Matemática Discreta

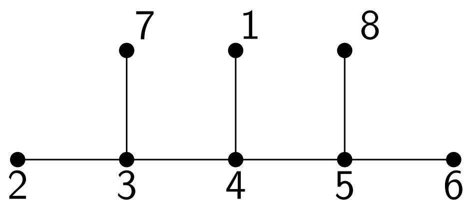
Elementos de Teoria dos Grafos - 5

Universidade de Aveiro 2018/2019

http://moodle.ua.pt

Código de Prüfer

- Vamos denotar por $\mathcal{T}(G)$ o conjunto das árvores abrangentes de um grafo G.
- Código de Prüfer: Seja $T \in \mathcal{T}(G)$. Uma vez que $V = V(K_n)$ é um conjunto totalmente ordenado pela relação $\leq$, podemos eliminar sucessivamente, para $i = 1, \ldots, n-2$, o menor vértice de grau 1, s_i, da árvore $T - \{s_1, \ldots, s_{i-1}\}$, cujo único vizinho é t_i e, desta forma, construimos o $(n-2)$-uplo $(t_1, t_2, \ldots, t_{n-2})$.
Por exemplo, para a árvore representado na figura a seguir, obtém-se o código de Prüfer é $(4, 3, 5, 3, 4, 5)$.



i	1	2	3	4	5	6
s_i	1	2	6	7	3	4
t_i	4	3	5	3	4	5

Figure: Código de Prüfer para a árvore representada.

Algoritmo formal para determinação do código de Prüfer

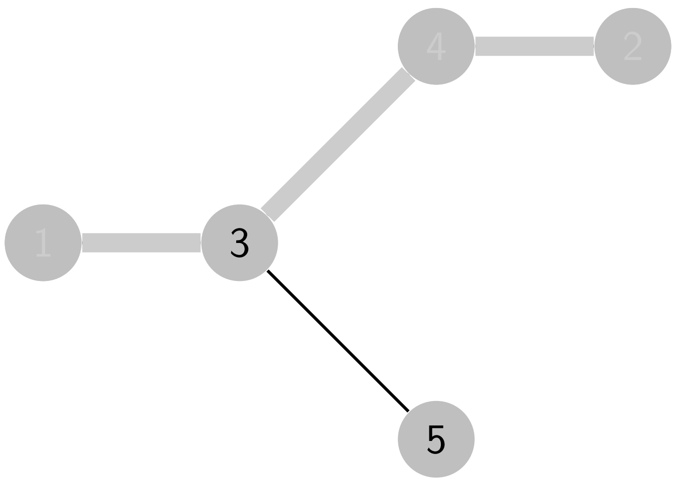
- Mais formalmente, o algoritmo para a determinação do código de Prüfer pode descrever-se da seguinte maneira:
  - Algoritmo: codificação de Prüfer(T);
  - $R \leftarrow T$; $n \leftarrow \nu(T)$;
  - Para $i = 1$ até $n - 2$ **fazer**
    1. $s \leftarrow \min\{x \in V(R) : d_R(x) = 1\}$;
    2. $t[i] \leftarrow N_R(s)$;
    3. $R \leftarrow R - s$;
  - Devolver t;
  - Fim do algoritmo.
- Como consequência do método de codificação, cada um dos vértices v da árvore codificada T, aparece $d_T(v) - 1$ vezes no $(n-2)$-uplo t.

Algoritmo de descodificação do código Prüfer

- O algoritmo de descodificação tem em conta que cada vértice v da árvore T de ordem n aparece $d_T(v) - 1$ vezes no código $t = (t_1, \ldots, t_{n-2})$. Logo, as folhas da árvore (ou seja, os vértices de grau 1) não aparecem no código.
  - Algoritmo: descodificação de Prüfer(t, n);
  - $R \leftarrow \{1, 2, \ldots, n\}$, $V(T) \leftarrow R$ e $E(T) \leftarrow \emptyset$;
  - Para $i = 1, \ldots, n-2$, **fazer**
    1. $t^* \leftarrow (t_i, \ldots, t_{n-2})$;
    2. **Se** $s_i = \min\{s \in R : s \notin t^*\}$, **então** $E(T) \leftarrow E(T) \cup \{s_i t_i\}$;
    3. $R \leftarrow R \setminus \{s_i\}$;
  - Ligar os vértices v do grafo corrente T cujos graus, $d_T(v)$, diferem em uma unidade do valor calculado a partir de t;
  - Devolver T.
  - Fim do algoritmo.

Exemplo de determinação do código de Prüfer

A árvore T

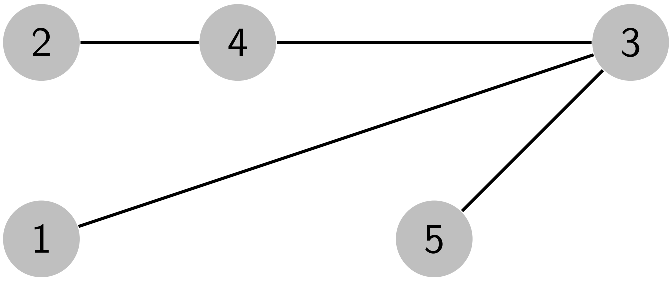


O código de Prüfer da árvores T: $t = (3, 4, 3)$.

Exemplo de descodificação do código Prüfer

Determinação da árvore T de ordem 5 com código $t = (3, 4, 3)$

Considerando $t = (3, 4, 3)$ e $V(T) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, obtém-se:



Teorema de Cayley

Teorema (de Cayley)

O número de árvores abrangentes do grafo completo de ordem $n \in \mathbb{N}$ é dado por

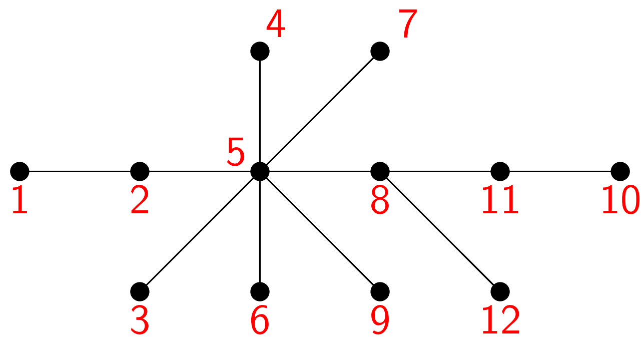
$$\tau(K_n) = n^{n-2}.$$

Prova: A prova baseia-se no estabelecimento de uma bijecção entre o conjunto de todas as árvores abrangentes do grafo completo de ordem $n \geq 2$, $\mathcal{T}(G)$, e o conjunto $(n-2)$-uplos $(t_1, t_2, \ldots, t_{n-2})$, tais que $1 \leq t_i \leq n$, ou seja, o produto cartesiano $[n]^{n-2}$, sabendo que cada um deles corresponde ao código de Prüfer de uma única árvore abrangente de K_n e o recíproco também é verdadeiro.

Exercícios

(a) Determinar a árvore cujo código de Prüfer é $(5, 3, 1, 7, 1, 7)$.

(b) Determinar o código de Prüfer para a seguinte árvore T:



Referências bibliográficas I

D. M. Cardoso, J. Szymanski e M. Rostami, *Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos*, Escolar Editora, 2008.