Instituto Tecnológico de Costa Rica

Proyecto 4: SIMPLEX

Investigación de Operaciones

Profesor:

Francisco Jose Torres Rojas

Integrantes:

Jose Pablo Fernandez Jimenez - 2023117752

Diego Durán Rodríguez - 2022437509

Segundo semestre 2025

Algoritmo SIMPLEX

El **algoritmo SIMPLEX** es uno de los métodos más importantes y utilizados en el campo de la optimización lineal. Fue desarrollado por George Bernard Dantzig en 1947, en el contexto de investigaciones relacionadas con la planificación logística y de recursos durante la posguerra. Dantzig, un matemático y científico estadounidense, ideó este método como una herramienta para resolver problemas de programación lineal, un área que busca optimizar (maximizar o minimizar) una función objetivo sujeta a un conjunto de restricciones lineales.

El surgimiento del algoritmo Simplex marcó un antes y un después en la optimización matemática. Antes de su creación, no existía un procedimiento general y sistemático que permitiera resolver eficientemente problemas de gran escala con múltiples variables y restricciones. Dantzig propuso un enfoque geométrico basado en la observación de que la solución óptima de un problema lineal se encuentra en uno de los vértices o puntos extremos del poliedro factible, es decir, del conjunto de soluciones que cumplen todas las restricciones del problema.

El método Simplex avanza de un vértice a otro a través de las aristas del poliedro, mejorando progresivamente el valor de la función objetivo hasta encontrar el óptimo. Cada movimiento corresponde a un cambio de una variable básica en la solución, lo que permite al algoritmo recorrer el espacio factible de manera ordenada y eficiente.

Entre las principales propiedades del algoritmo Simplex destacan las siguientes:

- *Eficiencia práctica:* aunque en teoría su complejidad puede ser exponencial en el peor de los casos, en la práctica el algoritmo es extremadamente eficiente y puede resolver problemas con miles de variables y restricciones en tiempos incluso lineales.
- *Interpretación geométrica clara:* El procedimiento del Simplex se basa en conceptos geométricos simples, lo que facilita su comprensión y visualización en espacios de baja dimensión.
- *Importancia histórica y teórica:* el Simplex no solo revolucionó la programación lineal, sino que también sentó las bases para la aparición de otros métodos de optimización, como los algoritmos de punto interior y técnicas modernas de optimización convexa.

Método de la Gran M

El *método de la Gran M* es una técnica para construir una base inicial cuando el problema original contiene restricciones de igualdad o de tipo $\geq$, que no permiten obtener una solución básica factible inmediatamente. Se procede de la siguiente forma:

- Se introducen variables artificiales (a_i) en cada restricción de tipo $=$ o $\geq$ para formar una base inicial.

- En la función objetivo se añade una penalización muy grande M multiplicando cada variable artificial (por ejemplo, $+Ma_i$ para maximizar). De este modo, cualquier solución que deje artificiales básicas con valor positivo tendrá un costo muy alto y será descartada.
- Antes de empezar las iteraciones se canoniza la fila 0 (fila de la función objetivo) para que refleje correctamente las contribuciones de M; luego se ejecuta el algoritmo Simplex normal tratando las M como constantes grandes durante los cálculos.
- Si al final del proceso alguna variable artificial permanece básica con valor positivo en el RHS, el problema original es no factible.

Problema original

Nombre del problema: **Problema 1**

El problema original se puede formular como un problema de programación lineal, donde se busca optimizar una función objetivo sujeta a ciertas restricciones:

Maximizar Z = 0.5 x + 3 y + z + 4 w

Sujeto a:
x + y + z + w $\leq$ 40
$2x + y - z - w \geq 10$
$-y + w \geq 10$

Con $x, y, z, w \geq 0$

Tabla inicial

Z	x	y	z	w	s_1	e_1	e_2	a_1	a_2	
1	-0.5	-3	-1	-4	0	0	0	M	M	0
0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	40
0	2	1	-1	-1	0	-1	0	1	0	10
0	0	-1	0	1	0	0	-1	0	1	10

Tablas intermedias

Iteración 1

Cálculo de razones de valores positivos de la columna 1:

Fila	Razón
1	40
2	5

Con 2 como pivote en columna 1.

