Funções Trigonométricas Inversas

Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados nos textos da Prof. Doutora Virgínia Santos (indicados na bibliografia).

Def. 1.1

Seja $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função injetiva. A função

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}\colon & CD_f & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & x \end{array}$$

onde x é tal que $f(x) = y$, é designada por função inversa de f.

Dizemos que uma função é invertível se admite inversa.

Obs. 1.2

- f é invertível sse f é injetiva;
- O contradomínio de f^{-1} é D_f (isto é, $CD_{f^{-1}} = D_f$);
- $\forall x \in D_f,\ \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x \ ; \ \forall y \in CD_f,\ \left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y$;
- $\forall x \in D_f,\ \forall y \in CD_f,\quad f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$;
- Os gráficos de f e f^{-1} são simétricos relativamente à reta $y = x$.

Def. 1.3

Função seno: $$\begin{array}{rrcl} \text{sen} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \text{sen}\, x \end{array}$$

Prop. 1.4

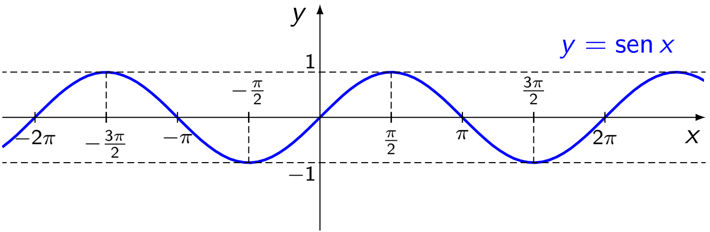
Propriedades da função seno:

- Domínio: $\mathbb{R}$;
- Contradomínio: $[-1, 1]$;
- Função periódica de período 2π, isto é,

$$\text{sen}\, x = \text{sen}(x + 2k\pi), \ \forall x \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ k \in \mathbb{Z};$$

- Função ímpar;
- Não é injetiva.

Gráfico da função seno



Obs. 1.5

A função seno não é injetiva em $\mathbb{R}$.

No entanto, a sua restrição ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ já é injetiva.

Def. 1.6

A restrição principal da função seno é a função

$$\begin{array}{rcccl} f & : & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \operatorname{sen} x \end{array}$$

que já é injetiva.

A inversa de f é chamada de função arco seno, denota-se por arcsen, e define-se do seguinte modo

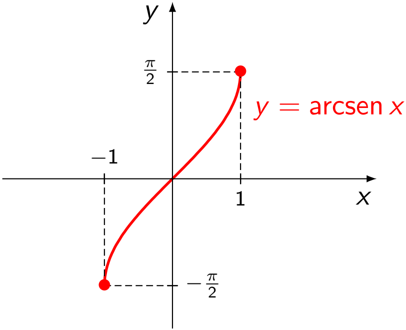
$$\begin{array}{rcccl} \operatorname{arcsen} & : & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & y = \operatorname{arcsen} x \end{array}$$

onde

$$y = \operatorname{arcsen} x \quad \text{sse} \quad \operatorname{sen} y = x, \ \forall x \in [-1,1], \ \forall y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Obs. 1.7

$\operatorname{arcsen} x$ lê-se arco cujo seno é x.



Exer. 1.8

Caracterize a inversa das seguintes funções:

(a) $f(x) = \frac{1}{2}\,\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

(b) $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{2\,\text{arcsen}(1-x)}{3}$

(c) $f(x) = 2\,\text{arcsen}(\sqrt{x}) - \pi$

Def. 1.9

Função cosseno: $$\begin{array}{rccc} \cos : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \cos x \end{array}$$

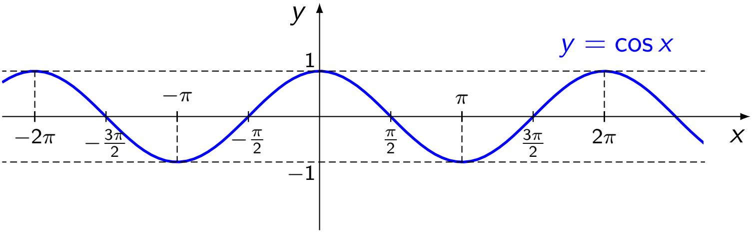
Prop. 1.10

Propriedades da função cosseno:

- Domínio: $\mathbb{R}$;
- Contradomínio: $[-1, 1]$;
- Função periódica de período 2π, isto é,

$$\cos x = \cos(x + 2k\pi), \ \forall x \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ k \in \mathbb{Z};$$

- Função par;
- Não é injetiva.



Obs. 1.11

A função cosseno não é injetiva em $\mathbb{R}$.

No entanto, a sua restrição ao intervalo $[0, \pi]$ já é injetiva.

Def. 1.12

A restrição principal da função cosseno é a função

$$\begin{array}{rccc} f & : & [0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \cos x \end{array}$$

que já é injetiva.

A inversa de f é chamada de função arco cosseno, denota-se por arccos, e define-se do seguinte modo

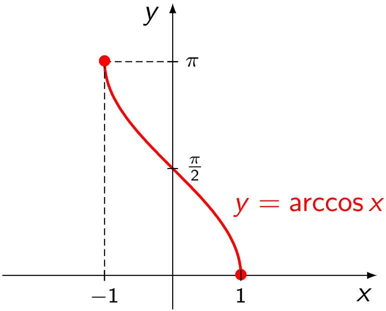
$$\begin{array}{rccc} \text{arccos} & : & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & y = \arccos x \end{array}$$

onde

$$y = \arccos x \quad \text{sse} \quad \cos y = x,\ \forall x \in [-1,1],\ \forall y \in [0,\pi].$$

Obs. 1.13

$\arccos x$ lê-se arco cujo cosseno é x.



