Instituto Tecnológico de Costa Rica

Proyecto 4: SIMPLEX

Investigación de Operaciones

Profesor:

Francisco Jose Torres Rojas

Integrantes:

Jose Pablo Fernandez Jimenez - 2023117752

Diego Durán Rodríguez - 2022437509

Segundo semestre 2025

Algoritmo SIMPLEX

El **algoritmo SIMPLEX** es uno de los métodos más importantes y utilizados en el campo de la optimización lineal. Fue desarrollado por George Bernard Dantzig en 1947, en el contexto de investigaciones relacionadas con la planificación logística y de recursos durante la posguerra. Dantzig, un matemático y científico estadounidense, ideó este método como una herramienta para resolver problemas de programación lineal, un área que busca optimizar (maximizar o minimizar) una función objetivo sujeta a un conjunto de restricciones lineales.

El surgimiento del algoritmo Simplex marcó un antes y un después en la optimización matemática. Antes de su creación, no existía un procedimiento general y sistemático que permitiera resolver eficientemente problemas de gran escala con múltiples variables y restricciones. Dantzig propuso un enfoque geométrico basado en la observación de que la solución óptima de un problema lineal se encuentra en uno de los vértices o puntos extremos del poliedro factible, es decir, del conjunto de soluciones que cumplen todas las restricciones del problema.

El método Simplex avanza de un vértice a otro a través de las aristas del poliedro, mejorando progresivamente el valor de la función objetivo hasta encontrar el óptimo. Cada movimiento corresponde a un cambio de una variable básica en la solución, lo que permite al algoritmo recorrer el espacio factible de manera ordenada y eficiente.

Entre las principales propiedades del algoritmo Simplex destacan las siguientes:

- *Eficiencia práctica:* aunque en teoría su complejidad puede ser exponencial en el peor de los casos, en la práctica el algoritmo es extremadamente eficiente y puede resolver problemas con miles de variables y restricciones en tiempos incluso lineales.
- *Interpretación geométrica clara:* El procedimiento del Simplex se basa en conceptos geométricos simples, lo que facilita su comprensión y visualización en espacios de baja dimensión.
- *Importancia histórica y teórica:* el Simplex no solo revolucionó la programación lineal, sino que también sentó las bases para la aparición de otros métodos de optimización, como los algoritmos de punto interior y técnicas modernas de optimización convexa.

Método de la Gran M

El *método de la Gran M* es una técnica para construir una base inicial cuando el problema original contiene restricciones de igualdad o de tipo $\geq$, que no permiten obtener una solución básica factible inmediatamente. Se procede de la siguiente forma:

- Se introducen variables artificiales (a_i) en cada restricción de tipo $=$ o $\geq$ para formar una base inicial.

- En la función objetivo se añade una penalización muy grande M multiplicando cada variable artificial (por ejemplo, $+Ma_i$ para maximizar). De este modo, cualquier solución que deje artificiales básicas con valor positivo tendrá un costo muy alto y será descartada.
- Antes de empezar las iteraciones se canoniza la fila 0 (fila de la función objetivo) para que refleje correctamente las contribuciones de M; luego se ejecuta el algoritmo Simplex normal tratando las M como constantes grandes durante los cálculos.
- Si al final del proceso alguna variable artificial permanece básica con valor positivo en el RHS, el problema original es no factible.

Problema original

Nombre del problema: **Problema 6**

El problema original se puede formular como un problema de programación lineal, donde se busca optimizar una función objetivo sujeta a ciertas restricciones:

Maximizar Z = X_4

Sujeto a:
$4\ X_1 + 9\ X_2 + 6\ X_3 - X_4 \geq 0$
$2X_1 + 8\ X_2 + 7\ X_3 - X_4 \geq 0$
$6X_1 + X_2 - X_4 \geq 0$
$X_1 + X_2 + X_3 = 1$

Con $X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

Tabla inicial

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	e_1	e_2	e_3	a_1	a_2	a_3	a_4	
1	0	0	0	-1	0	0	0	M	M	M	M	0
0	4	9	6	-1	-1	0	0	1	0	0	0	0
0	2	8	7	-1	0	-1	0	0	1	0	0	0
0	6	1	0	-1	0	0	-1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Tablas intermedias

Iteración 1

Cálculo de razones de valores positivos de la columna 2:

Fila	Razón
1	0
2	0
3	0
4	1

Con 9 como pivote en columna 2.

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	e_1	e_2	e_3	a_1	a_2	a_3	a_4	
1	-13 M	-19 M	-14 M	-1 + 3 M	M	M	M	0	0	0	0	-M
0	4	9	6	-1	-1	0	0	1	0	0	0	0
0	2	8	7	-1	0	-1	0	0	1	0	0	0
0	6	1	0	-1	0	0	-1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Degeneración detectada: razón mínima = 0. Filas empatadas o con razón cero:

Fila	Divisor	Dividendo	Razón
1	9	0	0
2	8	0	0
3	1	0	0

Regla usada para romper el empate: se seleccionó la primera fila listada.

