1

Mecânica e Campo Eletromagnético

2019/2020 – parte 4

Luiz Pereira
luiz@ua.pt

2

Tópicos

- **Movimento de um sistema de partículas**
  - **Momento linear do sistema**
  - **Conservação do momento linear**
  - **Centro de massa**
  - **Colisões**
  - **Sistema de massa variável**

Momento linear (recordar)

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

direção e sentido: velocidade

Unidades fundamental do S.I: (kg .m / s)

Quanto maior é o momento linear de um corpo, mais difícil é travá-lo e maior será o efeito provocado se for posto em repouso por impacto ou colisão.

Força (resultante) e momento linear

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$$\vec{F}^{R}_{ext} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{F}^{R}_{ext} = m\vec{a}$$

Na mecânica clássica,

para uma partícula isolada,

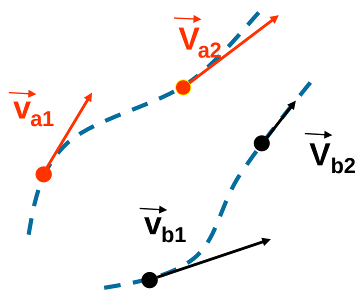
$\vec{F}^{R}_{ext} = m\vec{a}$ **e** $\vec{F}^{R}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

são completamente equivalentes

A variação temporal do momento linear de um corpo é igual à força resultante que atua sobre o corpo.

Princípio da conservação do momento linear

Sistema: partícula a + partícula b



$$\vec{P}_{sistema} = \vec{p}_a + \vec{p}_b$$

Instante t_1 $\quad \vec{P}^1_{sistema} = \vec{p}_{a1} + \vec{p}_{b1}$

Instante t_2 $\quad \vec{P}^2_{sistema} = \vec{p}_{a2} + \vec{p}_{b2}$

O MOMENTO LINEAR TOTAL DE UM SISTEMA COMPOSTO POR DUAS PARTÍCULAS SUJEITAS APENAS ÀS SUAS INTERAÇÕES MÚTUAS PERMANECE CONSTANTE

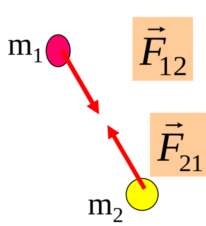
$$\boxed{\vec{P}^1_{SISTEMA} = \vec{P}^2_{SISTEMA}}$$

Sistema Isolado: Conservação do Momento Linear

Consideremos um sistema isolado constituído por duas partículas.

Ser isolado significa que não há forças exteriores aplicadas (ou resultante nula)

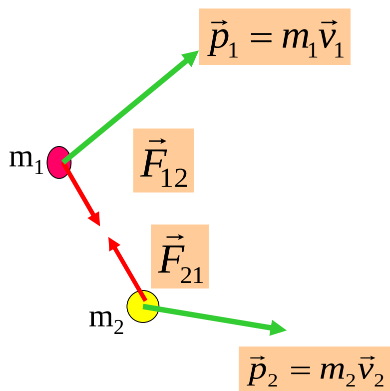
Assim cada partícula estará apenas sujeita à interação com a outra partícula.

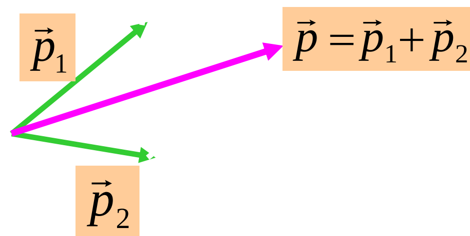


De acordo com a 3ª Lei de Newton:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Sistema Isolado: Conservação do Momento Linear





O que acontece ao momento linear de cada partícula?

E do conjunto?

