Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I - Agrupamento IV — Exame Final - Época de Recurso

30 de janeiro de 2018

Duração: **2h30m**

N.° Mec.: ____________ Nome: ______________________________

(Declaro que desisto: ______________________) N.° folhas suplementares: ____

Questão [Cotação]	1a [05pts]	1b [10pts]	2a [07pts]	2b [13pts]	3 [15pts]	4a [15pts]	4b [20pts]	5a [13pts]	5b [12pts]	6 [20pts]	7a [13pts]	7b [07pts]	8a [15pts]	8b [15pts]	9a [07pts]	9b [13pts]	Classificação (valores)

– Justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

1. Seja f contínua em $[0, +\infty[$ e definida em $\mathbb{R}^+$ por

$$f(x) = \frac{1}{2 + (\ln x)^2}, \quad x > 0.$$

[05pts] (a) Indique, justificando, o valor de $f(0)$.

Continua na folha suplementar Nº

[10pts] (b) Seja g uma função diferenciável e tal que $g(0) = e^2$ e $g'(0) = 3$. Calcule o valor de $(f \circ g)'(0)$.

Continua na folha suplementar Nº

2. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e h a função definida por $h(x) = \alpha \operatorname{arcsen}(x^2 - 1) + x^2 - \frac{\pi}{2}x$.

[07pts] (a) Determine o domínio de h.

Continua na folha suplementar Nº

[13pts] (b) Mostre que a função h tem pelo menos um zero no intervalo $]-1, 1[$, qualquer que seja o valor do parâmetro α.

Continua na folha suplementar Nº

[15pts] 3. Calcule o limite $\lim_{x \to 0^+} (1 + \operatorname{arcsen}(x^2))^{\frac{1}{x}}$.

Continua na folha suplementar Nº

N° Mec: ____________________ **Nome:** ____

4. Determine:

[15pts] (a) $\displaystyle\int \cos x \cdot \ln(\operatorname{sen} x)\, dx$

Continua na folha suplementar Nº ☐

[20pts] (b) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\, dx$ (Sugestão: utilize a mudança de variável dada por $x = 2\sec t$, indicando um domínio adequado a esta substituição).

Continua na folha suplementar Nº ☐

5. Considere a função F de domínio $[-1,1]$ definida por $F(x) = \displaystyle\int_{\operatorname{arcsen} x}^{0} \frac{(\operatorname{sen} t)^2}{e^t + 1}\, dt$.

[13pts] (a) Justifique que F é diferenciável em $]-1,1[$ e determine $F'(x)$ para $x \in]-1,1[$.

Continua na folha suplementar Nº

[12pts] (b) Estude F quanto à monotonia e identifique os extremantes globais de F.

Continua na folha suplementar Nº

[20pts] 6. Calcule a área da região do plano delimitada pelos gráficos das funções f e g definidas, respetivamente, por

$$f(x) = \frac{2}{x} \quad \text{e} \quad g(x) = x + 1$$

e pelas retas de equações $y = 0$ e $x = 3$.

Continua na folha suplementar Nº

7. Seja $f:]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}$.

[13pts] (a) Determine a primitiva de f que se anula no ponto $x = e$.

Continua na folha suplementar Nº

[07pts] (b) Estude a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$.

Continua na folha suplementar Nº

8. Estude a natureza das seguintes séries numéricas:

[15pts] (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-1}{2n^5+e^n+1}$.

Continua na folha suplementar Nº

[15pts] (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-2)^n \frac{(n!)^2}{(n+1)!}$.

Continua na folha suplementar Nº

9. Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de termos positivos convergente. Indique, justificando, a natureza das seguintes séries:

[07pts] (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (\operatorname{arctg}(n) + a_n)$.

Continua na folha suplementar Nº

[13pts] (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{a_n}{3 + a_n^2}$.

Continua na folha suplementar Nº

Formulário

$(f(x)^p)' = p\,(f(x))^{p-1}\, f'(x)$, com $p \in \mathbb{R}$	
$\left(a^{f(x)}\right)' = f'(x) a^{f(x)} \ln(a)$, com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$(\log_a(f(x)))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)\ln(a)}$, com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
$(\operatorname{sen}(f(x)))' = f'(x)\cos(f(x))$	$(\cos(f(x)))' = -f'(x)\operatorname{sen}(f(x))$
$(\operatorname{tg}(f(x)))' = f'(x)\sec^2(f(x))$	$(\operatorname{cotg}(f(x)))' = -f'(x)\operatorname{cosec}^2(f(x))$
$(\sec(f(x)))' = f'(x)\sec(f(x))\operatorname{tg}(f(x))$	$(\operatorname{cosec}(f(x)))' = -f'(x)\operatorname{cosec}(f(x))\operatorname{cotg}(f(x))$
$(\operatorname{arcsen}(f(x)))' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$	$(\arccos(f(x)))' = -\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$
$(\operatorname{arctg}(f(x)))' = \dfrac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$	$(\operatorname{arccotg}(f(x))' = -\dfrac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$

$1 + \operatorname{tg}^2(x) = \sec^2(x)$, para $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$	$1 + \operatorname{cotg}^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x)$, para $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$	$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$
$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$	$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$