Minimização de Funções Booleanas

Departamento de Electrónica,Telecomunicações e Informática
Universidade de Aveiro

Funções Booleanas

- Uma função booleana é uma regra (correspondência) que associa um elemento do conjunto B={0,1} a cada uma das 2^n combinações possíveis que as variáveis independentes podem assumir.

- Notação vectorial para o caso geral do sistema digital com n entradas e m saídas

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{\mathbf{Y} = f(\mathbf{X})} \longrightarrow \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

Formas Canónicas

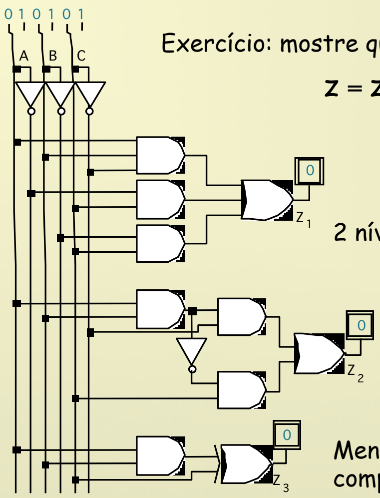
- Passagem sistemática da descrição por tabela de verdade para uma descrição algébrica
- Implementações a 2 níveis
  - 1ª FC: SOP ("Sum Of Products")
  - 2ª FC: POS ("Product Of Sums")
  - 3ª FC: NAND-NAND
  - 4ª FC: NOR-NOR
- Apenas 2 níveis de atraso temporal
- Na maioria das vezes não são as realizações mais simples em nº de portas lógicas e no nº de entradas de cada porta ("Fan-in")

Motivos para a simplificação

- Redução da complexidade ao nível da implementação
  - redução do numero de literais (entradas lógicas)
    - Menos entradas implica portas mais rápidas em algumas tecnologias
    - fan-ins (número de entradas lógicas) é tipicamente limitado
  - redução do número de portas
    - Número de portas (or componentes) influencia custos de produção
    - Atraso mínimo requer normalmente mais portas
  - redução do número de níveis lógicos
    - Menor número de níveis lógicos implica menos tempo de propagação
- Métodos tradicionais:
  - Reduzir o atraso à custa do aumento do nº de portas
- Metodos modernos:
  - Equilibrio entre a relação atraso versus nº de portas

Implementações alternativas

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0



Exercício: mostre que

$$z = z_1 = z_2 = z_3$$

2 níveis ("not" não conta)

"Fan-in" mais reduzido mas multi-nível

Menos portas mas mais complexas (xor)

Redundância algébrica

- Representação tabular de funções booleanas é única
- Representação algébrica inclui frequentemente termos redundantes
- Eficiência na implementação obriga a procedimentos de simplificação (minimização)

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$f(x,y,z) = \sum m(3,4,5,6,7)$$
$$f(x,y,z) = xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\,\bar{z} + \bar{x}yz$$
$$f(x,y,z) = x + yz$$

Simplificação algébrica

- Objectivo da simplificação algébrica duma função boolena f de n variáveis
  - Encontrar uma função g, equivalente a f e que minimize um determinado critério de custo
    - 1º : nº mínimo de instâncias de variáveis

$$x(y+z)+\bar{x}\bar{y}$$

    - 2º: nº mínimo de instâncias de variáveis numa soma de produtos (produto de somas)
    - 3º: nº mínimo de termos numa soma de produtos (produto de somas) desde que não exista uma outra expressão com o mesmo nº de termos e com menos instâncias de variáveis

$$xy+xz+\bar{x}\bar{y}$$

Simplificação algébrica

- Recurso pertinente mas muitas vezes não sistemático aos teoremas da Álgebra de Boole.
- Exercício: simplificar

$$f(x_1,\ldots,x_4)=x_1\bar{x}_2+x_3+\bar{x}_1\bar{x}_3x_4+x_2\bar{x}_3x_4$$

- Sol.

$$\begin{aligned} f(x_1,\ldots,x_4) &= x_1\bar{x}_2+x_3+\bar{x}_1\bar{x}_3x_4+x_2\bar{x}_3x_4 \\ &= x_1\bar{x}_2+x_3+\bar{x}_3(\bar{x}_1x_4+x_2x_4) \\ &= x_1\bar{x}_2+x_3+x_4(\bar{x}_1+x_2) \\ &= x_1\bar{x}_2+x_3+x_4(\overline{x_1\bar{x}_2}) \\ &= x_1\bar{x}_2+x_3+x_4 \end{aligned}$$

