Universidade de Aveiro **Departamento de Matemática**

Aplicações lineares

1. Averigue se são aplicações lineares as funções definidas por

   (a) $\phi(x, y) = (x + 1, y, x + y)$;
   (b) $\phi(x, y, z) = (x + y, y, x - z)$;
   (c) $\phi(x, y, z) = (x + y, 0, 2x - z)$;
   (d) $\phi(x, y, z) = (x - y, x^2, 2z)$;
   (e) $\phi(at^2 + bt + c) = at + b + 1$;
   (f) $\phi(at^2 + bt + c) = a + (t + 1)(bt + c)$.

2. Seja $\phi : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ definida por

$$\phi(A) = \begin{cases} A^{-1} & \text{se } A \text{ não é singular} \\ 0 & \text{se } A \text{ é singular} \end{cases}$$

   para $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Averigue se ϕ é uma aplicação linear.

3. Dada uma matriz A $n \times n$, defina-se $\phi : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ por $\phi(B) = AB - BA$ para $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Averigue se ϕ é uma aplicação linear.

4. Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação linear, satisfazendo $\phi(1, 1) = (2, -3)$ e $\phi(0, 1) = (1, 2)$. Determine

   (a) $\phi(3, -2)$;
   (b) $\phi(a, b)$.

5. Seja $\phi : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3$ uma aplicação linear tal que $\phi(1) = 1$, $\phi(t) = t^2$ e $\phi(t^2) = t^3 + t$. Determine

   (a) $\phi(2t^2 - 5t + 3)$;
   (b) $\phi(at^2 + bt + c)$.

Matriz de uma aplicação linear

6. Seja $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear definida por

$$\phi(x, y, z) = (x + 2y + z, 2x - y, 2y + z).$$

   Seja $\mathcal{C}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B} = \big((1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\big)$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Determine a matriz representativa de ϕ relativamente

   (a) à base $\mathcal{C}$;
   (b) às bases $\mathcal{C}$ e $\mathcal{B}$;
   (c) às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$;
   (d) à base $\mathcal{B}$;

   e determine $\phi(1, 1, -2)$ usando cada uma das matrizes obtidas em (a)–(d).

7. Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear definida por

$$\phi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

   Sejam $\mathcal{S} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ e $\mathcal{T} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respetivamente.

   (a) Determine a matriz representativa de ϕ relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.
   (b) Determine a matriz representativa de ϕ relativamente às bases $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ i. diretamente e ii. usando matrizes de mudança de base.
   (c) Determine $\phi\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}\right)$, usando cada uma das matrizes obtidas anteriormente.

8. Seja $\phi : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ uma aplicação linear definida por
$$\phi(at^2 + bt + c) = (a + 2c)t^2 + (b - c)t + (a - c)$$
e sejam $\mathcal{S} = (t^2, t, 1)$ e $\mathcal{T} = (t^2 - 1, t, t - 1)$ bases de $\mathcal{P}_2$.
   (a) Encontre a matriz representativa de ϕ relativamente às bases $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$.
   (b) Determine $\phi(2t^2 - 3t + 1)$ usando a alínea anterior.

9. Dada a matriz C $n \times n$, considere-se $\phi : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ definida por $\phi(A) = CA$ para $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
   (a) Mostre que ϕ é uma aplicação linear.
   (b) Considerando $n = 2$, sejam $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathcal{S} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ uma base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ e $\mathcal{C}$ a base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Determine a matriz representativa de ϕ relativamente

      i. à base $\mathcal{C}$; ii. às bases $\mathcal{C}$ e $\mathcal{S}$; iii. às bases $\mathcal{S}$ e $\mathcal{C}$; iv. à base $\mathcal{S}$.

10. Sejam $X_1 = t + 1$, $X_2 = t - 1$, $Y_1 = t^2 + 1$, $Y_2 = t$, $Y_3 = t - 1$ e $\phi : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ a aplicação linear tal que
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$
é a matriz que representa ϕ relativamente às bases $\mathcal{S} = (X_1, X_2)$ e $\mathcal{T} = (Y_1, Y_2, Y_3)$. Determine
   (a) os vetores das coordenadas de $\phi(X_1)$ e $\phi(X_2)$ na base $\mathcal{T}$;
   (b) $\phi(X_1)$ e $\phi(X_2)$;
   (c) $\phi(2t + 1)$;
   (d) $\phi(at + b)$.

