Instituto Tecnológico de Costa Rica

Proyecto 4: SIMPLEX

Investigación de Operaciones

Profesor:

Francisco Jose Torres Rojas

Integrantes:

Jose Pablo Fernandez Jimenez - 2023117752

Diego Durán Rodríguez - 2022437509

Segundo semestre 2025

Algoritmo SIMPLEX

El **algoritmo SIMPLEX** es uno de los métodos más importantes y utilizados en el campo de la optimización lineal. Fue desarrollado por George Bernard Dantzig en 1947, en el contexto de investigaciones relacionadas con la planificación logística y de recursos durante la posguerra. Dantzig, un matemático y científico estadounidense, ideó este método como una herramienta para resolver problemas de programación lineal, un área que busca optimizar (maximizar o minimizar) una función objetivo sujeta a un conjunto de restricciones lineales.

El surgimiento del algoritmo Simplex marcó un antes y un después en la optimización matemática. Antes de su creación, no existía un procedimiento general y sistemático que permitiera resolver eficientemente problemas de gran escala con múltiples variables y restricciones. Dantzig propuso un enfoque geométrico basado en la observación de que la solución óptima de un problema lineal se encuentra en uno de los vértices o puntos extremos del poliedro factible, es decir, del conjunto de soluciones que cumplen todas las restricciones del problema.

El método Simplex avanza de un vértice a otro a través de las aristas del poliedro, mejorando progresivamente el valor de la función objetivo hasta encontrar el óptimo. Cada movimiento corresponde a un cambio de una variable básica en la solución, lo que permite al algoritmo recorrer el espacio factible de manera ordenada y eficiente.

Entre las principales propiedades del algoritmo Simplex destacan las siguientes:

- *Eficiencia práctica:* aunque en teoría su complejidad puede ser exponencial en el peor de los casos, en la práctica el algoritmo es extremadamente eficiente y puede resolver problemas con miles de variables y restricciones en tiempos incluso lineales.
- *Interpretación geométrica clara:* El procedimiento del Simplex se basa en conceptos geométricos simples, lo que facilita su comprensión y visualización en espacios de baja dimensión.
- *Importancia histórica y teórica:* el Simplex no solo revolucionó la programación lineal, sino que también sentó las bases para la aparición de otros métodos de optimización, como los algoritmos de punto interior y técnicas modernas de optimización convexa.

Método de la Gran M

El *método de la Gran M* es una técnica para construir una base inicial cuando el problema original contiene restricciones de igualdad o de tipo $\geq$, que no permiten obtener una solución básica factible inmediatamente. Se procede de la siguiente forma:

- Se introducen variables artificiales (a_i) en cada restricción de tipo $=$ o $\geq$ para formar una base inicial.
- En la función objetivo se añade una penalización muy grande M multiplicando cada variable artificial (por ejemplo, $+Ma_i$ para maximizar). De este modo, cualquier solución que deje artificiales básicas con valor positivo tendrá un costo muy alto y será descartada.
- Antes de empezar las iteraciones se canoniza la fila 0 (fila de la función objetivo) para que refleje correctamente las contribuciones de M; luego se ejecuta el algoritmo Simplex normal tratando las M como constantes grandes durante los cálculos.

- Si al final del proceso alguna variable artificial permanece básica con valor positivo en el RHS, el problema original es no factible.

Problema original

Nombre del problema: **Problema 8**

El problema original se puede formular como un problema de programación lineal, donde se busca optimizar una función objetivo sujeta a ciertas restricciones:

Maximizar Z = $3\ X_1 + X_2$

Sujeto a:
$X_1 + X_2 \geq 3$
$2X_1 + X_2 \leq 4$
$X_1 + X_2 = 3$

Con $X_1, X_2 \geq 0$

Tabla inicial

Z	X_1	X_2	s_1	e_1	a_1	a_2	
1	-3	-1	0	0	M	M	0
0	1	1	0	-1	1	0	3
0	2	1	1	0	0	0	4
0	1	1	0	0	0	1	3

Tablas intermedias

Iteración 1

Cálculo de razones de valores positivos de la columna 1:

Fila	Razón
1	3
2	2
3	3

Con 2 como pivote en columna 1.

Z	X_1	X_2	s_1	e_1	a_1	a_2	
1	-3 - 2 M	-1 - 2 M	0	M	0	0	-6 M
0	1	1	0	-1	1	0	3
0	2	1	1	0	0	0	4
0	1	1	0	0	0	1	3

Tabla tras canonizar:

Z	X_1	X_2	s_1	e_1	a_1	a_2	
1	0	0.5 - M	1.5 + M	M	0	0	6 - 2 M
0	0	0.5	-0.5	-1	1	0	1
0	1	0.5	0.5	0	0	0	2
0	0	0.5	-0.5	0	0	1	1

Iteración 2

Cálculo de razones de valores positivos de la columna 2:

Fila	Razón
1	2
2	4
3	2

Con 0.5 como pivote en columna 2.

