Matemática Discreta - 2019/2020

Exame Final (prova de substituição) 27-06-2020

Apenas inclui uma versão de cada pergunta.

1 Algoritmo de Unificação

Determine um unificador para o conjunto de fórmulas da lógica de primeira ordem

$$W = \{Q(g(f(v)), a, u), Q(g(x), w, g(w))\},$$

onde a é uma constante e v, u, x e w são variáveis, aplicando o algoritmo de unificação.

Resolução:

Aplicando o algoritmo passo a passo, obtém-se:

1. Seja $\sigma_0 = \varepsilon$ e $W_0 = W$.
2. Uma vez que W_0 não é um conjunto unitário e σ_0 não é um unificador para W, vamos determinar $D_0 = \{f(v), x\}$.
3. Seja $\sigma_1 = \{f(v)/x\} o \varepsilon = \{f(v)/x\}$,
$$\begin{aligned} W_1 = W_0\sigma_1 &= \{Q(g(f(v)), a, u), Q(g(z), w, g(w))\}\{f(v)/z\} \\ &= \{Q(g(f(v)), a, u), Q(g(f(v)), w, g(w))\}. \end{aligned}$$
4. Uma vez que W_1 não é um conjunto unitário, determina-se o conjunto de diferenças de W_1, $D_1 = \{a, w\}$.
5. A partir de D_1 encontra-se $t_1 = a$ e $v_1 = w$.
6. Seja
$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \{t_1/v_1\} \circ \sigma_1 \\ &= \{a/w\} \circ \{f(v)/z\} \\ &= \{a/w, f(v)/z\} \\ W_2 = W_1\sigma_2 &= \{Q(g(f(v)), a, u), Q(g(f(v)), a, g(a))\} \end{aligned}$$
7. Mais uma vez se verifica que W_2 não é um conjunto unitário, pelo que se deve determinar o seu conjunto de diferenças $D_2 = \{u, g(a)\}$.
8. A partir de D_2 conclui-se que $v_2 = u$ e $t_2 = g(a)$.
9. Seja
$$\begin{aligned} \sigma_3 = \{t_2/v_2\} \circ \sigma_2 &= \{g(a)/u\} \circ \{a/w, f(v)/z\} \\ &= \{g(a)/u, a/w, f(v)/z\}, \\ W_3 = W_2\sigma_3 &= \{Q(g(f(v)), a, u), Q(g(f(z)), a, g(w))\}\{g(a)/u\} \\ &= \{Q(g(f(v)), a, g(a))\}. \end{aligned}$$
10. Uma vez que W_3 é um conjunto unitário, $\sigma_3 = \{g(a)/u, f(a)/x, a/w, f(v)/z\}$ é um unificador para W.

2 Identidades combinatórias

O parlamento português tem várias comissões especializadas permanentes, uma das quais é a Comissão de Educação, Ciência, Juventude e Desporto (CECJD), constituída por 25 deputados. Esta comissão tem dois grupos de trabalho, um dos quais é o Grupo de Trabalho - Parlamento dos Jovens, constituido por 9 deputados (que são membros da CECJD). Admitindo que o conjunto de deputados do parlamento que podem fazer parte desta comissão é D e $|D| = 100$, pretende-se calcular, de duas maneiras diferentes, o número, digamos n, de diferentes pares (A, B) que é possível obter tais que $|A| = 25$, $|B| = 9$ e $B \subseteq A \subseteq D$.

a) Determine uma fórmula para se obter n calculando primeiro o número de diferentes conjuntos A e depois o número de diferentes conjuntos B.

b) Determine uma fórmula para se obter n calculando primeiro o número de diferentes conjuntos B e depois o número de diferentes conjuntos A.

c) Indique a identidade combinatória que se obtém a partir das duas diferentes fórmulas obtidas nas alíneas anteriores, quando $|D| = m$, $|A| = k$ e $|B| = \ell$.

