UNIVERSIDADE DE AVEIRO
Departamento de Matemática

Matemática Discreta

Teste $N^0 1$ de Matemática Discreta — 17 de Abril de 2015

Responda de uma forma cuidada a cada uma das questões.

Tempo para a realização desta prova: 2 horas.

1. Suponha que p, q e r representam as seguintes sentenças:

   $p \equiv$ "7 é um número par";

   $q \equiv$ "3+1=4";

   $r \equiv$ "24 é divisível por 8".

   Utilizando as proposições p, q e r, escreva em linguagem simbólica cada uma das seguintes proposições:

   (1) **a)** $3 + 1 \neq 4$ e 24 é divisível por 8.

   (1) **b)** 7 é um número ímpar ou $3 + 1 = 4$.

   (1) **c)** Se $3 + 1 = 4$ então 24 não é divisível por 8.

2. Seja A um conjunto não vazio e $B \subseteq A$. Considere-se a relação $\mathcal{R}$ definida em $\mathcal{P}(A)$ (conjunto das partes de A) definida da seguinte forma: dados dois conjuntos $X, Y \subseteq A$,

$$X \mathcal{R} Y \text{ sse } B \cap X = B \cap Y.$$

   (1) **a)** Verifique que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência.

   (1) **b)** Admitindo que $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{b, c\}$, determine as as classes de equivalência de $\mathcal{R}$ em $\mathcal{P}(A)$.

3. *(3)* Reduza a fórmula da lógica de primeira ordem

$$\exists\, z\, (P(z) \Rightarrow \forall\, y\ \ ((\exists\, x\ Q(x, y, z)) \wedge R(z, y)\ )\ )$$

   à forma normal de Skolem.

4. Considere um universo com os objetos A, B e C (isto é, X=$\{A, B, C\}$). Definimos uma linguagem em X onde α, β e γ são constantes,f é um símbolo de função com um argumeto e r é um símbolo de predicado com dois argumentos. Considere a seguinte interpretação:

   constantes: $\alpha = A$, $\beta = A$ e $\gamma = B$;
   função f: $f(A) = B$, $f(B) = C$,$f(C) = C$.
   predicado r: $r(B, A) = r(C, B) = r(C, C) = 1$ e r vale 0 nos restantes casos.

   Com esta interpretação, avalie as seguintes fórmulas:

   *(1)***a)** $r(\alpha, \beta)$;
   *(1)***b)** $\exists x\ f(x) = \beta$;
   *(1)***c)** $\forall w\ r(f(w), w)$.

5. *(3)* Recorrendo ao princípio de indução, prove a seguinte igualdade:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = n^2\frac{(n+1)^2}{4}, \quad n \geq 1.$$

6. *(3)* Dado o conjunto $[2n] = \{1, 2, \ldots, 2n\}$, aplicando o princípio da gaiola dos pombos, prove que escolhendo $n + 1$ números deste conjunto $[2n]$, existem pelo menos dois cuja soma é igual a $2n + 1$.

7. *(3)* Numa turma do 1^o ano da Universidade de Aveiro com 50 alunos, 40 assistem às aulas de Cálculo II, 41 assistem às aulas de Matemática Discreta, 38 assistem às aulas de Programação, 35 assistem às aulas de Cálculo II e Matemática Discreta, 33 assistem às aulas de Cálculo II Programação, 34 assistem às aulas de Matemática Discreta e Programação e 30 assistem às aulas das três unidades curriculares.
   Quantos alunos da turma não assistem nem a Cálculo II, nem a Matemática Discreta, nem Programação?