

UNIVERSIDADE DE AVEIRO

Departamento de Matemática

Matemática Discreta

Teste $N^{\circ}1$ de Matemática Discreta

26 de Abril de 2019

Responda de forma cuidada e justificadamente a cada uma das questões.

Tempo para a realização desta prova: 2 horas.

- 1-** Considere a relação binária de \mathbb{R}^2 definida da seguinte forma

$$(a, b)R(c, d) \text{ se e só se } |a| + |b| = |c| + |d|.$$

(1)a) Mostre que R é uma relação de equivalência.

(1)b) Determine e descreva geometricamente a classe de equivalência $[(1, 3)]$.

- 2-** Na tribo do Sol, os mais poderosos nascem com um sinal na pele com a forma de um quarto crescente e sabe-se que esta é uma característica hereditária. Considere os seguintes predicados: $Q(x)$ - " x tem o sinal em forma de quarto crescente",
 $P(x, y)$ - " x é pai de y ",

(1)a) Escreva uma formula em linguagem de primeira ordem que descreve a característica de hereditariedade acima referida;

(2)b) Sabendo que o grande chefe Xu tem um sinal de quarto crescente e o feiticeiro Pi é neto do grande chefe Xu, use o principio da resolução para mostrar que o feiticeiro Pi tem um sinal de quarto crescente.

- 3-** Demonstre por indução cada uma das desigualdades (tendo em conta os respetivos valores de n).

(2)a) $(2n + 1) \leq n^2$, para $n \geq 3$.

(1)b) $2^n > n^2$, para $n \geq 5$ (**sugestão**: utilize a desigualdade da alínea anterior).

- (2)4- Dado um subconjunto $A \subseteq \mathbb{Z}$, com $|A| = n + 1$ e $n \geq 1$, mostre que existem $x, y \in A$ tais que $x \neq y$ e $n \mid (x - y)$ (ou seja, $x - y$ é um múltiplo de n).

- 5-** Uma empresa de desenvolvimento de software tem 100 informáticos. Destes, 45 programam em Java, 30 em C++, 20 em Python, 6 em C++ e Java, 1 em Java e Python, 5 em C++ e Python, e apenas uma pessoa programa nas três linguagens.
- (1,5)**a)** Determine o número de informáticos que programam em Python e não programam em Java nem em C++.
- (1,5)**b)** O número de informáticos que não programam em nenhuma das três linguagens.
- 6-** Considere a permutação $\pi = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ b & d & h & a & g & c & e & f \end{pmatrix}$ e a transposição $\tau = [e, f]$ dos elementos do conjunto $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$.
- (1)**a)** Determine a decomposição cíclica e o tipo da permutação π .
- (1)**a)** Diga, justificando, se $\text{sgn}(\pi \circ \tau) \neq \text{sgn}(\tau \circ \pi^{-1})$.
- 7-** Uma ONG prepara pacotes de ajuda para escolas, cada pacote com 6 itens selecionados de entre 3 tipos de cadernos (lisos, quadriculados e de linhas), 4 tipos de livros (de matemática, história, português e ciências) e 3 tipos de materiais de escrita (lápiz, canetas, marcadores).
- (1,5)**a)** Indique o número de pacotes que podem ser preparados.
- (1,5)**b)** Sabendo que a ONG preparou 200 pacotes de ajuda que, para efeito de distribuição, são considerados iguais, determine o número de possibilidades de distribuir os pacotes por 10 escolas de modo a que cada uma seja contemplada com pelo menos 18 pacotes.
- (2)**8-** Determine o coeficiente de $x^5y^3z^4$ no desenvolvimento de $(2x + xy - z)^9$, com recurso à fórmula multinomial.