Exer. 1.14

Caracterize a inversa das seguintes funções:

(a) $f(x) = \frac{1}{2+\cos x}$

(b) $f(x) = 2\pi - \arccos\left(\frac{x}{2}\right)$

Def. 1.15

Função tangente: $$\begin{array}{rcl} \mathrm{tg} : D \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{tg}\, x = \frac{\mathrm{sen}\, x}{\cos x} \end{array}$$

Prop. 1.16

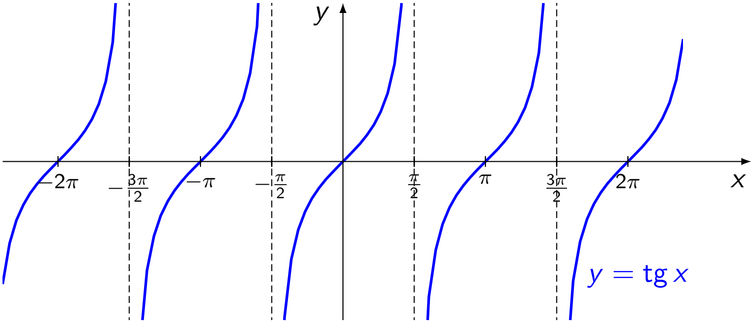
Propriedades da função tangente:

- Domínio: $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$;
- Contradomínio: $\mathbb{R}$;
- Função periódica de período π, isto é,

$$\mathrm{tg}\ x = \mathrm{tg}(x + k\pi),\ \forall x \in D \ \text{ e } \ k \in \mathbb{Z};$$

- Função ímpar;
- Não é injetiva.

Gráfico da função tangente



Obs. 1.17

A função tangente não é injetiva no seu domínio.

No entanto, a sua restrição ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ já é injetiva.

Def. 1.18

A restrição principal da função tangente é a função

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \operatorname{tg} x \end{array}$$

que já é injetiva.

A inversa de f é chamada de função arco tangente, denota-se por arctg, e define-se do seguinte modo

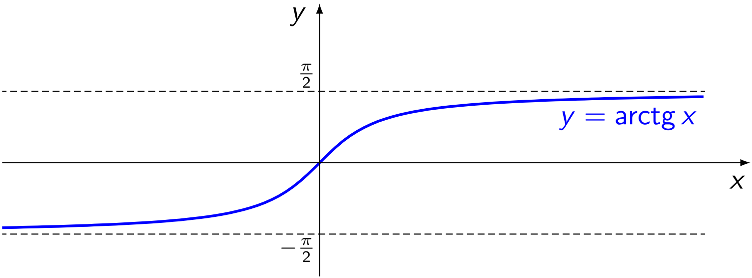
$$\begin{array}{rcccc} \operatorname{arctg} & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & y = \operatorname{arctg} x \end{array}$$

onde

$$y = \operatorname{arctg} x \quad \text{sse} \quad \operatorname{tg} y = x,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[.$$

Obs. 1.19

$\operatorname{arctg} x$ lê-se arco cuja tangente é x.



Exer. 1.20

Caracterize a inversa das seguintes funções:

(a) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2-x}\right)$

(b) $f(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(1-x)$

Def. 1.21

Função cotangente:
$$\begin{array}{rcccl} \operatorname{cotg} & : & D \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \end{array}$$

Prop. 1.22

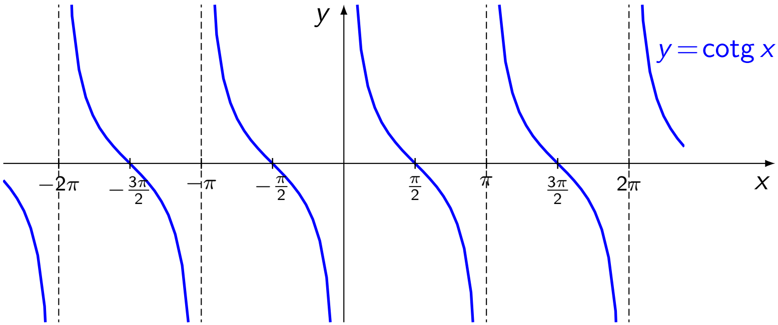
Propriedades da função cotangente:

- Domínio: $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$;
- Contradomínio: $\mathbb{R}$;
- Função periódica de período π, isto é,

$$\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg}(x + k\pi),\ \forall x \in D \ \text{ e } \ k \in \mathbb{Z};$$

- Função ímpar;
- Não é injetiva.

Gráfico da função cotangente



Obs. 1.23

A função cotangente não é injetiva no seu domínio.

No entanto, a sua restrição ao intervalo $]0, \pi[$ já é injetiva.

Def. 1.24

A restrição principal da função cotangente é a função

$$\begin{array}{rcccl} f & : &]0,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \operatorname{cotg} x \end{array}$$

que já é injetiva.

A inversa de f é chamada de função arco cotangente, denota-se por arccotg, e define-se do seguinte modo

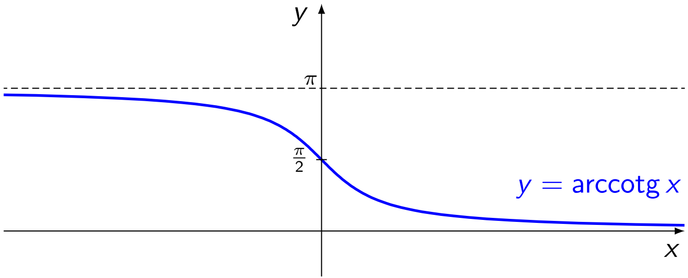
$$\begin{array}{rcccl} \operatorname{arccotg} & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & y = \operatorname{arccotg} x \end{array}$$

onde

$$y = \operatorname{arccotg} x \ \text{ sse } \ \operatorname{cotg} y = x, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall y \in]0,\pi[.$$

Obs. 1.25

$\operatorname{arccotg} x$ lê-se arco cuja cotangente é x.



