A5. Procesos Poisson

Juan Bernal

2024-10-15

Drive Thru

El tiempo de llegada a una ventanilla de toma de órdenes desde un automóvil de un cierto comercio de hamburguesas sigue un proceso de Poisson con un promedio de 12 llegadas por hora.

a. ¿Cuál será la probabilidad de que el tiempo de espera de tres personas sea a lo más de 20 minutos?

- $\Gamma\left(\alpha = 3, \beta = \frac{1}{12}\right)$
- $P(X \leq 20) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{\frac{-x}{\beta}}\, dx$

```
pgamma(1/3,3,12)
```

```
## [1] 0.7618967
```

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de espera de una persona esté entre 5 y 10 segundos?

- $Exp\left(\lambda = 12, 5 < t < 10\right)$
- $P(X < \frac{10}{3600}) - P(X > \frac{5}{3600}) = -e^{-\lambda x_1} + e^{-\lambda x_2}$

```
pexp(10/3600,12) - pexp(5/3600,12)
```

```
## [1] 0.01625535
```

c. ¿Cuál será la probabilidad de que en 15 minutos lleguen a lo más tres personas?

- $Poisson\ (\lambda_0 = 12, n = 3, t = 0.25)$
- $\lambda = \lambda_0 t = 3$
- $P(X \leq 3) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{n!}$

```
ppois(3,12*0.25)
```

```
## [1] 0.6472319
```

d. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de espera de tres personas esté entre 5 y 10 segundos?

- $\Gamma\ (\alpha = 3, \beta = \frac{1}{12})$
- $P(X < \frac{10}{3600}) - P(X > \frac{5}{3600}) = \int_{x_2}^{x_1} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{\frac{-x}{\beta}}\, dx$

```
pgamma(10/3600,3,12) - pgamma(5/3600,3,12)
```

```
## [1] 5.258533e-06
```

e. Determine la media y varianza del tiempo de espera de tres personas.

- $\Gamma\ (\alpha = 3, \beta = \frac{1}{12})$
- $\mu = \alpha\beta$
- $\sigma^2 = \alpha\beta^2$
- $\sigma = \sqrt{\alpha}\beta$

```
media = 3/12
varianza = 3/(12^2)
cat('La media del tiempo de espera de 3 personas es ',media,'y la varianza es ',varia
nza,'\n')
```

```
## La media del tiempo de espera de 3 personas es  0.25 y la varianza es  0.02083333
```

```
cat('La desviación estándar del tiempo de espera de 3 personas es ', sqrt(varianza))
```

```
## La desviación estándar del tiempo de espera de 3 personas es  0.1443376
```

f. ¿Cuál será la probabilidad de que el tiempo de espera de tres personas exceda una desviación estándar arriba de la media?

- $\Gamma\left(\alpha = 3, \beta = \frac{1}{12}\right)$
- $P(X > \mu + \sigma) = 1 - \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{\frac{-x}{\beta}}\, dx$

```
1-pgamma(media+sqrt(varianza),3,12)
```

```
## [1] 0.1491102
```

Entre Partículas

Una masa radioactiva emite partículas de acuerdo con un proceso de Poisson con una razón promedio de 15 partículas por minuto. En algún punto inicia el reloj.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que en los siguientes 3 minutos la masa radioactiva emita 30 partículas?

- $Poisson\left(\lambda_0 = 15, n = 30, t = 3\right)$
- $\lambda = \lambda_0 t = 45$
- $P(X = 30) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$

```
dpois(30,15*3)
```

```
## [1] 0.00426053
```

b. ¿Cuál es la probabilidad de que transcurran cinco segundos a lo más antes de la siguiente emisión?

- $Exp\,(\lambda = 15, t \leq \frac{5}{60})$
- $P(X \leq \frac{5}{60}) = e^{-\lambda x}$

```
pexp(5/60,15)
```

```
## [1] 0.7134952
```

c. ¿Cuánto es la mediana del tiempo de espera de la siguiente emisión?

- La mediana es el quantil que divide la distribución en dos porciones iguales. Por lo que la probabilidad de que el tiempo de espera de la siguiente sea la mediana es del 0.5.
- $x = -\frac{ln(P(X \leq x))}{\lambda}$

```
qexp(0.5,15)
```

```
## [1] 0.04620981
```

d. ¿Cuál es la probabilidad de que transcurran a lo más cinco segundos antes de la segunda emisión?

- $\Gamma\,(\alpha = 2, \beta = \frac{1}{15})$
- $P(X \leq \frac{5}{60}) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{\frac{-x}{\beta}}\, dx$

```
pgamma(5/60, 2,15)
```

```
## [1] 0.3553642
```

e. ¿En que rango se encuentra el 50% del tiempo central que transcurre antes de la segunda emisión?

```
cat('El 50% del tiempo central que transcurre antes de la segunda emisión se encuentr
a entre (',qgamma(0.25,2,15),',',qgamma(0.75,2,15),')')
```

```
## El 50% del tiempo central que transcurre antes de la segunda emisión se encuentra
entre ( 0.06408525 , 0.179509 )
```