Universidade de Aveiro
Resolução da 1ª Prova de Av. Discreta de Cálculo I - Agrupamento IV
10 de novembro de 2017
Duração: 2h

1. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+\operatorname{sen}^2(x-1))}{x-1} & \textit{se} \quad x<1\\[2ex] \arccos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \textit{se} \quad x\geq 1.\end{cases}$$

(a) A função f é contínua em $x=1$? Justifique convenientemente.

Observe-se que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln(1+\operatorname{sen}^2(x-1))}{x-1}$$

e, portanto, temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.
Uma vez que

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{(\ln(1+\operatorname{sen}^2(x-1)))'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{2\operatorname{sen}(x-1)\cos(x-1)}{1+\operatorname{sen}^2(x-1)}}{1}=0,$$

então, pela Regra de Cauchy, tem-se que:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln(1+\operatorname{sen}^2(x-1))}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(\ln(1+\operatorname{sen}^2(x-1)))'}{(x-1)'}=0.$$

Por outro lado, como

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\arccos\left(\frac{1}{x}\right)=\arccos(1)=0$$

podemos concluir que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=0=f(1),$$

e, portanto, f é contínua em $x=1$.

(b) Usando a definição de derivada lateral, determine $f'_+(1)$.

Usando a definição de derivada lateral sabemos que:

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\arccos\left(\frac{1}{x}\right)}{x-1}.$$

Como temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ e

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\arccos\left(\frac{1}{x}\right)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=+\infty,$$

conclui-se da Regra de Cauchy que

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\arccos\left(\frac{1}{x}\right)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\arccos\left(\frac{1}{x}\right)'}{(x-1)'}=+\infty.$$

(c) Mostre que existe $c \in]\sqrt{2}, 2[$ tal que $f'(c) = \dfrac{\pi}{12(2-\sqrt{2})}$.

Nota: $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ e $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Uma vez que

- f é contínua em $[\sqrt{2}, 2]$;
- f é diferenciável em $]\sqrt{2}, 2[$;

então, pelo Teorema de Lagrange, podemos concluir que

$$\exists c \in]\sqrt{2}, 2[: \quad f'(c) = \frac{f(2) - f(\sqrt{2})}{2 - \sqrt{2}}.$$

Como $f(2) = \frac{\pi}{3}$ e $f(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$, podemos concluir que

$$\exists c \in]\sqrt{2}, 2[: \quad f'(c) = \frac{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{\pi}{12(2-\sqrt{2})}$$

o que prova o pretendido.

2. Mostre que a função g definida por $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ tem um único zero no intervalo $]-1, 2[$.

Existência de zero: Uma vez que

- g é contínua em $[-1, 2]$;
- $g(-1) = 8 > 0$;
- $g(2) = -19 < 0$;

então, pelo Teorema de Bolzano, podemos concluir que g tem pelo menos um zero no intervalo $]-1, 2[$.

Unicidade do zero: Uma vez que $g'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$, então

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2.$$

Uma vez que entre dois zeros consecutivos de g' existe, no máximo, um zero de g, podemos concluir que g tem um único zero em $]-1, 2[$.

Outra resolução possível para garantir a unicidade do zero: Observe-se que $g'(x) < 0$ para todo o $x \in]-1, 2[$. Logo g é estritamente decrescente em $]-1, 2[$ e, portanto, tem apenas um zero em $]-1, 2[$.

3. Seja f uma função contínua em $[a, b]$, diferenciável em $]a, b[$ e tal que $f(a) = f(b) = 0$. Dado $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, defina-se $g(x) = e^{\alpha x} f(x)$. Prove que existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = -\dfrac{1}{\alpha} f'(c)$.

