Exercícios de MD F. 1 - Lógica Proposicional e Conjuntos

1. Diga, justificando, se as seguintes frases são ou não proposições. Em caso afirmativo, indique o seu valor lógico.

   (a) 100 é maior do que 10 ou 11 é um número primo;

   (b) Para todo o número x, se $x > 2$, então $x^2 + 5 > 3x$;

   (c) Hoje está um belo dia para ir à praia;

   (d) Para algum $n \in \mathbb{N}$, $2^n = n^2$;

   (e) $2^n = n^2$.

2. Diga, justificando, quais das seguintes fórmulas são tautologias:

   (a) $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$;

   (b) $[p \wedge (\neg p)] \Rightarrow q$;

   (c) $[(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)] \Rightarrow (q \vee r)$.

3. Encontre uma proposição composta envolvendo as proposições p, q e r que é verdadeira se p e q são verdadeiras e r é falsa e é falsa em qualquer outro caso.

4. Usando tautologias apropriadas simplifique as proposições:

   (a) $p \vee [q \wedge (\neg p)]$;

   (b) $\neg[(\neg p) \wedge (\neg q)]$;

   (c) $[p \wedge q] \vee [p \wedge (\neg q)]$.

5. Sendo p, q e r três proposições dadas, verifique se as seguintes fórmulas são válidas:

   (a) $[(\neg p \vee q) \wedge p\ ] \Rightarrow q$

   (b) $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow \neg q)] \Rightarrow [p \Rightarrow \neg r]$

   (c) $[(q \vee \neg p) \wedge \neg q] \Rightarrow p$

   (d) $[p \Rightarrow \neg p] \Rightarrow \neg p$

6. Mostre que $(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$ e $p \Rightarrow (q \vee r)$ são logicamente equivalentes.

7. Mostre que $\neg\,(p \Rightarrow (q \vee r))$ implica logicamente $\neg(p \Rightarrow q)$.

8. Sejam as a proposições

   p: *Sou responsável*;

   q: *Passo a Matemática Discreta*;

   r: *Vou de férias para as Bermudas.*

   Traduza as frases seguintes por meio de fórmulas proposicionais.

   (a) Se passar a Matemática Discreta, vou de férias para as Bermudas.

   (b) Para ir de férias para as Bermudas é suficiente que eu seja responsável.

   (c) Passo a Matemática Discreta só se for responsável.

   (d) Para passar a Matemática Discreta é necessário que eu seja responsável.

(e) Se passar a Matemática Discreta então vou de férias para as Bermudas caso seja responsável.

9. Mostre que as fórmulas $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ e $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ não são equivalentes apresentando uma interpretação para a qual elas tenham valores lógicos diferentes.

10. Verifique a correcção de cada uma das seguintes deduções:

    (a) Chove se levo guarda-chuva. Hoje não levo guarda-chuva. Logo, hoje não chove.

    (b) Chove se e só se levo guarda-chuva. Hoje não levo guarda-chuva. Logo, hoje não chove.

    (c) Se o mordomo cometeu o crime, então ele vai estar nervoso quando interrogado. O mordomo estava nervoso quando interrogado. Logo, o mordomo cometeu o crime.

    (d) r é uma condição suficiente para q. Além disso, verifica-se r ou a negação de p. Logo, se q não for verdadeiro, não se verifica p.

    (e) De $\neg(p \vee q)$ deduz-se $\neg p$.

    (f) A simplificação da expressão $(\neg p \Rightarrow q) \wedge (q \vee r) \wedge \neg q$ foi feita de acordo com os seguintes passos:

$$\begin{aligned} (\neg p \Rightarrow q) \wedge (q \vee r) \wedge \neg q &\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge \neg q \\ &\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \wedge (q \vee r) \\ &\Leftrightarrow p \wedge \neg q \wedge r. \end{aligned}$$

11. Cinco amigos têm acessso a uma *sala de chat*. Admitindo que é conhecida a seguinte informação:

    - O António ou a Berta ou ambos estão na *sala de chat*
    - O Carlos ou a Dalila mas não ambos estão na *sala de chat*
    - Se a Ema está na *sala de chat* também está o Carlos
    - A Dalila e o António estão ambos na *sala de chat* ou nenhum está
    - Se a Berta está na *sala de chat* então também estão a Ema e o António,

    é possível determinar quem está a conversar?

12. Tendo em conta que, $\overline{X} \equiv X^c$ denota o conjunto complementar de X, mostre que, quaisquer que sejam os conjuntos A, B e C:

    (a) $(A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right) = A$;

    (b) $\overline{(A \cup B)\backslash C} = \overline{A\backslash C} \cap \overline{B\backslash C}$.

13. A *diferença simétrica* de dois conjuntos A e B, que notamos por $A\Delta B$, é o conjunto dos elementos que pertencem exatamente a um dos conjuntos (isto é, pertencem a um dos conjuntos mas não a ambos).

    (a) Mostre que $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A) = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$.

    (b) Represente num diagrama de Venn a diferença simétrica de dois conjuntos A e B quaisquer.

    (c) Dados dois conjuntos A, B e $C = A\Delta B$, calcule $A\Delta C$.

    (d) Calcule a diferença simétrica dos conjuntos $\mathbb{Z}_0^+$, o conjunto dos números inteiros não negativos, e o conjunto E dos números inteiros pares, $E = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$

14. Determine o conjunto das partes de cada um dos seguintes conjuntos:

    (a) $A = \emptyset$;

    (b) $B = \{\emptyset\}$;

    (c) $C = \{1\}$;

(d) $D = \{1, 2\}$;

(e) $E = \{1, 2, 3\}$.

15. Denote o conjunto das partes de um conjunto X por $\mathcal{P}(X)$, considere os conjuntos A e B e demonstre cada uma das seguintes proposições:

    (a) $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$;

    (b) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.

16. Sendo A, B e C conjuntos finitos arbitrários de um dado universo $\mathcal{U}$, demonstre que:

    (a) $\overline{A} \cup \overline{B} \cup (A \cap B \cap \overline{C}) = \overline{(A \cap B \cap C)}$;

    (b) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A$.

Soluções:

1. (a) 1; (b) 1; (c) Não é proposição; (d) 1; (e) Não é proposição.
2. São todas.
4. (a) $p \vee q$; (b) $p \vee q$; (c) p.
5. (a), (b) e (d) são válidas.
8. (a) $q \Rightarrow r$; (b) $p \Rightarrow r$; (c) $q \Rightarrow p$; (d) $q \Rightarrow p$; (e) $q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.
10. (a) Não é correta; (b) É correta; (c) Não é correta; (d) É correta; (e) É correta.
11. Pode-se concluir que o António e a Dalila estão a conversar.
13. (c) B; (d) $\{\ldots, -4, -2, 1, 3, \ldots\}$.
14. (a) $\{\emptyset\}$;

    (b) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;

    (c) $\{\emptyset, \{1\}\}$;

    (d) $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$;

    (e) $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.