3. Funções Reais de Várias Variáveis Reais: Limites, Continuidade, Derivação parcial e Diferenciabilidade

baseado em slides de edições anteriores de Cálculo II

Isabel Brás

UA, 28/3/2019

Cálculo II – Agrup. IV 18/19

Resumo dos Conteúdos

Distância; bola aberta; bola fechada

Consideramos em $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \colon x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n\}$ a distância euclidiana (usual):

$$d(X, Y) = ||\overrightarrow{XY}|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

para $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Definições:

Sejam $P \in \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{R}^+$,

- bola aberta de centro P e raio r: $B_r(P) = \{X \in \mathbb{R}^n \colon d(X, P) < r\}$.
- bola fechada de centro P e raio r: $\overline{B}_r(P) = \{X \in \mathbb{R}^n \colon d(X, P) \leq r\}$.

Conjunto aberto/ fechado/ limitado

Definições:

Seja $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$.

1. $P \in \mathcal{D}$ é um ponto interior de $\mathcal{D}$ se, para algum $r > 0$, $B_r(P) \subset \mathcal{D}$.
   O interior de $\mathcal{D}$ é o conjunto formado por todos os pontos interiores de $\mathcal{D}$. Notação: $\text{int}(\mathcal{D})$.
2. $P \in \mathbb{R}^n$ é um ponto fronteiro de $\mathcal{D}$ se, para todo $r > 0$,
   $B_r(P) \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$ e $B_r(P) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{D}) \neq \emptyset$.
   A fronteira de $\mathcal{D}$ é o conjunto formado por todos os pontos fronteiros de $\mathcal{D}$. Notação: $\text{fr}(\mathcal{D})$.

Definições: Seja $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$.

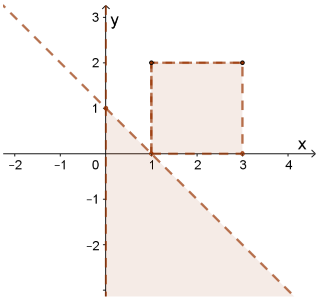
1. $\mathcal{D}$ é aberto se $\text{int}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$.
2. $\mathcal{D}$ é fechado se $\text{fr}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$.
3. $\mathcal{D}$ é limitado se existe $r \in \mathbb{R}^+$ e $C \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{D} \subseteq \overline{B}_r(C)$.

Exemplo:

$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x > 0 \wedge x + y < 1) \vee (1 < x < 3 \wedge 0 < y < 2)\}$

- $fr(\mathcal{D}) = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$ onde
  $\mathcal{F}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x = 0 \wedge y < 1) \vee (x > 0 \wedge x + y = 1)\}$
  $\mathcal{F}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x = 1 \vee x = 3) \wedge 0 \leq y \leq 2\}$
  $\mathcal{F}_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (y = 0 \vee y = 2) \wedge 1 \leq x \leq 3\}$.
  $fr(\mathcal{D}) \not\subseteq \mathcal{D}$, logo $\mathcal{D}$ não é fechado.
- $\mathcal{D}$ não é limitado.
- $\text{int}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$, logo $\mathcal{D}$ é aberto.

Ilustração:



Ponto de acumulação/ isolado

Definições:

Seja $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$.

1. $P \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de acumulação de $\mathcal{D}$ se, para todo $r > 0$, $B_r(P) \cap (\mathcal{D} \setminus \{P\}) \neq \emptyset$.
2. $P \in \mathcal{D}$ é um ponto isolado de $\mathcal{D}$ se não é ponto de acumulação de $\mathcal{D}$.

Exercício: Mostre que:

todo o ponto interior de $\mathcal{D}$ é um ponto de acumulação de $\mathcal{D}$.

Exemplo:

$\mathcal{L} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : x^2+y^2 \leq 1 \vee (y = 0 \wedge -2 \leq x \leq -1)\} \cup \{(2,0)\}$
$(0,0)$ e $(-2,0)$ são pontos de acumulação de $\mathcal{L}$, indique outros!
$(2,0)$ é um ponto isolado de $\mathcal{D}$, existem outros? ▸ ilustração gráfica
Este conjunto é limitado e não é aberto, justifique. Será fechado?

