Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I - Agrupamento IV — Exame Final - Época Normal de Exames

10 de janeiro de 2018

Duração: **2h30m**

N.° Mec.: ____________ Nome: ____

(Declaro que desisto: __________________________________) N.° folhas suplementares: _____

Questão [Cotação]	1 [15pts]	2a [10pts]	2b [10pts]	3a [15pts]	3b [20pts]	4a [15pts]	4b [10pts]	5 [20pts]	6 [15pts]	7a [10pts]	7b [10pts]	8 [15pts]	9a [15pts]	9b [20pts]

Classificação (valores)

– Justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

[15pts] 1. Seja $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ a função real de variável real definida por

$$f(x)=e^{\frac{1}{x}}+\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Estude f quanto à monotonia e existência de extremos locais.

Continua na folha suplementar N°

2. Seja g a função real de variável real definida por $g(x) = \dfrac{\operatorname{arcsen}(x) - \frac{\pi}{2}}{x^2}$.

[10pts] (a) Determine o domínio de g e indique, se existirem, os zeros de g.

Continua na folha suplementar Nº

[10pts] (b) Mostre que existe $c \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ tal que $g'(c) = \dfrac{8\pi}{3}$. (Nota: $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$)

Continua na folha suplementar Nº

N° Mec: ______________ **Nome:** ______________________________

3. Determine os seguintes integrais (simplificando o mais possível o resultado):

[15pts] (a) $\displaystyle\int x\ln(1+x^2)\,dx$

Continua na folha suplementar Nº

[20pts] (b) $\displaystyle\int \frac{x+12}{x(x^2+4)}\,dx$

Continua na folha suplementar Nº

4. Seja $F : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ a função definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(4-t^2)}}\, dt.$

[15pts] (a) Justifique que F é diferenciável e mostre que $F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-\operatorname{sen}^2 x}}$, $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Continua na folha suplementar Nº

[10pts] (b) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{\operatorname{sen} x \cos x}$.

Continua na folha suplementar Nº

[20pts] 5. Calcule a área da região do plano delimitada pelo gráfico da função f definida por

$$f(x) = \frac{2 \operatorname{arctg} x}{1 + x^2}$$

e pelas retas de equações $y = 0$, $x = -1$ e $x = 1$.

Continua na folha suplementar Nº

[15pts] 6. Mostre, sem calcular os integrais de Riemann, que $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{1 - x^2}{\operatorname{arcsen} x}\, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{x}\, dx.$

(Nota: $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$)

Continua na folha suplementar Nº

7.

[10pts] (a) Mostre que o integral impróprio $\int_1^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$ é convergente e indique o seu valor.

Continua na folha suplementar Nº

[10pts] (b) Estude a natureza do integral impróprio $\int_1^{+\infty} xe^{-x^2}\cos^2(x)\,dx$ sem recorrer à definição.

Continua na folha suplementar Nº

[15pts] 8. Estude a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{n!}\right)$ e, em caso de convergência, indique a sua soma.

Continua na folha suplementar Nº

9. Verifique se as séries seguintes são convergentes e, em caso de convergência, indique se a convergência é absoluta ou simples:

[15pts] (a) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-3)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Continua na folha suplementar Nº

[20pts] (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n+2)}$.

Continua na folha suplementar Nº

Formulário

$(f(x)^p)' = p\ (f(x))^{p-1}\ f'(x)$, com $p \in \mathbb{R}$	
$\left(a^{f(x)}\right)' = f'(x)a^{f(x)} \ln(a)$, com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$(\log_a(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)\ln(a)}$, com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
$(\mathrm{sen}(f(x)))' = f'(x)\cos(f(x))$	$(\cos(f(x)))' = -f'(x)\,\mathrm{sen}(f(x))$
$(\mathrm{tg}(f(x)))' = f'(x)\sec^2(f(x))$	$(\mathrm{cotg}(f(x)))' = -f'(x)\,\mathrm{cosec}^2(f(x))$
$(\sec(f(x)))' = f'(x)\sec(f(x))\,\mathrm{tg}(f(x))$	$(\mathrm{cosec}(f(x)))' = -f'(x)\,\mathrm{cosec}(f(x))\,\mathrm{cotg}(f(x))$
$(\mathrm{arcsen}(f(x)))' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$	$(\arccos(f(x)))' = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$
$(\mathrm{arctg}(f(x)))' = \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$	$(\mathrm{arccotg}(f(x))' = -\frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$

$1+\mathrm{tg}^2(x) = \sec^2(x)$, para $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	$1+\mathrm{cotg}^2(x) = \mathrm{cosec}^2(x)$, para $x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \mathrm{sen}\, x\, \mathrm{sen}\, y$	$\mathrm{sen}(x \pm y) = \mathrm{sen}\, x \cos y \pm \cos x\, \mathrm{sen}\, y$
$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$	$\mathrm{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$