7. Aplicações Lineares

UA, 7/12/2018

ALGA – Agrup. IV 18/19

Resumo dos Conteúdos

O que é uma aplicação linear?

Definição:

Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ espaços vetoriais reais.

Uma aplicação linear (ou transformação linear) de $\mathcal{V}$ em $\mathcal{W}$ é uma função

$$\begin{array}{rccc} \phi\colon & \mathcal{V} & \to & \mathcal{W} \\ & X & \mapsto & \phi(X) \end{array}$$

tal que

1. $\phi(X+Y) = \phi(X) + \phi(Y), \quad \forall\, X, Y \in \mathcal{V}$;
2. $\phi(c\,X) = c\,\phi(X), \quad \forall\, c \in \mathbb{R}, \ \ \forall\, X \in \mathcal{V}$.

Definição:

Se $\mathcal{W} = \mathcal{V}$, então ϕ diz-se um operador linear (ou endomorfismo) de $\mathcal{V}$.

Exemplos de aplicações lineares

1. Em $\mathbb{R}^2$, a reflexão em relação ao eixo dos xx é dada pelo operador linear
$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x,-y) \end{array}$$

2. A rotação em $\mathbb{R}^2$ em torno da origem de ângulo θ é o operador linear
$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x\cos(\theta) - y\sin(\theta), x\sin(\theta) + y\cos(\theta)) \end{array}$$

3. A derivação de polinómios é a aplicação linear
$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathcal{P}_n & \to & \mathcal{P}_{n-1} \\ & p(x) & \mapsto & p'(x) \end{array}$$

4. A primitiva (nula em a) de um polinómio é obtida pela aplicação linear
$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathcal{P}_n & \to & \mathcal{P}_{n+1} \\ & p(x) & \mapsto & \int_a^x p(t)\,dt \end{array}$$

Propriedades e caraterização de uma aplicação linear

Proposição:

Seja $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear. Então $\phi(0_{\mathcal{V}}) = 0_{\mathcal{W}}$.

Exercício: Demonstre a proposição anterior.

Teorema:

$\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ é uma aplicação linear se e só se

$$\phi\left(c_1 X_1 + \cdots + c_k X_k\right) = c_1 \phi(X_1) + \cdots + c_k \phi(X_k),$$

para quaisquer $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{V}$ e $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$.

Corolário:

Sejam $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear e $\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma base de $\mathcal{V}$. Então, $\phi(X)$ é completamente determinado por $\phi(X_1), \ldots, \phi(X_n)$.

Exemplo

Questão:

Determine a aplicação linear $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$, com $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{W} = \mathbb{R}^3$, sabendo que $\phi(1,1) = (2,3,1)$ e $\phi(1,0) = (1,2,1)$?

- $(1,1)$ e $(1,0)$ são l.i. e, portanto, $\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = \big((1,1),(1,0)\big)$ é base de $\mathbb{R}^2$;
- $\phi\big(c_1(1,1) + c_2(1,0)\big) = c_1\phi(1,1) + c_2\phi(1,0)$, para todo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$;
- se $(x_1, x_2) = c_1(1,1) + c_2(1,0) = (c_1 + c_2, c_1)$, então

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = x_1 \\ \qquad c_1 = x_2 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = x_2 \\ c_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

- $\begin{aligned}[t] \phi(x_1, x_2) &= x_2\phi(1,1) + (x_1 - x_2)\phi(1,0) \\ &= x_2(2,3,1) + (x_1 - x_2)(1,2,1) \\ &= (x_1 + x_2, 2x_1 + x_2, x_1). \end{aligned}$

Aplicações lineares e vetores de coordenadas

Sejam $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear, $X \in \mathcal{V}$ e $\phi(X) \in \mathcal{W}$, $\mathcal{B}_\mathcal{V} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma base de $\mathcal{V}$ e $\mathcal{B}_\mathcal{W}$ uma base de $\mathcal{W}$.

Qual a relação entre os vetores de coordenadas $[X]_{\mathcal{B}_\mathcal{V}}$ e $[\phi(X)]_{\mathcal{B}_\mathcal{W}}$?

$$
[X]_{\mathcal{B}_\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}
\begin{array}{rcl}
\Rightarrow \quad X & = & a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n \\
\Rightarrow \quad \phi(X) & = & a_1 \phi(X_1) + \cdots + a_n \phi(X_n) \\
\Rightarrow \quad [\phi(X)]_{\mathcal{B}_\mathcal{W}} & = & a_1 \left[\phi(X_1)\right]_{\mathcal{B}_\mathcal{W}} + \cdots + a_n \left[\phi(X_n)\right]_{\mathcal{B}_\mathcal{W}} \\
\Rightarrow \quad [\phi(X)]_{\mathcal{B}_\mathcal{W}} & = & \underbrace{\begin{bmatrix} [\phi(X_1)]_{\mathcal{B}_\mathcal{W}} & \cdots & [\phi(X_n)]_{\mathcal{B}_\mathcal{W}} \end{bmatrix}}_{[\phi]_{\mathcal{B}_\mathcal{W} \leftarrow \mathcal{B}_\mathcal{V}}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{[X]_{\mathcal{B}_\mathcal{V}}}
\end{array}
$$

