



1. Mostre que:

Se  $A$  é uma matriz triangular, então os valores próprios de  $A$  são os elementos da sua diagonal principal.

2. Determine os valores próprios e vetores próprios de cada uma das seguintes matrizes. Averigue se a matriz é diagonalizável e, em caso afirmativo, indique uma sua matriz diagonalizante, bem como a matriz diagonal correspondente.

(a)  $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

(c)  $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(d)  $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

(e)  $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(f)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

3. Determine os valores dos parâmetros reais  $a$  e  $b$  para os quais  $(1, 1)$  é um vetor próprio e  $0$  é um valor próprio da matriz  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$ .

4. Considere as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \theta & \mu \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{bmatrix}$  e os vetores  $u = (1, 1, 1)$ ,  $v = (1, 0, -1)$  e  $w = (1, -1, 0)$ , onde  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \mu, a, b, c \in \mathbb{R}$  são parâmetros a determinar. Calcule  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \mu, a, b, c$  de modo a que os vetores  $u, v$  e  $w$  sejam vetores próprios de  $A$  e  $-1, 0$  e  $1$  sejam valores próprios de  $B$ .

5. Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ .

(a) Mostre que  $1$  é um valor próprio de  $A$  e determine o subespaço próprio de  $A$  associado ao  $1$ .

(b) Verifique se  $A$  é diagonalizável e, em caso afirmativo, indique uma matriz diagonal semelhante a  $A$ .

6. Seja  $A$  uma matriz quadrada. Mostre que  $A$  é singular se e só se  $0$  é um valor próprio de  $A$ .

7. Mostre que  $A$  e  $A^T$  possuem os mesmos valores próprios.

8. Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  e  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  os seus valores próprios. Mostre que  $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ .

9. Seja  $A$  uma matriz quadrada e  $\lambda$  um valor próprio de  $A$ . Mostre que

(a)  $\lambda^k$  é um valor próprio de  $A^k$ , para  $k \in \mathbb{N}$ ;

(b)  $\frac{1}{\lambda}$  é um valor próprio de  $A^{-1}$ , caso  $A$  seja invertível.

10. Se  $A$  e  $B$  são matrizes invertíveis, mostre que  $AB$  e  $BA$  são matrizes semelhantes.

11. Se  $A$  é diagonalizável, mostre que

(a)  $A^T$  é diagonalizável;

(b)  $A^k$  é diagonalizável, para  $k \in \mathbb{N}$ ;

(c)  $A^{-1}$  é diagonalizável, caso  $A$  seja invertível.

12. Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ .

(a) Determine os valores próprios e subespaços próprios de  $A$ .

(b) Verifique que  $A$  é diagonalizável e indique uma matriz invertível  $P$  tal que  $P^{-1}AP$  é diagonal.

- (c) Calcule  $A^5$ , utilizando o facto de  $A$  ser diagonalizável.
13. Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ k & k+1 \end{bmatrix}$ .
- Calcule o polinómio caraterístico de  $A$ , assim como os seus valores próprios.
  - Determine os subespaços próprios de  $A$ .
  - Indique, justificando, os valores do parâmetro real  $k$  para os quais  $A$  é diagonalizável.
  - Para os valores de  $k$  obtidos na alínea anterior, determine uma matriz diagonal  $D$  e uma matriz não singular  $P$  tal que  $A = PDP^{-1}$ .
  - Para  $k = -1$ , determine  $A^{2013}$ .
14. Sejam  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  e  $X, Y, Z, W \in \mathbb{R}^4$  não nulos tais que  $AX = AY = 0$ ,  $AZ = Z$  e  $AW = -W$ , sendo  $\{X, Y\}$  linearmente independente.
- Indique o polinómio caraterístico de  $A$  e os valores próprios de  $A$ .
  - Indique, justificando, se  $A$  é diagonalizável e se existe uma base de  $\mathbb{R}^4$  constituída por vetores próprios de  $A$ .
15. Diagonalize as matrizes simétricas seguintes através de uma matriz  $P$  diagonalizante ortogonal:
- (a)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ;      (b)  $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ;      (c)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ .
16. Considere a matriz simétrica  $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ .
- Mostre que 9 é um valor próprio de  $A$ .
  - Diagonalize  $A$  através de uma matriz diagonalizante ortogonal.
17. Seja  $A$  uma matriz simétrica  $3 \times 3$  tal que  $(1, 0, 0)$  e  $(0, 1, 1)$  são vetores próprios de  $A$  associados ao valor próprio 1 e  $(0, -1, 1)$  é um vetor próprio de  $A$  associado ao valor próprio  $-3$ .
- Determine o subespaço próprio de  $A$  associado ao valor próprio 1.
  - Justifique que  $A$  é diagonalizável e determine a matriz  $A$ .

