Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I - Agrupamento IV — 2ª Prova de Avaliação Discreta

10 de janeiro de 2018

Duração: **2h**

N.° Mec.: ______________ Nome: ____

(Declaro que desisto: ____) N.° folhas suplementares: ______

Questão [Cotação]	1a [20pts]	1b [15pts]	2 [25pts]	3a [15pts]	3b [15pts]	4 [20pts]	5a [10pts]	5b [15pts]	5c [20pts]	5d [25pts]	6 [20pts]	Classificação (valores)

– Justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

1. Seja $F : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ a função definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(4-t^2)}}\, dt.$

[20pts] (a) Justifique que F é diferenciável e mostre que $F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-\operatorname{sen}^2 x}}$, $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Continua na folha suplementar Nº

[15pts] (b) Calcule $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{F(x)}{\operatorname{sen} x \cos x}$.

Continua na folha suplementar Nº

[25pts] 2. Calcule a área da região do plano delimitada pelo gráfico da função f definida por

$$f(x) = \frac{2 \operatorname{arctg} x}{1 + x^2}$$

e pelas retas de equações $y = 0$, $x = -1$ e $x = 1$.

Continua na folha suplementar Nº

3.

[15pts] (a) Mostre que o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$ é convergente e indique o seu valor.

Continua na folha suplementar Nº ☐

[15pts] (b) Estude a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} xe^{-x^2}\cos^2(x)\,dx$ sem recorrer à definição.

Continua na folha suplementar Nº ☐

[20pts] 4. Estude a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{n!}\right)$ e, em caso de convergência, indique a sua soma.

Continua na folha suplementar Nº

5. Verifique se as séries seguintes são convergentes e, em caso de convergência, indique se a convergência é absoluta ou simples:

[10pts] (a) $\sum_{n=3}^{+\infty} \operatorname{arctg}(n^2-3)$.

Continua na folha suplementar Nº

[15pts] (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n^3+2)}{\sqrt{n}}$.

Continua na folha suplementar Nº

[20pts] (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Continua na folha suplementar Nº

[25pts] (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln(n+2)}.$

Continua na folha suplementar Nº

[20pts] 6. Determine a natureza da série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n)$ sabendo que

$$0 \leq b_n \leq a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}.$$

Continua na folha suplementar Nº

Formulário

$(f(x)^p)' = p\,(f(x))^{p-1}\,f'(x)$, com $p \in \mathbb{R}$	
$\left(a^{f(x)}\right)' = f'(x)a^{f(x)}\ln(a)$, com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$(\log_a(f(x)))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)\ln(a)}$, com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
$(\operatorname{sen}(f(x)))' = f'(x)\cos(f(x))$	$(\cos(f(x)))' = -f'(x)\operatorname{sen}(f(x))$
$(\operatorname{tg}(f(x)))' = f'(x)\sec^2(f(x))$	$(\operatorname{cotg}(f(x)))' = -f'(x)\operatorname{cosec}^2(f(x))$
$(\sec(f(x)))' = f'(x)\sec(f(x))\operatorname{tg}(f(x))$	$(\operatorname{cosec}(f(x)))' = -f'(x)\operatorname{cosec}(f(x))\operatorname{cotg}(f(x))$
$(\operatorname{arcsen}(f(x)))' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$	$(\arccos(f(x)))' = -\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$
$(\operatorname{arctg}(f(x)))' = \dfrac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$	$(\operatorname{arccotg}(f(x))' = -\dfrac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$

$1+\operatorname{tg}^2(x) = \sec^2(x)$, para $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$	$1+\operatorname{cotg}^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x)$, para $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$	$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$
$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$	$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$