Definição:

Dado $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, chamamos função real a n variáveis reais[a] de domínio $\mathcal{D}$ a toda a correspondência que associa de forma única a cada elemento de $\mathcal{D}$ um número real. Notação:

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \mapsto & z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{array}.$$

[a] ou campo escalar a n variáveis

Definição: Seja $f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Ao conjunto

$$CD_f = \{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \colon (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}\}$$

chamamos o contradomínio de f.

Definição: Seja $f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Ao conjunto

$$\mathcal{G}_f = \{(x_1, \ldots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon z = f(x_1, \ldots, x_n), \ \text{com } (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}\}$$

chamamos o gráfico de f.

Exemplos

- $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = 2x - y$. ‣ esboço gráfico
  $D_f = \mathbb{R}^2$ e $CD_f = \mathbb{R}$; O gráfico de f é o plano de equação $z = 2x - y$.
- $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = x^2 + y^2$. ‣ esboço gráfico
  $D_f = \mathbb{R}^2$ e $CD_f = \mathbb{R}_0^+$; O gráfico de f,
  $\mathcal{G}_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = x^2 + y^2\}$, é um parabolóide circular.
- $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $g(x,y) = 4 - y^2$. ‣ esboço gráfico
  $D_g = \mathbb{R}^2$ e $CD_g =]-\infty, 4]$;
  $\mathcal{G}_g = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = 4 - y^2\}$ (cilindro parabólico).
- $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $h(x,y) = x^2 - y^2$. ‣ esboço gráfico
  $D_h = \mathbb{R}^2$ e $CD_h = \mathbb{R}$;
  $\mathcal{G}_h = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = x^2 - y^2\}$ (parabolóide hiperbólico).
- $s\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $s(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$.
  $D_s = \mathbb{R}^2$ e $CD_s = [-1, 1]$;
  $\mathcal{G}_s = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = \sin(x^2 + y^2)\}$. ‣ esboço gráfico

Curvas de Nível/ Superfícies de Nível

Definições:

Seja $f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $k \in CD_f$. Ao conjunto

$$\mathcal{N}_k = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{D} \colon f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k\}$$

chamamos conjunto de nível k de f.
Para $n = 2$, o conjunto $\mathcal{N}_k$ passa a denotar-se por $\mathcal{C}_k$ e a designar-se por curva de nível k de f.
Para $n = 3$, o conjunto $\mathcal{N}_k$ passa a denotar-se por $\mathcal{S}_k$ e a designar-se por superfície de nível k de f.

Nota:

Iremos considerar, quase exclusivamente, funções com duas ou três variáveis.

Exemplos

1. $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $g(x,y) = 4 - y^2$.
   $CD_g =]-\infty, 4]$. Para $k \leq 4$, a curva de nível k de g é
   $$\mathcal{C}_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\, k = 4 - y^2\}\,.$$
   Trata-se da união de duas retas de equações $y = \sqrt{4-k}$ e $y = -\sqrt{4-k}$. ▸ applet
2. $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $h(x,y) = x^2 - y^2$. $CD_h = \mathbb{R}$;
   $$\mathcal{C}_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\, k = x^2 - y^2\}, \text{com } k \in \mathbb{R}$$ ▸ applet
   A a curva de nível k é, para $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a hipérbole de equação $x^2 - y^2 = k$ e, para $k = 0$, a reunião as duas retas de equações $y = x$ e $y = -x$.
3. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y,z) = 2x - 5y + 3z$. Para cada $k \in \mathbb{R}$, a superfície de nível k de f é o plano ortogonal ao vetor $(2,-5,3)$ que passa no ponto $(0,0,\frac{k}{3})$.

Limite de uma sucessão de pontos em $\mathbb{R}^p$

Definições:

- Uma sucessão $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos em $\mathbb{R}^p$ é uma aplicação de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}^p$, que a cada n faz corresponder $X_n = (x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{np})$.
- Seja $L \in \mathbb{R}^p$. Dizemos que a sucessão $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para L, se para todo o $r > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $X_n \in B_r(L)$, para todo o $n \geq m$. Escreve-se $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = L$.

Prova-se que:

- L é único, quando existe.
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{np}) = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_p)$ sse $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{ni} = \ell_i$, para todo o $i = 1, 2, \ldots, p$.