Expressões irredutíveis

- A abordagem "manual" pode conduzir a funções mais simples irredutíveis mas não necessariamente mínimas

$$
\begin{aligned}
f &= \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}z + xyz \\
&= \bar{x}y\bar{z} + \bar{y}\bar{z}(x + \bar{x}) + yz(x + \bar{x}) + x\bar{y}z \\
&= \bar{z}(\bar{x}y + \bar{y}) + z(y + x\bar{y}) \\
&= \bar{z}(\bar{x} + \bar{y}) + z(y + x) \\
&= \bar{z}\,\bar{x} + \bar{z}\,\bar{y} + zy + zx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f &= \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}z + xyz \\
&= \bar{x}\bar{z}(y + \bar{y}) + x\bar{y}(z + \bar{z}) + yz(x + \bar{x}) \\
&= \bar{x}\bar{z} + x\bar{y} + yz
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f &= \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}z + xyz \\
&= \bar{x}y(\bar{z} + z) + xz(y + \bar{y}) + \bar{y}\bar{z}(x + \bar{x}) \\
&= \bar{x}y + xz + \bar{y}\bar{z}
\end{aligned}
$$

•Todas as expressões são irredundantes (irredutíveis). A supressão de qualquer termo ou instância de variável conduz a uma função diferente.

•Expressões irredutíveis podem não ser mínimas

•Pode existir mais que uma expressão mínima

•Conveniente desenvolver processos que produzam o conjunto de todas as expressões mínimas para selecção segundo outros critérios

Adjacência e Simplificação

- Fundamento da simplificação
  - Teorema da Adjacência $\forall x,y \in B, \quad xy + x\bar{y} = x$

A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

$F = A\bar{B} + AB = A(\bar{B} + B) = A$

•Valor de B muda no conjunto de "1" de F

•Valor de A não muda no conjunto de "1" de F

•Na expressão de F mantém-se A e elimina-se B

A	B	G
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

$G = \bar{A}\bar{B} + A\bar{B} = \bar{B}(\bar{A} + A) = \bar{B}$

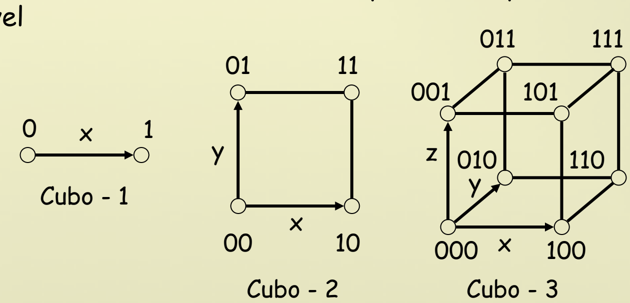
•Valor de A muda no conjunto de "1" de G

•Valor de B não muda no conjunto de "1" de G

•Na expressão de F mantém-se B e elimina-se A

Cubos Booleanos

- Técnica visual para identificar quando pode ser aplicado o Teorema da Adjacência
- Uma forma alternativa de representar a tabela de verdade
- Num cubo de n variáveis cada vértice é adjacente a n vértices, ie. para cada termo mínimo existem outros n termos mínimos que partilham n-1 variáveis e diferindo, portanto, apenas numa variável

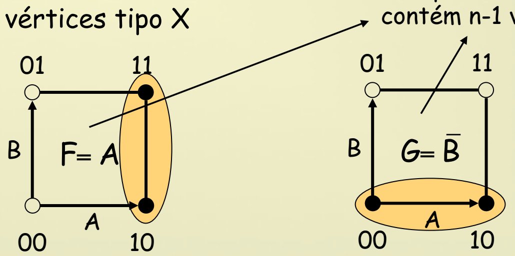


Cubos Booleanos

- Mapeamento das Tabelas de Verdade em Cubos Booleanos:
  - ON-set = vértices a cheio
  - OFF-set = vértices vazios
  - DC-set = vértices tipo X

Cubos de dimensão n-1 ou subcubos

A expressão reduzida contém n-1 variáveis



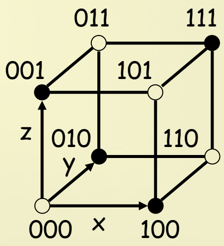
A a "1" e constante | B a "0" e constante

