4. Espaços Vetoriais Reais

UA, 18/11/2018

ALGA – Agrup. IV 18/19

Resumo dos Conteúdos

Definição de Espaço Vetorial Real

O conjunto $\mathcal{V}$, munido das operações $\oplus$ (adição) e $\odot$ (multiplicação por escalar real), é um espaço vetorial real se, $\forall X, Y, Z \in \mathcal{V}$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

1. $\mathcal{V}$ é fechado relativamente a $\oplus$ $\quad X \oplus Y \in \mathcal{V}$
2. $\oplus$ é comutativa $\quad X \oplus Y = Y \oplus X$
3. $\oplus$ é associativa $\quad (X \oplus Y) \oplus Z = X \oplus (Y \oplus Z)$
4. existe (único) o elemento neutro $0_{\mathcal{V}} \in \mathcal{V}$ para $\oplus$ $\quad 0_{\mathcal{V}} \oplus X = X$
5. existe (único) o simétrico $\ominus X \in \mathcal{V}$ de X em relação a $\oplus$ $\quad \ominus X \oplus X = 0_{\mathcal{V}}$
6. $\mathcal{V}$ é fechado relativamente a $\odot$ $\quad \alpha \odot X \in \mathcal{V}$
7. $\odot$ é distributiva em relação a $\oplus$ $\quad \alpha \odot (X \oplus Y) = \alpha \odot X \oplus \alpha \odot Y$
8. $\odot$ é "distributiva" em relação a $+$ $\quad (\alpha + \beta) \odot X = \alpha \odot X \oplus \beta \odot X$
9. os produtos (o de $\mathbb{R}$ e $\odot$) são "associativos" $\quad (\alpha\beta) \odot X = \alpha \odot (\beta \odot X)$
10. o escalar 1 é o "elemento neutro" para $\odot$ $\quad 1 \odot X = X$

A $0_{\mathcal{V}}$, elemento neutro de $\oplus$, chama-se zero de $\mathcal{V}$.

Exemplos de espaços vetoriais reais

1. $\mathbb{R}^n$ munido das operações adição e multiplicação por escalar usuais.
2. $\mathbb{R}^+$ munido das operações:
$$x \oplus y = xy \qquad \text{e} \qquad \alpha \odot x = x^\alpha, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^+,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$
3. O conjunto $\mathbb{R}^{m \times n}$ das matrizes $m \times n$ munido das operações adição de matrizes e multiplicação de uma matriz por um escalar real.
4. O conjunto de todas as funções reais de domínio $\mathbb{R}$ munido da adição de funções e multiplicação de uma função por um escalar real.
5. O conjunto $\mathcal{P}$ de todos os polinómios (de qualquer grau) munido das operações usuais.
6. $\mathcal{P}_n$ dos polinómios de grau menor ou igual a n, juntamente com o polinómio nulo, com as operações usuais.
   Nota: Não é espaço vetorial (e.v.) o conjunto dos polinómios de grau n com as operações usuais.

Propriedades básicas de um espaço vetorial real

Proposição:

Seja $\mathcal{V}$ um e.v. real. Então

1. $0 \odot X = 0_{\mathcal{V}}$, $\forall\, X \in \mathcal{V}$;
2. $\alpha \odot 0_{\mathcal{V}} = 0_{\mathcal{V}}$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$;
3. $\alpha \odot X = 0_{\mathcal{V}} \;\Rightarrow\; \alpha = 0$ ou $X = 0_{\mathcal{V}}$;
4. $(-1) \odot X = \ominus X$ é o simétrico de X em relação a $\oplus$, $\forall\, X \in \mathcal{V}$.

Observação:

Daqui em diante, escreve-se:

i. $X + Y$ em vez de $X \oplus Y$, para $X, Y \in \mathcal{V}$;
ii. αX em vez de $\alpha \odot X$, para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $X \in \mathcal{V}$;
iii. $-X$ em vez de $\ominus X$, para $X \in \mathcal{V}$.

Definição:

O subconjunto $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$ é um subespaço (vetorial) do e.v. real $\mathcal{V}$ se, munido das mesmas operações de $\mathcal{V}$, for ele próprio um e.v. real.

