Matemática Discreta

Elementos de Teoria dos Grafos - 2

Universidade de Aveiro 2018/2019

http://moodle.ua.pt

Isomorfismos

• Se excluirmos a etiquetação dos vértices e arestas, verifica-se que existem grafos "distintos" que admitem representações idênticas. Tais grafos designam-se por grafos isomorfos

Definição

Dois grafos $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ e $H = (V(H), E(H), \psi_H)$ dizem-se isomorfos, denotando-se esta relação de isomorfismo por $G \cong H$, se existirem duas bijecções $\phi : V(G) \to V(H)$ e $\theta : E(G) \to E(H)$ tais que

$$\psi_G(e) = uv \text{ se e só se } \psi_H(\theta(e)) = \phi(u)\phi(v).$$

• Observação: dois grafos dizem-se isomorfos se existe uma bijecção entre os respectivos conjuntos de vértices e uma bijecção entre os respectivos conjuntos de arestas que preservam as relações de adjacência e de incidência.

Exemplo

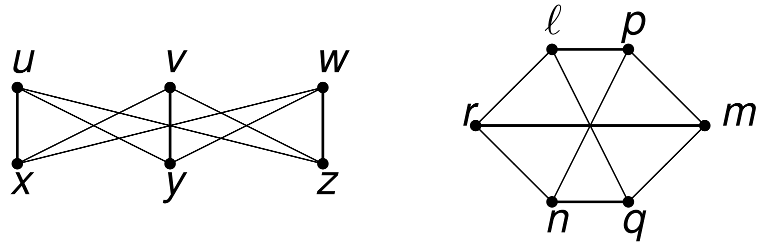
• A relação de isomorfismo entre grafos é uma relação de equivalência (verificar!)

Definição

Designa-se por isomorfismo entre dois grafos simples G e H uma bijecção $\phi : V(G) \to V(H)$ tal que

$$uv \in E(G) \text{ se e só se } \phi(u)\phi(v) \in E(H).$$

Exercício 1. Mostrar que os dois grafos seguintes são isomorfos.



Automorfismos de grafos

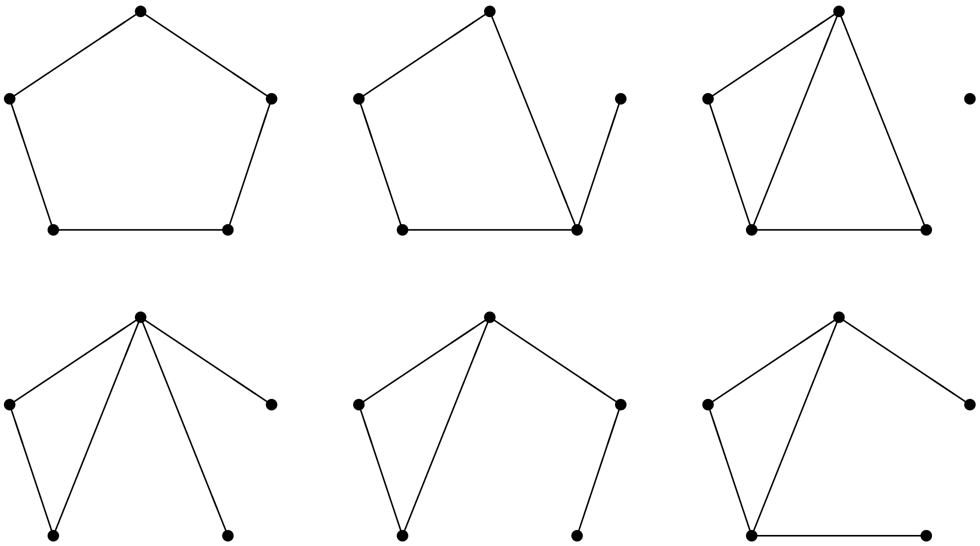
Exercício 2. Mostrar que os isomorfismos entre grafos preservam os graus dos vértices.

