Matemática Discreta - 2019/2020

Exame Final 22-06-2020

Apenas inclui uma versão de cada pergunta.

1 Princípios combinatórios

Mostre que se $a_1, a_2, \ldots, a_8$ são oito inteiros quaisquer que satisfazem a relação $16 \geq a_1 > a_2 > \cdots > a_8 > 1$, então

a) existem dois pares distintos (a_i, a_j) e (a_k, a_ℓ) em que a primeira coordenada é sempre maior que a segunda e

$$a_i + a_j = a_k + a_\ell.$$

b) existem três pares distintos (a_i, a_j), (a_k, a_ℓ) e (a_s, a_t) em que a primeira coordenada é sempre maior que a segunda e

$$a_i - a_j = a_k - a_\ell = a_s - a_t.$$

Resolução:

A matriz M correspondente a todos os pares (a_i, a_j) nas condições definidas com entradas

$$m_{ij} = a_i + a_j / a_i - a_j = \begin{cases} a_i + a_j, & \text{em a)} \\ a_i - a_j, & \text{em b)} \end{cases}$$

tem a forma

$$M = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccc} 16 & 15 & 14 & 13 & \cdots & 5 & 4 & 3 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 16 \\ 15 \\ 14 \\ 13 \\ \vdots \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 31/1 & 30/2 & 29/3 & \cdots & 21/11 & 20/12 & 19/13 & 18/14 \\ - & - & 29/1 & 28/2 & \cdots & 20/10 & 19/11 & 18/12 & 17/13 \\ - & - & - & 27/1 & \cdots & 19/9 & 18/10 & 17/11 & 16/12 \\ - & - & - & - & \cdots & 18/8 & 17/9 & 16/10 & 15/11 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ - & - & - & - & \cdots & - & 9/1 & 8/2 & 7/3 \\ - & - & - & - & \cdots & - & - & 7/1 & 6/2 \\ - & - & - & - & \cdots & - & - & - & 5/2 \\ - & - & - & - & \cdots & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

Por sua vez, os 8 números $a_1 > a_2 > \cdots > a_8$ escolhidos produzem 28 pares admissíveis. Dado que, conforme se pode verificar a partir da matriz M, o número de somas $a_i + a_j$ distintas é igual a 27 e o número de diferenças $a_i - a_j$ distintas é igual a 14, para cada uma das alíneas podemos concluir o seguinte.

a) Existindo 28 pares e apenas 27 somas distintas, pelo princípio da gaiola dos pombos, pelo menos dois pares têm a mesma soma.

b) Existindo 14 diferenças distintas, em que uma das quais, $a_i - a_j = 14$, só se obtém para $a_i = 16$ e $a_j = 2$, podemos considerar os seguintes casos alternativos:

(i) pelo menos um dos números 2 ou 16 não faz parte dos 8 números escolhidos;

(ii) os números 2 e 16 fazem ambos parte dos 8 números escolhidos.

Em (i) o número de diferenças distintas é igual a 13 e, dado que $28 > 2 \times 13$, pelo princípio da gaiola dos pombos generalizado existem pelo menos 3 pares com a mesma diferença.
Em (ii) $(16, 2)$ é o único par que produz a diferença 14 e os restantes 27 pares podem produzir 13 diferenças distintas. Dado que $27 > 2 \times 13$, pelo princípio da gaiola dos pombos generalizado existem pelo menos 3 pares com a mesma diferença.

2 Permutações

Considere a permutação $\theta = (859321467)$.

a) Determine a permutação π tal que $\pi \circ \theta = (967328145)$;

b) Determine a partição cíclica de θ;

c) Determine o tipo de permutação e tipo de paridade de θ;

2.2 Determine o número de permutações do tipo $2^3 3^1 4^2$.

Resolução:

a) $\pi = (859321467) \circ \theta^{-1} = (8,2,3,1,6,4,5,9,7)$.

b) $\theta = [1,8,6][2,5][3,9,7,4]$.

c) O tipo de partição é $2^1 3^1 4^1$. Assim, tem-se $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$ e $\lambda_4 = 1$. Para determinar o tipo de paridade, calcula-se primeiro $\operatorname{sgn}(\theta) = (-1)^{\lambda_2+\lambda_4} = (-1)^{1+1} = 1$. Portanto a permutação θ é par.

