UNIVERSIDADE DE AVEIRO

Departamento de Matemática

Exame Final de Matemática Discreta (2014/2015) 26 de Junho de 2015

Justifique devidamente as suas respostas.

(Duração: 2 horas e 30 minutos)

1. Considerem-se os conjuntos A e B e a função $f : A \to B$. Considere ainda que no conjunto A se define a relação $\mathcal{R}$ do seguinte modo:

$$(x, y) \in \mathcal{R} \quad \text{sse} \quad f(x) = f(y).$$

(1) **a)** Mostre que P é uma relação de equivalência em A.

(1) **b)** Suponha que

$$A = \{\text{Berlim, Lisboa, Londres, Madrid, Porto, Roma, Salamanca, Viseu}\},$$

e

$$B = \{\text{Portugal, França, Alemanha, Espanha, Reino Unido, Itália}\}$$

e que

$$f(x) = y \quad \text{sse} \quad x \text{ é uma cidade do país } \quad y.$$

- Diga, justificando, se f é injetiva e sobrejetiva.
- Considerando a relação de equivalência $\mathcal{R}$ da alínea anterior para este caso particular, indique as suas classes de equivalência.

2. Considere as seguintes proposições p: "Está frio" e q: "Está a chover".

(1) **a)** Apresente uma frase que descreva cada uma das seguintes proposições:

(i) $\neg(p \wedge q)$;

(ii) $q \vee \neg p$.

(1) **b)** Mostre que $\neg\,(p \wedge q) \wedge (q \vee \neg p) \equiv \neg p$.

3. *(2)* Recorrendo ao método de indução, prove que a sucessão dos números triangulares cuja definição por recorrência é

$$\begin{cases} t_1 = 1, \\ t_n = t_{n-1} + n, \; n \geq 2 \end{cases}$$

tem o seguinte termo geral: $t_n = \frac{n^2+n}{2}$, $n \geq 1$.

4. *(2)* Num grupo de 20 amigos, 6 praticam natação, 7 praticam corrida, 8 praticam yoga, 2 praticam natação e corrida, 3 praticam corrida e yoga, 1 pratica natação e yoga e 5 não praticam nenhuma destas modalidades. Quantas pessoas deste grupo de amigos pratica as três modalidades?

5. *(2)* Determine o número binomial generalizado $\binom{-3/2}{3}$.

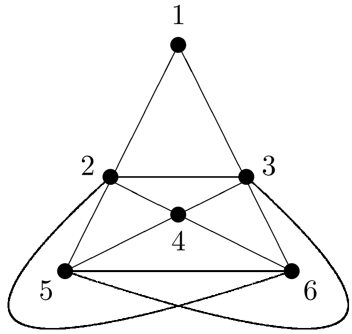
   (3) Resolva a equação de recorrência

$$a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 8,$$

   com condições iniciais $a_0 = 4$ e $a_1 = 11$.

6. *(3)* Resolva a equação de recorrência $a_n = 2na_{n-1}$, com condição inicial $a_0 = 1$, com recurso à utilização da função geradora exponencial $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$.

7. *(4)* Considere o grafo simples $G = (V, E)$, com $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e E o conjunto de arestas representadas na figura a seguir. Supondo que as arestas de G têm os custos



   associados que são definidos pela matriz

$$W = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & \infty & \infty & \infty \\ 4 & 0 & 2 & 6 & 8 & 10 \\ 2 & 2 & 0 & 6 & 2 & 10 \\ \infty & 6 & 6 & 0 & 2 & 4 \\ \infty & 8 & 2 & 2 & 0 & 8 \\ \infty & 10 & 10 & 4 & 8 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

   aplique o algoritmo de Dijkstra para determinar um caminho de custo mínimo entre os vértices 1 e 6.