Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I - Agrupamento IV — Exame Final - Época de Recurso

4 de fevereiro de 2019

Duração: **2h30**

1. Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \operatorname{arctg}(2x^2 - x)$.

[12pts] (a) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e indique, se existirem, os zeros de f.

[13pts] (b) Estude f quanto à monotonia e determine, se existirem, os extremos locais.

[05pts] (c) Determine o contradomínio de f.

[05pts] (d) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$.

[10pts] (e) Mostre que existe $c \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ tal que $f'(c) = \frac{\pi}{2}$.

2. Determine os seguintes integrais (simplificando o mais possível o resultado):

[18pts] (a) $\displaystyle\int \frac{x^3 + x^2 + 2x + 1}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx$

[17pts] (b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx$ (Sugestão: utilize a mudança de variável dada por $x = \sec t$, indicando o domínio adequado a esta substituição).

3. Considere a função g definida por $g(x) = \displaystyle\int_{-1}^{-x} e^{t^2}\,dt$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

[07pts] (a) Justifique que g é diferenciável em $\mathbb{R}$ e determine $g'(x)$.

[13pts] (b) Justifique que g é integrável em $[0,1]$ e mostre que $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx = \frac{e-1}{2}$.
(Sugestão: Use a técnica de integração por partes)

4. Sejam f e h as funções definidas, respetivamente, por $f(x) = \operatorname{arctg} x$ e $h(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

[10pts] (a) Mostre que $f(x) \leq h(x)$ para todo o $x \geq 0$.

[15pts] (b) Calcule a área da região do plano limitada pelos gráficos das funções f e h e pelas retas de equações $x = 0$ e $x = 1$.

[10pts] 5. (a) Usando a definição, mostre que o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln^3 x}{x}\,dx$ é divergente.

[10pts] (b) Usando um dos critérios de convergência, estude a natureza do integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^x + \ln^3 x}{x}\,dx.$$

6. Verifique se as séries seguintes são convergentes e, em caso de convergência, indique se a convergência é absoluta ou simples:

[10pts] (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\pi}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

[15pts] (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\ln^5 n}$

[15pts] (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(n+1)(-3)^n}$

[15pts] 7. Sabendo que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n-1)$ é uma série de termos positivos convergente, determine, justificando, a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2-1}{5+a_n}$.

Formulário

$(f(x)^p)' = p\,(f(x))^{p-1}\,f'(x)$, com $p \in \mathbb{R}$	
$\left(a^{f(x)}\right)' = f'(x)a^{f(x)}\ln(a)$, com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$(\log_a(f(x)))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)\ln(a)}$, com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
$(\operatorname{sen}(f(x)))' = f'(x)\cos(f(x))$	$(\cos(f(x)))' = -f'(x)\operatorname{sen}(f(x))$
$(\operatorname{tg}(f(x)))' = f'(x)\sec^2(f(x))$	$(\operatorname{cotg}(f(x)))' = -f'(x)\operatorname{cosec}^2(f(x))$
$(\sec(f(x)))' = f'(x)\sec(f(x))\operatorname{tg}(f(x))$	$(\operatorname{cosec}(f(x)))' = -f'(x)\operatorname{cosec}(f(x))\operatorname{cotg}(f(x))$
$(\operatorname{arcsen}(f(x)))' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$	$(\arccos(f(x)))' = -\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$
$(\operatorname{arctg}(f(x)))' = \dfrac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$	$(\operatorname{arccotg}(f(x))' = -\dfrac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$

$1+\operatorname{tg}^2(x) = \sec^2(x)$, para $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$	$1+\operatorname{cotg}^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x)$, para $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$	$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$
$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$	$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$