B muda dentro do loop | A muda dentro do loop

Cubos-3

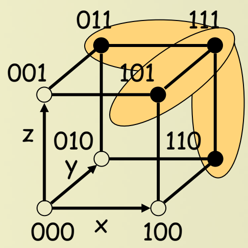
- Exemplo

x	y	z	F	G
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1



Impossível explorar a adjacência. Formas canónicas são irredutíveis

$F = \sum m(1,2,4,7)$



3 casos de adjacência

$G = xy + yz + xz$

$= x(y+z) + yz$

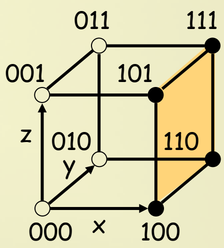
Exercício: Repare nas relações diagonais do ON-set de F.
Prove que $F = x \oplus y \oplus z$

Cubos-3

- Exemplo

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$G = \sum m(4,5,6,7)$



$G = x$

Adjacência sucessiva em 4 vértices

Apenas se mantém x

y e z são eliminadas

Subcubos

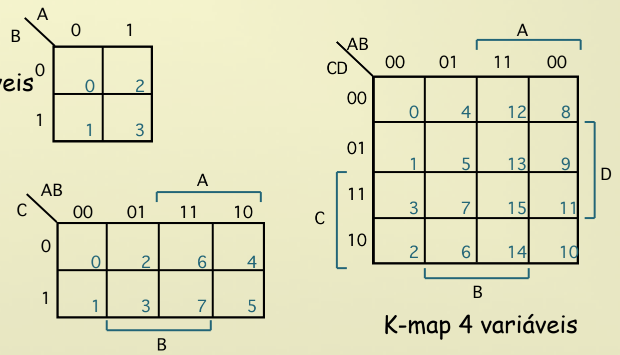
- Um agrupamento de 2^m vértices, cada um deles adjacente a m vértices na colecção, é denominado um subcubo de dimensão n-m.
- Exemplos a partir dum cubo, n=3
  - Um subcubo n-0, i.e., um vértice, gera um produto (mintermo) com três literais
  - Um subcubo, n-1 i.e., uma aresta, gera um produto com dois literais
  - um subcubo n-2, i.e., uma face, gera um produto com um literal
  - Um subcubo n-3, i.e., um cubo gera a constante "1"
- Em geral um subcubo-m dentro de um cubo-n (m < n) gera um produto com n-m literais

Método dos mapas de Karnaugh (K-Map)

- Para n>3 é praticamente impossível a utilização gráfica dos cubos booleanos
- Surge uma outra alternativa gráfica de visualização da tabela de verdade: o mapa de Karnaugh
- O objectivo continua a ser a exploração das adjacências
- Mapa de Karnaugh é "isomorfo" a um cubo booleano
- Abordagem fundamentalmente heurística
- Método útil para n<=6. Para mais variáveis deve-se utilizar SW específico

Disposição dos termos mínimos

- Em cada dimensão, para garantir a adjacência, a evolução das coordenadas binárias de cada termo mínimo obedece ao código de Gray



K-map 2 variáveis

K-map 4 variáveis

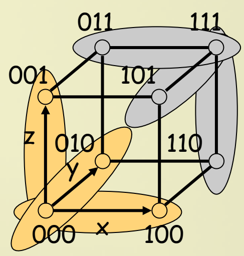
K-map 3 variáveis

Adjacências num K-Map

x \ yz	00	01	11	10
0	000	001	011	010
1	100	101	111	110

Cada célula é adjacente a 3 células

Isomorfia



Cada vértice é adjacente a 3 vértices

Primeiros exemplos

B \ A	0	1
0	0	1
1	0	1

Mantém-se A e muda B

$F = A$

B \ A	0	1
0	1	1
1	0	0

Mantém-se B e muda A

$G = \overline{B}$

z \ xy	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

$F = xy + zy + zx$

z \ xy	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	0	0	1	1

$F = x$

Mapas com 3 variáveis

z \ xy	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	0	0	0	1

$$F = \sum m(0,4,5,6) = \bar{z}\bar{y} + \bar{z}x + x\bar{y}$$

z \ xy	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	1	0	1	1

$$F = \sum m(0,1,4,5,6,7) = x + \bar{y}$$

Mapas com 4 variáveis

zw \ xy	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	0	0
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

$$F = \sum m(0,2,3,5,6,7,8,10,11,14,15)$$
$$= z + \bar{y}\bar{w} + \bar{x}yw$$

Minimização com Maxtermos

zw \ xy	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	0	0
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

$$F = \sum m(0,2,3,5,6,7,8,10,11,14,15)$$
$$= \prod M(1,4,9,12,13)$$

$$F = (\bar{x} + \bar{y} + z)(z + w + \bar{y})(z + \bar{w} + y)$$

$$\bar{F} = \sum m(1,4,9,12,13)$$
$$= xy\bar{z} + \bar{z}\bar{w}y + \bar{z}w\bar{y}$$
$$\bar{\bar{F}} = \overline{xy\bar{z} + \bar{z}\bar{w}y + \bar{z}w\bar{y}}$$
$$= (\bar{x} + \bar{y} + z)(z + w + \bar{y})(z + \bar{w} + y)$$