## Exercícios suplementares (com alguma dificuldade acrescida)

18. Seja  $A = \left[ \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & I_{n-1} & \\ \hline a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , onde  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ , com polinómio caraterístico  $p_A(\lambda)$ .
- Verifique que  $p_A(\lambda) = 0$  se e só se  $\lambda^n = a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ .
  - Mostre que, se  $\lambda$  é um valor próprio de  $A$ ,  $X_\lambda = (1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1})$  é um vetor próprio associado a  $\lambda$ .
  - Justifique que o espaço próprio associado a cada valor próprio  $\lambda$  é  $U_\lambda = \langle X_\lambda \rangle$ .  
[Sugestão: as última  $n-1$  colunas de  $A - \lambda I$  são linearmente independentes, logo...]
  - Sejam  $n = 3$ ,  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = -1$  e  $a_2 = 2$ . Verifique as propriedades das alíneas anteriores e prove que  $A$  não é diagonalizável.

Considere a sucessão de valores reais  $(x_k)$ , com  $k \in \mathbb{N}_0$ , e seja  $(V_k)$  a sucessão de vetores em  $\mathbb{R}^n$  definida por  $V_k = (x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n-1})$  — sendo, portanto,  $V_{k+1} = (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+n})$ .

- Prove que  $(x_k)$  satisfaz a equação de recorrência  $x_{k+n} = a_{n-1}x_{k+n-1} + \dots + a_1x_{k+1} + a_0x_k$  se e só se  $V_{k+1} = AV_k$ , para cada  $k \in \mathbb{N}_0$ .
- Se  $V_{k+1} = AV_k$ , verifique que  $V_k = A^k V_0$  para cada  $k \in \mathbb{N}_0$ . O que acontece quando  $A$  é diagonalizável?

19. Seja  $P = [X_1 \ \cdots \ X_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$  uma matriz cujas colunas são  $m$  vetores próprios de  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$  a matriz que contém, na diagonal, os correspondentes valores próprios  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ . Note-se que os vetores próprios não têm de ser linearmente independentes, nem têm de ser distintos (ou não nulos) os valores próprios.

- (a) Demonstre a equação matricial dos vetores próprios:  $AP = PD$ .  
 (b) Justifique que  $A^2P = PD^2$  e deduza que  $A^kP = PD^k$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}_0$ .

Para  $m = n$ , suponha-se que  $\det(P) \neq 0$ .

- (c) Mostre que  $\mathcal{B} = (X_1, \dots, X_n)$  é uma base (ordenada) de  $\mathbb{R}^n$ .  
 (d) Verifique que  $P = M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$  é a matriz de mudança da base  $\mathcal{B}$  para a base canónica de  $\mathbb{R}^n$ .  
 (e) Prove que, para qualquer  $X \in \mathbb{R}^n$  e qualquer  $k \in \mathbb{N}_0$ ,

$$[A^k X]_{\mathcal{B}} = D^k [X]_{\mathcal{B}}.$$

### Aplicações (exercícios optativos)

20. A sucessão de Fibonacci  $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$  é definida pela equação de recorrência  $x_{k+2} = x_{k+1} + x_k$ , sendo  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $x_0 = 0$  e  $x_1 = 1$ . Seja  $V_k = (x_k, x_{k+1}) \in \mathbb{R}^2$  para cada  $k \in \mathbb{N}_0$ . Usando a notação e os resultados do exercício 18,

- (a) determine a matriz  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  tal que  $V_{k+1} = AV_k$  para  $k \in \mathbb{N}_0$ ;  
 (b) determine o polinómio caraterístico  $p_A(\lambda)$  e calcule os valores próprios de  $A$ ;  
 (c) prove que  $A$  é diagonalizável e determine uma matriz diagonalizante e a matriz diagonal correspondente;  
 (d) determine uma fórmula para calcular  $x_k$  para qualquer  $k \in \mathbb{N}_0$  e indique o valor de  $x_{22}$ .

