Cálculo I - Agrupamento IV — Exame Final - Época Normal de Exames

17 de janeiro de 2019

Duração: **2h30**

– Justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

1. Considere a função definida em $\mathbb{R}^-$ por $f(x) = \arccos(e^x)$.

[15pts] (a) Determine o seguinte limite $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x}$.

[20pts] (b) Caracterize a função inversa de f, indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica que a define.

[15pts] 2. Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$ com a, b, c e $d \in \mathbb{R}$. Sabendo que $f(x_0) = 0$ e $x_0 > 0$, prove que a função g definida por $g(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ tem pelo menos um zero z_0 tal que $0 < z_0 < x_0$.

3. Determine os seguintes integrais:

[10pts] (a) $\displaystyle\int \left(x^4 \cos(x^5) - \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x} \right) dx$

[18pts] (b) $\displaystyle\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1 + x^{\frac{3}{4}}}\, dx$ (Sugestão: Faça a substituição $x = t^4$, $t \in \mathbb{R}^+$)

[17pts] (c) $\displaystyle\int \frac{8}{x(x^2+4)}\, dx$

4. Considere a função F definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} t \ln(1 + e^t)\, dt$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

[07pts] (a) Justifique que F é diferenciável em $\mathbb{R}$ e determine $F'(x)$.

[13pts] (b) Estude F quanto à monotonia e indique, se existirem, os extremos locais.

[20pts] 5. Considere a função definida em $\mathbb{R}$ por $g(x) = xe^x$. Calcule o valor da área da região limitada do plano situada entre $x = -1$ e $x = 1$ e limitada pelo gráfico de g e pelo eixo das abcissas.

[15pts] 6. Usando um dos critérios de convergência, estude a natureza do integral impróprio

$$\int_2^{+\infty} \frac{x-2}{x^3 + 2x + \pi}\, dx.$$

7. Verifique se as séries seguintes são convergentes e, em caso de convergência, indique se a convergência é absoluta ou simples:

[13pts] (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-5)^n \cdot n^2}{n!}$

[22pts] (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right)$

8. Sabendo que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é uma série numérica simplesmente convergente e que

$$0 < |a_n| \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N},$$

determine, justificando, a natureza das seguintes séries:

[08pts] (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$

[07pts] (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$

Formulário

$(f(x)^p)' = p\ (f(x))^{p-1}\ f'(x)$, com $p \in \mathbb{R}$	
$\left(a^{f(x)}\right)' = f'(x) a^{f(x)} \ln(a)$, com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$(\log_a(f(x)))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)\ln(a)}$, com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
$(\mathrm{sen}(f(x)))' = f'(x)\cos(f(x))$	$(\cos(f(x)))' = -f'(x)\,\mathrm{sen}(f(x))$
$(\mathrm{tg}(f(x)))' = f'(x)\sec^2(f(x))$	$(\mathrm{cotg}(f(x)))' = -f'(x)\,\mathrm{cosec}^2(f(x))$
$(\sec(f(x)))' = f'(x)\sec(f(x))\,\mathrm{tg}(f(x))$	$(\mathrm{cosec}(f(x)))' = -f'(x)\,\mathrm{cosec}(f(x))\,\mathrm{cotg}(f(x))$
$(\mathrm{arcsen}(f(x)))' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$	$(\arccos(f(x)))' = -\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$
$(\mathrm{arctg}(f(x)))' = \dfrac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$	$(\mathrm{arccotg}(f(x))' = -\dfrac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$

$1 + \mathrm{tg}^2(x) = \sec^2(x)$, para $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	$1 + \mathrm{cotg}^2(x) = \mathrm{cosec}^2(x)$, para $x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \mathrm{sen}\, x\, \mathrm{sen}\, y$	$\mathrm{sen}(x \pm y) = \mathrm{sen}\, x \cos y \pm \cos x\, \mathrm{sen}\, y$
$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$	$\mathrm{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$