2. Determinantes

UA, 3/10/2018

ALGA – Agrup. IV 18/19

Resumo dos Conteúdos

Caso introdutório: determinante de uma matriz 2×2

O determinante de uma matriz $n \times n$ real é um número real que se lhe associa de forma única.

No caso $n = 2$, se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, então o seu determinante é

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\,.$$

Notações alternativas:

$\det A$ (podendo "deixar-se cair" os parênteses, se não houver perigo de leitura errada)

$|A|$

Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$, então $\det(A) = 7$.

Escritas alternativas: $|A| = 7$ ou $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 7$;

Ainda o determinante de uma matriz 2×2

Exercício:

Mostre as seguintes propriedades:

1. $\det(\mathrm{I}_2) = 1$;
2. $det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$
3. Para $\alpha \in \mathbb{R}$, $det \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \alpha \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$
4. $det \begin{bmatrix} c_{11} + d_{11} & a_{12} \\ c_{21} + d_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} c_{11} & a_{12} \\ c_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} d_{11} & a_{12} \\ d_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Determinante de uma matriz $n \times n$

Generalizando para qualquer $n \in \mathbb{N}$, existe uma única função que a cada matriz quadrada A faz corresponder um escalar real $\det(A)$ que, em função das suas colunas $C_1, \ldots, C_n$, satisfaz a:

1. $\det(I_n) = 1$,
2. $det[C_1 \cdots C_i \cdots C_j \cdots C_n] = -det[C_1 \cdots C_j \cdots C_i \cdots C_n]$,
3. $det[C_1 \cdots \alpha C_i \cdots C_n] = \alpha det[C_1 \cdots C_i, \cdots C_n]$,
4. $det[C_1 \cdots \widehat{C}_i + \widetilde{C}_i \cdots C_n] = det[C_1 \cdots \widehat{C}_i \cdots C_n] + det[C_1 \cdots \widetilde{C}_i \cdots C_n]$,

para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$ e $C_i = \widehat{C}_i + \widetilde{C}_i$.

A $\det(A)$ chama-se determinante de A, também denotado por $|A|$.

Determinante das matrizes 3×3

$$A = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) = &+ a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ &- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} \end{aligned}$$

Exercício: Verifique as propriedades 1-4 da definição.

Regra de Sarrus (só para matrizes 3×3)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ll}
\det(A) = +a_{11}a_{22}a_{33} & \\
\quad +a_{21}a_{32}a_{13} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\
\quad +a_{31}a_{12}a_{23} & \\
\quad -a_{31}a_{22}a_{13} & \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{matrix} \\
\quad -a_{11}a_{32}a_{23} & \begin{matrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \\
\quad -a_{21}a_{12}a_{33} &
\end{array}$$

Menor e cofator

Definições:

Dada uma matriz $A = [a_{ij}]$ $n \times n$, seja M_{ij} a matriz $(n-1) \times (n-1)$ que se obtém de A por eliminação da sua linha i e coluna j.
Chama-se menor de a_{ij} a $\det(M_{ij})$.
O cofator (ou complemento algébrico) de a_{ij} é $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Menor do elemento $(2,1)$: $\det(M_{21}) = -1$

Cofactor do elemento $(2,1)$: $A_{21} = (-1)^{2+1} \det(M_{21})$
$= (-1) \times (-1) = 1$

Desenvolvimentos de Laplace

Teorema de Laplace:

Seja $A = [a_{ij}]$ $n \times n$. Então

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

(desenvolvimento de Laplace do $\det(A)$ a partir da linha i)

para cada $i = 1, \ldots, n$, e

$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + \cdots + a_{nj}A_{nj},$$

(desenvolvimento de Laplace do $\det(A)$ a partir da coluna j)

para cada $j = 1, \ldots, n$.

Corolário:

O determinante de uma matriz triangular é o produto das entradas da diagonal principal.

Exemplo de aplicação do Teorema de Laplace

Cálculo do determinante de uma matriz 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

usando o desenvolvimento de Laplace segundo a primeira linha:

$$\det(A) \;=\; a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \;=$$

$$a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Propriedades do determinante de uma matriz quadrada

1. $\det(A) = \det(A^T)$.
2. Se A tem uma linha nula, ou duas linhas iguais, então $\det(A) = 0$.
3. Se B resulta de A por uma troca de duas linhas , $L_i \leftrightarrow L_j$, então $\det(B) = -\det(A)$.
4. Se B resulta de A por multiplicação de uma linha de A por um escalar α, $L_i := \alpha L_i$, então $\det(B) = \alpha \det(A)$.
5. Se B resulta de A substituindo a linha i pela sua soma com um múltiplo da linha j, $L_i := L_i + \alpha L_j$, então $\det(B) = \det(A)$.
6. Todas as propriedades (2. a 5.) são válidas para colunas, *i.e.*, colocando coluna onde está linha.
7. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Observação:

- $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.

Determinante e inversa de uma matriz

Teorema:

1. A é invertível $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$.
2. Caso A seja invertível, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

Corolário

Seja A $n \times n$. O sistema homógeneo $AX = 0$ tem uma solução não trivial se e só se $\det(A) = 0$.

Adjunta e inversa de uma matriz

Definição:

A adjunta de $A = [a_{ij}]$ é a matriz $n \times n$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T$$

onde A_{ij} é o cofator de a_{ij}. Ver slide 8

Teorema

Se é A invertível, então

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj} A.$$

Regra de Cramer

Seja A $n \times n$ tal que $\det(A) \neq 0$.
Então o sistema $AX = B$ é possível e determinado e a sua única solução é

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

é dada por

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

onde A_j se obtém de A por substituição da sua coluna j pela coluna B.

Regra de Cramer – Exemplo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como $\det(A) = 4 \neq 0$, pode usar-se a Regra de Cramer.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{4}{4} = 1, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Logo, a solução do sistema é $(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.