

Mecânica e Campo Eletromagnético

2019/2020 – parte 6

Luiz Pereira

luiz@ua.pt



Tópicos

- **Sistemas oscilatórios**
 - **Movimento harmónico simples (M.H.S.)**

Se a força que atua sobre um corpo:

- é proporcional ao deslocamento em relação à posição de equilíbrio
- aponta sempre para a posição de equilíbrio

O corpo tem movimento **periódico, harmónico, oscilatório ou vibracional**

Ex: Bloco preso a uma mola, baloiço (pêndulo), corda a vibrar, moléculas a vibrar num sólido, etc..

Massa presa a uma mola: M.H.S.

2ª Lei
de
Newton

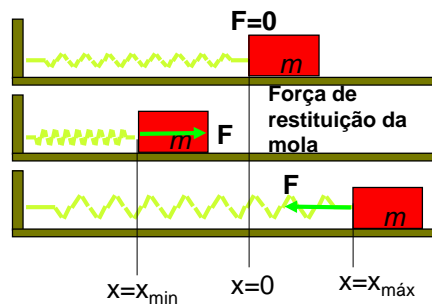
$$F = -kx$$

$$ma = -kx$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$



F: Força restauradora

k: constante da mola

$$a = -\frac{k}{m} x = -\omega^2 x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ω é a frequência angular (radianos)

Massa presa a uma mola: M.H.S.

$$a = \frac{dx^2}{dt} = -\omega^2 x$$

**Qual será a solução, x ,
desta equação diferencial ?**

Tipicamente é uma função do tipo:

$$x = A \cos(\omega t)$$

Massa presa a uma mola: M.H.S.

$$x = A \cos(\omega t)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d[A \cos(\omega t)]}{dt} = -\omega A \sin(\omega t) \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{d[-\omega A \sin(\omega t)]}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t) = -\omega^2 x \end{aligned}$$

É solução !

Mas haverá outras soluções ?

Massa presa a uma mola: M.H.S.

SIM!

$$x = A \sin(\omega t)$$

Também é solução

$$x = B \sin(\omega t) + C \cos(\omega t)$$

(Verifique que é solução)

$x = A \cos(\omega t + \phi)$ é equivalente a $x = B \sin(\omega t) + C \cos(\omega t)$

$$x = A \cos(\omega t + \phi) = A \cos(\omega t) \cos\phi - A \sin(\omega t) \sin\phi$$

$$x = C \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad \text{Onde } C = A \cos(\phi) \text{ e } B = -A \sin(\phi)$$

Portanto, podemos usar $x = A \cos(\omega t + \phi)$ como solução geral

Massa presa a uma mola: M.H.S.

A solução é:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

Fase

As 2 constantes de integração são:

Amplitude
(deslocamento máximo)