Teorema:

$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$ é um subespaço (vetorial) do e.v. real $\mathcal{V}$ se e só se

1. $\mathcal{S} \neq \emptyset$;
2. $\mathcal{S}$ é fechado em relação à adição de $\mathcal{V}$;
3. $\mathcal{S}$ é fechado em relação à multiplicação por escalar de $\mathcal{V}$.

Proposição:

Se $\mathcal{S}$ é um subespaço de $\mathcal{V}$, então $0_{\mathcal{V}} \in \mathcal{S}$.

Consequência imediata:

Se $0_{\mathcal{V}} \notin \mathcal{S}$, então $\mathcal{S}$ <u>não</u> é um subespaço de $\mathcal{V}$.

Exemplos:

1. $\mathcal{V}$ e $\{0_{\mathcal{V}}\}$ são os subespaços triviais de $\mathcal{V}$;
2. $\{(0, y, z) : \ y, z \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$;
3. $\{(1, y) : \ y \in \mathbb{R}\}$ <u>não</u> é subespaço de $\mathbb{R}^2$;
4. $\mathcal{N}(A)$, o espaço nulo da matriz A $m \times n$, é subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Espaço Gerado

Definição:

Seja $K=\{X_1,\ldots,X_k\}\subset\mathcal{V}$. Chama-se espaço gerado por K ao conjunto formado por todas as combinações lineares de $X_1,\ldots,X_k$, *i.e*, ao conjunto

$$\mathcal{S}=\{\alpha_1X_1+\cdots+\alpha_kX_k:\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{R}\}$$

Diz-se também que K gera $\mathcal{S}$ ou é um conjunto gerador de $\mathcal{S}$.
Notação: $\mathcal{S}=\langle K\rangle=\langle X_1,\ldots,X_k\rangle$

Exercício:

Confirme que $\mathcal{S}=\langle K\rangle$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{V}$.

Exemplos de espaços gerados (já estudados anteriormente):

1. Sendo $X_1 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$,
   $\langle X_1 \rangle$ é a reta que passa pela origem e tem vetor diretor X_1;
2. Sendo $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ vetores não colineares,
   $\langle X_1, X_2 \rangle$ é o plano que passa pela origem e que contém X_1 e X_2.
3. Seja A uma matriz $m \times n$ com linhas encaradas como vetores $L_1, \ldots, L_m \in \mathbb{R}^n$ e colunas encaradas como vetores $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}^m$.
   O espaço das linhas de A é o subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado por $\{L_1, \ldots, L_m\}$, *i.e.*,
   $$\mathcal{L}(A) = \langle L_1, \ldots, L_m \rangle.$$
   O espaço das colunas de A é o subespaço de $\mathbb{R}^m$ gerado por $\{C_1, \ldots, C_n\}$, *i.e*,
   $$\mathcal{C}(A) = \langle C_1, \ldots, C_n \rangle .$$

Proposição: (propriedades básicas dos conjuntos geradores)

Dados $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{V}$ e $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, com $i \neq j$,

i. $\langle X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_j, \ldots, X_k \rangle = \langle X_1, \ldots, X_j, \ldots, X_i, \ldots, X_k \rangle$;

ii. $\langle X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_k \rangle = \langle X_1, \ldots, \alpha X_i, \ldots, X_k \rangle$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

iii. $\langle X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_k \rangle = \langle X_1, \ldots, X_i + \beta X_j, \ldots, X_j, \ldots, X_k \rangle$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Exemplo:

$$\begin{aligned}
\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle &= \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle
\end{aligned}$$

Vetores Linearmente Independentes

Definição:

$\mathcal{K}=\{X_1,\ldots,X_k\}\subseteq\mathcal{V}$ é linearmente independente (l.i.) no e.v. real $\mathcal{V}$ se

$$\alpha_1X_1+\cdots+\alpha_kX_k = 0_{\mathcal{V}} \quad\Longrightarrow\quad \alpha_1=\cdots=\alpha_k=0.$$

Caso contrário, $\mathcal{K}$ é linearmente dependente (l.d.) em $\mathcal{V}$, ou seja,

existem $\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{R}$ não todos nulos tais que $\alpha_1X_1+\cdots+\alpha_kX_k=0_{\mathcal{V}}$.