Exer. 1.26

Caracterize a inversa das seguintes funções:

(a) $f(x) = 2\,\mathrm{cotg}\left(\frac{x}{3}\right)$

(b) $f(x) = \pi + \mathrm{arccotg}\left(\frac{x-1}{2}\right)$

Obs. 1.27

Função	Domínio	Contradomínio
$\operatorname{arcsen} x$	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
$\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$
$\operatorname{arctg} x$	$\mathbb{R}$	$\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$
$\operatorname{arccotg} x$	$\mathbb{R}$	$]0,\pi[$

Def. 1.28

Função secante: $$\begin{array}{rcccl} \sec & : & D \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \sec x = \frac{1}{\cos x} \end{array}$$

Prop. 1.29

Propriedades da função secante:

- Domínio: $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$;
- Contradomínio: $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$;
- Função periódica de período 2π, isto é,

$$\sec x = \sec(x + 2k\pi),\ \forall x \in D \ \text{ e } \ k \in \mathbb{Z};$$

- Função par;
- Não é injetiva;
- $(\sec x)' = \operatorname{tg} x \sec x,\ \forall x \in D$.

Def. 1.30

Função cossecante:
$$\begin{array}{rcrcl} \operatorname{cosec} & : & D \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} \end{array}$$

Prop. 1.31

Propriedades da função cossecante:

- Domínio: $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$;
- Contradomínio: $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$;
- Função periódica de período 2π, isto é,
$$\operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec}(x + 2k\pi),\ \forall x \in D \ \text{ e } \ k \in \mathbb{Z};$$
- Função ímpar;
- Não é injetiva;
- $(\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{cotg} x \operatorname{cosec} x,\ \forall x \in D.$

Prop. 1.32

1. $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x$, para $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
3. $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, para $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
4. $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$
5. $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$
6. $\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$
7. $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$
8. $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$
9. $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$
10. $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$
11. $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$

Teo. 1.33

Teorema da derivada da função inversa
Sejam $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função estritamente monótona e contínua e f^{-1} a inversa de f. Se f é diferenciável em $x_0 \in]a, b[$ e $f'(x_0) \neq 0$, então f^{-1} é diferenciável em $y_0 = f(x_0)$ e

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} .$$

Exer. 1.34

1. Sendo $f : [1, 4] \to \mathbb{R}$ contínua e estritamente crescente tal que $f(2) = 7$ e $f'(2) = \frac{2}{3}$, calcule, caso exista, $(f^{-1})'(7)$.
2. Sabendo que $f(x) = 4x^3 + x + 2$ é invertível, calcule $\left(f^{-1}\right)'(2)$.
3. Seja $f(x) = x^3$. Determine a derivada de f^{-1} utilizando o teorema da função inversa.

Obs. 1.35

Resulta do teorema da derivada da função inversa que:

1. $(\arcsen x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ , \quad \forall x \in]-1,1[$
2. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ , \quad \forall x \in]-1,1[$
3. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}\ , \quad \forall x \in \mathbb{R}$
4. $(\operatorname{arccotg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}\ , \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Exer. 1.36

Prove as fórmulas anteriores usando o teorema da derivada da função inversa.

Obs. 1.37

Sejam u e v funções de x, $k \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

- $\left(u^k\right)' = ku^{k-1}u'$
- $\left(e^u\right)' = u'e^u$
- $\left(a^u\right)' = u'a^u \ln a$
- $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
- $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$
- $(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$
- $(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$
- $(\operatorname{tg} u)' = u' \sec^2 u$
- $(\operatorname{cotg} u)' = -u' \operatorname{cosec}^2 u$
- $(\sec u)' = u' \operatorname{tg} u \sec u$
- $(\operatorname{cosec} u)' = -u' \operatorname{cotg} u \operatorname{cosec} u$
- $(\operatorname{arcsen} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
- $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
- $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$
- $(\operatorname{arccotg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$
- $(u+v)' = u' + v'$
- $(uv)' = u'v + uv'$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Exer. 1.38

1. Seja $f(x) = \ln(\operatorname{arcsen} x)$, com $x \in]0,1[$.
   Calcule $\left(f^{-1}\right)'$ utilizando o teorema da função inversa.

2. Calcule a derivada das seguintes funções:

   (a) $f(x) = \left(1 + x^2\right) \operatorname{arctg} x$

   (b) $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

   (c) $f(x) = \operatorname{arccotg}\left(\operatorname{sen}\left(4x^3\right)\right)$

   (d) $f(x) = \sqrt[3]{\arccos x}$

3. Considere a função $f(x) = \operatorname{arcsen}(1 - x) + \sqrt{2x - x^2}$.

   (a) Determine o domínio de f.

   (b) Mostre que $f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{2x - x^2}}$

1.8.