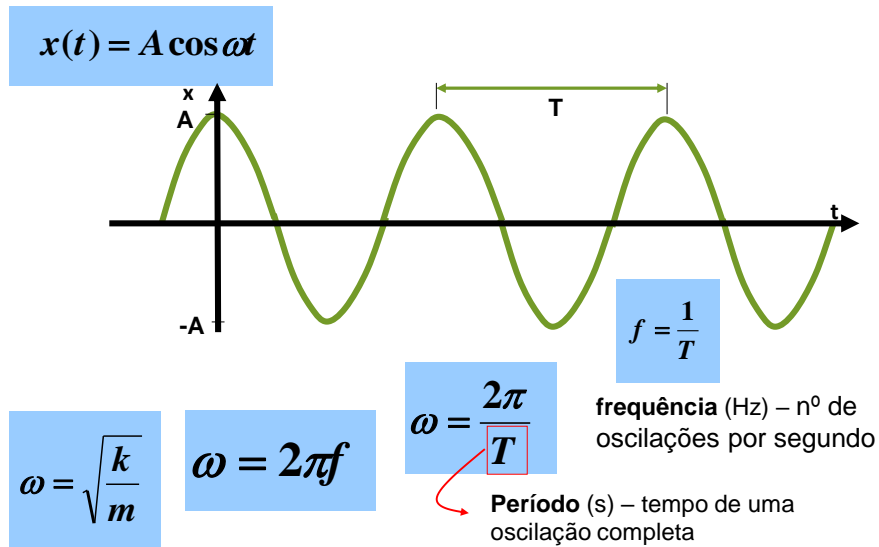
e

Fase inicial

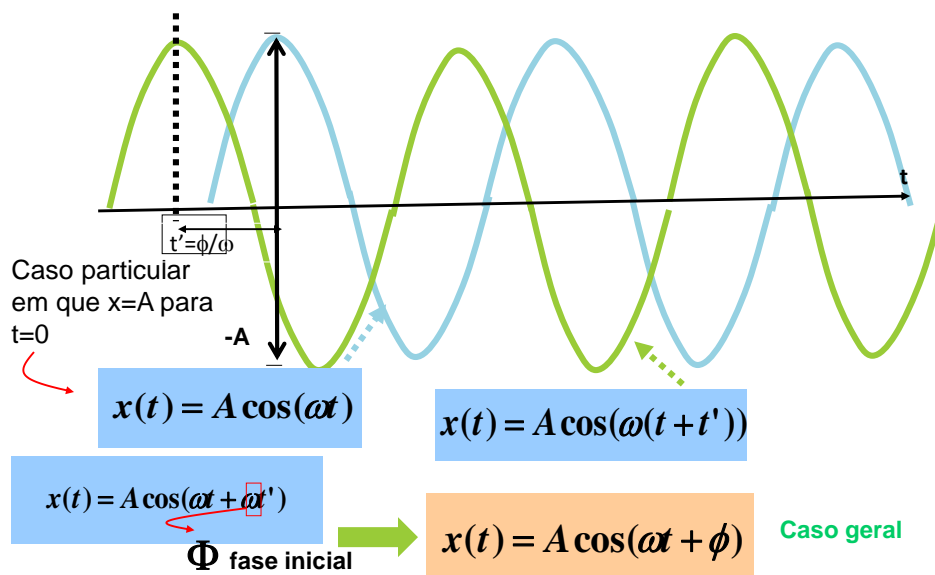
- ω é determinada pelas propriedades do sistema (k e m)
- A e ϕ são determinados pelas condições iniciais

Este movimento designa-se Movimento Harmónico Simples (M.H.S.)

Massa presa a uma mola: M.H.S.



Massa presa a uma mola: M.H.S. – Fase inicial



Massa presa a uma mola: M.H.S. – Velocidade

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

$$v_{\text{máx}} = \omega A$$

- v está desfasada 90° em relação a x .
- v é zero quando x é máximo ou mínimo.
- v é máximo quando $x = 0$

Massa presa a uma mola: M.H.S. - Aceleração

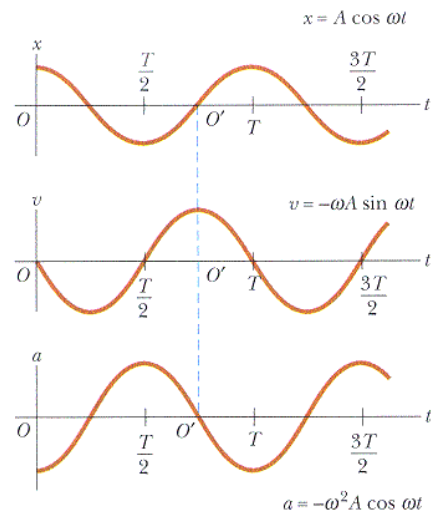
$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \underbrace{\cos(\omega t + \phi)}_x = -\omega^2 x$$

a tem sentido contrário a x
(relembrar Lei de Hooke)

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A$$

- a está desfasada 180° em relação a x
- a está desfasada 90° em relação a v
- a é zero quando $x = 0$
- a é máxima quando x é mínimo (e vice-versa)