Observações:

- Por outras palavras, $\mathcal{K}$ é l.i. se a única forma de escrever $O_{\mathcal{V}}$, como combinação linear de vetores de $\mathcal{K}$, é usando os coeficientes todos nulos.
- Se $0_{\mathcal{V}}\in\mathcal{K}$, então $\mathcal{K}$ é linearmente dependente.

Conjuntos Geradores/Independência Linear

Lema:

Sejam $\mathcal{V}$ um e.v. real, $\mathcal{K} = \{X_1, \ldots, X_k\} \subset \mathcal{V}$.
X é combinação linear dos vetores de $\mathcal{K} \setminus \{X\}$ se e só se $\langle \mathcal{K} \setminus \{X\} \rangle = \langle \mathcal{K} \rangle$.

Teorema:

Sejam $\mathcal{V}$ um e.v. real, $\mathcal{K} = \{X_1, \ldots, X_k\} \subset \mathcal{V}$.

- $\mathcal{K}$ é linearmente dependente se e só se
  existe $X \in \mathcal{K}$ tal que $\langle \mathcal{K} \setminus \{X\} \rangle = \langle \mathcal{K} \rangle$
- $\mathcal{K}$ é linearmente independente se e só se
  $\mathcal{K} \cup \{Z\}$ é linearmente independente, para cada $Z \in \mathcal{V} \setminus \langle \mathcal{K} \rangle$.

Corolário:

Sejam $\mathcal{V}$ um e.v. real, $\mathcal{K} = \{X_1, \ldots, X_k\} \subset \mathcal{V}$.

1. Se $\mathcal{K}$ gera $\mathcal{V}$ e não é linearmente independente, é possível retirar de $\mathcal{K}$ um elemento (pelo menos) por forma a que o conjunto obtido ainda gere $\mathcal{V}$.
2. Se $\mathcal{K}$ é linearmente independente e não gera $\mathcal{V}$, é possível acrescentar a $\mathcal{K}$ um elemento de $\mathcal{V}$ (devidamente escolhido) por forma a que o conjunto obtido ainda seja linearmente independente.

Corolário:

Se $\mathcal{V}$ é gerado por um número finito de vetores (dizemos que $\mathcal{V}$ é finitamente gerado), então $\mathcal{V}$ possui um conjunto lineamente independente de geradores.

Base de um espaço vetorial

Definição:

Uma base de um e.v. $\mathcal{V} \neq \{0_{\mathcal{V}}\}$ é um conjunto linearmente independente e gerador de $\mathcal{V}$.

<u>Convenção:</u> Se $\mathcal{V} = \{0_{\mathcal{V}}\}$, a base de $\mathcal{V}$ é o conjunto vazio.

Exemplos:

1. $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$;
2. $\{x^3+x, x^2, x+2, x-1\}$ é uma base de $\mathcal{P}_3$.

Base: escrita de um qualquer vetor de forma única

Proposição:

Sejam $\mathcal{V}$ um e.v. real e $\mathcal{K} = \{X_1, \ldots, X_k\} \subset \mathcal{V}$.

1. Se $\mathcal{K}$ gera $\mathcal{V}$, então qualquer elemento de $\mathcal{V}$ pode escrever-se, pelo menos de uma maneira, como combinação linear dos elementos de $\mathcal{K}$.

2. Se $\mathcal{K}$ é l.i., então qualquer elemento de $\mathcal{V}$ pode eventualmente escrever-se, no máximo de uma maneira, como combinação linear dos elementos de $\mathcal{K}$.

Teorema:

Se $\mathcal{B}$ é uma base de um e.v. $\mathcal{V}$, então cada vetor de $\mathcal{V}$ escreve-se de forma única como combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$.

Dimensão de um espaço vetorial

Teorema:

Seja $\mathcal{V}$ um e.v. com uma base de n vetores e $\mathcal{K} \subset \mathcal{V}$ com r vetores.

i. Se $\mathcal{K}$ l.i., então $r \leq n$.
   Neste caso, existe uma base de $\mathcal{V}$ que contém $\mathcal{K}$.

ii. Se $\mathcal{K}$ gera $\mathcal{V}$, então $r \geq n$.
   Neste caso, existe um subconjunto de $\mathcal{K}$ que é uma base de $\mathcal{V}$.