21. **Modelo de Leontief de economia fechada.** Este modelo descreve uma economia em que todos os bens (ou serviços) produzidos são consumidos pelos próprios setores produtivos. Portanto, em comparação com o modelo apresentado no exercício 47 da primeira folha prática, neste caso não há *procura final* e a *procura* (que corresponde à *procura intermédia*) é igual à produção.

Suponha-se que existem  $n$  indústrias  $I_1, \dots, I_n$  e que, num dado período de tempo, a indústria  $I_i$  produz  $B_i$  unidades do bem  $b_i$  e consome  $C_{ij}$  unidades do bem  $b_j$  produzido por  $I_j$ , com  $i, j = 1, \dots, n$ . Então,

$$a_{ij} = \frac{C_{ij}}{B_j} \text{ é a fração do total de bens produzidos pela indústria } j \text{ que é utilizado pela indústria } i.$$

Seja  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Sendo a economia *fechada*, para todo o  $j = 1, \dots, n$  tem-se que

$$a_{1j} + \cdots + a_{nj} = \frac{C_{1j}}{B_j} + \cdots + \frac{C_{nj}}{B_j} = \frac{C_{1j} + \cdots + C_{nj}}{B_j} = 1,$$

pois o numerador (o total do bem  $b_j$  que foi consumido) é igual ao denominador (a quantidade  $B_j$  que foi produzida). Isto significa que **a soma das entradas de cada coluna de  $A$  é igual a 1**.

Considere-se agora o seguinte problema: é possível determinar o preço  $p_i$  de cada bem  $b_i$  para que os custos de produção de cada indústria, para adquirir os bens de que precisa, sejam iguais à receita obtida com a venda do bem produzido (condição de equilíbrio)? Para  $I_i$ , a receita é  $B_i p_i$  e os custos são  $C_{i1}p_1 + \cdots + C_{in}p_n$ . Logo, a condição de equilíbrio é  $B_i p_i = C_{i1}p_1 + \cdots + C_{in}p_n = a_{i1}B_1 p_1 + \cdots + a_{in}B_n p_n$  para todo o  $i = 1, \dots, n$ .

- (a) Verifique que, definindo o vetor  $X = (B_1 p_1, \dots, B_n p_n)$ , a condição de equilíbrio é  $X = AX$ .  
 (b) Seja  $Y = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ . Explique por que razão  $A^T Y = Y$ .  
 (c) Justifique que existe sempre um vetor  $X$  que satisfaz  $X = AX$  (ou seja, um preço  $p_i$  para cada bem  $b_i$  que permite atingir a condição de equilíbrio).

2. (a) Valores próprios:  $\lambda = 0$ ; vetores próprios associados:  $X_0 = \alpha(1, 0, 0)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; não é diagonalizável: é uma matriz  $3 \times 3$  que possui apenas um vetor próprio linearmente independente.

(b) Valores próprios:  $\lambda \in \{-2, 1, 3\}$ ; vetores próprios associados:  $X_{-2} = \alpha(0, 0, 1)$ ,  $X_1 = \alpha(6, 3, 8)$ ,  $X_3 = \alpha(0, 5, 2)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; é diagonalizável: é uma matriz  $3 \times 3$  com três valores próprios distintos; uma matriz diagonalizante e a correspondente matriz diagonal são, respetivamente,

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(c) Valores próprios:  $\lambda \in \{1, 3\}$ ; vetores próprios associados:  $X_1 = \alpha(1, -2, 0, 0) + \beta(0, 0, -2, 1)$ ,  $X_3 = \gamma(1, 0, 0, 0)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  não simultaneamente nulos,  $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; não é diagonalizável: é uma matriz  $4 \times 4$  que possui no máximo três vetores próprios linearmente independentes.