(a) $D_{f^{-1}} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$
$CD_{f^{-1}} = [-\pi, 0]$
$f^{-1}(y) = \operatorname{arcsen}(2y) - \frac{\pi}{2}$

(b) $D_{f^{-1}} = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$
$CD_{f^{-1}} = [0, 2]$
$f^{-1}(y) = 1 - \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{3y}{2}\right)$

(c) $D_{f^{-1}} = [-\pi, 0]$
$CD_{f^{-1}} = [0, 1]$
$f^{-1}(y) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{y+\pi}{2}\right)$

1.14.

(a) $D_{f^{-1}} = \left[\frac{1}{3}, 1\right]$
$CD_{f^{-1}} = [0, \pi]$
$f^{-1}(y) = \arccos\left(\frac{1}{y} - 2\right)$

(b) $D_{f^{-1}} = [\pi, 2\pi]$
$CD_{f^{-1}} = [-2, 2]$
$f^{-1}(y) = 2\cos y$

1.20.

(a) $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$CD_{f^{-1}} =]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$
$f^{-1}(y) = 2 - \frac{\pi}{\operatorname{arctg} y}$

(b) $D_{f^{-1}} =]0, \pi[$
$CD_{f^{-1}} = \mathbb{R}$
$f^{-1}(y) = 1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$

1.26.

(a) $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$
$CD_{f^{-1}} =]0, 3\pi[$
$f^{-1}(y) = 3\operatorname{arccotg}\left(\frac{y}{2}\right)$

(b) $D_{f^{-1}} =]\pi, 2\pi[$
$CD_{f^{-1}} = \mathbb{R}$
$f^{-1}(y) = 2\operatorname{cotg}(y - \pi) + 1$

1.34.

1. $\frac{3}{2}$
2. 1
3. $\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$

1.38.

1. $\left(f^{-1}\right)'(y) = e^y \cos(e^y)$
2. (a) $2x \operatorname{arctg} x + 1$
   (b) $-\frac{2}{x\sqrt{x^4 - 1}}$
   (c) $-\frac{12x^2\cos(4x^3)}{1+\operatorname{sen}^2(4x^3)}$
   (d) $-\frac{1}{3\sqrt{1-x^2}\sqrt[3]{\arccos^2 x}}$
3. (a) $[0, 2]$

Teoremas do Cálculo Diferencial

Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados nos textos da Prof. Doutora Virgínia Santos (indicados na bibliografia).

Def. 2.1

Sejam $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D_f$.

- a é um maximizante local de f e $f(a)$ diz-se um máximo local de f se existir $\delta > 0$ tal que

$$f(a) \geq f(x), \quad \forall x \in V_\delta(a) \cap D_f.$$

- a é um minimizante local de f e $f(a)$ diz-se um mínimo local de f se existir $\delta > 0$ tal que

$$f(a) \leq f(x), \quad \forall x \in V_\delta(a) \cap D_f.$$

- Aos máximos e mínimos locais chamamos extremos locais.
- Aos maximizantes e minimizantes locais chamamos extremantes locais.

Def. 2.2

Sejam $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D_f$.

- a é um maximizante global de f e $f(a)$ diz-se um máximo global de f se
$$f(a) \geq f(x), \quad \forall x \in D_f.$$
- a é um minimizante global de f e $f(a)$ diz-se um mínimo global de f se
$$f(a) \leq f(x), \quad \forall x \in D_f.$$
- Aos máximos e mínimos globais chamamos extremos globais.
- Aos maximizantes e minimizantes globais chamamos extremantes globais.

Teo. 2.3

Se $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e D_f é um conjunto compacto, então f atinge em D_f o máximo e o mínimo globais (isto é, $\exists\, x_1, x_2 \in D_f$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2),\ \forall x \in D_f$).

Obs. 2.4

Notar que um intervalo $[a, b]$ é um conjunto compacto. Assim, toda a função contínua em $[a, b]$ tem aí máximo e mínimo globais.

Exer. 2.5

Seja $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x + 1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$

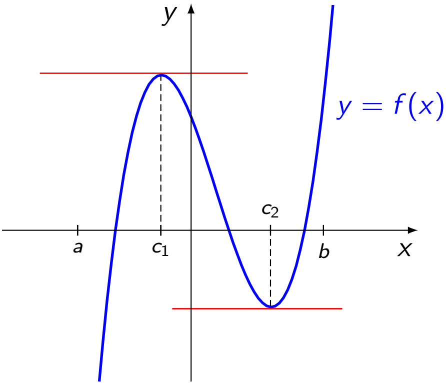
(a) A função f tem mínimo global em $[-1, 1]$?

(b) A alínea (a) contradiz o teorema de Weierstrass?

Prop. 2.6

Seja $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $c \in]a, b[$.
Se c é um extremante local de f, então $f'(c) = 0$.

Ilustração gráfica:



Obs. 2.7

1. O recíproco da proposição do slide anterior não é verdadeiro. De facto, existem funções com derivada nula em determinado ponto e esse ponto não é extremante.

   Por exemplo, $f(x) = x^3$, no ponto $x = 0$.

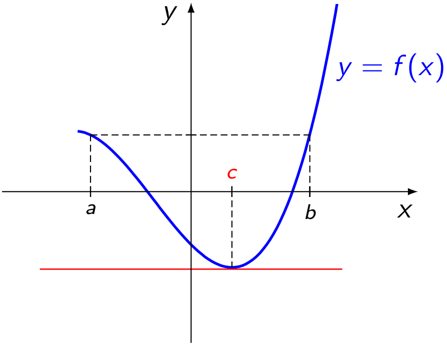
2. Pode acontecer que a derivada de f não exista num dado ponto x_0, mas x_0 ser extremante. Por exemplo:

   - $f(x) = |x|$, no ponto $x_0 = 0$.
   - $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & se \quad x \neq 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \end{cases}$, no ponto $x_0 = 0$

Teo. 2.8

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$.
Se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$

Ilustração Gráfica:



Cor. 2.9

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$.