Exemplos de sucessões vetoriais convergentes/ não convergentes

- A sucessão de $\mathbb{R}^2$ tal que $X_n = \left(\frac{1}{n}, 2\right)$ converge para $L = (0, 2)$.
- A sucessão de $\mathbb{R}^2$ tal que $X_n = \left(3 + (\frac{1}{2})^n, n \sin(\frac{1}{n})\right)$ converge para $L = (3, 1)$.
- A sucessão de $\mathbb{R}^3$ tal que $X_n = \left(n, (\frac{1}{2})^n, \frac{1}{n}\right)$ não é convergente.

Conceito de Limite

Seja $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, A um ponto de acumulação de $\mathcal{D}$ e $\ell \in \mathbb{R}$. Dizemos que o limite de f quando X tende para A é ℓ se para qualquer sucessão $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos em $\mathcal{D} \setminus \{A\}$ convergente para A, a correspondente sucessão das imagens $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para ℓ.
Nesse caso, escreve-se $\lim\limits_{X\to A} f(X) = \ell$.
Prova-se que, quando existe, ℓ é único.

Exemplo: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$, porque dada uma qualquer sucessão (x_n, y_n) de pontos de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tal que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n, y_n) = (0,0)$,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) &= \lim_{n\to+\infty} y_n \frac{x_n^2}{x_n^2+y_n^2} \\ &= 0, \text{ porque } \lim_{n\to+\infty} y_n = 0 \text{ e } \left|\frac{x_n^2}{x_n^2+y_n^2}\right| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Propriedades algébricas dos limites

Proposição:

Sejam $f, g\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A um ponto de acumulação de $\mathcal{D}$. Se $\ell_1 = \lim\limits_{X \to A} f(X)$ e $\ell_2 = \lim\limits_{X \to A} g(X)$, então

1. $\lim\limits_{X \to A} (f+g)(X) = \ell_1 + \ell_2$;
2. $\lim\limits_{X \to A} (\lambda f)(X) = \lambda \ell_1$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$;
3. $\lim\limits_{X \to A} (fg)(X) = \ell_1 \ell_2$;
4. $\lim\limits_{X \to A} \left(\dfrac{f}{g}\right)(X) = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$, caso $\ell_2 \neq 0$.

Limite segundo um conjunto

Definição:

Seja $f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathcal{R}$ um subconjunto de $\mathcal{D}$ para o qual A é ponto de acumulação. Chama-se limite de f quando X tende para A, segundo o conjunto $\mathcal{R}$, ao limite quando X tende para A da restrição de f a $\mathcal{R}$, *i.e.*,

$$\lim_{\substack{X \to A \\ X \in \mathcal{R}}} f(X) = \lim_{X \to A} f_{|\mathcal{R}}(X)$$

Exemplo:

Sendo $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x = 0\} \setminus \{(0,0)\}$,

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in \mathcal{R}}} \frac{y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y \to 0} \frac{y^2}{y^2} = 1\,.$$

Do limite calculado não se pode concluir que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2}{x^2+y^2}$ existe.

Averiguação da não existência de um limite, usando limites segundo conjuntos:

Proposição:

- Se existe algum $\mathcal{R} \subset \mathcal{D}$, nas condições da definição, tal que $\displaystyle\lim_{\substack{X \to A \\ X \in \mathcal{R}}} f(X)$ não existe, então não existe $\displaystyle\lim_{X \to A} f(X)$.
- Se existem $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \subset \mathcal{D}$, nas condições da definição, tais que $\displaystyle\lim_{\substack{X \to A \\ X \in \mathcal{R}_1}} f(X) \neq \lim_{\substack{X \to A \\ X \in \mathcal{R}_2}} f(X)$, então não existe $\displaystyle\lim_{X \to A} f(X)$.

Exemplo: Mostre que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$ não existe, verificando que os limites segundo $\mathcal{R}_m = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : y = mx\}$, $m \in \mathbb{R}$, existem, mas variam com m.

Nota: Os limites segundo retas (ou semirretas) são usualmente designados por limites direcionais.

Exemplos/Exercícios:

1. Mostre que não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$.
2. Averigue da existência de $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$.

Averiguação da existência de limite usando limites segundo conjuntos

Proposição:

Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots \mathcal{R}_k$, com $k \in \mathbb{N}$, subconjuntos de $\mathcal{D}$ tais que A é um seu ponto de acumulação e $\mathcal{D} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{R}_k$. Se $\displaystyle\lim_{\substack{X \to A \\ X \in \mathcal{R}_i}} f(X) = \ell$, para todo o $i = 1, 2, \ldots, k$, então $\displaystyle\lim_{X \to A} f(X) = \ell$.

