3. Vetores, Retas e Planos

UA, 12/10/2018

ALGA – Agrup. IV 18/19

Resumo dos Conteúdos

Produto interno em $\mathbb{R}^n$

Dados os vetores $X = (x_1, \ldots, x_n)$ e $Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

- o produto interno (ou produto escalar) de X e Y é o escalar real

$$X \cdot Y = X^T Y = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$
$$= x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

Nota: Pode também utilizar-se a notação $X|Y$ ou $\langle X, Y \rangle$.

- o comprimento ou norma de X é

$$\|X\| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Propriedades do produto interno em $\mathbb{R}^n$

Dados $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

1. $X \cdot X \geq 0$;
2. $X \cdot X = 0 \iff X = 0$;
3. $X \cdot Y = Y \cdot X$;
4. (i) $(X + Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z$,
   (ii) $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$;
5. $(\alpha X) \cdot Y = \alpha (X \cdot Y) = X \cdot (\alpha Y)$;
6. $\|\alpha X\| = |\alpha| \, \|X\|$.

Desigualdade de Cauchy-Schwarz e desigualdade triangular

Teorema (Desigualdade de Cauchy-Schwarz):
Dados $X, Y \in \mathbb{R}^n$,
$$|X \cdot Y| \leq \|X\|\|Y\|.$$

Teorema (Desigualdade Triangular):
Dados $X, Y \in \mathbb{R}^n$,
$$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|.$$

Ângulo entre vetores

Caso $n = 2$ (revisão)

Sejam X e Y vetores não nulos de $\mathbb{R}^2$, tais que $X = (x, 0)$, $x > 0$ e $Y = (a, b) \neq (0, 0)$. Assim, $X \cdot Y = xa$ e $\|X\| = x$ e portanto,

$$\frac{X \cdot Y}{\|X\|} = a$$

Por outro lado, (ver figura)

$$a = \|Y\| \cos(\theta) .$$

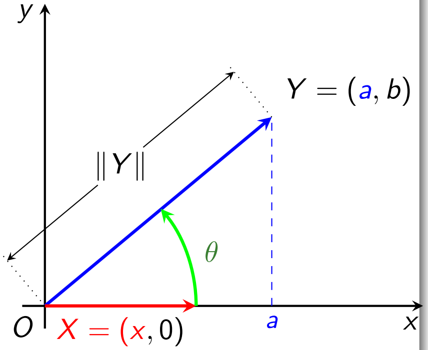
Logo,

$$\cos(\theta) = \frac{X \cdot Y}{\|X\| \, \|Y\|}, \quad \theta \in [0, \pi] .$$

Deste modo,

o ângulo entre os vetores X e Y é

$$\theta = \angle(X, Y) = \arccos \frac{X \cdot Y}{\|X\| \, \|Y\|}$$



Ângulo entre vetores

Definição:

Sejam X e Y vetores não nulos de $\mathbb{R}^n$, o ângulo entre os vetores X e Y é

$$\theta = \angle(X, Y) = \arccos \frac{X \cdot Y}{\|X\| \, \|Y\|}$$

Observações:

1. Note que pela Desigualdade de Cauchy–Schwarz,

$$\left| \frac{X \cdot Y}{\|X\| \, \|Y\|} \right| \leq 1$$

2. $\theta \in [0, \pi]$.

Vetores ortogonais e vetores colineares

Definições:

Dados os vetores $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $X, Y \neq 0$

- X e Y são ortogonais ou perpendiculares, $X \perp Y$, se $\theta = \frac{\pi}{2}$, *i.e.*, se $X \cdot Y = 0$.
- X e Y dizem-se colineares ou paralelos ou que têm a mesma direção, se $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, *i.e.*, se $|X \cdot Y| = \|X\|\|Y\|$.
  - Se $\theta = 0$, *i.e.*, se $X \cdot Y = \|X\|\|Y\|$, X e Y têm o mesmo sentido;
  - Se $\theta = \pi$, *i.e.*, se $X \cdot Y = -\|X\|\|Y\|$, X e Y têm sentido oposto ou contrário.

Por convenção, se $X = 0$ ou $Y = 0$,
X e Y dizem-se colineares e ortogonais.

Vetor unitário e versor

Definições:

- Um vetor unitário é um vetor de norma igual a 1.
- Se $X \neq 0$, o vetor unitário

$$U = \frac{1}{\|X\|}X$$

tem a direção e sentido de X, a U chama-se versor de X.