Massa presa a uma mola: M.H.S. - gráficos



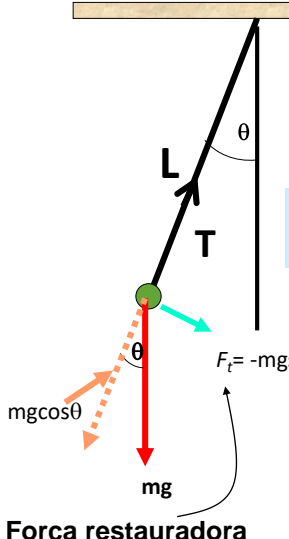
Mola vertical

$\vec{P} + \vec{F}_{el} = m\vec{a} \Leftrightarrow P + F_{el} = ma$
 $\Leftrightarrow ky_0 - ky = m \frac{d^2 y}{dt^2} \Leftrightarrow -k(y - y_0) = m \frac{d^2 y}{dt^2}$
 $\Leftrightarrow -ky' = m \frac{d^2 y'}{dt^2} \Leftrightarrow \frac{d^2 y'}{dt^2} + \frac{k}{m} y' = 0$

Nova posição de equilíbrio (não coincide com o tamanho natural da mola)
 Mesmo período (e frequência)

M.H.S. - Pêndulo Simples

Aplicando a 2ª Lei de Newton:



Força restauradora

$$F_t = -mg \sin \theta = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$s = L\theta \quad \sin \theta \approx \theta$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} \approx -\frac{g}{L} \theta$$

$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

ω^2

Válido para θ pequenos

Semelhante a:

$$\frac{dx^2}{dt} = -\omega^2 x$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

M.H.S. - Pêndulo

- Portanto: o Pêndulo também executa M.H.S.!
- A sua frequência (e o período) só depende do seu comprimento

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$$

Deslocamento angular máximo

Deslocamento angular

M.H.S.

Os sistemas mecânicos têm uma **frequência natural** de oscilação que depende de:

$$\sqrt{\frac{\text{propriedade elástica}}{\text{propriedade inercial}}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

mola

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Pêndulo
simples

M.H.S. – Energia no M.H.S

Relembrando :

Como F é conservativa:

$$F_{ex} = -\frac{dE_{pe}}{dx} = -kx$$

Energia potencial elástica

$$E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2 \equiv \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Leftrightarrow k = \omega^2 m$$

$E_{pe}(0)=0$ (posição de equilíbrio)

M.H.S. – Energia no M.H.S

Energia cinética

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (-\omega A \sin(\omega t + \phi))^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

Utilizando a identidade trigonométrica

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

Obtém-se:

$$\Leftrightarrow E_c = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 [1 - \cos^2(\omega t + \phi)] = \frac{1}{2} m \omega^2 (A^2 - x^2)$$

M.H.S. – Energia no M.H.S

Energia mecânica

$$E = E_{pe} + E_c = \frac{1}{2} k \left(A \cos(\omega t + \phi) \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 \left(A \sin(\omega t + \phi) \right)^2$$

Utilizando de novo a identidade trigonométrica

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

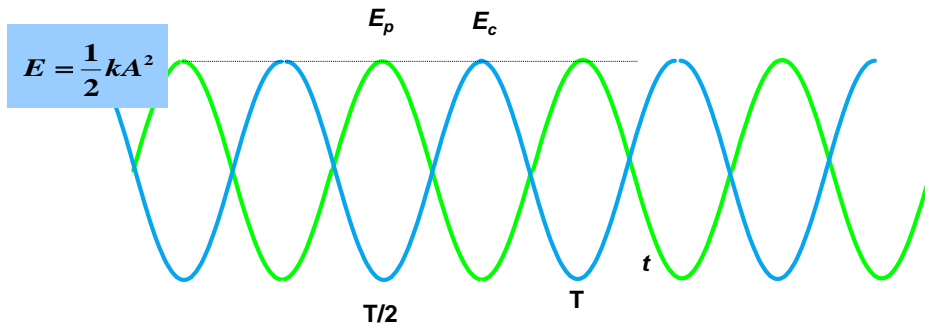
$$\longleftrightarrow E = \frac{1}{2} k A^2$$

Num M.H.S. a Energia mecânica é constante!!

