

Mecânica e Campo Eletromagnético

2019/2020 – parte 3

Luiz Pereira

luiz@ua.pt

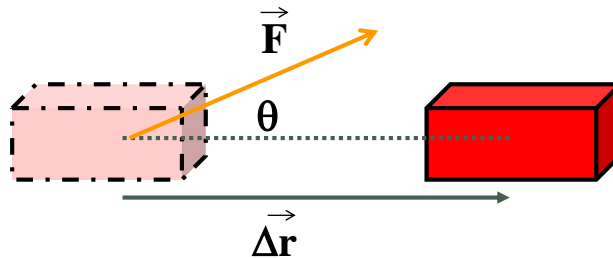


Tópicos

- **Trabalho e energia**
 - Trabalho de uma força
 - Energia cinética
 - Potência
 - Força conservativa
 - Conservação da energia

Trabalho de uma força constante

- Um corpo sofre um deslocamento, estando sob a ação de uma força F constante (entre outras)



O trabalho W realizado pela força F durante o deslocamento Δr é dado pelo produto

$$W = |\vec{F}| |\Delta \vec{r}| \cos \theta$$

Ou com o produto interno (escalar)

$$W = \vec{F} \bullet \Delta \vec{r}$$

Trabalho de forças constantes

Em geral, para uma força constante com componentes cartesianas

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$$

E um deslocamento:

$$\Delta \vec{r} = \Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j} + \Delta z \hat{k}$$

O trabalho de F durante o deslocamento é

$$W = \vec{F} \bullet \Delta \vec{r} = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z$$

Trabalho de forças constantes

Uma força realiza trabalho nulo se:

$$W=0: \left\{ \begin{array}{l} \text{O deslocamento é nulo} \\ \text{A força é perpendicular ao deslocamento} \end{array} \right.$$

No S. I. a unidade de trabalho é o Joule (J)

Se houver várias forças aplicadas a um corpo, podemos calcular o trabalho total (da resultante) usando a propriedade distributiva:

$$W(\vec{F}_{res}) = \left(\sum_{todas} \vec{F}_i \right) \cdot \Delta \vec{r} = \sum_{todas} (\vec{F}_i \cdot \Delta \vec{r}) = \sum_{todas} W(\vec{F}_i)$$

O trabalho da resultante é igual à soma dos trabalhos de todas as forças

Trabalho de forças variáveis

Como generalizar quando a força F depende da posição?

Suponhamos um deslocamento segundo x e $F=F_x(x)$ é a componente x da força

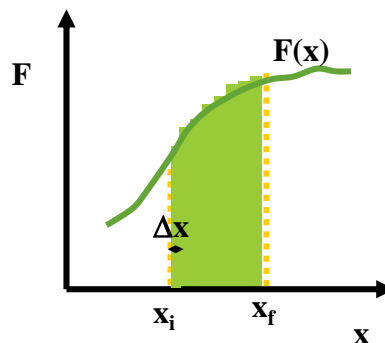
Para deslocamento infinitesimal Δx

$$\Delta w = F_x(x) \cdot \Delta x$$

$$W = \sum_{x_i}^{x_f} F_x(x) \cdot \Delta x$$

No limite $\Delta x \Rightarrow 0$

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x) dx$$



Trabalho de forças variáveis

Como generalizar quando o deslocamento não é retilíneo?

Contribuirão as componentes da força segundo x,y e z, cada uma delas dependendo dos pontos x,y,z da trajetória.

