1. Matrizes e Sistemas de Equações Lineares

UA, 18/9/2018

ALGA – Agrup. IV 18/19

Resumo dos Conteúdos

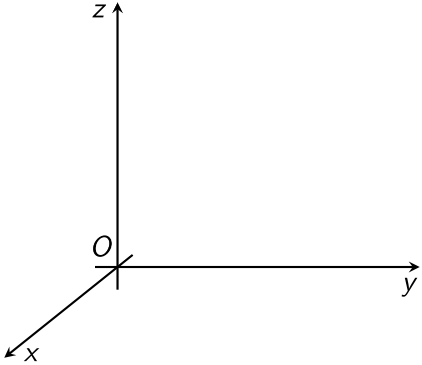
Referenciais em $\mathbb{R}^3$

Fixamos um sistema de coordenadas:

$$O \quad \rightarrow \quad \text{origem}$$

$$\left.\begin{array}{l} Ox \\ Oy \\ Oz \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \text{eixos coordenados}$$

$$\left.\begin{array}{l} xOy \\ xOz \\ yOz \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \text{planos coordenados}$$

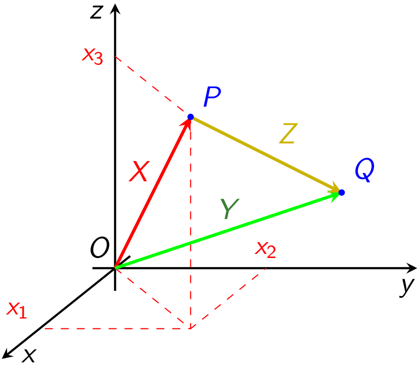


Pontos e vetores $\mathbb{R}^3$

$x_1, x_2, x_3 \rightarrow$ coordenadas do ponto P

Associamos ao segmento de reta orientado $[O, P]$ o vetor

$$\overrightarrow{OP} = X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$



$y_1, y_2, y_3 \rightarrow$ coordenadas do ponto Q e seja Y o vetor associado a $\overrightarrow{OQ}$.

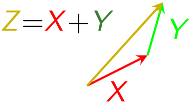
A $[P, Q]$ fica associado o vetor $\overrightarrow{PQ} = Z = \begin{bmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ y_3 - x_3 \end{bmatrix}$

Adição, multiplicação por escalar e combinação linear

Sejam X e Y vetores em $\mathbb{R}^3$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ escalares

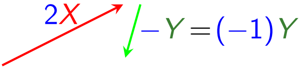
Adição:

$$Z = X + Y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix}$$



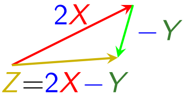
Multiplicação por escalar:

$$\alpha X = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{bmatrix}$$



Combinação linear (de dois vetores):

$$Z = \alpha X + \beta Y = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \alpha x_3 + \beta y_3 \end{bmatrix}$$



Os vetores em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ generalizam-se a vetores em $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Chamam-se componentes do vetor X aos números reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Notação alternativa: $X = (x_1, \ldots, x_n)$.

Observações:

- Identificaremos um vetor de $\mathbb{R}^n$ quer como uma coluna de n números reais quer como um $n - uplo$, de acordo com a conveniência da escrita e do contexto.
- Também é frequente denotar vetores por letras minúsculas do nosso alfabeto, como por exemplo, x, v, w, etc. Aqui, devido à representação (matricial) em coluna, optamos pelas maíusculas.

Operações (usuais) em $\mathbb{R}^n$

1. Adição de vetores:
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

2. Multiplicação de um vetor por um escalar:
$$\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$$

Combinação linear de vetores :

$$\alpha X + \beta Y, \text{ com } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ e } X, Y \in \mathbb{R}^n.$$

(Tomando dois, para um número superior de vetores é análogo.)

Matriz $m \times n$

Os vetores em $\mathbb{R}^n$ generalizam-se a vetores em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ a que chamamos matrizes.

Definição:

Uma matriz real com m linhas e n colunas é um quadro de dupla entrada do tipo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

onde a_{ij} é um número real. Diz-se, também, que A é uma matriz $m \times n$, de ordem $m \times n$, de dimensão $m \times n$.

