UNIVERSIDADE DE AVEIRO

Departamento de Matemática

Exame Final de Matemática Discreta (2015/2016) — 20 de junho de 2016

Justifique adequadamente cada uma das suas respostas.

(Duração: 2 horas e 30 minutos)

1- Sendo $\mathcal{S}$ uma partição do conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ com três subconjuntos, cada um deles contendo, no máximo, três elementos do conjunto original X, defina a relação binária $\mathcal{R}$ em X do seguinte modo:

$$x\mathcal{R}y \text{ se e só se existe um conjunto } S \in \mathcal{S} \text{ tal que } x, y \in S.$$

(1) **1.1** Escolha uma partição $\mathcal{S}$ de X nas condições do enunciado e, de acordo com a partição escolhida, explicite $\mathcal{R}$, indicando todos os seus elementos.

(1) **1.2** Verifique se $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência.

2- Faça as seguintes demonstrações com recurso ao método, respectivamente, referido.

(1,5) **2.1** Mostre, por indução, que a igualdade

$$2 \times 6 \times 10 \times 14 \times \cdots \times (4n - 2) = \frac{(2n)!}{n!}$$

se verifica para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

(1,5) **2.2** Utilizando o princípio da gaiola dos pombos, mostre que num conjunto de 15 inteiros positivos arbitrários existem dois cuja diferença é múltipla de 14.

*(3)***3-** Utilize o algoritmo de unificação para averiguar se o conjunto de fórmulas bem formadas

$$\{C(x, SenhorAneis, y), C(Maria, z, f(t)), C(w, SenhorAneis, f(MesaAzul))\}$$

é unificável e, no caso afirmativo, determine o unificador mais geral.

*(3)***4-** Na festa de Natal de uma empresa foram distribuídos 10 brinquedos diferentes e 20 rebuçados iguais por 7 crianças. Sabendo que todas as crianças receberam pelo menos um rebuçado, determine de quantas maneiras é possível fazer esta distribuição.

*(2)***5-** Sabendo que grupo de 6 amigos reservou 3 quartos num hotel em Aveiro e assumindo que nenhum quarto fica vazio, determine o polinómio gerador do número de possibilidades de distribuir os 6 amigos pelos 3 quartos.

6- Determine uma fórmula não recursiva para os termos da sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, em cada um dos seguintes casos.

(2) **6.1** A função geradora desta sucessão pode exprimir-se por $f(x) = \frac{1}{(1-2x)(1-3x)}$.

(2) **6.2** Esta sucessão verifica a relação de recorrência

$$a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = (-2)^n,$$

com condições iniciais $a_0 = 1$, $a_1 = -1$.

*(3)***7-** Sendo G o grafo simples, não orientado, com conjunto de vértices $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$, definido pela matriz de custos

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \infty & 4 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 26 & \infty & \infty & 12 \\ 4 & 26 & 0 & 3 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 3 & 0 & 4 & 11 \\ \infty & \infty & \infty & 4 & 0 & 6 \\ \infty & 12 & \infty & 11 & 6 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

determine o caminho de custo mínimo entre os vértices a e b com recurso ao algoritmo de Dijkstra.