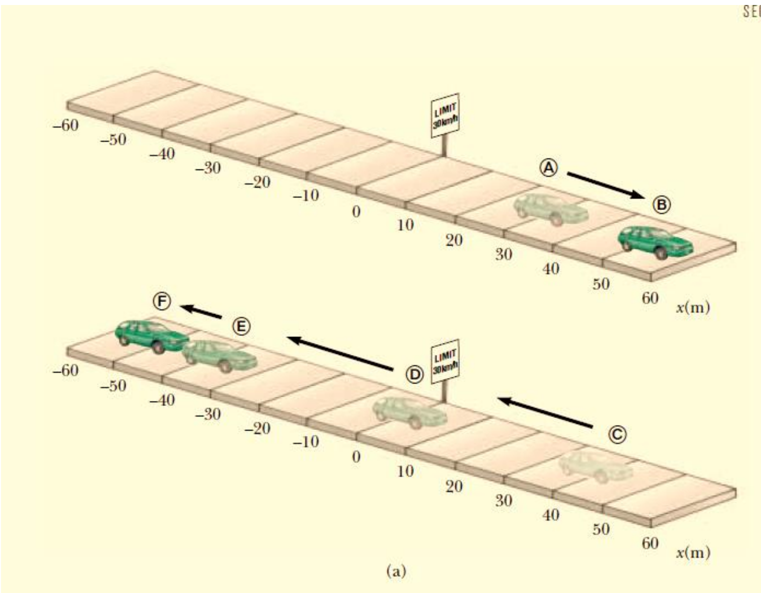
Mecânica e Campo Eletromagnético

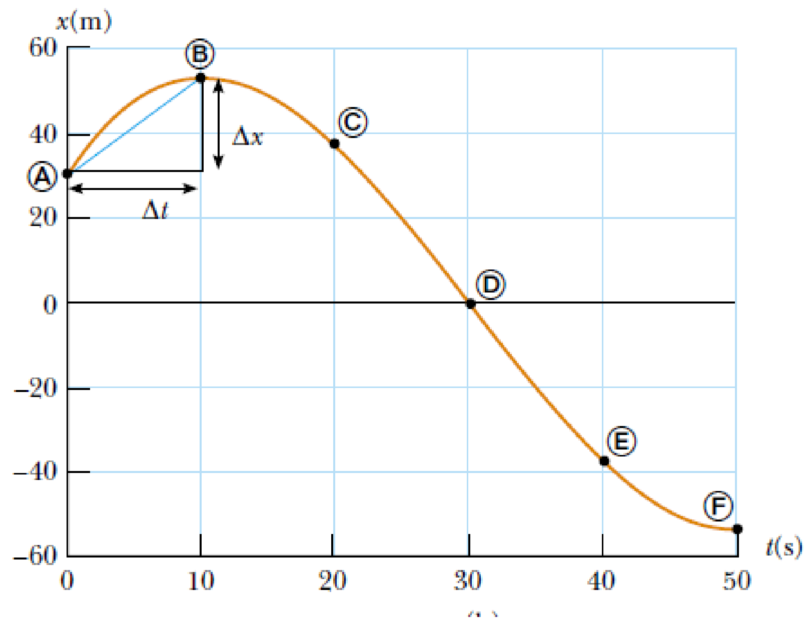
universidade de aveiro

Parte I: Fundamentos de mecânica Clássica

Capítulo I.1.1 Cinemática da partícula

Movimento a 1D





Vetor deslocamento

Vetor velocidade média

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_f - \vec{r}_i}$$

$$\boxed{\vec{v}_{média} = \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_i}{t_f - t_i}}$$

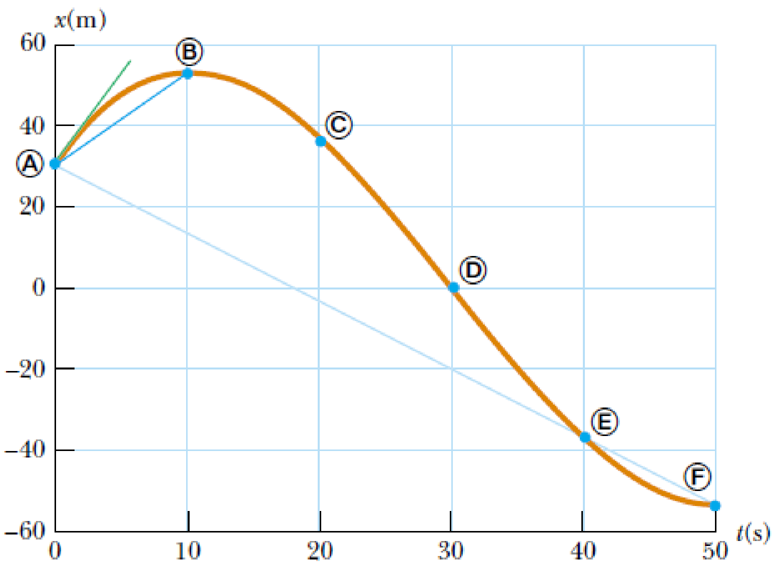
Movimento a 1D

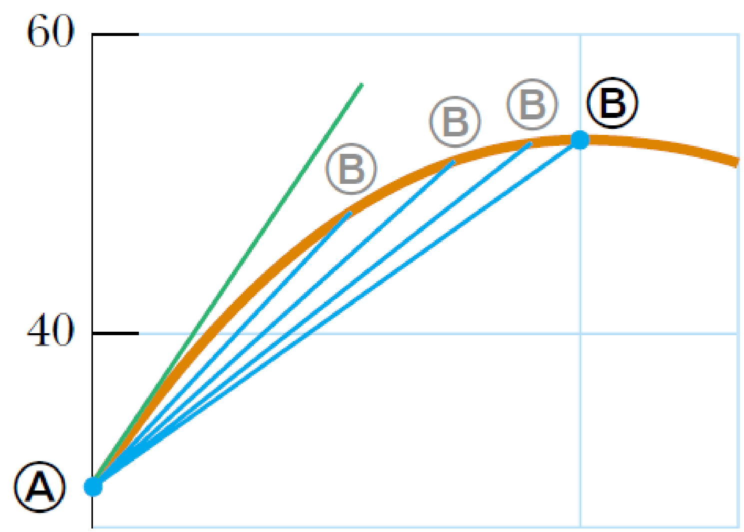
Distância percorrida ou espaço percorrido, *s*

$$\boxed{s = \left\|\vec{r}_{f1} - \vec{r}_{i1}\right\| + \left\|\vec{r}_{f2} - \vec{r}_{i2}\right\| \ldots.}$$

Onde cada parcela corresponde a deslocamentos realizados em intervalos de tempo, onde sentido da velocidade se manteve constante.