Linhas, colunas, elementos, notação

linha/coluna:

$$A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} & \leftarrow \text{linha } i \\ \qquad\qquad\quad \uparrow \\ \qquad\qquad\quad \text{coluna } j & \end{array}$$

elemento (ou entrada):

a_{ij} é o elemento (ou entrada) (i, j) da matriz A.

Notações abreviadas:

$A = A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij}]$, com $i = 1, 2 \dots, m$, $j = 1, 2, \dots n$.

Igualdade de matrizes

Duas matrizes são iguais se tiverem a mesma ordem e se entrada a entrada forem iguais. Isto é, sejam $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ matrizes $m \times n$, as matrizes A e B são iguais, se

$$a_{ij} = b_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.$$

Notação: $A = B$

Matriz nula, matriz linha e matriz coluna

Matiz nula $(m \times n)$:

Matriz cujas entradas são todas iguais a 0, denota-se por O (ou $O_{m\times n}$) ou, ainda, simplesmente, por 0 (ou $0_{m\times n}$).

Matriz linha $(1 \times n)$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

Matriz coluna $(m \times 1)$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

Matriz quadrada

Uma matriz A diz-se quadrada de ordem n se tiver n linhas e n colunas. Os elementos a_{ii} constituem a chamada diagonal principal, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$\nwarrow$

diagonal principal

Matriz diagonal e matriz identidade

Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ diz-se diagonal se $a_{ij} = 0$, $i \neq j$, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ii} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Chama-se a matriz identidade de ordem n e denota-se por I (ou I_n) à matriz diagonal $n \times n$ com

$$a_{11} = \cdots = a_{nn} = 1$$

Matrizes Triangulares

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada.

- A é triangular superior se $a_{ij} = 0$, para $i > j$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

- A é triangular inferior se $a_{ij} = 0$, para $i < j$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Transposta de uma matriz e matriz simétrica

A transposta da matriz $m \times n$ $A = [a_{ij}]$ é a matriz $n \times m$

$$A^T = [a_{ji}]$$

obtida por troca da posição relativa das linhas pelas colunas da matriz A, por exemplo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Uma matriz A diz-se simétrica se $A = A^T$ (assim, toda a matriz simétrica é quadrada).

Propriedade: $(A^T)^T = A$.

Adição de matrizes

Definição:

Sejam $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ matrizes $m \times n$. A soma de A e B é a matriz $m \times n$ $A + B = C = [c_{ij}]$ tal que

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.$$

Propriedades:

- comutativa: $A + B = B + A$,
- associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$,
- admite elemento neutro: $A + O = O + A = A$,
- A possui simétrico aditivo: $A + (-A) = (-A) + A = O$,
- $(A + B)^T = A^T + B^T$,

para quaisquer matrizes $m \times n$ A, B, C.

Multiplicação de uma matriz por um escalar

Sejam $A = [a_{ij}]$ matriz $m \times n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

O produto de A pelo escalar α é a matriz $m \times n$ $\alpha A = D = [d_{ij}]$ tal que

$$d_{ij} = \alpha\, a_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

Propriedades:

- associativa: $\alpha\,(\beta\, A) \;=\; (\alpha\, \beta)\, A$,
- distributiva: $(\alpha + \beta)\, A \;=\; \alpha\, A + \beta\, A$,
- distributiva: $\alpha(A + B) \;=\; \alpha\, A + \alpha\, B$,
- $(\alpha A)^T \;=\; \alpha\, A^T$,

para quaisquer matrizes $m \times n$ A, B, e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

A matriz $m \times n$ A é uma combinação linear das matrizes $A_1, \ldots, A_k$ $m \times n$ se

$$A \;=\; \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_k A_k, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$$

Multiplicação de uma matriz linha por uma matriz coluna

Dadas $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

o produto da matriz linha A pela matriz coluna B é

$$A\,B \;=\; a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Operação bem definida só se A e B possuem igual número de elementos!