Matriz representativa de uma aplicação linear

Teorema:

Sejam $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear,
$\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma base de $\mathcal{V}$ e $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ uma base de $\mathcal{W}$.
Para cada $X \in \mathcal{V}$,

$$\boxed{[\phi(X)]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}} = [\phi]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}} \leftarrow \mathcal{B}_{\mathcal{V}}} [X]_{\mathcal{B}_{\mathcal{V}}}}$$

onde

$$\boxed{[\phi]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}} \leftarrow \mathcal{B}_{\mathcal{V}}} = \begin{bmatrix} [\phi(X_1)]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}} & \cdots & [\phi(X_n)]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}} \end{bmatrix}} \; .$$

$[\phi]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}} \leftarrow \mathcal{B}_{\mathcal{V}}}$ é dita a matriz (representativa) de ϕ relativa às bases $\mathcal{B}_{\mathcal{V}}$ e $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$.
Esta é a matriz cujas colunas são os vetores das coordenadas na base $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ das imagens dos vetores da base $\mathcal{B}_{\mathcal{V}}$.

Exemplo: determinação de uma matriz representativa

Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ aplicação linear tal que $\phi(1,1) = (2,3,1)$ e $\phi(1,0) = (1,2,1)$, (exemplo do slide 6).

Objetivo: Determinar a matriz de ϕ relativa às bases $\mathcal{B}_\mathcal{V} = \big((1,1),(1,0)\big)$ de $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}_\mathcal{W} = ((1,0,1),(1,1,0),(0,1,1))$ de $\mathcal{W} = \mathbb{R}^3$.

Pela definição,

$$[\phi]_{\mathcal{B}_\mathcal{W} \leftarrow \mathcal{B}_\mathcal{V}} = \big[[\phi(1,1)]_{\mathcal{B}_\mathcal{W}} \ [\phi(1,0)]_{\mathcal{B}_\mathcal{W}}\big] .$$

Ora,

$$[\phi(1,1)]_{\mathcal{B}_\mathcal{W}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow (2,3,1) = \alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(1,1,0) + \alpha_3(0,1,1)$$

$$[\phi(1,0)]_{\mathcal{B}_\mathcal{W}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow (1,2,1) = \beta_1(1,0,1) + \beta_2(1,1,0) + \beta_3(0,1,1)$$

Exemplo – continuação

Obtêm-se os sistemas $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 3 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 1 \end{cases}$ e $\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = 1 \\ \beta_2 + \beta_3 = 2 \\ \beta_1 + \beta_3 = 1 \end{cases}$

que se podem resolver em simultâneo utilizando a matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

.

Logo,

$$[\phi]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}} \leftarrow \mathcal{B}_{\mathcal{V}}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Determinação da matriz de uma aplicação linear $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (método prático)

Analogamente ao exemplo anterior,

Se $\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = (X_1, \ldots, X_n)$ é uma base de $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}_{\mathcal{W}} = (Y_1, \ldots, Y_m)$ é uma base de $\mathcal{W} = \mathbb{R}^m$ e $\mathcal{C}_m$ é a base canónica de $\mathbb{R}^m$, então

$$\left[M_{\mathcal{C}_m \leftarrow \mathcal{B}_{\mathcal{W}}} \,\middle|\, [\phi]_{\mathcal{C}_m \leftarrow \mathcal{B}_{\mathcal{V}}} \right] = \left[Y_1 \cdots Y_m \middle| \phi(X_1) \cdots \phi(X_n) \right] \underset{\uparrow}{\sim} \left[I_m \,\middle|\, [\phi]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}} \leftarrow \mathcal{B}_{\mathcal{V}}} \right]$$

método de eliminação de Gauss-Jordan

Matrizes de uma aplicação linear e mudança de bases

As matrizes da aplicação linear $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ relativas às bases $\mathcal{B}_{\mathcal{V}}$ de $\mathcal{V}$ e $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ de $\mathcal{W}$ e, respetivamente, às bases $\mathcal{T}_{\mathcal{V}}$ de $\mathcal{V}$ e $\mathcal{T}_{\mathcal{W}}$ de $\mathcal{W}$, satisfazem a