Z	X_1	X_2	s_1	e_1	a_1	a_2	
1	0	0.5 - M	1.5 + M	M	0	0	6 - 2 M
0	0	0.5	-0.5	-1	1	0	1
0	1	0.5	0.5	0	0	0	2
0	0	0.5	-0.5	0	0	1	1

Degeneración detectada: razón mínima = 2. Filas empatadas o con razón cero:

Fila	Divisor	Dividendo	Razón
1	0.5	1	2
3	0.5	1	2

Regla usada para romper el empate: se seleccionó la primera fila listada.

Tabla tras canonizar:

Z	X_1	X_2	s_1	e_1	a_2	
1	0	0	2	1 - M	0	5
0	0	1	-1	-2	0	2
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	0

Iteración 3

Cálculo de razones de valores positivos de la columna 4:

Fila	Razón
2	1
3	0

Con 1 como pivote en columna 4.

Z	X_1	X_2	s_1	e_1	a_2	
1	0	0	2	1 - M	0	5
0	0	1	-1	-2	0	2
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	0

Degeneración detectada: razón mínima = 0. Filas empatadas o con razón cero:

Fila	Divisor	Dividendo	Razón
3	1	0	0

Regla usada para romper el empate: se seleccionó la primera fila listada.

Tabla tras canonizar:

Z	X_1	X_2	s_1	e_1	
1	0	0	2	0	5
0	0	1	-1	0	2
0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	1	0

Tabla final

Z	X_1	X_2	s_1	e_1	
1	0	0	2	0	5
0	0	1	-1	0	2
0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	1	0

Solución

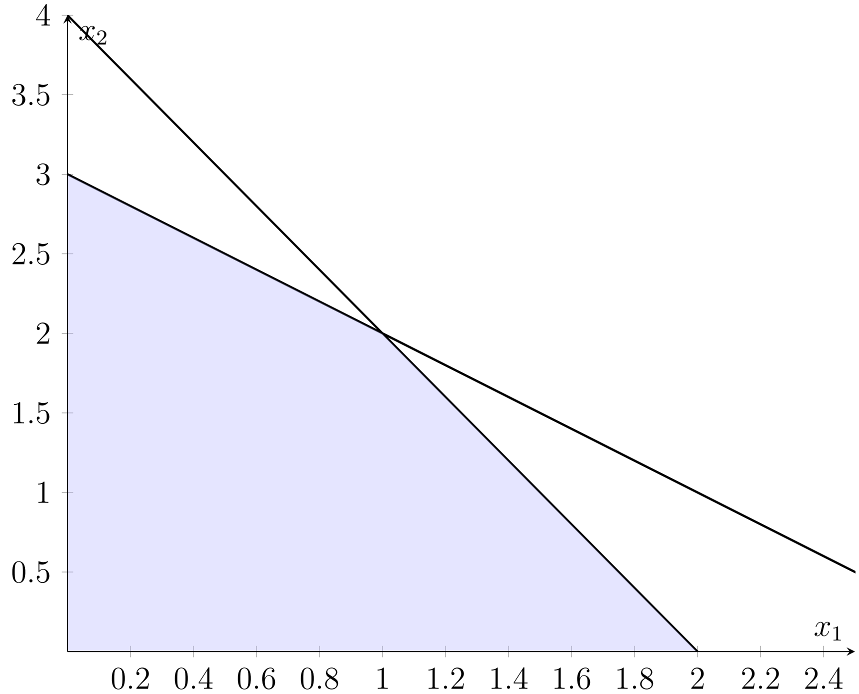
$Z = 5$

Valores de todas las variables

Variable	Valor
X_1	1
X_2	2
s_1	0
e_1	0

Gráfico de la región factible (solo para 2 variables)

A continuación se muestra la región factible en el plano (x_1, x_2) junto con las rectas de las restricciones.



4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
x_2
x_1
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
2.2
2.4

Problema degenerado

Se detectó degeneración durante la ejecución del Simplex.
Definición: una solución básica factible es degenerada cuando alguna variable básica tiene valor cero. Esto puede ocurrir cuando en el test de razón mínima la razón mínima es 0 o cuando hay un empate entre razones.

El programa marca como degeneración cuando dos razones difieren en menos de un epsilon (1e-09) o cuando la razón mínima es 0. Para romper el empate se adopta una heurística simple: se selecciona la primera fila con la razón mínima encontrada. Esta elección se documenta en las tablas intermedias (fila pivote seleccionada).

Referencias

[1] Wikipedia contributors. (2025, 6 octubre). Simplex algorithm. *Wikipedia*. Disponible en: https://en.wikipedia.org/wiki/Simplex$_{a}lgorithm$

[2] Ben-Lowery. (2022, 4 abril). Linear Programming and the birth of the Simplex Algorithm. *Ben Lowery @ STOR-i*. Disponible en: https://www.lancaster.ac.uk/stor-i-student-sites/ben-lowery/2022/03/linear-programming-and-the-birth-of-the-simplex-algorithm/

[3] Libretexts. (2022, 18 julio). 4.2: Maximization by the Simplex method. *Mathematics LibreTexts*. Disponible en: https://math.libretexts.org/Bookshelves/Applied$_{M}athematics/Applied_{F}inite_{M}athematics$