Universidade de Aveiro - Departamento de Matemática

Matemática Discreta 2017/2018 - UC 47166 (1^o Ano/2^o Sem)

Exame Final - 15/06/2018 **Duração: 2h 30m**

1. Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $\sim$ a relação binária definida no conjunto das partes de A, $\mathcal{P}(A)$, tal que $X \sim Y$ se e só se $|X| = |Y|$.
   (a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência.
   (b) Determine o conjunto quociente $\mathcal{P}(A)/\sim$ e indique a sua cardinalidade. Justifique.

2. Perante um tribunal compareceram A, B e C, acusados de roubo, conhecendo-se os seguintes factos:

   F1. Se A não é culpado, o culpado é B ou C.

   F2. Se A não é culpado, então C não é culpado.

   F3. Se B é culpado, então A é culpado.

   Usando a lógica proposicional investigue se pode concluir que A é culpado. Justifique.

3. Prove, por indução matemática, que: $2 + 6 + 12 + \cdots + \left(n^2 - n\right) = \dfrac{n\left(n^2-1\right)}{3}$, com $n \geq 2$.

4. Determine o coeficiente do termo $x^2y^2z^3$ no desenvolvimento de $\left(2x - y + \dfrac{z^3}{x}\right)^6$. Justifique.

5. A matriz $\mathcal{W}$ contém os custos de instalação (em milhares de euros) de uma rede de fibra ótica entre um conjunto de localizações $\{A, B, C, D, E, F, G\}$:

$$\mathcal{W} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 10 & \infty & \infty & \infty & \infty & 20 \\ 10 & 0 & 50 & \infty & 60 & 20 & \infty \\ \infty & 50 & 0 & 50 & 50 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 50 & 0 & 40 & \infty & \infty \\ \infty & 60 & 50 & 40 & 0 & 10 & \infty \\ \infty & 20 & \infty & \infty & 10 & 0 & 30 \\ 20 & \infty & \infty & \infty & \infty & 30 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

   (a) Desenhe o grafo $\mathcal{G}$ que tem como matriz de custos $\mathcal{W}$ e recorra ao algoritmo de Dijkstra para determinar o caminho de custo mínimo entre as localizações A e D, indicando o respetivo caminho e o custo do mesmo.
   (b) Seja $\mathcal{H}$ o subgrafo de $\mathcal{G}$ induzido pelo subconjunto de vértices $\{B, C, D, E, F\}$. Aplicando uma fórmula recursiva adequada determine o número de árvores abrangentes de $\mathcal{H}$. Justifique.

6. O número de arestas e_n do grafo completo K_n, com $n \in \mathbb{N}$, satisfaz a seguinte relação de recorrência

$$e_n = e_{n-1} + n - 1, \quad \text{com} \quad n \geq 2 \quad \text{e} \quad e_1 = 0.$$

   Determine uma fórmula fechada para e_n, $n \in \mathbb{N}$, resolvendo a relação de recorrência dada.

7. Seja a_n o número de sequências ternárias de comprimento n, $n \in \mathbb{N}$, ou seja, sequências da forma $d_1\, d_2\, \ldots\, d_n$, com $d_i \in \{0, 1, 2\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, para as quais as ocorrências do digíto 0 se verificam sempre antes das do digíto 2. Por exemplo, para $n = 3$, as sequências 000, 002, 021, 222, são válidas, enquanto 200, 201, 202, 220, 210, 020 e 120 não são válidas. Obtenha, justificando, uma relação de recorrência para a_n, indicando também as respetivas condições iniciais.

Cotações:

1.(a)	1.(b)	2.	3.	4.	5.(a)	5.(b)	6.	7.
1.5	1.5	3.0	2.5	2.0	3.0	2.0	2.5	2.0