Sistema Isolado: Conservação do Momento Linear

Para cada partícula temos

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Então:

$$\vec{F}_{12} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} \qquad \vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

O momento linear de cada partícula varia

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = const.$$

O momento linear do conjunto NÃO varia

Sistema Isolado: Conservação do Momento Linear

O momento linear total de um sistema, composto por várias partículas sujeitas somente às suas interações mútuas, permanece constante

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$

Princípio da Conservação do Momento Linear num Sistema Isolado

O princípio de conservação do momento linear é um dos conceitos mais importantes na física

Sistema Isolado: Conservação do Momento Linear

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots = const.$$

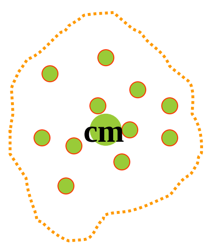
A três dimensões:

$$P_{x_i} = P_{x_f}$$
$$P_{y_i} = P_{y_f}$$
$$P_{z_i} = P_{z_f}$$

Centro de massa

Vamos ver que:

Para qualquer sistema de partículas existe um ponto que se move sob a ação das forças aplicadas ao sistema como se toda a sua massa desse sistema estivesse concentrada nesse ponto: o centro de massa (cm)

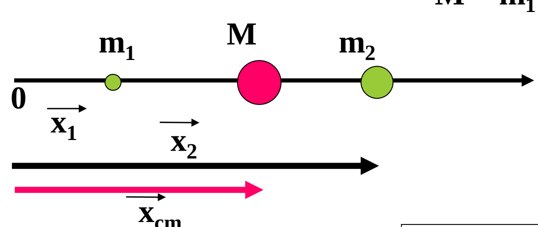


Independentemente dos movimentos individuais neste grupo de partículas, a dinâmica do centro de massa obedece à 2ª Lei de Newton

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm.}$$

Centro de massa a 1D

$$\mathbf{M = m_1 + m_2}$$



$$M\vec{x}_{cm} = (m_1x_1 + m_2x_2)\hat{i}$$

$$\vec{x}_{cm} = \left(\frac{m_1x_1 + m_2x_2}{M}\right)\hat{i}$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{cm}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{M}}\sum \mathbf{m_i}\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{i}}}$$

Para N partículas

Centro de massa a 3D

Posição do centro de massa para um sistema de partículas

$$\vec{r}_{c.m.} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$$

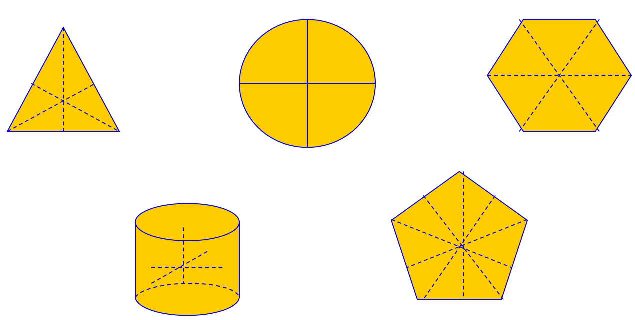
$$com \quad \vec{r}_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k} \;\; e \;\; M = \sum m_i$$

Posição do centro de massa para uma distribuição contínua de massa

$$\vec{r}_{c.m.} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum \Delta m_i \vec{r}_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{1}{M} \int \vec{r}\, dm$$

Centro de massa a 3D

No caso de objectos simétricos com densidade uniforme o centro geométrico do corpo coincide com o centro de massa do mesmo.



Movimento de um sistema de partículas

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}\sum m_i \frac{dr_i}{dt} = \frac{\sum m_i v_i}{M}$$

$$\boxed{M\vec{v}_{cm} = \sum m_i \vec{v}_i = \sum \vec{p}_i = \vec{P}}$$

O momento linear total de um sistema de várias partículas é igual ao de uma partícula de massa M deslocando-se com velocidade $\vec{v}_{cm}$

Movimento de um sistema de partículas

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}\sum m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{M}$$

$$M\vec{a}_{cm} = \sum m_i \vec{a}_i = \sum \vec{F}_i$$

$\vec{F}_i$ são as forças exteriores aplicadas sobre cada uma das partículas componentes do sistema.

Note que as forças internas (entre os componentes) não contribuem para a variação da quantidade do movimento do sistema.