Corolário:

Duas bases de $\mathcal{V}$ possuem o mesmo número de elementos.

Definição:

A dimensão de $\mathcal{V}$ é o número de elementos de qualquer das suas bases.
Notação: $\dim \mathcal{V}$.

Alguns exemplos importantes

1. Por convenção, a base de $\{0_\mathcal{V}\}$ é $\emptyset$. Então, $\dim\{0_\mathcal{V}\} = 0$.
2. Sejam $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$. $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^n$. Então $\dim \mathbb{R}^n = n$
3. Seja E_{ij} a matriz $m \times n$. que tem a entrada (i, j) igual a 1 e todas as outras iguais a 0. $\mathcal{C}_{m\times n} = \{E_{ij} : i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n\}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^{m\times n}$. Então $\dim \mathbb{R}^{m\times n} = mn$.
4. A base canónica do e.v. $\mathcal{P}_n$, dos polinómios na variável x de grau menor ou igual a n, é $\{1, x, \ldots, x^n\}$. Então $\dim \mathcal{P}_n = n + 1$.
5. O e.v. $\mathcal{P}$ de todos os polinómios não admite uma base com um número finito de elementos, *i.e.*, $\mathcal{P}$ não é finitamente gerado.

Independência linear/Conjuntos geradores num espaço vetorial de dimensão conhecida

O seguinte resultado é consequência imediata do Teorema do slide 16.

Teorema:

Seja $\mathcal{V}$ um e.v. de dimensão n e $\mathcal{K} \subset \mathcal{V}$ com r vetores.

- Se $r > n$, então $\mathcal{K}$ não é l.i.
- Se $r < n$, então $\mathcal{K}$ não gera $\mathcal{V}$.
- Se $r = n$, $\mathcal{K}$ é uma base de $\mathcal{V}$ se e só se $\mathcal{K}$ é l.i
  se e só se $\mathcal{K}$ gera $\mathcal{V}$.

Bases e dimensão do espaço das linhas de uma matriz

Proposição:

Seja A uma matriz $m \times n$ e E uma matriz escalonada por linhas equivalente a A, então as linhas não nulas de E formam uma base de $\mathcal{L}(A)$ e $\dim \mathcal{L}(A) = \mathrm{car}(A)$.

Exemplo:

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & -4 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim E = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim R = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,
sendo E e R as formas escalonada e, respetivamente, reduzida de A.
Duas bases do espaço das linhas de A:

$$\mathcal{B} = \{(1,-2,-4,3),(0,0,1,-1)\} \text{ e } \mathcal{K} = \{(1,-2,0,-1),(0,0,1,-1)\}\,.$$

Assim, $\dim \mathcal{L}(A) = 2 = \mathrm{car}(A)$.

Bases e dimensão do espaço nulo de uma matriz

Proposição:

Sendo A uma matriz $m \times n$, $\dim \mathcal{N}(A) = \text{nul}(A)$.

Sobre a determinação de uma base para $\mathcal{N}(A)$:

Basta encontrar o conjunto das soluções do sistema $AX = 0$ e determinar uma das suas bases.
Recorde que $\text{nul}(A) = n - \text{car}(A) =$ n.º de incógnitas livres de $AX = 0$.

Exemplo:

Sejam A a matriz do exemplo do slide anterior e R a matriz escalonada reduzida equivalente a A. Seja $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

$$X \in \mathcal{N}(A) \iff AX = 0 \Leftrightarrow EX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 + x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = (2x_2 + x_4, x_2, x_4, x_4) = x_2(2,1,0,0) + x_4(1,0,1,1), x_2, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Base de $\mathcal{N}(A)$: $\{(2,1,0,0), (1,0,1,1)\}$ $\qquad \dim \mathcal{N}(A) = 2$.

Bases e dimensão do espaço das colunas de uma matriz

Proposição:

Seja A uma matriz $m \times n$ e E uma matriz escalonada por linhas equivalente a A, então as colunas da matriz A que correspondem às colunas com pivot na matriz E formam uma base de $\mathcal{C}(A)$ e $\dim \mathcal{C}(A) = \mathrm{car}(A)$.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & -4 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim E = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Base do espaço das colunas de A: $\mathcal{B} = \{(1,2,1), (-4,-7,-3)\}$.
Assim, $\dim \mathcal{C}(A) = 2 = \mathrm{car}(A)$.

