Matemática Discreta

Elementos de Teoria dos Grafos - 1

Universidade de Aveiro 2018/2019

http://moodle.ua.pt

Grafos orientados e não orientados

Definição (de grafo não orientado)

Designa-se por grafo (não orientado) um terno $G = (V(G), E(G), \psi_G)$, onde $V = V(G)$ é um conjunto não vazio, $E = E(G)$ é um conjunto disjunto de V e ψ_G é uma função tal que para cada $e \in E$, $\psi_G(e)$ denota um par não ordenado de elementos (não necessariamente distintos) de V.

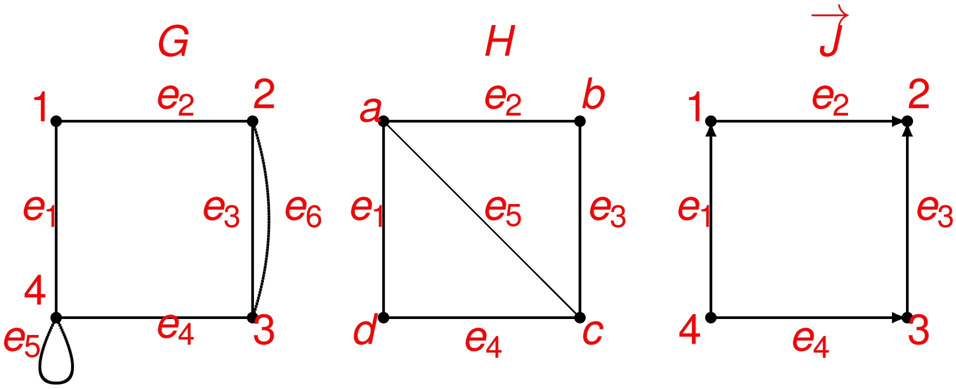
- V - conjunto de vértices;
- E - conjunto de arestas;
- ψ_G - função de incidência.

• Se ψ_G determina, para cada $e \in E$, um par ordenado de elementos de V, o terno $\vec{G} = (V(\vec{G}), E(\vec{G}), \psi_{\vec{G}})$ designa-se por grafo orientado (ou digrafo) e o conjunto E designa-se por conjunto de arcos.

Relação de adjacência

• Dado um grafo G (digrafo $\vec{G}$), por simplicidade de escrita, denotam-se as arestas (arcos) $e \in E(G)$ pelas respectivas imagens $\psi_G(e) = uv$, onde uv denota um par não ordenado (ordenado) de vértices. Neste caso u e v designam-se por vértices extremos da aresta (do arco).
• Se o grafo é orientado o vértice u designa-se por cauda e o vértice v por cabeça do arco e.
• Uma aresta diz-se incidente nos seus vértices extremos. Se uma aresta e é incidente nos vértices u e v, então u e v dizem-se adjacentes.
• Duas arestas incidentes num mesmo vértice dizem-se adjacentes.

Exemplos



- $V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$, $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, $\psi_G(e_1) = 14$, $\psi_G(e_2) = 12$, $\psi_G(e_3) = 23$, $\psi_G(e_4) = 43$, $\psi_G(e_5) = 44$, $\psi_G(e_6) = 23$.
- $V(H) = \{a, b, c, d\}$, $E(H) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, $\psi_H(e_1) = ad$, $\psi_H(e_2) = ab$, $\psi_H(e_3) = bc$, $\psi_H(e_4) = cd$, $\psi_H(e_5) = ac$.
- $V(\overrightarrow{J}) = \{1, 2, 3, 4\}$, $E(\overrightarrow{J}) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $\psi_{\overrightarrow{J}}(e_1) = 41$, $\psi_{\overrightarrow{J}}(e_2) = 12$, $\psi_{\overrightarrow{J}}(e_3) = 32$, $\psi_{\overrightarrow{J}}(e_4) = 43$.

O conceito de vizinhança

- Designa-se por vizinhança de $v \in V(G)$, o conjunto de todos os vértices adjacentes a v.
- A vizinhança do vértice $v \in V(G)$ denota-se por $\mathcal{N}_G(v)$ ou, simplesmente, por $\mathcal{N}(v)$ quando não há dúvida relativamente ao grafo considerado.
- Uma aresta e com ambos os extremos no mesmo vértice u, ou seja, tal que $\psi_G(e) = uu$ diz-se um lacete.
- Duas arestas com os mesmos vértices extremos designam-se por arestas paralelas.

Observação: um grafo admite várias representações gráficas mas cada representação gráfica determina um único grafo.

Grafos e digrafos simples

Definição

Um grafo (digrafo) diz-se simples se não contém arestas (arcos) paralelas(os) nem lacetes.

Observação: Num grafo simples uma aresta é completamente determinada pelos seus vértices extremos e, nesse caso, um grafo G pode definir-se, unicamente, pelo par de conjuntos $G = (V(G), E(G))$.

• É comum designar um grafo (digrafo) com lacetes e/ou arestas paralelas por multigrafo (multidigrafo).

• De agora em diante, introduzimos os conceitos comuns a grafos e digrafos utilizando apenas o contexto dos grafos (chamando a atenção para os conceitos específicos).