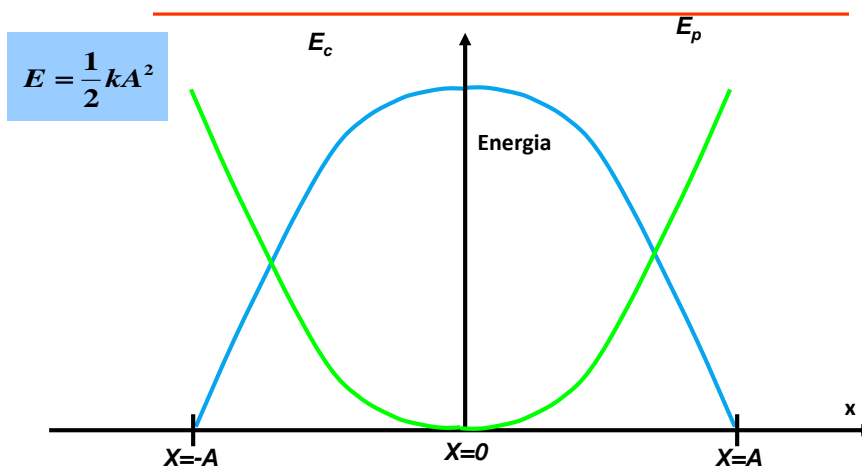
M.H.S. – Energia em função de t no M.H.S

M.H.S. – Energia em função de t no M.H.S

Para $\phi = 0$



M.H.S. – Energia em função de x no M.H.S

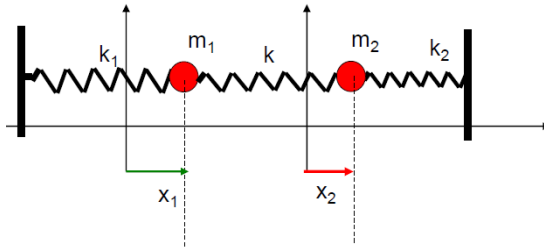


[Oscilações livres - M.H.S. Mola](#)

[Oscilações livres - M.H.S. Pêndulo](#)

[Energia no M.H.S.](#)

Oscilações acopladas



Podemos escrever a equação do movimento para cada oscilador

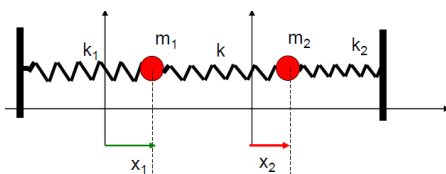
$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 - k(x_1 - x_2) \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_2 x_2 - k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

Analisando a dinâmica de cada uma das massa supondo que a outra está fixa na posição de equilíbrio

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{k_1 + k}{m_1} x_1 = \frac{k}{m_1} x_2 \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{k_2 + k}{m_2} x_2 = \frac{k}{m_2} x_1 \end{cases}$$

Termos de acoplamento

Oscilações acopladas



Vejam as seguintes soluções:

$$\begin{cases} x_1 = A \cos(\omega t) \\ x_2 = B \cos(\omega t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\omega^2 A \cos(\omega t) + \frac{k_1 + k}{m_1} A \cos(\omega t) = \frac{k}{m_1} B \cos(\omega t) \\ -\omega^2 B \cos(\omega t) + \frac{k_2 + k}{m_2} B \cos(\omega t) = \frac{k}{m_2} A \cos(\omega t) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left(-\omega^2 + \frac{k_1 + k}{m_1} \right) A - \frac{k}{m_1} B = 0 \\ -\frac{k}{m_2} A + \left(\omega^2 + \frac{k_2 + k}{m_2} \right) B = 0 \end{cases}$$

Resolução do sistema utilizando matrizes !

Determinação das frequências normais de vibração

$$\begin{cases} \left(-\omega^2 + \frac{k_1+k}{m_1}\right)A - \frac{k}{m_1}B = 0 \\ -\frac{k}{m_1}A + \left(-\omega^2 + \frac{k_2+k}{m_2}\right)B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \left(-\omega^2 + \frac{k_1+k}{m_1}\right) & -\frac{k}{m_1} \\ -\frac{k}{m_1} & \left(-\omega^2 + \frac{k_2+k}{m_2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$$

As soluções não triviais são aquelas em que o determinante da matriz dos coeficientes $A=[(a_{ij})]$ é nulo !

$$\begin{vmatrix} \left(-\omega^2 + \frac{k_1+k}{m_1}\right) & -\frac{k}{m_1} \\ -\frac{k}{m_1} & \left(-\omega^2 + \frac{k_2+k}{m_2}\right) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left(-\omega^2 + \frac{k_1+k}{m_1}\right) \times \left(-\omega^2 + \frac{k_2+k}{m_2}\right) - \left(-\frac{k}{m_1} \times -\frac{k}{m_2}\right) = 0$$