Movimento de um sistema de partículas

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Diz-nos que:

Se a resultante das forças externas aplicadas é igual a zero: $a_{cm} = 0 \Rightarrow$

o sistema está em repouso ou em movimento uniforme

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = M\vec{a}_{c.m.} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{p} = M\vec{v}_{cm} = const.$$

O centro de massa de um sistema de partículas move-se como se fosse uma partícula de massa igual à massa total do sistema sujeito à ação de uma força externa aplicada ao sistema

Colisões

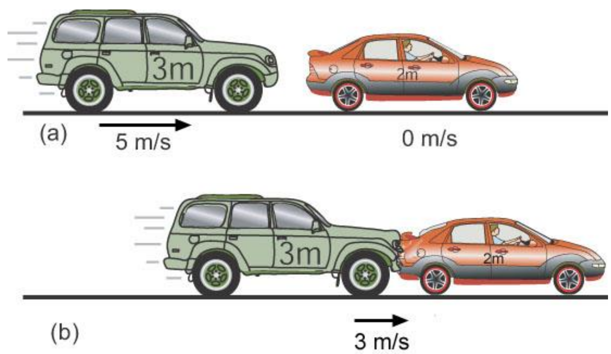
- Numa colisão há forte interação entre as massas
- As forças impulsivas são normalmente muito superiores a qualquer força externa
- Poderá ou não existir contato físico

De acordo com a 3ª Lei de Newton:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\vec{p}_1 = \triangleright -\Delta\vec{p}_2 \\ \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = \vec{0} \end{array}}$$

A variação do momento linear do sistema devido à colisão é zero

Colisões

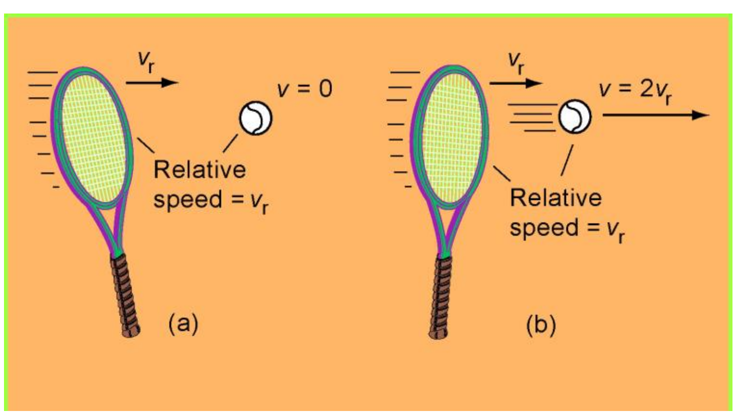


O momento é conservado nesta colisão?

Sim, o momento inicial é 3m x 5 m/s = 15 kgm/s

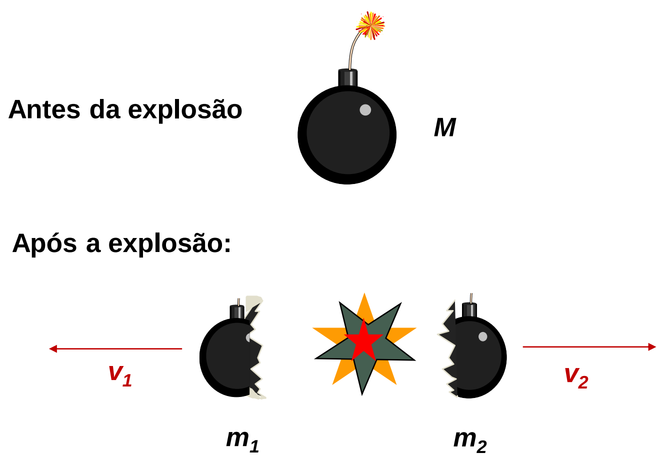
E o momento final é 5m x 3 m/s = 15 kgm/s

Colisão elástica



Numa colisão elástica a velocidade relativa entre os objetos mantém-se antes e após a colisão

Explosão a 1D: uma só componente



Explosão a 1D: uma só componente

- $\boldsymbol{P}$ é conservado (forças externas são nulas).
- Antes da explosão: $\boldsymbol{P} = 0$

