

Determinação de árvores abragentes de custo mínimo

Algoritmos de Kruskal e Prim

Universidade de Aveiro 2019/2020

Árvores abrangentes de custo mínimo

Algoritmo de Kruskal

Algoritmo de Prim

Exemplos e exercícios

Referências e bibliografia

Algoritmo de Kruskal

Algoritmo de Kruskal

- ▶ **Entrada:** grafo $G = (V, E, W)$;
- ▶ **Saída:** T árvore abrangente de custo mínimo;
- 1. Ordenar as arestas de G , a_1, \dots, a_m , por ordem não decrescente do seu custo;
- 2. $E' \leftarrow \emptyset$ e $i \leftarrow 1$;
- 3. **Enquanto** $T = (V, E')$ não é conexo **faz**
 - ▶ **Se** $E' \cup \{a_i\}$ não contém um ciclo **então** $E' \leftarrow E' \cup \{a_i\}$;
 - ▶ $i \leftarrow i + 1$;
 - ▶ **Fim faz**;
- ▶ Devolver $T = (V, E')$.

Algoritmo de Prim

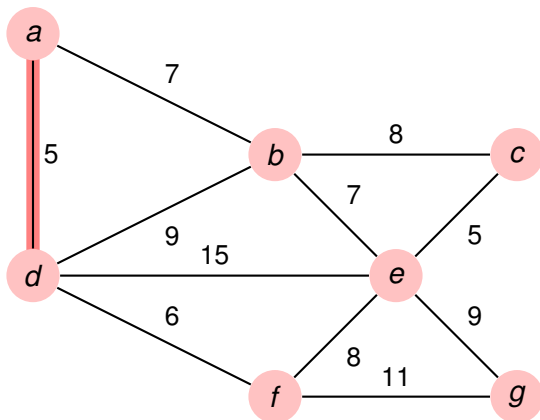
Algoritmo de Prim

- ▶ **Entrada:** grafo $G = (V, E, W)$;
- ▶ **Saída:** T árvore abrangente de custo mínimo;
- 1. Escolher um vértice $v \in V$;
- 2. Fazer $V' \leftarrow \{v\}$; $E' \leftarrow \emptyset$;
- 3. Enquanto $V' \neq V$ fazer
 - ▶ De todas as arestas $e = (v_i, v_j)$, tais que $v_i \in V'$, $v_j \in V \setminus V'$ determinar a de menor custo $e^* = (v_i^*, v_j^*)$
 - ▶ Fazer $V' \leftarrow V' \cup \{v_j^*\}$; $E' \leftarrow E' \cup \{e^*\}$.
- ▶ Devolver $T = (V', E')$.

Exemplo de aplicação do algoritmo de Kruskal

Ordenar as arestas:

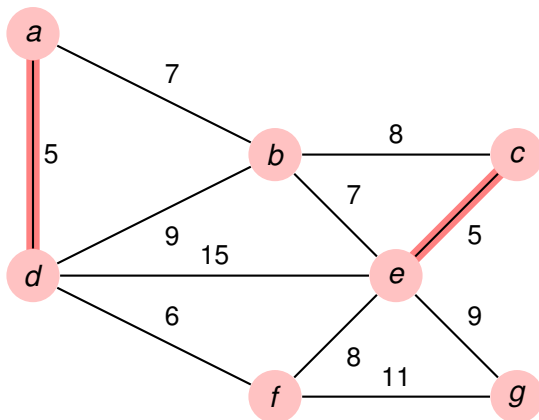
ad, ce, df, ab, be, bc, ef, bd, eg, fg, de.