Definição (de automorfismo de um grafo)

Designa-se por automorfismo de um grafo G toda a bijecção $\phi : V(G) \to V(G)$ que preserva o número de arestas entre pares de vértices.

- Se G é um grafo simples, um automorfismo é um isomorfismo entre G e G.
- Se G é um multigrafo, para um dado automorfismo podem existir vários isomorfismos entre G e G.
- Qualquer grafo admite pelo menos um automorfismo que é a função identidade.

Representação gráfica de todos os grafos simples não isomorfos, com 5 vértices e 5 arestas.



Passeios em grafos

Definição (de passeio)

Dado um grafo G designa-se por passeio em G toda a sequência não vazia

$$P = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_k$$

tal que $v_0, v_1, \dots, v_k \in V(G), e_1, e_2, \dots, e_k \in E(G)$ e os vértices v_{i-1} e v_i são vértices extremos da aresta e_i, para $i = 1, \dots, k$.

- O vértice v_0 designa-se por vértice inicial do passeio P e v_k designa-se por vértice final do passeio P. Por sua vez, os vértices $v_1, \dots, v_{k-1}$ designam-se por vértices intermédios do passeio P. Neste caso diz-se que P é um passeio entre os vértices v_0 e v_k ou um passeio-(v_0, v_k).

Trajetos, caminhos, circuitos e ciclos

- Num grafo simples um passeio é determinado pela sequência dos sucessivos vértices, isto é, $P = v_0 v_1 \dots v_k$.

Definição (de trajecto e caminho)

Um trajecto é um passeio sem arestas repetidas.
Um caminho é um passeio que não repete vértices, com eventual excepção do vértice inicial e do vértice final, isto é,

- $v_i \neq v_j \quad i, j \in \{1, \dots, k-1\}, i \neq j$;
- $v_i \neq v_j \quad i \in \{0, k\}, j \in \{1, \dots, k-1\}$.

Um caminho diz-se fechado quando o vértice inicial coincide com o vértice final.

Definição (de circuito e ciclo)

Um circuito ou trajecto fechado é um trajecto com pelo menos uma aresta e tal que $v_0 = v_k$. Um ciclo é um caminho fechado.

Comprimento de passeios, trajetos e caminhos

Definição (de comprimento de um passeio, trajecto e caminho)

Dado um passeio P de um grafo G designa-se por comprimento de P e denota-se por $comp(P)$ o número de arestas (com eventual repetição) que o constitui. No caso dos caminhos (e também nos trajectos) o comprimento coincide exactamente com o respectivo número de arestas.

Exemplo: uma aresta é um caminho de comprimento 1 e um vértice é um caminho de comprimento 0.

Distância entre vértices

Definição (de distância entre vértices)

Dados dois vértices $x, y \in V(G)$, denotando por $\mathcal{P}_{x,y}$ o conjunto de todos os caminhos$-(x, y)$ de G, designa-se por distância entre vértices de G a função

$$dist_G : V(G) \times V(G) \to \{0, \dots, \nu(G) - 1, \infty\}$$

tal que $dist_G(x, y) = \begin{cases} min_{P \in \mathcal{P}_{x,y}} comp(P), & \text{se } \mathcal{P}_{x,y} \neq \emptyset, \\ \infty, & \text{se } \mathcal{P}_{x,y} = \emptyset. \end{cases}$

Teorema

Seja G um grafo simples. Se $\delta(G) \geq 2$, então G contém um caminho P e um ciclo C tais que $comp(P) \geq \delta(G)$ e $comp(C) \geq \delta(G) + 1$.

Cintura de um grafo e excentricidade de um vértice

Definição (de cintura)

Dado um grafo G designa-se por cintura de G e denota-se por $g(G)$ o comprimento do circuito de menor comprimento em G, caso tal circuito exista. Caso contrário, diz-se que o grafo tem cintura infinita e escreve-se $g(G) = \infty$.