Ordem e dimensão de um grafo

• Designa-se por grafo trivial um grafo simples com um único vértice, ou seja, tal que $\mid V(G) \mid = 1$ e $\mid E(G) \mid = 0$.
• Um grafo diz-se finito se $V(G)$ e $E(G)$ são ambos finitos. Caso contrário, diz-se infinito.

Definição (de ordem de um grafo)

Designa-se por ordem do grafo G e denota-se por $\nu(G)$ (ou ν se não houver dúvidas quanto ao grafo considerado), o número de vértices de G.

Definição (de dimensão de um grafo)

Designa-se por dimensão do grafo G e denota-se por $\varepsilon(G)$ (ou ε se não houver dúvidas quanto ao grafo considerado), o número de arestas de G.

Igualdade de grafos e grafos complementares

Definição

Dois grafos G e H dizem-se iguais, escrevendo-se $G = H$ se

$$V(G) = V(H), E(G) = E(H), \psi_G = \psi_H.$$

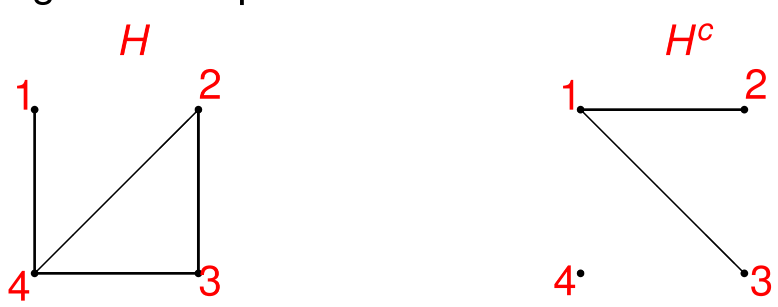
Definição

Dado um grafo G simples, designa-se por grafo complementar de G e denota-se por G^c, um grafo simples cujo conjunto de vértices é $V(G)$ e no qual dois vértices são adjacentes se e só se não são adjacentes em G.

Observação: $(G^c)^c = G$.

Grau de um vértice

Exemplo de grafos complementares:



Definição (de grau)

Dado um grafo G e um vértice $v \in V(G)$ designa-se por grau de v e denota-se por $d_G(v)$ (ou, simplesmente, $d(v)$) o número de arestas incidentes em v (onde os lacetes, caso existam, contam duas vezes).

Maior e menor grau

- O maior grau dos vértices do grafo G denota-se por $\Delta(G)$, ou seja, $\Delta(G) = \max_{v \in V(G)}\{d_G(v)\}$.
- O menor grau dos vértices de G denota-se por $\delta(G)$, ou seja, $\delta(G) = \min_{v \in V(G)}\{d_G(v)\}$.

- No caso de um digrafo, $\overrightarrow{G}$, podemos dividir o grau de um vértice $v \in V(\overrightarrow{G})$ em
  - semigrau de entrada $d^-_{\overrightarrow{G}}(v) = \mid \{xv \in E(\overrightarrow{G})\} \mid$;
  - semigrau de saída $d^+_{\overrightarrow{G}}(v) = \mid \{vx \in E(\overrightarrow{G})\} \mid$.

- Verifica-se a igualdade: $d_{\overrightarrow{G}}(v) = d^-_{\overrightarrow{G}}(v) + d^+_{\overrightarrow{G}}(v)$.

Exercício

Utilizando um grafo resolva o seguinte problema:

O Sr. e a Sra. Silva convidaram quatro casais para jantar em casa. Alguns são amigos do Sr. Silva e outros amigos da Sra. Silva. Em casa do casal Silva os convidados que já se conheciam cumprimentaram-se com um aperto de mão e os restantes apenas se saudaram.
Depois de todos terem chegado o Sr. Silva observou

- se me excluir a mim todos deram um número diferente de apertos de mão.

Quantos apertos de mão deu o Sr. Silva?

Resolução do exercício

É claro que os membros de um mesmo casal não se cumprimentaram um ao outro, pelo que o número de cumprimentos variou entre 0 e 8.
Por outro lado, uma vez que, excluindo o Sr. Silva, todas as restantes 9 pessoas deram um número diferente de apertos de mão, podemos atribuir a cada uma delas exactamente um índice j entre 0 e 8 que corresponde ao número de apertos de mão que deu.
Ou seja, a pessoa n_j deu j apertos de mão.

Resolução do exercício (cont.)

- Uma vez que o número n_8 deu 8 apertos de mão, ele apertou a mão a toda a gente, com excepção dele próprio e da mulher. Logo, n_8 e n_0 são casados.
- Por sua vez, n_7 só não apertou a mão a ele próprio, a n_0 e n_1 (uma vez que este último só deu um aperto de mão e foi a n_8). Logo, n_7 e n_1 são casados.
- Por sua vez, n_6 só não deu apertos de mão a si próprio, a n_0, n_1 e n_2 (note-se que este último deu um aperto de mão a n_8 e n_7. Logo, n_2 e n_6 são casados.
- O n_5 apertou a mão de n_8, n_7, n_6, n_4 e ao Sr. Silva e, consequentemente, é casado com n_3. Assim, n_4 é a Sra Silva (que, naturalmente, não deu um aperto de mão ao Sr. Silva) e ficam determinados todos os apertos de mão.