Reveja outra forma de determinar $\mathcal{C}(A)$:

$$B \in \mathcal{C}(A) \text{ se e só se } AX = B \text{ é possível.}$$

<u>Exercício:</u> Considere A do exemplo anterior e determine (desta forma) uma base para $\mathcal{C}(A)$.

Outra forma de encarar a característica de uma matriz

Corolários:

1. O espaço das linhas e o espaço das colunas de uma matriz têm a mesma dimensão, que é a característica da matriz.
2. A caraterística de uma matriz é o máximo número de linhas (ou colunas) linearmente independentes.
3. Uma matriz quadrada é invertível se e só se o conjunto das suas linhas (colunas) é linearmente independente.

Coordenadas de um vetor numa base ordenada

Seja $\mathcal{B} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma base ordenada de $\mathcal{V}$, e.v. real.
Para cada vetor $X \in \mathcal{V}$ existem escalares únicos $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, tais que

$$X = a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n.$$

$a_1, \ldots, a_n$ dizem-se as coordenadas de X na base $\mathcal{B}$.

O vetor das coordenadas de X na base $\mathcal{B}$ é $[X]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$.

Exemplo:

Verifique que, relativamente à base $\mathcal{B} = \big((1,1),(1,2)\big)$,

$$[(0,1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [(1,-1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Notas sobre o vetor das coordenadas numa base:

- Os vetores $X_1, \ldots, X_n$ da uma base ordenada $\mathcal{B}$ têm vetores das coordenadas: $[X_1]_{\mathcal{B}} = e_1, [X_2]_{\mathcal{B}} = e_2, \ldots, [X_n]_{\mathcal{B}} = e_n$.
- Para $Y_1, \ldots, Y_r \in \mathcal{V}$, $\mathcal{B}$ base ordenada de $\mathcal{V}$ e $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{R}$,
$$[c_1 Y_1 + \cdots + c_r Y_r]_{\mathcal{B}} = c_1[Y_1]_{\mathcal{B}} + \cdots + c_r[Y_r]_{\mathcal{B}}.$$

Exemplo:

Relativamente à base $\mathcal{B} = \big((1,1),(1,2)\big)$, (ver exemplo do slide anterior),

$$[(0,1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [(1,-1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Assim, como $(-1,3) = 2(0,1) - (1,-1)$,

$$[(-1,3)]_{\mathcal{B}} = 2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Note que, de facto, $(-1,3) = -5(1,1) + 4(1,2)$.

Mudança de base

Sejam $\mathcal{B}$, $\mathcal{T} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ duas bases ordenadas de $\mathcal{V}$ e $X \in \mathcal{V}$. Qual a relação entre $[X]_\mathcal{B}$ e $[X]_\mathcal{T}$?

$$[X]_\mathcal{T} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad X = a_1 Y_1 + \cdots + a_n Y_n$$

$$\Longrightarrow \quad [X]_\mathcal{B} = a_1 [Y_1]_\mathcal{B} + \cdots + a_n [Y_n]_\mathcal{B}$$

$$= \begin{bmatrix} [Y_1]_\mathcal{B} & \cdots & [Y_n]_\mathcal{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Concluindo-se que,

$$[X]_\mathcal{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} [Y_1]_\mathcal{B} & \cdots & [Y_n]_\mathcal{B} \end{bmatrix}}_{M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{T}}} [X]_\mathcal{T}$$

Matriz de mudança de base

Resumindo o conteúdo do slide anterior:

Sendo $\mathcal{B}$ e $\mathcal{T} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ duas bases ordenadas de $\mathcal{V}$,
à matriz cujas colunas são os vetores das coordenadas na base $\mathcal{B}$ dos elementos da base $\mathcal{T}$:

$$\boxed{M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} [Y_1]_{\mathcal{B}} & \cdots & [Y_n]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}}$$

chamamos a matriz de mudança de base de $\mathcal{T}$ para $\mathcal{B}$.