Movimento a 1D: Velocidade instantânea





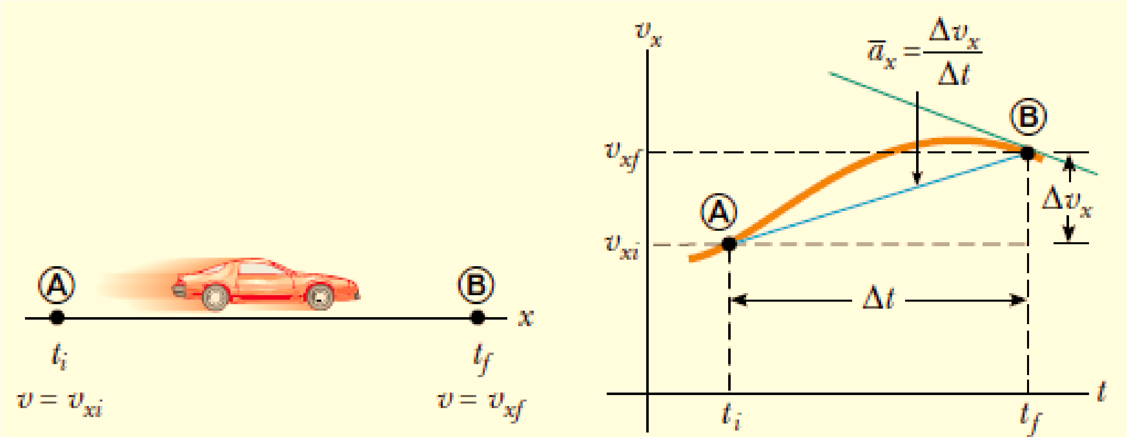
Vetor velocidade instantânea

$$\boxed{\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_i}{t_f - t_i} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}}$$

Movimento a 1D: aceleração média e instantânea

Vetor aceleração média

$$\boxed{\vec{a}_{média} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i}}$$



Vetor aceleração instantânea

$$\boxed{\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}}$$

As equações cinemáticas derivadas do cálculo

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}} \Rightarrow \boxed{\int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}(t)} d\vec{v}(t) = \int_{t_i}^{t} \vec{a}(t)dt}$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}} \Rightarrow \boxed{\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}(t)} d\vec{r}(t) = \int_{t_i}^{t} \vec{v}(t)dt}$$

Exercício #1: movimento a 1D

A posição de um objeto que se move **segundo uma linha reta** é dada por:

$x = 3{,}0\,t - 4{,}0\,t^2 + t^3$ em que x é expresso em metros e t em segundos.

a) Calcule a posição do objeto para t = 1, 2, 3 e 4 s.

b) Qual o espaço percorrido entre t = 0 e t = 4 s?

c) Qual a velocidade média no intervalo de tempo t = 2 e t = 4 s?

d) Determine a expressão para a velocidade em função do tempo.

Resolução

a) $\vec{r}(t) = x(t)\hat{e}_x$:

$\vec{r}(0\ \mathrm{s}) = \vec{0}$; o corpo está na origem;

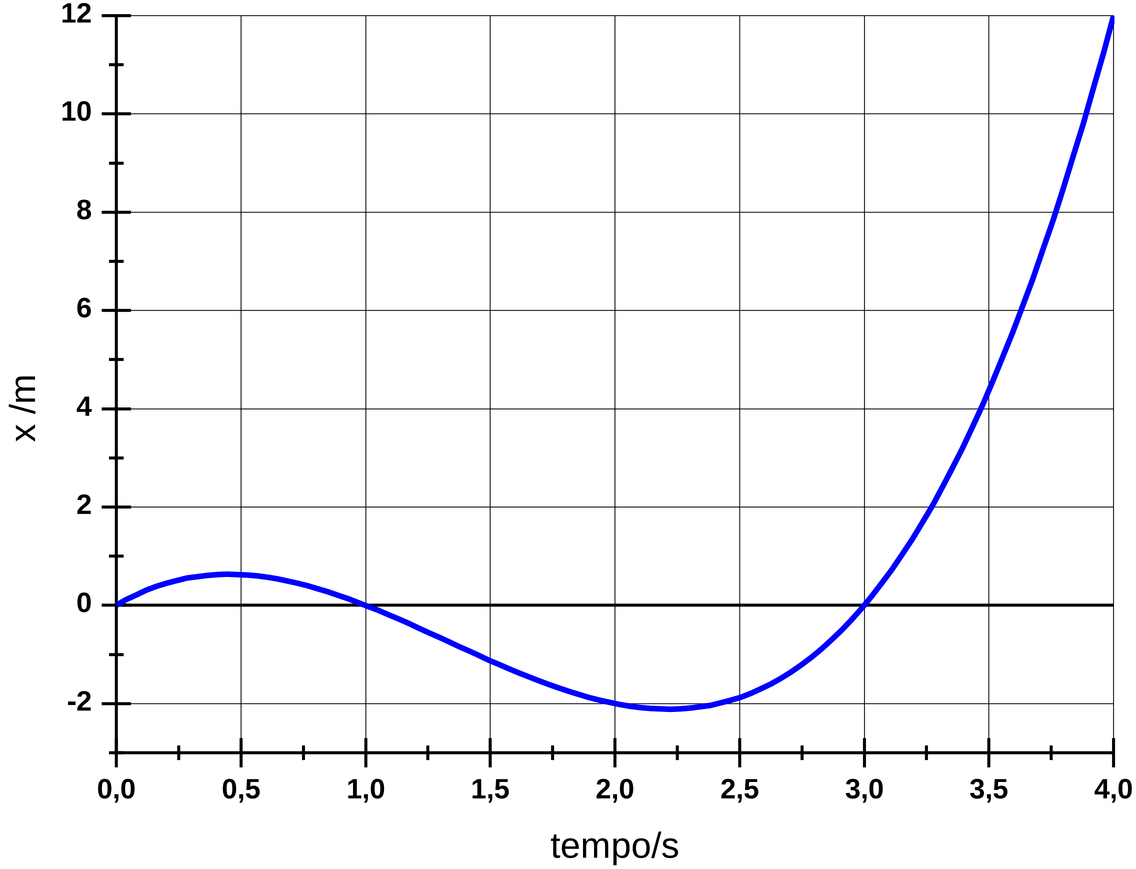
$\vec{r}(1\ \mathrm{s}) = \vec{0}$; o corpo está na origem

