Universidade de Aveiro - Departamento de Matemática

Matemática Discreta 2016/2017 - UC 47166 (1^o Ano/2^o Sem)

Teste T1 (Avaliação Discreta) - 19/04/2017 **Duração: 2h**

1. Supondo p e q proposições atómicas, considere a fórmula bem formada:

$$(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow q)$$

Sem recorrer a tabelas de verdade e indicando todas as leis da lógica que usar na sua resposta, averigue se a fórmula dada é uma tautologia, é inconsistente ou nem uma coisa nem outra.

2. Seja A o conjunto dos alunos da Universidade de Aveiro (UA).

   (a) Considere $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ a relação binária definida por:

   $$\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A : x \text{ e } y \text{ são alunos da UA que estão inscritos numa mesma disciplina}\}.$$

   Verifique se a relação $\mathcal{R}$ é reflexiva, simétrica, antissimétrica e transitiva.

   (b) Dê um exemplo de uma relação de equivalência definida em A. Justifique.

3. Admita que o universo do discurso é o conjunto dos animais e considere os seguintes predicados:

   - gato$(x) \equiv$ "x é um gato";
   - cão$(x) \equiv$ "x é um cão";
   - gosta$(x, y) \equiv$ "x gosta de y".

   (a) Usando os predicados acima definidos, represente em lógica de primeira ordem cada uma das seguintes afirmações:

   F1. Os gatos não gostam de cães.

   F2. Existe um gato que gosta do Pi.

   F3. O Pi não é um cão.

   (b) Aplique o princípio da resolução para mostrar que F3 é consequência lógica de F1 e F2.

4. Considere a sucessão de números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, definida pela fórmula recursiva

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 2}, \quad \text{para} \quad n \geq 1 \ , \quad \text{com} \quad a_1 = 1.$$

Calcule a_2, a_3, a_4 e, usando indução matemática, prove que o termo geral da referida sucessão é dado por $a_n = \dfrac{1}{2^n - 1}$, com $n \geq 1$.

5. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $P_4(A)$ o conjunto dos subconjuntos de A com 4 elementos.

   (a) Determine a cardinalidade do conjunto $P_4(A)$.

   (b) Mostre que escolhendo arbitrariamente 7 conjuntos de $P_4(A)$, pelo menos dois deles têm o mesmo maior elemento.

6. Considere o desenvolvimento de $(2x + y - z)^n$ com $x, y, z \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Usando a fórmula multinomial calcule o coeficiente do termo xyz^{n-2} no desenvolvimento dado.

   (b) Quantos termos existem no referido desenvolvimento? Justifique devidamente.

Cotações:

1.	2.(a)	2.(b)	3.(a)	3.(b)	4.	5.(a)	5.(b)	6.(a)	6.(b)
1.5	2.5	1.5	2.0	2.5	2.5	1.5	2.0	2.0	2.0