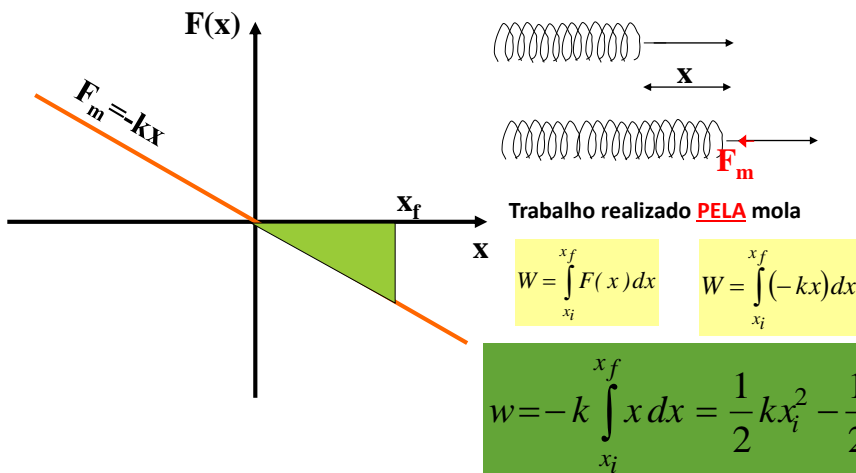
$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} F_x(x, y, z)dx + F_y(x, y, z)dy + F_z(x, y, z)dz$$

$$W = \int_{r_i}^{r_f} F_x(x, y, z)dx + \int_{r_i}^{r_f} F_y(x, y, z)dy + \int_{r_i}^{r_f} F_z(x, y, z)dz$$

Integral de
caminho

O trabalho será dado pela soma de três integrais, um para cada componente. Em cada um, as coordenadas têm que ser reescritas à custa de (cada) variável de integração, usando a equação que descreve a trajetória.

Trabalho realizado por uma mola



Trabalho realizado **PELA** mola

$$x_i = 0 \Rightarrow W = -\frac{1}{2} kx_f^2$$

Trabalho e Energia

Veremos a seguir que em muitos casos é possível descrever o movimento de um corpo relacionando diretamente a velocidade e o deslocamento, sem explicitar o tempo. A partir do trabalho da força resultante num dado deslocamento, é possível calcular a variação de velocidade correspondente

Suponhamos que uma partícula está sujeita a um conjunto de forças, de resultante F . Para um deslocamento segundo xx

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x) dx = \int_{x_i}^{x_f} ma dx$$

Usando a 2ª Lei de Newton
pois F é resultante

$$a = \frac{dv}{dt} = \left(\frac{dv}{dx} \right) \times \left(\frac{dx}{dt} \right) = \left(\frac{dv}{dx} \right) \times v$$

Eliminamos t e explicitamos a velocidade

Trabalho e Energia

$$W = \int_{x_i}^{x_f} mv \left(\frac{dv}{dx} \right) dx = \int_{x_i}^{x_f} m \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2} \right) dx$$

Lembrando que:

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

$$W_{RES} = \frac{1}{2} mv_f^2 - \frac{1}{2} mv_i^2$$

$$W_{RES} = E_{cf} - E_{ci} = \Delta E_c$$

**TEOREMA DO
TRABALHO E
ENERGIA**

Este resultado é válido em geral, para uma trajetória arbitrária

Potência de uma força

Potência é a taxa temporal com que é realizado trabalho

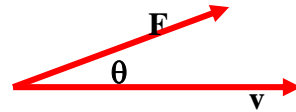
Realizando um trabalho ΔW num intervalo de tempo Δt

$$P_{media} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\vec{F} \cdot \Delta \vec{r}}{\Delta t} \Rightarrow P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

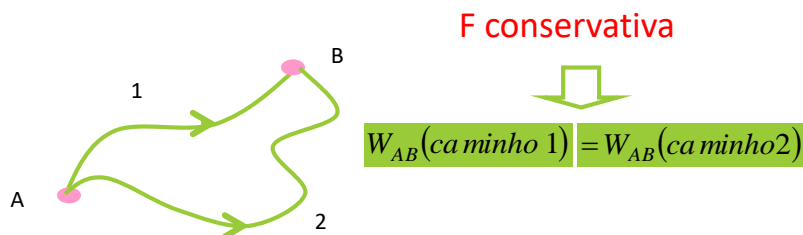
$$P = |\vec{F}| v \cos \theta$$



Forças Conservativas

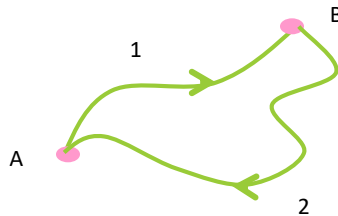
Uma força é **CONSERVATIVA** se o trabalho realizado num deslocamento entre dois pontos arbitrários for **INDEPENDENTE** do caminho seguido entre esses pontos

