

## Espaço vetorial e subespaço

1. Averigue se são espaços vetoriais reais, com as operações usuais de adição e multiplicação por um escalar:

- (a) o conjunto dos vetores  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  tais que  $x + 2y = 0$  e  $z = 1$ ;
- (b) o conjunto dos vetores  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  colineares a  $(1, 2, 3)$ .
- (c) o conjunto das sucessões de números reais convergentes para zero.

2. Considere o conjunto  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$  munido das operações  $\oplus$  e  $\odot$  assim definidas:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 - 1 \\ x_2 + y_2 + 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \alpha \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 - \alpha + 1 \\ \alpha x_2 + \alpha - 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- (a) Mostre que  $\mathcal{V}$  é um espaço vetorial real e calcule o elemento neutro  $0_{\mathcal{V}}$  e o simétrico de  $X \in \mathcal{V}$ .
- (b) Verifique se o conjunto  $\mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 - 2t \\ t - 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$  é subespaço de  $\mathcal{V}$ .

3. Averigue se os seguintes conjuntos são subespaços dos espaços vetoriais reais indicados.

- (a) No espaço vetorial  $\mathbb{R}^2$ , o conjunto dos vetores  $(x, y)$  tais que: i.  $x + y = 0$ ; ii.  $(x, y) \neq (1, 1)$ .
- (b) No espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$ , o conjunto dos vetores  $(x, y, z)$  tais que  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .
- (c) No espaço vetorial  $\mathcal{P}_2$  dos polinómios em  $x$  de grau não superior a 2, o conjunto dos polinómios  $ax^2 + bx + c$  com: i.  $c = 0$ ; ii.  $b = 1$ ; iii.  $bc = 0$ .
- (d) No espaço vetorial  $\mathbb{R}^{n \times n}$  das matrizes quadradas de ordem  $n$ , o conjunto das matrizes
  - i. simétricas;      ii. triangulares;      iii. de determinante 1;      iv. invertíveis;
- (e) No espaço vetorial  $\mathbb{R}^m$ , o conjunto  $\{AX : X \in \mathbb{R}^n\}$ , sendo  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .
- (f) No espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$ , o conjunto dos vetores que são ortogonais a um dado vector  $X \in \mathbb{R}^n$ .
- (g) No espaço vetorial  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$  das funções reais de domínio  $\mathbb{R}$ , o conjunto das funções
  - i.  $f$  tais que  $f(0) = 0$ ;      ii. diferenciáveis em  $\mathbb{R}$ ;

4. Mostre que se  $E$  é subespaço de  $\mathbb{R}^{n \times n}$  e  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é invertível, então  $F = \{P^{-1}AP : A \in E\}$  é também subespaço de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ .

## Combinação linear, espaço gerado e independência linear

5. Escreva, sempre que possível, o vetor

- (a)  $(2, -3, -4, 3)$  como combinação linear dos vetores  $(1, 2, 1, 0)$  e  $(4, 1, -2, 3)$ ;
- (b)  $(1, 1, 0)$  como combinação linear dos vetores  $(2, 1, -2)$ ,  $(1, 0, 0)$  e  $(1, 1, 1)$ ;
- (c)  $-t^2 + t + 4$  como combinação linear dos vetores  $t^2 + 2t + 1$ ,  $t^2 + 3$  e  $t - 1$ ;
- (d)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  como combinação linear dos vetores  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ .

6. Determine o espaço gerado pelos conjuntos de vetores indicados.

- (a)  $\{(0, 1), (2, 1), (2, 2)\}$  em  $\mathbb{R}^2$ ;
- (b)  $\{(0, 1), (0, 2)\}$  em  $\mathbb{R}^2$ ;
- (c)  $\{(2, 2, 3), (-1, -2, 1), (0, 1, 0)\}$  em  $\mathbb{R}^3$ ;
- (d)  $\{(1, 1, 1), (1, 0, 0), (2, 2, 2)\}$  em  $\mathbb{R}^3$ ;
- (e)  $\{t^2 + 1, t^2 + t, t + 1\}$  em  $\mathcal{P}_2$ .

