Juan Pablo Bernal Lafarga

① Sea $f(x)$ una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

1. Calcule el valor de la constante c para que $f(x)$ sea la función de densidad de la variable aleatoria X.

Para que sea una función de densidad, debe cumplir que

$$f(x) \geq 0$$

por lo que $c \geq 0$, y también se debe cumplir que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

Por lo que podemos obtener c, tal que se cumplan ambas condiciones.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} cx^2\,dx + \int_{0}^{2} cx^2\,dx + \int_{2}^{\infty} cx^2\,dx$$

$$= \int_{0}^{2} cx^2\,dx = c\int_{0}^{2} x^2\,dx$$

$$= c\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = c\left[\frac{8}{3} - 0\right]$$

$$= c\left(\frac{8}{3}\right) = 1$$

$$\longrightarrow c = \frac{3}{8}$$

El valor de c para el cual f(x)

A01742342

es una función de densidad es
$c = \frac{3}{8}$.

2. Calcule $P[0 < x \leq 1]$.

Cambiamos los intervalos de la integral y tenemos

$$P(0 < x \leq 1) = \int_0^1 \frac{3}{8} x^2 \, dx$$

$$= \frac{3}{8} \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{3}{8} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

$$= \frac{3}{8} \left[\frac{1}{3} - 0 \right] = \frac{3}{8} \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{1}{8}$$

$$P[0 < x \leq 1] = \frac{1}{8} \approx 0.125$$

A01742342

② Problema del flujo vehicular

En una cierta calle transitada se quiere medir el flujo vehicular. Una manera de hacerlo es medir el tiempo entre un automovil y otro. Sea X el tiempo transcurrido en segundos entre el tiempo que un auto termina de pasar por un punto fijo y el instante en que el siguiente auto comienza a pasar por ese punto. La distribución del tiempo de avance tiene la forma

$$f(x) = \begin{cases} \frac{K}{x^4}, & \text{si } x > 1 \\ 0, & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

A01742342

a) Determine el valor de K para la cual f(x) es una función de densidad de probabilidad.

Una función de densidad de probabilidad debe cumplir dos condiciones:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Es con esta segunda condición que obtendremos K. Cambiando el intervalo de la integral al intervalo de f(x)

$$\int_{1}^{\infty} \frac{K}{x^4} dx = 1$$

CamScanner

A01742342

$$\int_1^\infty \frac{k}{x^4}dx = k\int_1^\infty \frac{1}{x^4}dx$$

$$= k\left[-\frac{1}{3x^3}\right]_1^\infty = k\left[0-\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$= k\left[\frac{1}{3}\right] = 1$$

$$\rightarrow k = 3$$

El valor de k para el cual f(x) es una fdp es $k=3$

b) ¿Cuál será el valor esperado entre autos? ¿Su varianza?

La esperanza matemática en v.a. continua se da como

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$$

A01742342

Por lo que

$$E(X) = \int_{-\infty}^{1} x \cdot \frac{3}{x^4} dx + \int_{1}^{\infty} x \cdot \frac{3}{x^4} dx$$

$$= \int_{1}^{\infty} \frac{3}{x^3} dx = 3\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$$

$$= 3\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{1}^{\infty} = 3\left[0 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow E(X) = \frac{3}{2}s$$

Hay un promedio de 1.5s entre autos.

Ahora, la varianza en v.a. continua está dada como

A01742342

$$Var(X) = E([x-\mu]^2)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

Aplicado al problema y sus intervalos queda

$$Var(X) = \int_1^{\infty} (x-\tfrac{3}{2})^2 \cdot \frac{3}{x^4} dx$$

$$= \int_1^{\infty} (x^2 - 3x + \tfrac{9}{4})(\tfrac{3}{x^4}) dx$$

$$= \int_1^{\infty} \left(\frac{3}{x^2} - \frac{9}{x^3} + \frac{27}{4x^4}\right) dx$$

$$= \left[-\frac{3}{x} + \frac{9}{2x^2} - \frac{27}{12x^3}\right]_1^{\infty}$$

$$= 0 - \left[-3 + \frac{9}{2} - \frac{27}{12}\right] = 3 - \frac{9}{2} + \frac{27}{12}$$

$$= \frac{36}{12} - \frac{54}{12} + \frac{27}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \approx 0.75$$

A01742342

La varianza entre autos es

$$Var(X) = 0.75$$

c) ¿Cuál será la probabilidad de que se tarde un auto más de 2 segundos? ¿A lo más 2? ¿x segundos o menos?

La probabilidad de que se tarde más de 2 segundos es

$$P(X>2) = \int_2^\infty \frac{3}{x^4}dx = 3\int_2^\infty \frac{1}{x^4}dx$$

$$= 3\left[-\frac{1}{3x^3}\right]_2^\infty = -\frac{1}{x^3}\Big|_2^\infty$$

$$= 0 + \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \approx 0.125$$

$$\rightarrow \underline{12.5\%}$$

A01742342

La probabilidad de que tarde a lo más 2 segundos es

$$P(X \leq 2) = \int_1^2 \frac{3}{x^4}\,dx = 3\int_1^2 \frac{1}{x^4}\,dx$$

$$= 3\left[-\frac{1}{3x^3}\right]_1^2 = -\frac{1}{x^3}\Big|_1^2$$

$$= -\frac{1}{2^3} + \frac{1}{1^3} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$P(X \leq 2) = \frac{7}{8} \approx 0.875 \rightarrow \underline{87.5\%}$$

Y la probabilidad de que tarde x o menos es

$$P(X \leq x) = \int_1^x \frac{3}{x^4}\,dx = 3\int_1^x \frac{1}{x^4}\,dx$$

$$= 3\left[-\frac{1}{3x^3}\right]_1^x = -\frac{1}{x^3}\Big|_1^x$$

A01742342

$$= -\frac{1}{x^3} + \frac{1}{1^3} = 1 - \frac{1}{x^3}$$

$$P(X \leq x) = 1 - \frac{1}{x^3}$$