Exemplo de aplicação do algoritmo de Kruskal

Ordenar as arestas:

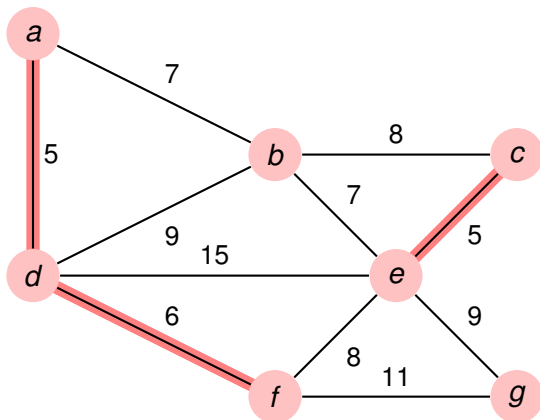
ad, **ce**, df, ab, be, bc, ef, bd, eg, fg, de.



Exemplo de aplicação do algoritmo de Kruskal

Ordenar as arestas:

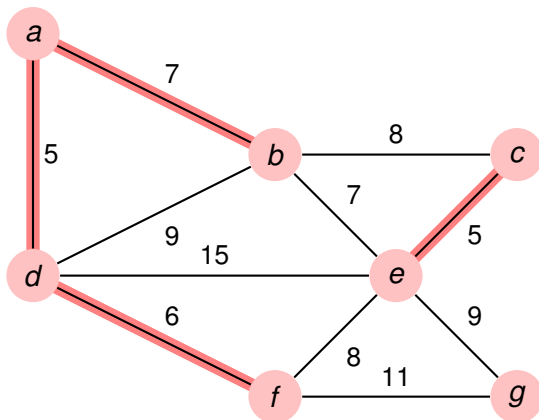
ad, ce, **df**, ab, be, bc, ef, bd, eg, fg, de.



Exemplo de aplicação do algoritmo de Kruskal

Ordenar as arestas:

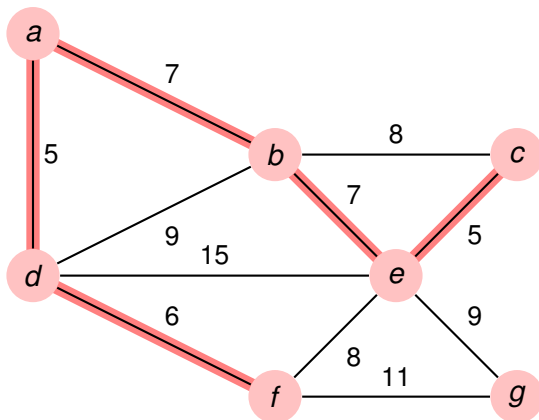
ad, ce, df, **ab**, be, bc, ef, bd, eg, fg, de.



Exemplo de aplicação do algoritmo de Kruskal

Ordenar as arestas:

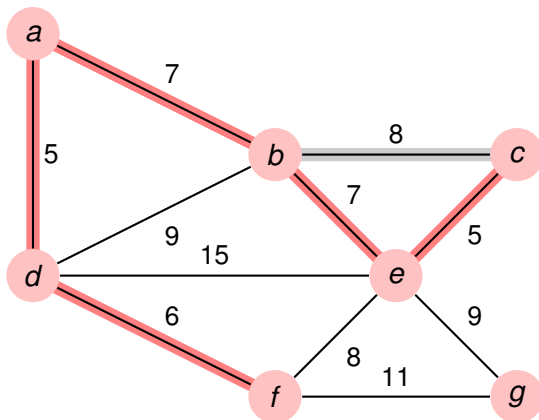
ad, ce, df, ab, **be**, bc, ef, bd, eg, fg, de.



Exemplo de aplicação do algoritmo de Kruskal

Ordenar as arestas:

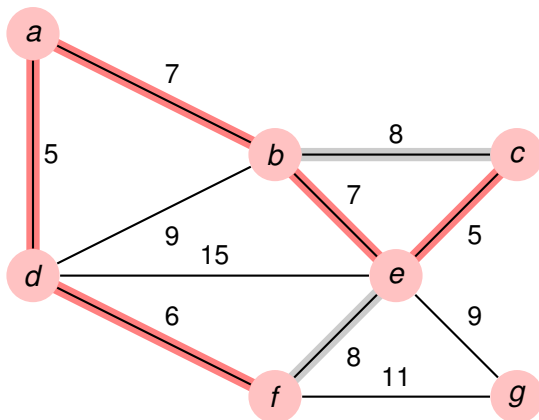
ad, ce, df, ab, be, **bc**, ef, bd, eg, fg, de.