7. Determine um conjunto gerador do espaço nulo da matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ .
8. Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^2$  e  $u$  um vetor não nulo de  $\mathbb{R}^2$ .
- (a) Verifique que  $\langle u \rangle$  é a reta que passa pela origem e tem a direção de  $u$ .
  - (b) Represente geometricamente  $\langle (1, -1) \rangle$ .
9. Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  e os vetores  $u_1$  e  $u_2$  de  $\mathbb{R}^3$  linearmente independentes.
- (a) Mostre que o subespaço gerado por  $u_1$  é a reta que passa pela origem e tem a direção de  $u_1$ .
  - (b) Mostre que o subespaço gerado pelos vetores  $u_1$  e  $u_2$  é o plano que passa pela origem e que contém os vetores  $u_1$  e  $u_2$ .
  - (c) Represente geometricamente i.  $\langle (1, -1, 2) \rangle$ ; ii.  $\langle (1, 0, 1), (0, 0, 1) \rangle$ ; iii.  $\langle (1, -1, 1), (-2, 2, -2) \rangle$ .
10. Averigue quais dos seguintes conjuntos de vetores são linearmente independentes.
- (a)  $\{(1, 1, 0), (0, 2, 3), (1, 2, 3), (1, -1, 1)\}$ ;
  - (b)  $\{(1, 2, 3), (1, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ ;
  - (c)  $\{(1, 1, 1, 1), (1, -1, 2, 3), (1, 3, 0, -1)\}$ ;
  - (d)  $\{2t^2 + 1, t - 2, t + 3\}$ .
11. Seja  $A = \{X_1, X_2, X_3\}$  um conjunto linearmente independente num espaço vetorial real  $\mathcal{V}$ . Averigue se o conjunto  $B = \{X_1 + X_2, X_1 + X_3, X_2 + X_3\}$  é linearmente independente em  $\mathcal{V}$ .
12. Seja  $\{X_1, \dots, X_n\}$  um conjunto de vetores de  $\mathbb{R}^n$  linearmente independente. Mostre que, se  $A$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$  invertível, então  $\{AX_1, \dots, AX_n\}$  é linearmente independente.

### Bases e dimensão; Espaço das linhas e espaço das colunas, espaço nulo

13. Dos seguintes conjuntos de vetores indique os que são bases dos espaços vetoriais indicados:
- (a)  $\{(1, 2), (2, 4)\}$  em  $\mathbb{R}^2$ ;
  - (b)  $\{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$  em  $\mathbb{R}^3$ ;
  - (c)  $\{(1, 0, 1), (2, 1, 0), (3, 1, 1)\}$  em  $\mathbb{R}^3$ ;
  - (d)  $\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 1)\}$  em  $\mathbb{R}^4$ ;
  - (e)  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$  em  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ;
  - (f)  $\{3t^2 + 2t + 1, t^2 + t + 1, t^2 + 1\}$  em  $\mathcal{P}_2$ .
14. Determine uma base e a dimensão do subespaço gerado pelos vetores:
- (a)  $(1, 3, 0), (-1, 1, 0)$  em  $\mathbb{R}^3$ ;
  - (b)  $(1, -1, 1), (0, 2, 1), (1, 1, 2)$  em  $\mathbb{R}^3$ ;
  - (c)  $t^2 + 1, t^2 - t + 1$  em  $\mathcal{P}_2$ .
15. Determine todos os valores de  $a$  para os quais  $\{(a^2, 0, 1), (0, a, 2), (1, 0, 1)\}$  é uma base de  $\mathbb{R}^3$ .
16. Determine uma base de  $\mathbb{R}^4$  que contenha os vetores  $(1, 0, 1, 0)$  e  $(0, 1, -1, 0)$ .
17. Seja  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 3z = 0\}$ .
- (a) Verifique que  $S$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^3$ .
  - (b) Determine um conjunto gerador de  $S$  e verifique se ele é linearmente independente.
  - (c) Indique, justificando, a dimensão de  $S$ .

18. Mostre que, se  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  for uma base de um espaço vetoriais real  $\mathcal{V}$ , então

- (a)  $\{cX_1, X_2, \dots, X_n\}$  com  $c \neq 0$  é também uma base de  $\mathcal{V}$ ;
- (b)  $\{X_1 + X_2 + \dots + X_n, X_2 + \dots + X_n, \dots, X_n\}$  é ainda uma base de  $\mathcal{V}$ .

19. Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ .

- (a) Determine uma base do espaço nulo de  $A$  e indique, justificando, a nulidade de  $A$ .
- (b) Determine o subespaço  $\mathcal{S} = \{AX : X \in \mathbb{R}^4\}$ .
- (c) Mostre que  $\{(1, -1, -1), (4, -3, -2)\}$  é uma base de  $\mathcal{S}$ .

20. Seja  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Mostre que

- (a) se  $m > n$ , então as linhas de  $A$  são linearmente dependentes;
- (b) se  $m < n$  então as colunas de  $A$  são linearmente dependentes.

21. Para cada uma das matrizes reais  $A$  seguintes:

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} & \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} & \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \text{(d)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{(e)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{(f)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} & \text{(g)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \text{(h)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

- i. determine uma base para o espaço nulo  $\mathcal{N}(A)$  de  $A$ ;
- ii. determine bases para o espaço das linhas  $\mathcal{L}(A)$  e o espaço das colunas  $\mathcal{C}(A)$  de  $A$ ;
- iii. calcule a característica e a nulidade de  $A$ .
- iv. diga, usando a informação dada pela característica, se as linhas de  $A$  são linearmente independentes.

Para as alíneas (a) e (b) reveja a resolução do exercício 27 da ficha de exercícios 1.

22. Seja  $A$  uma matriz real  $m \times 3$ . Para cada valor possível de  $\text{car}(A)$ , identifique que subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$  são  $\mathcal{L}(A)$  e  $\mathcal{N}(A)$ .

## Coordenadas, mudança de base, bases ortonormadas e projeção ortogonal

23. Considere a base  $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$  de  $\mathbb{R}^4$  constituída pelos vetores

$$X_1 = (1, 1, 0, 0), \quad X_2 = (1, 0, 0, 0), \quad X_3 = (1, 1, 1, 0), \quad X_4 = (1, 1, 1, 1).$$

Determine as coordenadas na base  $\mathcal{B}$  dos vetores (a)  $(-1, 2, -6, 5)$ , (b)  $(2, 1, 0, 0)$  e (c)  $(1, 2, 3, 4)$ .

24. Considere as bases  $\mathcal{B}_1 = ((1, 2, 1), (0, 2, 0), (0, 0, -1))$  e  $\mathcal{B}_2 = ((1, 0, -1), (1, 1, 1), (2, 3, -1))$  de  $\mathbb{R}^3$ .

- (a) Calcule  $[X]_{\mathcal{B}_1}$  e  $[X]_{\mathcal{B}_2}$  para i.  $X = (2, 3, 5)$ , ii.  $X = (-1, 2, 0)$  e iii.  $X = (1, 1, 1)$ .
- (b) Determine a matriz  $M$  de mudança da base  $\mathcal{B}_1$  para a base  $\mathcal{B}_2$ . Confirme os resultados obtidos em (a) usando  $M$ .