Nota:

Os subconjuntos $\mathcal{R}_i$ são em número finito. Esta proposição, na prática, é de difícil utilização genérica. Aplica-se com êxito em algumas situações, como a seguinte.

Exercício: Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $f(x,y) = \begin{cases} -5x^2y + 1\,, & \text{se } y < 0 \\ 1 + x^2 + y^2\,, & \text{se } y \geq 0 \end{cases}$, calcule $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Duas proposições — cálculo de alguns limites

Proposição: [Infinitésimo por limitada]

Sejam $f, g \colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A um ponto de acumulação de $\mathcal{D}$.
Se $\lim\limits_{X \to A} f(X) = 0$ e se g é uma função limitada em $\mathcal{D} \cap B_r(A)$, para algum $r > 0$, então $\lim\limits_{X \to A} f(X)g(X) = 0$.

Proposição: [Mudança de variável]

Sejam $f, u \colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e g uma função real de variável real tal que $f(X) = g(u(X))$. Se $\lim\limits_{X \to A} u(X) = c$ e $\lim\limits_{z \to c} g(z) = \ell$, então

$$\lim_{X \to A} f(X) = \lim_{z \to c} g(z) = \ell$$

Exercícios:

Usando as proposições do slide anterior (escolhendo a que se adequa), calcule os seguintes limites:

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{e^{x-y}-1}{y-x}$
2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-4xy^2}{x^2+y^2}$

Continuidade

Definição:

Sejam $f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $P \in \mathcal{D}$. Se P é um ponto de acumulação de $\mathcal{D}$, f diz-se contínua em P, se $\lim\limits_{X \to P} f(X) = f(P)$.
Caso P seja ponto isolado de $\mathcal{D}$, consideramos que f é contínua em P.
Ao conjunto de pontos onde f é contínua chamamos domínio de continuidade de f.

Proposição:

Se $f, g\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são funções contínuas em $P \in \mathcal{D}$ e $\alpha\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(\mathcal{D}) \subseteq I$, é contínua em $f(P)$, então

1. $f + g$, fg e λf, $\lambda \in \mathbb{R}$, são contínuas em P.
2. $\frac{f}{g}$ é contínua em P, desde que $g(P) \neq 0$.
3. $\alpha \circ f$ é contínua em P.

Exemplos/Exercícios:

1. Determine o domínio de continuidade da função de domínio em $\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = \frac{3xy-5x^3}{y^3-xy}$.
2. Mostre que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é descontínua em $(0,0)$.

Derivada parcial em ordem a x

Seja $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a, b) \in int(\mathcal{D})$. Fixando $y = b$, fica definida uma função, g_b, real de uma variável, x, tal que

$$\begin{array}{rccl} g_b : & \{x \in \mathbb{R} \colon (x, b) \in \mathcal{D}\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & g_b(x) = f(x, b) \end{array}$$

À derivada de g_b em $x = a$, caso exista, chama-se derivada parcial de f em ordem a x em (a, b), denota-se por, $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$, *i.e.*,

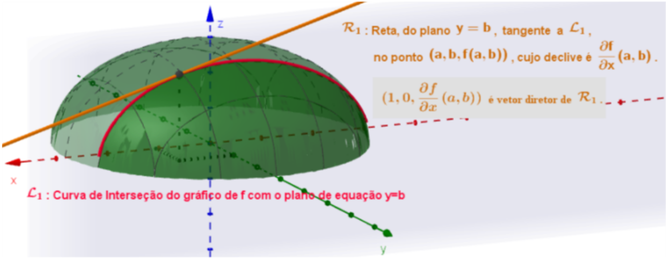
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

caso este limite exista e seja um número real[a].
Notação alternativa: $f'_x(a, b)$.