(d) Valores próprios:  $\lambda \in \{1, 3\}$ ; vetores próprios associados:  $X_1 = \alpha(-1, 0, 1)$ ,  $X_3 = \alpha(5, 2, -3)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; não é diagonalizável: é uma matriz  $3 \times 3$  que possui no máximo dois vetores próprios linearmente independentes.

(e) Valores próprios:  $\lambda \in \{2, 4\}$ ; vetores próprios associados:  $X_2 = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, -1)$ ,  $X_4 = \gamma(-1, 1, 1)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  não simultaneamente nulos,  $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; é diagonalizável: é uma matriz  $3 \times 3$  que possui três vetores próprios linearmente independentes; uma matriz diagonalizante e a correspondente matriz diagonal são, respetivamente,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

(f) Valores próprios:  $\lambda \in \{-2, -1, 0\}$ ; vetores próprios associados:  $X_{-2} = \alpha(1, 1, 2)$ ,  $X_{-1} = \alpha(1, 0, 1)$ ,  $X_0 = \alpha(1, 1, 1)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; é diagonalizável: é uma matriz  $3 \times 3$  com três valores próprios distintos; uma matriz diagonalizante e a correspondente matriz diagonal são, respetivamente,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.  $a = b = 1$ .

4.  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \theta = \mu = 1$ ,  $a = c = 0$  e  $b = 1$ .

5. (a) 1 é um valor próprio de  $A$ ;  $U_1 = \langle (5, 4, -2) \rangle$ . (b)  $A$  é diagonalizável e semelhante a  $\begin{bmatrix} 1+\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{5} \end{bmatrix}$ .

12. (a) Os valores próprios de  $A$  são 1, 2 e 4 e os subespaços próprios são  $U_1 = \langle (-1, 1, 1) \rangle$ ,  $U_2 = \langle (1, 0, 0) \rangle$  e  $U_4 = \langle (7, -4, 2) \rangle$ . (b)  $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ; (c)  $A^5 = \begin{bmatrix} 32 & -1147 & 1178 \\ 0 & 683 & -682 \\ 0 & -341 & 342 \end{bmatrix}$ .

13. (a)  $p_A(\lambda) = \lambda^2 - (k+1)\lambda + k$  e os valores próprios são  $\{1, k\}$ . (b)  $U_1 = \langle (x, -x) \rangle$  e, para  $k \neq 1$ ,  $U_k = \langle (x, -kx) \rangle$ . (c)  $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ . (d)  $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$  e  $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -k \end{bmatrix}$ . (e)  $A$ .

14. (a)  $p_A(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^2$  e os valores próprios são  $-1, 0$  e  $1$ . (b) Sim, sim.

15. (a)  $P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$  é uma matriz ortogonal tal que  $P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ .

(b)  $P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$  é uma matriz ortogonal tal que  $P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ .

(c)  $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$  é uma matriz ortogonal tal que  $P^T A P = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

16. (b)  $P = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$  é uma matriz ortogonal tal que  $P^T A P = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ .

17. (a)  $U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = z\}$ . (b)  $A$  é diagonalizável, pois  $A$  é simétrica e  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ .

20. (a)  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ; (b)  $p_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$ , com valores próprios  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  (número áureo) e  $-\frac{1}{\phi} = 1 - \phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ; (c) uma matriz diagonalizante é  $P = \begin{bmatrix} 1 & -\phi \\ \phi & 1 \end{bmatrix}$  e a matriz diagonal correspondente  $D = \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\phi} \end{bmatrix}$ ; (d)  $x_k = [1 \ 0] V_k = [1 \ 0] A^k V_0 = [1 \ 0] P D^k P^{-1} V_0 = \frac{\phi^k - (-\frac{1}{\phi})^{-k}}{\sqrt{5}}$  (nota:  $|P| = 1 + \phi^2 = \sqrt{5}\phi$ ), sendo  $x_{22} = 17711$ .