



Ficha de Exercícios 3

Integral de Riemann; Teorema Fundamental do Cálculo integral; Cálculo de áreas.

1. Diga, justificando, se as seguintes funções são integráveis.

(a) $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos(x^2 - 2x)$.

(b) $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{se } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ 2 & \text{se } x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

(c) $f : [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \in [-2, 0[\\ 2 & \text{se } x = 0 \\ x & \text{se } x \in]0, 1]. \end{cases}$

2. Calcule $F'(x)$ sendo F a função real de variável real dada por

(a) $F(x) = \int_0^{x^2} e^{t^2} dt$

Resolução: A função f definida por $f(t) = e^{t^2}$ é contínua em \mathbb{R} e as funções g_1 e g_2 dadas por $g_1(x) = x^2$ e $g_2(x) = 0$ são diferenciáveis em \mathbb{R} . Então, como consequência do Teorema Fundamental do Cálculo Integral, tem-se que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = e^{(x^2)^2} \cdot 2x - e^{0^2} \cdot 0 = 2xe^{x^4}.$$

(b) $F(x) = \int_0^x \frac{t^2}{t^2 + 1} dt$ (c) $F(x) = \int_x^0 e^{-s^2} ds$ (d) $F(x) = \int_1^x (\operatorname{sen} t^2 + e^{-t^2}) dt$

(e) $F(x) = x^3 \int_1^x e^{-s^2} ds$ (f) $F(x) = \int_{x^2}^{1+e^{3x}} \operatorname{sen} t^2 dt$

(g) $F(x) = \int_x^2 \cos t^4 dt$ (h) $F(x) = \int_{\cos x}^{x^3} \ln(t^2 + 1) dt$

3. Seja F uma função definida por $F(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} (x+1)^2 \cdot \operatorname{arcsen} t dt$, para todo o $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Determine $F'(x)$.

4. Seja $f(x) = \int_0^{x^2} \operatorname{sen} t^2 dt$. Calcule $f' \left(\sqrt[4]{\frac{\pi}{4}} \right)$.

5. Seja F a função definida por $F(x) = \int_0^x \left(\int_0^t e^{-u^2} du \right) dt$. Calcule $F''(x)$.

6. Considere a função G definida em \mathbb{R} por $G(x) = \int_0^x e^{3t^4 + 4t^3} dt$.

(a) Estude a função G quanto à monotonia.

(b) Determine, se existirem, os pontos de inflexão ao gráfico de G .

7. Considere a função F definida em \mathbb{R} por

$$F(x) = \int_1^{x^2} (1 + e^{t^2}) dt.$$

- (a) Calcule $F'(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.
- (b) Estude a função F quanto à monotonia e existência de extremos locais.

8. Considere a função F definida em \mathbb{R} por

$$F(x) = \int_0^{x^2} (4 + \operatorname{sen} t) dt.$$

- (a) Calcule $F'(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.
- (b) Estude a função F quanto à monotonia e existência de extremos locais.

9. Usando a Regra de Cauchy, calcule o seguinte limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^{x^2} t \cos(1 - e^{1-t}) dt}{x^2 - 1}.$$

10. Considere as funções F e G definidas em \mathbb{R} , respetivamente, por

$$F(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt \quad \text{e} \quad G(x) = \int_x^{x^2} e^{t^2} dt$$

Usando a Regra de Cauchy calcule o seguinte limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{G(x)}.$$

11. Mostre que a função F definida em $[1, +\infty[$ por $F(x) = \int_0^{\ln x} \frac{e^t}{t+1} dt$ é estritamente crescente.

12. Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x)}{x-1}$ sendo F a função dada por $F(x) = \int_0^{\ln x} \frac{e^t}{t^2+1} dt$.

13. Calcule

(a) $\int_0^2 6x^4 dx$

Resolução:

$$\int_0^2 6x^4 dx = 6 \int_0^2 x^4 dx = 6 \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^2 = 6 \left(\frac{2^5}{5} - 0 \right) = \frac{192}{5}$$

(b) $\int_3^2 \left(\frac{t^2}{3} - \sqrt{t} \right) dt$ (c) $\int_{-4}^{-3} \frac{e^x}{3} dx$ (d) $\int_1^3 \frac{x^3}{\sqrt{x}} dx$

(e) $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$ (f) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x \operatorname{tg} x dx$ (g) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx$

(h) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ (i) $\int_{-\pi}^0 \operatorname{sen}(3x) dx$ (j) $\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx$

(k) $\int_3^6 \frac{1}{x} dx$ (l) $\int_3^{11} \frac{1}{\sqrt{2x+3}} dx$ (m) $\int_0^1 \sqrt[3]{x}(x-1) dx$

