



Ficha de Exercícios 5

Séries numéricas

1. Determine o termo geral da sucessão das somas parciais, S_n , e a soma S (se possível) de cada uma das seguintes séries:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n$;

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-2n+3}$;

(e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n} \right)$;

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} 2n$;

(d) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n^2 - 1}$;

(f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

2. Calcule, se possível, a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{2n-1} + b_n \right]$, sabendo que a sucessão das somas parciais associadas à série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é dada por $S_n = \sqrt[n]{\frac{e}{n^n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série numérica, convergente e de soma igual a S . Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[3a_n + \frac{2}{3^n} \right]$.

4. Determine, se existir, a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, onde $u_n = \begin{cases} 1 + 2(n-1) & \text{se } n < 4 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{se } n \geq 4 \end{cases}$.

5. Considere a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{(a+1)^n}$ (onde a é um parâmetro real, com $a \neq -1$).

- (a) Determine os valores de a para os quais a série dada é convergente.
(b) Para um dos valores encontrados na alínea anterior, determine a soma da série.

6. Indique, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

- (a) Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de números reais.

i. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, então a série converge.

ii. Se a série converge, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

iii. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$, então a série diverge.

- (b) A série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se e só se:

i. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = 0$;

- ii. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k < 1$;
- iii. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = S \in \mathbb{R}$.

7. Estude a natureza das séries seguintes:

- | | | |
|--|---|--|
| (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{3n^2 - 2}}$ | (i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^{\frac{n}{2}}$ | (q) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{8^n} + \frac{1}{n(n+1)} \right)$ |
| (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (1+2n)^{\frac{1}{n}}$ | (j) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$ | (r) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{50})}{2^n}$ |
| (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n^2\pi}{2}\right)$ | (k) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n}{n+1} \right)^{n^3}$ | (s) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$ |
| (d) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$ | (l) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b^n}{n} \quad (0 < b < 1)$ | (t) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n! + n - 1}$ |
| (e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$ | (m) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{d^n} \quad (d > 0)$ | (u) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n + 1}{2^n - 1}$ |
| (f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{\sqrt{2n^5 + n^3}}$ | (n) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\ln n}{n} \right)^n$ | (v) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^n \cos(n\alpha)}{n^{2n}}, \alpha \in \mathbb{R}$ |
| (g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$ | (o) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi^n n!}{n^n}$ | (w) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\arctan n}{n^2 + 1}$ |
| (h) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{[(-1)^n + 5]^n}$ | (p) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ | |

8. Estude a natureza das séries seguintes:

- | | |
|--|---|
| (a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4+1} + \frac{5}{9+1} + \frac{7}{16+1} + \dots$ | (b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots$ |
|--|---|

9. Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries de termos não negativos, tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} = \frac{1}{3}$ e

$a_n = b_n + \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$. Indique, justificando, a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$.

10. Verifique se as séries seguintes são convergentes e, em caso afirmativo, indique se são absolutamente ou simplesmente convergentes:

- | | | |
|--|---|---|
| (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$; | (b) $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$; | (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n-1}}$; |
|--|---|---|

$$\begin{array}{lll}
\text{(d)} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+2}}; & \text{(g)} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{e^n + 1}; & \text{(j)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}; \\
\text{(e)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^3 + 3n^2 + 4}; & \text{(h)} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^2; & \text{(k)} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right). \\
\text{(f)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{(n+1)!}; & \text{(i)} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}; &
\end{array}$$

11. Sabendo que as sucessões $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ são tais que

$$\sum_{n=1}^8 a_n = 15, \quad a_n = \left(\frac{3}{2} \right)^n, \quad \text{para } n \geq 9 \quad \text{e} \quad b_n > a_n, \quad \text{para } n > 20,$$

estude a natureza das séries numéricas $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

12. Considere as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n^2 + 1}$.

(a) Estude a natureza de cada uma das séries.

(b) Indique o limite do termo geral das séries.

(c) Sendo $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[(-1)^n \frac{n!}{n^n} + b_n \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n^2 + 1}$, indique a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$. Justifique.

13. Uma bola de borracha cai de uma altura de 10 metros. Sempre que bate no chão, a bola sobe $2/3$ da distância percorrida anteriormente. Qual é a distância total percorrida pela bola (até ficar em repouso)?

14. Seja (a_n) uma sucessão de números reais tal que $a_1 \neq 0$ e $a_{n+1} = \frac{n}{2n+1} a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Indique, justificando, a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

15. Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + n^2}{3^n n^2}$ sabendo que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

16. Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de termos positivos tal que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n$ é convergente. Prove que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 \text{ é convergente.}$$

17. Mostre que se $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + a_n)$ converge.

Exercícios de testes/exames de anos anteriores

18. Estude a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{n!} \right)$ e, em caso de convergência, indique a sua soma.

(Exame Final, Cálculo I - Agrupamento IV, 2017/2018)

19. Verifique se as séries seguintes são convergentes e, em caso de convergência, indique se a convergência é absoluta ou simples:

(a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{(n+1)!}$.

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n+2)}$.

(Exame Final, Cálculo I - Agrupamento IV, 2017/2018)

20. Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de termos positivos convergente. Indique, justificando, a natureza das seguintes séries:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (\arctg(n) + a_n)$.

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{a_n}{3 + a_n^2}$.

(Exame de Recurso, Cálculo I - Agrupamento IV, 2017/2018)