

Instituto Tecnológico de Costa Rica



## Proyecto 4: SIMPLEX

Investigación de Operaciones

Profesor:

Francisco Jose Torres Rojas

Integrantes:

Jose Pablo Fernandez Jimenez - 2023117752

Diego Durán Rodríguez - 2022437509

Segundo semestre 2025

# Algoritmo SIMPLEX

El **algoritmo SIMPLEX** es uno de los métodos más importantes y utilizados en el campo de la optimización lineal. Fue desarrollado por George Bernard Dantzig en 1947, en el contexto de investigaciones relacionadas con la planificación logística y de recursos durante la posguerra. Dantzig, un matemático y científico estadounidense, ideó este método como una herramienta para resolver problemas de programación lineal, un área que busca optimizar (maximizar o minimizar) una función objetivo sujeta a un conjunto de restricciones lineales.

El surgimiento del algoritmo Simplex marcó un antes y un después en la optimización matemática. Antes de su creación, no existía un procedimiento general y sistemático que permitiera resolver eficientemente problemas de gran escala con múltiples variables y restricciones. Dantzig propuso un enfoque geométrico basado en la observación de que la solución óptima de un problema lineal se encuentra en uno de los vértices o puntos extremos del poliedro factible, es decir, del conjunto de soluciones que cumplen todas las restricciones del problema.

El método Simplex avanza de un vértice a otro a través de las aristas del poliedro, mejorando progresivamente el valor de la función objetivo hasta encontrar el óptimo. Cada movimiento corresponde a un cambio de una variable básica en la solución, lo que permite al algoritmo recorrer el espacio factible de manera ordenada y eficiente.

**Entre las principales propiedades del algoritmo Simplex destacan las siguientes:**

- *Eficiencia práctica:* aunque en teoría su complejidad puede ser exponencial en el peor de los casos, en la práctica el algoritmo es extremadamente eficiente y puede resolver problemas con miles de variables y restricciones en tiempos incluso lineales.
- *Interpretación geométrica clara:* El procedimiento del Simplex se basa en conceptos geométricos simples, lo que facilita su comprensión y visualización en espacios de baja dimensión.
- *Importancia histórica y teórica:* el Simplex no solo revolucionó la programación lineal, sino que también sentó las bases para la aparición de otros métodos de optimización, como los algoritmos de punto interior y técnicas modernas de optimización convexa.

## Problema original

Nombre del problema: **Problema4**

El problema original se puede formular como un problema de programación lineal, donde se busca optimizar una función objetivo sujeta a ciertas restricciones:

$$\text{Maximizar } \mathbf{Z} = 5 X_1 + 3 X_2$$

**Sujeto a:**

$$4 X_1 + 2 X_2 \leq 12$$

$$4X_1 + X_2 \leq 10$$

$$X_1 + X_2 \leq 4$$

**Con**  $X_1, X_2 \geq 0$

## Tabla inicial

| $Z$ | $X_1$ | $X_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |    |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| 1   | -5    | -3    | 0     | 0     | 0     | 0  |
| 0   | 4     | 2     | 1     | 0     | 0     | 12 |
| 0   | 4     | 1     | 0     | 1     | 0     | 10 |
| 0   | 1     | 1     | 0     | 0     | 1     | 4  |

## Tablas intermedias

### Iteración 1

Cálculo de razones de valores positivos de la columna 1:

| Fila | Razón |
|------|-------|
| 1    | 3     |
| 2    | 2.5   |
| 3    | 4     |

Con 4 como pivote en columna 1.

| $Z$ | $X_1$ | $X_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |    |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| 1   | -5    | -3    | 0     | 0     | 0     | 0  |
| 0   | 4     | 2     | 1     | 0     | 0     | 12 |
| 0   | 4     | 1     | 0     | 1     | 0     | 10 |
| 0   | 1     | 1     | 0     | 0     | 1     | 4  |

Tabla tras canonizar:

| $Z$ | $X_1$ | $X_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |      |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| 1   | 0     | -1.75 | 0     | 1.25  | 0     | 12.5 |
| 0   | 0     | 1     | 1     | -1    | 0     | 2    |
| 0   | 1     | 0.25  | 0     | 0.25  | 0     | 2.5  |
| 0   | 0     | 0.75  | 0     | -0.25 | 1     | 1.5  |

## Iteración 2

Cálculo de razones de valores positivos de la columna 2:

| Fila | Razón |
|------|-------|
| 1    | 2     |
| 2    | 10    |
| 3    | 2     |

Con 1 como pivote en columna 2.

| $Z$ | $X_1$ | $X_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |      |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| 1   | 0     | -1.75 | 0     | 1.25  | 0     | 12.5 |
| 0   | 0     | 1     | 1     | -1    | 0     | 2    |
| 0   | 1     | 0.25  | 0     | 0.25  | 0     | 2.5  |
| 0   | 0     | 0.75  | 0     | -0.25 | 1     | 1.5  |

**Degeneración detectada:** razón mínima = 2. Filas empatadas o con razón cero:

| Fila | Divisor | Dividendo | Razón |
|------|---------|-----------|-------|
| 1    | 1       | 2         | 2     |
| 3    | 0.75    | 1.5       | 2     |

Regla usada para romper el empate: se seleccionó la primera fila listada.