Multiplicação de matrizes – Caso Geral

Multiplicação de A matriz $m \times n$ e B matriz $n \times p$ sendo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{np} \end{bmatrix};$$

O produto de A por B é a matriz $m \times p$ $AB = [c_{ij}]$ cuja entrada (i, j) resulta da multiplicação da linha i de A pela coluna j de B, *i.e.*,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj}, \qquad i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, p.$$

Propriedades da multiplicação de matrizes

- associativa: $(AB)C = A(BC)$,
- distributiva à esquerda e à direita, em relação à adição:

$$(A+\widetilde{A})B = AB + \widetilde{A}B \quad \text{e} \quad A(B+\widetilde{B}) = AB + A\widetilde{B},$$

- admite elemento neutro à esquerda e à direita: $I_m A = A = A I_n$,
- $(\alpha A)B = \alpha\,(AB) = A(\alpha B)$,
- $(AB)^T = B^T A^T$,

para quaisquer matrizes $A, \widetilde{A}$ $m \times n$, $B, \widetilde{B}$ $n \times p$, C $p \times q$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Nota importante:

A multiplicação de matrizes não é comutativa!

Potência de uma matriz quadrada

Sejam A uma matriz $n \times n$ e $p \in \mathbb{N}$.
A potência p de A é a matriz $n \times n$ dada por

$$A^p = A\,A^{p-1},$$

em que $A^0 = I_n$, por convenção.

Propriedades da potência de matrizes

- $(A^p)^q = A^{pq}$
- $A^p A^q = A^{p+q}$

Nota:

Em geral $(AB)^p \neq A^p B^p$.

Sistema de m equações lineares com n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + \cdots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}\,x_1 + \cdots + a_{mn}\,x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

matriz dos coeficientes

coluna das incógnitas

coluna dos termos independentes

Forma matricial de um sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}\,x_1 + \cdots + a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \\ a_{m1}\,x_1 + \cdots + a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad AX = B,$$

em que A é a matriz $(m \times n)$ dos coeficientes do sistema,
X é a coluna $(n \times 1)$ das incógnitas,
B é a coluna $(m \times 1)$ dos termos independentes

$$M = [\,A \,|\, B\,] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right], \quad m \times (n+1),$$

é dita a matriz ampliada, aumentada ou completa do sistema.

Matriz escalonada por linhas

A primeira entrada não nula de cada linha é designada por pivot.

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & a_1 & * & \dots & * & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_2 & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_3 & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad a_1, a_2, a_3, \dots \neq 0$$

1. Abaixo de cada pivot só ocorrem zeros,
2. Dadas duas linhas não nulas consecutivas, o pivot da linha $i+1$ está numa coluna à direita da coluna que contém o pivot da linha i,
3. As linhas nulas, caso existam, ocorrem só na parte inferior da matriz.

Matriz escalonada por linhas reduzida

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & * & \dots & 0 & * & 0 & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & * & 0 & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

1. A matriz está na forma escalonada por linhas,
2. Os pivots são todos iguais a 1,
3. Acima de cada pivot só ocorrem zeros.

Operações elementares nas linhas de uma matriz:

1. Troca da posição relativa de duas linhas, L_i e L_j:
$$L_i \leftrightarrow L_j$$
2. Multiplicação de uma linha, L_i, por um escalar $\alpha \neq 0$:
$$L_i := \alpha\, L_i$$
3. Substituição de uma linha, L_i, pela que dela se obtém adicionando-lhe outra linha, L_j, multiplicada por um escalar $\beta \in \mathbb{R}$:
$$L_i := L_i + \beta\, L_j$$

Matrizes equivalentes por linhas:

Duas matrizes A e C são equivalentes por linhas se C resulta de A por aplicação de uma sequência finita de operações elementares nas linhas de A.

Notação: $A \sim C$

Obtenção de uma matriz escalonada por linhas (reduzida)

Teorema

Toda a matriz $m \times n$ é equivalente por linhas a uma matriz escalonada por linhas (reduzida).