Produto externo em $\mathbb{R}^3$

Definição:

Dados os vetores $X = (x_1, x_2, x_3)$ e $Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, o produto externo (ou produto vetorial) de X e Y é o vetor de $\mathbb{R}^3$

$$X \times Y = (x_2y_3 - x_3y_2,\ x_3y_1 - x_1y_3,\ x_1y_2 - x_2y_1).$$

Cálculo de $X \times Y$ usando um "determinante simbólico":

$$X \times Y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \qquad \text{tomando} \qquad \begin{array}{l} i = (1,0,0) \\ j = (0,1,0) \\ k = (0,0,1) \end{array},$$

e considerando o desenvolvimento do "determinante" pela primeira linha.

Propriedades do produto externo em $\mathbb{R}^3$

Dados $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$, e O o vetor nulo $\mathbb{R}^3$

1. $X \times Y = -(Y \times X)$;
2. i. $X \times (Y + Z) = X \times Y + X \times Z$,
   ii. $(X + Y) \times Z = X \times Z + Y \times Z$;
3. $\alpha(X \times Y) = (\alpha X) \times Y = X \times (\alpha Y)$;
4. $X \times X = O$;
5. $X \times O = O \times X = O$;
6. Fórmulas de Lagrange
   i. $(X \times Y) \times Z = (Z \cdot X)Y - (Z \cdot Y)X$,
   ii. $X \times (Y \times Z) = (X \cdot Z)Y - (X \cdot Y)Z$.

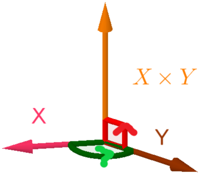
Vetor produto externo (interpretações geométricas)

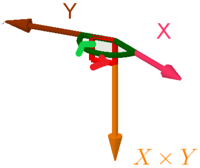
Proposição: Sejam $X, Y \in \mathbb{R}^3$.

O vetor $X \times Y$ é ortogonal a X e a Y, e $\|X \times Y\| = \|X\|\|Y\| \sin(\theta)$, onde θ é o ângulo entre X e Y.

Observação:

O vetor $X \times Y$ é o vetor ortogonal a X e Y, com norma $\|X\|\|Y\| \sin(\theta)$ e tal que os vetores X, Y e $X \times Y$, aplicados no mesmo ponto, formam um triedro direto (regra da mão direita). Ver ilustrações gráficas e/ou link:





ver applet

Produto misto

Se $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$, $Z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$, então

$$(X \times Y) \cdot Z = X \cdot (Y \times Z) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

e este diz-se o produto misto de X, Y e Z.

Exercícios:

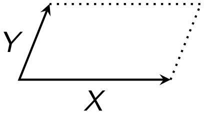
1. Usando propriedades do produto misto e uma das fórmulas de Lagrange, prove a Proposição do slide anterior, *i.e.*, mostre que $(X \times Y) \cdot X = (X \times Y) \cdot Y = 0$ e que $\|X \times Y\| = \|X\|\|Y\| \sin(\theta)$, onde $\theta = \angle(X, Y)$.
2. Mostre que $Y \cdot (Z \times X) = (X \times Y) \cdot Z$.

Aplicações do produto externo e do produto misto

Sejam $X, \ Y, \ Z \in \mathbb{R}^3$, então

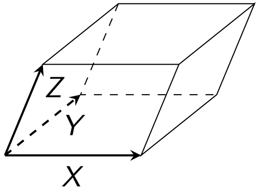
- a área do paralelogramo com lados correspondentes aos vetores $X, \ Y$ é

$$A_{\square} = \|X \times Y\|$$



- o volume do paralelepípedo com arestas correspondentes aos vetores $X, \ Y, \ Z$ é

$$V = |(X \times Y) \cdot Z|$$



Exercício:

Prove estas afirmações, resolvendo os exercícios 7.(a) e 9.(a) da Ficha 3.

Retas em $\mathbb{R}^3$

A reta $\mathcal{R}$ em $\mathbb{R}^3$ que passa pelo ponto P e tem vetor diretor v é o conjunto de pontos $X \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$\boxed{\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \alpha v, \text{ para algum } \alpha \in \mathbb{R}}, \qquad (\text{equação vetorial de } \mathcal{R})$$

A partir da qual, considerando $X(x, y, z)$, $P(x_0, y_0, z_0)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$, se obtém:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + \alpha v_1 \\ y = y_0 + \alpha v_2 \,, \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + \alpha v_3 \end{cases}}, \qquad (\text{equações paramétricas de } \mathcal{R}).$$

