

Campo Electromagnético 2015/2016

Aula 7

- Resolução de exercícios.
- Força nos condutores. Densidade de energia do campo eléctrico.
- Dieléctricos. Campo no interior de um dieléctrico. Lei de Gauss para dieléctricos.
- Vector polarização e deslocamento eléctrico. Susceptibilidade eléctrica.
- Resolução de exercícios.

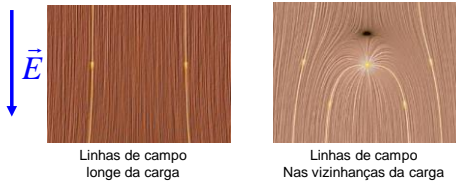
Maria Rute André

rferreira@ua.pt

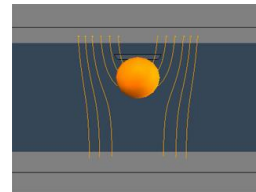
Carga positiva sob a acção de um campo eléctrico



Carga positiva sob a acção de um campo eléctrico



Carga entre a s placas de um condensador



This applet is a simulation of an experiment in which an aluminum sphere sitting on the bottom plate of a capacitor is lifted to the top plate by the electrostatic attraction generated as the capacitor is charged. While the sphere is in contact with the lower plate, their surface charge densities are approximately equal. Thus, as the capacitor is charged, the charge density on the sphere increases proportional to the potential difference between the plates. In addition, energy flows into the region between the plates as the electric field builds up. This can be seen in the motion of the electric field lines as they move from the edge to the center of the capacitor.

As the potential difference between the plates increases, the sphere feels an increasing attraction towards the top plate, indicated by the increasing tension in the field as more field lines "attach" to it. Eventually this tension is enough to overcome the downward force of gravity, and the sphere is "levitated". Once separated from the lower plate, the sphere's charge density no longer increases, and it feels both an attractive force towards the upper plate and a repulsive force from the lower one. The result is a net force upwards.

In this simulation we have placed a non-conducting barrier just below the upper plate to prevent the sphere from touching it and discharging.

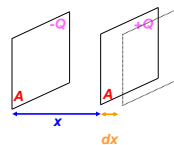
Propriedades fundamentais dos condutores

- O campo eléctrico no interior é nulo
- A carga está distribuída na superfície
- A superfície é equipotencial
- A componente tangencial do campo eléctrico na superfície é nula
- Fora do condutor o campo eléctrico é normal à superfície

Forças nos condutores

Consideremos um condensador de placas paralelas de área A , com densidade superficial σ , separadas de x e carregadas com carga $+Q$ e $-Q$, distribuída uniformemente.

Para deslocarmos uma das placas de uma distância dx , usando uma força F , realizamos um trabalho dW , tal que $dW = Fdx$.



A energia do condensador vai variar

$$W = \frac{Q^2}{2C} \quad \wedge \quad C = \epsilon_0 \frac{A}{x} \Rightarrow W = \frac{Q^2 x}{2\epsilon_0 A}$$

Para uma variação da distância de dx :

$$dW = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} dx \quad \wedge \quad dW = Fdx \Rightarrow F = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A}$$

Força no condutor

Densidade de energia do campo eléctrico

Como sabemos, o trabalho necessário para trazer duas cargas pontuais do infinito até uma distância finita entre elas é armazenada na forma de energia potencial.

Como as cargas não se alteram, vamos analisar, onde é armazenada a energia potencial.

1. Consideremos a energia armazenada num condensador: $U = 1/2 CV^2$.
2. Consideremos a capacidade de um condensador de placas paralelas $\epsilon_0 A/d$ e onde $V = Ed$.

$$U = \frac{CV^2}{2} = \frac{\epsilon_0 A E^2 d^2}{2d} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 (Ad) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow U = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \times (\text{volume})$$

Definindo $\mu = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \text{ (Jm}^{-3}\text{)}$

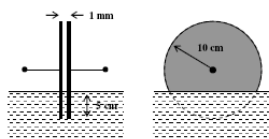
Densidade de energia do vector campo eléctrico

Conclusão: a energia é armazenada no campo eléctrico.

Estas equações são gerais, apesar de termos usado caso particular de um condensador de placas paralelas.

Resolução de exercícios (2ª série)

7. Um condensador é constituído por duas placas circulares 10 cm de raio e com uma separação de 1,0 mm entre si.



Calcule a capacidade deste condensador quando:

- a) Entre as placas existe apenas ar.
- b) O espaço entre as placas é preenchido por água, cuja permissividade relativa vale 81.
- c) As placas são mergulhadas verticalmente em 5 cm de água.