$\vec{r}(2\ \mathrm{s}) = -2\hat{e}_x\ (\mathrm{m})$;

$\vec{r}(3\ \mathrm{s}) = \vec{0}$; o corpo está à origem

$\vec{r}(4\ \mathrm{s}) = 12\ \hat{e}_x\ (\mathrm{m})$;

a) Gráfico x(t) versus t

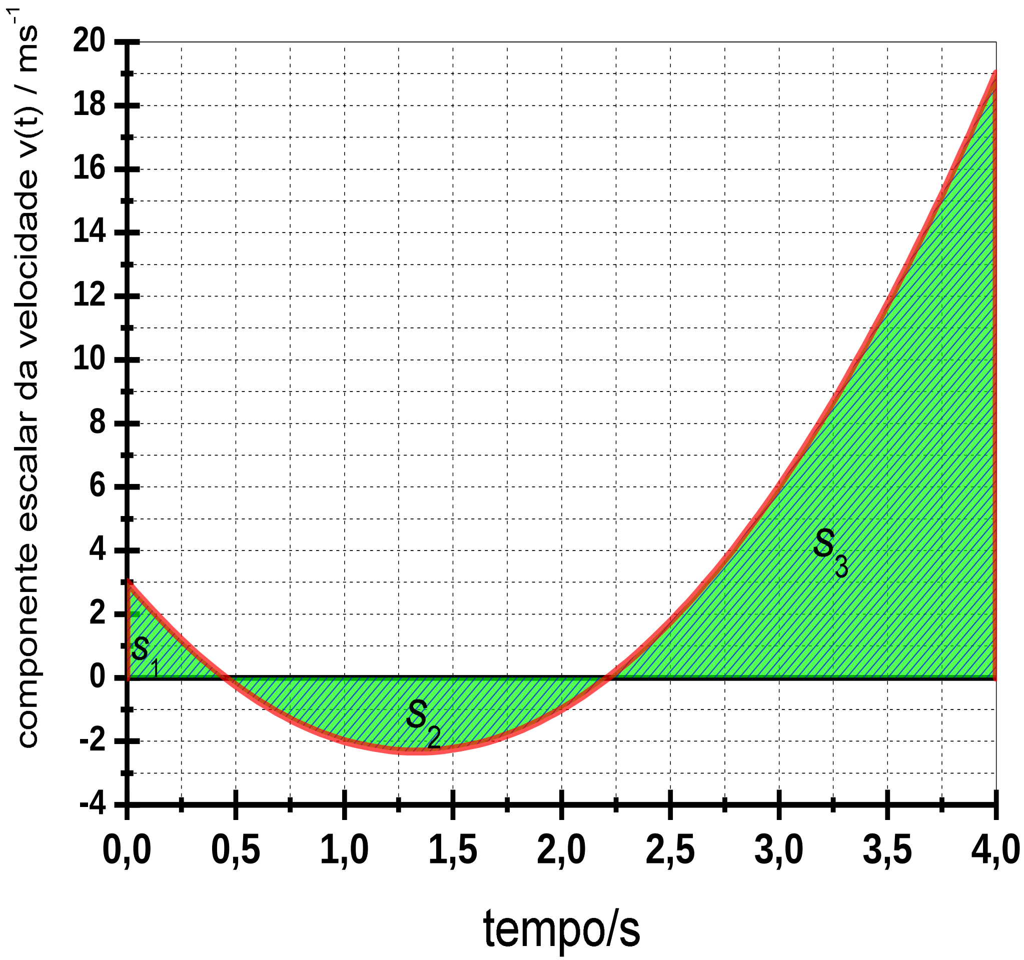


b&d) Gráfico v(t) versus t

Espaço percorrido

=

Área do gráfico v(t) *versus* tempo



Resolução

b) Determinar os instantes em que pode ocorrer inversão de sentido.

$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\ (3{,}0\ t\ - 4{,}0\ t^2 + t^3)\hat{e}_x$; como a direção se mantêm constante, então

$\vec{v}(t) = (3{,}0\ - 8t + 3t^2)\hat{e}_x$ (m/s)

$v(t) = (3{,}0\ - 8t + 3t^2)$ (m/s);

$v(t) = 0 \iff (3{,}0\ - 8t + 3t^2) = 0 \iff \mathrm{t}_1 = 0{,}45$ s e $\mathrm{t}_2 = 2{,}2$ s

$s = s_1 + s_2 + s_3 = \left|\int_0^{0,45}(3{,}0\ - 8t + 3t^2)dt\ \right| + \left|\int_{0,45}^{2,2}(3{,}0\ - 8t + 3t^2)dt\ \right|$

$+\left|\int_{2,2}^{4}(3{,}0\ - 8t + 3t^2)dt\ \right| \iff s = \ |0{,}63| + |-2{,}112 - 0{,}63| + |12{,}0 - (-2{,}112)| =$

$17{,}5$ m

c) $\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(4s) - \vec{r}(2s)}{\Delta t} = \frac{12\hat{e}_x - (-2\hat{e}_x)}{2} = 7\hat{e}_x$ (m/s)

d) $\vec{v}(t) = (3{,}0\ - 8t + 3t^2)\hat{e}_x$ (m/s)

Exercício #2:movimento a 2D com aceleração constante

Um projétil é lançado com uma velocidade de 100 ms^{-1} fazendo um ângulo de 60^o com a horizontal. Calcule:

a) O alcance do projétil.

b) A altura máxima.

c) A velocidade e a altura 10 s após o lançamento.