(n) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$ (o) $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx$ (p) $\int_1^2 \frac{1}{x^2+2x+5} dx$

14. Calcule

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 4} dx & \text{(b)} \int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx & \text{(c)} \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx \\ \text{(d)} \int_1^e x \ln x dx & \text{(e)} \int_1^e \ln^2 x dx & \end{array}$$

15. Calcule

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \int_0^2 f(x) dx \text{ onde } f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \\ \text{(b)} \int_{-1}^1 f(x) dx \text{ onde } f(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & \text{se } x \in [-1, 0[\\ 7 & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{1+x} & \text{se } x \in]0, 1] \end{cases} \\ \text{(c)} \int_{-1}^3 f(x) dx \text{ onde } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x^2} & \text{se } x \neq 1 \\ 5 & \text{se } x = 1 \end{cases} \\ \text{(d)} \int_0^{2\pi} f(x) dx \text{ onde } f(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ \cos x & \text{se } x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \\ \sin x & \text{se } x \in]\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \end{cases} \end{array}$$

16. Considere a função f definida por $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$.

(a) Determine a primitiva de f que se anula no ponto $x = e^2$.

Resolução: Uma vez que

$$\int f(x) dx = \int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \ln |\ln x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

a primitiva de f que se anula no ponto $x = e^2$ tem de verificar a igualdade

$$\ln |\ln(e^2)| + C = 0.$$

Logo

$$C = -\ln 2$$

e a primitiva de f que se anula no ponto $x = e^2$ é a função F definida por $F(x) = \ln |\ln x| - \ln 2$.

(b) Calcule o valor da área da região do plano situada entre as retas de equações $x = e$ e $x = e^3$, limitada pelo eixo das abcissas e pelo gráfico de f .

Resolução: Uma vez que para todo o $x \geq e$,

$$\ln x \geq \ln e \Leftrightarrow \ln x \geq 1$$

podemos concluir que para todo o $x \in [e, e^3]$, $x \ln x > 0$ e, portanto,

$$\frac{1}{x \ln x} > 0.$$

Como f é contínua e positiva em $[e, e^3]$ a área pedida é dada por

$$\int_e^{e^3} f(x)dx = \left[\ln |\ln x| \right]_e^{e^3} = \ln |\ln(e^3)| - \ln |\ln e| = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3.$$

17. Calcule o valor da área da região limitada do plano situada entre $x = 0$ e $x = 2$ e limitada pelo eixo das abcissas e pelo gráfico da função g definida por $g(x) = x \ln(x+1)$.
18. Calcule o valor da área da região (limitada) do plano situada entre $x = 0$ e $x = 2$ e limitada pelo eixo das abcissas e pelo gráfico da função g definida por $g(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x + 1}$.
19. Seja $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$. Calcule a área da região limitada do plano situada entre as retas de equação $x = 0$ e $x = 2$ e limitada pelo gráfico de f e pelo eixo Ox .

20. Calcule o valor da área da região do plano situada entre os gráficos das funções f e g definidas, respectivamente, por

$$f(x) = \frac{4 + \sin^2 x}{1 + 4x^2} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{\sin^2 x}{1 + 4x^2}$$

e pelas retas de equações $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$.

Resolução: Uma vez que as funções f e g são contínuas em $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ e, para todo o $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$,

$$f(x) = \frac{4 + \sin^2 x}{1 + 4x^2} > \frac{\sin^2 x}{1 + 4x^2} = g(x)$$

podemos afirmar que a área pedida é dada pelo seguinte integral de Riemann:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (f(x) - g(x)) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4}{1 + 4x^2} dx.$$

Como

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4}{1 + 4x^2} dx = \frac{4}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{1 + (2x)^2} dx = 2 \left[\arctg(2x) \right]_0^{\frac{1}{2}} = 2 (\arctg(1) - \arctg(0)) = 2 \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

podemos concluir que a área é igual a $\frac{\pi}{2}$.

21. Calcule a área da região limitada do plano delimitada pelos gráficos das funções f e g definidas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = x$.
22. Calcule a área da região do plano delimitada pelos gráficos das funções f e g definidas, respectivamente, por $f(x) = e^{2x+1}$ e $g(x) = xe^{2x+1}$, e pelas retas de equações $x = -1$ e $x = -\frac{1}{2}$.
23. Calcule a área da região (limitada) de \mathbb{R}^2 delimitada pelos gráficos das funções f e g definidas, respectivamente, por $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = x^2$, e pelas retas $x = 2$ e $y = 0$.
24. Determine a área da região limitada do plano delimitada pelo gráfico da função f definida por $f(x) = x \cos x$ e pelas retas de equação $y = x$, $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$.
25. Exprima, em termos de integrais definidos, o valor da área da região limitada do plano situada entre $x = -\pi$ e $x = \pi$ e limitada pelos gráficos das funções f e g definidas por $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$, respectivamente.

26. Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq (x - 3)^2, y \geq x - 1, y \leq 4\}$.

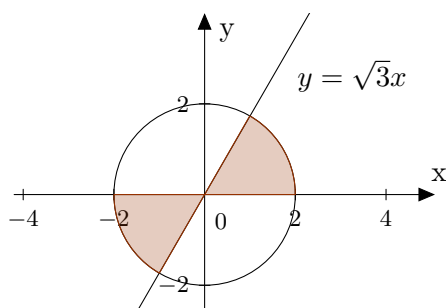
- (a) Represente geometricamente a região A .
- (b) Calcule o valor da área da região A .

27. Calcule a área da região do plano situada entre $x = -\frac{1}{2}$ e $x = 0$ e limitada pelo eixo das abcissas e pelo gráfico da função h definida por

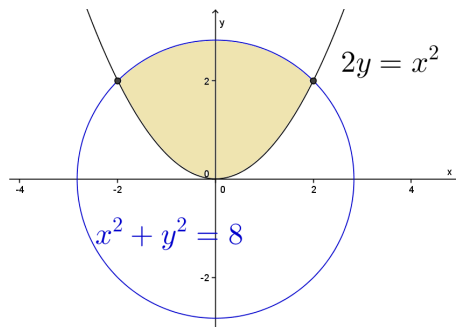
$$h(x) = \frac{\arcsen x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

28. Recorrendo ao cálculo integral, determine o valor da área da região sombreada representada nas figuras seguintes:

(a)



(b)



Exercícios de testes/exames de anos anteriores

29. Diga, justificando, se a função h definida por

$$h(x) = \begin{cases} \operatorname{arccotg}(x^2 - 4) & \text{se } x < 2 \\ \pi & \text{se } x = 2 \\ \cos(1 - e^{x-2}) & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

é integrável (no sentido de Riemann) no intervalo $[-1, 4]$. (*2ª Prova de Avaliação Discreta, Cálculo I - Semestre Extraordinário, 2011/2012*)

30. Considere a função F definida em \mathbb{R} por $F(x) = \int_0^{x^3} te^{\operatorname{sen} t} dt$.

(a) Justifique que F é diferenciável em \mathbb{R} e determine $F'(x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

(b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{\operatorname{sen} x}$. (*2ª Prova de Avaliação Discreta, Cálculo I, 2011/2012*)

31. Considere a função f definida por $f(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$.

(a) Determine $\int f(x) dx$.

(b) Calcule o valor da área da região delimitada pelo gráfico da função f , pelo eixo das abcissas e pelas retas de equações $x = -1$ e $x = \sqrt{3}$. (*2ª Prova de Avaliação Discreta, Cálculo I, 2011/2012*)

32. Sejam I um intervalo de \mathbb{R} , $a \in I$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 (isto é, tal que f'' é contínua). Observando que $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$, mostre que

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-t)f''(t)dt, \quad \forall x \in I.$$

(Sugestão: use o método de integração por partes).

(2ª Prova de Avaliação Discreta, Cálculo I, 2014/2015)

33. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e par. Considere a função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \int_0^{2x} f(t) dt.$$

Mostre que F é uma função ímpar. (Sugestão: use o método de integração por substituição)

(Exame de Recurso, Cálculo I, 2014/2015)

34. Seja $F :]0, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $F(x) = \int_0^{\sin x} \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(4-t^2)}} dt$.

(a) Justifique que F é diferenciável e mostre que $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - \sin^2 x}}$, $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

(b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{\sin x \cos x}$.

(Exame Final, Cálculo I - Agrupamento IV, 2017/2018)

35. Calcule a área da região do plano delimitada pelo gráfico da função f definida por

$$f(x) = \frac{2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}$$

e pelas retas de equações $y = 0$, $x = -1$ e $x = 1$.

(Exame Final, Cálculo I - Agrupamento IV, 2017/2018)

36. Considere a função F de domínio $[-1, 1]$ definida por $F(x) = \int_{\arcsen x}^0 \frac{(\sin t)^2}{e^t + 1} dt$.

(a) Justifique que F é diferenciável em $] -1, 1[$ e determine $F'(x)$ para $x \in] -1, 1[$.

(b) Estude F quanto à monotonia e identifique os extremantes globais de F .

(Exame de Recurso, Cálculo I - Agrupamento IV, 2017/2018)