Z	x	y	z	w	s_1	e_1	e_2	a_1	a_2	
1	-0.5 - 2 M	-3	-1 + M	-4	0	M	M	0	0	-20 M
0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	40
0	2	1	-1	-1	0	-1	0	1	0	10
0	0	-1	0	1	0	0	-1	0	1	10

Tabla tras canonizar:

Z	x	y	z	w	s_1	e_1	e_2	a_2	
1	0	-2.75 + M	-1.25	-4.25 - M	0	-0.25	M	0	2.5 - 10 M
0	0	0.5	1.5	1.5	1	0.5	0	0	35
0	1	0.5	-0.5	-0.5	0	-0.5	0	0	5
0	0	-1	0	1	0	0	-1	1	10

Iteración 2

Cálculo de razones de valores positivos de la columna 4:

Fila	Razón
1	23.3333
3	10

Con 1 como pivote en columna 4.

Z	x	y	z	w	s_1	e_1	e_2	a_2	
1	0	-2.75 + M	-1.25	-4.25 - M	0	-0.25	M	0	2.5 - 10 M
0	0	0.5	1.5	1.5	1	0.5	0	0	35
0	1	0.5	-0.5	-0.5	0	-0.5	0	0	5
0	0	-1	0	1	0	0	-1	1	10

Tabla tras canonizar:

Z	x	y	z	w	s_1	e_1	e_2	
1	0	-7	-1.25	0	0	-0.25	-4.25	45
0	0	2	1.5	0	1	0.5	1.5	20
0	1	0	-0.5	0	0	-0.5	-0.5	10
0	0	-1	0	1	0	0	-1	10

Iteración 3

Cálculo de razones de valores positivos de la columna 2:

Fila	Razón
1	10

Con 2 como pivote en columna 2.

Z	x	y	z	w	s_1	e_1	e_2	
1	0	-7	-1.25	0	0	-0.25	-4.25	45
0	0	2	1.5	0	1	0.5	1.5	20
0	1	0	-0.5	0	0	-0.5	-0.5	10
0	0	-1	0	1	0	0	-1	10

Tabla tras canonizar:

Z	x	y	z	w	s_1	e_1	e_2	
1	0	0	4	0	3.5	1.5	1	115
0	0	1	0.75	0	0.5	0.25	0.75	10
0	1	0	-0.5	0	0	-0.5	-0.5	10
0	0	0	0.75	1	0.5	0.25	-0.25	20

Tabla final

Z	x	y	z	w	s_1	e_1	e_2	
1	0	0	4	0	3.5	1.5	1	115
0	0	1	0.75	0	0.5	0.25	0.75	10
0	1	0	-0.5	0	0	-0.5	-0.5	10
0	0	0	0.75	1	0.5	0.25	-0.25	20

Solución

$Z = 115$

Valores de todas las variables

Variable	Valor
x	10
y	10
z	0
w	20
s_1	0
e_1	0
e_2	0

Referencias

[1] Wikipedia contributors. (2025, 6 octubre). Simplex algorithm. *Wikipedia*. Disponible en: https://en.wikipedia.org/wiki/Simplex$_algorithm$

[2] Ben-Lowery. (2022, 4 abril). Linear Programming and the birth of the Simplex Algorithm. *Ben Lowery @ STOR-i*. Disponible en: https://www.lancaster.ac.uk/stor-i-student-sites/ben-lowery/2022/03/linear-programming-and-the-birth-of-the-simplex-algorithm/

[3] Libretexts. (2022, 18 julio). 4.2: Maximization by the Simplex method. *Mathematics LibreTexts*. Disponible en: https://math.libretexts.org/Bookshelves/Applied$_Mathematics/Applied_Finite_Mathematics$