Solução: a) $C = 10 \pi \epsilon_0 \approx 278 \text{ pF}$ b) $C = 810 \pi \epsilon_0 = 22,5 \text{ nF}$ c) $C \approx 4,63 \text{ nF}$

Resolução de exercícios (2ª série)

1. Considere um condensador cilíndrico de comprimento supostamente infinito, com raio interno r_1 e externo r_2 .

- a) Determine a capacidade deste condensador, por unidade de comprimento.
- b) Mostre que se $r_1 \approx r_2$, ou seja $(r_2 - r_1) \ll r_1$, a expressão se pode aproximar à de um condensador plano de comprimento supostamente infinito, com largura $2\pi r_1$ e distância entre placas $(r_2 - r_1)$.

Solução: a) $C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$ b) $C \approx \frac{2\pi r_1 \epsilon_0}{r_2 - r_1}$

Dielétricos

- Ao aplicarmos campo eléctrico a um material, os seus electrões podem ou não liberta-se e, consequentemente, produzir ou não corrente eléctrica;
- Se o material apresenta cargas livres haverá corrente,

caso contrário

- o material diz-se dieléctrico ou isolante.

Consideremos um condensador de placas paralelas

$$C_0 = \frac{Q}{V_0} \text{ (F)} \rightarrow \text{Se existir ar ou vácuo entre elas}$$

Se introduzirmos entre as placas um dieléctrico, mantendo a carga constante, vemos que a ddp aos terminais é:

$$V_d < V_0 \rightarrow \text{A capacidade aumenta na presença do dieléctrico}$$

com dieléctrico \rightarrow ar ou vácuo

Dielétricos

A capacidade aumenta de um factor k_e

$$V_0 = k_e V_d \Rightarrow C_d = k C_0$$

A equação para a capacidade de um condensador é

$$C = k_e \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

constante dieléctrica=permissividade relativa (ϵ_r)

A permissividade de um material é, então

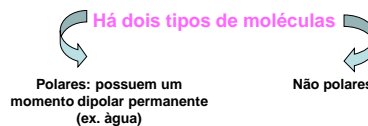
$$k_e \epsilon_0 = \epsilon_r \epsilon_0$$

Campo no interior de um dieléctrico

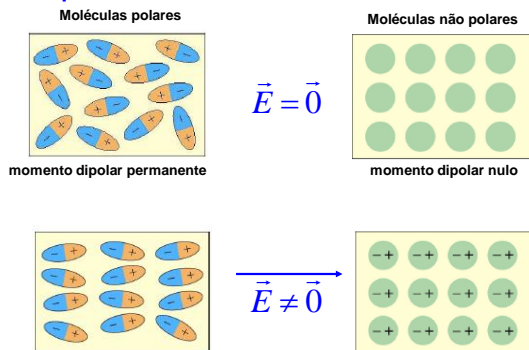
Um dieléctrico difere de um condutor, pois não possui cargas livres, capazes de se deslocarem sob a ação de um campo eléctrico aplicado externamente.

Um dieléctrico difere de um condutor, pois não possui cargas livres, capazes de se deslocarem sob a ação de um campo eléctrico aplicado externamente. Num verdadeiro dieléctrico, todas as cargas estão ligadas aos seus átomos, podendo ser forçadas a deslocarem de uma distância diminuta.

Quando ocorre esse deslocamento, o dieléctrico diz-se polarizado.



Campo eléctrico no interior de um dieléctrico



Campo eléctrico no interior de um dieléctrico

O que acontece às cargas de um dieléctrico (+Q, -Q) dentro de um condensador?



+Q: + próximas da placa -q
-Q: + próximas da placa +q

O campo eléctrico no interior do dieléctrico será

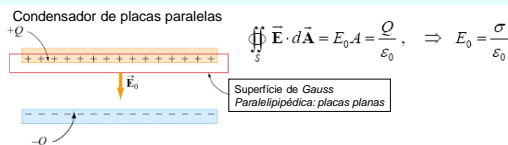
$$\vec{E}_d = \vec{E}_{ext} - \vec{E}_i$$

↓ Campo induzido pelas cargas do dieléctrico

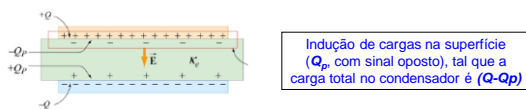
Conclusão: se um dieléctrico é colocado num campo eléctrico, aparecerão cargas induzidas superficialmente que tendem a enfraquecer o campo eléctrico aplicado ao dieléctrico

Qual o valor das cargas induzidas?

