# Matemática Discreta

## Lógica de Primeira Ordem - 6

Universidade de Aveiro 2018/2019

http://moodle.ua.pt

Resolventes de cláusulas Aplicação do princípio da resolução à lógica de primeira ordem Formulação geral da implementação do princípio d


1. Resolventes de cláusulas
2. Aplicação do princípio da resolução à lógica de primeira ordem
3. Formulação geral da implementação do princípio da resolução
4. Implementação em excel do algoritmo de resolução
5. Referências e bibliografia

## Unificador mais geral de dois ou mais literais e factores

### Definição (factor)

Se $\sigma$ é o unificador mais geral de dois ou mais literais (com o mesmo sinal) de uma cláusula $C$, então $C\sigma$ é um factor de $C$.

Exemplo: Considerando a cláusula

$$C = P(x) \vee P(f(y)) \vee Q(x),$$

verifica-se que os literais $L_1 : P(x)$ e $L_2 : P(f(y))$ têm o unificador mais geral $\sigma = \{f(y)/x\}$. Então

$$C\sigma = P(f(y)) \vee Q(f(y))$$

é um factor de $C$.



## Resolvente binária

### Definição (de resolvente binária)

Sejam $L_1$ e $L_2$ literais das cláusulas $C_1$ e $C_2$ as quais não têm qualquer variável em comum. Se $L_1$ e $\neg L_2$ têm o mesmo unificador mais geral $\sigma$, então $(C_1\sigma - L_1\sigma) \cup (C_2\sigma - L_2\sigma)$ diz-se resolvente binária de $C_1$ e $C_2$.

Exemplo: Considerando as cláusulas

$$C_1 : \; P(x) \vee Q(x) \text{ e } C_2 : \neg P(a) \vee R(y),$$

onde $a$ é uma constante. Os literais $L_1 : P(x)$ e $\neg L_2 : P(a)$ têm o unificador mais geral $\sigma = \{a/x\}$. Assim,

$$(C_1\sigma - L_1\sigma) \cup (C_2\sigma - L_2\sigma) = Q(a) \vee R(y).$$

Logo, $Q(a) \vee R(y)$ é a resolvente binária de $C_1$ e $C_2$.

## Resolventes de cláusulas

### Definição (de resolvente de cláusulas)

Designa-se por resolvente das cláusulas $C_1$ e $C_2$, uma das seguintes resolventes:

1. uma resolvente binária de $C_1$ e $C_2$;
2. uma resolvente binária de $C_1$ e um factor de $C_2$;
3. uma resolvente binária de um factor de $C_1$ e $C_2$;
4. uma resolvente binária de um factor de $C_1$ e de um factor de $C_2$.

Resolventes de cláusulas Aplicação do princípio da resolução à lógica de primeira ordem Formulação geral da implementação do princípio d

### Exemplo

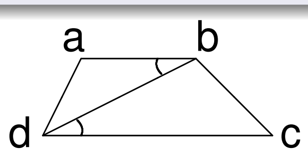
Vamos considerar as cláusulas
$C_1 = P(x) \vee P(f(y)) \vee R(g(y))$ e $C_2 = \neg P(f(g(a))) \vee Q(b)$.

- $C_{1'} = P(f(y)) \vee R(g(y))$ é um factor de $C_1$;
- $R(g(g(a))) \vee Q(b)$ é uma resolvente binária de um factor de $C1'$ e $C_2$
- $R(g(g(a))) \vee Q(b)$ é uma resolvente de $C_1$ e $C_2$.

## Aplicação do princípio de resolução à lógica de primeira ordem

**Exemplo de aplicação**

Vamos provar, utilizando o princípio da resolução, que os ângulos internos alternos formados pelas diagonais de um trapézio $T(a, b, c, d)$ são iguais.




- $A_1$: $(\forall x)(\forall y)(\forall u)(\forall v)\ T(x, y, u, v) \Rightarrow P(x, y, u, v)$ (a recta que contém o segmento $xy$ é paralela à recta que contém o segmento $uv$);
- $A_2$: $(\forall x)(\forall y)(\forall u)(\forall v)\ P(x, y, u, v) \Rightarrow E(x, y, v, u, v, y)$ (os ângulos $xyv$ e $uvy$ são iguais);
- $A_3$: $T(a, b, c, d)$.