(i) Entre dois zeros de f existe pelo menos um zero de f'.

(ii) Entre dois zeros consecutivos de f' existe, no máximo, um zero de f.

Exer. 2.10

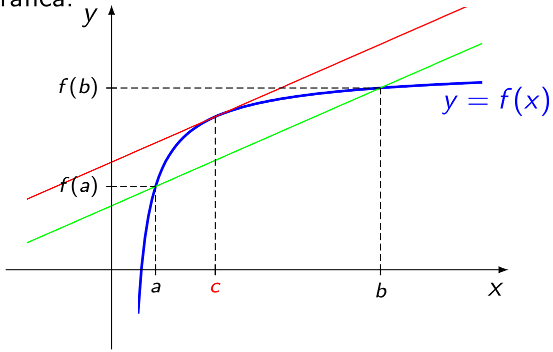
1. Seja f a f.r.v.r. definida por $f(x) = \operatorname{arctg}\left((x-1)^2\right) + 2$. Usando o Teorema de Rolle, mostre que existe $c \in]0, 2[$ tal que $f'(c) = 0$.
2. Mostre que se $a > 0$ a equação $x^3 + ax + b = 0$ não pode ter mais que uma raiz real, qualquer que seja $b \in \mathbb{R}$.
3. Mostre que a função definida por $f(x) = \operatorname{sen} x + x$ tem um único zero no intervalo $[-\pi, \pi]$.

Teo. 2.11

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$. Então, existe $c \in]a, b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ .$$

Ilustração Gráfica:



Exer. 2.12

1 Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se} \quad x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$

(a) Estude f quanto à continuidade em $x = 0$.

(b) Mostre que existe pelo menos um $c \in \left]-\frac{2}{\pi}, 0\right[$ tal que $f'(c) = \frac{2}{\pi}$.

2 Seja $f(x) = \operatorname{arcsen}(\ln x)$.

(a) Determine o domínio de f.

(b) Mostre que existe pelo menos um $c \in]1, e[$ tal que $f'(c) = \frac{\pi}{2(e-1)}$.

3 Seja h uma função de domínio $\mathbb{R}$ tal que $h'(x) = \cos x \cdot e^{\operatorname{sen}^2 x}$ e $h(0) = 0$. Usando o Teorema de Lagrange, mostre que $h(x) \leq e \cdot x$, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$.

Prop. 2.13

Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em I e diferenciável em $\text{int}(I)$. Então

(i) Se $f'(x) = 0$, $\forall x \in \text{int}(I)$, então f é constante em I.

(ii) Se $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in \text{int}(I)$, então f é crescente em I.

(iii) Se $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in \text{int}(I)$, então f é decrescente em I.

(iv) Se $f'(x) > 0$, $\forall x \in \text{int}(I)$, então f é estritamente crescente em I.

(v) Se $f'(x) < 0$, $\forall x \in \text{int}(I)$, então f é estritamente decrescente em I.

Prop. 2.14

Seja $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b] \subseteq D_f$ e diferenciável em $]a, b[$, exceto possivelmente em $c \in]a, b[$. Então,

(i) se $f'(x) > 0, \forall x < c,$ e $f'(x) < 0, \forall x > c$, então $f(c)$ é um máximo local de f.

(ii) se $f'(x) < 0, \forall x < c,$ e $f'(x) > 0, \forall x > c$, então $f(c)$ é um mínimo local de f.

Exer. 2.15

1. Seja $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.
   (a) Determine o domínio de f.
   (b) Estude f quanto à monotonia e existência de extremos locais.
2. Mostre que $g(x)=x+2\operatorname{sen} x-1$ tem um único zero em $]0, \frac{\pi}{2}[$.
3. Mostre que $h(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ é estritamente crescente em $\mathbb{R}$.

Teo. 2.16

Sejam f e g duas funções contínuas em $[a, b]$ e diferenciáveis em $]a, b[$. Se $g'(x) \neq 0$, para todo o $x \in]a, b[$, então existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} .$$

Obs. 2.17

Do Teorema de Cauchy pode estabelecer-se uma regra — Regra de Cauchy — de grande utilidade no cálculo de limites quando ocorrem indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$.

Nos cinco slides seguintes enunciam-se as várias formas dessa regra.

Prop. 2.18

Sejam f e g funções diferenciáveis em $I =]a, b[$ tais que, $\forall x \in I$, $g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$. Se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a^+} g(x) \quad \text{são ambos nulos ou ambos infinitos}$$

e existe o limite

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

então

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Prop. 2.19

Sejam f e g funções diferenciáveis em $I =]a, b[$ tais que, $\forall x \in I$, $g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$. Se

$$\lim_{x \to b^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to b^-} g(x) \quad \text{são ambos nulos ou ambos infinitos}$$

e existe o limite

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

então

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Prop. 2.20

Sejam $I =]a, b[$ e $c \in I$. Sejam f e g funções definidas em I e diferenciáveis em $I \setminus \{c\}$, tais que $g(x) \neq 0, \ \forall x \in I \setminus \{c\}$.
Se $g'(x) \neq 0, \ \forall x \in I \setminus \{c\}$,

$$\lim_{x \to c} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to c} g(x) \quad \text{são ambos nulos ou ambos infinitos}$$

e existe o limite

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

então

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \, .$$

Prop. 2.21

Sejam f e g funções definidas em $I =]a, +\infty[$ e diferenciáveis em I, com $g(x) \neq 0$, $\forall x \in I$. Se $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ são ambos nulos ou ambos infinitos

e

$$\text{existe} \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

então

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Prop. 2.22

Sejam f e g funções definidas em $I =]-\infty, b[$ e diferenciáveis em I, com $g(x) \neq 0$, $\forall x \in I$. Se $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} g(x) \quad \text{são ambos nulos ou ambos infinitos}$$

e

$$\text{existe} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

então

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Exer. 2.23

1 Calcule, caso existam, os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\arcsen x}{3x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\ln(2-x)}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\operatorname{arctg} x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^3}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} x^2 \ln(-x)$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} x e^{\frac{1}{x}}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (x+3)^{\frac{1}{x^2}}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (1+\arcsen x)^{\frac{1}{x}}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} (\ln x)^{\ln x}$