[a] Podem considera-se derivadas iguais a $+\infty$ (ou $-\infty$) mas, neste contexto, não irão ser relevantes

Considerações geométricas sobre o conceito de derivada parcial em ordem a x

1. A derivada parcial de f em ordem a x no ponto (a, b) é o declive da reta, $\mathcal{R}_1$, tangente à curva de interseção do gráfico de f com o plano $y = b$, no ponto $(a, b, f(a, b))$.
   Ilustração gráfica:



▸ applet

▸ outra applet

2. A reta $\mathcal{R}_1$ tem equações cartesianas:
$$\begin{cases} y = b \\ z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) \end{cases}$$
3. $(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a, b))$ é vetor diretor de $\mathcal{R}_1$.

Derivada parcial em ordem a y

Seja $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a, b) \in \operatorname{int}(\mathcal{D})$. Fixando $x = a$, fica definida uma função, g_a, real de uma variável, y, tal que

$$\begin{array}{rrcl} g_a : & \{y \in \mathbb{R} \colon (a, y) \in \mathcal{D}\} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & g_a(y) = f(a, y) \end{array}$$

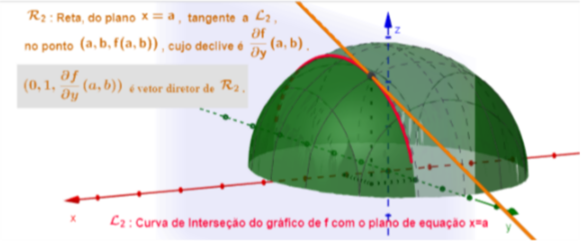
À derivada de g_a em $y = b$, caso exista, chama-se derivada parcial de f em ordem a y em (a, b), denota-se por, $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$, *i.e.*,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$$

caso este limite exista e seja um número real.
Notação alternativa: $f'_y(a, b)$.

Considerações geométricas sobre o conceito de derivada parcial em ordem a y

1. A derivada parcial de f em ordem a y no ponto (a, b) é o declive da reta, $\mathcal{R}_2$, tangente à curva de interseção do gráfico de f com o plano $x = a$, no ponto $(a, b, f(a, b))$.
   Ilustração gráfica:



applet

outra applet

2. A reta $\mathcal{R}_2$ tem equações cartesianas:

$$\begin{cases} x = a \\ z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) \end{cases}$$

3. $(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a, b))$ é vetor diretor dessa reta.

Derivação parcial: exemplos

Na prática, se a função f estiver definida numa vizinhança de um ponto por uma única expressão derivável (usando regras de derivação) em relação a uma das variáveis, por exemplo x, considerando as restantes constantes, a derivada de f em ordem a x, nessa vizinhança, é a expressão obtida dessa derivação.

Exemplos:

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = x^2 + xy + \ln(1+y^2)$. Para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, existem as derivadas parciais de f em ordem a x (a y) e
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + \frac{2y}{1+y^2}\,.$$
2. $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y,z) = \cos(xy^2) + \ln(zy^3)$. Para todo o $(x,y,z) \in \mathcal{D}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -y^2 \sin(xy^2)$,
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -2xy\sin(xy^2) + \frac{3}{y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{1}{z}.$$

Derivação parcial: exemplos

Em alguns casos, apenas a definição é utilizável. Tal como nas funções a uma variável, deve usar-se as definições para determinar as derivadas parciais num ponto P, se na vizinhança do ponto P a função não está definida por uma expressão analítica única.

Exemplos:

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.
   Mostre que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} xy, & \text{se } x \neq y \\ x^3, & \text{se } x = y \end{cases}$. Mostre que $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(3,4) = 3$ e que $\frac{\partial f}{\partial y}(2,2)$ não existe.

Derivadas parciais de ordem superior

Definições e notação:

Seja $f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas parciais em ordem a x e a y, em algum conjunto de pontos no interior de $\mathcal{D}$. As funções

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}$$

com domínio nos conjuntos de pontos onde cada uma existe, terão, ou não, derivadas em ordem a x e a y nesse conjunto. As derivadas parciais de ordem 2 de f são as funções (definidas nos pontos onde existem):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Teorema de Schwarz

Exemplo:

Seja f a função real de domínio $\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = x^3y + 5xy + \sin(y^2)$.
Verifique que, para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y + 5y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 + 5x + 2y\cos(y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6xy \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\cos(y^2) - 4y^2\sin(y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 3x^2 + 5 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 3x^2 + 5$$

Teorema de Schwarz: Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P \in \operatorname{int}(\mathcal{D})$.

Se existem $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ numa bola aberta centrada em P e se $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ é contínua em P, então existe $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P)$.