Resolução:

a) Com os 100 deputados é possível escolher $\binom{100}{25}$ comissões com 25 membros, e com estes 25 membros é possível escolher $\binom{25}{9}$ grupos de trabalho com 9 membros. Pelo Princípio da Multiplicação há $\binom{100}{25}\binom{25}{9}$ possíveis pares $(A; B)$ nas condições indicadas.

b) Com os 100 deputados é possível escolher $\binom{100}{9}$ grupos de trabalho com 9 membros, que serão membros da comissão. Portanto, há $\binom{100-9}{25-9}$ maneiras diferentes de completar a comissão de 25 membros. Pelo Princípio da Multiplicação há $\binom{100}{9}\binom{91}{16}$ possíveis pares (A, B) nas condições indicadas.

c) A identidade combinatória obtida é

$$\binom{m}{k}\binom{k}{\ell} = \binom{m}{\ell}\binom{m-\ell}{k-\ell}$$

3 Recorrência

a) As casas da Praia Branquinha caracterizam-se por ter um friso de azulejos alinhados.

   Os azulejos que compõem o friso podem ser azuis ou pintados com um nó de marinheiro. Existem 12 nós de marinheiro diferentes nos azulejos pintados.

   Entre dois azulejos pintados deve ser colocado pelo menos um azulejo liso (é possível repetir nós no friso e é possível que um friso tenha apenas azulejos lisos).

   Sendo a_n o número de possibilidades para um friso com n azulejos, determine uma formula recursiva para a_n.

b) Determine uma formula fechada para cada uma das equações de recorrência

i. $n(a_n - 4a_{n-2}) + 8a_{n-2} = 0$ com $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$.

ii. $u_n - u_{n-1} = 5 + 3^n$ com $u_0 = 0$.

Resolução:

a) $a_1 = 13$; $a_2 = 12 + 12 + 1 = 25$; O número de possibilidades de frisos que terminam com um nó são $12a_{n-2}$ (o penúltimo azulejo tem de ser azul). O número de possibilidades de frisos que terminam com uma azulejo azul são a_{n-1}. Logo $a_n = 12a_{n-2} + a_{n-1}$.

b) i.

$$\begin{aligned}
\text{Equação:}\quad & n(a_n - 4a_{n-2}) + 8a_{n-2} = 0 \\
& na_n - 4na_{n-2} + 8a_{n-2} = 0 \\
& na_n - 4(n-2)a_{n-2} = 0 \\
\text{Substituição:}\quad & b_n = na_n. \\
& b_n - 4b_{n-2} = 0 \\
\text{Equação característica:}\quad & x^2 - 4 = 0 \\
\text{Solução geral:}\quad & b_n = A(-2)^n + B2^n \\
& a_0 = 0 \text{ e } a_1 = 1 \\
& A + B = 0 \text{ e } 1 = -2A + 2B \\
& \text{Logo } B = 1/4 \text{ e } A = -1/4 \\
\text{Solução:}\quad & b_n = -(-2)^{n-2} + 2^{n-2} \\
& a_n = \tfrac{-(-2)^{n-2} + 2^{n-2}}{n},\ n > 0 \text{ e } a_0 = 0
\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
\text{Equação característica:}\quad & x - 1 = 0 \\
\text{Solução geral da equação homogénea:}\quad & u_n^H = A \\
\text{Equação particular (1):}\quad & u_n - u_{n-1} = 5 \\
\text{Solução particular (1):}\quad & u_n^{P1} = Bn^r \text{ onde } r = 1 \\
& Bn - B(n-1) = 5 \\
& B = 5 \\
& u_n^{P1} = 5n \\
\text{Solução particular (2):}\quad & u_n^{P2} = \tfrac{3^{n+1}}{2} \\
\text{Solução geral:}\quad & u_n = u_n^H + u_n^{P1} + u_n^{P2} = A + 5n + \tfrac{3^{n+1}}{2} \\
\text{Condição inicial:}\quad & u_0 = 0 \\
& A = -3/2 \\
\text{Solução:}\quad & u_n = -\tfrac{3}{2} + 5n + \tfrac{3^{n+1}}{2}
\end{aligned}$$

4 Funções geradoras

Determine a função geradora da sucessão $(a_n)_{n\geq 0}$ tal que $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ e $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} - n$, $n \geq 2$.