11. Determine a matriz representativa da aplicação linear $\phi : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ definida por $\phi\big(p(t)\big) = p''(t) + p(0)$ relativamente à
   (a) base canónica de $\mathcal{P}_3$;
   (b) base $\mathcal{T} = (t^3, t^2 - 1, t, 1)$ de $\mathcal{P}_3$, diretamente e usando matrizes de mudança de base.

12. Se $\mathrm{id}_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ é a aplicação identidade definida por $\mathrm{id}_{\mathcal{V}}(X) = X$ para qualquer $X \in \mathcal{V}$, mostre que a matriz de $\mathrm{id}_{\mathcal{V}}$ relativamente a qualquer base de $\mathcal{V}$ é a matriz identidade I_n com $n = \dim \mathcal{V}$.

Núcleo e imagem de uma aplicação linear

13. Seja $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear definida por $\phi(x, y, z, w) = (x + y, z + w, x + z)$.
   (a) Determine o núcleo e a imagem de ϕ.
   (b) Encontre uma base para o núcleo e uma base para a imagem de ϕ.
   (c) Averigue se ϕ é injetiva e/ou sobrejetiva.
   (d) Verifique o Teorema das Dimensões.

14. Seja $\phi : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ uma aplicação linear definida por $\phi(at^2 + bt + c) = (a + c)t^2 + (b + c)t$.
   (a) Verifique se os elementos $t^2 - t - 1$ e $t^2 + t - 1$ pertencem a $\ker(\phi)$.
   (b) Verifique se os elementos $2t^2 - t$ e $t^2 - t + 2$ pertencem a $\mathrm{im}(\phi)$.
   (c) Determine uma base para $\ker(\phi)$ e uma base para $\mathrm{im}(\phi)$.
   (d) Diga, justificando, se ϕ é injetiva e/ou sobrejetiva.

15. Encontre uma base para o núcleo e uma base para a imagem da aplicação linear $\phi : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ definida por

   (a) $\phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a - b & b - c \\ a - d & b - d \end{bmatrix}$; (b) $\phi(A) = A^T$.

16. Considere a aplicação linear $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\phi(X) = AX$, sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.
   (a) Verifique que a matriz de ϕ relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^2$ é a matriz A.
   (b) Sem determinar o núcleo de ϕ, verifique que $\dim \ker(\phi) \geq 2$.
   (c) Sejam $\mathcal{S} = \big((1,1,1,0),(1,1,1,1),(1,0,1,1),(0,1,1,1)\big)$ e $\mathcal{T} = \big((1,1),(1,-1)\big)$ bases de $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^2$, respetivamente. Determine a matriz de ϕ relativamente
      i. à base $\mathcal{S}$ e à base canónica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$;   ii. às bases $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$,

17. Seja $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear representada relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$ pela matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$
   (a) Determine $\phi(1,2,3)$ e $\phi(x,y,z)$ para $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
   (b) Averigue se ϕ é um isomorfismo.
   (c) Determine a imagem de ϕ e uma sua base, o núcleo de ϕ e uma sua base.
   (d) Determine a matriz de ϕ relativamente à base $\mathcal{B} = \big((1,1,0),(1,1,1),(1,0,0)\big)$
      i. por definição;   ii. usando matrizes de mudança de base.

18. Seja $\mathcal{B} = \big((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\big)$ e considere a transformação linear $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por
$$\phi(1,1,1) = (-1,1), \qquad \phi(1,1,0) = (1,1), \qquad \phi(1,0,0) = (0,2).$$
   (a) Determine a matriz de ϕ relativamente à base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ e à base canónica $\mathbb{R}^2$.
   (b) Calcule $\phi(X)$ sabendo que $[X]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.
   (c) Determine a matriz de ϕ relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e de $\mathbb{R}^2$.
   (d) Determine $\phi(x,y,z)$ para um elemento genérico (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$.
   (e) Determine o núcleo de ϕ e indique uma base para este subespaço de $\mathbb{R}^3$.
   (f) Diga, justificando, se ϕ é injetiva.
   (g) Sem determinar a imagem de ϕ, diga qual a dimensão deste subespaço, usando i. a característica de uma das matrizes representativas de ϕ e ii. o Teorema das Dimensões.
   (h) Usando a dimensão da imagem de ϕ como justificação, diga se ϕ é sobrejetiva.
   (i) Determine a imagem de ϕ, assim como uma base para este subespaço de $\mathbb{R}^2$ a partir i. da matriz calculada em (c) e ii. da imagem do elemento genérico $\phi(x,y,z)$ calculada em (d).