Eliminando α do anterior sistema, obtém-se um sistema da forma:

$$\boxed{\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases}}, \qquad (\text{equações cartesianas de } \mathcal{R})$$

onde car $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} = 2.$

Planos em $\mathbb{R}^3$

O plano $\mathcal{P}$ em $\mathbb{R}^3$ que passa pelo ponto P e tem vetores diretores u e v (não colineares) é o conjunto de pontos $X \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$\boxed{\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \alpha u + \beta v \,, \text{ para algum } \alpha, \beta \in \mathbb{R}}, \quad \text{(equação vetorial de } \mathcal{P}\text{)}$$

A partir da qual, considerando $X(x, y, z)$, $P(x_0, y_0, z_0)$, $u = (u_1, u_2, u_3)$, e $v = (v_1, v_2, v_3)$, se obtém:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + \alpha u_1 + \beta v_1 \\ y = y_0 + \alpha u_2 + \beta v_2 \,, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + \alpha u_3 + \beta v_3 \end{cases}}, \quad \text{(equações paramétricas de } \mathcal{P}\text{).}$$

Eliminando α e β do anterior sistema, obtém-se uma equação da forma:

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}, \qquad \text{(equação (cartesiana) geral de } \mathcal{P}\text{)}$$

onde $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Equações cartesianas do plano/vetor ortogonal

Se o plano $\mathcal{P}$ tem-se uma equação geral

$$ax + by + cz + d = 0,$$

então $w = (a, b, c)$ é um vetor não nulo ortogonal a $\mathcal{P}$.

De facto, dois pontos arbitrários deste plano, $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 0, 1$, satisfazem

$$ax_i + by_i + cz_i + d = 0, \quad i = 0, 1,$$

donde

$$a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0) = 0,$$

ou seja, para qualquer vetor $\overrightarrow{P_0P_1}$ do plano $\mathcal{P}$, tem-se $w \cdot \overrightarrow{P_0P_1} = 0$.

Por outro lado, se w for um vetor não nulo ortogonal a qualquer vetor de $\mathcal{P}$ e P um ponto de $\mathcal{P}$, qualquer $X \in \mathcal{P}$ satisfaz a

$$w \cdot \overrightarrow{PX} = 0,$$

tomando $X = (x, y, z)$ e manipulando a expressão, facilmente se obtém uma equação geral de $\mathcal{P}$.

Posição relativa de dois planos

Seja $[A|B]$ a matriz ampliada 2×4 do sistema constituído pelas equações gerais dos planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ de $\mathbb{R}^3$.
Então os planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ são:

- coincidentes, se $\text{car}\,([A|B]) = \text{car}\,(A) = 1$;
  A sua interseção é o plano $\mathcal{P}$.
- concorrentes, se $\text{car}\,([A|B]) = \text{car}\,(A) = 2$;
  A sua interseção é uma reta.
- estritamente paralelos, se $\text{car}\,([A|B]) > \text{car}\,(A) = 1$;
  A sua interseção é vazia.

Posição relativa de uma reta e um plano

Seja $[A|B]$ a matriz ampliada 3×4 do sistema constituído pelas equações cartesianas da reta $\mathcal{R}$ e pela equação geral do plano $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$.
Então a reta $\mathcal{R}$ e o plano $\mathcal{P}$ são:

- tais que $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}$, se $\text{car}\,([A|B]) = \text{car}\,(A) = 2$;
  A sua interseção é a reta $\mathcal{R}$.
- concorrentes, se $\text{car}\,([A|B]) = \text{car}\,(A) = 3$;
  A sua interseção é um ponto.
- estritamente paralelos se $\text{car}\,([A|B]) > \text{car}\,(A) = 2$;
  A sua interseção é vazia.

Posição relativa de duas retas

Seja $[A|B]$ a matriz ampliada 4×4 do sistema constituído pelas equações cartesianas das retas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ de $\mathbb{R}^3$.
Então as retas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ são:

- coincidentes, se $\text{car}\,([A|B]) = \text{car}\,(A) = 2$;
  A sua interseção é a reta $\mathcal{R}$.
- concorrentes, se $\text{car}\,([A|B]) = \text{car}\,(A) = 3$;
  A sua interseção é um ponto.
- estritamente paralelas, se $\text{car}\,([A|B]) = 3 > \text{car}\,(A) = 2$;
  A sua interseção é vazia, mas as retas são complanares.
- enviesadas, se $\text{car}\,([A|B]) = 4 > \text{car}\,(A) = 3.$;
  As retas são <u>não</u> complanares, a sua interseção é vazia.

