Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo II - Agrupamento 4 **2018/19**

Ficha de exercícios 4: Funções reais de várias variáveis reais (parte II):
Extremos globais, extremos locais e extremos condicionados

---

1. Considere a função $f(x,y) = x^2 + y^2$ no domínio $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$.
   (a) Esboce graficamente o domínio D.
   (b) Aplique cuidadosamente o Teorema de Weierstrass para garantir a existência de extremos absolutos de f e determine-os.
   [Sugestão:: Relacione $f(x,y)$ com a distância euclideana de (x,y) à origem.]

2. Sejam $\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$ e $f(x,y,z) = z^2$. O Teorema de Weierstrass garante a existência de extremos absolutos de f em $\mathcal{S}$? Porquê?

3. Seja f a função definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y) = -x^2$. Justifique que f possui uma infinidade de maximizantes.

4. Considere $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.
   (a) O Teorema de Weierstrass garante a existência de extremos absolutos de f? Justifique.
   (b) Justifique, usando diretamente a definição, que $(0,0,0)$ é minimizante de f.

5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$.
   (a) Mostre que f não é diferenciável em $(0,0)$.
   (b) Justifique que $(0,0)$ é maximizante absoluto de f.

6. Considere a função $g(x,y) = y$ e os conjuntos $\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ e $\mathcal{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
   (a) Justifique que g possui extremos globais em $\mathcal{B}$.
   (b) Identifique os extremantes globais de g em $\mathcal{B}$.
   (c) A função g possui extremantes globais em $\mathcal{A}$? Justifique.

7. Mostre que a função $h(x,y) = \frac{1}{2} - \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$ não atinge o seu máximo global na origem.

8. Determine os pontos críticos das seguintes funções:
   (a) $f(x,y) = 3xy^2 + x^3 - 3x$;
   (b) $f(x,y) = x^2y^3(6 - x - y)$;
   (c) $f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$.

9. Mostre que a função $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1$ tem apenas um mínimo local e que este ocorre apenas no ponto $(1,2)$.

10. Considere a função $f(x,y) = x^2 + 2xy - 4(x - 2y)$ definida em $\mathcal{D} = [0,1] \times [0,2]$.
    (a) Diga, justificando, se f possui pontos críticos no interior de $\mathcal{D}$.
    (b) Prove a existência de extremos absolutos e determine-os.

11. Determine os extremantes locais, e respetivos extremos, das seguintes funções:

    (a) $f(x,y) = xy\, e^{-x-y}$;

    (b) $g(x,y) = x^3 - 2x^2y - x^2 + 4y^2$;

    (c) $h(x,y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$;

    (d) $w(x,y,z) = xy - x + 2z - x^2 - y^2 - z^2$.

12. Verifique que $(-2,0)$ e $(0,0)$ são os pontos críticos da função $f(x,y) = 3x^2 - y^2 + x^3$, mas que só o primeiro é extremante de f.

13. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = (x - y^3)^2 - x^3$.

    (a) Verifique que $(0,0)$ é ponto crítico de f.

    (b) Mostre que $(0,0)$ não é extremante local de f.

14. Determine os extremos absolutos da função f definida por $f(x,y) = 2x^2 - 2y^2$ no círculo $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

15. Calcule os extremos globais da função f definida por $f(x,y) = xy$ no semicírculo $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y \geq 0\}$.

16. Determine os pontos da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 80$ que estão à menor distância do ponto $(1,2)$ e os pontos da mesma circunferência que estão à maior distância do mesmo ponto.

17. Determine o ponto do plano $x + 2y + z = 4$ que se encontra mais próximo do ponto da origem, usando o método dos multiplicadores de Lagrange. Qual é essa distância?

18. Determine os pontos da superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que estão mais próximo e mais distante do ponto $(3,1,-1)$.

19. Suponha que a temperatura num determinado ponto (x,y,z) da superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ é dada pela função $T(x,y,z) = 30 + 5(x+z)$. Calcule, justificando, os valores extremos da temperatura.

20. Seja f a função definida em $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-2)^2 \leq 4\}$ por $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$.

    (a) Represente geometricamente o domínio $\mathcal{D}$ e o gráfico de f.

    (b) Determine os pontos críticos da função f no interior do seu domínio.

    (c) Determine os extremos globais da função f em $\mathcal{D}$.