Resolução

Equações gerais do movimento obtidas a partir do cálculo integral:

interação Terra/corpo-> $\vec{a} = \vec{g} = -9{,}8\hat{e}_y$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Leftrightarrow \int_{t_0}^{t} \vec{a}dt = \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} \Leftrightarrow \int_{t_0}^{t} \left(-9{,}8\hat{e}_y\right)dt = \vec{v} - \vec{v}_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [-9{,}8\,(t - t_0)]\;\hat{e}_y = \vec{v}(t) - \vec{v}_0 \Leftrightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}_0 - 9{,}8\,(t - t_0)]\;\hat{e}_y$$

se t_0=0, então: $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 - (9{,}8\,t)\hat{e}_y$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Leftrightarrow \int_{t_0}^{t} \vec{v}dt = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} \Leftrightarrow \int_{t_0}^{t} (\vec{v}_0 - (9{,}8\,(t - t_0))\hat{e}_y)dt = \vec{r}(t) - \vec{r}_0$$

$$\Leftrightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + [\vec{v}_0(t - t_0)] - \left(\frac{9{,}8}{2}(t - t_0)^2\right)\hat{e}_y$$

se t_0=0, então: $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t - \left(\frac{9{,}8}{2}t^2\right)\hat{e}_y$

Resolução

a) O alcance significa que o vetor posição só tem componente horizontal. Então partindo

de $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t - \left(\frac{9,8}{2} t^2\right) \hat{e}_y$ calcula-se o instante t_{alcance}.

No caso deste problema: $\begin{cases} \vec{r}_0 = \vec{0} \\ \vec{v}_0 = \|\vec{v}_0\| \left[(\cos 60°)\hat{e}_x + (\sin 60°)\hat{e}_y\right] \end{cases}$

$$\vec{r}(t) = \left(100\left(\frac{1}{2}\right)t\right)\hat{e}_x + \left(100\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t - \left(\frac{9,8}{2}t^2\right)\right)\hat{e}_y$$

$\vec{r}(t_{alcance}) = (50 t_{alcance})\hat{e}_x$,

em que $t_{alcance}$ é calculado fazendo $50\sqrt{3}t - \left(\frac{9,8}{2}t^2\right) = 0 \Leftrightarrow t_{alcance} \cong 17,67 \text{ s}$

$\vec{r}(t_{alcance}) \cong 884\hat{e}_x (\text{m})$

Resolução

b) A altura máxima corresponde à coordenada vertical do vetor posição quando a componente vertical da velocidade se anula (v_y=0). Então nesse instante tem-se

$\vec{v}(t_{hmáxima}) = \|\vec{v}_0\|(\cos 60°)\hat{e}_x = (50)\hat{e}_x$, em que $t_{hmáximo}$ é calculado fazendo

$(50\sqrt{3} - 9{,}8t)\hat{e}_y = 0 \Leftrightarrow t_{hmáxima} \cong 8{,}8\ \mathrm{s}$,

Substituindo, em $\vec{r}(t) = \left(100\left(\frac{1}{2}\right)t\right)\hat{e}_x + \left(100\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t - \left(\frac{9{,}8}{2}t^2\right)\right)\hat{e}_y$ tem-se

$$\vec{r}(t_{hmáxima}) \cong (442)\hat{e}_x + (383)\hat{e}_y(\mathrm{m})$$

$h_{máxima}$= 383 m

Resolução

c) t=10 s, substituindo nas equações

$$\vec{r}(t) = (50t)\hat{e}_x + \left(50\sqrt{3}\,t - \left(\frac{9{,}8}{2}t^2\right)\right)\hat{e}_y$$

$$\vec{v}(t) = 50\hat{e}_x + (50\sqrt{3} - 9{,}8\,t]\,\hat{e}_y$$

Obtém-se

$$\vec{r}(10\text{ s}) = (500)\hat{e}_x + (376)\hat{e}_y(\text{m})$$

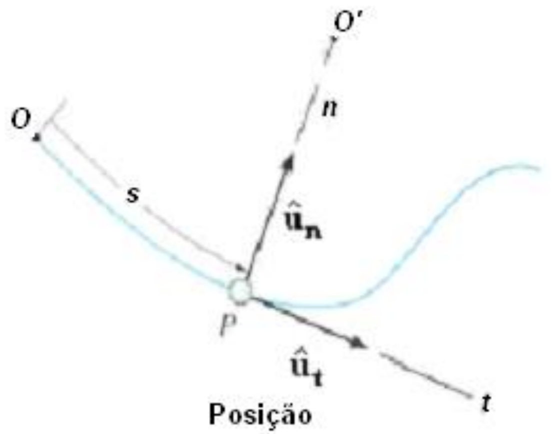
Então h=376 m

$$\vec{v}(10\text{ s}) \cong 50\hat{e}_x - 11\hat{e}_y(\text{m/s})$$

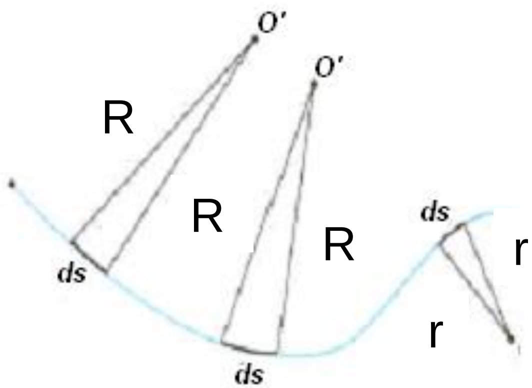
Movimento curvilíneo geral

Componentes tangencial e normal

O centro de curvatura O' localiza-se sempre do lado côncavo da trajetória; o raio de curvatura ρ é definido como a distância, medida na perpendicular, da curva ao centro de curvatura num dado ponto.



