UNIVERSIDADE DE AVEIRO
Departamento de Matemática

Matemática Discreta

Teste $N^0 1$ de Matemática Discreta — 22 de Abril de 2016

Responda de forma cuidada e justificadamente a cada uma das questões.

Tempo para a realização desta prova: 2 horas.

*(2)***1-** Seja $\mathcal{R}$ a relação binária, definida no conjunto de todas as páginas *Web tal que*

$x\mathcal{R}y$ se e só se as páginas x e y têm os mesmos visitantes.

*Admitido que existem pelo menos duas páginas distintas com os mesmos visitantes, verifique se esta relação é **(a)** reflexiva, **(b)** simétrica, **(c)** anti-simétrica e **(d)** transitiva.*

2- *Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \cos x$.*

(1)**a)** *Verifique se f é **(i)** injetiva, **(ii)** sobrejetiva.*

(1)**b)** *Verifique se o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 1\}$ é numerável.*

3- *Considere cada um dos predicados* $\mathrm{SH}(x)$, $\mathrm{IH}(x)$ e $\mathrm{TSP}(x)$ *cuja interpretação é a seguinte:*

- $\mathrm{SH}(x) \equiv$ *"x é um super-herói;*
- $\mathrm{IH}(x) \equiv$ *"x é um infra-herói";*
- $\mathrm{TSP}(x) \equiv$ *"x tem super poderes".*

*Vamos admitir que são conhecidos os seguintes factos: **(i)** Os super-heróis têm super poderes; **(ii)** Existe alguém que não tem super poderes; **(iii)** Só existem super-heróis ou infra-heróis.*

(2)**a)** *Explicite os factos (i), (ii) e (iii) com fórmulas bem formadas da lógica de primeira ordem, utilizando os predicados acima definidos.*

(2)**b)** *Admitido (i), (ii) e (iii) como factos verdadeiros, aplicando o princípio da resolução, demonstre que existe pelo menos um infra-herói.*

4- *Utilize a técnica de demonstração que é pedida em cada uma das seguintes alíneas.*

(1,5)**a)** *Verifique por indução matemática que a igualdade* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{3^{n+1}-1}{2}$ *é válida para qualquer inteiro não negativo n.*

(1,5)**b)** *Sabendo que um saco contém 10 bolas vermelhas e 10 bolas azuis, utilizando o princípio da gaiola dos pombos, indique o número de bolas que devem ser retiradas deste saco para se ter a garantia de que foram selecionadas pelo menos três bolas da mesma cor.*

5- *O departamento de comunicação de uma universidade portuguesa efetuou um estudo junto dos seus alunos sobre o tipo de programas de televisão que preferiam. Dos 100 alunos inquiridos, 55 veem filmes, 45 veem desporto e 50 programas musicais. Por outro lado, 15 alunos veem desporto e programas musicais, 25 veem programas musicais e filmes e 15 veem desporto e filmes. Sabendo que qualquer dos inquiridos tem pelo menos uma preferência, responda às seguintes questões.*

(1,5)**a)** *Quantos alunos afirmaram ver os três tipos de programas, ou seja, quantos afirmaram que preferem simultaneamente os filmes, desporto e programas musicais?*

(1,5)**b)** *Quantos veem apenas programas de desporto? (caso não tenha resolvido a alínea anterior considere que 10 alunos afirmaram gostar simultaneamente dos três tipos de programas).*

6- *Considere a permutação dos objetos do conjunto* $X = \{\alpha, \beta, d, \delta, a, b, \theta, c, \kappa, \lambda\}$ *definida por* $\pi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & d & \delta & a & b & \theta & c & \kappa & \lambda \\ \lambda & c & b & \delta & \beta & \alpha & d & a & \theta & \kappa \end{pmatrix}$.

(1)**a)** *Determine a partição cíclica de* π *e o respectivo tipo.*

(1)**b)** *Determine o sinal de* π.

7- *Considere o conjunto* $\mathcal{M}_{2\times 3}$ *das matrizes com duas linhas e três colunas cujos elementos pertencem ao conjunto* $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

(1)**a)** *Determine a cardinalidade de* $\mathcal{M}_{2\times 3}$.

(1)**b)** *Determine o número de matrizes pertencentes a* $\mathcal{M}_{2\times 3}$ *cujos elementos da primeira linha são todos distintos entre si.*

(2)**8-** *Com recurso à fórmula multinomial, determine o coeficiente de* x^6y^5z *no desenvolvimento de* $\left(2x + xy - z + \frac{1}{xyz}\right)^{10}$.