Para cada $X \in \mathcal{V}$,

$$\boxed{[X]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{T}}\,[X]_{\mathcal{T}}}$$

Exemplo (mudança de base)

Sejam $\mathcal{B} = \big((1,1),(1,2)\big)$ e $\mathcal{T} = \big((0,1),(1,-1)\big)$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$.
Dado $X \in \mathbb{R}^2$ tal que $[X]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$, tem-se que

$$X \;=\; 4\,(0,1) \;+\; -1\,(1,-1).$$

Logo, $[X]_{\mathcal{B}} = 4[(0,1)]_{\mathcal{B}} + -1[(1,-1)]_{\mathcal{B}}$. Pelo exemplo anterior,

$$[(0,1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad [(1,-1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

então

$$[X]_{\mathcal{B}} = 4\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + -1\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}_{M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{T}}}\underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}}_{[X]_{\mathcal{T}}} = \begin{bmatrix} -7 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

As matrizes de mudança de base são invertíveis

Teorema:

Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{T}$ duas bases ordenadas de $\mathcal{V}$. Então $M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{T}}$ é invertível e

$$M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{T}}^{-1} = M_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{B}}.$$

Demonstração:

Sejam $M = M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{T}}$, $\dim\mathcal{V} = n$ e $Y \in \mathbb{R}^n$ tal que $MY = 0$. Existe $X \in \mathcal{V}$ tal que $Y = [X]_{\mathcal{T}}$. Então

$$[X]_{\mathcal{B}} = M[X]_{\mathcal{T}} = M\,Y = 0.$$

Logo, $X = 0_{\mathcal{V}}$ e portanto, $Y = 0$. Assim, o sistema homogéneo $M\,Y = 0$ possui apenas a solução trivial, e portanto, M é invertível.
Para cada $X \in \mathcal{V}$, tem-se $[X]_{\mathcal{B}} = M\,[X]_{\mathcal{T}}$, pelo que $[X]_{\mathcal{T}} = M^{-1}[X]_{\mathcal{B}}$.
Concluindo-se que $M^{-1} = M_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{B}}$.

Mudança de base em $\mathbb{R}^n$

Diagrama da mudança de base usando a base canónica:

$\mathcal{B}, \mathcal{T}$: bases (ordenadas) de $\mathbb{R}^n$ $\qquad$ $\mathcal{C}$: base canónica de $\mathbb{R}^n$

$$\begin{tikzcd}
{[X]_{\mathcal{T}}} \arrow[rr, "M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{T}}"] \arrow[dr, "M_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{T}}"'] & & {[X]_{\mathcal{B}}} \arrow[dl, shift right, "M_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}"'] \\
& {[X]_{\mathcal{C}}} \arrow[ur, shift right, "M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = M^{-1}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}"'] &
\end{tikzcd}$$

$M_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$: matriz cujas colunas são os vetores da base $\mathcal{B}$

$M_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{T}}$: matriz cujas colunas são os vetores da base $\mathcal{T}$

$$M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{T}} = M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}\, M_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{T}} = M^{-1}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\, M_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{T}}$$

Método de cálculo de uma matriz de mudança de base em $\mathbb{R}^n$:

$\mathcal{B} = (X_1, \ldots, X_n)$, $\mathcal{T} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ bases de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ a base canónica,

$$\left[\, M_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} \;\middle|\; M_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{T}} \,\right] = \left[\, X_1 \;\cdots\; X_n \;\middle|\; Y_1 \;\cdots\; Y_n \,\right] \underset{\uparrow}{\sim} \left[\, I_n \;\middle|\; M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{T}} \,\right]$$

método de eliminação de Gauss-Jordan

Exemplo de aplicação/explicação do método do slide anterior

Para obtermos a matriz $M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{T}}$ de mudança da base $\mathcal{T} = \big((0,1),(1,-1)\big)$ para a base $\mathcal{B} = \big((1,1),(1,2)\big)$, temos de calcular

$$[(0,1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad (0,1) = \alpha_1\,(1,1) + \alpha_2\,(1,2),$$

$$[(1,-1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad (1,-1) = \beta_1\,(1,1) + \beta_2\,(1,2).$$

Tal conduz a dois sistemas

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

com a mesma matriz dos coeficientes (cujas colunas são os vetores de $\mathcal{B}$).

Exemplo (continuação)

Os sistemas anteriores podem-se resolver em simultâneo, formando a matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right],$$

$$M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Note que esta matriz já foi calculada no slide 27, por outro método.