Noção de distância

Distância entre dois pontos:

A distância entre dois pontos P e Q de $\mathbb{R}^n$ é $d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|$.
Para $Q(x_1,\ldots,x_n)$ e $P(y_1,\ldots,y_n)$ tem-se

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Distância entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ (pontos, retas ou planos de $\mathbb{R}^3$):

A distância entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ é

$$d(\mathcal{F},\mathcal{G}) = \min\{\, d(P,Q) : \ P \in \mathcal{F}, \ Q \in \mathcal{G}\}\,.$$

Observação:

Se $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, então $d(\mathcal{F},\mathcal{G}) = 0$. De seguida, analisamos os casos em que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são disjuntos.

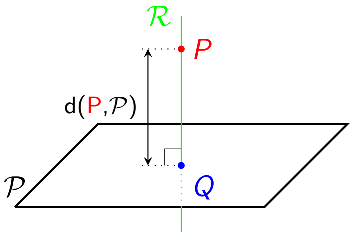
Distância de um ponto a um plano

1. Abordagem usando o “ponto mais próximo” do plano

Dados um plano $\mathcal{P}$ e um ponto $P \notin \mathcal{P}$, existe uma única reta $\mathcal{R}$ perpendicular ao plano $\mathcal{P}$ e contendo o ponto P.
A distância do ponto P ao plano $\mathcal{P}$ é

$$d(P, \mathcal{P}) = d(P, Q),$$

em que Q é o ponto de interseção da reta $\mathcal{R}$ com o plano $\mathcal{P}$.

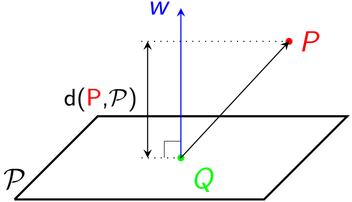


Distância de um ponto a um plano

2. Abordagem usando um qualquer ponto do plano

Dados um plano $\mathcal{P}$ e um ponto $P \notin \mathcal{P}$, sejam $Q \in \mathcal{P}$ e w um vetor não nulo ortogonal ao plano $\mathcal{P}$. Então,

$$d(P,\mathcal{P}) = \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot w|}{\|w\|}.$$



Como consequência, quase imediata, da fórmula anterior:

3. Fórmula usando a equação geral do plano

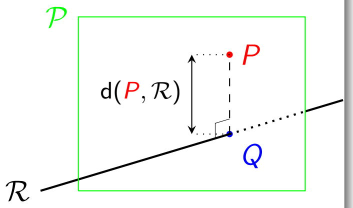
Sendo $P(x_0, y_0, z_0)$ e $ax + by + cz + d = 0$ uma equação geral do plano $\mathcal{P}$, tem-se

$$d(P,\mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Distância de um ponto a uma reta

1. Abordagem usando o ponto "mais próximo" da reta

Dada uma reta $\mathcal{R}$ e um ponto $P \notin \mathcal{R}$, existe um único plano $\mathcal{P}$ perpendicular a $\mathcal{R}$ e que contém P.
Seja Q é o ponto de interseção da reta $\mathcal{R}$ com o plano $\mathcal{P}$.



A distância do ponto P à reta $\mathcal{R}$ é

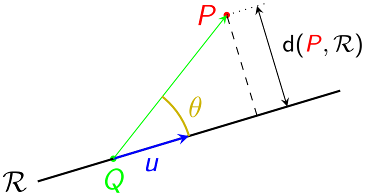
$$d(P, \mathcal{R}) = d(P, Q)\,.$$

Distância de um ponto a uma reta

2. Abordagem usando um qualquer ponto da reta

Seja uma reta reta $\mathcal{R}$ que passa pelo ponto Q com vetor diretor u e um ponto $P \notin \mathcal{R}$.

$$d(P,\mathcal{R}) = \|\overrightarrow{QP}\| \, |\sin(\theta)| = \frac{\|u \times \overrightarrow{QP}\|}{\|u\|},$$



onde θ é o ângulo entre u e $\overrightarrow{QP}$.

Distâncias redutíveis à distância de um ponto a uma reta

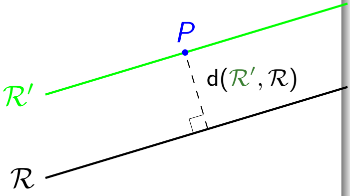
Duas retas disjuntas de $\mathbb{R}^3$ são estritamente paralelas ou enviesadas[a].

