Exercícios de MD F. 4 - Estratégias de Demonstração

1. Mostre, por prova direta, que se n é par então $n^3 - 3n - 1$ é ímpar.

2. Prove, por contraposição, que se n^2 é par então n é par.

3. Mostre, por contraposição, que se n é um número inteiro positivo tal que $n! > n + 1$, então $n > 2$.

4. Prove, por redução ao absurdo, que 200 não é um quadrado perfeito ($n \in \mathbb{N}$ é um quadrado perfeito se $n = p^2$ para algum $p \in \mathbb{N}$.)

5. Mostre por contraposição (ou por redução ao absurdo) que escolhendo quaisquer 22 dias de um ano, pelo menos 4 são o mesmo dia da semana.

6. Mostre, por redução ao absurdo, que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

7. Mostre que

   (a) $\dfrac{1}{1 \times 3} + \dfrac{1}{3 \times 5} + \dfrac{1}{5 \times 7} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}, \quad n \geq 1.$

   (b) $n^2 - 1$ é divisivel por 8 para todo o número ímpar n.

   (c) $4^n + 15n - 1$ é divisível por 9, para $n \geq 1$.

   (d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} r^i = \frac{(r^n - 1)r}{r - 1}$, para todos os inteiros $n \geq 1$ e para todos os números reais $r \neq 1$.

   (e) $H_{2^n} \geq 1 + \dfrac{n}{2}$, para $n \geq 0$, onde $H_j = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{j}$, para $j \in \mathbb{N}$.

8. Recorrendo ao método de indução, prove que a sucessão de números triangulares cuja definição por recorrência é $t_1 = 1$ e $t_n = t_{n-1} + n$, para $n \geq 2$, é dada por
$$t_n = \frac{n^2 + n}{2}, \ \ n \geq 1 \ .$$

9. Descubra e mostre por indução uma fórmula para $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$, para $n \in \mathbb{N}$.

10. Considere a sucessão definida por $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ e $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, $n \geq 2$. Mostre que, para $n \in \mathbb{N}_0$, a_n não é múltiplo de 2.

11. Mostre que os termos de uma sucessão que satisfaça $a_1 = a_2 = 1$ e $a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2}$ para $n \geq 3$, são dados por
$$a_n = \frac{5^{n-1} + 2(-1)^{n-1}}{3} \ .$$

12. Considere a seguinte função definida para os números naturais
$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ 4f(\frac{n}{2}) & \text{se } n \text{ for par e } n > 0 \\ f(n-1) + 2n - 1 & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases}$$

    Mostre que $f(n) = n^2$ para todo $n \geq 0$.

13. Prove que qualquer inteiro maior do que 1 é divisível por um número primo.

14. Uma linguagem formal usada na Álgebra tem os seguintes símbolos no seu *alfabeto*:

$$x \qquad y \qquad z \qquad (\qquad) \qquad +$$

    As *palavras* desta linguagem são *strings* de símbolos formadas de acordo com as seguintes regras:

    1. x, y e z são *palavras*.
    2. Se A e B são *palavras*, então $(A)(B)$ é uma *palavra*.
    3. Se A e B são *palavras*, então $(A)+(B)$ é uma *palavra*.

    Por exemplo, $((x)(z))+(z)$ é uma *palavra* mas, $(x)+z$ não é uma *palavra* desta linguagem. Mostre, por indução no comprimento das palavras (isto é, no número de símbolos) que qualquer *palavra* desta linguagem tem o mesmo número de símbolos (e).

15. A familia Ferreira tem 13 filhos, para além de dois progenitores. Recorrendo ao princípio da gaiola dos pombos responda às seguintes questões:

    (a) Quantas pessoas desta família pode garantir que:

        i. Nasceram no mesmo mês?

        ii. Nasceram no mesmo dia da semana?

    (b) No próximo sábado, os Ferreira vão dar uma festa para a qual os filhos podem convidar os seus amigos mais próximos. Quantos amigos vão ser convidados por forma a garantir que pelo menos 3 dos convidados são amigos do mesmo filho dos Ferreira?

16. Mostre que num conjunto de cinco números inteiros positivos (arbitrários), existem pelo menos dois com o mesmo valor para o resto da divisão por 4.

17. Mostre que escolhendo cinco números inteiros (distintos) entre 1 e 8, dois deles têm soma igual a 9.

18. Mostre que dados 11 números no intervalo $]0,1[$, haverá pelo menos dois deles cuja diferença é menor que 0.1.

19. Mostre que num grupo de 20 pessoas escolhidas ao acaso existem pelo menos 2 pessoas que têm o mesmo número de amigos dentro do grupo. Note que duas pessoas são consideradas amigas se houver uma relação de amizade recíproca estabelecida entre elas.