19. Considere a aplicação linear $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\phi(1,1) = (3,0,2)$ e $\phi(1,-1) = (1,0,2)$.
   (a) Determine $\phi(x,y)$ para um elemento genérico (x,y) de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Determine uma base para a imagem de ϕ. Diga, justificando, se ϕ é sobrejetiva.
   (c) Sem determinar o núcleo de ϕ, indique a sua dimensão. Diga, justificando, se ϕ é injetiva.
   (d) Determine a matriz que representa ϕ relativamente às bases
$$\mathcal{S} = \big((1,1),(1,-1)\big) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{T} = \big((0,1,0),(1,0,1),(0,0,1)\big).$$
   (e) Calcule $[X]_{\mathcal{S}}$ sabendo que $[\phi(X)]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

20. Considere a transformação linear $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ representada pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(a) Indique qual é o transformado $\phi(x, y, z)$ de um elemento genérico (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$.

(b) Determine a imagem de ϕ e uma base para este subespaço e indique a sua dimensão.

(c) Diga, justificando, se ϕ é sobrejetiva.

(d) Sem calcular o núcleo de ϕ, indique, justificando, a sua dimensão e averigue se ϕ é injetiva.

(e) Calcule a matriz de ϕ relativamente à base $\mathcal{B} = \big((1, 2, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\big)$.

(f) Sabendo que $[Y]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

i. verifique que $Y \in \operatorname{im}(\phi)$;

ii. determine o vetor de coordenadas na base $\mathcal{B}$ de X, $[X]_{\mathcal{B}}$, sendo X um vetor tal que $\phi(X) = Y$.

21. Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial real de dimensão n e $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma base de $\mathcal{V}$. Seja $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathcal{V}$ definida por

$$\phi(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n.$$

Mostre que ϕ é um isomorfismo.

22. Seja $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^6$ uma aplicação linear.

(a) Se $\dim \ker(\phi) = 2$, qual é a dimensão de $\operatorname{im}(\phi)$?

(b) Se $\dim \operatorname{im}(\phi) = 3$, qual é a dimensão de $\ker(\phi)$?

23. Seja $\phi : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^5$ uma aplicação linear.

(a) Se ϕ é sobrejetiva e $\dim \ker(\phi) = 2$, qual é a dimensão de $\mathcal{V}$?

(b) Se ϕ é bijetiva, qual é a dimensão de $\mathcal{V}$?

24. Seja $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear. Mostre que

(a) $\dim \operatorname{im}(\phi) \leq \dim \mathcal{V}$;

(b) se ϕ é sobrejetiva, então $\dim \mathcal{W} \leq \dim \mathcal{V}$.

25. Considere $\phi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear definida por $\phi_A(X) = AX$, onde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Mostre que ϕ_A é injetiva se e só se $\det(A) \neq 0$.

(b) Verifique que A é diagonalizável com vetores próprios linearmente independentes $X_1, \dots, X_n$ se e só se a matriz representativa de ϕ_A relativamente à base $\mathcal{B} = (X_1, \dots, X_n)$ é diagonal.

(c) Se A é uma matriz ortogonal, mostre que $\phi_A(X) \cdot \phi_A(Y) = X \cdot Y$, para todo $X, Y \in \mathbb{R}^n$.

(d) Um subespaço $\mathcal{W}$ de $\mathbb{R}^n$ diz-se ϕ_A-invariante se $\phi_A(X) \in \mathcal{W}$, para todo $X \in \mathcal{W}$. Mostre que

i. o subespaço próprio de A associado a um valor próprio λ é ϕ_A-invariante;

ii. o núcleo e a imagem de ϕ_A são subespaços ϕ_A-invariantes.

(e) Considerando $n = 3$ e

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

determine uma matriz diagonal D representativa da aplicação linear ϕ_A relativamente a uma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$, indicando essa base.