$$\boxed{[\phi]_{\mathcal{T}_{\mathcal{W}}\leftarrow\mathcal{T}_{\mathcal{V}}} = M_{\mathcal{T}_{\mathcal{W}}\leftarrow\mathcal{B}_{\mathcal{W}}}[\phi]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}\leftarrow\mathcal{B}_{\mathcal{V}}}M_{\mathcal{B}_{\mathcal{V}}\leftarrow\mathcal{T}_{\mathcal{V}}}}$$

onde $M_{\mathcal{B}_{\mathcal{V}}\leftarrow\mathcal{T}_{\mathcal{V}}}$ e $M_{\mathcal{T}_{\mathcal{W}}\leftarrow\mathcal{B}_{\mathcal{W}}}$ são as matrizes de mudança de bases de $\mathcal{T}_{\mathcal{V}}$ para $\mathcal{B}_{\mathcal{V}}$, em $\mathcal{V}$, e de $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ para $\mathcal{T}_{\mathcal{W}}$, em $\mathcal{W}$, respetivamente.

Diagrama:

$$\phi: \quad \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$$

$$\begin{tikzcd}
{[X]_{\mathcal{T}_{\mathcal{V}}}} \arrow[r, "{[\phi]_{\mathcal{T}_{\mathcal{W}}\leftarrow\mathcal{T}_{\mathcal{V}}}}"] \arrow[d, "M_{\mathcal{B}_{\mathcal{V}}\leftarrow\mathcal{T}_{\mathcal{V}}}"'] & {[\phi(X)]_{\mathcal{T}_{\mathcal{W}}}} \\
{[X]_{\mathcal{B}_{\mathcal{V}}}} \arrow[r, "{[\phi]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}\leftarrow\mathcal{B}_{\mathcal{V}}}}"'] & {[\phi(X)]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}}} \arrow[u, "M_{\mathcal{T}_{\mathcal{W}}\leftarrow\mathcal{B}_{\mathcal{W}}}"']
\end{tikzcd}$$

Exemplo ilustrativo da relação obtida no slide anterior

Sejam $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ linear tal que $\phi(1,1) = (2,3,1)$, $\phi(1,0) = (1,2,1)$ com $\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = \big((1,1),(1,0)\big)$ base de $\mathcal{V}$, $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$ bases canónicas de $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{W} = \mathbb{R}^3$, respetivamente. Logo,

$$[\phi]_{\mathcal{C}_3 \leftarrow \mathcal{B}_{\mathcal{V}}} = \big[[\phi(1,1)]_{\mathcal{C}_3} \quad [\phi(1,0)]_{\mathcal{C}_3}\big] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como $M_{\mathcal{B}_{\mathcal{V}} \leftarrow \mathcal{C}_2} = M^{-1}_{\mathcal{C}_2 \leftarrow \mathcal{B}_{\mathcal{V}}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$,

$$[\phi]_{\mathcal{C}_3 \leftarrow \mathcal{C}_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{[\phi]_{\mathcal{C}_3 \leftarrow \mathcal{B}_{\mathcal{V}}}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{M_{\mathcal{B}_{\mathcal{V}} \leftarrow \mathcal{C}_2}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Daqui a determinação[1] de $\phi(X)$, com $X = (x_1, x_2)$, faz-se com facilidade:

$$\phi(X) = [\phi(X)]_{\mathcal{C}_3} = [\phi]_{\mathcal{C}_3 \leftarrow \mathcal{C}_2}[X]_{\mathcal{C}_2} = [\phi]_{\mathcal{C}_3 \leftarrow \mathcal{C}_2} X = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

[1] Compare com o processo usado no slide 6

Operadores lineares e matrizes semelhantes

Para um operador linear $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ consideram-se, geralmente, matrizes relativas a uma única base. Assim, sendo $\mathcal{B}$ e $\mathcal{T}$ duas bases de $\mathcal{V}$,

$$\begin{aligned} [\phi]_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{T}} &= M_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{B}}\,[\phi]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}\,M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{T}} \\ &= (M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{T}})^{-1}[\phi]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}\,M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{T}}. \end{aligned}$$

Teorema:

Duas matrizes são semelhantes se e só se são matrizes representativas do mesmo operador linear.

Matriz de mudança de base como matriz do operador identidade

Definição:

Chama-se identidade de $\mathcal{V}$ ao operador linear $\mathrm{id}: \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ tal que $\mathrm{id}(X) = X$.

Observe que:

- A matriz identidade, de ordem igual à dimensão de $\mathcal{V}$, é a matriz do operador identidade de $\mathcal{V}$ relativa a qualquer base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{V}$, *i.e.*,

$$I = [\mathrm{id}]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}}$$

- A matriz do operador identidade relativa às bases $\mathcal{T}$ e $\mathcal{B}$ de $\mathcal{V}$ é a matriz de mudança da base $\mathcal{T}$ para a base $\mathcal{B}$, *i.e.*,

$$[\mathrm{id}]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{T}} = M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{T}}$$

Núcleo e imagem de uma aplicação linear

Definições:

Seja $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear.