21. O lucro anual de uma empresa é estimado através da expressão

$$L(x,y) = -x^2 - y^2 + 22x + 18y - 102,$$

    onde x representa o montante gasto em investigação e y o montante gasto em publicidade (em milhões de euros). O orçamento anual da empresa prevê um investimento global de 20 milhões de euros para investigação e publicidade. Determine quanto a empresa deve alocar a cada uma dessas atividades de forma a maximizar o lucro. Com estes pressupostos, qual é o lucro máximo?

22. Pretende-se construir uma caixa paralelepipédica reta usando para estrutura (arestas) tubos de aço de forma a se utilizarem 12 metros de tubo, no total. Que dimensões deverá ter o paralelepípedo de forma a se maximizar o volume da caixa? (Negligencie o diâmetro dos tubos).

Soluções

1. (a) $\mathcal{D}$ é um losango centrado na origem com os vértices situados nos eixos coordenados.
   (b) A função é do tipo polinomial, logo contínua no seu domínio de definição $\mathbb{R}^2$ e, consequentemente, também é contínua em $\mathcal{D}$. Por outro lado, este conjunto é fechado e limitado. Nestas condições, o Teorema de Weierstrass garante a existência de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ que são, respetivamente, o menor e o maior valor que f atinge.
   Observar que $f(x, y)$ expressa o quadrado da distância de um ponto $P = (x, y)$ à origem. Assim, o máximo absoluto é 1, atingido nos pontos $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ e $(0, -1)$, e o mínimo absoluto é 0, atingido no ponto $(0, 0)$.

2. Não. O Teorema de Weierstrass não é aplicável, porque $\mathcal{S}$ não é fechado.

3. Como $f(x, y) = -x^2 \leq 0 = f(0, y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, então todos os pontos da forma $(0, y)$, com $y \in \mathbb{R}$, são maximizantes da função.

4. (a) Não. O Teorema de Weierstrass não é aplicável, porque $\mathbb{R}^3$ não é limitado.
   (b) Como $f(0, 0, 0) = 0 \leq x^2 + y^2 + z^2 = f(x, y, z)$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, então $(0, 0, 0)$ é (o único) minimizante global de f.

5. (a) f não é diferenciável em $(0, 0)$, porque não existe $f'_x(0, 0)$.
   (b) Tem-se $f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2} \leq 0 = f(0, 0)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Portanto, $(0, 0)$ é (o único) maximizante absoluto de f.

6. (a) Como g é contínua e o conjunto $\mathcal{B}$ é fechado e limitado, o Teorema de Weierstrass garante a existência de extremos globais de g em $\mathcal{B}$.
   (b) g é diferenciável e não possui pontos críticos no interior de $\mathcal{B}$, logo os extremantes situam-se na fronteira. Claramente $(0, -1)$ é minimizante global e $(0, 1)$ é maximizante global.
   (c) Não, pois g é diferenciável no aberto $\mathcal{A}$ e não possui pontos críticos nesse conjunto (notar que $\nabla g(x, y) = (0, 1) \neq (0, 0)$). Portanto, g não tem extremantes globais em $\mathcal{A}$ (nem em $\mathbb{R}^2$).

7. Na origem a função h vale $\frac{1}{2}$, enquanto que, por exemplo, em $(\sqrt{3\pi/2}, 0)$ vale $\frac{3}{2}$ que é um valor maior.

8. (a) $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$;
   (b) $(2, 3)$ e todos os pontos situados nos eixos coordenados;
   (c) $(0, 0, 0)$, $(-1, -1, 1)$, $(-1, 1, -1)$, $(1, -1, -1)$, $(1, 1, 1)$.

9. Como $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \geq 0$ então $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 1 \geq -1$. Ora $f(1, 2) = -1$ e para todo $(x, y) \neq (1, 2)$ tem-se $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 1 > -1$.

10. (a) O gradiente de f, se considerado no seu domínio de definição, anula-se apenas em $(-4, 6)$. No entanto, $(-4, 6) \notin \text{int}(\mathcal{D})$. Consequentemente, f não possui pontos críticos em $\text{int}(\mathcal{D}) =]0, 1[\times]0, 2[$.
    (b) A existência de extremos absolutos é garantida pelo Teorema de Weierstrass, uma vez que $\mathcal{D}$ é fechado e limitado e f é contínua neste conjunto. Os extremos são então atingidos na fronteira (recordar a conclusão obtida na alínea anterior).
    O máximo absoluto de f em $\mathcal{D}$ é 17 e é atingido no ponto $(1, 2)$; o mínimo absoluto de f em $\mathcal{D}$ é -3 e é atingido no ponto $(1, 0)$.