A posição da partícula, em qualquer instante, pode ser descrita por uma só coordenada medida sobre a curva a partir de uma origem fixa, igual ao comprimento do arco, **s(t).**



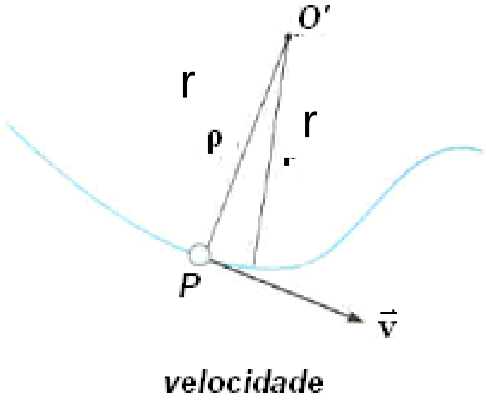
Versores unitários $\hat{u}_n, \hat{u}_t$

Movimento curvilíneo geral

Componentes tangencial e normal

A velocidade da partícula tangente à trajetória em qualquer instante será:

$$\vec{v}(t) = \frac{ds}{dt}\,\hat{u}_t = v\,\hat{u}_t$$



Movimento curvilíneo geral
Componentes tangencial e normal

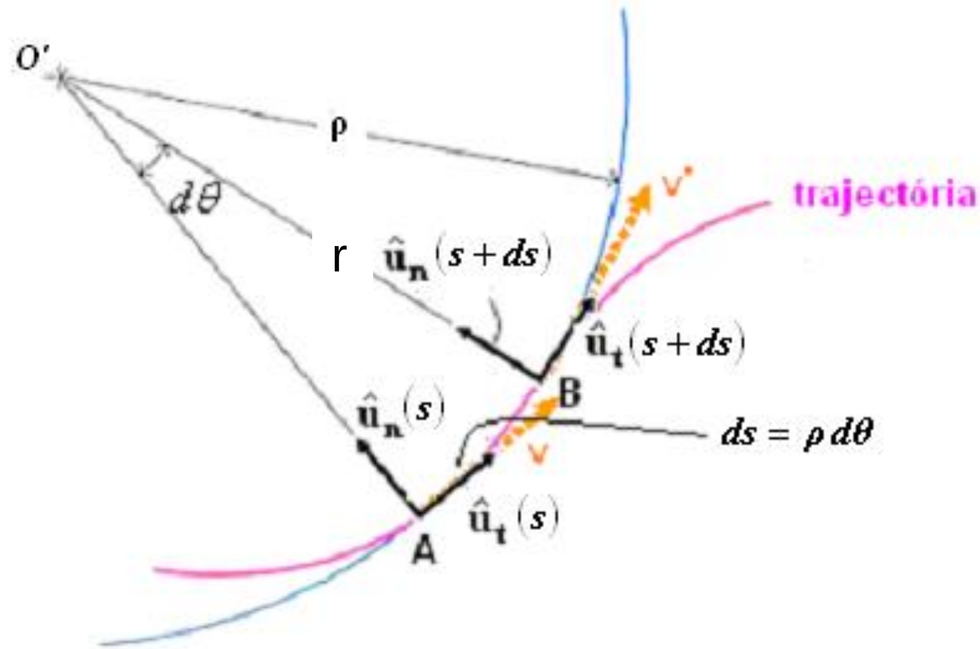
Num dado intervalo de tempo ***dt*** a partícula movimenta-se de **A** para **B**

O incremento da variável da **trajetória** corresponde a

$$ds = Rd\theta$$

O valor da velocidade é então

$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}$$



O ***vetor velocidade*** é tangente à trajetória em qualquer instante

$$\vec{v}(t) = v\,\hat{u}_t$$

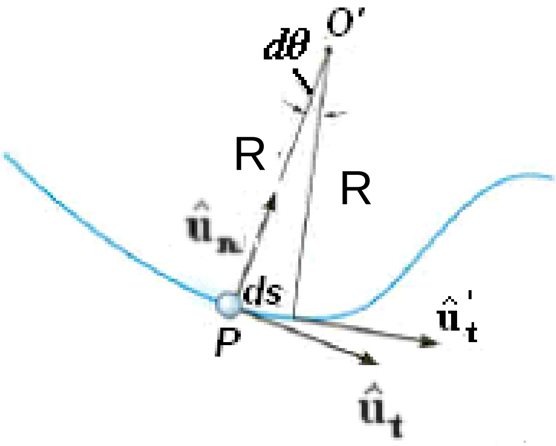
Movimento curvilíneo geral

Componentes tangencial e normal

$$\boxed{d\hat{u}_t = d\theta\,\hat{u}_n}$$

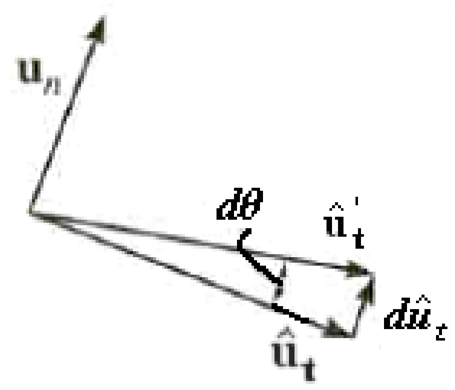
Para determinar o vetor aceleração temos que diferenciar o vetor velocidade.

O vetor aceleração reflete a alteração no ***valor, direção e sentido da velocidade***



$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_t + v\,\frac{d\hat{u}_t}{dt}$$

$$\frac{d\hat{u}_t}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\,\hat{u}_n$$



Movimento curvilíneo geral

Componente normal da aceleração (outro processo de cálculo de $\frac{d\hat{u}_t}{dt}$*)*

$$\hat{u}_t = [\cos\theta\,]\hat{e}_x + [\text{sen}\,\theta]\,\hat{e}_y$$

$$\hat{u}_n = [\cos(\theta + \tfrac{\pi}{2})]\,\hat{e}_x + [\text{sen}(\theta + \tfrac{\pi}{2})]\,\hat{e}_y$$

