

Instituto Tecnológico de Costa Rica



Proyecto 4: SIMPLEX

Investigación de Operaciones

Profesor:

Francisco Jose Torres Rojas

Integrantes:

Jose Pablo Fernandez Jimenez - 2023117752

Diego Durán Rodríguez - 2022437509

Segundo semestre 2025

Algoritmo SIMPLEX

El **algoritmo SIMPLEX** es uno de los métodos más importantes y utilizados en el campo de la optimización lineal. Fue desarrollado por George Bernard Dantzig en 1947, en el contexto de investigaciones relacionadas con la planificación logística y de recursos durante la posguerra. Dantzig, un matemático y científico estadounidense, ideó este método como una herramienta para resolver problemas de programación lineal, un área que busca optimizar (maximizar o minimizar) una función objetivo sujeta a un conjunto de restricciones lineales.

El surgimiento del algoritmo Simplex marcó un antes y un después en la optimización matemática. Antes de su creación, no existía un procedimiento general y sistemático que permitiera resolver eficientemente problemas de gran escala con múltiples variables y restricciones. Dantzig propuso un enfoque geométrico basado en la observación de que la solución óptima de un problema lineal se encuentra en uno de los vértices o puntos extremos del poliedro factible, es decir, del conjunto de soluciones que cumplen todas las restricciones del problema.

El método Simplex avanza de un vértice a otro a través de las aristas del poliedro, mejorando progresivamente el valor de la función objetivo hasta encontrar el óptimo. Cada movimiento corresponde a un cambio de una variable básica en la solución, lo que permite al algoritmo recorrer el espacio factible de manera ordenada y eficiente.

Entre las principales propiedades del algoritmo Simplex destacan las siguientes:

- *Eficiencia práctica:* aunque en teoría su complejidad puede ser exponencial en el peor de los casos, en la práctica el algoritmo es extremadamente eficiente y puede resolver problemas con miles de variables y restricciones en tiempos incluso lineales.
- *Interpretación geométrica clara:* El procedimiento del Simplex se basa en conceptos geométricos simples, lo que facilita su comprensión y visualización en espacios de baja dimensión.
- *Importancia histórica y teórica:* el Simplex no solo revolucionó la programación lineal, sino que también sentó las bases para la aparición de otros métodos de optimización, como los algoritmos de punto interior y técnicas modernas de optimización convexa.

Método de la Gran M

El *método de la Gran M* es una técnica para construir una base inicial cuando el problema original contiene restricciones de igualdad o de tipo \geq , que no permiten obtener una solución básica factible inmediatamente. Se procede de la siguiente forma:

- Se introducen variables artificiales (a_i) en cada restricción de tipo $=$ o \geq para formar una base inicial.
- En la función objetivo se añade una penalización muy grande M multiplicando cada variable artificial (por ejemplo, $+Ma_i$ para maximizar). De este modo, cualquier solución que deje artificiales básicas con valor positivo tendrá un costo muy alto y será descartada.
- Antes de empezar las iteraciones se canoniza la fila 0 (fila de la función objetivo) para que refleje correctamente las contribuciones de M ; luego se ejecuta el algoritmo Simplex normal tratando las M como constantes grandes durante los cálculos.

- Si al final del proceso alguna variable artificial permanece básica con valor positivo en el RHS, el problema original es no factible.

Problema original

Nombre del problema: **Problema 1 P2**

El problema original se puede formular como un problema de programación lineal, donde se busca optimizar una función objetivo sujeta a ciertas restricciones:

Minimizar

$$Z = X_4$$

Sujeto a:

$$5 X_1 + 6 X_3 - X_4 \leq 0$$

$$X_1 + 6 X_2 + 4 X_3 - X_4 \leq 0$$

$$4X_1 + 4 X_2 + 8 X_3 - X_4 \leq 0$$

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1$$

Con $X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

Tabla inicial

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	s_1	s_2	s_3	a_1	
1	0	0	0	-1	0	0	0	-M	0
0	5	0	6	-1	1	0	0	0	0
0	1	6	4	-1	0	1	0	0	0
0	4	4	8	-1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	1	1

Tabla final

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	s_1	s_2	s_3	
1	0	0	-4	0	0	0	-1	4
0	1	0	1.2	0	0	-0.2	0.2	0.4
0	0	1	-0.2	0	0	0.2	-0.2	0.6
0	0	0	-4	1	0	0	-1	4
0	0	0	-4	0	1	1	-2	2

En la solución 1, se puede observar que existe al menos una variable no básica con costo reducido cero, lo que indica la presencia de soluciones múltiples óptimas. Al realizar un pivote adicional

utilizando dicha variable como entrante, se obtiene otra solución básica factible equivalente:

Tabla final 2 (solución 2 tras un pivote adicional)

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	s_1	s_2	s_3	
1	0	0	-4	0	0	0	-1	4
0	1	0	0.4	0	0.2	0	-0.2	0.8
0	0	1	0.6	0	-0.2	0	0.2	0.2
0	0	0	-4	1	0	0	-1	4
0	0	0	-4	0	1	1	-2	2

Solución

$$Z = 4$$

Valores de todas las variables

Variable	Valor
X_1	0.4
X_2	0.6
X_3	0
X_4	4
s_1	2
s_2	0
s_3	0

Solución 2 (tras pivote adicional)

$$Z = 4$$

Valores de todas las variables

Variable	Valor
X_1	0.8
X_2	0.2
X_3	0
X_4	4
s_1	0
s_2	2
s_3	0

Soluciones adicionales (combinaciones convexas)

Si existen soluciones múltiples, cualquier combinación convexa de dos soluciones básicas produce otra solución factible. Aquí usamos la fórmula: $x(\alpha) = \alpha x^{(1)} + (1 - \alpha)x^{(2)}$, con $\alpha \in [0, 1]$.

Alfa = 0.25:

Variable	Valor
X_1	0.7
X_2	0.3
X_3	0
X_4	4

Alfa = 0.5:

Variable	Valor
X_1	0.6
X_2	0.4
X_3	0
X_4	4

Alfa = 0.75:

Variable	Valor
X_1	0.5
X_2	0.5
X_3	0
X_4	4

Problema degenerado

Se detectó degeneración durante la ejecución del Simplex.

Definición: una solución básica factible es degenerada cuando alguna variable básica tiene valor cero. Esto puede ocurrir cuando en el test de razón mínima la razón mínima es 0 o cuando hay un empate entre razones.

El programa marca como degeneración cuando dos razones difieren en menos de un epsilon ($1e-09$) o cuando la razón mínima es 0. Para romper el empate se adopta una heurística simple: se selecciona la primera fila con la razón mínima encontrada. Esta elección se documenta en las tablas intermedias (fila pivote seleccionada).

Referencias

- [1] Wikipedia contributors. (2025, 6 octubre). Simplex algorithm. *Wikipedia*. Disponible en: https://en.wikipedia.org/wiki/Simplex_algorithm
- [2] Ben-Lowery. (2022, 4 abril). Linear Programming and the birth of the Simplex Algorithm. *Ben Lowery @ STOR-i*. Disponible en: <https://www.lancaster.ac.uk/stor-i-student-sites/ben-lowery/2022/03/linear-programming-and-the-birth-of-the-simplex-algorithm/>
- [3] Libretexts. (2022, 18 julio). 4.2: Maximization by the Simplex method. *Mathematics LibreTexts*. Disponible en: https://math.libretexts.org/Bookshelves/Applied_Mathematics/Applied_Finite_Mathematics