11. (a) Os pontos críticos são $(0, 0)$ e $(1, 1)$. A função f é de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$.
    Como $\det(H_f(0, 0)) = -1 < 0$, então $(0, 0)$ não é extremante (é ponto de sela). Como $\det(H_f(1, 1)) = e^{-4} > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = -e^{-2} < 0$, então $f(1, 1) = e^{-2}$ é máximo local.
    (b) Os pontos críticos de g são $(0, 0)$, $(2, 1)$ e $(1, 1/4)$. Aplicando um dos testes da Hessiana, conclui-se que os dois primeiros são pontos de sela e que $(1, \frac{1}{4})$ é minimizante local de g, onde atinge $-\frac{1}{4}$ (mínimo local).

(c) $(1,1)$ é o único extremante local de h, trata-se de um minimizante e $h(1,1)=3$ é o respetivo mínimo local.

(d) Maximizante local: $(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1)$; Respetivo máximo local: $\frac{4}{3}$

12. –

13. –

14. Tratando-se de uma função contínua definida num conjunto fechado e limitado, o Teorema de Weierstrass garante que f tem extremos globais em $\mathcal{D}$. $(0,0)$ é o único ponto crítico no interior de $\mathcal{D}$, mas não é extremante. Usando o método dos multiplicadores de Lagrange identificamos os candidatos $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ e $(0,-1)$. Calculando o valor de f nestes pontos, conclui-se que o máximo global de f é 2 (atingido nos pontos $(1,0)$ e $(-1,0)$) e o mínimo global de f é -2 (atingido nos pontos $(0,1)$ e $(0,-1)$).

15. Tratando-se de uma função contínua definida num conjunto fechado e limitado, o Teorema de Weierstrass garante que f tem extremos globais em $\mathcal{D}$. Não existem pontos críticos no interior de $\mathcal{D}$ (ambas as derivadas parciais anulam-se $(0,0)$, mas este ponto situa-se na fronteira). A fronteira $fr(\mathcal{D})$ é constituída pela semicircunferência $\mathcal{D}_1$ e pelo segmento de reta $\mathcal{D}_2$:

$$\mathcal{D}_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\wedge y\geq 0\}\,;\qquad \mathcal{D}_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=0\wedge -1\leq x\leq 1\}.$$

Como f é constante em $\mathcal{D}_2$ (pois $f(x,0)=0$) todos os pontos situados neste segmento são candidatos a extremantes. Os candidatos em $\mathcal{D}_1$ são $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (obtidos através do método dos multiplicadores de Lagrange). Como

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{1}{2},\quad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2},\quad f(x,0)=0\,,$$

o máximo global de f é $1/2$ e o mínimo global é $-1/2$.

16. $(4,8)$ é o que se encontra mais próximo (à distância $3\sqrt{5}$) e $(-4,-8)$ é o que se encontra mais afastado (à distância $5\sqrt{5}$).

17. $(\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3})$.

18. Aplicando o métodos dos multiplicadores de Lagrange identificamos os pontos

$$\left(\frac{6}{\sqrt{11}},\frac{2}{\sqrt{11}},-\frac{2}{\sqrt{11}}\right)\quad \text{e}\quad \left(-\frac{6}{\sqrt{11}},-\frac{2}{\sqrt{11}},\frac{2}{\sqrt{11}}\right).$$

O primeiro é o mais próximo e o segundo ponto é o mais distante.

19. $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ é minimizante absoluto e $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ é maximizante absoluto. Assim, a temperatura mínima é de $T\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\simeq 22{,}93$ e a temperatura máxima é de $T\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\simeq 37{,}07$.

20. (a) –

    (b) $(0,1)$.

    (c) $f(0,1)=0$ é mínimo global e $f(0,4)=9$ é máximo global.

21. O lucro máximo da empresa é 100 (milhões de euros), sendo atingido com um gasto de 11 em investigação e de 9 em publicidade.

22. A estrutura deve ser cúbica com aresta de 1 metro.