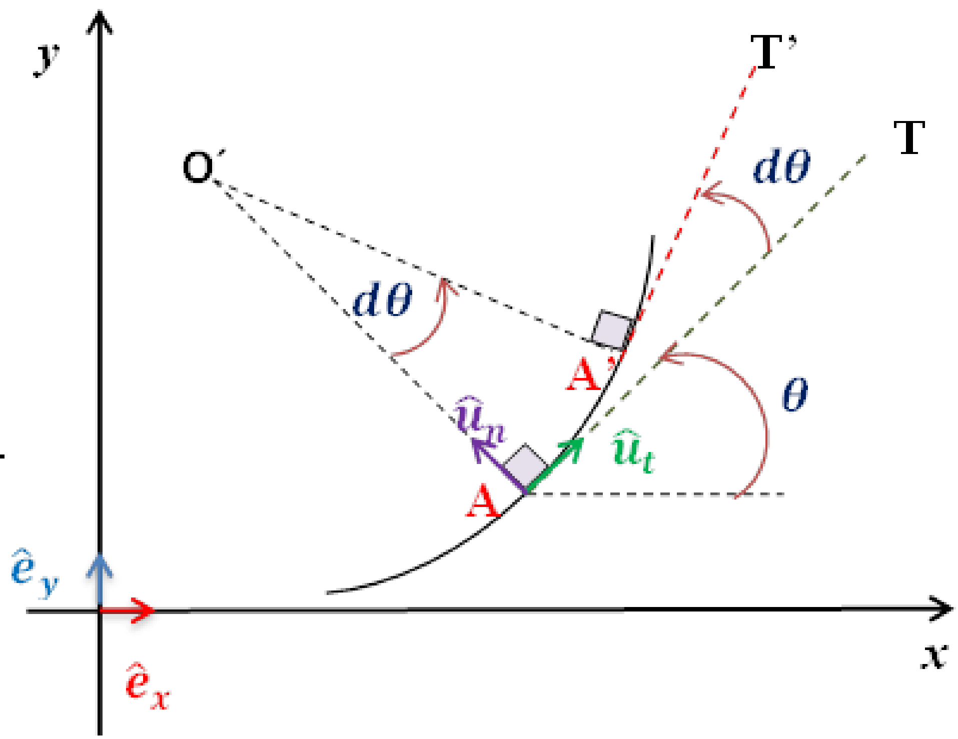
$$\hat{u}_n = [-\,\text{sen}\,\theta]\,\hat{e}_x + [\cos\theta]\,\hat{e}_y$$

$$\frac{d\hat{u}_t}{dt} = [\frac{d\theta}{dt}\,(-sen\,\theta)\,]\hat{e}_x + [\frac{d\theta}{dt}\cos\theta]\,\hat{e}_y$$

$$\frac{d\hat{u}_t}{dt} = \{[-sen\,\theta\,\,]\hat{e}_x + [\,\cos\theta]\,\hat{e}_y\}\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\hat{u}_t}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\,\hat{u}_n = \frac{1}{r}\,\frac{\boldsymbol{ds}}{\boldsymbol{dt}}\,\hat{u}_n$$

$$\frac{d\hat{u}_t}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\,\hat{u}_n = \frac{1}{r}\,v(t)\,\hat{u}_n$$



Movimento curvilíneo geral

Componentes tangencial e normal

Assim, e como $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}\dfrac{\boldsymbol{d\theta}}{\boldsymbol{dt}}$ então

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_t + v\frac{d\hat{u}_t}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_t + \frac{v^2}{r}\hat{u}_n \Leftrightarrow \vec{a}(t) = a_t\hat{u}_t + a_n\hat{u}_n$$

com

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

Componente tangencial

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

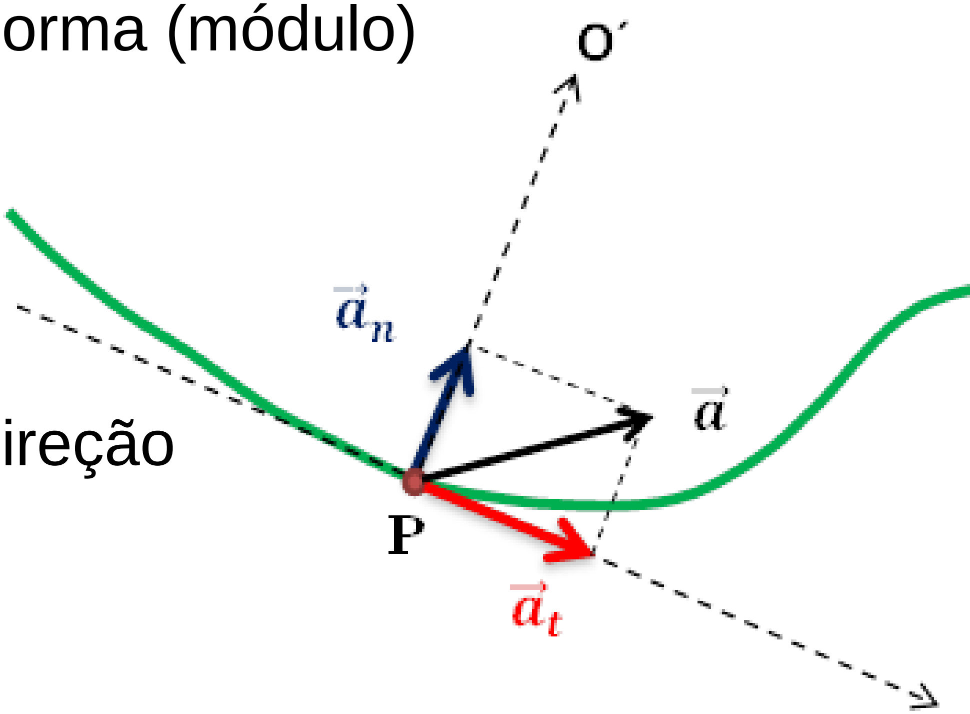
Componente normal ou centrípeta

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Componentes tangencial e normal do vetor aceleração

$\vec{a}_t$ Traduz a variação na norma (módulo) do vetor velocidade

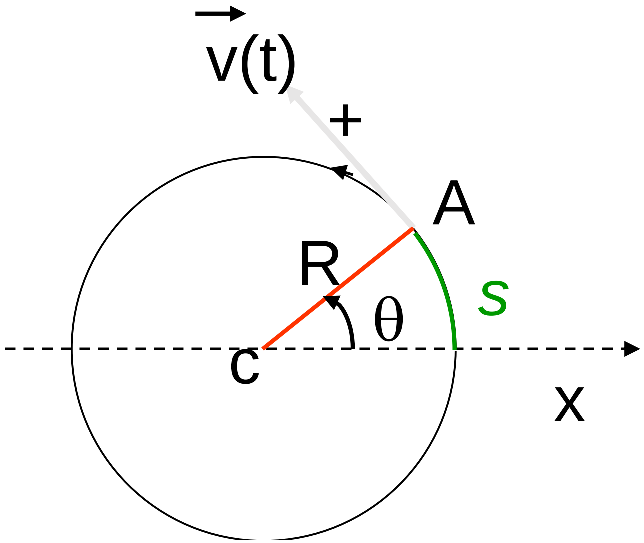
$\vec{a}_n$ Traduz a variação na direção do vetor velocidade

