Aula 9

- Representação de números inteiros com sinal (revisão)
  - Sinal e módulo
  - Complemento para um
  - Complemento para dois
- Exemplos de operações aritméticas
- *Overflow* e mecanismos para a sua deteção
- Construção de uma ALU de 32 bits

José Luís Azevedo, Bernardo Cunha, Arnaldo Oliveira, Pedro Lavrador

Era uma vez...

- Era uma vez, num país bué, bué longe, um conselho de ministros...
- O Sr. Primeiro Ministro dirigiu-se aos Srs. Ministros, questionando-os sobre o valor do aumento a atribuir aos funcionários públicos em 2020, para equilibrar ☺☺☺ as perdas dos mesmos nos últimos 11 anos.

Dizei-me senhores ministros
No vosso saber dotado
Qual deve ser o aumento
Pr'ós funcionários do estado

Era uma vez...

- Fácil, disse o Ministro da Cultura: eu acho que devia ser **00000101** €
- Não, retorquiu o Ministro dos Negócios Estrangeiros, para mim devia ser **01000011 01001001 01001110 01000011 01001111** €
- Não concordo, contestou o Ministro do Trabalho, eu cá acho que devia ser **01010110** €
- Nada disso, insurgiu-se o Ministro da Economia. Para sermos justos é necessário um aumento de **01000000101000000000000000000000** €
- Por todos os deuses – levantou-se o Ministro das Finanças irritado – só um cego não vê que o orçamento só suporta um aumento de **10000100** €

Era uma vez...

- O Primeiro Ministro desse país longínquo, conhecido como um hábil negociador, nada sabia de códigos de representação e ficou bastante irritado com as respostas dos seus ministros
- No entanto, não havia razão para tal, uma vez que houve unanimidade nas respostas. A resposta dada por cada ministro foi, na realidade, a mesma; apenas usaram uma linguagem (código) diferente
- A extração da informação requer, assim, o conhecimento do código usado, sob pena de as mensagens não passarem de coleções de bits sem sentido

Era uma vez...

O Ministro da Cultura codificou a sua resposta em **binário**:
$00000101_2 = 5_{10}$ €

O Ministro dos Negócios Estrangeiros usou **ASCII**:
01000011 01001001 01001110 01000011 01001111 = "CINCO“ €

O Ministro do Trabalho usou **ASCII** mas para representar numeração romana:
01010110 = "V“ = 5 €

O Ministro da Economia usou representação em **vírgula flutuante**:
$01000000101000000000000000000000 = 1.01_2 x 2^2 = 5$ €

O Ministro das Finanças usou **excesso de 2^{n-1}-1** (com n=8, excesso de 127):
$10000100_2 = 5_{10}$ €

Representação de inteiros

- No sistema árabe, cada algarismo que compõe um dado número tem um peso que é função quer da sua posição no número quer do número de símbolos do alfabeto usado.
- Um número com **n** dígitos $\mathbf{d_{n-1}\ d_{n-2}...d_1\ d_0}$

  representado neste sistema, pode ser decomposto num polinómio da forma

  $$\mathbf{d_{n-1}.b^{n-1} + d_{n-2}.b^{n-2} + ... + d_1.b^1 + d_0.b^0}$$

  em que **b** é a base de representação e corresponde à dimensão do alfabeto
- Exemplos:

  $\mathbf{1230_{10}} = 1 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10 + 0$

  $\mathbf{110101_2} = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1 = 53_{10}$

  $\mathbf{721_8} = 7 \times 8^2 + 2 \times 8 + 1 = 465_{10}$

  $\mathbf{5A8_{16}} = 5 \times 16^2 + A \times 16 + 8 = 1448_{10}$

Representação de inteiros

- Sendo um computador um sistema digital binário, a representação de inteiros faz-se sempre em base 2 (símbolos 0 e 1).
- Por outro lado, como o espaço de armazenamento de informação (numérica ou não) é limitado, a representação de inteiros é também necessariamente limitada.
- **Tipicamente, um inteiro pode ocupar um número de bits igual à dimensão de um registo interno do CPU**.
- A gama de valores inteiros representáveis é, assim, finita, e corresponde ao número máximo de combinações que é possível obter com o número de bits de um registo interno.
- No MIPS, um inteiro ocupa 32 bits, pelo que o número de inteiros representável é:

$$N_{inteiros} = 2^{32} = 4.294.967.296_{10} = [0 .. 4.294.967.295_{10}]$$

Representação de inteiros

- Os circuitos que realizam operações aritméticas estão igualmente limitados a um número finito de dígitos (bits), geralmente igual à dimensão dos registos internos do CPU.
- Os circuitos aritméticos operam assim em aritmética modular, ou seja em mod(2^n) em que ‘n’ é o número de bits de representação.
- O maior valor que um resultado aritmético pode tomar será portanto 2^n-1, sendo o valor inteiro imediatamente a seguir o valor zero (representação circular).