Nestas condições, o trabalho é apenas função das coordenadas final e inicial do deslocamento



Ainda, o trabalho realizado ao longo dum trajeto **FECHADO** é **NULO**

Forças Conservativas



O trabalho realizado ao longo dum trajeto **FECHADO** é **NULO**

$$W_{AA}(\text{ca minho fechado}) = W_{AB}(\text{ca minho 1}) + W_{BA}(\text{ca minho 2})$$

Mas: $W_{BA}(\text{ca minho 2}) = -W_{AB}(\text{ca minho 1})$ Porquê?

F conservativa



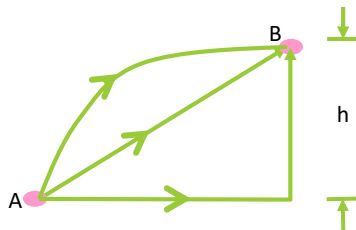
$$W_{AA}(\text{ca minho fechado}) = 0$$

Forças Conservativas

Exemplos de forças conservativas são:

- *Gravítica*
- *Eletrostática*
- *Elástica duma mola*

No caso da força gravítica (junto à superfície da Terra) em que é constante, o trabalho só depende da diferença de alturas entre os pontos final e inicial Porquê?



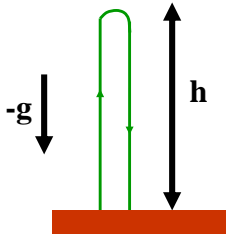
Para qualquer trajeto de A → B

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F_y dy = \\ &= \int_A^B -mg dy = -mg(y_B - y_A) \end{aligned}$$

$$W_{AB} = -mg(y_B - y_A)$$

Forças Conservativas: gravidade

Uma massa m é lançada até uma altura h

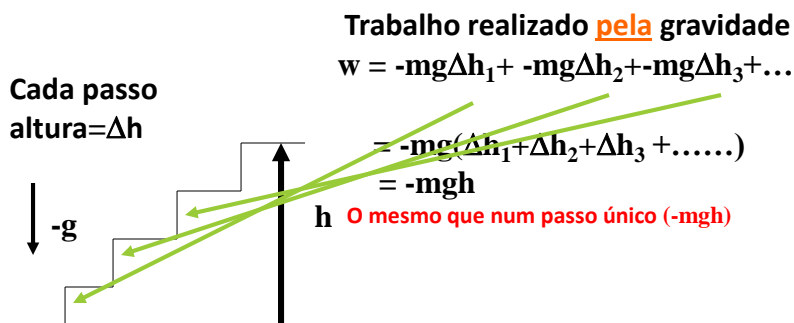


Qual o trabalho realizado pelo peso durante a subida e descida até à posição inicial?

Subida: $W(0 \rightarrow h) = -mgh$
 Descida: $W(h \rightarrow 0) = +mgh$
 Trabalho total = 0

Forças Conservativas: gravidade

Qual o trabalho realizado pelo peso durante uma sequência de passos?



Forças Conservativas e Energia Potencial

Como o trabalho realizado por uma força conservativa é apenas função das posições inicial e final, podemos definir uma função (de ponto) ENERGIA POTENCIAL satisfazendo:

$$W_{fcons} = \int_{P_i}^{P_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\Delta E_P = E_{Pi} - E_{Pf}$$

$E_{\text{potencial inicial}}$ $E_{\text{potencial final}}$
 no ponto no ponto

O trabalho realizado por uma força conservativa numa posição inicial para uma final é o **simétrico** da variação da **ENERGIA POTENCIAL** nesse trajeto:

Energia Potencial Gravítica

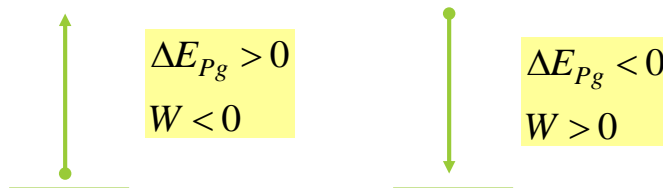
Para o caso do peso, considerado constante junto à superfície da Terra, temos:

$$W_{\text{peso}} = \int_{P_i}^{P_f} \vec{P} \cdot d\vec{r} = mgy_i - mgy_f$$

Energia potencial gravítica (junto à superfície da Terra)

$$E_{Pg} = mgy$$

A menos de uma constante, que define a origem, o zero da E_{Pg}



Energia Potencial Elástica

Para a mola elástica, em que $F = -kx$

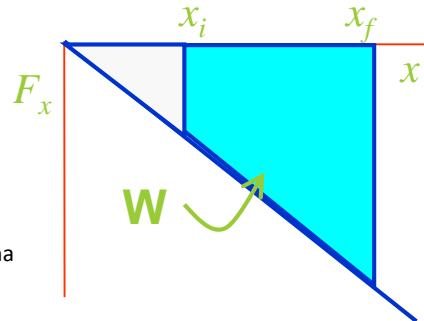
O trabalho de x_i até x_f é:

$$W_{i \rightarrow f} = \frac{1}{2} k x_i^2 - \frac{1}{2} k x_f^2$$

Define-se a energia potencial elástica duma mola como

$$E_{Pe} = \frac{1}{2} k x^2$$

Atenção: $x=0$ é a posição de equilíbrio, não é arbitrária.



Energia Mecânica: conservação da E.M.

Suponhamos que uma partícula sofre apenas a ação de uma força conservativa F num deslocamento duma posição P_i para P_f

Do teorema do Trabalho-Energia:

$$W_{i \rightarrow f} = \int_{P_i}^{P_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Delta E_c = E_{cf} - E_{ci}$$

F é a resultante

Como F é conservativa:

$$E_{Pi} - E_{Pf} = E_{cf} - E_{ci}$$

$$W_{i \rightarrow f} = -\Delta E_P = E_{Pi} - E_{Pf}$$

$$E_{ci} + E_{Pi} = E_{cf} + E_{Pf}$$

A soma é constante

$$E_M = E_c + E_P$$

ENERGIA MECÂNICA É CONSTANTE

Energia Mecânica: conservação da E.M.

Sob a ação de uma força conservativa F , a energia mecânica

$$E_M = E_c + E_P$$

é conservada: $E_{Mi} = E_{Mf} \iff \Delta E_M = 0$

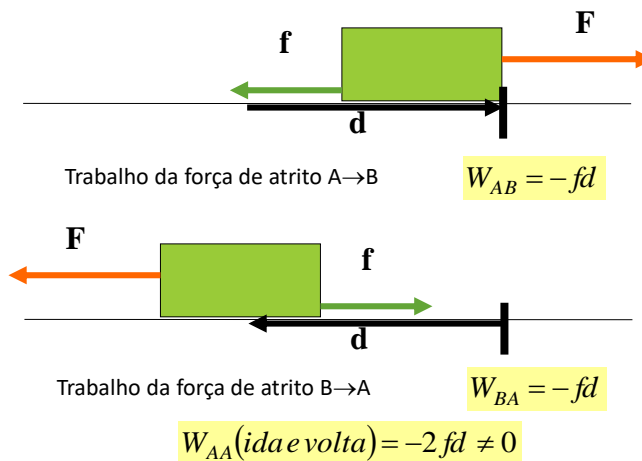
No caso de haver várias forças conservativas aplicadas ao corpo, a cada uma associada uma energia potencial, a energia mecânica é

$$\vec{F}_{res} = \sum_{\text{várias } Ep} \vec{F}_{cons} \longrightarrow E_M = E_c + \sum_{\text{várias } Ep} E_P$$

Forças não-conservativas: atrito

No caso de forças não-conservativas, o trabalho realizado num trajeto fechado não é nulo, como podemos ver com a força de atrito cinético

Um bloco é deslocado uma distância d numa superfície com atrito f



Energia Mecânica:

Em geral, a uma partícula estarão aplicadas forças conservativas e não-conservativas. Podemos estipular, para a resultante das forças:

$$\vec{F}_{res} = \sum_{\text{varias } Ep} \vec{F}_{cons} + \vec{F}_{NC}$$

Num deslocamento de P_i para P_f $W_{i \rightarrow f}(F_{res}) = \Delta E_C$

Por outro lado $W_{i \rightarrow f}(F_{res}) = W_{i \rightarrow f}(\sum F_C) + W_{i \rightarrow f}(F_{NC})$

$W_{i \rightarrow f}(\sum F_C) = -\sum \Delta E_P$ Ep total:

$$\begin{aligned} W_{i \rightarrow f}(F_{NC}) &= W_{i \rightarrow f}(F_{res}) - W_{i \rightarrow f}(\sum F_C) = \\ &= \Delta E_C - (-\sum \Delta E_P) = \\ &= \Delta E_C + \sum \Delta E_P = \Delta E_M \end{aligned}$$

$$W_{i \rightarrow f}(F_{NC}) = \Delta E_M$$

Energia Mecânica:

Assim, resumindo:

Num deslocamento de P_i para P_f

$$W_{i \rightarrow f}(F_{res}) = \Delta E_C$$

$$W_{i \rightarrow f}(\sum F_C) = -\sum \Delta E_P$$

$$W_{i \rightarrow f}(F_{NC}) = \Delta E_M$$

A energia mecânica varia se as forças não conservativas realizarem trabalho

Energia potencial e forças conservativas

A variação de energia potencial num deslocamento é dada a partir do integral de caminho da força (conservativa)

$$W_{fcons} = \int_{P_i}^{P_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\Delta E_p = E_{p_i} - E_{p_f}$$

Se soubermos a energia potencial em cada ponto, poderemos saber a força correspondente?

Esta questão tem uma resposta imediata, se a energia potencial só depender de uma coordenada cartesiana, por exemplo x

Como E_p só depende de x , basta considerar deslocamentos segundo x , surgindo apenas a componente x da força F

$$W_{fcons} = \int_{P_i}^{P_f} F_x dx = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = E_p(x_i) - E_p(x_f)$$

Energia potencial e forças conservativas

$$F_x = -\frac{dE_p(x)}{dx}$$

A componente x da Força é – derivada de E_p em ordem a x

E as componentes y e z da força?

Serão nulas, pois se o trabalho num qualquer deslocamento segundo y é nulo (pois E_p só depende de x), isso significa que $F_y = F_z = 0$

Se $E_p = E_p(x)$

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx}$$

$$F_y = F_z = 0$$

Energia potencial e forças conservativas

Consideremos a energia potencial gravítica, junto à Terra, que depende da altitude y (vertical)

$$E_{Pg} = mgy$$

Resulta:

$$F_{gy} = -\frac{dE_{Pg}}{dy} = -mg$$

Só componente vertical.
Correto?

Para uma mola elástica

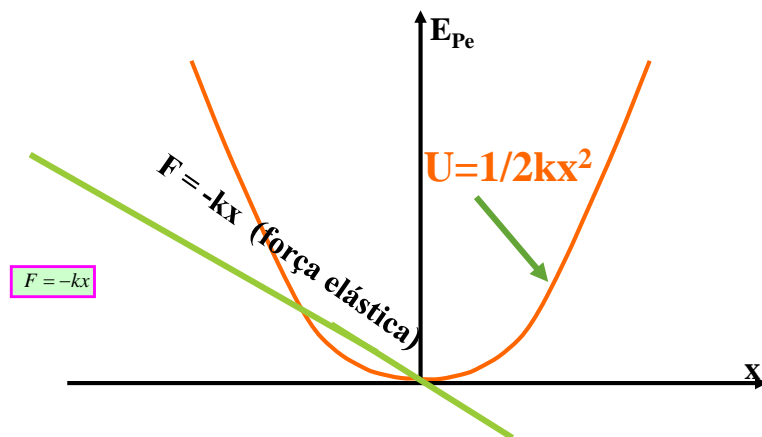
$$E_{Pe} = \frac{1}{2}kx^2$$

Resulta:

$$F_{ex} = -\frac{dE_{Pe}}{dx} = -kx$$

Vejamos o
gráfico

Energia potencial e forças conservativas



Energia potencial e forças conservativas

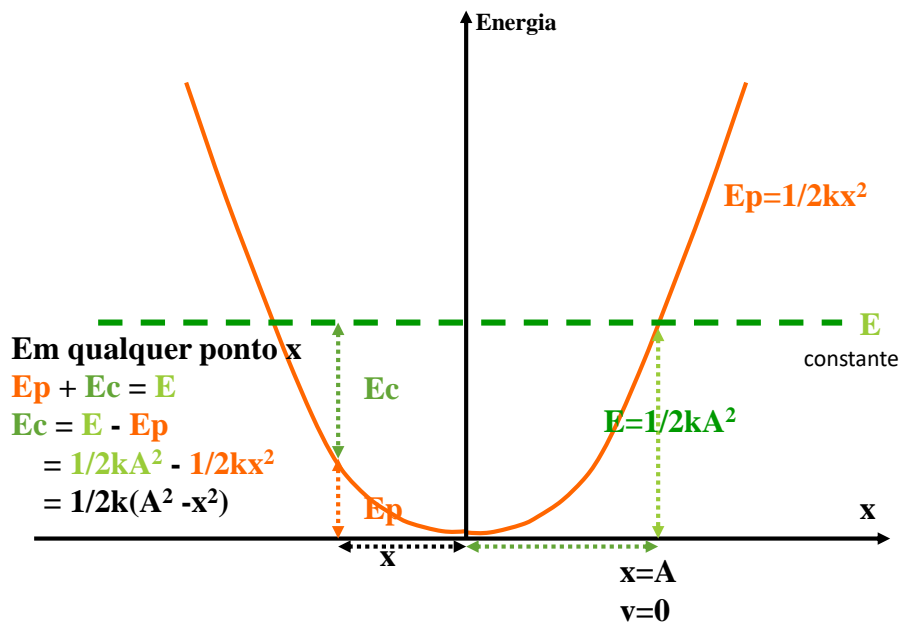
Como aproveitar esta representação?

Se a mola é esticada até $x=A$ e em seguida a partícula é largada (com $v_i=0$), a conservação de energia mecânica conduz a

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{Verifique!}$$

Podemos determinar a velocidade em qualquer posição x

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}$$



Energia potencial e forças conservativas

Quando a energia depende das várias coordenadas $E_p = E_p(x, y, z)$

A relação dada antes para uma coordenada

$$F_x = - \frac{dE_p}{dx}$$

É generalizada utilizando a noção de derivada parcial

$$F_x = - \frac{\partial E_p}{\partial x} \quad F_y = - \frac{\partial E_p}{\partial y} \quad F_z = - \frac{\partial E_p}{\partial z}$$

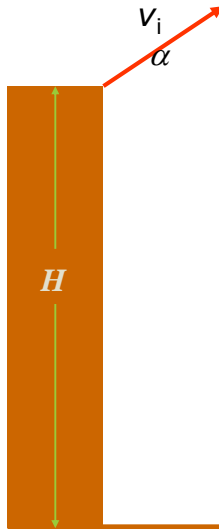
Diremos que a Força é o simétrico do **GRADIENTE** da energia potencial

$$\vec{F} = - \left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z} \hat{k} \right)$$

Alguns exemplos

- Projéteis (sistema simples)
- Pêndulo simples

Projéteis simples



Projétil disparado, com inclinação α e velocidade v_i do alto duma torre de altura H

Qual a velocidade v_f (módulo) quando chega ao solo?

A energia mecânica é conservada. Porquê?

Vem:

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + mgH = \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$v_f = \sqrt{v_i^2 + 2gH}$$

A velocidade é independente do ângulo de lançamento!

Pêndulo

Um corpo, de massa m está suspenso por um fio de comprimento L , e é largado dum ângulo inicial θ_i com a vertical.

Qual a velocidade v quando a inclinação é θ ? Qual a máxima v ?

Quais as forças em causa?