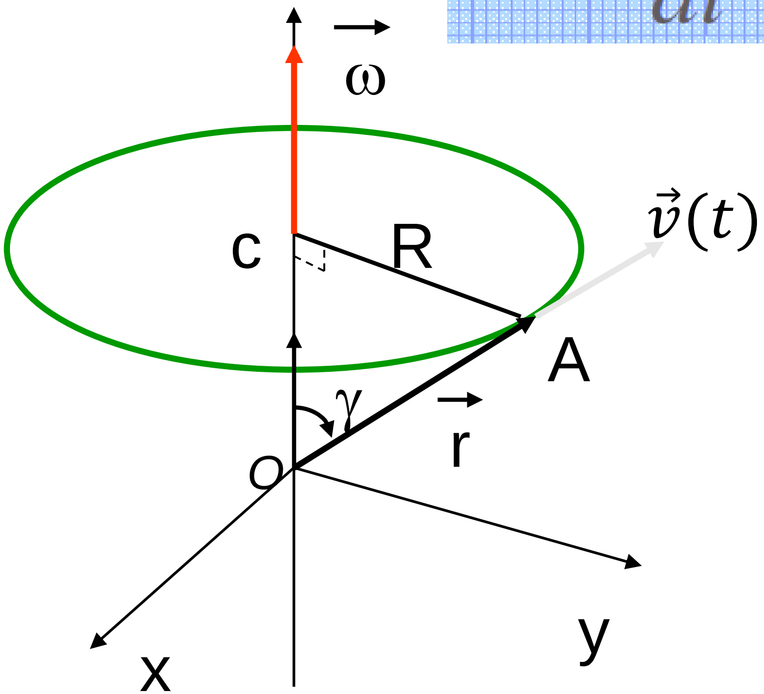


Movimento circular

$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\hat{k}$$

Velocidade angular





$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Se $\|\vec{r}\|$ e γ constantes

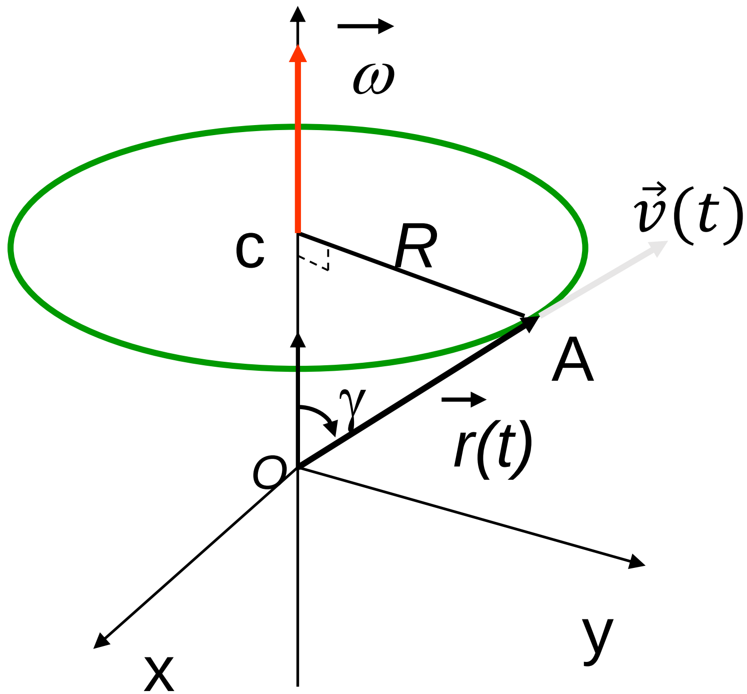
$$v = \omega\, r\, sen\gamma$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Movimento circular: aceleração angular $\vec{\alpha}$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

aceleração angular



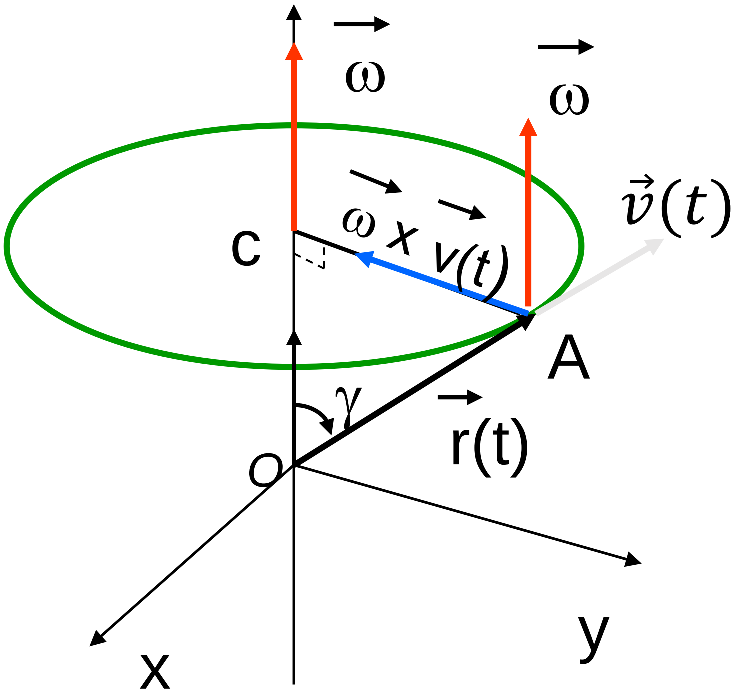
Como no movimento circular, a velocidade angular não varia em direção, então a componente escalar de $\vec{\alpha}$ é dada por:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\frac{d^2\theta}{dt^2} = R\alpha$$

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$$

Movimento circular e uniforme
aceleração angular $\vec{\alpha} = 0$



$$a_T = 0$$

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)}{dt}, como\ \vec{\omega} = const$$

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

Exercício #3. Movimento 2D

Um corpo desloca-se num arco de circunferência de raio *r* = 1,0 m no plano *OXY*, centrada em (-1,0), obedecendo à seguinte lei: $s(t) = 2t - t^2$. Em *t* = 0 s encontra-se na origem (0,0) e o sentido positivo de *s(t)* é no sentido anti-horário (direto). Determine, usando coordenadas cartesianas:

a) O vetor de posição da partícula em qualquer instante.
b) O vetor velocidade em qualquer instante.
c) O vetor aceleração em qualquer instante.
d) As componentes, tangencial e normal da aceleração em *t* = 0,5 s.
e) A distância percorrida até *t* = 2 s. Qual a posição?

