Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I - Agrupamento IV — 1ª Prova de Avaliação Discreta

10 de novembro de 2017

Duração: **2h**

N.° Mec.: ______________ Nome: ____

(Declaro que desisto: ____) N.° folhas suplementares: _____

Questão [Cotação]	1a [17pts]	1b [13pts]	1c [10pts]	2 [15pts]	3 [15pts]	4a [07pts]	4b [15pts]	4c [13pts]	4d [10pts]	5a [12pts]	5b [23pts]	5c [25pts]	5d [25pts]	Classificação (valores)

– Justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

1. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+\operatorname{sen}^2(x-1))}{x-1} & se \quad x<1\\[2ex] \arccos\left(\dfrac{1}{x}\right) & se \quad x\geq 1.\end{cases}$$

[17pts] (a) A função f é contínua em $x=1$? Justifique convenientemente.

Continua na folha suplementar Nº

[13pts] (b) Usando a definição de derivada lateral, determine $f'_+(1)$.

Continua na folha suplementar Nº

[10pts] (c) Mostre que existe $c \in]\sqrt{2}, 2[$ tal que $f'(c) = \dfrac{\pi}{12(2-\sqrt{2})}$.

Nota: $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ e $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Continua na folha suplementar Nº

N° Mec: ____________ **Nome:** ____________

[15pts] 2. Mostre que a função g definida por $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ tem um único zero no intervalo $]-1, 2[$.

Continua na folha suplementar Nº

[15pts] 3. Seja f uma função contínua em $[a, b]$, diferenciável em $]a, b[$ e tal que $f(a) = f(b) = 0$. Dado $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, defina-se $g(x) = e^{\alpha x} f(x)$. Prove que existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = -\dfrac{1}{\alpha} f'(c)$.

Continua na folha suplementar Nº

4. Considere a função h definida por $h(x) = 2\operatorname{arcsen}(\operatorname{tg} x)$, onde $D_h \subseteq \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

[07pts] (a) Determine o domínio de h, D_h.

Continua na folha suplementar Nº

[15pts] (b) Estude h quanto à monotonia e existência de extremos locais e globais.

Continua na folha suplementar Nº

[13pts] (c) Caracterize a função inversa de h, indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica que a define.

Continua na folha suplementar Nº

[10pts] (d) Seja f tal que $\int f(x)\,dx = h(x) + C, C \in \mathbb{R}$. Determine $f(0)$.

Continua na folha suplementar Nº

5. Determine os seguintes integrais (simplificando o mais possível o resultado):

[12pts] (a) $\displaystyle\int \frac{-\cos x}{(1+\operatorname{sen} x)^2}\,dx$

Continua na folha suplementar Nº

[23pts] (b) $\displaystyle\int (2x^3+x)\cdot \operatorname{arctg} x\,dx$

Continua na folha suplementar Nº

[25pts] (c) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^3+x}\,dx$

Continua na folha suplementar Nº

[25pts] (d) $\displaystyle\int \frac{3}{x^2\sqrt{x^2-9}}\,dx$ (Sugestão: utilize a mudança de variável dada por $x = 3\sec t$, indicando o domínio adequado a esta substituição).

Continua na folha suplementar Nº

Formulário

$(f(x)^p)' = p\,(f(x))^{p-1}\,f'(x)$, com $p \in \mathbb{R}$	
$\left(a^{f(x)}\right)' = f'(x)a^{f(x)}\ln(a)$, com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$(\log_a(f(x)))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)\ln(a)}$, com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
$(\operatorname{sen}(f(x)))' = f'(x)\cos(f(x))$	$(\cos(f(x)))' = -f'(x)\operatorname{sen}(f(x))$
$(\operatorname{tg}(f(x)))' = f'(x)\sec^2(f(x))$	$(\operatorname{cotg}(f(x)))' = -f'(x)\operatorname{cosec}^2(f(x))$
$(\sec(f(x)))' = f'(x)\sec(f(x))\operatorname{tg}(f(x))$	$(\operatorname{cosec}(f(x)))' = -f'(x)\operatorname{cosec}(f(x))\operatorname{cotg}(f(x))$
$(\operatorname{arcsen}(f(x)))' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$	$(\arccos(f(x)))' = -\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$
$(\operatorname{arctg}(f(x)))' = \dfrac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$	$(\operatorname{arccotg}(f(x))' = -\dfrac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$

$1+\operatorname{tg}^2(x) = \sec^2(x)$, para $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$	$1+\operatorname{cotg}^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x)$, para $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
$\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$	$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x\cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$
$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$	$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$