Matemática Discreta

Relações de Recorrência Linear Não Homogéneas

Universidade de Aveiro 2018/2019

http://moodle.ua.pt

Equação de recorrência linear não homogénea de ordem r

Definição

Designa-se por equação de recorrência linear não homogénea de ordem r, uma equação do tipo

$$a_n - c_1 a_{n-1} - c_2 a_{n-2} - \cdots - c_r a_{n-r} = f(n), \qquad (1)$$

onde $f(n)$ é uma função não nula e c_i ($i = 1, 2, \ldots, r$) são constantes. Para a resolução de (1) são necessárias r condições iniciais.

• Solução geral: $a_n = a_n^{(1)} + a_n^{(2)}$, onde $a_n^{(1)}$ é a solução geral da equação de recorrência linear homogénea

$$a_n - c_1 a_{n-1} - c_2 a_{n-2} - \cdots - c_r a_{n-r} = 0 \qquad (2)$$

e $a_n^{(2)}$ é uma solução particular da equação (1).

Determinação da solução particular $a_n^{(2)}$ (alguns casos)

• 1^o caso: $f(n) = cq^n$, onde q e c são constantes com $q \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$. Então

$$a_n^{(2)} = An^m q^n,$$

onde $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ é a multiplicidade de q enquanto raiz característica da equação linear homogénea (2) (caso não seja raiz, tem-se $m = 0$) e A é uma constante. Note-se que quando $q = 1$, $f(n) = c$, ou seja, é um polinómio de grau zero.

• 2^o caso: $f(n)$ é um polinómio (na variável n) de grau $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Então

$$a_n^{(2)} = A_0 n^r + A_1 n^{r+1} + \cdots + A_k n^{r+k},$$

onde $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ é a multiplicidade de 1 enquanto raiz característica da equação linear homogénea (2) (caso não seja raiz, tem-se $r = 0$) e $A_0, A_1, \ldots, A_k$ são constantes.

Determinação da solução particular $a_n^{(2)}$ (cont.)

- 3^o caso: $f(n) = f_1(n) + f_2(n) + \cdots + f_k(n)$.

- Se $a_{n,1}^{(2)}, a_{n,2}^{(2)}, \ldots, a_{n,k}^{(2)}$ são soluções particulares das equações de recorrência lineares não homogéneas

$$a_n - c_1 a_{n-1} - c_2 a_{n-2} - \cdots - c_r a_{n-r} = f_i(n), \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

então

$$a_n^{(2)} = a_{n,1}^{(2)} + a_{n,2}^{(2)} + \cdots + a_{n,k}^{(2)}.$$

Exemplo

- Vamos determinar a solução da equação de recorrência

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + f(n), \; n = 2, 3, \ldots, \qquad (3)$$

com $a_0 = 0$ e $a_1 = -2$, se

(a) $f(n) = 2^n$,

(b) $f(n) = 2^n + 1 + n$.

- Solução: A solução geral da equação homogénea associada, $a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$, é

$$a_n^{(1)} = C_1 + C_2 2^n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

- A solução particular para o caso (a), onde $f(n) = cq^n$, com $c = 1$ e $q = 2$, vem dada por $a_n^{(2)} = An2^n$. Por sua vez, a constante A obtém-se substituindo em (3), a_n por $a_n^{(2)}$.

Exemplo (cont.)

- Logo, $An2^n - 3A(n-1)2^{n-1} + 2A(n-2)2^{n-2} = 2^n$, o que é equivalente a $2An - 3A(n-1) + A(n-2) = 2 \Leftrightarrow 3A - 2A = 2$ $\Leftrightarrow A = 2$.
- Assim, $a_n^{(2)} = 2n2^n = n2^{n+1}$ e a solução geral da equação de recorrência (3) (no caso (a)) é

$$a_n = a_n^{(1)} + a_n^{(2)} = C_1 + C_2 2^n + n2^{n+1}.$$

- Determinação das constantes C_1 e C_2:

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_1 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + 2C_2 + 4 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1 = -C_2 \\ C_2 = -6. \end{array}\right.$$

Logo, $C_1 = 6$, $C_2 = -6$ e a solução da equação linear não homogénea é $a_n = 6 - 6 \cdot 2^n + n2^{n+1},\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Resolução do caso (b)

- Sabe-se que

$$a_n^{(1)} = C_1 + C_2 2^n \text{ e } a_n^{(2)} = n2^{n+1} + a_{n,2}^{(2)},$$

onde $n2^{n+1}$ é uma solução particular de $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2^n$ (ver alínea (a)) e $a_{n,2}^{(2)}$ é uma solução particular da equação de recorrência

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 1 + n. \tag{4}$$

- Determinação de $a_{n,2}^{(2)}$:
- Uma vez que $f(n) = 1 + n$ é um polinómio de grau $k = 1$ e 1 é raiz característica de multiplicidade $r = 1$,

$$a_{n,2}^{(2)} = A_0 n + A_1 n^2.$$

Resolução do caso (b) (cont.)

- Substituindo em (4), a_k por $a_{k,2}^{(2)}$ (para $k = n-2, n-1, n$), obtém-se

$$a_{n,2}^{(2)} = -\frac{7}{2}n - \frac{1}{2}n^2.$$

- Então $a_n = a_n^{(1)} + a_n^{(2)} = C_1 + C_2 2^n + n2^{n+1} - \frac{7}{2}n - \frac{1}{2}n^2$. Vamos determinar as constantes, C_1 e C_2.

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_1 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + 2C_2 + 4 - \frac{7+1}{2} = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1 = -C_2 \\ C_2 = -2 \end{array}\right.$$

- Logo, $C_1 = 2$, $C_2 = -2$ e a solução da equação linear não homogénea é

$$a_n = 2 - 2^{n+1} + n2^{n+1} - \frac{7}{2}n - \frac{1}{2}n^2, \; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Referências e bibliografia I

D. M. Cardoso, J. Szymanski e M. Rostami, *Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos*, Escolar Editora, 2008.