25. Sejam  $\mathcal{S} = ((1, 2), (0, 1))$  e  $\mathcal{T} = ((1, 1), (2, 3))$  duas bases de  $\mathbb{R}^2$  e o vetor  $X = (1, 5)$ . Determine
- as coordenadas de  $X$  na base  $\mathcal{T}$ ;
  - o vetor  $Z$  tal que  $[Z]_{\mathcal{T}} = (1, -3)$ ;
  - a matriz  $M$  de mudança da base  $\mathcal{T}$  para a base  $\mathcal{S}$ ;
  - as coordenadas de  $X$  na base  $\mathcal{S}$  usando  $M$ ;
  - as coordenadas de  $X$  na base  $\mathcal{S}$  diretamente;
  - a matriz  $N$  de mudança da base  $\mathcal{S}$  para a base  $\mathcal{T}$ ;
  - as coordenadas de  $X$  na base  $\mathcal{T}$  usando  $N$ .
26. Sejam  $\mathcal{S} = (X_1, X_2, X_3)$  e  $\mathcal{T} = (Y_1, Y_2, Y_3)$  bases de  $\mathbb{R}^3$  com  $X_1 = (-1, 1, 0)$ ,  $X_2 = (1, 0, 1)$  e  $X_3 = (0, 0, 1)$ . Determine  $\mathcal{T}$ , sabendo que a matriz de mudança da base  $\mathcal{T}$  para a base  $\mathcal{S}$  é
- $$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$
27. Verifique se os conjuntos de vetores seguintes são ortogonais:
- $\{(1, 2, 1), (0, -1, 2), (0, 2, 1)\}$ ;
  - $\{(1, 2, -1, 1), (0, -1, -2, 0), (1, 0, 0, -1)\}$ .
28. Indique para que valores de  $a$  e  $b$  o conjunto  $\left\{ \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left( a, \frac{\sqrt{2}}{2}, -b \right) \right\}$  é ortonormado.
29. Sejam  $X_1 = (\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5})$ ,  $X_2 = (0, 1, 0)$  e  $X_3 = (-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5})$  vetores de  $\mathbb{R}^3$ .
- Verifique que  $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$  é uma base ortonormada de  $\mathbb{R}^3$ .
  - Calcule o vetor  $[X]_{\mathcal{B}}$  para  $X = (1, 1, 1)$ , usando o facto de  $\mathcal{B}$  ser uma base ortonormada.
  - Calcule a matriz  $M$  de mudança da base  $\tilde{\mathcal{B}} = ((0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1))$  para a base  $\mathcal{B}$ .
  - Calcule  $[Y]_{\mathcal{B}}$ , sabendo que  $[Y]_{\tilde{\mathcal{B}}} = (1, 2, 3)$ .
30. Sejam  $X, Y_1, \dots, Y_n$  vetores em  $\mathbb{R}^n$ . Mostre que se  $X$  é ortogonal a  $Y_1, \dots, Y_n$ , então  $X$  é também ortogonal a qualquer vetor do subespaço gerado por  $Y_1, \dots, Y_n$ .
31. Considere o plano  $\mathcal{P}$  de  $\mathbb{R}^3$  gerado pelos vetores  $X_1 = (1, 1, 0)$  e  $X_2 = (0, 0, 1)$ .
- Determine uma base ortonormada de  $\mathcal{P}$ .
  - Determine a projecção ortogonal do vetor  $X = (2, -2, 1)$  sobre o plano  $\mathcal{P}$ .
  - Determine a distância do ponto  $A(2, -2, 1)$  ao plano  $\mathcal{P}$ , usando a alínea anterior.
32. Calcule as projecções ortogonais de  $X = (4, 0, -9)$  e  $Y = (2, 7, -1)$  sobre o subespaço  $\mathcal{W}$  de  $\mathbb{R}^3$  gerado pelos vetores  $(0, 1, 0)$  e  $(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ .
33. Diga se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas, justificando convenientemente.
- Todos os vetores da forma  $(a, 0, -a)$  com  $a \in \mathbb{R}$  formam um subespaço de  $\mathbb{R}^3$ .
  - Todo o conjunto de vetores de  $\mathbb{R}^3$  com dois vetores é linearmente independente.
  - O espaço das soluções do sistema homogéneo  $AX = 0$  é gerado pelas colunas de  $A$ .
  - Se as colunas de uma matriz  $n \times n$  formarem uma base de  $\mathbb{R}^n$ , então o mesmo acontece com as linhas.
  - Se  $A$  é uma matriz  $8 \times 8$  tal que o sistema homogéneo  $AX = 0$  só tem a solução trivial, então  $\text{car}(A) < 8$ .
  - Todo o conjunto de 5 vetores em  $\mathbb{R}^5$  é uma base em  $\mathbb{R}^5$ .
  - Todo o conjunto ortonormado de 5 vetores em  $\mathbb{R}^5$  é uma base em  $\mathbb{R}^5$ .
  - Todo o conjunto de vetores de  $\mathbb{R}^3$  linearmente independente contém 3 vetores.
  - Se  $A$  é uma matriz simétrica  $n \times n$ , então  $\text{car}(A) = n$ .
  - Todo o conjunto de vetores que geram  $\mathbb{R}^3$  contém pelo menos 3 vetores.

