

UNIVERSIDADE DE AVEIRO

Departamento de Matemática

Matemática Discreta

Exame Final de Matemática Discreta

24 de junho de 2019

Justifique adequadamente cada uma das suas respostas.

(Duração: 2,5 horas)

1- Dados dois conjuntos A e C , demonstre as seguintes proposições:

- (1) **1.1** $C \subseteq A$ se e somente se $C \cup A = A$.
- (2) **1.2** $C \subseteq A$ se e somente se $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ para todo o conjunto B .

2- Considerando a permutação

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 7 & 2 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix},$$

responda às seguintes questões.

- (1) **2.1** Determine uma fatorização de σ em ciclos disjuntos.
- (1) **2.2** Determine $\text{sgn}(\sigma)$.

(3)**3-** De acordo com o plano de estudos de um curso universitário, os alunos de um dado ano desse curso, num semestre, devem escolher 5 disciplinas de um conjunto de 8. Tendo isto em conta, determine o número mínimo de alunos que o curso deve ter para se garantir que pelo menos 7 alunos escolhem as mesmas 5 disciplinas.

(3)**4-** Com recurso à fórmula binomial, calcule o valor da expressão a seguir indicada,

$$\sum_{k=0}^{27} \binom{27}{k} (-3)^{2k+1}.$$

5- Sabendo que uma equação de recorrência linear homogénea tem como raízes características 1 com multiplicidade um e 2 com multiplicidade três, responda às seguintes questões.

- (1) **5.1** Determine esta equação de recorrência.
- (2) **5.2** Determine a solução geral desta equação de recorrência.

(3)**6-** Sabendo que a função geradora da sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ é $f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}$, uma fórmula fechada para $(a_n)_n$.

7- Considere uma árvore T com o código de Prüfer $(2, 3, 7, 5, 5, 5)$ e responda às seguintes questões.

- (1) **7.1** Determine o número de vértices de T .
- (1) **7.2** Determine os graus de cada um dos vértices de T .
- (1) **7.3** Represente graficamente a árvore T .