Resolução:

Da definição de função geradora (ordinária) obtém-se

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1+\sum_{n=2}^{\infty}(2a_{n-1}+3a_{n-2}-n)x^n \\
&= 1+2x\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}+3x^2\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n-2}-x\sum_{n=2}^{\infty}nx^{n-1} \qquad (1)\\
&= 1+2x\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n+3x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-x\left(\sum_{n=2}^{\infty}x^n\right)' \\
&= 1+2x(f(x)-1)+3x^2f(x)-x\left(\frac{1}{1-x}-1-x\right)' \\
&= 1-2x+(2x+3x^2)f(x)-x\left(\frac{1}{(1-x)^2}-1\right) \\
&= 1-x+(2x+3x^2)f(x)-\frac{x}{(1-x)^2}.
\end{aligned}$$

onde a terceira igualdade é obtida substituindo, em (1), n por $n+1$ na primeira série de potências e n por $n+2$ na segunda série de potências. Então

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1-x}{1-2x-3x^2}-\frac{x}{(1-x)^2(1-2x-3x^2)} \\
&= \frac{1-x}{1-2x-3x^2}-\frac{x}{(1-x)^2(1-2x-3x^2)}.
\end{aligned}$$

5 Grafos I

Considera a permutação $\pi = (4\ 6\ 2\ 1\ 3\ 5)$ do conjunto $V = \{1,2,3,4,5,6\}$.

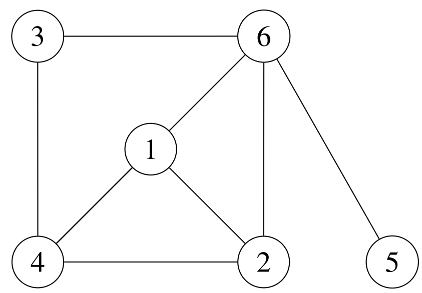
a) Faz um esboço do grafo do grafo simples, não orientado, $G = (V,E)$, com conjunto de arestas $E = \{ij : (j,i) \text{ ou } (i,j) \text{ é uma inversão em } \pi\}$ e a partir do grafo obtido determina a paridade da permutação π.

(b) Aplica o algoritmo de Kruskal para determinar uma árvore abrangente de G com custo mínimo, considerando que o custo associado a cada aresta $ij \in E$ é $i \times j$.

NOTA: Se não respondeu à alínea a) considera na alínea b) que $E = \{12,13,14,16,23,26,46,56\}$.

Resolução:

a) As inversões em π são: $(4,2)$, $(4,1)$, $(4,3)$, $(6,2)$, $(6,1)$, $(6,3)$, $(6,5)$ e $(2,1)$. Assim, $E = \{12,14,16,24,26,34,36,56\}$ e uma representação do grafo é

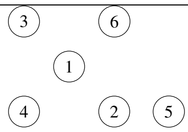
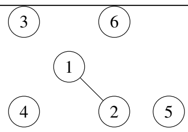
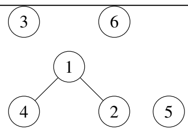
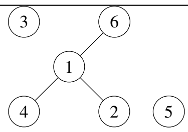
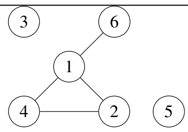
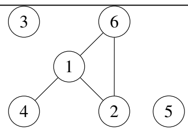
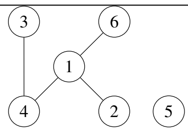
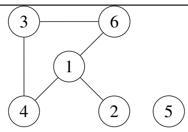
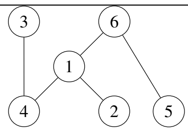


