1. Determine o coeficiente do termo $x^2y^2z^3$ no desenvolvimento de $\left(2x - y + \dfrac{z^3}{x}\right)^6$. Justifique.

2. A matriz $\mathcal{W}$ contém os custos de instalação (em milhares de euros) de uma rede de fibra ótica entre um conjunto de localizações $\{A, B, C, D, E, F, G\}$:

$$\mathcal{W} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 10 & \infty & \infty & \infty & \infty & 20 \\ 10 & 0 & 50 & \infty & 60 & 20 & \infty \\ \infty & 50 & 0 & 50 & 50 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 50 & 0 & 40 & \infty & \infty \\ \infty & 60 & 50 & 40 & 0 & 10 & \infty \\ \infty & 20 & \infty & \infty & 10 & 0 & 30 \\ 20 & \infty & \infty & \infty & \infty & 30 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

   (a) Desenhe o grafo $\mathcal{G}$ que tem como matriz de custos $\mathcal{W}$ e recorra ao algoritmo de Dijkstra para determinar o caminho de custo mínimo entre as localizações A e D, indicando o respetivo caminho e o custo do mesmo.

   (b) Seja $\mathcal{H}$ o subgrafo de $\mathcal{G}$ induzido pelo subconjunto de vértices $\{B, C, D, E, F\}$. Aplicando uma fórmula recursiva adequada determine o número de árvores abrangentes de $\mathcal{H}$. Justifique.

   (c) Obtenha, justificando, um subgrafo abrangente de $\mathcal{G}$ que seja conexo e bipartido, não se esquecendo de indicar a respetiva bipartição do conjunto dos seus vértices.

3. Usando a descodificação de Prüfer construa a árvore correspondente ao código $t = (4, 4, 4, 5, 4, 8)$.

4. O número de arestas e_n do grafo completo K_n, com $n \in \mathbb{N}$, satisfaz a seguinte relação de recorrência

$$e_n = e_{n-1} + n - 1, \quad \text{com} \quad n \geq 2 \quad \text{e} \quad e_1 = 0.$$

   (a) Determine uma fórmula fechada para e_n, $n \in \mathbb{N}$, resolvendo a relação de recorrência dada.

   (b) Obtenha na sua forma racional a função geradora da sucessão $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. Seja a_n o número de sequências ternárias de comprimento n, $n \in \mathbb{N}$, ou seja, sequências da forma $d_1\, d_2\, \ldots\, d_n$, com $d_i \in \{0, 1, 2\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, para as quais as ocorrências do digíto 0 se verificam sempre antes das do digíto 2. Por exemplo, para $n = 3$, as sequências 000, 002, 021, 222, são válidas, enquanto 200, 201, 202, 220, 210, 020 e 120 não são válidas. Obtenha, justificando, uma relação de recorrência para a_n, indicando também as respetivas condições iniciais.

Cotações:

1.	**2.(a)**	**2.(b)**	**2.(c)**	**3.**	**4.(a)**	**4.(b)**	**5.**
2.0	3.5	2.5	2.0	2.0	3.0	2.5	2.5