Instituto Tecnológico de Costa Rica

Proyecto 4: SIMPLEX

Investigación de Operaciones

Profesor:

Francisco Jose Torres Rojas

Integrantes:

Jose Pablo Fernandez Jimenez - 2023117752

Diego Durán Rodríguez - 2022437509

Segundo semestre 2025

Algoritmo SIMPLEX

El **algoritmo SIMPLEX** es uno de los métodos más importantes y utilizados en el campo de la optimización lineal. Fue desarrollado por George Bernard Dantzig en 1947, en el contexto de investigaciones relacionadas con la planificación logística y de recursos durante la posguerra. Dantzig, un matemático y científico estadounidense, ideó este método como una herramienta para resolver problemas de programación lineal, un área que busca optimizar (maximizar o minimizar) una función objetivo sujeta a un conjunto de restricciones lineales.

El surgimiento del algoritmo Simplex marcó un antes y un después en la optimización matemática. Antes de su creación, no existía un procedimiento general y sistemático que permitiera resolver eficientemente problemas de gran escala con múltiples variables y restricciones. Dantzig propuso un enfoque geométrico basado en la observación de que la solución óptima de un problema lineal se encuentra en uno de los vértices o puntos extremos del poliedro factible, es decir, del conjunto de soluciones que cumplen todas las restricciones del problema.

El método Simplex avanza de un vértice a otro a través de las aristas del poliedro, mejorando progresivamente el valor de la función objetivo hasta encontrar el óptimo. Cada movimiento corresponde a un cambio de una variable básica en la solución, lo que permite al algoritmo recorrer el espacio factible de manera ordenada y eficiente.

Entre las principales propiedades del algoritmo Simplex destacan las siguientes:

- *Eficiencia práctica:* aunque en teoría su complejidad puede ser exponencial en el peor de los casos, en la práctica el algoritmo es extremadamente eficiente y puede resolver problemas con miles de variables y restricciones en tiempos incluso lineales.
- *Interpretación geométrica clara:* El procedimiento del Simplex se basa en conceptos geométricos simples, lo que facilita su comprensión y visualización en espacios de baja dimensión.
- *Importancia histórica y teórica:* el Simplex no solo revolucionó la programación lineal, sino que también sentó las bases para la aparición de otros métodos de optimización, como los algoritmos de punto interior y técnicas modernas de optimización convexa.

Método de la Gran M

El *método de la Gran M* es una técnica para construir una base inicial cuando el problema original contiene restricciones de igualdad o de tipo $\geq$, que no permiten obtener una solución básica factible inmediatamente. Se procede de la siguiente forma:

- Se introducen variables artificiales (a_i) en cada restricción de tipo $=$ o $\geq$ para formar una base inicial.
- En la función objetivo se añade una penalización muy grande M multiplicando cada variable artificial (por ejemplo, $+Ma_i$ para maximizar). De este modo, cualquier solución que deje artificiales básicas con valor positivo tendrá un costo muy alto y será descartada.
- Antes de empezar las iteraciones se canoniza la fila 0 (fila de la función objetivo) para que refleje correctamente las contribuciones de M; luego se ejecuta el algoritmo Simplex normal tratando las M como constantes grandes durante los cálculos.

- Si al final del proceso alguna variable artificial permanece básica con valor positivo en el RHS, el problema original es no factible.

Problema original

Nombre del problema: **Problema 4**

El problema original se puede formular como un problema de programación lineal, donde se busca optimizar una función objetivo sujeta a ciertas restricciones:

Minimizar
Z = -3 X_1 + X_2

Sujeto a:
X_1 - 2 $X_2 \geq 2$
$-\mathrm{X}_1 + X_2 \geq 3$

Con X_1, $X_2 \geq 0$

Tabla inicial

Z	X_1	X_2	e_1	e_2	a_1	a_2	
1	3	-1	0	0	-M	-M	0
0	1	-2	-1	0	1	0	2
0	-1	1	0	-1	0	1	3

Tablas intermedias

Iteración 1

Cálculo de razones de valores positivos de la columna 1:

Fila	Razón
1	2

Con 1 como pivote en columna 1.

Z	X_1	X_2	e_1	e_2	a_1	a_2	
1	3	-1 - M	-M	-M	0	0	5 M
0	1	-2	-1	0	1	0	2
0	-1	1	0	-1	0	1	3

Tabla tras canonizar:

Z	X_1	X_2	e_1	e_2	a_2	
1	0	5 - M	3 - M	-M	0	-6 + 5 M
0	1	-2	-1	0	0	2
0	0	-1	-1	-1	1	5

Tabla final

Z	X_1	X_2	e_1	e_2	a_2	
1	0	5 - M	3 - M	-M	0	-6 + 5 M
0	1	-2	-1	0	0	2
0	0	-1	-1	-1	1	5

Solución

El problema es no factible.

El modelo se resolvió utilizando el *método de la Gran M*, introduciendo variables artificiales para poder construir una base inicial.

En la **tabla final**, después de que ya no hay columnas candidatas para entrar en la base (es decir, ya no hay coeficientes negativos en la fila de la función objetivo para el caso de maximización), se observa que al menos una **variable artificial** sigue siendo básica con un valor positivo en el término independiente (RHS).

Desde el punto de vista geométrico, esto implica que no hay ningún punto en el espacio de variables que cumpla con todas las desigualdades (o igualdades) planteadas al mismo tiempo. Por ello, no es posible calcular un valor óptimo de la función objetivo.

Posibles causas típicas de este comportamiento incluyen: restricciones contradictorias entre sí (por ejemplo, exigir simultáneamente que una variable sea mayor o igual que un valor y, al mismo tiempo, menor o igual que otro valor incompatible), errores en signos, o en la formulación numérica de los parámetros del modelo. Se recomienda revisar cuidadosamente las restricciones originales.

Referencias

[1] Wikipedia contributors. (2025, 6 octubre). Simplex algorithm. *Wikipedia*. Disponible en: https://en.wikipedia.org/wiki/Simplex$_algorithm$

[2] Ben-Lowery. (2022, 4 abril). Linear Programming and the birth of the Simplex Algorithm. *Ben Lowery @ STOR-i*. Disponible en: https://www.lancaster.ac.uk/stor-i-student-sites/ben-lowery/2022/03/linear-programming-and-the-birth-of-the-simplex-algorithm/

[3] Libretexts. (2022, 18 julio). 4.2: Maximization by the Simplex method. *Mathematics LibreTexts*. Disponible en: https://math.libretexts.org/Bookshelves/Applied$_{M}athematics/Applied_{F}inite_{M}athematics$