Conjunto ortogonal e conjunto ortonormado

Definições:

Um conjunto $\{X_1, \ldots, X_k\}$ de vetores de $\mathbb{R}^n$ diz-se ortogonal se

$$X_i \cdot X_j = 0, \qquad i \neq j, \qquad i, j = 1, \ldots, k,$$

e diz-se ortonormado (o.n.) se é ortogonal e também se verifica

$$X_i \cdot X_i = 1, \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Exemplos:

1. $\{(1, 1, 0), (2, -2, 1)\}$ é ortogonal;
2. $\left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right), \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) \right\}$ é o.n.

Base ortogonal e base ortonormada

Teorema:

Todo o conjunto ortogonal de vetores não nulos é linearmente independente.

Corolário:

Todo o conjunto ortonormado de vetores é linearmente independente.

Corolário:

Todo o conjunto ortonormado (ou ortogonal de vetores não nulos) de n vetores em $\mathbb{R}^n$ é uma base de $\mathbb{R}^n$.

Definição:

Uma base ortogonal/o.n. é uma base que é um conjunto ortogonal/o.n.

Coordenadas de um vetor de $\mathbb{R}^n$ numa base o.n.

Teorema:

Seja $X \in \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma base o.n. de $\mathbb{R}^n$. Então

$$[X]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} X \cdot X_1 \\ \vdots \\ X \cdot X_n \end{bmatrix},$$

isto é, $X = a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n$, sendo $a_i = X \cdot X_i, \; i = 1, \ldots, n$.

Exercício:

Determine as coordenadas do vetor $(1, 5)$ na base o.n. de $\mathbb{R}^2$

$$\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right).$$

Decomposição ortogonal em $\mathbb{R}^n$

Definição:

$Y \in \mathbb{R}^n$ é ortogonal ao subespaço $\mathcal{W}$ de $\mathbb{R}^n$ se $Y \cdot Z = 0$ para cada $Z \in \mathcal{W}$.

Teorema 1:

Seja $Y \in \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B}$ uma base de um subespaço $\mathcal{W}$ de $\mathbb{R}^n$. Então,
Y é ortogonal a $\mathcal{W}$ se e só se Y é ortogonal a cada vetor de $\mathcal{B}$.

Teorema 2:

Seja $X \in \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{W}$ um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Então, existem Y ortogonal a $\mathcal{W}$ e $Z \in \mathcal{W}$, únicos, tais que[a]

$$X = Y + Z\,.$$

[a] Querendo adquirir maior compreensão sobre a prova deste teorema, resolva o exercício do último slide.

Projeção ortogonal em $\mathbb{R}^n$

Definição (projeção ortogonal de um vetor sobre um subespaço):

A projeção ortogonal de $X \in \mathbb{R}^n$ sobre o subespaço $\mathcal{W}$ de $\mathbb{R}^n$ é o vetor

$Z \in \mathcal{W}$ tal que $X = Y + Z$, com Y ortogonal a $\mathcal{W}$.

Notação: $Z = \text{proj}_{\mathcal{W}} X$

Teorema:

Seja $\{X_1, \ldots, X_k\}$ uma base o.n. do subespaço $\mathcal{W}$ de $\mathbb{R}^n$. A projeção ortogonal de $X \in \mathbb{R}^n$ sobre o subespaço $\mathcal{W}$ de $\mathbb{R}^n$ é

$$proj_{\mathcal{W}} X = (X \cdot X_1)X_1 + \cdots + (X \cdot X_k)X_k \in \mathcal{W}.$$

Projeção ortogonal sobre uma reta que passa na origem [1]

Sejam $\mathcal{W} = \langle X_1 \rangle$ uma reta, $\{X_1\}$ base o.n. de $\mathcal{W}$ e $X \in \mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^2$).Logo,

$$X = Y + Z$$

onde

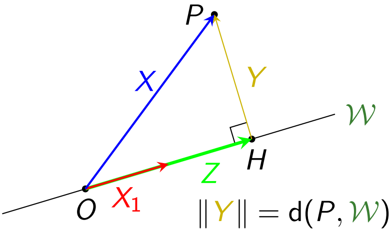
$$Z = \alpha X_1 \text{ e } Y \cdot X_1 = 0.$$