Exemplo ilustrativo do teorema anterior

Passo 1: Encontrar, na 1.ª coluna não nula, o 1.º elemento não nulo, pivot.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

Obtenção de uma matriz escalonada por linhas (reduzida)

Passo 2: Trocar linhas para colocar o pivot como 1.º elemento da coluna.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

Passo 3: Operar com as linhas para obter zeros abaixo do pivot.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix} \underset{L_4 := L_4 - L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Obtenção de uma matriz escalonada por linhas (reduzida)

Passo 4: Considerar a submatriz que se obtém eliminando a 1.ª linha e aplicar os passos 1 a 4 até esgotar as linhas.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

Fim Passo 4: Obtém-se uma matriz escalonada por linhas equivalente a A.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtenção de uma matriz escalonada por linhas (reduzida)

Passo 5: Multiplicar as linhas não nulas pelos inversos dos pivots de modo a obter pivots iguais a 1.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1 := \frac{1}{2} L_1 \\ L_2 := \frac{1}{2} L_2 \\ L_3 := \frac{1}{2} L_3}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtenção de uma matriz escalonada por linhas (reduzida)

Passo 6: Operar com as linhas de modo a obter zeros acima dos pivots.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 := L_2 - \frac{3}{2}L_3 \\ L_1 := L_1 + \frac{5}{2}L_3}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{19}{4} & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_1 := L_1 - L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 & \frac{19}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtém-se uma matriz escalonada por linhas <u>reduzida</u> equivalente a A.

Aplicação à resolução de sistemas

Teorema

Se as matrizes ampliadas de dois sistemas lineares são $[\,A\,|\,B\,]$ e $[\,C\,|\,D\,]$, tais que

$$[\,A\,|\,B\,] \sim [\,C\,|\,D\,],$$

então os dois sistemas têm o mesmo conjunto de soluções.

Observação:

Se $B = D = 0$, basta que $A \sim C$ para que os sistemas possuam o mesmo conjunto de soluções.

Métodos de eliminação

Método de eliminação de Gauss

1. Dado o sistema $AX = B$, formar a sua matriz ampliada $[\,A\,|\,B\,]$.
2. Transformar $[\,A\,|\,B\,]$ numa forma escalonada por linhas $[\,C\,|\,D\,]$.
3. Escrever o sistema $CX = D$, ignorando as linhas nulas, e resolver por substituição ascendente.

Método de eliminação de Gauss-Jordan

1. Dado o sistema $AX = B$, formar a sua matriz ampliada $[\,A\,|\,B\,]$.
2. Transformar $[\,A\,|\,B\,]$ numa forma escalonada por linhas reduzida $[\,E\,|\,F\,]$.
3. Escrever o sistema $EX = F$, ignorando as linhas nulas, e resolver.

Classificação de sistemas

Um sistema linear representado matricialmente por $AX = B$, tal que

$$[\,A\,|\,B\,] \sim [\,C\,|\,D\,],$$

com a matriz $[\,C\,|\,D\,]$ escalonada por linhas, classifica-se em

- impossível se não possui solução;
  (há um pivot na coluna D)
- possível e determinado se possui uma única solução;
  (todas as colunas de C têm pivot e não há pivot na coluna D);
- possível e indeterminado se possui uma infinidade de soluções;
  (grau de indeterminação do sistema = n.º de incógnitas livres = n.º de colunas de C sem pivot).

Caraterística e classificação de sistemas

A caraterística da matriz A, $\text{car}\,(A)$, é o número de pivots de uma matriz C escalonada por linhas equivalente, por linhas, a A.

Classificação de sistemas (usando características):

O sistema linear $AX = B$ com A $m \times n$ e B $m \times 1$ é

1. impossível $\Leftrightarrow$ $\text{car}\,(A) < \text{car}\,([A|B])$;
2. possível e determinado $\Leftrightarrow$ $\text{car}\,(A) = \text{car}\,([A|B]) = n$;
3. possível e indeterminado de grau $n - \text{car}\,(A)$ $\Leftrightarrow$ $\text{car}\,(A) = \text{car}\,([A|B]) < n$.