O sinal da permutação π é dado por $(-1)^{I(\pi)}$ onde $I(\pi)$ denota o número de inversões em π. $I(\pi)$ é igual ao número de arestas do grafo G. Assim, o sinal de π é $(-1)^{|E|} = (-1)^8 = 1$, pelo que π é uma permutação par.

b) Começamos por ordenar as arestas de G por ordem crescente dos custos:

12	14	16	24	26	34	36	56
2	4	6	8	12	12	18	30

Aplicamos agora o algoritmo de Kruskal, adicionando sucessivamente as arestas até obter uma árvore abrangente e ignorando as arestas que, ao serem adicionadas, produzem um ciclo:

Iteração	Aresta	Floresta	Custo
0	–		0
1	12		2
2	14		6
3	16		12
4	24		Ciclo
5	26		Ciclo
6	34		24
7	36		Ciclo
8	56		54

No final da iteração 8, obtemos uma árvore abrangente de custo mínimo 54, $G[\{12, 14, 16, 34, 56\}]$.

6 Grafos II

Considere o grafo simples G, com o conjunto de vértices $V(G) = \{1,2,\ldots,8\}$, representado pelo matriz de adjacência

$$A_G = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Sabendo que qualquer que seja o grafo H, as entradas $a_{ij}^{(p)}$ da matriz A_H^p dão o número de passeios de comprimento p entre os vértices i e j, prove que a soma dos elementos diagonais de A_H^3 é igual a 6 vezes o número de triângulos (ciclos de comprimento 3).

b) A partir de A_G^2, determine o número total de passeios de comprimento 2 entre os diferentes os pares de vértices, (i,j), com $i \neq j$.

c) Verifique se G é um grafo bipartido e, no caso afirmativo, determine a respetiva bipartição.

Resolução:

a) Cada ciclo de comprimento 3 corresponde a um triângulo e para cada um dos 3 vértices desse triângulo existem dois passeios fechados de comprimento 3 (um no sentido dos ponteiros do relógio e outro no sentido contrário) os quais determinam o mesmo triângulo. Logo, na contagem do número de passeios fechados de comprimentos 3, que é dada pela soma das entradas diagonais de A_H^3, cada triângulo é contado 6 vezes. Assim, o número de ciclos de comprimento 3 (triângulos) é igual à soma dos elementos diagonais de A_H^3 dividida por 6.

b) As entradas $a_{ij}^{(2)}$ de A_H^2 dão o número dos passeios de comprimento 2 com inicio no vértice i e fim no vértice j que naturalmente é igual ao número de passeios de comprimento 2 com início no vértice j e fim no vértice i. Assim, dado que

$$A_G^2 = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array},$$

contando em cada linha, o número de passeios de comprimento 2 entre vértices distintos é igual a

$$3+2+4+4+3+2+3+3 = 24.$$

Em cada linha excluem-se os elementos diagonais que dão o número de passeio fechados de comprimento 2 (graus dos vértices) que se iniciam e terminam no mesmo vértice. Note-se que contados os passeios de comprimento 2 com inicio no vértice i e fim no vértice j (entrada (i,j)), também se devem contar os passeios com início em j e fim em i (entrada (j,i)).

c) Considere-se o vértice 1 e defina-se V_0 como sendo o subconjunto de vertices de G à distância par de 1 e V_1 o subconjunto dos vértices de G à distância ímpar, ou seja, $V_0 = \{1,4,6,8\}$ e $V_1 = \{2,3,5,7\}$. Com facilidade se conclui que não existem arestas nem entre vértices de V_0, nem entre vértices de V_1. Logo G é bipartido, com bipartição $V(G) = V_0 \cup V_1$.