Função de classe C^k; Corolário do Teorema de Schwarz

Definição:

Sejam $f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, com $\mathcal{D}$ aberto, e $k \in \mathbb{N}_0$. Dizemos que f é de classe C^k em $\mathcal{D}$ se f possuir todas derivadas parciais até à ordem k contínuas em todo o ponto de $\mathcal{D}$.
Notação: $f \in C^k(\mathcal{D})$.

Corolário do Teorema de Schwarz:

Se $f \in C^2(\mathcal{D})$, então $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P)$, para todo o $P \in \mathcal{D}$, com $i, j = 1, 2, \ldots, n$

Derivadas Direcionais

As derivadas parciais de $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são casos particulares de derivadas chamadas derivadas direcionais, no caso segundo os vetores $U = (1, 0)$ ou $U = (0, 1)$, consoante o caso.

Definição:

Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $P \in int(\mathcal{D})$ e U um vetor unitário de $\mathbb{R}^n$. A derivada direcional de f segundo U no ponto P é o seguinte limite, caso exista e seja finito,

$$D_U f(P) = \lim_{h \to 0} \frac{f(P + hU) - f(P)}{h}$$

Interpretação geométrica (caso n=2):

applet

$D_U f(P)$, com $P = (a, b)$, dá informação sobre a variação da cota dos pontos no gráfico de f , ao passar por $(a, b, f(a, b))$, quando é colocado um ponto X no domínio da função a deslocar-se na direção e sentido de U.

Exemplo de função com todas as derivadas direcionais num ponto e descontínua nesse ponto

Exemplo:

Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Se $U = (u_1, u_2)$, com $\|U\| = 1$, então

$$D_U f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(hU) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3 u_1 u_2^2}{h^2 u_1^2 + h^4 u_2^4}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u_1 u_2^2}{u_1^2 + h^2 u_2^4}$$

logo

$$D_U f(0,0) = \begin{cases} \frac{u_2^2}{u_1}, & \text{se } u_1 \neq 0 \\ 0, & \text{se } u_1 = 0\,. \end{cases}$$

f não é contínua no ponto $(0,0)$, pois não existe limite de f nesse ponto.

Diferenciabilidade: O que será para mais do que uma variável?

Como pode constatar com o exemplo do slide anterior a existência das derivadas parciais (ou mesmo de todas as direcionais) de f num ponto P, não garante a continuidade de f em P. Recorde que para $n = 1$, a existência de derivada finita (diferenciabilidade) num ponto é garantia da continuidade nesse ponto.

Em $\mathbb{R}^n$, para $n \geq 2$, qual será a noção de função diferenciável num ponto?

Vamos responder a essa questão para $n = 2$, recordando o caso $n = 1$. Para dimensões superiores é só fazer a adaptação devida.

Caso $n = 1$: diferenciabilidade/reta tangente

Seja $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável em $a \in \operatorname{int}(\mathcal{D})$, *i.e.*, existe e é finito o seguinte limite:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

logo, tomando $\epsilon(\Delta x) = -f'(a) + \dfrac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$, obtemos

$$f(a + \Delta x) = f(a) + \Delta x\, f'(a) + \Delta x\, \epsilon(\Delta x), \text{ com } \lim_{\Delta x \to 0} \epsilon(\Delta x) = 0\,.$$

Deste modo, na vizinhança de a, f fica "bem aproximada" pela reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$, a que corresponde a chamada linearização de f em torno de a:

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Caso n=2: diferenciabilidade/plano tangente (I)

Sejam $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P = (a, b) \in \operatorname{int}(\mathcal{D})$. Considere que existem $\frac{\partial f}{\partial x}(P)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(P)$. Recorde-se que

$$U_1 = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(P)) \text{ e } U_2 = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(P))$$

são vetores tangentes às curvas de interseção do gráfico de f com $y = b$ e $x = a$, no ponto P, respetivamente.

Os vetores U_1 e U_2 são não colineares e portanto, existe o plano, $\mathcal{T}$, que passa em $(a, b, f(a, b))$ e contém U_1 e U_2. Atendendo a que, o vetor $N = (-\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), -\frac{\partial f}{\partial y}(a, b), 1)$ é ortogonal a ambos,

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

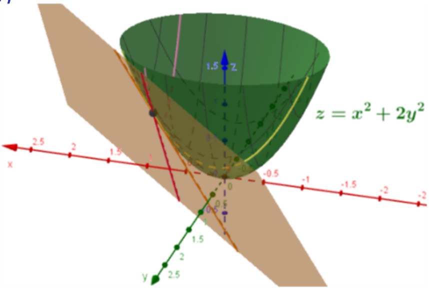
é uma equação cartesiana do plano $\mathcal{T}$.

