1. Seja A o conjunto das 18 equipas da Liga Portuguesa de Futebol Profissional, para a qual é sempre possível estabelecer uma tabela pontual classificativa, a qual pode variar entre 0 e 102 pontos.

   (a) Considere $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ a relação binária definida por:

   $$\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A : \; x \text{ tem mais pontos que } y\}.$$

   Verifique se a relação $\mathcal{R}$ é reflexiva, simétrica, antissimétrica e transitiva.

   (b) Dê um exemplo de uma relação de equivalência definida em A. Justifique.

2. Uma câmara de vídeo regista a passagem de veículos num túnel e um programa de processamento de imagem extrai diversos parâmetros de cada objeto filmado enviando-os a um sistema de classificação baseado em conhecimento. O universo do discurso são objetos de vídeo, $obv1, obv2, obv3, \ldots$.

   A partir de fórmulas da lógica de primeira ordem com predicados adequados obtiveram-se as seguintes cláusulas (representativas do sistema de classificação):

   C_1 : $\neg Comprimento(x, Medio) \vee \neg Largura(x, Medio) \vee Automovel(x)$;
   C_2 : $\neg Comprimento(x, Pequeno) \vee \neg Largura(x, MuitoPequeno) \vee Motociclo(x) \vee Bicicleta(x)$;
   C_3 : $\neg Bicicleta(x)$;
   C_4 : $Comprimento(obv1, Grande)$;
   C_5 : $Largura(obv1, Medio)$;
   C_6 : $Comprimento(obv2, Pequeno)$;
   C_7 : $Largura(obv2, MuitoPequeno)$.

   (a) Obtenha, justificando, fórmulas bem formadas da lógica de primeira ordem, F_1, F_2, F_3, a partir das quais se podem obter as cláusulas C_1, C_2 e C_3.

   (b) Aplique o princípio da resolução para mostrar que o objeto $obv2$ é um $Motociclo$, ou seja, que se pode concluir $Motociclo(obv2)$.

3. Numa sala estão 20 computadores e cada um deles pode ou não estar ligado em rede aos outros computadores. Mostre que existem pelo menos dois computadores nessa sala que estão ligados ao mesmo número de computadores.

4. Considere o grafo simples não orientado, $G = (V, E, W)$, com $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ e cuja matriz de custos é

   $$W = \begin{bmatrix} 0 & 2 & \infty & 5 & \infty & \infty \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 4 & \infty \\ \infty & 3 & 0 & 1 & \infty & 3 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 2 & \infty \\ \infty & 4 & \infty & 2 & 0 & 1 \\ \infty & \infty & 3 & \infty & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Determine o caminho de menor custo entre os vértices v_1 e v_6, aplicando o algoritmo de Dijkstra.

   (b) Considere a árvore abrangente de G, $T = (V, E_T)$, onde $E_T = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_5, v_3v_6\}$. Determine o código de Prüfer de T.

5. Um sistema computacional considera um código composto por n dígitos decimais válido se este contém um número par de zeros. Por exemplo, os códigos 123456 e 78900 são válidos, mas 2450200 e 0667745998 são códigos inválidos. Seja a_n o número de códigos válidos com n dígitos, para $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Mostre que a_n satisfaz a equação de recorrência $a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$ e determine o valor de a_1. Justifique devidamente.

   (b) Mostre que a função racional

$$f(x) = \frac{-80x^2 + 9x}{(1-8x)(1-10x)}$$

   é a função geradora associada à sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (c) Determine uma fórmula fechada para a_n, com $n \in \mathbb{N}$.

Cotações:

1.(a)	1.(b)	2.(a)	2.(b)	3.	4.(a)	4.(b)	5.(a)	5.(b)	5.(c)
2.0	1.5	2.0	2.0	2.0	3.0	1.5	2.0	2.0	2.0
