

Princípios Combinatórios

Universidade de Aveiro 2018/2019

<http://moodle.ua.pt>

1 Princípios combinatórios básicos

- Princípio da bijecção
- Princípio da multiplicação
- Princípio da adição

2 Referências e bibliografia

Alguns exemplos de problemas de contagem

- 1 Quantos números de 4 algarismos se podem escrever com os dígitos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$?
- 2 De quantas maneiras é possível escolher uma equipa de 11 jogadores de futebol de um conjunto de 20 jogadores?
- 3 Qual é a probabilidade de ganhar o Euromilhões?

Princípio da bijecção

Descrição do princípio da bijecção

O princípio da bijecção consiste na identificação dos objectos de um conjunto A com os elementos de outro conjunto B com o qual, em princípio, é mais fácil trabalhar.

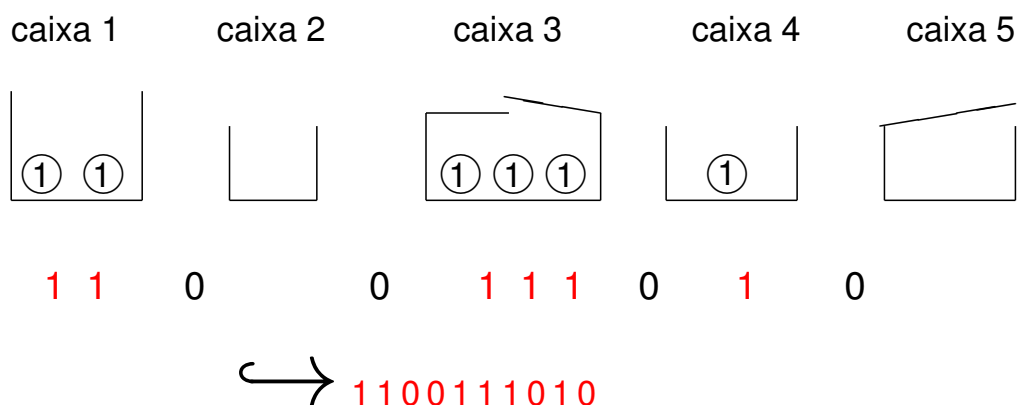
$$f : A \rightarrow B.$$

Note-se que se existe uma bijecção entre A e B , então podemos concluir a igualdade $|A| = |B|$.

Exemplo. Se $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e $B = \{0, 1\}$, então $|\mathcal{P}(X)| = |B^n|$. Com efeito, a função $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow B^n$, definida por $f(A) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ tal que
$$\begin{cases} a_i = 1, & \text{se } x_i \in A \\ a_i = 0, & \text{se } x_i \notin A \end{cases}$$
 é uma bijecção (verificar).

Exemplo

O número de possibilidades de colocar k bolas iguais em n caixas distintas é igual ao número de sequências binárias com $n - 1$ zeros e k uns.

**Princípio da multiplicação****Teorema**

Se A_1, A_2, \dots, A_n são conjuntos não vazios finitos, então o conjunto dos n -uplos $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ é tal que $|A_1 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|$.

Exemplo. Vamos determinar quantos números de 4 algarismos se podem escrever com os dígitos em

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}?$$

Denotando por C o conjunto dos números de 4 algarismos pertencentes a A , então $f: A^4 \rightarrow C$ tal que

$$f(a_1, a_2, a_3, a_4) = \sum_{k=1}^4 a_k \times 10^{k-1}$$

é uma bijecção entre A^4 e C (verificar). Logo, pelos princípios da bijecção e multiplicação, $|C| = |A^4| = |A|^4 = 9^4 = 6561$.

Princípio da multiplicação generalizada

Teorema

Admitindo que um processo de escolha das componentes de um n -uplo se pode fazer em n passos sucessivos, de tal forma que existem

- p_1 escolhas possíveis para a 1ª componente,
 - p_2 escolhas possíveis para a 2ª componente,
 - ...
 - p_n escolhas possíveis para a n -ésima componente,
- então podemos escolher $p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n$ n -uplos distintos.

Exemplo

Vamos determinar de quantas maneiras é possível escolher uma equipa de 11 jogadores de futebol de um conjunto de 20 jogadores?

Interessa a ordem pela qual vão sendo feitas as escolhas.

- Para a 1ª escolha existem 20 jogadores disponíveis,
- para a 2ª escolha existem 19 jogadores disponíveis,
- ...
- para a última escolha restam $20 - 10 = 10$ jogadores disponíveis.

Pelo princípio da multiplicação generalizada, existem $20 \times 19 \times \cdots \times 10 = 6.704425728 \times 10^{11}$ maneiras de escolher uma equipa de 11 jogadores de futebol de um conjunto de 20 jogadores.

Princípio da adição

Observação. Note-se que, relativamente ao exemplo anterior, o problema da determinação do número de maneiras (sequências de decisões) de escolher uma equipa é distinto do problema da determinação do número de equipas que se podem formar.

Descrição do princípio da adição

Se A_1, A_2, \dots, A_n são conjuntos finitos, dois a dois disjuntos (ou seja, tais que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$), então

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|.$$

Exemplo

Vamos determinar quantos números de telefone fixo podem ser atribuídos (de acordo com a actual numeração) na zona de Coimbra, Aveiro e Porto? Note-se que

- os números de telefone fixo da zona de Coimbra são da forma **239** — — — — —,
- os números de telefone fixo da zona de Aveiro são da forma **234** — — — — —,
- e os números de telefone fixo da zona do Porto são da forma **22** — — — — —.

Sejam C , A e P , respectivamente, os conjuntos das sequências de números com este formato. Então, pelo princípio da adição, o número máximo de telefones que podem ser atribuídos nestas **3** zonas é: $|C| + |A| + |P| = 10^6 + 10^6 + 10^7 = 12 \times 10^6$ (a primeira igualdade vem do princípio da multiplicação).

Referências e bibliografia I



D. M. Cardoso, J. Szymanski e M. Rostami, *Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos*, Escolar Editora, 2008.