Caso n=2: diferenciabilidade/plano tangente (II)

Nas funções diferenciáveis, ver definição no slide seguinte, f fica "bem aproximada" em redor de (a, b) pelos valores assumidos no plano $\mathcal{T}$, ou seja, pela sua linearização em torno de (a, b):

$$L(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) .$$

Ilustração Gráfica: (plano tangente)



applet

Função Diferenciável (caso $n = 2$)

Definição:

Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P = (a, b) \in \mathrm{int}(\mathcal{D})$ tais que existem $\frac{\partial f}{\partial x}(P)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(P)$. Sejam Δx e Δy, reais, tais que $(a + \Delta x, b + \Delta y) \in B_r(P) \subset \mathcal{D}$, para algum $r > 0$.
Se existem funções $\epsilon_1(\Delta x, \Delta y)$ e $\epsilon_2(\Delta x, \Delta y)$, com $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \epsilon_1(\Delta x, \Delta y) = \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \epsilon_2(\Delta x, \Delta y) = 0$, tais que

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y,$$

para quaisquer Δx e Δy nas condições referidas, então
f diz-se diferenciável em (a, b).

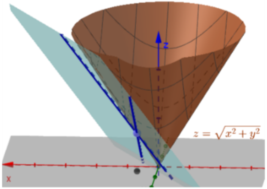
Dois exemplos (abordagem gráfica) [1]:

1. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

não é diferenciável em $(0,0)$, mas é diferenciável em qualquer outro ponto.

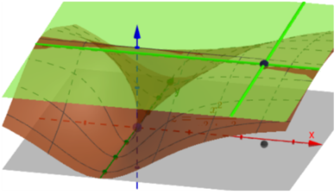
applet



2. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

não é diferenciável em $(0,0)$,
mas é diferenciável em qualquer outro ponto.



[1] Ver à frente, as justificações das afirmações.

Condições suficientes de diferenciabilidade

Teorema:

Sejam $f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P \in \operatorname{int}(\mathcal{D})$. Se existem $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ numa bola aberta centrada em P e se pelo menos uma dessas derivadas é contínua em P, então f é diferenciável em P.

Corolário:

Sejam $f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P \in \operatorname{int}(\mathcal{D})$. Se f é de classe C^1 numa bola aberta centrada em P, então f é diferenciável em qualquer ponto dessa bola (incluindo P).

Exercício:

Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Use o Teorema anterior (ou o Corolário), para concluir que f é diferenciável em (a,b), se $(a,b) \neq (0,0)$.

Condição necessária de diferenciabilidade

Teorema:

Se $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $P \in \text{ int } (\mathcal{D})$, então f é contínua em P.

Nota:

O Teorema anterior tem a seguinte formulação equivalente:
Se $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ não é contínua em em $P \in \text{ int } (\mathcal{D})$, então f não é diferenciável em P.

Exercício:

Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.
Use o Teorema anterior, para concluir que f não é diferenciável em $(0,0)$.

Plano Tangente e Vetor Normal ao Gráfico de uma Função

Definições: Seja $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável em $(a, b) \in \text{int}(\mathcal{D})$.

O plano de equação

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

é o plano tangente ao gráfico[a] de f no ponto $(a, b, f(a, b))$. (ver slide 36)

Dizemos que o vetor

$$N = (-\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), -\frac{\partial f}{\partial y}(a, b), 1)$$

é um vetor ortogonal ao gráfico de f, no ponto $(a, b, f(a, b))$.

A reta com vetor diretor N que passa em $(a, b, f(a, b))$ é chamada de reta ortogonal (ou normal) à superfície $z = f(x, y)$ no ponto $(a, b, f(a, b))$.