Tabla tras canonizar:

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	e_1	e_2	e_3	a_2	a_3	a_4	
1	444.444 - 4.56 M	0	-333.333 - 1.33 M	-112.111 + 0.889 M	-111.111 - 1.11 M	M	M	0	0	0	-M
0	0.444444	1	0.666667	-0.111111	-0.111111	0	0	0	0	0	0
0	-1.55556	0	1.66667	-0.111111	0.888889	-1	0	1	0	0	0
0	5.55556	0	-0.666667	-0.888889	0.111111	0	-1	0	1	0	0
0	0.555556	0	0.333333	0.111111	0.111111	0	0	0	0	1	1

Iteración 2

Cálculo de razones de valores positivos de la columna 1:

Fila	Razón
1	0
3	0
4	1.8

Con 0.444444 como pivote en columna 1.

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	e_1	e_2	e_3	a_2	a_3	a_4	
1	444.444 - 4.56 M	0	-333.333 - 1.33 M	-112.111 + 0.889 M	-111.111 - 1.11 M	M	M	0	0	0	-M
0	0.444444	1	0.666667	-0.111111	-0.111111	0	0	0	0	0	0
0	-1.55556	0	1.66667	-0.111111	0.888889	-1	0	1	0	0	0
0	5.55556	0	-0.666667	-0.888889	0.111111	0	-1	0	1	0	0
0	0.555556	0	0.333333	0.111111	0.111111	0	0	0	0	1	1

Degeneración detectada: razón mínima = 0. Filas empatadas o con razón cero:

Fila	Divisor	Dividendo	Razón
1	0.444444	0	0
3	5.55556	0	0

Regla usada para romper el empate: se seleccionó la primera fila listada.

Tabla tras canonizar:

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	e_1	e_2	e_3	a_2	a_3	a_4	
1	0	10.2 M	5.5 M	-250001	-2.25 M	M	M	0	0	0	-M
0	1	2.25	1.5	-0.25	-0.25	0	0	0	0	0	0
0	0	3.5	4	-0.5	0.5	-1	0	1	0	0	0
0	0	-12.5	-9	0.5	1.5	0	-1	0	1	0	0
0	0	-1.25	-0.5	0.25	0.25	0	0	0	0	1	1

Iteración 3

Cálculo de razones de valores positivos de la columna 5:

Fila	Razón
2	0
3	0
4	4

Con 0.5 como pivote en columna 5.

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	e_1	e_2	e_3	a_2	a_3	a_4	
1	0	10.2 M	5.5 M	-250001	-2.25 M	M	M	0	0	0	-M
0	1	2.25	1.5	-0.25	-0.25	0	0	0	0	0	0
0	0	3.5	4	-0.5	0.5	-1	0	1	0	0	0
0	0	-12.5	-9	0.5	1.5	0	-1	0	1	0	0
0	0	-1.25	-0.5	0.25	0.25	0	0	0	0	1	1

Degeneración detectada: razón mínima = 0. Filas empatadas o con razón cero:

Fila	Divisor	Dividendo	Razón
2	0.5	0	0
3	1.5	0	0

Regla usada para romper el empate: se seleccionó la primera fila listada.

Tabla tras canonizar:

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	e_1	e_2	e_3	a_3	a_4	
1	0	26 M	23.5 M	-1 - 2.5 M	0	-3.5 M	M	0	0	-M
0	1	4	3.5	-0.5	0	-0.5	0	0	0	0
0	0	7	8	-1	1	-2	0	0	0	0
0	0	-23	-21	2	0	3	-1	1	0	0
0	0	-3	-2.5	0.5	0	0.5	0	0	1	1

Iteración 4

Cálculo de razones de valores positivos de la columna 6:

Fila	Razón
3	0
4	2

Con 3 como pivote en columna 6.

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	e_1	e_2	e_3	a_3	a_4	
1	0	26 M	23.5 M	-1 - 2.5 M	0	-3.5 M	M	0	0	-M
0	1	4	3.5	-0.5	0	-0.5	0	0	0	0
0	0	7	8	-1	1	-2	0	0	0	0
0	0	-23	-21	2	0	3	-1	1	0	0
0	0	-3	-2.5	0.5	0	0.5	0	0	1	1

Degeneración detectada: razón mínima = 0. Filas empatadas o con razón cero:

Fila	Divisor	Dividendo	Razón
3	3	0	0

Regla usada para romper el empate: se seleccionó la primera fila listada.

Tabla tras canonizar:

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	e_1	e_2	e_3	a_4	
1	0	-333.333 - 0.833 M	-M	-166668	0	0	-166667	0	-M
0	1	0.166667	0	-0.166667	0	0	-0.166667	0	0
0	0	-8.33333	-6	0.333333	1	0	-0.666667	0	0
0	0	-7.66667	-7	0.666667	0	1	-0.333333	0	0
0	0	0.833333	1	0.166667	0	0	0.166667	1	1

Iteración 5

Cálculo de razones de valores positivos de la columna 3:

Fila	Razón
4	1

Con 1 como pivote en columna 3.