Representação de inteiros

- Num CPU com registos de 8 bits, por exemplo, o resultado da soma dos números 11001011 e 00110111 seria:

11001011 + 00110111 = 1 $\boxed{\textbf{00000010}}$

carry

resultado com 8 bits

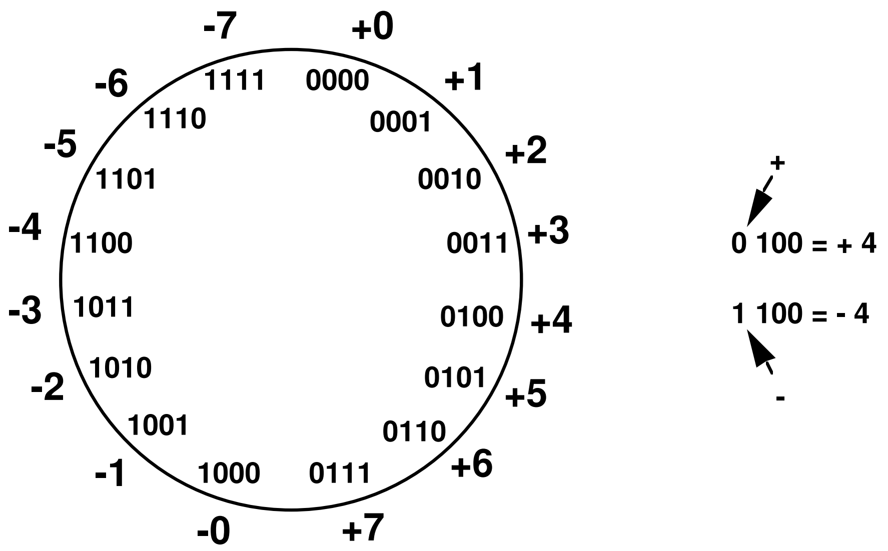
- No caso em que os operandos são do tipo ***unsigned***, o bit ***carry*** sinaliza que o resultado não cabe num registo de 8 bits, ou seja sinaliza a ocorrência de ***overflow***
- No caso em que os operandos são do tipo ***signed*** (codificados em complemento para 2) o bit de ***carry*** não tem qualquer significado e é ignorado.

Representação de inteiros negativos

- A representação de números positivos é a mesma na maioria dos sistemas numéricos
- Os maiores problemas colocam-se quando se procura uma forma de representar quantidades negativas
- Os três esquemas mais usados são:
  - sinal e módulo
  - complemento para um
  - complemento para dois

- Por uma questão de simplicidade vamos admitir, na discussão subsequente, que a dimensão do registo interno do CPU é de 4 bits

Representação em sinal e módulo



- O bit mais significativo é usado para representar o sinal:
  - 0 = positivo (ou zero), 1 = negativo
- A magnitude é representada pelos 3 LSBits: 0 (000) a 7 (111)
- Gama de representação para n bits = $+/-2^{n-1}-1$
- 2 representações para 0

Representação em sinal e módulo

- Este método de representação de inteiros apresenta os seguintes problemas do ponto de vista da implementação numa ALU:
  - Existem duas representações distintas para um mesmo valor (zero)
  - É necessário comparar as magnitudes dos operandos para determinar o sinal do resultado
  - É necessário implementar um somador e um subtrator distintos
  - O bit de sinal tem de ser tratado independentemente dos restantes

Representação em complemento para um

- **Definição**: Se N é um número positivo, então $\overline{N}$ é negativo e o seu complemento para 1 (complemento falso) é dado por:

$$\mathbf{\overline{N} = (2^n - 1) - N}$$

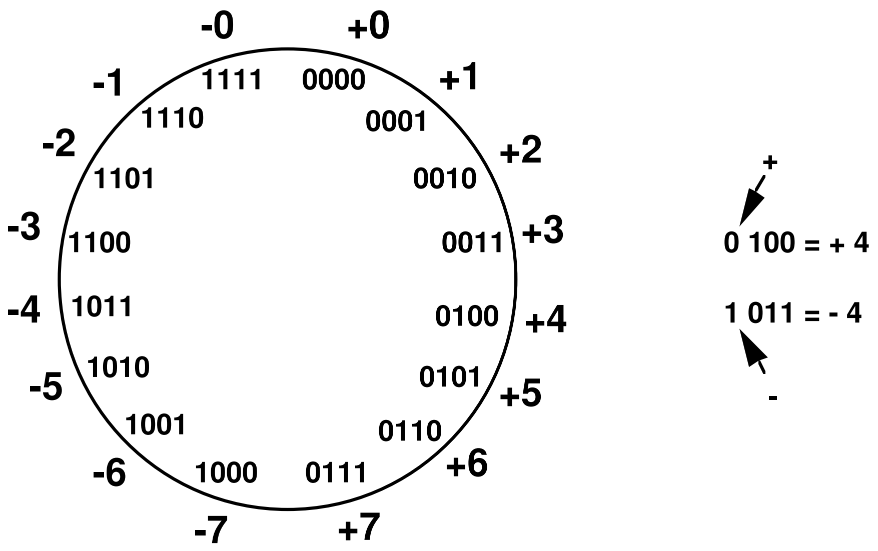
em que n é o número de bits da representação

- **Exemplo**: determinar o complemento para 1 de 5 (com 4 bits)

$$N = 5_{10} = \mathbf{0101}_2$$
$$2^n = 2^4 = 10000$$
$$(2^n - 1) = 10000 - 1 = 1111$$
$$(2^n - 1) - N = 1111 - 0101 = \mathbf{1010}$$

- **Método prático**: inverter todos os bits do valor original

Representação em complemento para um



- O bit mais significativo também pode ser interpretado como sinal: 0 = valor positivo, 1 = valor negativo
- A subtração faz-se adicionando o complemento para 1
- Há 2 representações para 0 (tem implicações no modo como as operações são realizadas)

Representação em complemento para dois

- **Definição**: Se N é um número positivo, então N* é o seu complemento para 2 (complemento verdadeiro) e é dado por:

  $$N^* = 2^n - N$$

  em que "n" é o número de bits da representação

- **Exemplo**: determinar o complemento para 2 de 5 (com 4 bits)

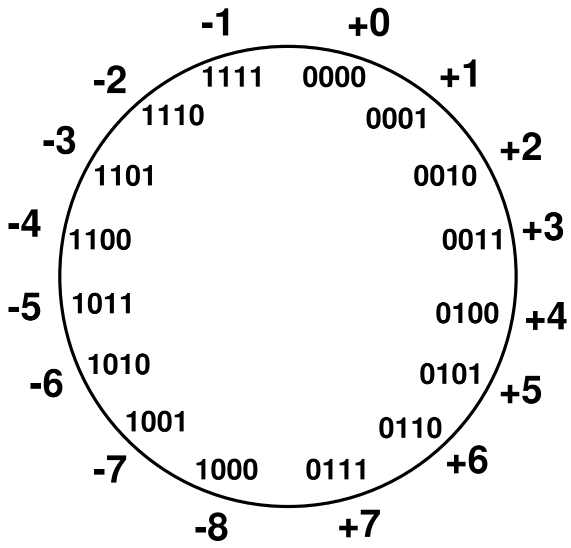
  $N = 5_{10} = 0101_2$

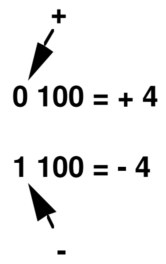
  $2^n = 2^4 = 10000$

  $2^n - N = 10000 - 0101 = 1011 = N^*$

- **Método prático**: inverter todos os bits do valor original e somar 1

Representação em complemento para dois





- O bit mais significativo também **pode ser interpretado como sinal**: 0 = valor positivo, 1 = valor negativo
- Uma única representação para 0
- Codificação assimétrica (mais um negativo do que positivos)
- A subtração é obtida através da soma com o complemento para 2 (a – b) = (a + (-b))

Representação em complemento para dois

- Uma quantidade de 32 bits codificada em complemento para 2 pode ser representada pelo seguinte polinómio:

$$-(a_{31}.2^{31}) + (a_{30}.2^{30}) + ... + (a_1.2^1) + (a_0.2^0)$$

  Onde o bit de sinal (a_{31}) é multiplicado por **-2^{31}** e os restantes pela versão positiva do respetivo peso

- **Exemplo**: Qual o valor representado pela quantidade 10100101_2, supondo uma representação com 8 bits e uma codificação em complemento para 2?
  - R1: $10100101_2 = -(1\text{x}2^7) + (1\text{x}2^5) + (1\text{x}2^2) + (1\text{x}2^0)$ $= -128 + 32 + 4 + 1 = -91_{10}$
  - R2: Complemento para 2 de 10100101 = 01011010 + 1 $= 01011011_2 = 5B_{16} = 91_{10}$. Ou seja, o valor representado em sinal e módulo, base 10, é -91_{10}

