Matemática Discreta - 2019/2020

Resolução do Teste $N^0 1$ de Matemática Discreta Realizado em 29-04-2020

Nas perguntas com mais do que uma versão apenas se inclui a resolução de uma delas (uma vez que para as outras versões o método de resolução é o mesmo).

1 Relações binárias

Considera a relação $\sim$ definida em S_3, conjunto das permutações dos elemento de $\{1,2,3\}$, tal que $\pi \sim \pi'$ se e só se $\exists \rho \in S_3 : \rho^{-1} \circ \pi \circ \rho = \pi'$.

(a) Mostra que $\sim$ é uma relação de equivalência em S_3.

Resolução:

- **Reflexiva:** Seja π uma qualquer permutação em S_3. Seja $\rho = \mathrm{id}$. Então $\rho^{-1} = \mathrm{id}^{-1} = \mathrm{id}$ e $\rho^{-1} \circ \pi \circ \rho = \pi$. Logo $\pi \sim \pi$.
- **Simétrica:** Sejam π e π' duas quaisquer permutações em S_3. Se $\pi \sim \pi'$ então existe $\rho \in S_3$ tal que $\rho^{-1} \circ \pi \circ \rho = \pi'$. Assim, $\rho \circ \rho^{-1} \circ \pi \circ \rho = \rho \circ \pi'$ ou seja $\pi \circ \rho = \rho \circ \pi'$. Logo, $\pi \circ \rho \circ \rho^{-1} = \rho \circ \pi' \circ \rho^{-1}$, ou seja, $\pi = \rho \circ \pi' \circ \rho^{-1}$. Concluímos que para $\rho' = \rho^{-1}$, $\rho'^{-1} \circ \pi' \circ \rho' = \pi$ e portanto $\pi' \sim \pi$.
- **Transitiva:** Sejam π, π' e π'' três quaisquer permutações em S_3. Se $\pi \sim \pi'$ então existe $\rho_1 \in S_3$ tal que $\rho_1^{-1} \circ \pi \circ \rho_1 = \pi'$. Se $\pi' \sim \pi''$ então existe $\rho_2 \in S_3$ tal que $\rho_2^{-1} \circ \pi' \circ \rho_2 = \pi''$. Logo, $\rho_2^{-1} \circ (\rho_1^{-1} \circ \pi \circ \rho_1) \circ \rho_2 = \pi''$, ou seja, $(\rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1}) \circ \pi \circ (\rho_1 \circ \rho_2) = \pi''$. Seja $\rho_3 = \rho_1 \circ \rho_2$. Então $\rho_3^{-1} = \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1}$ e portanto existe $\rho_3 \in S_3$ tal que $\rho_3^{-1} \circ \pi \circ \rho_3 = \pi''$, pelo que $\pi \sim \pi''$.

(b) Determina a classe de equivalência $[\pi]_\sim$ da permutação $\pi = (2,1,3)$.

Resolução: $[\pi]_\sim = \{\pi' \ : \ \pi \sim \pi'\} = \left\{\rho^{-1} \circ (2,1,3) \circ \rho \ : \ \rho \in S_3\right\}$.

ρ	ρ^{-1}	$\rho^{-1} \circ (2,1,3) \circ \rho$
$(1,2,3)$	$(1,2,3)$	$(2,1,3)$
$(1,3,2)$	$(1,3,2)$	$(3,2,1)$
$(2,1,3)$	$(2,1,3)$	$(2,1,3)$
$(2,3,1)$	$(3,1,2)$	$(3,2,1)$
$(3,1,2)$	$(2,3,1)$	$(1,3,2)$
$(3,2,1)$	$(3,2,1)$	$(1,3,2)$

Logo,$[\pi]_\sim = \{(2,1,3),(3,2,1),(1,3,2)\}$

2 Lógica (demonstração automática)

No universo dos números naturais, no contexto dos corpos finitos, podemos afirmar o seguinte.

F_1: Se x é um número primo e y é menor do que x , então x e y são coprimos.

F_2: Se x e y são coprimos e $y < x$, então y é invertível módulo x.

Utilizando os predicados

$$
\begin{aligned}
P(x) &\equiv \text{ x é primo} \\
M(y,x) &\equiv \text{ y é menor do que x} \\
CP(y,x) &\equiv \text{ y e x são coprimos} \\
I(y,x) &\equiv \text{ y é invertível módulo x}
\end{aligned}
$$

a) Exprima F_1 e F_2 em linguagem matemática, com recurso aos predicados indicados acima.