Tensão: não realiza trabalho

Peso: é conservativa

Pela conservação da energia mecânica

$$E_{Mi} = E_{Mf}$$

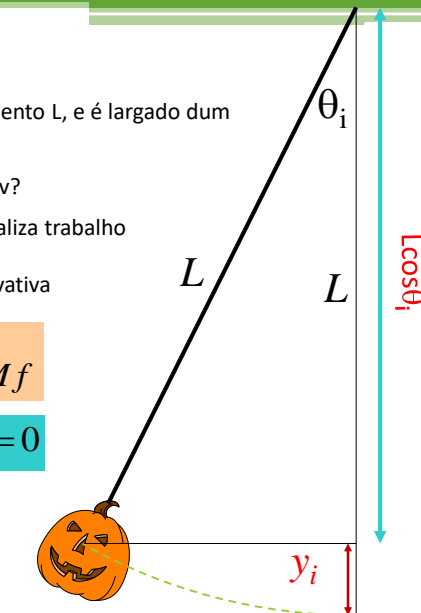
Posição inicial: $\theta = \theta_i$

$$v_i = 0 \Rightarrow E_{ci} = 0$$

Considerando o zero da energia potencial na base, $y=0$

$$y_i = L - L\cos\theta_i = L(1 - \cos\theta_i)$$

$$E_{Pgi} = mgy_i = mgL(1 - \cos\theta_i)$$



Pêndulo

Quando a inclinação é θ

Posição: $\theta_f = \theta$

$$y = L(1 - \cos \theta) \quad v_f = v = ?$$

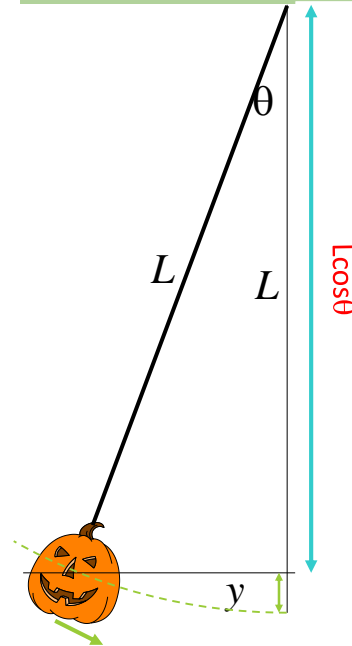
$$E_{Mf} = \frac{1}{2}mv^2 + mgL(1 - \cos \theta)$$

Conservação da energia mecânica

$$E_{Mi} = E_{Mf}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgL(\cos \theta - \cos \theta_i)$$

$$v = \sqrt{2gL(\cos \theta - \cos \theta_i)}$$



Pêndulo

Máxima velocidade quando está na vertical

$$\theta = 0 \quad v_{max} = \sqrt{2gL(1 - \cos \theta_i)}$$

Qual a tensão no fio nesse ponto? (Máxima!)

Da 2ª Lei de Newton $\vec{T} + \vec{P} = m\vec{a}$

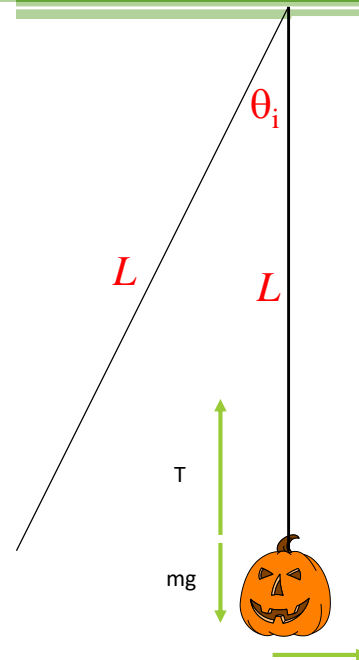
O movimento é circular

Componente normal

$$\text{Neste ponto: } T - mg = m \frac{v^2}{L}$$

$$T = mg + 2mg(1 - \cos \theta_i)$$

$$T = mg(3 - 2 \cos \theta_i)$$



Pêndulo

Tensão máxima num pêndulo

$$T = mg(3 - 2\cos\theta_i)$$

Se for largado de um ângulo de 60°

$$T = 2mg$$

O fio tem que poder suportar o dobro do peso!