Representação em complemento para dois

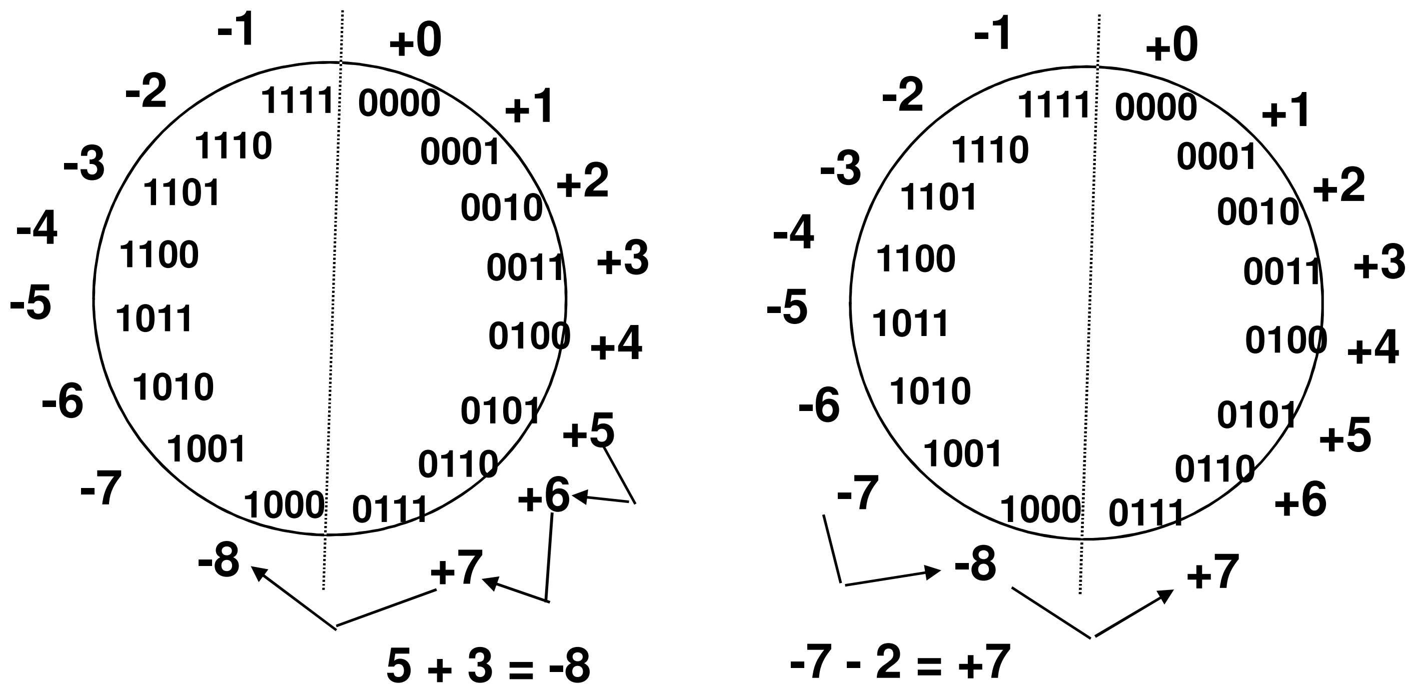
- Exemplos de operações

4	0100		-4	1100
+ 3	0011		+ (-3)	1101
7	0111		-7	11001

4	0100		-4	1100
- 3	1101		+ 3	0011
1	10001		-1	1111

- Este esquema simples de adição com sinal torna o complemento para 2 o preferido para representação de inteiros em arquitetura de computadores

Overflow em complemento para 2



- Ocorre ***overflow*** quando é ultrapassada a gama de representação. Isso acontece quando:
  - se somam dois positivos e o resultado obtido é negativo
  - se somam dois negativos e o resultado obtido é positivo

Overflow em complemento para 2

	0 0 0 0	carry
5	0 1 0 1	
2	0 0 1 0	
7	0 1 1 1	

Sem overflow

	1 1 1 1	
-3	1 1 0 1	
-5	1 0 1 1	=’S
-8	1 1 0 0 0	

Sem overflow

	0 1 1 1	
5	0 1 0 1	
3	0 0 1 1	≠’S
-8	0 1 0 0 0	

Overflow

	1 0 0 0	
-7	1 0 0 1	
-2	1 1 1 0	≠’S
7	1 0 1 1 1	

Overflow

A situação de ***overflow* ocorre** quando o *carry-in* do bit de sinal não é igual ao *carry-out* , ou seja, quando:

$$C_{n-1} \oplus C_n = 1$$

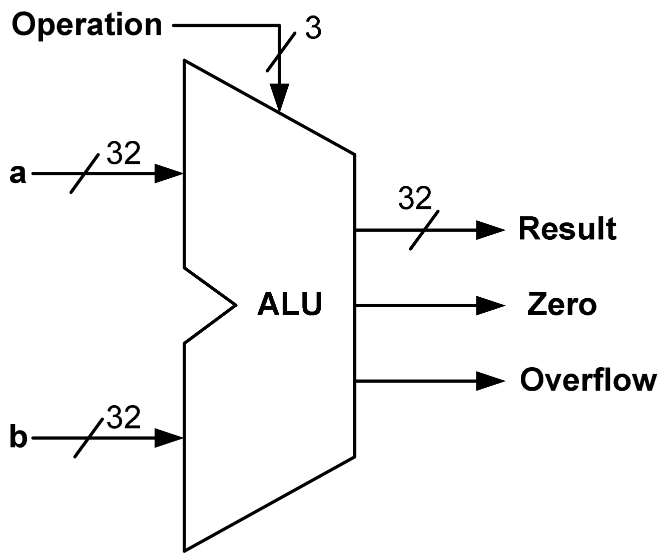
Overflow em operações aritméticas

- **Em operações sem sinal:**
  - Quando **$A+B > 2^n-1$** ou **A-B c/ B>A**
  - O bit de *carry* **$C_n = 1$** sinaliza a ocorrência de *overflow*
- **Em operações com sinal:**
  - Quando **$A + B > 2^{n-1}-1$** ou **$A + B < -2^{n-1}$**
    - **$OVF = (C_{n-1} \cdot \overline{C_n}) + (\overline{C_{n-1}} \cdot C_n) = C_{n-1} \oplus C_n$**
  - Alternativamente, não tendo acesso aos bits intermédios de carry, (R = A + B):
    - **$OVF = R_{n-1} \cdot \overline{A_{n-1}} \cdot \overline{B_{n-1}} + \overline{R_{n-1}} \cdot A_{n-1} \cdot B_{n-1}$**
- Como fazer a deteção de *overflow* em operações com e sem sinal no MIPS?

Construção de uma ALU de 32 bits

- A ALU deverá implementar as operações:
  - AND, OR
  - ADD, SUB
  - SLT (set if less than)
- Deverá ainda:
  - Detetar e sinalizar *overflow*
  - Sinalizar resultado igual a zero

Operation	ALU Action
0 0 0	And
0 0 1	Or
0 1 0	Add
1 1 0	Subtract
1 1 1	Set if less than



Bloco funcional correspondente a uma ALU de 32 bits

Construção de uma ALU de 32 bits – VHDL

```
entity alu32 is
 port( a    :  in  std_logic_vector(31 downto 0);
       b    :  in  std_logic_vector(31 downto 0);
       oper :  in  std_logic_vector(2  downto 0);
       res  :  out std_logic_vector(31 downto 0);
       zero :  out std_logic;
       ovf  :  out std_logic);
end alu32;

architecture Behavioral of alu32 is
  signal s_res : std_logic_vector(31 downto 0);
  signal s_b   : unsigned(31 downto 0);
begin
  s_b  <= not(unsigned(b)) + 1 when oper = "110" else
            unsigned(b); -- complemento para 2 (se subtração)
  res  <= s_res;
  zero <= '1' when s_res = X"00000000" else '0';
  ovf  <= (not a(31) and not s_b(31) and s_res(31)) or
          (a(31) and s_b(31) and not s_res(31));
  --(continua)
```

Operation	ALU Action
0 0 0	And
0 0 1	Or
0 1 0	Add
1 1 0	Subtract
1 1 1	Set if less than

Construção de uma ALU de 32 bits (continuação)

```vhdl
  process(oper, a, b, s_b)
  begin
   case oper is
      when "000" =>   -- AND
         s_res <= a and b;
      when "001" =>   -- OR
         s_res <= a or b;
      when "010" =>   -- ADD
         s_res <= std_logic_vector(unsigned(a) + s_b);
      when "110" =>   -- SUB
         s_res <= std_logic_vector(unsigned(a) + s_b);
      when "111" =>   -- SLT
         if(signed(a) < signed(b)) then
            s_res <= X"00000001";
         else
            s_res <= (others => '0');
         end if;
      when others =>
         s_res <= (others => '-');
   end case;
  end process;
end Behavioral;
```

Operation	ALU Action
0 0 0	And
0 0 1	Or
0 1 0	Add
1 1 0	Subtract
1 1 1	Set if less than

ALU – resultado da simulação