- Após a explosão: $\boldsymbol{P} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = 0$

$$m_1\boldsymbol{v}_1 = -\, m_2\boldsymbol{v}_2$$

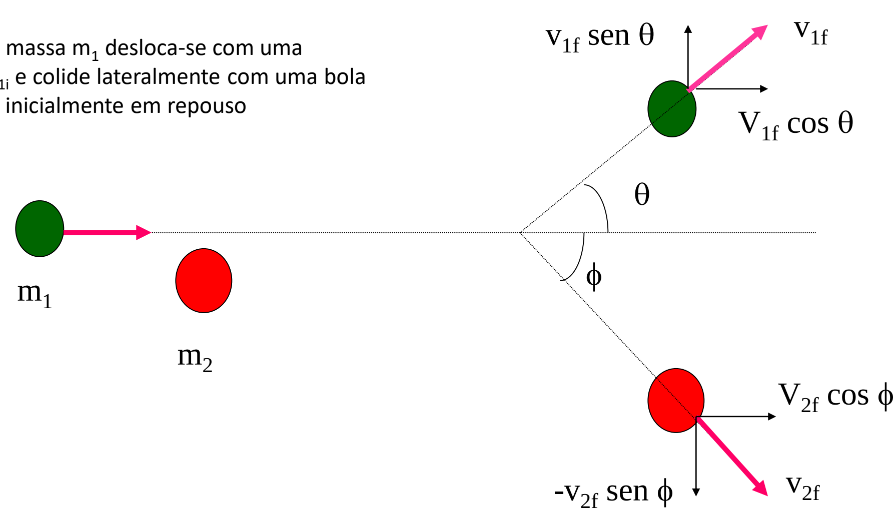
Colisões

A conservação do momento linear diz que, na ausência de forças externas, o vetor momento total antes da colisão é o mesmo após a colisão

- Colisões elásticas: colisões que conservam momento e energia cinética
- Colisões inelásticas: colisões que só conservam momento
- Colisões perfeitamente inelásticas: os objetos mantêm-se juntos após a colisão

Exemplo

Uma bola de massa m_1 desloca-se com uma velocidade v_{1i} e colide lateralmente com uma bola de massa m_2 inicialmente em repouso



Conservação do momento linear

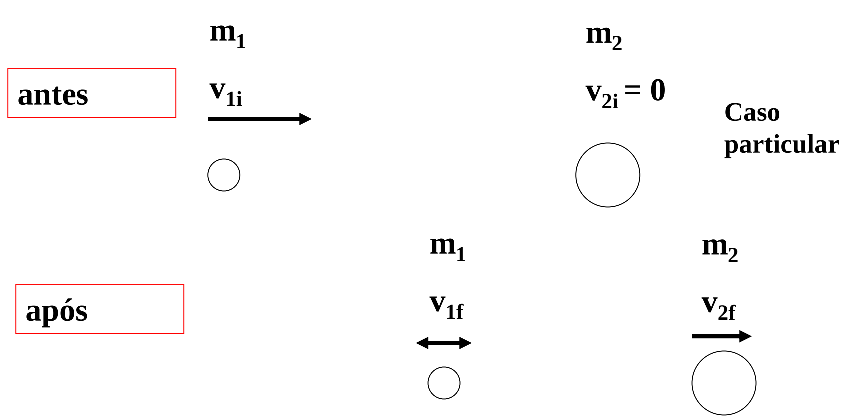
Lei da conservação do momento linear : $\vec{P}_i = \vec{P}_f$

$$\begin{array}{ll} x & \\ y & \end{array} \begin{cases} P_{x\,i} = P_{x\,f} \\ P_{y\,i} = P_{y\,f} \end{cases} \qquad \begin{cases} m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta + m_2 v_{2f} \cos\phi \\ 0 = m_1 v_{1f} \,\mathrm{sen}\,\theta - m_2 v_{2f} \,\mathrm{sen}\,\phi \end{cases}$$

Se a colisão for elástica : $Ec_i = Ec_f$

$$1/2\, m_1 v_1{}^2{}_i = 1/2\, m_1 v_1{}^2{}_f + 1/2\, m_2 v_2{}^2{}_f$$

Colisão elástica a uma dimensão



Colisão elástica a uma dimensão

Conservação do momento $m_1v_{1i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f}$...(1)

$m_2v_{2f} = m_1(v_{1i} - v_{1f})$.........(2)

Conservação de Energia $1/2m_1v_{1f}^2 + 1/2m_2v_{2f}^2 = 1/2m_1v_{1i}^2$

$1/2m_2v_{2f}^2 = 1/2m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2)$

$m_2v_{2f}^2 = m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f})$ ......(3)