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	e_1	e_2	e_3	a_4	
1	0	-333.333 - 0.833 M	-M	-166668	0	0	-166667	0	-M
0	1	0.166667	0	-0.166667	0	0	-0.166667	0	0
0	0	-8.33333	-6	0.333333	1	0	-0.666667	0	0
0	0	-7.66667	-7	0.666667	0	1	-0.333333	0	0
0	0	0.833333	1	0.166667	0	0	0.166667	1	1

Tabla tras canonizar:

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	e_1	e_2	e_3	
1	0	-2.32831e-09	0	-1	0	0	0	0
0	1	0.166667	0	-0.166667	0	0	-0.166667	0
0	0	-3.33333	0	1.33333	1	0	0.333333	6
0	0	-1.83333	0	1.83333	0	1	0.833333	7
0	0	0.833333	1	0.166667	0	0	0.166667	1

Iteración 6

Cálculo de razones de valores positivos de la columna 4:

Fila	Razón
2	4.5
3	3.81818
4	6

Con 1.83333 como pivote en columna 4.

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	e_1	e_2	e_3	
1	0	-2.32831e-09	0	-1	0	0	0	0
0	1	0.166667	0	-0.166667	0	0	-0.166667	0
0	0	-3.33333	0	1.33333	1	0	0.333333	6
0	0	-1.83333	0	1.83333	0	1	0.833333	7
0	0	0.833333	1	0.166667	0	0	0.166667	1

Tabla tras canonizar:

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	e_1	e_2	e_3	
1	0	-1	0	0	0	0.545455	0.454545	3.81818
0	1	0	0	0	0	0.0909091	-0.0909091	0.636364
0	0	-2	0	0	1	-0.727273	-0.272727	0.909091
0	0	-1	0	1	0	0.545455	0.454545	3.81818
0	0	1	1	0	0	-0.0909091	0.0909091	0.363636

Iteración 7

Cálculo de razones de valores positivos de la columna 2:

Fila	Razón
4	0.363636

Con 1 como pivote en columna 2.

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	e_1	e_2	e_3	
1	0	-1	0	0	0	0.545455	0.454545	3.81818
0	1	0	0	0	0	0.0909091	-0.0909091	0.636364
0	0	-2	0	0	1	-0.727273	-0.272727	0.909091
0	0	-1	0	1	0	0.545455	0.454545	3.81818
0	0	1	1	0	0	-0.0909091	0.0909091	0.363636

Tabla tras canonizar:

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	e_1	e_2	e_3	
1	0	0	1	0	0	0.454545	0.545455	4.18182
0	1	0	0	0	0	0.0909091	-0.0909091	0.636364
0	0	0	2	0	1	-0.909091	-0.0909091	1.63636
0	0	0	1	1	0	0.454545	0.545455	4.18182
0	0	1	1	0	0	-0.0909091	0.0909091	0.363636

Tabla final

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	e_1	e_2	e_3	
1	0	0	1	0	0	0.454545	0.545455	4.18182
0	1	0	0	0	0	0.0909091	-0.0909091	0.636364
0	0	0	2	0	1	-0.909091	-0.0909091	1.63636
0	0	0	1	1	0	0.454545	0.545455	4.18182
0	0	1	1	0	0	-0.0909091	0.0909091	0.363636

Solución

$Z = 4.18182$

Valores de todas las variables

Variable	Valor
X_1	0.636364
X_2	0.363636
X_3	0
X_4	4.18182
e_1	1.63636
e_2	0
e_3	0

Problema degenerado

Se detectó degeneración durante la ejecución del Simplex.
Definición: una solución básica factible es degenerada cuando alguna variable básica tiene valor cero. Esto puede ocurrir cuando en el test de razón mínima la razón mínima es 0 o cuando hay un empate entre razones.

El programa marca como degeneración cuando dos razones difieren en menos de un epsilon (1e-09) o cuando la razón mínima es 0. Para romper el empate se adopta una heurística simple: se selecciona la primera fila con la razón mínima encontrada. Esta elección se documenta en las tablas intermedias (fila pivote seleccionada).

Referencias

[1] Wikipedia contributors. (2025, 6 octubre). Simplex algorithm. *Wikipedia*. Disponible en: https://en.wikipedia.org/wiki/Simplex$_a lgorithm$

[2] Ben-Lowery. (2022, 4 abril). Linear Programming and the birth of the Simplex Algorithm. *Ben Lowery @ STOR-i*. Disponible en: https://www.lancaster.ac.uk/stor-i-student-sites/ben-lowery/2022/03/linear-programming-and-the-birth-of-the-simplex-algorithm/

[3] Libretexts. (2022, 18 julio). 4.2: Maximization by the Simplex method. *Mathematics LibreTexts*. Disponible en: https://math.libretexts.org/Bookshelves/Applied$_M athematics/Applied_F inite_M athematics$