1. (a) Não; (b) sim; (c) sim;
2. (a)  $0_V = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  e  $\ominus \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - x_1 \\ -2 - x_2 \end{bmatrix}$ . (b) Sim.
3. (a) i. Sim; ii. não. (b) Não. (c) i. Sim; ii. não; iii. não. (d) i. Sim; ii. não; iii. não; iv. não; (e) Sim. (f) Sim. (g) i. Sim; ii. sim.
5. (a)  $(2, -3, -4, 3) = -2(1, 2, 1, 0) + (4, 1, -2, 3)$ ; (b)  $(1, 1, 0) = \frac{1}{3}(2, 1, -2) - \frac{1}{3}(1, 0, 0) + \frac{2}{3}(1, 1, 1)$ ; (c) e (d) não é possível.
6. (a)  $\mathbb{R}^2$ ; (b)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ ; (c)  $\mathbb{R}^3$ ; (d)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = z\}$ ; (e)  $\mathcal{P}_2$ .
7.  $\{(-1, -1, 1, 0), (0, -1, 0, 1)\}$ .
10. (a) Não; (b) sim; (c) não; (d) sim.
11. Sim.
13. (a) Não; (b) sim; (c) não; (d) sim; (e) sim; (f) sim.
14. (a)  $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ , dimensão 2; (b)  $\{(1, -1, 1), (0, 2, 1)\}$ , dimensão 2; (c)  $\{t^2 + 1, t\}$ , dimensão 2.  
Nota: Em (a) e (c), o conjunto dado também constitui uma base.
15.  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ .
16.  $\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ .
17. (b)  $\{(1, 1, 0), (0, 3, 1)\}$  que é l.i.; (c) 2.
19. (a)  $\{(-1, 1, 0, 0), (-2, 0, 1, 1)\}$  e  $\text{nul } A = 2$ . (b)  $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : c = a + 2b\}$ .
21. (a) i.  $\emptyset$ ; ii.  $\mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  e  $\mathcal{B}_{\mathcal{C}(A)} = \{(1, 2, -3, 1), (0, 1, 2, 2), (0, 0, 1, \frac{2}{3})\}$ ; iii.  $\text{car } A = 3$ ,  $\text{nul } A = 0$ ; iv. não.  
(b) i.  $\{(-8, 7, 4, 0), (-4, 5, 0, 4)\}$ ; ii.  $\mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = \{(1, 0, 2, 1), (0, 1, -\frac{7}{4}, -\frac{5}{4})\}$  e  $\mathcal{B}_{\mathcal{C}(A)} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ ; iii.  $\text{car } A = 2$ ,  $\text{nul } A = 2$ ; iv. sim.  
(c) i.  $\{(5, -2, -9, 13, 0), (-6, -8, 3, 0, 13)\}$ ; ii.  $\mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = \{(1, 2, 3, 2, 1), (0, 1, \frac{9}{5}, \frac{7}{5}, \frac{1}{5}), (0, 0, 1, \frac{9}{13}, -\frac{3}{13})\}$  ou  $\mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = \{(1, 0, 0, -\frac{5}{13}, \frac{6}{13}), (0, 1, 0, \frac{2}{13}, \frac{8}{13}), (0, 0, 1, \frac{9}{13}, -\frac{3}{13})\}$  e  $\mathcal{B}_{\mathcal{C}(A)} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ ; iii.  $\text{car } A = 3$ ,  $\text{nul } A = 2$ ; iv. sim.  
(d) i.  $\emptyset$ ; ii.  $\mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = \mathcal{B}_{\mathcal{C}(A)} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ ; iii.  $\text{car } A = 3$ ,  $\text{nul } A = 0$ ; iv. sim.  
(e) i.  $\{(0, 0, 1, 0)\}$ ; ii.  $\mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = \mathcal{B}_{\mathcal{C}(A)} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ ; iii.  $\text{car } A = 3$ ,  $\text{nul } A = 1$ ; iv. não.  
(f) i.  $\emptyset$ ; ii.  $\mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = \mathcal{B}_{\mathcal{C}(A)} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ ; iii.  $\text{car } A = 3$ ,  $\text{nul } A = 0$ ; iv. sim.  
(g) i.  $\emptyset$ ; ii.  $\mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = \{(1, -2, -1), (0, 1, \frac{5}{3}), (0, 0, 1)\}$  e  $\mathcal{B}_{\mathcal{C}(A)} = \{(1, 2, 1, 1), (0, 1, \frac{2}{3}, 1), (0, 0, 1, -\frac{9}{2})\}$ ; iii.  $\text{car } A = 3$ ,  $\text{nul } A = 0$ ; iv. não.  
(h) i.  $\emptyset$ ; ii.  $\mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = \mathcal{B}_{\mathcal{C}(A)} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ ; iii.  $\text{car } A = 4$ ,  $\text{nul } A = 0$ ; iv. sim.