2 Mostre que existe

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x},$$

mas não pode aplicar-se para o seu cálculo a regra de Cauchy.

2.5.

(a) Não

(b) Não

2.12.

1.(a) É contínua em $x = 0$

2.(a) $\left[\frac{1}{e}, e\right]$

2.15.

1.(a) $\mathbb{R}^+$

(b) Est. crescente em $]0, e[$
Est. decrescente em $]e, +\infty[$
Máximo em $x = e$ cujo valor é $\frac{1}{e}$

2.23.

1. (a) $\frac{2}{3}$
(b) 1
(c) 0
(d) 0
(e) 0
(f) $-\infty$
(g) 1
(h) 1
(i) e
(j) 1

2. 1

Integrais Indefinidos

Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados nos textos da Prof. Doutora Virgínia Santos (indicados na bibliografia).

Def. 3.1

Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, onde I é um intervalo não degenerado (isto é, com mais do que um ponto) de $\mathbb{R}$.
Chama-se primitiva ou antiderivada de f a toda a função F diferenciável em I tal que, para todo o $x \in I$,

$$F'(x) = f(x).$$

Se f admite uma primitiva em I dizemos que f é primitivável em I.

Obs. 3.2

- Caso $I = [a, b]$, dizer que F é diferenciável em I significa que, para todo o $x \in]a, b[$, F é diferenciável em x e que existem e são finitas $F'_+(a)$ e $F'_-(b)$.
  Convenções análogas para $I = [a, b[$ ou $I =]a, b]$.
- Toda a primitiva de uma função é uma função contínua.

Exer. 3.3

Indique uma primitiva das seguintes funções (no intervalo indicado)

(a) $f(x) = 2x$, em $\mathbb{R}$

(b) $f(x) = e^x$, em $\mathbb{R}$

(c) $f(x) = \cos x$, em $\mathbb{R}$

(d) $f(x) = \frac{1}{x}$, em $\mathbb{R}^+$

Prop. 3.4

Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função e $F\colon I \to \mathbb{R}$ uma primitiva de f em I. Então, para cada $C \in \mathbb{R}$, $G(x) = F(x) + C$ é também uma primitiva de f em I.

Prop. 3.5

Se $F\colon I \to \mathbb{R}$ e $G\colon I \to \mathbb{R}$ são duas primitivas de $f\colon I \to \mathbb{R}$, então existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) - G(x) = C$, para todo o $x \in I$.

Def. 3.6

À família de todas as primitivas de uma função f chamamos integral indefinido de f. Denota-se esse conjunto de funções por

$$\int f(x)\, dx.$$

A f chamamos função integranda e a x variável de integração.

Obs. 3.7

1. Atendendo à segunda proposição do slide anterior,

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C,\ C \in \mathbb{R},$$

onde F é uma primitiva de f.

2. Se f for diferenciável, então

$$\int f'(x)\, dx = f(x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Obs. 3.8

1. $$\int x^p \, dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C\,, \quad C \in \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

2. $$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |\, x \,| + C\,, \quad C \in \mathbb{R} \quad (\text{onde } \; x \in \mathbb{R}^+ \text{ ou } \; x \in \mathbb{R}^-)$$

3. $$\int e^x \, dx = e^x + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

4. $$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\,, \quad C \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

5. $$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

6. $$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

Obs. 3.8 (cont.)

7. $$\int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x + C\ , \quad C \in \mathbb{R}$$

8. $$\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\operatorname{cotg} x + C\ , \quad C \in \mathbb{R}$$

9. $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \operatorname{arcsen} x + C\ , \quad C \in \mathbb{R}$$

10. $$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arctg} x + C\ , \quad C \in \mathbb{R}$$

11. $$\int \sec x\ \operatorname{tg} x\, dx = \sec x + C\ , \quad C \in \mathbb{R}$$

12. $$\int \operatorname{cosec} x\ \operatorname{cotg} x\, dx = -\operatorname{cosec} x + C\ , \quad C \in \mathbb{R}$$

Prop. 3.9

Sejam f e g funções definidas em I e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ não simultaneamente nulos.
Se f e g são primitiváveis em I, então $\alpha f + \beta g$ é primitivável em I e

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx\ .$$

Exer. 3.10

Calcule:

(a) $\displaystyle\int (2^x - 3 \operatorname{sen} x)\ dx$

(b) $\displaystyle\int (x+3)x^2\, dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2}\, dx$

(d) $\displaystyle\int \sqrt[5]{x^3}\, dx$

Prop. 3.11

Sejam I e J dois intervalos de números reais, $f : I \to \mathbb{R}$ uma função primitivável e $g : J \to \mathbb{R}$ uma função tal que a composta $f \circ g$ está definida.
Se g é diferenciável em J, então $(f \circ g)g'$ é primitivável e tem-se

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,,$$

onde F é uma primitiva de f.