Uma vez que

- g é contínua em $[a, b]$;
- g é diferenciável em $]a, b[$;
- $g(a) = 0$;
- $g(b) = 0$;

então, pelo Teorema de Rolle, podemos concluir que

$$\exists c \in]a, b[: \quad g'(c) = 0.$$

Como $g'(x) = \alpha e^{\alpha x} f(x) + e^{\alpha x} f'(x)$, então conclui-se que $c \in]a, b[$ tal que

$$\alpha e^{\alpha c} f(c) = -e^{\alpha c} f'(c) \Leftrightarrow f(c) = -\frac{1}{\alpha} f'(c),$$

como se pretendia demonstrar.

4. Considere a função h definida por $h(x) = 2\,\text{arcsen}(\text{tg}\, x)$, onde $D_h \subseteq]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

(a) Determine o domínio de h, D_h.

Como

$$D_h = \left\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq \text{tg}(x) \leq 1 \wedge x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}\right\}$$

então $D_h = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

(b) Estude h quanto à monotonia e existência de extremos locais e globais.

Atendendo a

$$(\text{arcsen}\, u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \quad \text{e} \quad (\text{tg}\, u)' = u' \sec^2 u,$$

resulta que

$$h'(x) = 2\frac{(\text{tg}\, x)'}{\sqrt{1-(\text{tg}\, x)^2}} = 2\frac{\sec^2 x}{\sqrt{1-\text{tg}^2 x}}.$$

Observe-se que o domínio de h' é $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$, já que $1-\text{tg}^2 x = 0$ nos extremos do intervalo. Uma vez que $h'(x) > 0$ para todo o $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$, podemos concluir que h é estritamente crescente. Como h é contínua em $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, podemos concluir que:

- $h(-\frac{\pi}{4}) = -\pi$ é mínimo local e global;
- $h(\frac{\pi}{4}) = \pi$ é máximo local e global.

(c) Caracterize a função inversa de h, indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica que a define.

- Uma vez que $D_{h^{-1}} = CD_h$ e $CD_h = [-\pi, \pi]$ (pela alínea (b)), então $D_{h^{-1}} = [-\pi, \pi]$;
- Como $CD_{h^{-1}} = D_h$ e $D_h = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ (pela alínea (a)), então $CD_{h^{-1}} = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$;
- Para determinar a expressão da inversa de h resolve-se a equação $y = h(x)$ em ordem a x (com $x \in D_h$ e $y \in CD_h$):

$$y = 2\,\text{arcsen}(\text{tg}\, x) \Leftrightarrow \frac{y}{2} = \text{arcsen}(\text{tg}\, x) \Leftrightarrow \text{sen}\left(\frac{y}{2}\right) = \text{tg}\, x \Leftrightarrow x = \text{arctg}\left(\text{sen}\left(\frac{y}{2}\right)\right).$$

Assim, a expressão da inversa de h é

$$h^{-1}(x) = \text{arctg}\left(\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

(d) Seja f tal que $\int f(x)\, dx = h(x) + C, C \in \mathbb{R}$. Determine $f(0)$.

A função h é uma primitiva de f, logo $h'(x) = f(x)$, para todo o $x \in D_h$. Assim,

$$f(x) = h'(x) = 2\frac{\sec^2 x}{\sqrt{1-\text{tg}^2 x}}.$$

Então,

$$f(0) = 2\frac{\sec^2 0}{\sqrt{1-\text{tg}^2 0}} = 2.$$

5. Determine os seguintes integrais (simplificando o mais possível o resultado):

(a) $\displaystyle\int \frac{-\cos x}{(1+\operatorname{sen} x)^2}\,dx$

Atendendo a que $(1+\operatorname{sen}(x))' = \cos x$, podemos afirmar pela regra da potência que:

$$\int \frac{-\cos x}{(1+\operatorname{sen} x)^2}\,dx = -\int \cos x(1+\operatorname{sen} x)^{-2}\,dx = -\frac{(1+\operatorname{sen} x)^{-2+1}}{-2+1}+C = \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

(b) $\displaystyle\int (2x^3+x)\cdot \operatorname{arctg} x\,dx$

Para determinar esta primitiva aplica-se o método de integração por partes:

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

fazendo $f'(x) = 2x^3+x$ e $g(x) = \operatorname{arctg} x$. Como $f(x) = \frac{x^4}{2}+\frac{x^2}{2}$ e $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, vem

$$\int (2x^3+x)\operatorname{arctg} x\,dx = \left(\frac{x^4}{2}+\frac{x^2}{2}\right)\operatorname{arctg} x - \int \left(\frac{x^4}{2}+\frac{x^2}{2}\right)\frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Logo

$$\int (2x^3+x)\operatorname{arctg} x\,dx = \frac{x^2(x^2+1)}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int x^2(x^2+1)\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

donde

$$\int (2x^3+x)\operatorname{arctg} x\,dx = \frac{x^2(x^2+1)}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{6}x^3 + C,\ C\in\mathbb{R}.$$

(c) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^3+x}\,dx$

Trata-se de uma fração própria que deverá ser decomposta em elementos simples:

$$\frac{2x+1}{x^3+x} = \frac{2x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

onde A, B e C são constantes reais a determinar. Reduzindo as frações do segundo membro ao mesmo denominador conclui-se que:

$$2x+1 = A(x^2+1)+(Bx+C)x \Leftrightarrow 2x+1 = (A+B)x^2+Cx+A$$

resultando que

$$A=1;\ B=-1 \text{ e } C=2.$$

Então

$$\int \frac{2x+1}{x^3+x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x}+\frac{-x+2}{x^2+1}\right)dx = \int \left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}+\frac{2}{x^2+1}\right)dx.$$

Temos três primitivas imediatas, logo

$$\int \frac{2x+1}{x^3+x}\,dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 2\operatorname{arctg} x + C,\ C\in\mathbb{R}.$$

(d) $\displaystyle\int \frac{3}{x^2\sqrt{x^2-9}}\,dx$ (Sugestão: utilize a mudança de variável dada por $x = 3\sec t$, indicando o domínio adequado a esta substituição).

Usando o método de substituição, fazendo $x = \varphi(t)$, temos de determinar o integral

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Fazendo $x = \varphi(t) = 3\sec t$ com $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, temos que φ é invertível, diferenciável e

$$\varphi'(t) = 3\sec t\,\mathrm{tg}\,t.$$

Observe-se que

$$f(\varphi(t)) = \frac{3}{9\sec^2(t)\sqrt{(3\sec t)^2-9}} = \frac{3}{9\sec^2(t)\sqrt{9\sec^2 t-9}} = \frac{3}{9\sec^2(t)\sqrt{9(\sec^2 t-1)}}.$$

Como $\sec^2 t - 1 = \mathrm{tg}\,t$ e $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, então

$$f(\varphi(t)) = \frac{3}{9\sec^2(t)\,3\,\mathrm{tg}\,t} = \frac{1}{9\sec^2(t)\ \mathrm{tg}\,t}.$$

Logo,

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int \frac{1}{9\sec^2(t)\ \mathrm{tg}\,t}\,3\sec t\,\mathrm{tg}\,t\,dt = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sec t}\,dt = \frac{1}{3}\int \cos t\,dt.$$

Primitivando vem

$$\frac{1}{3}\int \cos t\,dt = \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,t + C, C \in \mathbb{R}.$$

Deveremos agora regressar à variável inicial x. Dado que a substituição é $x = 3\sec t$ com $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, tem-se que

$$x = 3\sec t \Leftrightarrow x = \frac{3}{\cos t} \Leftrightarrow \cos t = \frac{3}{x}.$$

Usando agora a fórmula fundamental da trigonometria, $\mathrm{sen}^2\,t + \cos^2 t = 1$, podemos dizer que

$$\mathrm{sen}^2\,t = 1 - \cos^2 t = 1 - \left(\frac{3}{x}\right)^2$$

e, portanto,

$$\mathrm{sen}\,t = \sqrt{1-\frac{9}{x^2}},\ t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Assim,

$$\int \frac{3}{x^2\sqrt{x^2-9}}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{1-\frac{9}{x^2}} + C = \frac{\sqrt{x^2-9}}{3x} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$