

# UNIVERSIDADE DE AVEIRO

## Departamento de Matemática

---

### Matemática Discreta (2015/2016)

Exame de recurso

06 de Julho de 2016

*Responda de uma forma cuidada a cada uma das questões.*

---

(2 horas e 30 minutos)

(2)1- Verifique se a proposição

$$((p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow q)) \Leftrightarrow q$$

é uma tautologia.

2- Faça as seguintes demonstrações com recurso ao método respectivamente referido.

(1,5) 2.1 Prove por indução que  $n^3 + 2n$  é divisível por 3, qualquer que seja  $n \in \mathbb{N}$ .

(1,5) 2.2 Sabendo que uma dada floresta tem 800 000 pinheiros e que cada pinheiro tem, no máximo, 600 000 agulhas mostre, pelo princípio da gaiola dos pombos, que existem pelo menos dois pinheiros com o mesmo número de agulhas.

3- Considere que no universo dos humanos se definem os predicados:

1. Homem( $x$ ):  $x$  é homem;
2. Mulher( $x$ ):  $x$  é mulher;
3. Mãe( $x, y$ ):  $x$  é mãe de  $y$ .

(1) 3.1 Com recurso a fórmulas bem formadas da lógica de primeira ordem e utilizando estes predicados, explicita os seguintes factos:

$F_1$ : "Para qualquer homem existe uma mulher que é sua mãe";

$F_2$ : "Manuel é homem".

(2) 3.2 Tendo em conta os factos referidos, utilizando o princípio da resolução, demonstre que existe uma mulher que é a mãe do Manuel.

(2)4- Com recurso à fórmula multinomial, determine o coeficiente de  $x^3$  no desenvolvimento de  $(y + \frac{x}{y} + z)^6$ .

- 5-** Determine uma fórmula não recursiva para os termos da sucessão  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ , em cada um dos seguintes casos.

(2) **5.1** Esta sucessão verifica a relação de recorrência

$$a_n + 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 3,$$

com condições iniciais  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$ .

(2) **5.2** A função geradora desta sucessão pode exprimir-se por  $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

- 6-** Seja  $G$  o grafo simples, não orientado, com conjunto de vértices  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ , definido pela matriz de custos

$$\begin{array}{c} v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4 \quad v_5 \quad v_6 \\ \begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & \infty & 3 & \infty & 10 & \infty \\ \infty & 0 & 25 & \infty & \infty & 11 \\ 3 & 25 & 0 & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 0 & 3 & 8 \\ 10 & \infty & \infty & 3 & 0 & 15 \\ \infty & 11 & \infty & 8 & 15 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

- (3) **6.1** Determine o caminho de custo mínimo entre os vértices  $v_1$  e  $v_2$  com recurso ao algoritmo de Dijkstra.
- (3) **6.2** Determine uma árvore abrangente de custo mínimo, utilizando o algoritmo de Prim.