2.2 O número de permutações do tipo $2^3 3^1 4^2$ é

$$\frac{17!}{2^3 3^1 4^2 3!1!2!} = 77189112000$$

3 Fórmula multinomial

Dada a expressão $(2x^2 - y + z - 1)^n$, recorrendo à fórmula multinomial, responda.

a) Qual o valor de n sabendo que, no desenvolvimento desta expressão, o coeficiente de x^2y^2z é igual a -120?

b) Qual o coeficiente de $x^4y^3z^4$, supondo $n = 10$?

Resolução:

Sabe-se que

$$(2x^2 - y + z - 1)^n = \sum_{t_1+t_2+t_3+t_4=n} 2^{t_1}(-1)^{t_2}(-1)^{t_4}\binom{n}{t_1,t_2,t_3,t_4} x^{2t_1}y^{t_2}z^{t_3}.$$

a) Dado que $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ e $t_3 = 1$ e

$$\begin{aligned}
(2x^2 - y + z - 1)^n &= \cdots + 2^1(-1)^2(-1)^{t_4}\binom{n}{1,2,1,t_4} x^2y^2z^1 + \cdots \\
&= \cdots + 2(-1)^{t_4}\frac{n!}{1!2!1!t_4!}x^2y^2z + \cdots \\
&= \cdots - 120x^2y^2z + \cdots,
\end{aligned}$$

onde $t_4 = n - t_1 - t_2 - t_3$, ou seja, $t_4 = n - 4$, vem que

$$2(-1)^{n-4}\frac{n!}{1!2!1!(n-4)!} = -120 \Leftrightarrow (-1)^{n-4}n(n-1)(n-2)(n-3) = -120.$$

Logo, sendo $-5 \times 4 \times 3 \times 2 = -120$, podemos concluir que $n = 5$.

b) Para $n = 10$, no coeficiente de $x^4y^3z^4$, $t_1 = 2, t_2 = 3$, $t_3 = 4$ e $t_4 = 1$. Logo, $2^2(-1)^3(-1)^1\binom{10}{2,3,4,1} = 4\frac{10!}{2!3!4!1!} = \frac{10!}{72}$ é o coeficiente pretendido.

4 Equações de recorrência

Uma equação de recorrência linear homogénea tem a raíz característica dupla 1 e a raíz característica simples 6.

a) Determine a solução geral desta equação de recorrência.

b) Encontre uma relação de recorrência linear homogénea com estas raízes características (incluindo as suas multiplicidades).

Resolução:

a) A solução geral é $a_n = c_1 + c_2 n + c_3 6^n$, com c_1, c_2 e c_3 constantes.

b) Das raízes características e das respectivas multiplicidades obtém-se o polinómio $(x-1)^2(x-6) = x^3 - 8x^2 + 13x - 6$. Portanto, a equação característica é

$$x^3 - 8x^2 + 13x - 6 = 0.$$

Multiplicando ambos os membros da equação característica por x^{n-3}, por forma a obter uma equação onde x^n é o termo de maior ordem, obtém-se

$$x^n - 8x^{n-1} + 13x^{n-2} - 6x^{n-3} = 0.$$

Para $k \in \{n-3, n-2, n-1, n\}$, substitui-se x^k por a_k, obtendo-se a equação de recorrência linear homogénea

$$a_n - 8a_{n-1} + 13a_{n-2} - 6a_{n-1} = 0.$$

5 Funções Geradoras

Uma empresa de transportes vai carregar um contentor com três tipos de artigos. Cada unidade do artigo A pesa 10kg e cada unidade dos artigos B e C pesa 20kg. Sabe-se que o contentor tem 1000kg de capacidade e que cada um dos artigos se encontra armazenado em quantidades que vão para além da capacidade do contentor. Pretende-se determinar o número de maneiras de carregar o contentor com estes artigos (não interessa a ordem pela qual os produtos são colocados no contentor).
Determine a função geradora $f(x)$ deste problema (apresente $f(x)$ como uma função racional). Indique qual é o coeficiente que é a solução deste problema e determine o seu valor.