**Tabla tras canonizar:**

| $Z$ | $X_1$ | $X_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |    |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| 1   | 0     | 0     | 1.75  | -0.5  | 0     | 16 |
| 0   | 0     | 1     | 1     | -1    | 0     | 2  |
| 0   | 1     | 0     | -0.25 | 0.5   | 0     | 2  |
| 0   | 0     | 0     | -0.75 | 0.5   | 1     | 0  |

## Iteración 3

Cálculo de razones de valores positivos de la columna 4:

| Fila | Razón |
|------|-------|
| 2    | 4     |
| 3    | 0     |

Con 0.5 como pivote en columna 4.

| $Z$ | $X_1$ | $X_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |    |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| 1   | 0     | 0     | 1.75  | -0.5  | 0     | 16 |
| 0   | 0     | 1     | 1     | -1    | 0     | 2  |
| 0   | 1     | 0     | -0.25 | 0.5   | 0     | 2  |
| 0   | 0     | 0     | -0.75 | 0.5   | 1     | 0  |

**Degeneración detectada:** razón mínima = 0. Filas empatadas o con razón cero:

| Fila | Divisor | Dividendo | Razón |
|------|---------|-----------|-------|
| 3    | 0.5     | 0         | 0     |

Regla usada para romper el empate: se seleccionó la primera fila listada.

**Tabla tras canonizar:**

| $Z$ | $X_1$ | $X_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |    |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| 1   | 0     | 0     | 1     | 0     | 1     | 16 |
| 0   | 0     | 1     | -0.5  | 0     | 2     | 2  |
| 0   | 1     | 0     | 0.5   | 0     | -1    | 2  |
| 0   | 0     | 0     | -1.5  | 1     | 2     | 0  |

**Tabla final**

| $Z$ | $X_1$ | $X_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |    |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| 1   | 0     | 0     | 1     | 0     | 1     | 16 |
| 0   | 0     | 1     | -0.5  | 0     | 2     | 2  |
| 0   | 1     | 0     | 0.5   | 0     | -1    | 2  |
| 0   | 0     | 0     | -1.5  | 1     | 2     | 0  |

**Solución**

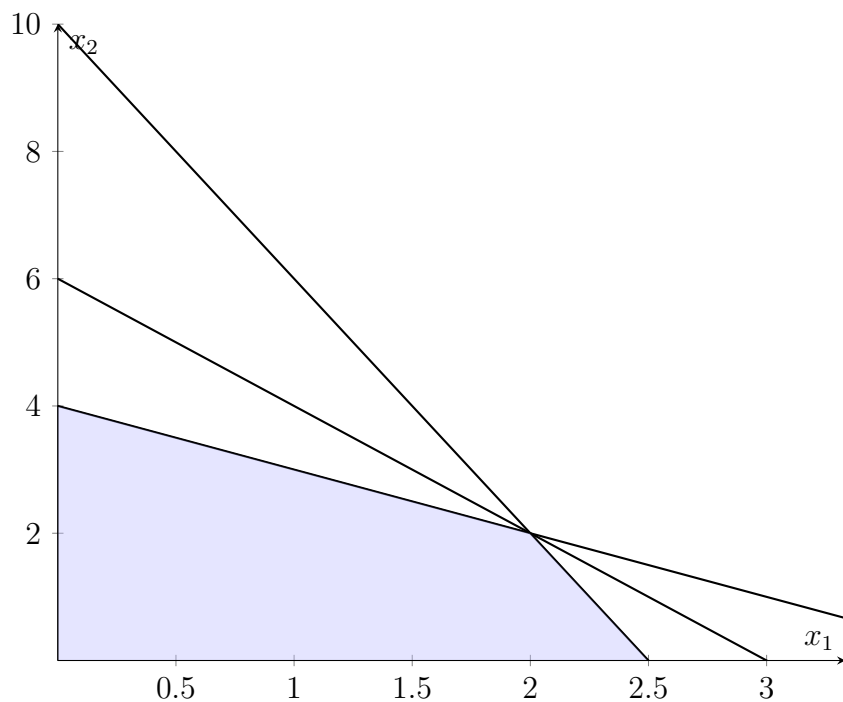
$$Z = 16$$

**Valores de todas las variables**

| Variable | Valor |
|----------|-------|
| $X_1$    | 2     |
| $X_2$    | 2     |
| $s_1$    | 0     |
| $s_2$    | 0     |
| $s_3$    | 0     |

## Gráfico de la región factible (solo para 2 variables)

A continuación se muestra la región factible en el plano  $(x_1, x_2)$  junto con las rectas de las restricciones.



## Problema degenerado

Se detectó degeneración durante la ejecución del Simplex.

Definición: una solución básica factible es degenerada cuando alguna variable básica tiene valor cero. Esto puede ocurrir cuando en el test de razón mínima la razón mínima es 0 o cuando hay un empate entre razones.

El programa marca como degeneración cuando dos razones difieren en menos de un epsilon ( $1e-09$ ) o cuando la razón mínima es 0. Para romper el empate se adopta una heurística simple: se selecciona la primera fila con la razón mínima encontrada. Esta elección se documenta en las tablas intermedias (fila pivote seleccionada).

## Referencias

- [1] Wikipedia contributors. (2025, 6 octubre). Simplex algorithm. *Wikipedia*. Disponible en: [https://en.wikipedia.org/wiki/Simplex\\_algorithm](https://en.wikipedia.org/wiki/Simplex_algorithm)
- [2] Ben-Lowery. (2022, 4 abril). Linear Programming and the birth of the Simplex Algorithm. *Ben Lowery @ STOR-i*. Disponible en: <https://www.lancaster.ac.uk/stor-i-student-sites/ben-lowery/2022/03/linear-programming-and-the-birth-of-the-simplex-algorithm/>
- [3] Libretexts. (2022, 18 julio). 4.2: Maximization by the Simplex method. *Mathematics LibreTexts*. Disponible en: [https://math.libretexts.org/Bookshelves/Applied\\_Mathematics/Applied\\_Finite\\_Mathematics](https://math.libretexts.org/Bookshelves/Applied_Mathematics/Applied_Finite_Mathematics)