Mecânica e Campo Electromagnético 2015/2016

- Equações Fundamentais da Electrostática.
- Limitações da lei de *Coulomb*.
- Divergência. Teorema da divergência. Rotacional.
- Lei de *Stokes*.
- Equação de *Poisson*. Equação de *Laplace*.

Maria Rute André

rferreira@ua.pt

Equações fundamentais da electrostática

Limitações da lei de *Coulomb*

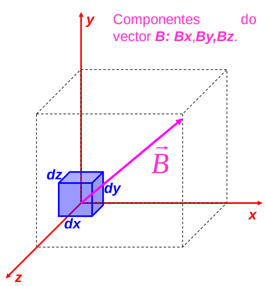
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

Se ***Q*** não for estacionária, a lei de ***Coulomb*** deixa de ser estritamente válida.

A lei de Gauss é mais geral e pode ser aplicada a cargas em movimento, qualquer que seja a sua velocidade ou aceleração.

Divergência: $\nabla.B = div\vec{B}$

O fluxo para o exterior de um vector, através de uma superfície fechada pode, também, ser calculado por:



$$\Phi = \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}\right)$$

Fluxo total que atravessa o elemento de volume *dV*

Representa o fluxo por unidade de volume e constitui uma invariante: chama-se divergência de B no ponto.

Divergência: $\nabla.B = div\vec{B}$

$$\nabla B = div.B = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

A divergência de B é um invariante, pois *div* e o produto escalar, também, o são.

Nota: grandezas invariantes são aquelas independentes do sistema de coordenadas.

Teorema da Divergência:

o fluxo total de um vector *B* para o exterior é igual ao integral de superfície da componente normal (apontando para o exterior do vector B).

$$\Phi = \int_A BdA =$$

$$= \int_v \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}\right)dv = \int_v \nabla B dv$$

ou seja

$$\int_A BdA = \int_v \nabla B dv$$

Envolve o valor do vector *B* sobre a superfície de área *A*.

Envolve o valor do vector *B* ao longo de todo o volume *v*

Rotacional: $\nabla \times B = rot\vec{B}$

Para qualquer vector B e para um percurso fechado situado no plano *xy*

$$Bdl = B_x d_x + B_y d_y$$

$$\oint Bdl = \oint B_x d_x + \oint B_y d_y$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

Rotacional: $\nabla \times B = rot\vec{B}$

$$\oint Bdl = \left(\nabla \times \vec{B}\right) dA$$

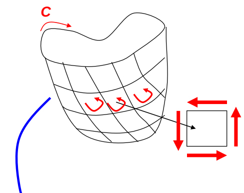
O integral de linha, o integral de percurso de *Bdl* ao longo da fronteira do elemento de superfície *dA*
é igual
ao produto escalar do rotacional do vector B por esse elemento de superfície.

Isto só é válido para um percurso tão pequeno que o rotacional do vector *B* possa ser considerado constante ao longo da superfície *dA* cercada por um percurso.

PARA PERCURSOS MAIORES HÁ QUE CONSIDERAR A LEI DE STOKES

Lei de *Stokes*:

$$\oint_C Bdl = \int_A \left(\nabla \times \vec{B}\right) dA$$



Uma superfície arbitrária de área ***A*** limitada por uma curva ***C***

A é qualquer superfície aberta rodeada por uma curva ***C***

A soma dos integrais de percurso ao longo dos quadrados curvilíneos é igual ao integral de percurso ao longo de ***C***

Equação de *Poisson* para o potencial *V* e para o campo eléctrico *E*

Já sabemos que, a lei de *Gauss* é dada por $\nabla E = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

Substituindo ***E*** por **- ∇*V***

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Equação de *Poisson*

Relaciona a densidade espacial de carga ρ num dado ponto com as segundas derivadas espaciais de *V* nesse ponto.

Numa região em que a densidade espacial de carga ρ seja nula, esta equação reduz-se a $\nabla^2 V = 0$

Equação de *Poisson* para o potencial *V* e para o campo eléctrico *E*

Para além da equação de *Poisson* para o potencial eléctrico ***V***, existe, também, a equação de *Poisson* para o campo eléctrico ***E***:

$$\nabla^2 E = -\frac{\nabla \rho}{\varepsilon_0}$$

Equação de *Poisson*

Solução da equação de *Poisson* para o campo eléctrico
(NÃO VAMOS DEMOSTRAR)

$$E = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\nabla' \rho}{r} dv'$$

Resumo sobre operadores diferenciais

Gradiente de um campo escalar é um campo vectorial

$$\vec{E} = -gradV$$

$$gradU = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{z}$$

Divergência de um vector *F* no ponto *P*, *divF* é um escalar

$$div\vec{F} = \frac{d\Phi}{dV}$$

$$d\Phi = \textit{fluxo através de } dS$$

Divergência de um vector *F* no ponto *P*, *divF* é um escalar

- tal significa que a divergência de um vector ***F*** representa o fluxo por unidade de volume.
- A divergência de um vector ***F*** em cada ponto não depende da forma de ***dS.***
- *Se a **divergência do vector F > 0**, então o fluxo que sai de um elemento de volume em torno do ponto **P** é **>** do que o fluxo que entra.* ***Diz-se que há fontes na vizinhança de P.***
- *Se a **divergência do vector F < 0**, então o fluxo que sai de um elemento de volume em torno do ponto **P** é **<** do que o fluxo que entra.* ***Diz-se que há sumidouros na vizinhança de P.***
- *Se a **divergência do vector F = 0**, então o fluxo que sai de um elemento de volume em torno do ponto **P** é **igual ao** fluxo que entra.* ***O campo diz-se solenoidal:***
  - ***não há cargas***
  - ***por cada linha de campo que entra num dV centrado em P há uma linha de campo que sai (ex. linhas de campo fechadas).***

EXEMPLOS

1. Rotacional do vector *F* é igual ao vector nulo. Neste caso, existe um campo escalar ***U***, tal que

$$rot\vec{F}=\vec{0}\Rightarrow\vec{F}=gradU$$

O campo diz-se irrotacional ou conservativo

2. Divergência vector *F* é igual a zero. As linhas do vector F são fechadas, ou seja, não há fontes nem sumidouros. O campo diz-se solenoidal.

$$div\vec{F}=0$$

Vamos considerar em simultâneo o rotacional e a divergência.

Existem 4 hipóteses:

1. $rot\vec{F}=\vec{0}\ \wedge\ div\vec{F}=0$

Como o campo é irrotacional, há um potencia U que, em virtude da divergência ser nula, satisfaz a equação:

$$div\ gradU=\nabla^2U=0$$

Equação de *Laplace*

Exemplo: campo eléctrico no vácuo (muito longe das cargas estacionárias), devido a cargas estacionárias.

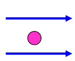
2. $rot\vec{F}=\vec{0}\ \wedge\ div\vec{F}\neq 0$

$$\nabla^2F\neq 0$$

Equação de *Poisson*

Há pontos no domínio onde a divergência não é nula

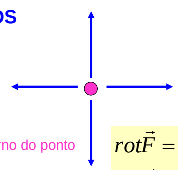
EXEMPLOS



$rot\vec{F}=\vec{0}$

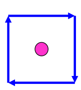
$div\vec{F}=0$

O campo é constante em torno do ponto



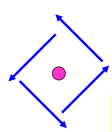
$rot\vec{F}=\vec{0}$

$div\vec{F}\neq 0$



$rot\vec{F}\neq\vec{0}$

$div\vec{F}=0$



$rot\vec{F}\neq\vec{0}$

$div\vec{F}\neq 0$