

Estratégias de Demonstração por Indução

Universidade de Aveiro 2018/2019

<http://moodle.ua.pt>

- 1 Estratégias de demonstração por indução
- 2 Princípio de indução completa
- 3 Referências e bibliografia

Regra de inferência do princípio de indução

O Princípio de indução baseia-se na seguinte regra de inferência:

$$(P(n_0) \wedge (\forall n \geq n_0)(P(n) \Rightarrow P(n+1))) \Rightarrow (\forall n \geq n_0)P(n),$$

onde n é uma variável inteira e

$$(\forall n \geq n_0)(P(n) \Rightarrow P(n+1))$$

denota a conjunção das proposições $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ quando n percorre todos os valores inteiros não inferiores a n_0 .

- Note-se que para cada valor particular de n ,

$$P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

é uma proposição.

Demonstração por indução

Princípio de indução

Para cada inteiro positivo n , seja $P(n)$ uma proposição. Para mostrar que a proposição $P(n)$ é verdadeira para todo o inteiro $n \geq n_0$, basta mostrar que

- a proposição $P(n_0)$ é verdadeira ← **Condição inicial**.
- para cada inteiro $k \geq n_0$, a implicação

$$P(k) \Rightarrow P(k+1)$$

é também verdadeira, ou seja, se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1)$ é também verdadeira.

- $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ constitui o passo de indução.

Exemplo

- Vamos demonstrar que para todo o número natural n ,

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- Condição inicial $P(1) : 1 = \frac{1 \times (1+1)}{2}$.
- Passo de indução

Hipótese de indução ($P(k)$): $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$.

Tese: $P(k+1) : 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \text{ (por H.I.)} \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

Princípio de indução completa

Variante do princípio de indução

Admita-se que a condição inicial $P(n_0)$ é verdadeira e que, para todo $k \geq n_0$, a implicação

$$((\forall n \in [n_0, k]) P(n)) \Rightarrow P(k+1)$$

é verdadeira, onde $[n_0, k] = \{n \in \mathbb{N} : n_0 \leq n \leq k\}$. Então a proposição $P(n)$ é verdadeira para todo o $n \geq n_0$.

Exemplo

Vamos mostrar que se $\alpha_0 = 12, \alpha_1 = 29$ e, para $n \geq 2$, a igualdade

$$\alpha_n = 5\alpha_{n-1} - 6\alpha_{n-2} \quad (1)$$

é verdadeira, então

$$\alpha_n = 5 \times 3^n + 7 \times 2^n, \quad (2)$$

para todo o inteiro $n \geq 0$.

Solução

① Para $n = 0$ e $n = 1$:

$$\alpha_0 = 12 = 5 \times 3^0 + 7 \times 2^0, \quad \alpha_1 = 29 = 5 \times 3^1 + 7 \times 2^1$$

② **hipótese de indução:** $\alpha_n = 5 \times 3^n + 7 \times 2^n$, para todo o inteiro $n \in [0, k], k \geq 1$ inteiro.

③ **tese:** $\alpha_{k+1} = 5 \times 3^{k+1} + 7 \times 2^{k+1}$

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} &= 5\alpha_k - 6\alpha_{k-1} && \text{(por (1))} \\ &= 5(5 \times 3^k + 7 \times 2^k) - 6(5 \times 3^{k-1} + 7 \times 2^{k-1}) && \text{(por (2))} \\ &= 5 \times 3^{k+1} + 7 \times 2^{k+1}. \end{aligned}$$

Referências e bibliografia I



D. M. Cardoso, J. Szymanski e M. Rostami, *Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos*, Escolar Editora, 2008.