Então,

$$X \cdot X_1 = Y \cdot X_1 + \alpha X_1 \cdot X_1 = \alpha.$$

Portanto,

$$Z = \text{proj}_{\mathcal{W}} X = (X \cdot X_1) X_1$$



Note que, se $X = \overrightarrow{OP}$,

$$d(P, \mathcal{W}) = \|X - \text{proj}_{\mathcal{W}} X\|.$$

[1] ilustração do teorema do slide anterior

Projeção ortogonal sobre um plano que passa na origem[2]

Seja $\mathcal{W}$ um plano gerado pela base o.n. $\{X_1, X_2\}$ e $X \in \mathbb{R}^3$.

$$X = Z + Y,$$

com

$$Z = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \text{ e } Y \cdot X_1 = Y \cdot X_2 = 0.$$

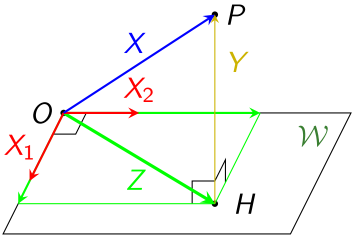
Como

$$X = Y + Z = Y + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2,$$

$$X \cdot X_1 = \alpha_1 \text{ e } X \cdot X_2 = \alpha_2.$$

Logo,

$$\text{proj}_{\mathcal{W}} X = (X \cdot X_1) X_1 + (X \cdot X_2) X_2.$$



$$\|Y\| = \text{d}(P, \mathcal{W})$$

Note que, se $X = \overrightarrow{OP}$,

$$d(P, \mathcal{W}) = \|X - \text{proj}_{\mathcal{W}} X\|.$$

[2] ilustração do teorema do ▸ slide 37

Método de ortogonalização de Gram-Schmidt [3]

Teorema:

Todo o subespaço $\mathcal{W} \neq \{0\}$ de $\mathbb{R}^n$ possui uma base o.n.

Demonstração – o método (opcional):

Dada $\{X_1, \ldots, X_m\}$ uma base de $\mathcal{W}$, sejam

$$Y_1 = \frac{X_1}{\|X_1\|} \quad \text{e } \mathcal{Z}_1 = \langle Y_1 \rangle$$

$$X_k' = X_k - \mathrm{proj}_{\mathcal{Z}_{k-1}} X_k, \quad Y_k = \frac{X_k'}{\|X_k'\|} \quad \text{e } \mathcal{Z}_k = \langle Y_1, \ldots, Y_k \rangle,$$

para $k = 2, \ldots, m$.

Então $\mathcal{B} = \{Y_1, \ldots, Y_m\}$ é um conjunto o.n., logo l.i. em $\mathcal{W}$. Como $\dim \mathcal{W} = m$, conclui-se que $\mathcal{B}$ é uma base o.n. de $\mathcal{W}$.

[3] opcional

Exercício suplementar

(Delineação de uma prova do Teorema 2 do slide 36)

Seja $\mathcal{W}$ um subespaço de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B} = \{X_1, \ldots, X_p\}$ uma base de $\mathcal{W}$.

1. Mostre que o conjunto de todos os vetores ortogonais a $\mathcal{W}$, designado por subespaço ortogonal de $\mathcal{W}$,

$$\mathcal{W}^\perp = \{Y \in \mathbb{R}^n\colon\ Y \cdot Z = 0,\ \text{para todo o } Z \in \mathcal{W}\}$$

   é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

2. Mostre que $\mathcal{W}^\perp = \mathcal{N}(A)$, onde A é a matriz cujas linhas, encaradas como vetores, são $X_1, X_2, \ldots, X_p$.
3. Justifique que $\dim \mathcal{W}^\perp = n - p$.
4. Mostre que se $\mathcal{P} = \{Y_1, \ldots, Y_{n-p}\}$ é uma base de $\mathcal{W}^\perp$, então $\mathcal{T} = \mathcal{B} \cup \mathcal{P}$ é l.i. e, portanto, uma base de $\mathbb{R}^n$.
5. A partir da alínea anterior, conclua que, para cada $X \in \mathbb{R}^n$, existem $Z \in \mathcal{W}$ e $Y \in \mathcal{W}^\perp$, únicos, tais que $X = Z + Y$.