



## Exercícios sobre Estratégias de Demonstração

Universidade de Aveiro 2018/2019

<http://moodle.ua.pt>

**1 Exercícios sobre estratégias de demonstração**

**2 Referências bibliográficas**

## Demonstrações por indução

- **Exercício nº 7 da folha 4.** Mostre que

①  $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}, \quad n \geq 1.$

②  $n^2 - 1$  é divisível por 8 para todo o número ímpar  $n$ .

③  $4^n + 15n - 1$  é divisível por 9, para  $n \geq 1$ .

④  $\sum_{i=1}^n r^i = \frac{(r^n - 1)r}{r - 1}$ , para todos os inteiros  $n \geq 1$  e para todos os números reais  $r \neq 1$ .

⑤  $H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$ , para  $n \geq 0$ , onde  $H_j = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{j}$ , para  $j \in \mathbb{N}$  (ter em conta que  $H_{2^n} = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} [\frac{1}{2^{i+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{i+2^i}}]$ ).

- **Exercício nº 8 da folha 4.** Prove que a sucessão  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de números triangulares que é tal que  $t_1 = 1$  e  $t_n = t_{n-1} + n$ , para  $n \geq 2$ , é dada por  $t_n = \frac{n^2 + n}{2}$ ,  $n \geq 1$ .

- **Exercício nº 9 da folha 4.** Encontre uma fórmula para  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , e demonstre a respectiva validade.

## Demonstrações por aplicação do princípio da gaiola dos pombos

- **Exercício nº 15 da folha 4.** Sabendo que a família Ferreira tem 13 filhos, responda:
  - ① Quantas pessoas desta família, garantidamente, nasceram:  
(i) no mesmo mês? (ii) no mesmo dia da semana?
  - ② No próximo sábado, os Ferreira dão uma festa para a qual os filhos podem convidar os amigos mais próximos.  
Quantos amigos têm ser convidados para que pelo menos um dos filhos tenha 3 amigos entre os convidados?
- **Exercício nº 16 da folha 4.** Mostre que num conjunto de cinco números inteiros positivos (arbitrários), pelo menos dois têm o mesmo valor para o resto da divisão por 4.
- **Exercício nº 17 da folha 4.** Mostre que escolhendo cinco números inteiros (distintos) entre 1 e 8, dois deles têm soma igual a 9.

## Demonstrações por aplicação do princípio da gaiola dos pombos

- **Exercício nº 19 da folha 4.** Mostre que num grupo de 20 pessoas escolhidas ao acaso existem pelo menos 2 pessoas que têm o mesmo número de amigos dentro do grupo. Note que duas pessoas são consideradas amigas se houver uma relação de amizade recíproca estabelecida entre elas.
- **Exercício nº 21 da folha 4.** Durante o mês de Janeiro, o João bebeu 42 cafés. Dado que o João bebe pelo menos um café por dia, mostre que houve um número de dias consecutivos em que o João bebeu exatamente 17 cafés.

## Referências e bibliografia I



D. M. Cardoso, J. Szymanski e M. Rostami, *Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos*, Escolar Editora, 2008.