1. (a) Não; (b) sim; (c) sim; (d) não; (e) não; (f) sim.
2. Não.
3. Sim.
4. (a) $(1,-19)$; (b) $(a+b,-5a+2b)$.
5. (a) $3+2t-5t^2+2t^3$; (b) $c+at+bt^2+at^3$.
6. (a) $[\phi]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$; (b) $[\phi]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ -3 & 1 & 0\end{bmatrix}$; (c) $[\phi]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix}$; (d) $[\phi]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ -3 & 1 & 0\end{bmatrix}$.
   $\phi(1,1,-2)=(1,1,0)$
7. (a) $[\phi]_{\mathcal{C}_3\leftarrow\mathcal{C}_2} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$; (b) $[\phi]_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}} = \begin{bmatrix}1 & -1/3\\ 0 & 2/3\\ -1 & 4/3\end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix}-1\\ 5\\ -4\end{bmatrix}$.
8. (a) $[\phi]_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ -2 & 0 & -1\end{bmatrix}$. (b) $4t^2-4t+1$.
9. (b) i. $[\phi]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 3\end{bmatrix}$; ii. $[\phi]_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix}3 & -2 & 5 & -3\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 3 & 0\\ -2 & 2 & -3 & 3\end{bmatrix}$; iii. $[\phi]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{S}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 3 & 3\end{bmatrix}$;
   iv. $[\phi]_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{S}} = \begin{bmatrix}3 & -2 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 3 & 2\\ -2 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$.
10. (a) $[\phi(X_1)]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix}1\\ 2\\ -1\end{bmatrix}$, $[\phi(X_2)]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix}0\\ 1\\ -2\end{bmatrix}$; (b) $\phi(X_1)=t^2+t+2$, $\phi(X_2)=-t+2$; (c) $\frac{3}{2}t^2+t+4$; (d) $\left(\frac{a+b}{2}\right)t^2+bt+2a$.
11. (a) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 6 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.
13. (a) $\ker(\phi)=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x=-y=-z=t\}$ e $\mathrm{im}(\phi)=\mathbb{R}^3$. (b) Por exemplo, $\{(1,-1,-1,1)\}$ é uma base de $\ker(\phi)$ e $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base de $\mathrm{im}(\phi)$. (c) ϕ não é injetiva e é sobrejetiva.
14. (a) O primeiro elemento não pertence e o segundo pertence. (b) O primeiro elemento pertence e o segundo não pertence. (c) Por exemplo, $\{t^2+t-1\}$ é uma base de $\ker(\phi)$ e $\{t^2,t\}$ é uma base de $\mathrm{im}(\phi)$. (d) ϕ não é injetiva nem sobrejetiva.
15. (a) $\left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right\}$ é uma base de $\ker(\phi)$ e $\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\}$ é uma base da $\mathrm{im}(\phi)$. (b) O conjunto vazio é base de $\ker(\phi)$ e a base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ é uma base da $\mathrm{im}(\phi)$.
16. (c) i. $[\phi]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{S}} = \begin{bmatrix}3 & 4 & 4 & 3\\ 4 & 3 & 2 & 0\end{bmatrix}$; ii. $[\phi]_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}7 & 7 & 6 & 3\\ -1 & 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$.
17. (a) $\phi(1,2,3)=(9,7,16)$ e $\phi(x,y,z)=(x+y+2z, 2x+y+z, 3x+2y+3z)$. (b) Não. (c) $\mathrm{im}(\phi)=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : a+b-c=0\}$ e $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ é uma sua base; $\ker(\phi)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=z \text{ e } y=-3z\}$ e $\{(1,-3,1)\}$ é uma sua base. (d) $\begin{bmatrix}-2 & -4 & -1\\ 5 & 8 & 3\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}$.

18. (a) $[\phi]_{\mathcal{C}_2 \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. (b) $\phi(X) = (1, 9)$. (c) $[\phi]_{\mathcal{C}_2 \leftarrow \mathcal{C}_3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. (d) $\phi(x, y, z) = (y - 2z, 2x - y)$. (e) $\ker(\phi) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z \text{ e } y = 2z\}$ e $\{(1, 2, 1)\}$ é uma sua base. (f) ϕ não é injectiva. (g) 2. (h) ϕ é sobrejectiva. (i) $\operatorname{im}(\phi) = \mathbb{R}^2$.

19. (a) $\phi(x, y) = (2x + y, 0, 2x)$. (b) $\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base para $\operatorname{im}(\phi)$ e ϕ não é sobrejectiva. (c) $\dim \ker(\phi) = 0$ e ϕ é injectiva. (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. (e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

20. (a) $\phi(x, y, z) = (x + 2y + z, 3y + z, x - y)$. (b) $\operatorname{im}(\phi) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a - b - c = 0\}$, $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ é uma base para $\operatorname{im}(\phi)$ e $\dim \operatorname{im}(\phi) = 2$. (c) ϕ não é sobrejectiva. (d) $\dim \ker(\phi) = 1$ e ϕ não é injectiva. (e) $\begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. (f) ii. Por exemplo, $[X]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$.

22. (a) 2; (b) 1.

23. (a) 7; (b) 5.

25. (e) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ é a matriz representativa de ϕ em relação à base $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.