Exemplo de aplicação

$$\int 2x\cos(x^2)\,dx = \operatorname{sen}(x^2) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

Obs. 3.12

(Esta lista generaliza os slides 52 e 53, e é uma consequência da Prop. 3.11)

Seja f uma função diferenciável.

1. $$\int f'(x)(f(x))^p\,dx = \frac{(f(x))^{p+1}}{p+1} + C\,, \quad C \in \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$$
2. $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$$
3. $$\int f'(x)e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$$
4. $$\int f'(x)a^{f(x)}\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C\,, \quad C \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$
5. $$\int f'(x)\,\mathrm{sen}(f(x))\,dx = -\cos(f(x)) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$$
6. $$\int f'(x)\cos(f(x))\,dx = \mathrm{sen}(f(x)) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

Obs. 3.12 (cont.)

7. $$\int f'(x)\sec^2(f(x))\,dx = \operatorname{tg}(f(x)) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

8. $$\int f'(x)\operatorname{cosec}^2(f(x))\,dx = -\operatorname{cotg}(f(x)) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

9. $$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}(f(x)) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

10. $$\int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}\,dx = \operatorname{arctg}(f(x)) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

11. $$\int f'(x)\sec(f(x))\operatorname{tg}(f(x))\,dx = \sec(f(x)) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

12. $$\int f'(x)\operatorname{cosec}(f(x))\operatorname{cotg}(f(x))\,dx = -\operatorname{cosec}(f(x)) + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Exer. 3.13

Determine os seguintes integrais indefinidos:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^4}{1+x^5}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\sqrt{2}x)\,dx$

(c) $\displaystyle\int x7^{x^2}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx$

(e) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos^5 x\,dx$

(f) $\displaystyle\int e^{\operatorname{tg} x} \sec^2 x\,dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+9}\,dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+9)^2}\,dx$

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+9}\,dx$

(j) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

(k) $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

(l) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

(m) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

(n) $\displaystyle\int \frac{5}{x\ln^3 x}\,dx$

(o) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

Exer. 3.14

1. Determine a primitiva da função $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + 1$ que se anula no ponto $x = 2$.

2. Determine a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que
$$f'(x) = \frac{2e^x}{3 + e^x} \qquad \text{e} \qquad f(0) = \ln 4.$$

3. Sabendo que a função f satisfaz a igualdade
$$\int f(x)\,dx = \operatorname{sen} x - x\cos x - \frac{1}{2}x^2 + c,\ \ c \in \mathbb{R},$$
determinar $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Prop. 3.15

Sejam f e g duas funções de x diferenciáveis em I. Então

$$\int f'(x) \cdot g(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx.$$

Exemplo de aplicação

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{x}_{f'(x)} \underbrace{\ln x}_{g(x)}\, dx &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x}\, dx \\
&= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2}\, dx \\
&= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Obs. 3.16

- Esta fórmula é útil sempre que a função integranda se pode escrever como o produto de duas funções e, além disso, é conhecida uma primitiva de pelo menos uma delas.
- Sabendo primitivar apenas uma das funções, escolhe-se essa para primitivar e deriva-se a outra função.
- Quando conhecemos uma primitiva de cada uma das funções, devemos escolher para derivar a função que mais se simplifica por derivação (se alguma delas se simplificar).
- Por vezes é necessário efetuar várias aplicações sucessivas da fórmula de integração por partes.
- Por vezes obtém-se novamente o integral que se pretende determinar. Nesses casos, interpreta-se a igualdade obtida como uma equação em que a incógnita é o integral que se pretende determinar.

Exer. 3.17

Determine, usando a técnica de integração por partes, os seguintes integrais indefinidos:

(a) $\int x \cos x \, dx$

(b) $\int e^{-3x}(2x+3)\, dx$

(c) $\int \operatorname{arctg} x \, dx$

(d) $\int x^3 \ln x \, dx$

(e) $\int x^3 e^{x^2} \, dx$

(f) $\int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx$

(g) $\int \operatorname{sen}(\ln x) \, dx$

(h) $\int \ln^2 x \, dx$

Obs. 3.18

1. **Potências ímpares de $\operatorname{sen} x$ ou $\cos x$**
   Destaca-se uma unidade à potência ímpar e o fator resultante passa-se para a co-função usando $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

2. **Potências pares de $\operatorname{sen} x$ ou $\cos x$**
   Passam-se para o arco duplo através das fórmulas
   $$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2} \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

3. **Produtos onde existem fatores tipo $\operatorname{sen}(mx)$ ou $\cos(nx)$**
   Aplicam-se as fórmulas
   - $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big);$
   - $\cos x \cos y = \frac{1}{2}\big(\cos(x+y) + \cos(x-y)\big);$
   - $\operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{2}\big(\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)\big);$

   ou faz-se integração por partes.

Obs. 3.18 (cont.)

4. **Potências pares e ímpares de tg x ou cotg x**
   Destaca-se $\operatorname{tg}^2 x$ ou $\operatorname{cotg}^2 x$ e aplicam-se as fórmulas
   $$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1 \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1.$$

5. **Potências pares de sec x ou cosec x**
   Destaca-se $\sec^2 x$ ou $\operatorname{cosec}^2 x$ e ao fator resultante aplicam-se as fórmulas
   $$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x.$$

6. **Potências ímpares de sec x ou cosec x**
   Destaca-se $\sec^2 x$ ou $\operatorname{cosec}^2 x$ e primitiva-se por partes escolhendo esse fator para primitivar.