Exemplo de aplicação do algoritmo de Kruskal

Ordenar as arestas:

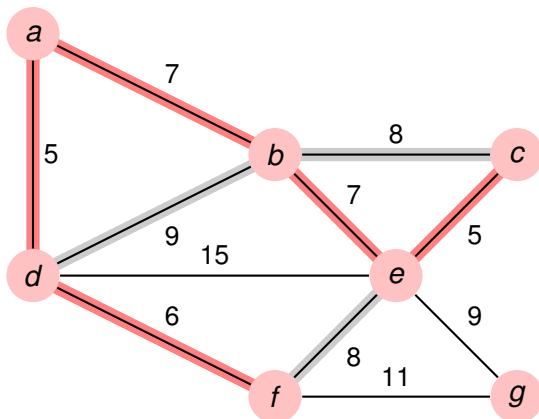
ad, ce, df, ab, be, bc, **ef**, bd, eg, fg, de.



Exemplo de aplicação do algoritmo de Kruskal

Ordenar as arestas:

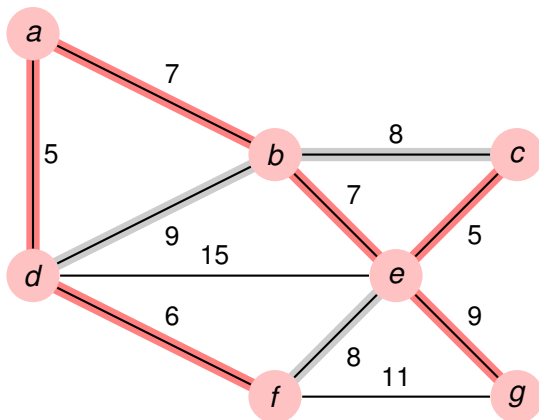
ad, ce, df, ab, be, bc, ef, **bd**, eg, fg, de.



Exemplo de aplicação do algoritmo de Kruskal

Ordenar as arestas:

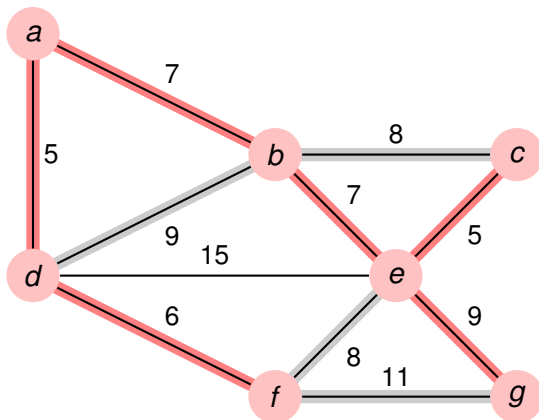
ad, ce, df, ab, be, bc, ef, bd, **eg**, fg, de.



Exemplo de aplicação do algoritmo de Kruskal

Ordenar as arestas:

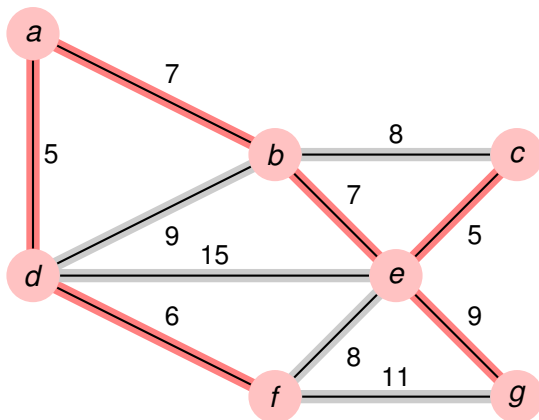
ad, ce, df, ab, be, bc, ef, bd, eg, **fg**, de.