Resolução

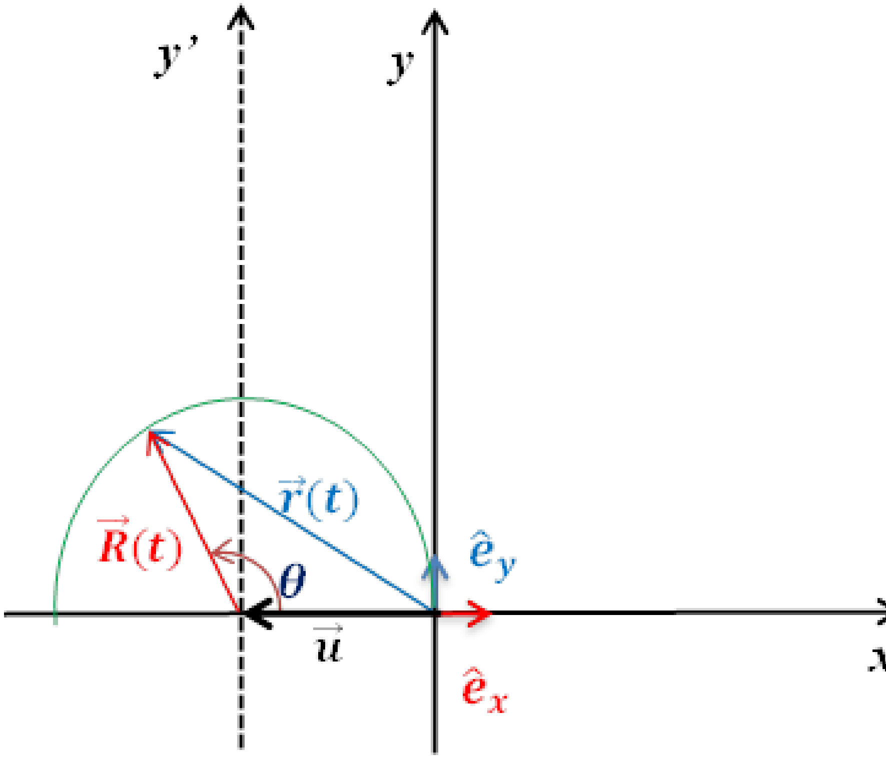
a) $\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{u}$

$\vec{u}(t) = -1\ \hat{e}_x$

$\vec{R}(t) = \|\vec{R}\|\{[\cos\theta\ ]\hat{e}_x + [\ \operatorname{sen}\theta]\ \hat{e}_y\ \}$

$s(t) = \|\vec{R}\|\theta(t) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \theta(t) = \dfrac{(2t - t^2)}{1}$



$\vec{r}(t) = [\cos(2t - t^2) - 1\ ]\hat{e}_x + [\ \operatorname{sen}(2t - t^2)]\ \hat{e}_y$

Resolução

b)

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\left\{[\cos(2t - t^2) - 1\ ]\hat{e}_x + [\,\mathrm{sen}(2t - t^2)]\,\hat{e}_y\right\}$$

$$\vec{v}(t) = (2 - 2t)\left\{[-\mathrm{sen}(2t - t^2)\ ]\hat{e}_x + [\,\cos(2t - t^2)]\,\hat{e}_y\right\}$$

$$\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{(2 - 2t)^2} = |2 - 2t| \text{ m/s}$$

c)

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\left\{(2 - 2t)\left\{[-\mathrm{sen}(2t - t^2)\ ]\hat{e}_x + [\,\cos(2t - t^2)]\,\hat{e}_y\right\}\right\}$$

$$\vec{a}(t) = [2\mathrm{sen}(2t - t^2) - (2 - 2t)^2\cos(2t - t^2)]\,\hat{e}_x +$$
$$[-2\cos(2t - t^2) - (2 - 2t)^2\,\mathrm{sen}(2t - t^2)]\,\hat{e}_y$$

d) Num referencial móvel, de versores $(\hat{u}_t, \hat{u}_n)$

$$\vec{v}(t) = v(t)\hat{u}_t$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \Leftrightarrow v(t) = \frac{d}{dt}(2t - t^2) \Leftrightarrow v(t) = 2 - 2t$$

$$\vec{v}(t) = (2 - 2t)\hat{u}_t \text{ (m/s)}$$

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_t + \vec{a}_n \Leftrightarrow \vec{a}(t) = \frac{d}{dt}v(t)\hat{u}_t + \frac{v^2(t)}{R}\hat{u}_n$$

$$\Leftrightarrow \vec{a}(t) = -2\hat{u}_t + \frac{(2-2t)^2}{1}\hat{u}_n$$

$$\vec{a}(5\ s) = -2\hat{u}_t + 1\hat{u}_n$$

e) Determinar o instante em que $\vec{v}(t) = 0 \Leftrightarrow 2 - 2t = 0 \Leftrightarrow$ t = 1s.

$$d = \left|\int_0^1 v(t)dt\right| + \left|\int_1^2 v(t)dt\right| = \left|\int_0^1 (2-2t\ )dt\right| + \left|\int_1^2 (2-2t\ )dt\right| = \left|(2t-t^2)\Big|_0^1\right| + \left|(2t-t^2)\Big|_1^2\right|$$

$$\Leftrightarrow d = 2\ m$$

$$\vec{r}(2s) = 0\hat{e}_x + 0\ \hat{e}_y$$