[a] Este caso ver no slide 28

Distância entre retas paralelas

A distância entre retas estritamente paralelas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ é

$$d(\mathcal{R}', \mathcal{R}) = d(P, \mathcal{R}), \text{ para qualquer } P \in \mathcal{R}'.$$

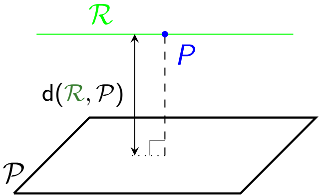


Distâncias redutíveis à distância de um ponto a um plano

1. Distância de uma reta a um plano

Sejam $\mathcal{R}$ uma reta e $\mathcal{P}$ um plano disjuntos, logo são estritamente paralelos.
A distância da reta $\mathcal{R}$ ao plano $\mathcal{P}$ é

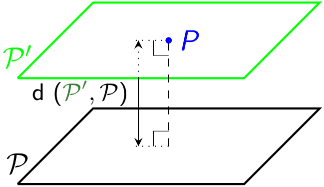
$$d(\mathcal{R},\mathcal{P}) = d(P,\mathcal{P}), \text{ para qualquer } P \in \mathcal{R}.$$



2. Distância entre planos

Sejam $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ dois planos disjuntos, logo são estritamente paralelos.
A distância entre os planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ é

$$d(\mathcal{P}',\mathcal{P}) = d(P,\mathcal{P}), \text{ para qualquer } P \in \mathcal{P}'.$$



Distâncias redutíveis à distância de um ponto a um plano

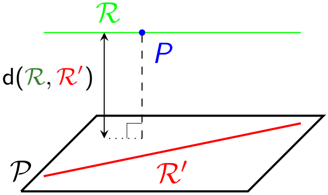
3. Distância entre retas enviesadas

Dadas retas enviesadas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$, existe um único plano $\mathcal{P}$ estritamente paralelo a $\mathcal{R}$ e que contém $\mathcal{R}'$.

A distância entre retas enviesadas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ é

$$\begin{aligned} d(\mathcal{R},\mathcal{R}') &= d(\mathcal{R},\mathcal{P}) \\ &= d(P,\mathcal{P}), \end{aligned}$$

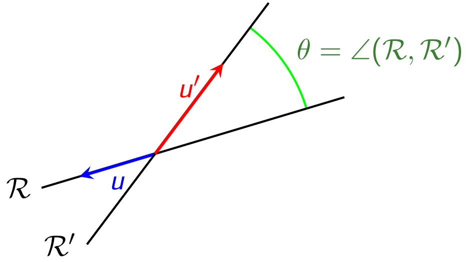
para qualquer $P \in \mathcal{R}$.



Ângulo entre retas

Dadas duas retas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ de vetores diretores u e u', respetivamente, o ângulo entre as retas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ é

$$\angle(\mathcal{R}, \mathcal{R}') = \text{arccos} \frac{|u \cdot u'|}{\|u\| \|u'\|}.$$



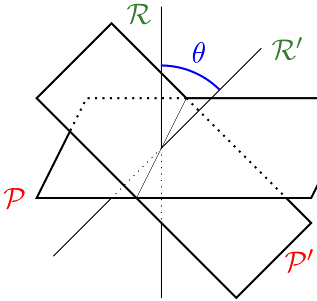
Observações:

$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\theta = 0$ se e só se as retas são paralelas.

Ângulo entre planos

Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ retas perpendiculares aos planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$, respetivamente, o ângulo entre os planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ é

$$\angle(\mathcal{P},\mathcal{P}') = \angle(\mathcal{R},\mathcal{R}')\,.$$



$\theta = \angle(\mathcal{P},\mathcal{P}')$

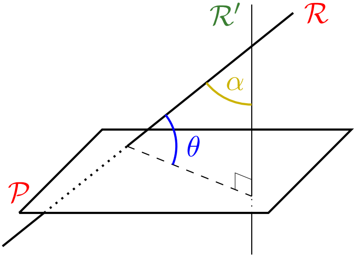
Ângulo entre uma reta e um plano

O ângulo entre uma reta $\mathcal{R}$ e um plano $\mathcal{P}$ é

$$\angle(\mathcal{R},\mathcal{P}) = \frac{\pi}{2} - \angle(\mathcal{R},\mathcal{R}')$$

onde $\mathcal{R}'$ é uma reta ortogonal ao plano $\mathcal{P}$. Assim,
sendo u um vetor diretor da reta $\mathcal{R}$ e w um vetor ortogonal ao plano $\mathcal{P}$,

$$\angle(\mathcal{R},\mathcal{P}) = \operatorname{arcsin} \frac{|u \cdot w|}{\|u\|\|w\|}\,.$$



$$\theta = \angle(\mathcal{R},\mathcal{P})$$
$$\alpha = \angle(\mathcal{R},\mathcal{R}')$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$