Exemplo de aplicação do algoritmo de Kruskal

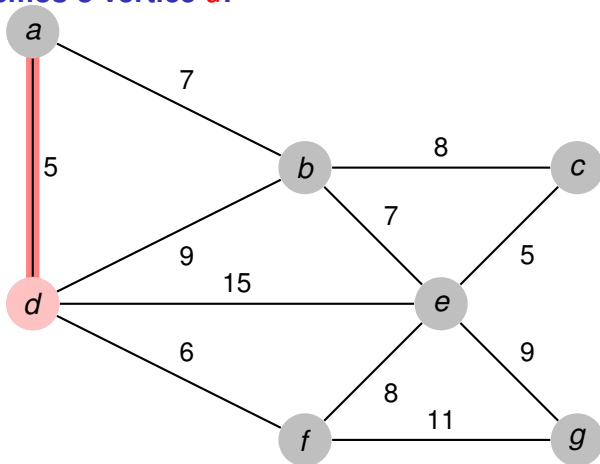
Ordenar as arestas:

ad, ce, df, ab, be, bc, ef, bd, eg, fg, **de**.



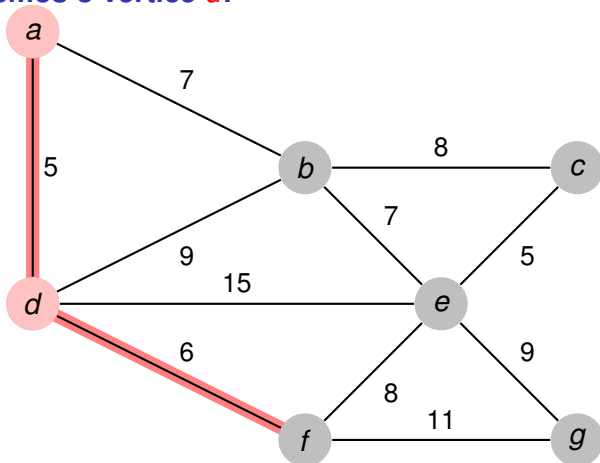
Exemplo de aplicação do algoritmo de Prim

Escolhemos o vértice *d*.



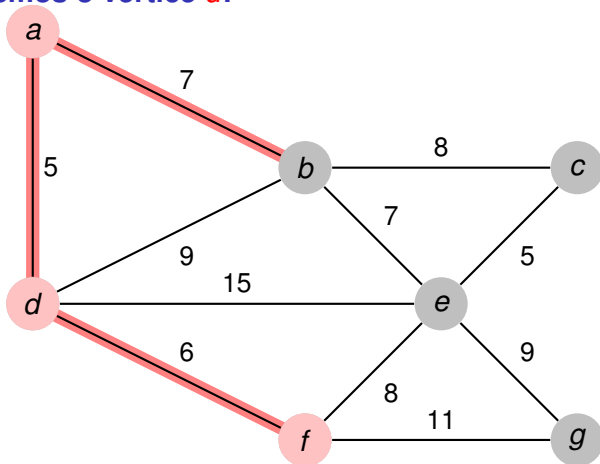
Exemplo de aplicação do algoritmo de Prim

Escolhemos o vértice *d*.



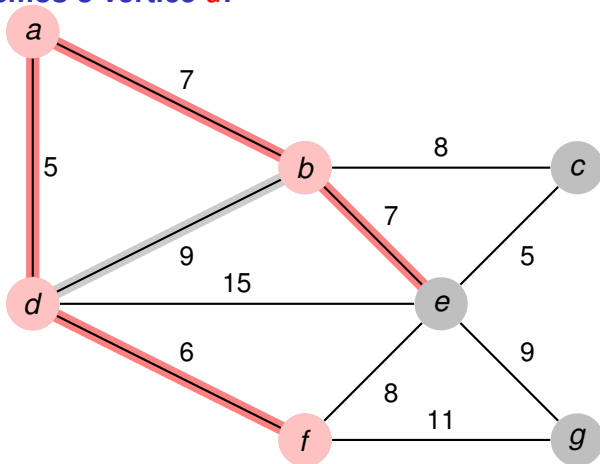
Exemplo de aplicação do algoritmo de Prim

Escolhemos o vértice *d*.