Resolução:

$F_1: \ \forall x \forall y \ (P(x) \wedge M(y,x)) \Rightarrow CP(x,y).$
$F_2: \ \forall x \forall y \ (CP(x,y) \wedge M(y,x)) \Rightarrow I(y,x).$

b) Utilizando o princípio da resolução, a partir de F_1 e F_2 deduza

$F_3\!: \ \forall x \, \forall y \, (P(x) \wedge M(y,x)) \Rightarrow I(y,x).$

Resolução: Para deduzirmos F_3 a partir de F_1 e F_2, aplicando o princípio da resolução, vamos provar que $\neg (F_1 \wedge F_2 \Rightarrow F_3)$ é uma fórmula inconsistente, reduzindo-a à forma normal conjuntiva de Skolem e aplicando resolventes até se obter a cláusula vazia. Uma vez que

$$\begin{aligned} \neg F_3 &\equiv \exists x \, \exists y \, \neg (\neg P(x) \vee \neg M(y,x)) \vee I(y,x)) \\ &\equiv \exists x \, \exists y \, P(x) \wedge M(y,x)) \wedge \neg I(y,x) \\ &\equiv P(a) \wedge M(b,a)) \wedge \neg I(b,a). \end{aligned}$$

onde a e b são as constantes que correspondem às funções de Skolem que substituem os quantificadores existenciais, obtém-se

$$\begin{aligned} \neg (F_1 \wedge F_2 \Rightarrow F_3) &\equiv \neg (\neg(F_1 \wedge F_2) \vee F_3) \\ &\equiv F_1 \wedge F_2 \wedge \neg F3 \\ &\equiv \underbrace{(\neg P(x) \vee \neg M(y,x) \vee CP(x,y))}_{C_1} \wedge \underbrace{(\neg CP(x,y) \vee \neg M(y,x) \vee I(y,x))}_{C_2} \\ &\quad \wedge \underbrace{P(a)}_{C3} \wedge \underbrace{M(b,a)}_{C4} \wedge \underbrace{\neg I(b,a)}_{C5}. \end{aligned}$$

Assim, obtém-se o conjunto de cláusulas $S = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$ do qual nos resta obter a cláusula vazia, $\diamondsuit$, de acordo com os seguintes passos:

1. Sendo C_6 a resolvente de C_1 e C_2,
$$\begin{array}{lccccc} C_1: & \neg P(x) & \vee & \neg M(y,x) & \vee & CP(x,y) \\ C_2: & \neg CP(x,y) & \vee & \neg M(y,x) & \vee & I(y,x) \\ \hline C_6: & \neg P(x) & \vee & \neg M(y,x) & \vee & I(y,x) \end{array}$$
2. Considerando a substituição $\sigma = \{a/x\}$ e sendo C_7 a resolvente de $C_6\sigma$ e C_3,
$$\begin{array}{lccccc} C_6\sigma: & \neg P(a) & \vee & \neg M(y,a) & \vee & I(y,a) \\ C_3: & P(a) & & & & \\ \hline C_7: & & & \neg M(y,a) & \vee & I(y,a) \end{array}$$
3. Considerando as substituição $\gamma = \{b/y\}$ e sendo C_8 a resolvente de $C_7\gamma$ e C_4,
$$\begin{array}{lccc} C_7\gamma: & \neg M(b,a) & \vee & I(b,a) \\ C_4: & M(b,a) & & \\ \hline C_8: & & & I(b,a) \end{array}$$
4. Finalmente, vem que
$$\begin{array}{lc} C_8: & I(b,a) \\ C_5: & \neg I(b,a) \\ \hline & \diamondsuit \end{array}$$

3 Estratégias de demonstração

A sequência de Fibonacci é definida por recorrência por

$$\begin{aligned} f_0 &= 0 \\ f_1 &= 1 \\ f_{n+1} &= f_{n-1} + f_n, \quad \text{para} \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Mostre que $\sum_{i=1}^{n} f_{2i} = f_{2n+1} - 1$, para $n \geq 1$.

Resolução: Prova pelo método de Indução Matemática:

Condição inicial: Se $n = 1$ tem-se $\sum_{i=1}^{1} f_{2i} = f_2 = f_1 + f_0 = 1$ e

$$\begin{aligned} f_{2\times 1+1} - 1 &= f_3 - 1 \\ &= f_1 + f_2 - 1 \\ &= f_1 + f_0 + f_1 - 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Portanto, $\sum_{i=1}^{n} f_{2i} = f_{2\times n+1} - 1$, para $n = 1$.

Hipótese de Indução: $\sum_{i=1}^{k} f_{2i} = f_{2k+1} - 1$

Tese de Indução: $\sum_{i=1}^{k+1} f_{2i} = f_{2(k+1)+1} - 1$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} f_{2i} &= \sum_{i=1}^{k} f_{2i} + f_{2(k+1)} \\ &= f_{2k+1} - 1 + f_{2k+2} && \text{pela hipótese de indução} \\ &= f_{2k+3} - 1 && \text{pela relação de recorrência} \end{aligned}$$

Portanto, usando indução matemática tem-se $\sum_{i=1}^{n} f_{2i} = f_{2n+1} - 1$, para qualquer $n \geq 1$.