## Aplicação do princípio de resolução à lógica de primeira ordem (cont.)

- Vamos provar que os ângulos internos alternos formados pelas diagonais de um trapézio são iguais, provando que
- $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \neg E(a, b, d, c, d, b)$ é inconsistente.
- Ou seja, que o conjunto de cláusulas:

$$\begin{aligned} S \;=\; \{ & \neg T(x, y, u, v) \vee P(x, y, u, v), \\ & \neg P(x, y, u, v) \vee E(x, y, v, u, v, y), \\ & T(a, b, c, d), \\ & \neg E(a, b, d, c, d, b)\} \end{aligned}$$

é inconsistente.

## Procedimento de aplicação do princípio da resolução

A implementação da aplicação do princípio da resolução a um conjunto de cláusulas, $S$, pode fazer-se de acordo com os seguintes passos:
1) Determinar as resolventes dos pares das cláusulas de $S$.
2) Juntar as resolventes determinadas em 1) ao conjunto $S$.
3) Determinar, as resolventes que decorrem do conjunto anteriormente obtido e repetir este procedimento, até que se obtenha a cláusula vazia $\diamondsuit$.

Sendo $S^0, S^1, \ldots, S^n$ os conjuntos de resolventes, obtém-se
$S^0 = S$;
$S^n = \{$ resolvente de $C_1$ e $C_2$ $:$ $C_1 \in S^0 \cup S^1 \cup \cdots \cup S^{n-1}$ e $C_2 \in S^{n-1}\}$,
$n = 1, 2, \ldots$



## Implementação em Excel

- INPUT: $S$ (conjunto de cláusulas)
  1. $k = 0$;
  2. $S^0 = S$;
  3. Criar um número de colunas igual ao número de literais de $S^0$ e identificá-las pelos respectivos literais;
  4. Criar um número de linhas igual ao número de cláusulas de $S^0$ e identificá-las pelas respectivas cláusulas;
  4. Para cada linha e coluna:
     - se o correspondente literal aparece em $S^0$ não negado atribuir o valor $1$;
     - se aparece negado atribuir o valor $-1$;
     - se não faz parte da cláusula atribuir o valor $0$.

## Implementação em Excel (cont.)

- Enquanto existirem pelo menos duas linhas que contenham duas células, associadas à mesma coluna, com sinais contrários, obter $S^{k+1}$ pela "adição", $\oplus$, dos respectivos pares de linhas, onde:

| $\oplus$ | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| -1 | -1 | -1 | 0 |
| 0 | -1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |

- Se resultar uma linha de zeros (correspondente à cláusula vazia) então STOP (conclui-se que $S$ é inconsistente); senão fazer $k = k + 1$;



## Implementação em Excel (cont.)

- Exemplo: Seja $S^0 = \{P, \neg U, \neg S \vee U, \neg P \vee S\}$

| | Número da cláusula | $P$ | $S$ | $U$ |
|---|---|---|---|---|
| $S^0$ | ($1^a$): $P$ | 1 | 0 | 0 |
| | ($2^a$): $\neg U$ | 0 | 0 | -1 |
| | ($3^a$): $\neg S \vee U$ | 0 | -1 | 1 |
| | ($4^a$): $\neg P \vee S$ | -1 | 1 | 0 |
| $S^1$ | ($5^a$)=($1^a$) $\oplus$ ($4^a$) | 0 | 1 | 0 |
| | ($6^a$)=($2^a$) $\oplus$ ($3^a$) | 0 | -1 | 0 |
| | ($7^a$)=($3^a$) $\oplus$ ($4^a$) | -1 | 0 | 1 |
| $S^2$ | ($8^a$)=($1^a$) $\oplus$ ($7^a$) | 0 | 0 | 1 |
| | ($9^a$)=($2^a$) $\oplus$ ($7^a$) | -1 | 0 | 0 |
| | ($10^a$)=($3^a$)$\oplus$ ($5^a$) | 0 | 0 | 1 |
| | ($11^a$)=($4^a$)$\oplus$ ($6^a$) | -1 | 0 | 0 |
| | ($12^a$)=($5^a$)$\oplus$ ($6^a$) | 0 | 0 | 0 |

- Referência bibliográfica:
  D. M. Cardoso, M. P. Carvalho, *Noções de Lógica Matemática*, Universidade de Aveiro, 2007 (versão revista em Março 2015, disponível na página da disciplina).