Resolução:

Função geradora:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1 + x^{10} + x^{20} + x^{30} + \cdots + x^{1000})(1 + x^{20} + x^{40} + x^{60} + \cdots + x^{1000})^2 && (1)\\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{10k} - \sum_{i=101}^{\infty} x^{10i}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} x^{20j} - \sum_{l=51}^{\infty} x^{20l}\right)^2\\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{10k} - \sum_{i=0}^{\infty} x^{10i+1010}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} x^{20j} - \sum_{l=0}^{\infty} x^{20l+1020}\right)^2\\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{10k} - x^{1010}\sum_{i=0}^{\infty} x^{10i}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} x^{20j} - x^{1020}\sum_{l=0}^{\infty} x^{20l}\right)^2\\
&= \left(1 - x^{1010}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{10k}\right)\left(1 - x^{1020}\right)^2\left(\sum_{j=0}^{\infty} x^{20j}\right)^2 && (2)\\
&= \frac{\left(1 - x^{1010}\right)}{(1 - x^{10})}\frac{\left(1 - x^{1020}\right)^2}{(1 - x^{20})^2}, && (3)
\end{aligned}$$

onde a terceira igualdade é obtida substituindo i por $i+101$, na segunda série de potências, e substituindo l por $l+51$ na última série de potências. Observe-se que podemos apresentar a função geradora na forma da igualdade (1) ou como a igualdade (3).
O número de maneiras de carregar o contentor com os três tipos de artigos é dado pelo coeficiente de x^{1000}. Vamos determinar esse coeficiente. De (2) vem

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \left(1-x^{1010}\right)\left(1-x^{1020}\right)^2\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{10k}\right)\frac{1}{(1-x^{20})^2} \\
&= \left(1-x^{1010}\right)\left(1-x^{1020}\right)^2\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{10k}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\binom{2+j-1}{j}x^{20j}\right) \\
&= \left(1-x^{1010}\right)\left(1-x^{1020}\right)^2\left(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)x^{10k+20j}\right).
\end{aligned}
$$

Como $10k+20j=1000 \Leftrightarrow k=100-2j$ e $0\leq k\leq 100 \Leftrightarrow 0\leq 100-2j\leq 50 \Leftrightarrow 0\leq j\leq 50$, concluimos que o coeficiente de x^{1000} é dado por

$$
\sum_{j=0}^{50}(j+1)=\frac{1+51}{2}(51)=(26)(51)=1326.
$$

Observe-se que, em alternativa, podemos considerar a função geradora na forma

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{10k}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} x^{20j}\right)^2 \\
&= \frac{1}{(1-x^{10})(1-x^{20})^2},
\end{aligned}
$$

determinando-se o coeficiente de x^{1000} de forma semelhante ao que é apresentado atrás.

6 Algoritmo de Dijsktra

Aplique o algoritmo de Dijsktra na determinação do caminho de custo mínimo entre os vértices v_1 e v_6 do grafo G com custos nas arestas representado pela matriz de custos:

$$
W = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 8 & \infty & 4 & \infty & \infty \\
8 & 0 & 4 & 3 & 2 & \infty \\
\infty & 4 & 0 & \infty & 3 & 4 \\
4 & 3 & \infty & 0 & 6 & \infty \\
\infty & 2 & 3 & 6 & 0 & 3 \\
\infty & \infty & 4 & \infty & 3 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Resolução:

Segue-se a tabela onde em cada linha se atualiza as marcas os pares (Marca,Antecessor) dos vértices temporários.

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
$(\mathbf{0},\ )$	$(\infty,\ )$	$(\infty,\ )$	$(\infty,\ )$	$(\infty,\ )$	$(\infty,\ )$
	$(8,v_1)$	$(\infty,\ )$	$(\mathbf{4},\mathbf{v_1})$	$(\infty,\ )$	$(\infty,\ )$
	$(\mathbf{7},\mathbf{v_4})$	$(\infty,\ )$		$(10,v_4)$	$(\infty,\ )$
		$(11,v_2)$		$(\mathbf{9},\mathbf{v_2})$	$(\infty,\ )$
		$(\mathbf{11},\mathbf{v_2})$			$(12,v_5)$
					$(\mathbf{12},\mathbf{v_5})$

Tabela 1: O custo do caminho de custo mínimo entre v_1 e v_6 é igual a 12 e o correspondente caminho de custo mínimo é o caminho v_1,v_4,v_2,v_5,v_6.