4 Princípios combinatórios

A Biblioteca Municipal de Aveiro, com o intuito de adquirir novos livros para algumas secções de leitura, selecionou uma amostra de 250 leitores e realizou o seguinte questionário:

> Selecione o(s) seu(s) tipo(s) de livro(s) preferidos:
>
> - ☐ Romance
> - ☐ Policial
> - ☐ Ficção científica
> - ☐ Todos os anteriores
> - ☐ Nenhum dos anteriores
>
> Nota: Pode selecionar mais do que uma opção.

A Maria, funcionária da Biblioteca, ficou responsável por fazer um estudo para perceber qual(ais) o(s) tipo(s) de livro(s) a adquirir. No entanto, esqueceu-se de registar o número de pessoas que prefere simultaneamente livros policiais e de ficção científica.

Tendo em conta os dados de que a Maria dispõe, e que se encontram abaixo, ajude a Maria a determinar o valor em falta. Justifique a sua resposta.

Dados:

- 120 pessoas preferem romances
- 110 pessoas preferem policiais

- 130 pessoas preferem livros de ficção científica
- 70 pessoas preferem romances e policiais
- 65 pessoas preferem romances e ficção científica
- 20 pessoas gostam dos três tipos de livros
- 40 pessoas não gostam de nenhum destes três tipos de livros.

Resolução:

Sejam:

- L o conjunto dos leitores da Biblioteca Municipal de Aveiro;
- R o conjunto dos leitores que preferem romances;
- P o conjunto dos leitores que preferem policiais;
- F o conjunto dos leitores que preferem ficção científica.

Sabemos que $|L| = 250$, $|R| = 120$, $|P| = 110$, $|F| = 130$, $|R \cap P| = 70$, $|R \cap F| = 65$, $|R \cap P \cap F| = 20$ e $|R^c \cap P^c \cap F^c| = 40$.

Por outro lado, $R^c \cap P^c \cap F^c = L \backslash (R \cup P \cup F)$ e, pelo princípio de inclusão-exclusão, temos:

$$\begin{aligned}
& |R^c \cap P^c \cap F^c| = |L| - |R \cup P \cup F| \\
& \Leftrightarrow |R^c \cap P^c \cap F^c| = |L| - (|R| + |P| + |F| - |R \cap P| - |R \cap F| - |P \cap F| + |R \cap P \cap F|) \\
& \Leftrightarrow 40 = 250 - (120 + 110 + 130 - 70 - 65 - |P \cap F| + 20) \\
& \Leftrightarrow |P \cap F| = 35.
\end{aligned}$$

Logo, há 35 pessoas que preferem simultaneamente livros policiais e de ficção científica.

5 Agrupamentos e identidades combinatórias

O Professor de MD foi buscar 8 marcadores à secretaria do DMAT onde estes estão disponíveis, em grandes quantidades, em quatro cores: preto, azul, vermelho e verde. Quantas possibilidades de escolha é que pode fazer? Considere cada uma das situações separadamente:

a) leva pelo menos um marcador de cada cor;

b) leva no máximo 2 marcadores vermelhos;

c) sem restrições.

Não necessita fazer os cálculos, apresente apenas uma formula.

Resolução:

a) Como o Professor escolhe pelo menos um marcador de cada cor, o problema consiste em determinar o número de possibilidades de escolher 4 $(= 8 - 4)$ marcadores de entre 4 tipos. Como pode repetir a cor, trata-se de um problema de combinações com repetição. Equivalente ao problema de colocar 4 bolas iguais em 4 caixas diferentes.

$$\binom{4+4-1}{4} = \binom{4+4-1}{3} = \frac{7!}{3!4!}$$

b) Podem ser escolhidos 0, 1 ou 2 marcadores vermelhos.

CASO 1: 0 marcadores vermelhos.

Existem 8 marcadores para serem escolhidos entre 3 tipos (sendo que não são escolhidos marcadores vermelhos). O número de possibilidades neste caso é dado por

$$\binom{8+3-1}{8} = \binom{8+3-1}{2} = \frac{10!}{2!8!}.$$

CASO 2: 1 marcador vermelho.

Faltam escolher 7 marcadores que não são vermelhos, isto é, de entre 3 tipos. O número de possibilidades neste caso é dado por

$$\binom{7+3-1}{7} = \binom{7+3-1}{2} = \frac{9!}{2!7!}.$$

CASO 3: 2 marcadores vermelhos.

Faltam escolher 6 marcadores, que não são vermelhos, isto é, de entre 3 tipos. O número de possibilidades neste caso é dado por

$$\binom{6+3-1}{6} = \binom{6+3-1}{2} = \frac{8!}{2!6!}.$$

Pelo Princípio da Adição o número total de possibilidades é dado pela soma dos valores obtidos nos casos 1, 2 e 3. Ou seja,

$$\frac{10!}{2!8!} + \frac{9!}{2!7!} + \frac{8!}{2!6!}.$$

c) Neste caso são escolhidos 8 marcadores de entre 4 tipos diferentes.

$$\binom{8+4-1}{8} = \binom{8+4-1}{3} = \frac{11!}{3!8!}$$