Logo, o Sr. Silva apertou a mão a n_8, n_7, n_6 e n_5.

Resultados básicos

Teorema

Para todo o grafo G, a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas, ou seja,

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2 \mid E(G) \mid$$

Corolário

O número de vértices de grau ímpar é par.

- No caso de grafos orientados vem:

$$\sum_{v \in V(G)} d^+_{\vec{G}}(v) = \sum_{v \in V(G)} d^-_{\vec{G}}(v) = \mid E(G) \mid$$

Matriz de adjacência

Definição (de matriz de adjacência)

- Designa-se por matriz de adjacência de um grafo não orientado G e denota-se por $A_G = (a_{ij})$, a matriz quadrada de dimensão $\nu \times \nu$ tal que a_{ij} é igual ao número de arestas entre os vértices v_i e v_j quando $i \neq j$ e é igual a duas vezes o número de lacetes incidendentes no vértice v_i quando $i = j$.

- Sendo $\overrightarrow{G}$ um digrafo, a matriz de adjacência $A_{\vec{G}} = (a_{ij})$ é tal que a_{ij} é igual ao número de arcos com cauda em v_i e cabeça em v_j se $i \neq j$ e é igual ao número de lacetes com cauda e cabeça no vértice v_i se $i = j$.

- Esta representação utiliza ν^2 células de memória.

Matriz de adjacência (cont.)

- Alguns autores consideram nas matrizes de adjacência $A_{\overrightarrow{G}} = (a_{ij})$ de grafos não orientados, $a_{ii} = 1$ quando o vértice v_i tem um lacete. Com esta definição porém, em coerência, ter-se-ia que considerar que os lacetes contribuiriam apenas com uma unidade para o grau dos vértices em que incidem (o que não é o caso na nossa abordagem).

Exemplo: Matrizes de adjacência do grafo G e do digrafo $\overrightarrow{J}$ anteriormente representados.

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_{\overrightarrow{J}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matriz de incidência aresta-vértice

Definição (de matriz de incidência aresta-vértice)

Designa-se por matriz de incidência aresta-vértice ou simplesmente matriz de incidência e denota-se por $M_G = (m_{ij})$ a matriz de dimensão $\nu \times \varepsilon$ tal que

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } e_j = v_p v_q \text{ com } i \notin \{p, q\} \\ 1 & \text{se } e_j = v_i v_k, \text{ com } k \neq i \\ 2 & \text{se } e_j = v_i v_i \end{cases}$$

- No caso dos grafos orientados, $\overrightarrow{G}$, sem lacetes as entradas da matriz de incidência $M_{\overrightarrow{G}} = (m_{ij})$ são dadas por

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } e_j = v_p v_q \ \text{ com } \ i \notin \{p, q\} \\ \text{-1} & \text{se } e_j = v_k v_i, \ \text{ para algum vértice } \ v_k \\ 1 & \text{se } e_j = v_i v_k, \ \text{ para algum vértice } \ v_k \end{cases}$$

Matriz de incidência (cont.)

- Esta representação utiliza $\nu \times \varepsilon$ células de memória.

Exemplo:

$$M_H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{\vec{J}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lista de arestas e dois vectores

- A representação por lista de arestas consiste precisamente em armazenar numa lista todas as arestas do grafo. No caso do grafo H vem $[ad, ab, bc, cd, ac]$. Esta representação utiliza ε células de memória.

Observação. Perde-se informação sobre vértices isolados.

- Na representação com dois vectores, a lista de arestas é construída recorrendo a dois vectores:

$$F = (f_1, \ldots, f_\varepsilon) \text{ e } T = (t_1, \ldots, t_\varepsilon)$$

tais que a aresta $e_i, i = 1, \ldots, \varepsilon$ tem como vértices extremos f_i e t_i. No caso de digrafos o arco e_i tem cauda f_i e cabeça t_i.
Exemplo da representação com dois vectores: Considerando o digrafo $\vec{J}$, obtém-se $F = (4, 1, 3, 4)$ e $T = (1, 2, 2, 3)$.

Listas de sucessores ou listas de adjacência

- As listas de sucessores (ou listas de adjacência) utilizam ν listas (uma por cada vértice). A cada vértice v faz-se corresponder a lista de todos os vértices que lhe são adjacentes (ou todos os vértices que são cabeça de um arco com cauda em v se o grafo é orientado), com eventual repetição no caso de multigrafos.

Exemplo: no caso do grafo $\vec{J}$ vem $\begin{array}{ll} 1: & 2 \\ 2: & \\ 3: & 2 \\ 4: & 1,3 \end{array}$

- Esta representação utiliza $\varepsilon + \nu$ células de memória.

Referências bibliográficas I

D. M. Cardoso, J. Szymanski e M. Rostami, *Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos*, Escolar Editora, 2009.