Espaço das colunas de uma matriz

O espaço das colunas de uma matriz A $m \times n$, $\mathcal{C}(A)$, é o conjunto de todas as combinações lineares das colunas $C_1, \dots, C_n$ de A,

$$\mathcal{C}(A) = \{\alpha_1 C_1 + \cdots + \alpha_n C_n : \ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}.$$

Notar que, se $X = [\alpha_1 \cdots \alpha_n]^T$, então $AX = \alpha_1 C_1 + \cdots + \alpha_n C_n$, logo

$$\mathcal{C}(A) = \{AX \in \mathbb{R}^m : \ X \in \mathbb{R}^n\}.$$

Teorema

Dadas A $m \times n$ e B $m \times 1$,

$$B \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow AX = B \text{ é um sistema possível.}$$

Espaço das linhas de uma matriz

O espaço das linhas de uma matriz A $m \times n$, $\mathcal{L}(A)$, é o conjunto de todas as combinações lineares das colunas $L_1^T, \ldots, L_m^T$ que resultam da transposta das linhas $L_1, \ldots, L_m$ de A,

$$\mathcal{L}(A) = \{ \alpha_1 L_1^T + \cdots + \alpha_m L_m^T,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}\}.$$

Proposição

Se $A \sim C$, então $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(C)$.

Como $\mathcal{L}(A) = \mathcal{C}(A^T)$, temos

$$B \in \mathcal{L}(A) \Leftrightarrow A^T X = B \text{ é um sistema possível.}$$

Sistema homogéneo e nulidade

Um sistema diz-se homogéneo se os termos independentes são todos nulos:

$$AX = 0.$$

Todo o sistema homogéneo é possível pois possui pelo menos a solução nula, dita solução trivial, mas pode ter outras soluções, ditas não triviais, se o sistema for indeterminado.

Teorema

Seja A uma matriz $m \times n$.

$$\text{car}(A) < n \text{ se e só se } AX = 0 \text{ admite uma solução não trivial}$$
$$\text{se e só se } AX = 0 \text{ é indeterminado.}$$

A nulidade de A, $\text{nul}(A)$, é o número de incógnitas livres do sistema $AX = 0$, ou seja, o grau de indeterminação do sistema, isto é,

$$\text{nul}(A) = n - \text{car}(A),$$

onde n é o número de colunas de A.

Espaço nulo de uma matriz

O espaço nulo de A, $\mathcal{N}(A)$, é o conjunto de todas as soluções do sistema homogéneo associado a A $m \times n$,

$$\mathcal{N}(A) = \{X \in \mathbb{R}^n : \ AX = 0\}.$$

Observação: O espaço nulo de A, $\mathcal{N}(A)$, caso não se reduza ao vetor nulo, pode escrever-se como o conjunto de todas as combinações lineares de $n - car(A)$ vetores de $\mathbb{R}^n$. Vetores (colunas) que podem ser obtidos facilmente a partir de certas colunas da forma escalonada reduzida de A.

Teorema

Dadas A $m \times n$ e B $m \times 1$, se o sistema $AX = B$ é possível e se $\overline{X}$ é uma sua solução, então o conjunto de soluções do sistema é

$$\{\overline{X} + Y : \ Y \in \mathcal{N}(A)\}.$$

Inversa de uma matriz quadrada

Uma matriz A $n \times n$ diz-se invertível se existe B $n \times n$ tal que

$$AB = BA = I_n$$

Teorema

Se A $n \times n$ é invertível, então a inversa de A é única.

À única matriz B satisfazendo a $AB = BA = I_n$ chama-se inversa de A e denota-se por A^{-1}.
Caso contrário (não existe B), A diz-se singular ou não invertível.

Teorema

Se A, B $n \times n$ e $BA = I_n$, então $AB = I_n$.

Propriedades da inversa e algoritmo de cálculo

Propriedades:

Para quaisquer A, B $n \times n$ invertíveis:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$;

Método prático para determinar a inversa

$$[A \mid I_n] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{método de eliminação de Gauss-Jordan}}}{\sim} [I_n \mid A^{-1}]$$

Critérios de invertibilidade de uma matriz

Teorema

Dada A $n \times n$, são equivalentes as afirmações

1. A é invertível
2. A é equivalente por linhas a I_n, *i.e.*, $A \sim I_n$
3. $\operatorname{car}(A) = n$
4. $\operatorname{nul}(A) = 0$
5. $AX = 0$ possui apenas a solução trivial
6. $\mathcal{N}(A) = \{0\}$
7. $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^n$
8. $\mathcal{L}(A) = \mathbb{R}^n$
9. $AX = B$ tem uma única solução, para cada B $n \times 1$.
   Caso A seja invertível, a solução de $AX = B$ é $X = A^{-1}B$.