- O núcleo de ϕ é o conjunto
$$\ker(\phi) = \{X \in \mathcal{V} : \ \phi(X) = 0_{\mathcal{W}}\}.$$
- A imagem de ϕ é o conjunto
$$\operatorname{im}(\phi) = \{\phi(X) : \ X \in \mathcal{V}\}$$
de todos os vetores de $\mathcal{W}$ que são imagem de algum vetor de $\mathcal{V}$.

Teorema:

Seja $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear. Então

- $\ker(\phi)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{V}$;
- $\operatorname{im}(\phi)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{W}$.

Exercício: Demonstre o teorema anterior.

Aplicação linear injetiva, sobrejetiva e isomorfismo

Recorde que uma função $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$:

- é injetiva, se $\forall\, X_1, X_2 \in \mathcal{V}$, $\phi(X_1) = \phi(X_2) \;\Rightarrow\; X_1 = X_2$
- é sobrejetiva, se $\operatorname{im}(\phi) = \mathcal{W}$.
- é bijetiva, se for injetiva e sobrejetiva.

Teorema:

Seja $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear. Então

1. ϕ é injetiva $\iff$ $\ker(\phi) = \{0_{\mathcal{V}}\}$ $\iff$ $\dim \ker(\phi) = 0$.
2. ϕ é sobrejetiva $\iff$ $\dim \operatorname{im}(\phi) = \dim \mathcal{W}$.

Definição:

Uma aplicação linear bijetiva diz-se um isomorfismo.

Núcleo *versus* espaço nulo & Imagem *versus* espaço das colunas

Teorema:

Sejam $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear, $\dim \mathcal{V} = n$, $\dim \mathcal{W} = m$, $\mathcal{B}_{\mathcal{V}}$ uma base de $\mathcal{V}$, $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ uma base de $\mathcal{W}$ e $A = [\phi]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}} \leftarrow \mathcal{B}_{\mathcal{V}}}$. Então,

- $X \in \ker(\phi) \iff [X]_{\mathcal{B}_{\mathcal{V}}} \in \mathcal{N}(A)$
- $Y \in \operatorname{im}(\phi) \iff [Y]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}} \in \mathcal{C}(A)$

onde $\mathcal{N}(A)$ e $\mathcal{C}(A)$ são, respetivamente, o espaço nulo e o espaço das colunas de A (matriz $m \times n$ representativa de ϕ).

Exercício: Demonstre o teorema anterior.

Corolário:

Seja A é uma (qualquer) matriz representativa de ϕ. Então

1. $\dim \ker(\phi) = \dim \mathcal{N}(A) = \operatorname{nul}(A)$.
2. $\dim \operatorname{im}(\phi) = \dim \mathcal{C}(A) = \operatorname{car}(A)$.

Teorema das dimensões

Teorema (das dimensões):

Seja $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear. Então

$$\dim \ker(\phi) + \dim \operatorname{im}(\phi) = \dim \mathcal{V}.$$

Corolário:

Seja $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear

- Se $\dim \mathcal{V} < \dim \mathcal{W}$, então ϕ não é sobrejetiva (pode ser injetiva);
- Se $\dim \mathcal{V} > \dim \mathcal{W}$, então ϕ não é injetiva (pode ser sobrejetiva);
- Se $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W}$, então

  ϕ é injetiva $\iff$ ϕ é sobrejetiva $\iff$ ϕ é um isomorfismo;
- Se ϕ é um isomorfismo, então $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W}$.

Isomorfismo e invertibilidade

Teorema:

Sejam $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear, $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W} = n$, $\mathcal{B}_{\mathcal{V}}$ uma base de $\mathcal{V}$ e $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ uma base de $\mathcal{W}$. Então,

$$\phi \text{ é um isomorfismo} \iff [\phi]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}} \leftarrow \mathcal{B}_{\mathcal{V}}} \text{ é invertível.}$$

Além disso, se ϕ é um isomorfismo, então $\phi^{-1} : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ é uma aplicação linear e

$$[\phi^{-1}]_{\mathcal{B}_{\mathcal{V}} \leftarrow \mathcal{B}_{\mathcal{W}}} = \left([\phi]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}} \leftarrow \mathcal{B}_{\mathcal{V}}}\right)^{-1}.$$

Exercício: Sejam $\mathcal{B}$ uma base de $\mathcal{V}$, com $\dim \mathcal{V} = n$, e

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & X & \mapsto & \phi(X) = [X]_{\mathcal{B}}\,. \end{array}$$

Verifique que ϕ é um isomorfismo e que $[\phi]_{\mathcal{C}_n \leftarrow \mathcal{B}} = I_n$.