Minimização com "don´t cares"

- "Don't Cares" podem ser tratados como 1's ou 0's conforme seja mais útil à simplificação

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	x	0
01	1	1	x	1
11	1	1	0	0
10	0	x	0	0

$F = \sum m(1,3,5,7,9) + \sum d(6,12,13)$

$F = \bar{A}D + \bar{C}D\bar{B}$ sem don't cares

$F = \bar{A}D + \bar{C}D$ incluindo don't cares

Toma-se este "don't care" como um "1"

Na forma conjuntiva "POS"

$F = D(\bar{C} + \bar{A})$

Estratégia de Cobertura

- Alguns exemplos de cobertura inadequada do ON-set

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	1	1
11	0	1	1	0
10	0	0	0	0

$F = DB + \bar{A}B\bar{C} + \bar{C}DA + \bar{C}\bar{D}\bar{B}$

Expressão irredutível mas não mínima

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	1	1
11	0	1	1	0
10	0	0	0	0

$F = DB + \bar{C}\bar{D}\bar{A} + A\bar{B}\bar{C}$

Estratégia de Cobertura

- Alguns exemplos de cobertura inadequada do ON-set

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	1	1	1	0
11	0	1	1	1
10	0	1	0	0

$$F = AB\overline{C} + \overline{A}\,\overline{C}D + \overline{A}BC + CDA + BD$$

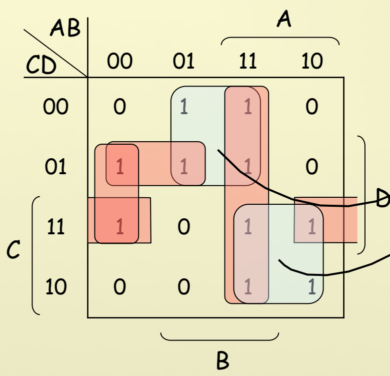
CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	1	1	1	0
11	0	1	1	1
10	0	1	0	0

$$F = AB\overline{C} + \overline{A}\,\overline{C}D + \overline{A}BC + CDA$$

Estratégia de Cobertura

- Definições:
  - Implicante: termo do ON-set ou qualquer grupo de termos que possam ser combinados num K-map
    - Associação de termos mínimos (o mesmo que subcubos)
  - Implicante primo (IP): implicante que não pode ser combinado com outro implicante para eliminar um termo
  - Implicante primo essencial (IPE): se um termo do ON-set está coberto por um único implicante primo, então esse implicante é essencial
    - Há pelo menos um termo mínimo que é coberto apenas e só por este implicante
- Quando se lida com o OFF-set as associações de “0” no K-map designam-se por Implicados

Implicantes



6 Implicantes Primos

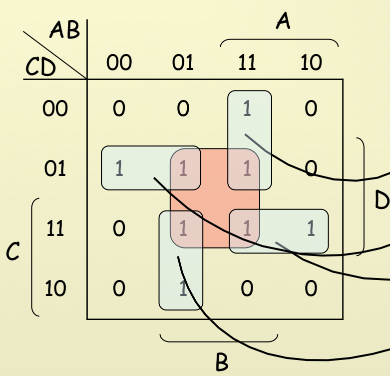
$\{B\overline{C}, CA, AB, \overline{A}\overline{B}D, \overline{A}\overline{C}D, \overline{B}CD\}$

