

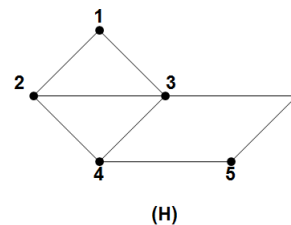


1. Considere o grafo simples não orientado,  $G = (V, E, W)$ , com  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  e cuja matriz de custos é

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 2 & \infty & 5 & \infty & \infty \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 4 & \infty \\ \infty & 3 & 0 & 1 & \infty & 3 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 2 & \infty \\ \infty & 4 & \infty & 2 & 0 & 1 \\ \infty & \infty & 3 & \infty & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Verifique se  $G$  é bipartido. Justifique.
- (b) Determine o caminho de menor custo entre os vértices  $v_1$  e  $v_6$ , aplicando o algoritmo de Dijkstra.
- (c) Considere a árvore abrangente de  $G$ ,  $T = (V, E_T)$ , onde  $E_T = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_5, v_3v_6\}$ . Determine o código de Prüfer de  $T$ .
2. Considere o grafo simples  $H$  representado na figura seguinte.

- (a) Construa um grafo  $J$  com a mesma sequência de graus dos vértices de  $H$ ,  $(4, 3, 3, 2, 2, 2)$ , que não seja isomorfo a  $H$ . Justifique.
- (b) Determine o número de árvores abrangentes do grafo  $H$ . Justifique.



3. Determine todos os números reais  $z$  para os quais o número binomial generalizado  $\binom{z}{3}$  é igual a  $z$ .
4. Um sistema computacional considera um código composto por  $n$  dígitos decimais válido se este contém um número par de zeros. Por exemplo, os códigos 123456 e 78900 são válidos, mas 2450200 e 0667745998 são códigos inválidos. Seja  $a_n$  o número de códigos válidos com  $n$  dígitos, para  $n \in \mathbb{N}$ .
- (a) Mostre que  $a_n$  satisfaz a equação de recorrência  $a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$  e determine o valor de  $a_1$ . Justifique devidamente.
- (b) Mostre que a função racional
- $$f(x) = \frac{-80x^2 + 9x}{(1 - 8x)(1 - 10x)}$$
- é a função geradora associada à sucessão  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- (c) Determine uma fórmula fechada para  $a_n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ .

Cotações:

| 1.(a) | 1.(b) | 1.(c) | 2.(a) | 2.(b) | 3.  | 4.(a) | 4.(b) | 4.(c) |
|-------|-------|-------|-------|-------|-----|-------|-------|-------|
| 2.0   | 3.0   | 1.5   | 2.0   | 2.5   | 2.0 | 3.0   | 2.0   | 2.0   |