Na ausência de dieléctrico

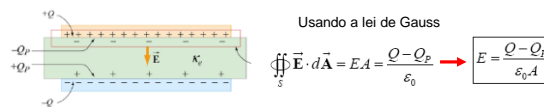


Com dieléctrico



Qual o valor das cargas induzidas?

Com dieléctrico



Sabemos que o campo eléctrico E_0 diminui de um factor K_e

$$E = \frac{E_0}{K_e} = \frac{Q}{K_e \epsilon_0 A} = \frac{Q - Q_p}{\epsilon_0 A}$$

O valor da carga eléctrica induzida é

$$Q_p = Q \left(1 - \frac{1}{K_e} \right)$$

↓ permitividade relativa (ϵ_r)

Qual o valor das cargas induzidas?

Lei de Gauss para dieléctricos

$$\int \vec{E}_d \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_r \epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon}$$

Lei de Gauss para dieléctricos

Vector polarização e deslocamento eléctrico

O campo eléctrico no interior de um dieléctrico é

$$E_d = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r S}$$

Usando a lei de Gauss, sabemos que

$$E_d = \frac{Q}{\epsilon_0 S} - \frac{q_i}{\epsilon_r S}$$

então

$$\frac{Q}{S} = \epsilon_0 \left(\frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r S} \right) + \frac{q_i}{S} \wedge E_d = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r S}$$

Vamos definir

$$P = \frac{q_i}{S} = \sigma_i$$

↓ Vektor polarização eléctrica: dá-nos o momento do dipolo por unidade de volume e tem módulo σ_i

Vector polarização e deslocamento eléctrico

$$D = \frac{Q}{S} \quad \text{Deslocamento eléctrico que tem por módulo a densidade superficial de cargas na superfície do condensador.}$$

A expressão geral para o vetor deslocamento eléctrico é

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Com base nestas definições, podemos escrever a lei de Gauss, em termos do vetor deslocamento

$$\text{div} \vec{D} = \rho$$

↳ Densidade de cargas livres no sistema

Susceptibilidade Eléctrica

A polarização em dieléctricos isotrópicos (propriedades eléctricas iguais em todas as direcções) ocorre sob a acção de um campo externo e tem o mesmo sentido do campo.

A intensidade de polarização depende da intensidade do campo e tem a forma:

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$$

↳ Susceptibilidade eléctrica do material

Resolução de exercícios (2ª série)

9. Considere o seguinte condensador de placas paralelas, de área igual a S .



- Supondo que o dieléctrico se caracteriza por $\epsilon_r = 5,6$, determine o campo eléctrico no interior do dieléctrico e no ponto P .
- Calcule a densidade de carga (livre) na superfície do dieléctrico.
- Suponha que se retire o dieléctrico. Compare a nova capacidade do condensador com a capacidade anterior.
- Explique, sucintamente, porque é que num material com polarização uniforme tudo se passa como se houvesse apenas dois planos de carga em lados opostos do material.
- Escreva a forma mais geral da lei de Gauss e interprete-a.

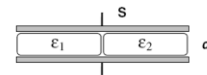
Solução:

- $E_{ar} = \frac{6}{0,3mm + 5,6 \times 0,7mm} \approx 1422 \text{ Vm}^{-1}$; $E_P = E_r$; $E_{di} = 7962 \text{ Vm}^{-1}$
- $\sigma_f = |\vec{P}| \approx 5,78 \cdot 10^{-9} \text{ Cm}^{-2}$
- $C_1 = 117,4 \text{ pF}$; $C_2 = 88,5 \text{ pF}$

Resolução de exercícios (2ª série)

20. Considere o condensador plano composto por 2 placas metálicas com área S e distanciadas de d .

- Considere, o condensador em circuito aberto, sem dieléctrico no seu interior e com uma diferença de diferença de potencial V entre as placas.



- Suponha, que insere 2 dieléctricos com $\epsilon_1 = \epsilon$ e $\epsilon_2 = 2 \times \epsilon$, ocupando cada um metade do volume como mostra a figura. Calcule o valor de campo eléctrico nos 2 dieléctricos, se o condensador for mantido em circuito aberto
- Calcule os valores da densidade superficial de cargas livres σ_1 e σ_2 e explique por que razão são diferentes.