Definição (de excentricidade de um vértice)

Se G é um grafo e v um vértice, então a maior distância entre v e todos os outros vértices de G designa-se por excentricidade de v e denota-se por $e_G(v)$ ou $e(v)$. Mais formalmente,

$$e(v) = \max_{u \in V(G)} dist_G(u, v).$$

Diâmetro e raio de um grafo

Definição (de diâmetro e raio)

Dado um grafo G, a maior excentricidade dos seus vértices designa-se por diâmetro e denota-se por $diam(G)$. Por sua vez, a menor excentricidade dos vértices de G designa-se por raio e denota-se por $r(G)$, ou seja,

- $diam(G) = \max_{u \in V(G)} e(u)$;
- $r(G) = \min_{v \in V(G)} e(v)$.

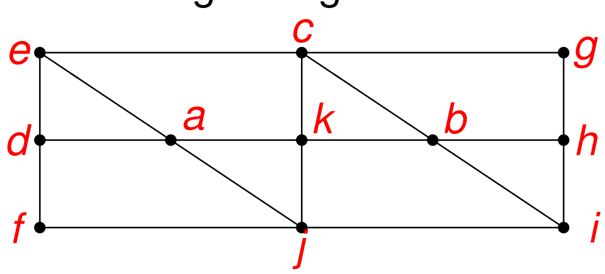
Exercício. Provar que dado um grafo arbitrário G se verificam as desigualdades $r(G) \leq diam(G) \leq 2r(G)$.

Vértice central e centro de um grafo

Definição (de vértice central e centro)

Um vértice $v \in V(G)$ diz-se central se a sua distância ao vértice mais distante é mínima, ou seja, $e(v) = r(G)$. O conjunto dos vértices centrais designa-se por centro do grafo.

Exercício. Considere o seguinte grafo G.



1. Determine a cintura do grafo G.
2. Determine a excentricidade dos vértices de G.
3. Determine o centro de G.

Subgrafos

Definição (de subgrafo)

Dados dois grafos G e H diz-se que H é um subgrafo de G e denota-se por $H \subseteq G$ se $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$ e ψ_H é a restrição de ψ_G ao conjunto $E(H)$.

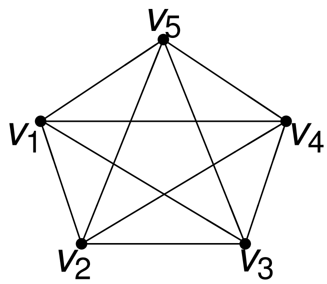
- Se $H \subseteq G$ e $H \neq G$, então H designa-se por subgrafo próprio de G e denota-se por $H \subset G$.
- Se H é um subgrafo de G, diz-se que G é supergrafo de H.

Definição (de subgrafo abrangente)

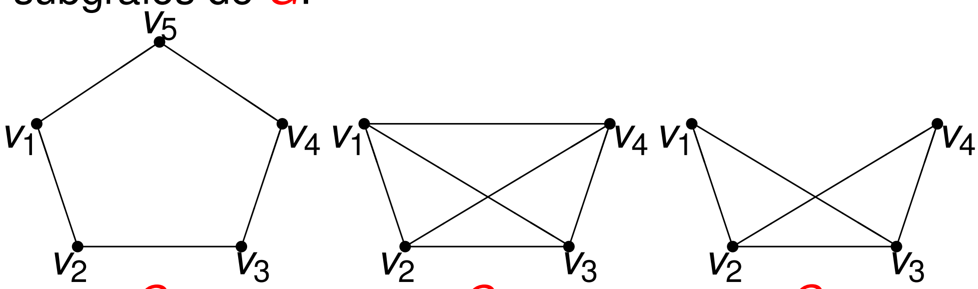
Diz-se que um grafo H é um subgrafo abrangente (ou de suporte) do grafo G se $H \subseteq G$ e $V(H) = V(G)$.

Exemplos

Considere o seguinte grafo G.