Determinação das frequências normais de vibração

No caso em que $m_1 = m_2 = m$ e $K_1 = K_2 = K$, temos

$$\begin{aligned} \left(-\omega^2 + \frac{2k}{m}\right) \times \left(-\omega^2 + \frac{2k}{m}\right) - \left(\frac{k^2}{m^2}\right) &= 0 \\ \omega^4 - 4\omega^2 \frac{k}{m} + 3\frac{k^2}{m^2} &= 0 \\ \text{como } \omega_0^2 &= \frac{k}{m} \\ \omega^2 &= \frac{\omega_0^2(4 \pm 2)}{2} \end{aligned}$$

O sistema tem duas frequências próprias de vibração

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \omega_1^2 &= \omega_0^2 \\ \text{ii)} \quad \omega_1^2 &= 3\omega_0^2 \end{aligned}$$

A relação com as amplitudes de cada movimento (A e B) são:

Se $A = B$, as massas oscilam em fase

Se $A = -B$, as massas oscilam em oposição de fase

Coordenadas normais: graus de liberdade e modos de vibração

- As **coordenadas normais** conduzem a equações do movimento que tomam a forma de um conjunto de equações diferenciais com coeficientes constantes em que cada equação tem apenas uma variável dependente.
- Uma vibração que envolve apenas uma variável dependente X ou Y é designada de **modo normal de vibração** e tem a sua frequência própria de vibração. Em cada modo normal de vibração cada componente oscila com a mesma frequência.
- A importância do modo normal de vibração é que cada um é inteiramente independente do outro. A energia de um modo normal nunca é transferida para o outro modo normal de vibração.
- Cada processo independente pelo qual o sistema adquire energia é designado de **grau de liberdade**. O número destes processos define o nº de graus de liberdade e o nº de coordenadas normais de vibração.
 - Cada oscilador harmónico tem dois processos independentes de adquirir energia por energia potencial (coordenada x); por energia cinética (derivada da coordenada x)

Amortecimento

Aplicando 2ª Lei de Newton:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow -kx - bv = ma_x \quad \longleftrightarrow \quad -kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

Quando o amortecimento não é muito intenso, inferior a um valor crítico (b_c) esperamos que a solução corresponda a uma oscilação cuja amplitude diminua com o tempo

Amortecimento

A solução é:

$$x = A_o e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \phi)$$

E a frequência de oscilação é

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

Esta solução só é válida se:

$$\frac{b}{2m} < \omega_o$$

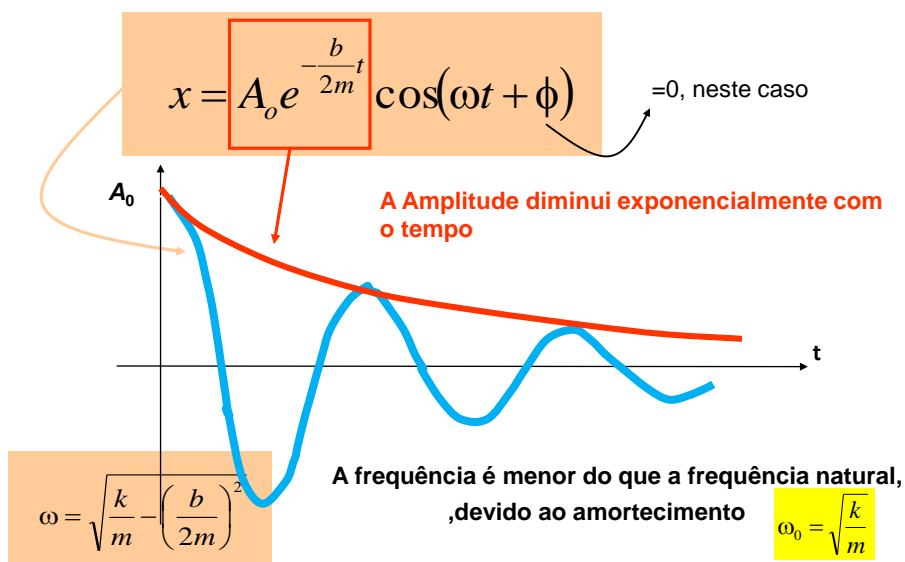
$$b < 2m \omega_o$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Coefficiente de amortecimento crítico (b_c)