Essenciais

Expressão mínima inlcui todos IPE's e o menor número de IP não essenciais que assegurem a cobertura total do ON-set

$$F = B\overline{C} + CA + \overline{A}\overline{B}D$$

Implicantes



5 Implicantes Primos

$\{AB\overline{C}, \overline{A}\overline{C}D, \overline{A}BC, CDA, BD\}$

Essenciais

Neste caso a expressão mínima é composta apenas por IPEs

$$F = AB\overline{C} + \overline{A}\overline{C}D + \overline{A}BC + CDA$$

Algoritmo de cobertura para SOP mínima

- Passo 1:
  - Encontrar um termo no ON-set ainda não coberta por um implicante
- Passo 2:
  - Encontrar grupos "maximos" de 1's e X's adjacentes ao termo. Considerar as adjacências entre linhas topo/fundo e colunas primeira/última. Estes formam os implicantes primos (sempre contendo um número de elementos potência de 2).
  - Repetir passos 1 e 2 até encontrar todos os implicantes primos
- Passo 3
  - Revisitar os 1's no K-map. Se cobertos por um único implicante primo, esse é essencial, e faz parte da cobertura final. Os 1's que ele cobrir não precisam de voltar a ser considerados
- Passo 4
  - Se sobrarem 1's ainda por cobrir por implicantes primos essenciais selecionar o menor número de implicantes primos que cubram os 1's que sobram

Exemplo

$$F = \sum m(4,5,6,8,9,10,13) + \sum d(0,7,15)$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	x	1	0	1
01	0	1	1	1
11	0	x	x	0
10	0	1	0	1

CD \ AB	00	01	11	10
00	x	1	0	1
01	0	1	1	1
11	0	x	x	0
10	0	1	0	1

IPs a partir de m_4

CD \ AB	00	01	11	10
00	x	1	0	1
01	0	1	1	1
11	0	x	x	0
10	0	1	0	1

IPs a partir de m_{13}

Exemplo

$$F = \sum m(4,5,6,8,9,10,13) + \sum d(0,7,15)$$

IPs a partir de m_{13}

CD \ AB	00	01	11	10
00	×	1	0	1
01	0	1	1	1
11	0	×	×	0
10	0	1	0	1

IPs a partir de m_8

CD \ AB	00	01	11	10
00	×	1	0	1
01	0	1	1	1
11	0	×	×	0
10	0	1	0	1

Cobertura mínima

CD \ AB	00	01	11	10
00	×	1	0	1
01	0	1	1	1
11	0	×	×	0
10	0	1	0	1

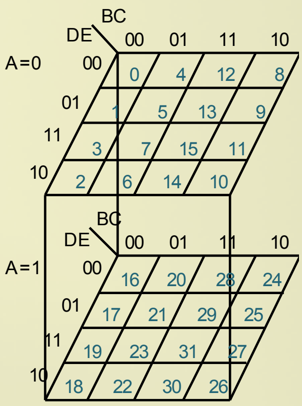
$$F = \bar{A}B + A\bar{B}\bar{D} + A\bar{C}D$$

Mapas com 5 variáveis

- Várias abordagens gráficas

CDE \ AB	00	01	11	10
000	0	8	24	16
001	1	9	25	17
011	3	11	27	19
010	2	10	26	18
110	6	14	30	22
111	7	15	31	23
101	5	13	29	21
100	4	12	28	20

Eixo de simetria



Mapas com 5 variáveis

$F = \sum m(2,5,7,8,10,13,15,17,19,21,23,24,29\ 31)$

CDE \ AB	00	01	11	10
000	0	8	24	16
001	1	9	25	17
011	3	11	27	19
010	2	10	26	18
110	6	14	30	22
111	7	15	31	23
101	5	13	29	21
100	4	12	28	20

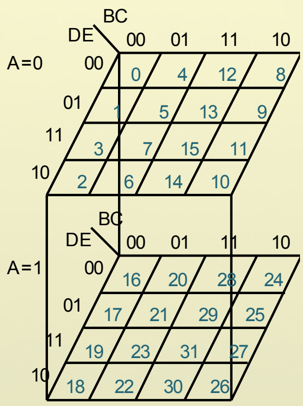
CDE \ AB	00	01	11	10
000	0	1	1	0
001	0	0	0	1
011	0	0	0	1
010	1	1	0	0
110	0	0	0	0
111	1	1	1	1
101	1	1	1	1
100	0	0	0	0