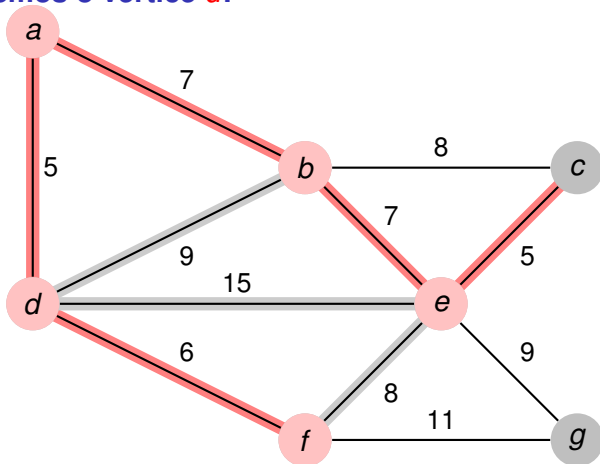
Exemplo de aplicação do algoritmo de Prim

Escolhemos o vértice *d*.



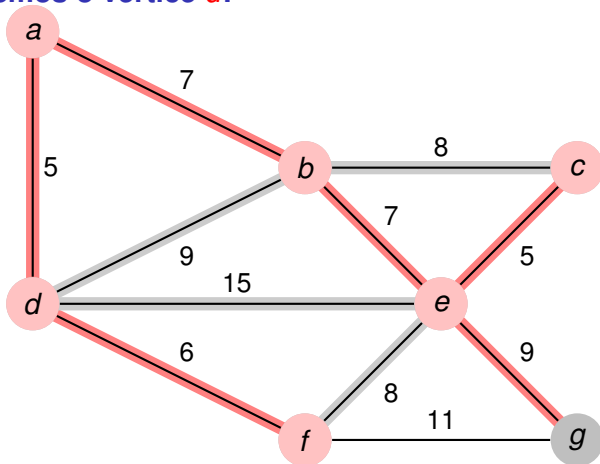
Exemplo de aplicação do algoritmo de Prim

Escolhemos o vértice *d*.



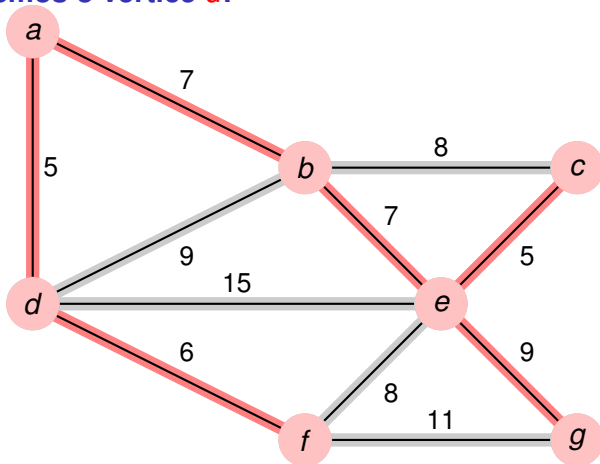
Exemplo de aplicação do algoritmo de Prim

Escolhemos o vértice *d*.



Exemplo de aplicação do algoritmo de Prim

Escolhemos o vértice *d*.



Exercício

Determinar a árvore abrangente de custo mínimo do grafo G com custos nas arestas, definido pela seguinte matriz de custos:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & 10 & 8 & 3 \\ 1 & 0 & 13 & 10 & 6 & 4 \\ \infty & 13 & 0 & 15 & \infty & 4 \\ 10 & 10 & 15 & 0 & 9 & \infty \\ 8 & 6 & \infty & 9 & 0 & 7 \\ 3 & 4 & 4 & \infty & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Referências e bibliografia I



D. M. Cardoso, J. Szymanski e M. Rostami, *Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos*, Escolar Editora, 2008.