Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I - Agrupamento IV — 1ª Prova de Avaliação Discreta

14 de novembro de 2018

Duração: **2h**

– Justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

1. Seja k um parâmetro real e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)\operatorname{sen}(x+1) & se \quad x < 1 \\ k & se \quad x = 1 \\ \dfrac{x-1}{e^{\operatorname{arctg}(x-1)} - 1} & se \quad x > 1. \end{cases}$$

[12pts] (a) Considere $k = 0$. Determine as derivadas laterais de f no ponto $x = 1$.

[18pts] (b) Existe algum valor de k para o qual a função f é contínua? Justifique convenientemente.

[10pts] (c) Mostre que existe $c \in]-1, 0[$ tal que $f'(c) = -\operatorname{sen}(1)$.

[10pts] 2. Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + x^2)^{\frac{1}{x^3}}$.

[15pts] 3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função que admite derivadas contínuas até à ordem dois e tal que $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$. Dado $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, defina-se $g(x) = e^{\alpha x} f(x)$. Qual o número mínimo de zeros distintos que a função g'' pode ter em $]a, b[$? Justifique convenientemente.

4. Considere a função h definida por $h(x) = \arccos(e^{x-1}) + \pi$.

[06pts] (a) Determine o domínio de h, D_h.

[14pts] (b) Estude h quanto à monotonia e existência de extremos locais e globais.

[15pts] (c) Justifique que h é invertível e caracterize a função inversa de h, indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica que a define.

[20pts] 5. Determine f tal que $f'(x) = \operatorname{arctg} x$ e $f(0) = f'(1)$.

6. Determine os seguintes integrais (simplificando o mais possível o resultado):

[13pts] (a) $\displaystyle\int \left(3x^4 + \frac{1}{2x} + \cos x \sqrt{\operatorname{sen} x}\right) dx$

[22pts] (b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4 + x^2}}\, dx$ (Sugestão: utilize a mudança de variável dada por $x = 2\operatorname{tg} t$, indicando o domínio adequado a esta substituição). Nota: $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$, $C \in \mathbb{R}$.

[30pts] (c) $\displaystyle\int \frac{x^5 - x + 1}{x^4 - 1}\, dx$

[15pts] 7. Seja f uma função real de variável real que admite segunda derivada contínua em $\mathbb{R}$. Seja $g(x) = \frac{x^2}{2} f''(x)$ e G uma primitiva de g. Mostre que

$$\int f(x)dx = xf(x) - \frac{x^2}{2} f'(x) + G(x) + C,\, C \in \mathbb{R}.$$

Formulário

$(f(x)^p)' = p\,(f(x))^{p-1}\, f'(x)$, com $p \in \mathbb{R}$	
$\left(a^{f(x)}\right)' = f'(x)a^{f(x)}\ln(a)$, com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$(\log_a(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)\ln(a)}$, com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
$(\mathrm{sen}(f(x)))' = f'(x)\cos(f(x))$	$(\cos(f(x)))' = -f'(x)\,\mathrm{sen}(f(x))$
$(\mathrm{tg}(f(x)))' = f'(x)\sec^2(f(x))$	$(\mathrm{cotg}(f(x)))' = -f'(x)\,\mathrm{cosec}^2(f(x))$
$(\sec(f(x)))' = f'(x)\sec(f(x))\,\mathrm{tg}(f(x))$	$(\mathrm{cosec}(f(x)))' = -f'(x)\,\mathrm{cosec}(f(x))\,\mathrm{cotg}(f(x))$
$(\mathrm{arcsen}(f(x)))' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$	$(\arccos(f(x)))' = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$
$(\mathrm{arctg}(f(x)))' = \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$	$(\mathrm{arccotg}(f(x))' = -\frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$

$1+\mathrm{tg}^2(x) = \sec^2(x)$, para $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z}$	$1+\mathrm{cotg}^2(x) = \mathrm{cosec}^2(x)$, para $x \neq k\pi,\, k \in \mathbb{Z}$
$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \mathrm{sen}\, x\, \mathrm{sen}\, y$	$\mathrm{sen}(x \pm y) = \mathrm{sen}\, x \cos y \pm \cos x\, \mathrm{sen}\, y$
$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$	$\mathrm{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$