Alguns subgrafos de G:



G_1 G_2 G_3

Matemática Discreta
└ Subgrafos, subgrafos induzidos e subgrafos abrangentes

Subgrafos induzidos

Definição (de subgrafo induzido)

Dado um grafo G e $\emptyset \neq \widehat{V} \subseteq V(G)$ designa-se por subgrafo de G induzido por $\widehat{V}$ e denota-se por $G[\widehat{V}]$, o subgrafo cujo conjunto de vértices é $\widehat{V}$ e o conjunto de arestas coincide com as arestas de G com extremos em $\widehat{V}$.

- Denota-se por $G[V - \widehat{V}]$ ou, simplesmente, $G - \widehat{V}$ o subgrafo induzido após a eliminação dos vértices do subconjunto $\widehat{V}$ e de todas as arestas incidentes em $\widehat{V}$.
- Se $\widehat{V} = \{v\}$, escreve-se simplesmente $G - v$.

Definição (de subgrafo induzido pelas arestas)

Dado um grafo G e $\emptyset \neq \widehat{E} \subseteq E$, designa-se por subgrafo de G induzido pelo subconjunto de arestas $\widehat{E}$ e denota-se por $G[\widehat{E}]$ o subgrafo cujo conjunto de arestas é $\widehat{E}$ e o conjunto de vértices é constituído pelos vértices extremos das arestas de $\widehat{E}$.

Subgrafos abrangentes

• Denota-se por $G - \widehat{E}$ o subgrafo abrangente cujo conjunto de arestas é $E - \widehat{E}$. Se $\widehat{E} = \{e\}$ então usa-se a notação $G - e$.

• Obs.1: Em geral $G[E - \widehat{E}]$ e $G - \widehat{E}$ são distintos.

• Obs.2: Se $G = (V, E)$ então $G = G[V]$, mas $G = G[E]$ se e só se G não tem vértices isolados.

Relação de conexidade

Definição (de grafo conexo)

Um grafo diz-se conexo se entre cada par de vértices existe um caminho que os une. Caso contrário, o grafo diz-se não conexo (ou desconexo).

Definição (de vértices conexos)

Dado um grafo G, dois vértices $u, v \in V(G)$ dizem-se conexos se existe um caminho$-(u, v)$ em G.

• Num grafo conexo todos os pares de vértices distintos são conexos. A relação de conexidade entre os vértices é uma relação de equivalência $(\sim)$ sobre o conjunto de vértices $V(G)$:

$$\forall x, y \in V(G), x \sim y \text{ sse } x \text{ e } y \text{ são vértices conexos}$$

Componentes conexas

- Supondo que $V(G)$ se parte nas classes de equivalência $V_1, V_2, \ldots, V_k$, designa-se por componente conexa (ou, simplesmente, componente) de G cada um dos subgrafos induzidos $G[V_1], G[V_2], \ldots, G[V_k]$.

Notação: $cc(G)$ denota o número de componentes conexas de um grafo G.

Obs: Sendo G um grafo, $cc(G) = 1$ se e só se G é conexo.

- Podemos definir componente conexa como sendo um subgrafo conexo maximal.

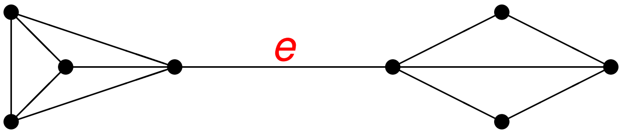
- Se G é um grafo conexo de ordem n, então $|E(G)| \geq n - 1$.

Pontes

Definição (de ponte)

Uma aresta e de um grafo G diz-se uma ponte ou uma aresta de corte se $cc(G - e) > cc(G)$. Isto é, a aresta e é uma ponte de G se a eliminação de e aumenta o número de componentes de G.

Exemplo. A aresta e, a seguir representada, é uma ponte.



Propriedades das pontes

Teorema

Se G é um grafo e $uv \in E(G)$, então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. a aresta uv é uma ponte de G,
2. $cc(G - uv) = cc(G) + 1$,
3. os vértices u e v não são conexos em $G - uv$,
4. a aresta uv não está contida em nenhum circuito de G.

Referências bibliográficas I

D. M. Cardoso, J. Szymanski e M. Rostami, *Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos*, Escolar Editora, 2008.