Nota: Em (a) e (g), as colunas da matriz dada também constituem uma base de  $\mathcal{C}(A)$ .

Em (b) e (c), as linhas da matriz dada também constituem uma base de  $\mathcal{L}(A)$ .

Em (d), (f) e (h), as linhas/colunas da matriz dada também constituem bases de  $\mathcal{L}(A)/\mathcal{C}(A)$ .

22. Se  $\text{car}(A) = 0$ ,  $A$  é nula,  $\mathcal{L}(A) = \{(0, 0, 0)\}$  e  $\mathcal{N}(A) = \mathbb{R}^3$ ;  
Se  $\text{car}(A) = 1$ , qualquer forma escalonada de  $A$  tem apenas uma linha não nula, seja  $u$  essa linha,  $\mathcal{L}(A)$  é a reta que passa na origem com direção de  $u$  e  $\mathcal{N}(A)$  é o plano que passa na origem ortogonal a  $\mathcal{L}(A)$ ;  
Se  $\text{car}(A) = 2$ , qualquer forma escalonada de  $A$  tem apenas duas linhas não nulas, sejam  $u$  e  $v$  essas linhas,  $\mathcal{L}(A)$  é o plano que passa na origem com vetores diretores  $u$  e  $v$ , e  $\mathcal{N}(A)$  é a reta que passa na origem ortogonal a  $\mathcal{L}(A)$ ;  
Se  $\text{car}(A) = 3$ ,  $\mathcal{L}(A) = \mathbb{R}^3$  e  $\mathcal{N}(A) = \{(0, 0, 0)\}$ ;

23. (a)  $[(-1, 2, -6, 5)]_{\mathcal{B}} = (8, -3, -11, 5)$ ; (b)  $[(2, 1, 0, 0)]_{\mathcal{B}} = (1, 1, 0, 0)$ ; (c)  $[(1, 2, 3, 4)]_{\mathcal{B}} = (-1, -1, -1, 4)$ .
24. (a) i.  $[(2, 3, 5)]_{\mathcal{B}_1} = (2, -\frac{1}{2}, -3)$  e  $[(2, 3, 5)]_{\mathcal{B}_2} = (-\frac{6}{5}, \frac{18}{5}, -\frac{1}{5})$ ; ii.  $[(-1, 2, 0)]_{\mathcal{B}_1} = (-1, 2, -1)$  e  $[(-1, 2, 0)]_{\mathcal{B}_2} = (-2, -1, 1)$ ; iii.  $[(1, 1, 1)]_{\mathcal{B}_1} = (1, -\frac{1}{2}, 0)$  e  $[(1, 1, 1)]_{\mathcal{B}_2} = (0, 1, 0)$ . (b)  $M = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & -6 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ .
25. (a)  $[X]_{\mathcal{T}} = (-7, 4)$ ; (b)  $Z = (-5, -8)$ ; (c)  $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ ; (d)  $[X]_{\mathcal{S}} = M[X]_{\mathcal{T}} = (1, 3)$ ; (f)  $N = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ .
26.  $\mathcal{T} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 0), (-1, 2, 2)\}$ .
27. (a) Não; (b) sim.
28.  $a = b = \frac{1}{2}$  ou  $a = b = -\frac{1}{2}$ .
29. (b)  $[X]_{\mathcal{B}} = (\frac{7}{5}, 1, \frac{1}{5})$ . (c)  $M = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ . (d)  $[Y]_{\mathcal{B}} = (6, 5, 3)$ .
31. (a)  $\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), (0, 0, 1)\right)$ ; (b)  $(0, 0, 1)$ ; (c)  $\sqrt{8}$ .
32.  $\text{proj}_{\mathcal{W}} X = \left(1 - \frac{9\sqrt{3}}{4}, 0, \sqrt{3} - \frac{27}{4}\right)$  e  $\text{proj}_{\mathcal{W}} Y = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}, 7, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}\right)$ .
33. (a) Verdadeira. (b) Falsa. (c) Falsa. (d) Verdadeira. (e) Falsa. (f) Falsa. (g) Verdadeira. (h) Falsa. (i) Falsa. (j) Verdadeira.