $\rightarrow$ ESTO A SU VEZ ES UNA BASE

PROPIEDAD: AUTOVECTORES Y AUTOVALORES

Los Autovectores asociados a Autovalores distintos, son linealmente independientes

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES DE MATRICES TRIANGULARES

CUANDO UNA MATRIZ ES TRIANGULAR (SUPERIOR, INFERIOR O DIAGONAL) LOS AUTOVALORES DE ELLA SON LOS ELEMENTOS DE LA DIAGONAL PRINCIPAL

Ej:

$$A = \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 \\ 0 & \underline{4} & 5 \\ 0 & 0 & \underline{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \underline{1} \vee \lambda = \underline{4} \vee \lambda = \underline{6}$$

MULTIPLICIDAD ALGEBRAICA Y MULTIPLICIDAD GEOMETRICA

MULTIPLICIDAD ALGEBRAICA (M.A) = CANTIDAD DE VECES QUE SE REPITE EL MISMO VALOR DE AUTO VALOR

Ej: Si MIS AUTOVALORES SON

$\lambda = -1 ; \lambda = -1 ; \lambda = 8$

$\Downarrow$

Mi M.A PARA -1 es de 2

y Mi M.A PARA 8 es de 1

TAMBIEN LLAMADO DIMENSION DEL AUTOESPACIO

MULTIPLICIDAD GEOMETRICA (M.G) = CANTIDAD DE VECTORES PRESENTES EN EL ESPACIO SOLUCION/PROPIO

Ej: Para $\lambda = -1$ mi espacio es:

$$E_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ Hay 2 vectores, mi M.G es de 2

IMPORTANTE: La M.G es siempre menor o igual que la M.A y siempre mayor o igual a 1

$\boxed{1 \leq M.G \leq M.A}$ Osea que si M.A es 1, M.G también lo será

MATRICES SEMEJANTES

MATRICES QUE TIENEN EL MISMO POLINOMIO CARACTERISTICO, POR ENDE LOS MISMOS AUTOVALORES

A es semejante a otra matriz B si se cumple que existe una matriz C tal que:

$\boxed{A \cdot C = C \cdot D}$ MAS FACIL ✓

o

$\boxed{A = C \cdot D \cdot C^{-1}}$

MATRIZ DIAGONALIZABLE

$A \in R^{m \times n}$ es DIAGONALIZABLE si existe P INVERTIBLE tal que:

$\boxed{P^{-1} \cdot A \cdot P = D}$ (D es la matriz diagonal)

Si P EXISTE → A es diagonalizable

PARA QUE "P" EXISTE LA M.A TIENE QUE SER IGUAL A LA M.G

$\boxed{\text{MULTIPLICIDAD ALGEBRAICA} = \text{MULTIPLICIDAD GEOMETRICA ENTONCES LA MATRIZ ES DIAGONALIZABLE}}$

- "P" LO FORMO CON LOS AUTOVECTORES DE CADA AUTOESPACIO
- "P^{-1}" LO SACO CON GAUSS-JORDAN DE "P" PARA SACAR INVERSA

Matriz Diagonalizado $= d = P^{-1} \cdot A \cdot P$

A ↓ MATRIZ ORIGINAL

Ej: $\cdot \lambda = 3 \quad B_{E3} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\cdot \lambda = -4 \quad B_{E4} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

M.A = M.G en ambos => DIAGONALIZABLE

$\cdot A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

↓

FORMO "P" CON LOS AUTOVECTORES (BASES DEL ESPACIO)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -\frac{2}{5} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & \frac{7}{5} & 1 & \frac{2}{5} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & \frac{5}{7} & \frac{2}{7} \\ 1 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{5}{7} \end{array}\right)$$

→ "P^{-1}" SACADA CON GAUSS JORDAN

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{5}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

MATRIZ DIAGONALIZADA

Matriz "P^{-1}" ORDENADA

AHORA LAS MULTIPLICO ~~[illegible]~~ RECORDANDO:

- PRIMERO MULTIPLICO 2 JUNTAS Y AL RESULTADO DE ESA LA MULTIPLICO CON LA SIGUIENTE
- FILA POR COLUMNA!!!!