Permutações

Universidade de Aveiro 2018/2019

http://moodle.ua.pt

Permutações

- Uma permutação π dos elementos do conjunto $[n]$ pode ser interpretada como uma bijecção

$$\pi : [n] \to [n].$$

Neste caso, usualmente, escreve-se π_i em vez de $\pi(i)$.

- É muito comum denotar uma permutação π por

$$\pi = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & z \\ \pi_a & \pi_b & \cdots & \pi_z \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

onde na primeira linha aparecem os elementos de $[n]$, segundo uma ordem arbitrária, e na segunda aparecem as correspondentes imagens por π.

- Note-se que $\pi(a) = \pi_a$, $\pi(b) = \pi_b$, ..., $\pi(z) = \pi_z$.

Permutações (cont.)

- No caso particular em que os elementos de $[n]$ aparecem na primeira linha de (1) segundo a ordem natural, ou seja,

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

esta permutação pode escrever-se na forma mais compacta

$$\pi = (\pi_1 \; \pi_2 \; \ldots \; \pi_n)$$

ou, simplesmente $(\pi_1 \; \pi_2 \; \ldots \; \pi_n)$.

- Vamos denotar por S_n o conjunto de permutações de elementos do conjunto $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Permutação identidade

Definição (de permutação identidade)

Para cada inteiro $n \geq 1$, a permutação $\pi \in S_n$ tal que $\forall i \in [n]\, \pi(i) = i$ designa-se por permutação identidade e denota-se por π_{id}.

- Tendo em conta as observações anteriores, podemos ainda representar a permutação identidade por $\pi_{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ ou $\pi_{id} = (1\ 2\ \ldots\ n)$.

Composição de permutações

- Uma vez que as permutações são bijecções, a composição de permutações define-se em coerência com a composição de bijecções.
- Como consequência, se $\pi, \rho \in S_n$, então $\pi \circ \rho \in S_n$ e $\rho \circ \pi \in S_n$.

Exemplo

Vamos determinar as composições $\pi \circ \rho$ e $\rho \circ \pi$ das permutações $\pi = (3\ 4\ 1\ 5\ 2)$ e $\rho = (4\ 3\ 2\ 5\ 1)$ (do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$).

Solução. Uma vez que $\pi \circ \rho(1) = \pi(\rho(1)) = \pi(4) = 5$,$\pi \circ \rho(2) = \pi(\rho(2)) = \pi(3) = 1$, $\ldots$, vem $\pi \circ \rho = (5\ 1\ 4\ 2\ 3)$. Analogamente $\rho \circ \pi(1) = \rho(\pi(1)) = \rho(3) = 2$, $\rho \circ \pi(2) = \rho(\pi(2)) = \rho(4) = 5$, $\ldots$, logo $\rho \circ \pi = (2\ 5\ 4\ 1\ 3)$.

Permutações inversas

- Dada uma permutação $\pi = (\pi_1\ \pi_2\ \ldots\ \pi_n)$, existe a respectiva permutação inversa π^{-1}, a qual podemos determinar trocando as linhas da notação (1), isto é,

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

- Observe-se que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\pi^{-1} \circ \pi(i) = \pi^{-1}(\pi(i)) = \pi^{-1}(\pi_i) = i.$$

Partição cíclica de uma permutação

- Para cada permutação $\pi \in S_n$ existe uma única partição do conjunto $[n]$ em subconjuntos não vazios X_1, $\ldots$, X_k tal que

$$\forall j \in \{1, \ldots, k\}\ \forall x \in \{1, \ldots, n\} \qquad x \in X_j \Rightarrow \pi(x) \in X_j$$

e nenhum X_j se pode partir em dois subconjuntos não vazios com a mesma propriedade. Uma tal partição é única para cada permutação π e designa-se por partição cíclica de π.

Exercício

Determine a partição cíclica da permutação

$$\pi = (2\ 8\ 1\ 3\ 9\ 6\ 5\ 4\ 7).$$

Ciclo de uma permutação

- Dado um subconjunto $\{x_1, \ldots, x_s\}$ da partição cíclica de uma permutação π, podemos ordenar os respectivos elementos, apresentando-os de acordo com a ordenação definida simbolicamente por $[x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}]$, de tal forma que

$$\begin{aligned} \pi(x_{i_1}) &= x_{i_2}, \\ \pi(x_{i_2}) &= x_{i_3}, \\ &\vdots \\ \pi(x_{i_{s-1}}) &= x_{i_s}, \\ \pi(x_{i_s}) &= x_{i_1} \end{aligned}$$

- A representação desta ordenação não é única. Por exemplo, a ordenação $[1, 2, 8, 4, 3]$ é idêntica a qualquer das ordenações $[2, 8, 4, 3, 1]$, $[8, 4, 3, 1, 2]$, $[4, 3, 1, 2, 8]$ e $[3, 1, 2, 8, 4]$.

Ciclo de uma permutação (cont.)

Definição (de ciclo de uma permutação e comprimento de um ciclo)

Designa-se por *ciclo de uma permutação* cada uma das ordenações associadas a um subconjunto da partição cíclica de uma permutação π, $X = [x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}]$, a qual se interpreta como sendo uma permutação π_X tal que

$$\pi_X(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \notin X, \\ x_{i_{k+1}}, & \text{se } x = x_{i_k}, \text{ com } k \in \{1, \ldots, s-1\}, \\ x_{i_1}, & \text{se } x = x_{i_s}. \end{cases}$$

Por sua vez, o número de elementos do ciclo X designa-se por *comprimento do ciclo*.

