Matemática Discreta

Apresentação e Introdução aos Sistemas Matemáticos

Universidade de Aveiro 2015/2016

http://moodle.ua.pt

Programa da disciplina

1. Linguagem Matemática e Lógica Informal
   1.1 Lógica proposicional
   1.2 Conjuntos
   1.3 Relações
   1.4 Lógica de primeira ordem
2. Contextos e Estratégias de Demonstração
   2.1 Estratégias de demonstração da implicação
   2.2 Princípios de indução e de indução completa
   2.3 Princípio da gaiola dos pombos
3. Princípios de Enumeração Combinatória.
   3.1 Princípio da bijeção.
   3.2 Princípios da adição e da multiplicação.
   3.3 Princípio de inclusão-exclusão.
4. Permutações.

Programa da disciplina (cont.)

5. Agrupamentos e Identidades Combinatórias.
   5.1 Arranjos com repetição e arranjos e combinações simples.
   5.2 Combinações e permutações (com e sem repetição).
   5.3 Identidades combinatórias.
6. Recorrência e Funções geradoras.
   6.1 Relações de recorrência.
   6.2 Funções geradoras
7. Introdução aos números combinatórios.
   7.1 Factoriais e número binomiais.
   7.2 Números de Fibonacci e número de ouro.
   7.3 Outros números combinatórios.
8. Elementos de Teoria dos Grafos.
   8.1 Conceitos e Resultados Fundamentais
   8.2 Conexidade, caminhos e árvores.

Bibliografia principal

- *Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos*; D. M. Cardoso, J. Szymanski, M. Rostami; Escolar Editora, 2009.
- *Noções de Lógica Matemática*; D.M. Cardoso, P. Carvalho; Universidade de Aveiro; 2007 (disponível na página da disciplina).

Bibliografia complementar

- *Tópicos de Matemática Discreta*; J.S. Pinto; Universidade de Aveiro; 1999 (disponível na página da disciplina).
- *Discrete Mathematics*; N.L. Biggs; Oxford University Press, 2nd Ed; 2002.
- *Concrete Mathematics*; R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik; Addison-Wesley; 2nd Ed; 2005.
- *A Walk Through Combinatorics - an introduction to enumeration and graph theory*; M. Bóna; World Scientific; 2003.
- *Matemática Discreta: Tópicos de Combinatória*; J. M. S. Simões Pereira; Editora Luz da Vida, 2006.
- *Matemática Discreta: Grafos, Redes e Aplicações*; J. M. S. Simões Pereira; Editora Luz da Vida, 2009.

Avaliação Discreta e Marcação de Faltas

- O modelo de avaliação adotado é o modelo discreto, com exame final como alternativa. A avaliação discreta é constituída por dois testes, a realizar nas seguintes datas:
  1. 26 de Abril de 2019 (sexta-feira);
  2. No dia e hora do exame final.

  Por defeito todos os alunos estão inscritos em avaliação discreta.
- A matéria a abordar no primeiro teste será lecionada até ao dia 19 de abril de 2019 e a abordar no segundo teste será a lecionada depois do 19 de abril.
- Há registo de faltas e os alunos que não sejam estudantes trabalhadores e que faltem injustificadamente a mais de 30% das aulas teórico-práticas reprovam automaticamente à UC, ficando impedidos de se apresentar a qualquer das épocas de exame.

Alfabeto grego

α	A	alfa	ν	N	niu
β	B	beta	ξ	Ξ	xi
γ	Γ	gama	o	O	omicrom
δ	Δ	delta	π	Π	pi
$\epsilon(\varepsilon)$	E	epsilon	$\rho(\varrho)$	P	ró
ζ	Z	zeta	$\sigma(\varsigma)$	Σ	sigma
η	H	eta	τ	T	tau
$\theta(\vartheta)$	Θ	teta	υ	Υ	upsilon
ι	I	iota	$\phi(\varphi)$	Φ	fi
κ	K	kapa	χ	X	chi
λ	Λ	lambda	ψ	Ψ	psi
μ	M	miu	ω	Ω	ómega

Sistemas matemáticos

- **Proposição**: afirmação que ou é verdadeira ou é falsa.
- **Axioma**: proposição evidente ou que, no contexto matemático em que se está a trabalhar, aceitamos como verdadeira.
- **Teorema**: proposição verdadeira que decorre dos axiomas por aplicação de certas regras, designadas por regras de inferência, ou dos desenvolvimentos determinados pela lógica.
- **Lema:** teorema “considerado" mais simples, que usualmente é utilizado para facilitar a demonstração de teoremas mais difíceis.
- **Corolário:** consequência de um ou de outros teoremas.
- **Teoria ou sistema matemático**: conjunto de axiomas, regras de inferência e teoremas (onde se incluem lemas e corolários).

Exemplo de sistema matemático

As proposições deste sistema matemático são palavras do alfabeto $\{x, y, z\}$

- **Axioma**: xyz.
- **Regras de inferência**:
  1. Proposições obtidas a partir de uma proposição verdadeira, substituindo x por xyz, são proposições verdadeiras.
  2. Proposições obtidas a partir de uma proposição verdadeira, substituindo xyz por yxz são proposições verdadeiras.

Exercício

Mostrar que $yyxzz$ é um teorema do sistema matemático considerado no exemplo anterior.

Propriedades dos sistemas de axiomas

Um sistema de axiomas deve ser consistente e independente:

Consistente: i.e. não permite a dedução de um teorema e a sua negação.
Independente: não inclui axiomas que são consequência de outros axiomas.
Saturado: a adição de um qualquer axioma que não é consequência dos axiomas do sistema, torna o sistema não consistente.
Completo: se para toda a proposição p, correctamente formulada no contexto desta teoria, “p" ou “não p" é um teorema. A teoria diz-se incompleta no caso contrário.

Exemplo de sistema saturado

Axiomas da geometria euclidiana:

1. Dados dois pontos existe uma recta que os contém.
2. Todo o segmento de recta está contido numa recta.
3. Dado um ponto C e um real $r > 0$, existe uma única circunferência de centro C e raio r.
4. Todos os ângulos rectos são iguais.
5. *Axioma das paralelas*: dada uma recta e um ponto não pertencente a essa recta, existe uma única recta que contém o ponto e é paralela à recta dada.

Exemplo de sistema saturado (cont.)

Axiomas da geometria euclidiana:

6. Duas quantidades iguais a uma terceira são iguais.
7. Se a quantidades iguais adicionarmos a mesma quantidade, as somas obtidas são iguais.
8. Se a quantidades iguais subtrairmos a mesma quantidade, as diferenças obtidas são iguais.
9. Objectos coincidentes são iguais.
10. O todo é maior do que a parte.

Exemplo de uma conjectura

Trata-se de uma afirmação não provada, para a qual existe a expectativa de se vir a encontrar uma prova.

Conjectura de Goldbach

Todo o inteiro par superior a 2 é a soma de dois primos

Por exemplo, $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $10 = 3 + 7$, ...

Referências bibliográficas

- Referência bibliográfica principal:
  D. M. Cardoso, J. Szymanski e M. Rostami, *Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos*, Escolar Editora, 2009.