$$b_c = 2m \omega_o$$

Amortecimento



Graus de Amortecimento

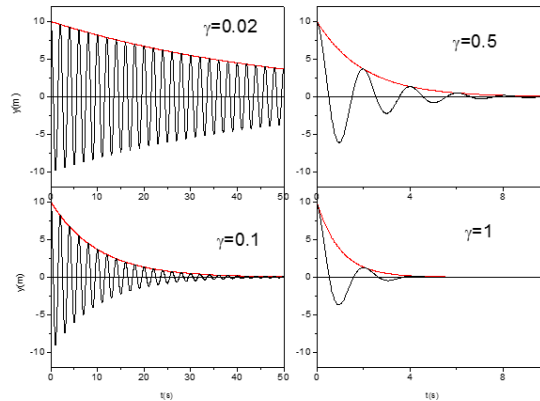
$$x = A_o e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

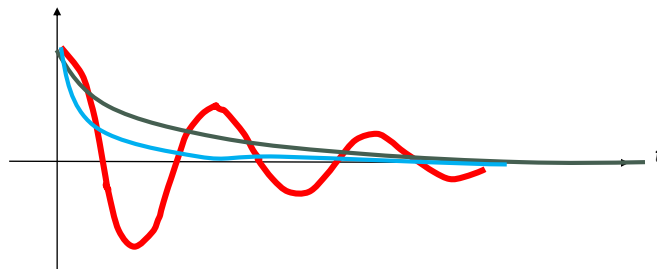
Para $b < b_c$

OSCILADOR AMORTECIDO: $y = 10 e^{-\gamma t} \cos(\omega t)$ $\omega = (\pi^2 - \gamma^2)^{1/2}$ $\gamma < \pi$

À medida que b aumenta, o decréscimo da amplitude das oscilações é cada vez mais rápido.



Amortecimento



Sub-Amortecido

(Amortecimento fraco)

Amortecido criticamente

(Amortecimento forte)

Sobre Amortecido

(Amortecimento muito forte)

Forçamento

- Se se pretende manter um sistema a oscilar, na presença de forças dissipativas, tem de se lhe fornecer energia, aplicando uma **força externa**
- Ao fim de algum tempo, o movimento terá a **frequência da força excitadora**
- Isto fará com que ao fim de algum tempo a energia fornecida (numa oscilação) será igual à dissipada, e assim a **amplitude mantém-se constante**, e o seu valor dependerá da frequência excitadora.

**Este movimento designa-se por
oscilação forçada**

Forçamento

Considere força harmónica:

$$F_{ext} = F_0 \cos(\omega_f t)$$

A magnitude da força varia
harmonicamente com t entre
 $-F_0$ e $+F_0$, com $\omega = \omega_f$

2ª Lei de Newton:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = -kx - b\dot{x} + F_0 \cos(\omega_f t)$$

$$-kx - b \frac{dx}{dt} + F_0 \cos(\omega t) = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Forçamento

Equação diferencial, cuja solução é:

$$x = A \cos(\omega_f t + \phi)$$

Verifique que é solução !!

Onde:

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega_f}{m}\right)^2}}$$

e

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

O desfasamento ϕ entre a posição x e a força é:

ATENÇÃO: não é fase inicial!!!

$$\tan \phi = \frac{b\omega_f}{m(\omega_f^2 - \omega_0^2)}$$

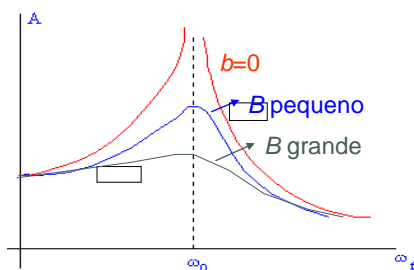
Forçamento

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega_f}{m}\right)^2}}$$

Sistema oscila com $\omega = \omega_f$

A é constante em t

A é máximo quando $\omega_f \approx \omega_0$



ressonância

Na ausência de amortecimento

$A \rightarrow \infty$

quando $\omega_f \rightarrow \omega_0$