[a] superfície de equação $z = f(x, y)$

Exemplo: Plano tangente e reta normal

O plano tangente ao gráfico de f, com $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$, no ponto $P = (1, -1, 2)$ tem equação

$$z - 2 = -2(x - 1) + 2(y + 1), \text{ ou seja, } -2x + 2y - z = -6.$$

O vetor $N = (-2, 2, -1)$ é vetor ortogonal (ou normal) à superfície de equação $z = 4 - x^2 - y^2$ no ponto P.
A reta normal ao gráfico de f no ponto P tem equação:

$$(x, y, z) = (1, -1, 2) + \lambda(-2, 2, -1), \lambda \in \mathbb{R}$$

Derivadas Direcionais e Gradiente

Definição:

Seja $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ com derivadas parciais de 1.ª ordem em $P \in \text{int}(\mathcal{D})$. Ao vetor

$$\nabla f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \frac{\partial f}{\partial x_2}(P), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \right)$$

chamamos gradiente de f em P.

Teorema:

Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ função diferenciável em $\mathcal{D}$, $P \in \text{int}(\mathcal{D})$ e $U \in \mathbb{R}^n$ um vetor unitário. Existe a derivada direcional de f segundo U no ponto P e

$$D_U f(P) = \nabla f(P) \cdot U \,,$$

onde $\cdot$ representa o produto interno (usual) de vetores em $\mathbb{R}^n$.

Interpretações Geométricas do Gradiente (caso $n = 2$)

applet

- Sendo $f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ função diferenciável em $\mathcal{D}$, $P \in \operatorname{int}(\mathcal{D})$, e $U \in \mathbb{R}^2$ um vetor unitário.

  $$D_U f(P) = \nabla f(P) \cdot U = \|\nabla f(P)\| \cos\theta, \text{ onde } \theta = \measuredangle(\nabla f(P), U)$$

  Assim, a derivada direcional máxima em P ocorre na direção e sentido correspondente a $\theta = 0$, ou seja, na direção e sentido do vetor gradiente de f em P.

  O vetor $\nabla f(P)$ fornece a direção e sentido na qual f, em redor de P, apresenta maior crescimento.

- Nas condições anteriores, se $P = (a, b)$ e $f(a, b) = k$, o vetor gradiente de f em (a, b) é ortogonal à reta tangente à curva de nível $\mathcal{C}_k$, que passa em (a, b). Isto é,

  $\nabla f(a, b)$ é ortogonal à curva de nível de f que passa em (a, b).

Interpretação geométrica do gradiente (caso $n = 3$):

Plano tangente a uma superfície de nível

Seja $h \colon \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ função diferenciável em $\mathcal{B}$,
$\mathcal{S}_k = \{(x, y, z) \in \mathcal{B} \colon h(x, y, z) = k\}$ uma sua superfície de nível e $P \in \mathcal{S}_k$.

O vetor gradiente de h em P é ortogonal a $\mathcal{S}_k$ em P.

Assim, se $\nabla h(P) \neq 0$, então a equação do plano tangente a $\mathcal{S}_k$ no ponto P é dada por

$$\nabla h(P) \cdot \overrightarrow{PX} = 0 \,,$$

i.e., o plano tangente à superfície de equação $h(x, y, z) = k$ em $P = (a, b, c)$ tem por equação:

$$(x - a)\frac{\partial h}{\partial x}(a, b, c) + (y - b)\frac{\partial h}{\partial y}(a, b, c) + (z - c)\frac{\partial h}{\partial z}(a, b, c) = 0 \quad .$$

Exemplo de determinação de plano tangente a uma superfície de nível

Consideremos o elipsoide de equação $4x^2 + 9y^2 + z^2 = 49$ e $P = (1, -2, 3)$ um ponto desse elipsoide. Pretendemos determinar uma equação do plano tangente ao elipsoide no ponto P.
O elipsoide pode ser encarado como a superfície de nível 49 da função h de domínio $\mathbb{R}^3$ tal que $h(x, y, z) = 4x^2 + 9y^2 + z^2$. Note que $h \in C^1(\mathbb{R}^3)$, uma vez que, para todo o $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y, z) = 8x \,, \frac{\partial h}{\partial y}(x, y, z) = 18y \text{ e } \frac{\partial h}{\partial z}(x, y, z) = 2z.$$

Assim, $\nabla(P) = (8, -36, 6)$ e portanto uma equação do plano tangente ao elipsoide em P é

$$8(x - 1) - 36(y + 2) + 6(z - 3) = 0 \,.$$