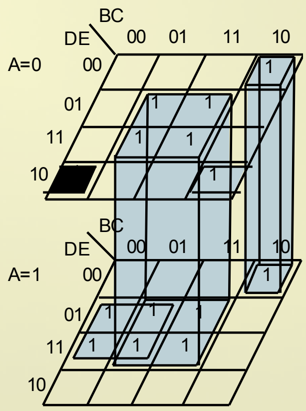
$F = CE + A\bar{B}E$

$+B\bar{C}\bar{D}\bar{E} + \bar{A}\bar{C}D\bar{E}$

Mapas com 5 variáveis

$F = \sum m(2,5,7,8,10,13,15,17,19,21,23,24,29\ 31)$





$F = CE + A\bar{B}E$

$+B\bar{C}\bar{D}\bar{E} + \bar{A}\bar{C}D\bar{E}$

Mapas com 5 variáveis

$F = \sum m(0,1,2,3,5,7,8,9,10,11,16,17,18,19,21,23,24,25,26,27)$

CDE \ AB	00	01	11	10
000	0	8	24	16
001	1	9	25	17
011	3	11	27	19
010	2	10	26	18
110	6	14	30	22
111	7	15	31	23
101	5	13	29	21
100	4	12	28	20

CDE \ AB	00	01	11	10
000	1	1	1	1
001	1	1	1	1
011	1	1	1	1
010	1	1	1	1
110	0	0	0	0
111	1	0	0	1
101	1	0	0	1
100	0	0	0	0

$F = \bar{C} + \bar{B}E$

Exercícios

- Preencha directamente o mapa de Karnaugh da seguinte função booleana

$$F = (A \oplus B)C + \bar{A}(B \oplus C)$$

- Represente a função na 1ª e 2ª forma canónica.
- Determine os implicantes primos da função
- Apresente uma forma disjuntiva mínima e uma forma conjuntiva mínima

Exercícios

- Desenhe o esquema lógico da função F recorrendo ao menor nº de portas NAND

$$F = (A \oplus C)B + AC + \bar{B}C$$

- Idem com portas NOR

Exercícios

- Considere um sistema com 4 entradas A,B,C,D e uma saída Y. A saída será "1" sempre que nº de entradas a "1" for ímpar. Preencha directamente o mapa de Karnaugh da função booleana Y = F(A,B,C,D).

- Mostre a partir do mapa que a função F é irredutível

- Represente F numa expressão booleana compacta recorrendo apenas ao operador $\oplus$.

Exercícios

- De entre as funções booleanas seguintes determine as que são equivalentes. (sug. preencha directamente os mapas de Karnaugh)

a) $F_1(A,B,C,D) = AC + BD + A\overline{B}\,\overline{D}$

b) $F_2(A,B,C,D) = A\overline{B}\,\overline{D} + AB + \overline{A}B\overline{C}$

c) $F_3(A,B,C,D) = BD + A\overline{B}\,\overline{D} + ACD + ABC$

d) $F_4(A,B,C,D) = AC + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}BD + B\overline{C}D$

e) $F_5(A,B,C,D) = (B + \overline{D})(A + B)(A + \overline{C})$

Exercícios

- Recorde a definição de implicação e diga se para a função

$$F = \overline{A}B + \overline{C}\,\overline{A} + \overline{B}C\overline{D}$$

os seguintes mintermos ou somas de mintermos constituem implicantes de F

a) m_1

b) m_3

c) $m_1 + m_2$

d) $m_1 + m_3$

e) $m_0 + m_1 + m_2$

f) $m_4 + m_5 + m_6 + m_7$

Exercícios

- Considere a função booleana

$$F(A,B,C,D) = \sum m(2,6,7,8,9,10,13,15)$$

- Mostre que esta função não tem implicantes primos essenciais e tem 2 formas disjuntivas mínimas

Exercícios

- Determine formas disjuntiva e conjuntiva mínimas para a função

$$F(A,B,C,D) = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + B\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}CD + ABCD + \bar{A}BC\bar{D}$$

  tendo em conta que as combinações de entradas correspondentes aos mintermos 1,4,7,11 e 14 nunca ocorrem

- Minimizar a seguinte função booleana

$$F(A,B,C,D) = \sum m(1,3,5,6,9,12,17,19,22,27,28,30) + \sum dc(4,11,14,20,21,25)$$

Exercícios

- Pretende-se projectar um circuito lógico com 4 entradas: x_1,x_2,y_1,y_2 e 2 saídas z_1 e z_2. O circuito deverá gerar nas saídas $Z=(z_1,z_2)$ a soma módulo 4 dos operandos $X=(x_1,x_2)$ e $Y=(y_1,y_2)$.

a) Elabore a tabela de verdade

b) Obtenha as formas disjuntivas mínimas para as saídas z_1,z_2.

c) Proponha uma solução de partilha de implicantes que conduza a uma solução global mínima para $Z=(z_1,z_2)$

Tabela adição mod 4

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2