- Observe-se que se o comprimento de um ciclo X é igual 1, então a permutação π_X é a permutação identidade.

Decomposição num produto de ciclos

- Como consequência da definição, sendo $\pi \in S_n$ e $X_1, \ldots, X_k$ os subconjuntos de $[n]$ da correspondente partição cíclica, verifica-se que

$$\pi = \pi_{X_1} \circ \pi_{X_2} \circ \cdots \circ \pi_{X_k}. \tag{3}$$

- Com efeito, se $x \in \{1, \ldots, n\}$, então existe um único j tal que $x \in X_j$ (e também $\pi_x \in X_j$). Por definição,

$$\forall i \in [k] \setminus \{j\} \qquad \pi_{X_i}(x) = x \ \wedge \ \pi_{X_j}(x) = \pi_x$$

o que implica $\pi_{X_1} \circ \pi_{X_2} \circ \cdots \circ \pi_{X_k}(x) = \pi_{X_j}(x) = \pi(x)$.

- Dada uma permutação $\pi \in S_n$, a factorização (3), designa-se por decomposição de π num produto de ciclos.

Tipos de permutações

Definição (de tipo de uma permutação)

Se a decomposição de uma permutação $\pi \in S_n$ num produto de ciclos contém λ_i ciclos de comprimento i, para $i = 1, \ldots, n$, então diz-se que a permutação π é do tipo

$$1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots n^{\lambda_n}.$$

- Como consequência da definição, $\sum_{i=1}^{n} i\lambda_i = n$.
- Com esta notação, em geral, omitem-se todos os símbolos da forma i^{λ_i}, com $\lambda_i = 0$.

Exemplo: A permutação $\pi = [1, 2, 8, 4, 3] \circ [5, 9, 7] \circ [6]$ é do tipo $1^1 3^1 5^1$.

Transposições e inversões

Definição (de transposição)

Uma permutação $\tau \in S_n$ diz-se uma transposição se é um ciclo de comprimento dois.

- Cada transposição τ é igual à sua inversa, isto é, $\tau^{-1} = \tau$ ou de modo equivalente $\tau \circ \tau = \pi_{id}$. Por outro lado, se $\pi = (\pi_1 \ \ldots \ \pi_n) \in S_n$ e $\tau = [i, i+1] \in S_n$, então
$$\pi \circ \tau = (\pi_1 \ \pi_2 \ \ldots \ \pi_{i-1} \ \pi_{i+1} \ \pi_i \ \pi_{i+2} \ \ \pi_{i+3} \ldots \ \pi_n).$$

Definição (de inversão)

Dada a permutação $\pi = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S_n$. O par (x_i, x_j), com $i < j$, designa-se por inversão de π se $x_i > x_j$.

- O número de todas as inversões da permutação π denota-se por $I(\pi)$. Cada permutação $\pi \in S_n$ pode representar-se como produto (composição) de $I(\pi)$ transposições.

Sinal de uma permutação

Definição (de sinal de uma permutação)

Dada uma permutação $\pi \in S_n$, o número $(-1)^{I(\pi)}$ designa-se por sinal da permutação π e denota-se por $sgn(\pi)$.

Algumas propriedades:
- Uma vez que $I(\pi_{id}) = 0$, $sgn(\pi_{id}) = 1$.
- Se τ é uma transposição, então $sgn(\tau) = -1$.
- Se $\pi, \rho \in S_n$, então $sgn(\pi \circ \rho) = sgn(\pi) sgn(\rho)$.
- Se uma permutação π é um ciclo de comprimento k, então $sgn(\pi) = (-1)^{k-1}$.
- Se uma permutação π é do tipo $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \cdots n^{\lambda_n}$, então
$$sgn(\pi) = (-1)^{\lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_6 + \cdots}. \tag{4}$$

Paridade de uma permutação

Definição (de paridade de uma permutação)

A permutação $\pi \in S_n$ diz-se par se $sgn(\pi) = 1$ e diz-se ímpar no caso contrario.

- Denotando o conjunto das permutações pares do conjunto $[n]$ por P_n, ou seja, $P_n = \{\pi \in S_n : sgn(\pi) = 1\}$, pode concluir-se que se $\pi, \rho \in P_n$ então $\pi \circ \rho \in P_n$ e $\pi^{-1} \in P_n$.

Exemplo

Vamos demonstrar que $|P_n| = \frac{1}{2}n!$.

Solução. Se $\pi \in P_n$, então $\pi \circ [1, 2]$ é ímpar e se $\rho \in S_n \setminus P_n$, então $\rho \circ [1, 2]$ é par. Por outro lado, se $\pi, \rho \in S_n$ e $\pi \neq \rho$ então $\pi \circ [1, 2] \neq \rho \circ [1, 2]$. Como consequência, $\Phi : P_n \to S_n \setminus P_n$ tal que $\Phi(\pi) = \pi \circ [1, 2]$ é uma bijecção. Logo, pela princípio da bijecção, $|P_n| = |S_n \setminus P_n| = \frac{1}{2}n!$.

Referências e bibliografia I

D. M. Cardoso, J. Szymanski e M. Rostami, *Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos*, Escolar Editora, 2008.