20. Considere que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são números inteiros positivos.

    (a) Mostre que se $p_1 + p_2 + \cdots + p_n - n + 1$ objectos são colocados em n caixas, então existe um inteiro i entre 1 e n tal que a i-ésima caixa contém pelo menos p_i objectos.

    (b) Fazendo $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = r \in \mathbb{N}$ o que se pode afirmar?

21. Durante o mês de Janeiro, o João bebeu 42 cafés. Dado que o João bebe pelo menos um café por dia, mostre que houve um número de dias consecutivos em que o João bebeu exatamente 17 cafés.

Soluções:

1. Substituir n por $2k$, $k \in \mathbb{N}$

4. Se 200 é um quadrado perfeito então $200 = n^2$, com $2 \leq n \leq 14 = \lfloor\sqrt{200}\rfloor$, o que é uma contradição porque $n^2 < 200$, para $2 \leq n \leq 14$.

7. (b) Substituir n por $2k-1$, $k \in \mathbb{N}$). Para $k+1$ vem $(2(k+1)-1)^2 - 1 = ((2k-1)+2)^2 - 1 = (2k-1)^2 + 4 + 4(2k-1) - 1 = (2k-1)^2 + 8k - 1 = (2k-1)^2 - 1 + 8k$, onde $(2k-1)^2 - 1$ é um múltiplo de 8, pela H.Ind.

7. (c) $4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 4(4^n + 15n - 1) + 9(-5n + 2)$.

7. (e) $H_{2^0} = 1 = 1 + \frac{0}{2}$.
Suponhamos que $H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$. Então

$$\begin{aligned}
H_{2^{n+1}} &= H_{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^n+2^n} \\
&\geq 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^n+2^n} \\
&\geq 1 + \frac{n}{2} + \frac{2^n}{2^n+2^n} \\
&= 1 + \frac{n}{2} + \frac{2^n}{2^{n+1}} \\
&= 1 + \frac{n+1}{2}.
\end{aligned}$$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$.

10. H.Ind.: a_k não é múltiplo de 2, para $0 \leq k \leq n$. Então $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} = 2(2r+1) - (2s+1) = 2(2r - s + 1) - 1$ e a_{n+1} não é múltiplo de 2.

13. Suponha-se que $k \geq 2$ é divisível por um número primo e consideremos $k+1$. Ou $k+1$ é primo ou $k+1$ não é primo. No último caso, $k+1 = a\,b$, onde $2 \leq a, b \leq k$, com $a = p_a q_a$, $b = p_b q_b$ e p_a e p_b são números primos. Consequentemente, $k+1 = p_a q_a p_b q_b$ é divisível por um número primo.

14. Uma palavra de comprimento 1 é x, y ou z logo tem zero símbolos (e zero símbolos). Suponha-se que o resultado é verdadeiro para palavras de comprimento inferior a n. Uma palavra de comprimento n é da forma $(A)(B)$ ou $(A) + (B)$, onde A e B são palavras de comprimento inferior a n. Logo, pela hipótese de indução, A e B têm o mesmo número de símbolos (e de símbolos). Consequentemente, $(A)(B)$ e $(A) + (B)$ têm o mesmo número de símbolos (e).

15. (a) (i) 2; (ii) 3.

15. (b) $2 \times 13 + 1 = 27$

16. **Obs:** Tenha em conta que existem quatro possibilidades para o resto da divisão por 4.

17. 1+8=2+7=3+6=4+5=9. Escolhendo cinco números entre 1 e 8 vamos obter pelo menos uma destas quatro somas.

18. **Obs:** Considerar a partição do intervalo $]0,1[$ nos 10 subintervalos]0,0.1],]0.1, 0.2],...,]0.9,1[.

20. (b) Pela alínea anterior podemos afirmar que pelo menos uma das caixas contém r ou mais objetos.

21. Seja a_i o número de cafés que bebeu até ao dia i, para $i = 1, \cdots, 31$. Então $1 \leq a_1 < \cdots < a_{31} = 42$, ou seja, trata-se de uma sequência crescente. Considere-se a sequência (igualmente crescente) $18 \leq a_1 + 17 < \cdots < a_{31} + 17 = 59$. Juntando as duas sequências temos 62 números inteiros positivos entre 1 e 59. Logo, de entre estes números existem pelo menos dois que são iguais e cada um pertence a uma sequência distinta (uma vez que as duas sequências são crescentes). Logo, existem dois índices $1 \leq i < j \leq 31$ tais que $a_j = a_i + 17$. Assim, vem que $a_j - a_i = 17$, ou seja, entre os dias $i + 1$ e j o João bebeu 17 cafés.