Dividindo a Eq. (3) pela (2) ➔ $v_{2f} = v_{1i} + v_{1f}$ ....(4)

Colisão elástica a uma dimensão

V_{1i} geralmente é dado, pelo que para calcular v_{2f} precisamos de uma expressão para v_{1f}. A partir da Eq. (1):

$m_1v_{1f} = m_1v_{1i} - m_2v_{2f}$

$$v_{1f} = \frac{m_1v_{1i} - m_2v_{2f}}{m_1} = v_{1i} - \frac{m_2}{m_1}v_{2f}$$

Substituindo na Eq. (4) $v_{2f} = v_{1i} + v_{1i} - m_2/m_1\, v_{2f}$

$$v_{2f} = (\frac{2m_1}{m_1 + m_2})v_{1i}$$

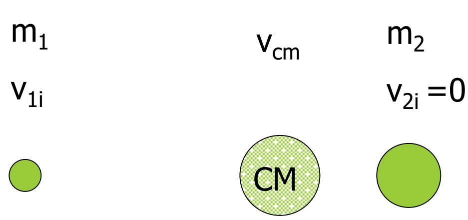
$$v_{1f} = (\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2})v_{1i}$$

Colisão elástica a uma dimensão

$$\boxed{v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}} \qquad \boxed{v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}}$$

Se $m_1 >> m_2$	$v_{2f} \rightarrow 2v_{1i}$	$v_{1f} \rightarrow v_{1i}$
Se $m_2 >> m_1$	$v_{2f} \rightarrow 0$	$v_{1f} \rightarrow -v_{1i}$
Se $m_1 = m_2$	$v_{2f} \rightarrow v_{1i}$	$v_{1f} \rightarrow 0$

Velocidade do centro de massa (CM)



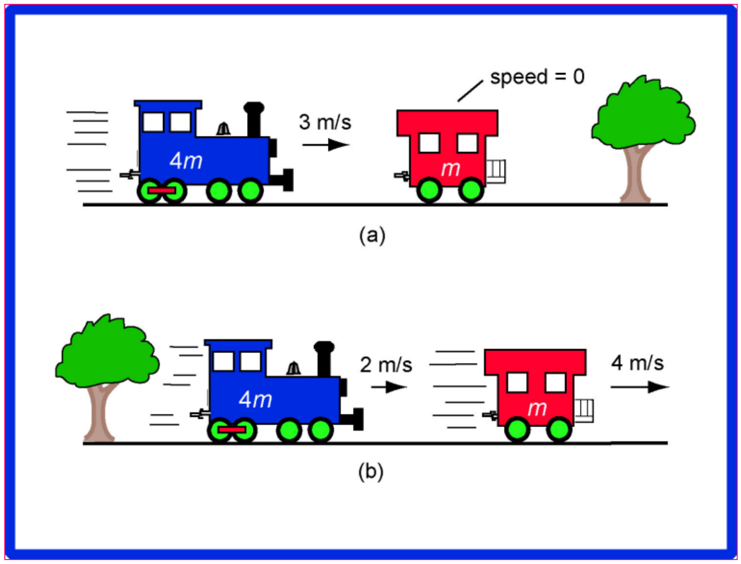
Velocidade do centro de massa (CM)

Momento linear do CM = momento de m_1 + momento de m_2 : $(m_1 + m_2)\, V_{cm} = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}$

$$V_{cm} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

É constante!

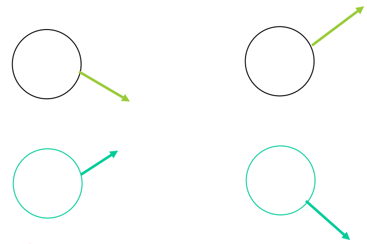
Colisão inelástica



Colisão perfeitamente inelástica

Após a colisão a velocidade relativa entre os objetos é zero

Colisões a duas dimensões



$P_{total,x}$ e $P_{total,y}$ conservam-se individualmente

$P_{total,x,antes} = P_{total,x,após}$

$P_{total,y,antes} = P_{total,y,após}$