Exer. 3.19

Determine os seguintes integrais indefinidos:

(a) $\displaystyle\int \cos^2 x\, dx$

(b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\, dx$

(c) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^6 x\, dx$

(d) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$

(e) $\displaystyle\int \sec^3 x\, dx$

(f) $\displaystyle\int \sec^6 x\, dx$

(g) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos^2 x\, dx$

(h) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\, dx$

(i) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(3x)\cos(4x)\, dx$

(j) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(-3x)\, dx$

Prop. 3.20

Sejam I e J intervalos de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função primitivável e $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e invertível tal que $\varphi(J) \subseteq I$. Então a função $(f \circ \varphi)\varphi'$ é primitivável e, sendo H uma primitiva de $(f \circ \varphi)\varphi'$, tem-se que $H \circ \varphi^{-1}$ é uma primitiva de f.

Obs. 3.21

Na prática, quando determinamos uma primitiva recorrendo à proposição anterior, usando a mudança de variável $x = \varphi(t)$, escrevemos, por abuso de linguagem,

$$\int f(x)\, dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = H(\varphi^{-1}(x)) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Exemplo de aplicação da técnica de integração por substituição

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{2x}}\,dx$$

Substituição de variável: $\sqrt{2x} = t$, donde resulta $x = \frac{t^2}{2}$, $t \geq 0$.

$\varphi(t) = \frac{t^2}{2}$ é diferenciável e invertível em $\mathbb{R}_0^+$ e $\varphi'(t) = t$. Assim

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\sqrt{2x}}\,dx &= \int \frac{t}{1+t}\,dt \\
&= \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)\,dt \\
&= t - \ln|1+t| + C\,, \quad C \in \mathbb{R} \\
&= \sqrt{2x} - \ln(1+\sqrt{2x}) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Exer. 3.22

Determine, usando a técnica de integração por substituição, os seguintes integrais indefinidos:

(a) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int x(2x+5)^{10}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt[3]{x}}\,dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}+2}\,dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x(1+\ln^2 x)}\,dx$

Obs. 3.23

As **substituições trigonométricas** dadas na seguinte tabela permitem transformar a integração de uma função que envolve radicais na integração de uma função trigonométrica.

função com o radical	substituição
$\sqrt{a^2 - b^2x^2}$, $a, b > 0$	$x = \frac{a}{b}\operatorname{sen} t$, com $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
$\sqrt{a^2 + b^2x^2}$, $a, b > 0$	$x = \frac{a}{b}\operatorname{tg} t$, com $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
$\sqrt{b^2x^2 - a^2}$, $a, b > 0$	$x = \frac{a}{b}\sec t$, com $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$

Exer. 3.24

Determine os seguintes integrais indefinidos:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}\,dx$

(b) $\displaystyle\int x\sqrt{8+x^2}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-7}}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \sqrt{4-(x+1)^2}\,dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$

(h) $\displaystyle\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$

Def. 3.25

Uma função cuja expressão analítica admite a forma

$$\frac{N(x)}{D(x)}$$

onde N e D são polinómios em x com coeficientes reais e D é não nulo, diz-se uma função racional.

Caso $\text{grau}(N) < \text{grau}(D)$ dizemos que $\frac{N(x)}{D(x)}$ é uma fração própria.

Prop. 3.26

Se $\text{grau}(N) \geq \text{grau}(D)$, então existem polinómios Q e R tais que

$$N(x) = D(x)Q(x) + R(x),$$

com $\text{grau}(R) < \text{grau}(D)$.

A Q e R chamamos quociente e resto da divisão de N por D, respetivamente.

Obs. 3.27

Assim, caso grau$(N) \geq$ grau(D),

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \underbrace{Q(x)}_{\text{polinómio}} + \underbrace{\frac{R(x)}{D(x)}}_{\text{fração própria}}$$

Como

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx = \int Q(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{D(x)}\,dx \;,$$

e a integração de funções polinomiais é imediata, a integração de funções racionais reduz-se à integração de frações próprias, que por sua vez se pode reduzir à integração de frações simples.

Def. 3.28

Chamamos fração simples a toda a fração do tipo

$$\frac{A}{(x-\alpha)^p} \quad \text{ou} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^q},$$

onde $p, q \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $B, C \in \mathbb{R}$ não simultaneamente nulos e $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ são tais que $\beta^2 - 4\gamma < 0$.

Exemplos de frações simples

$$\frac{2}{x-1}, \quad \frac{1}{x^2}, \quad \frac{x-2}{x^2+x+1}, \quad \frac{1}{(x^2+x+2)^3}$$

Prop. 3.29

Toda a fração própria pode ser decomposta numa soma de frações simples.

Obs. 3.30

Fração a decompor: $\dfrac{R(x)}{D(x)}$, com $\mathrm{grau}(R) < \mathrm{grau}(D)$

Procedimento

1. Decompor $D(x)$ em fatores irredutíveis:

$$D(x)=a(x-\alpha_1)^{p_1}\ldots(x-\alpha_n)^{p_n}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{q_1}\ldots(x^2+\beta_m x+\gamma_m)^{q_m}$$

   onde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $p_i, q_j \in \mathbb{N}$, $\alpha_i, \beta_j, \gamma_j \in \mathbb{R}$, com $\beta_j^2 - 4\gamma_j < 0$, para $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$.

2. Fazer corresponder a cada factor de $D(x)$ uma determinada fração simples de acordo com o seguinte:
   (i) Ao fator de $D(x)$ do tipo $(x-\alpha)^r$ ($r \in \mathbb{N}$) corresponde

$$\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(x-\alpha)^r}$$

   onde $A_1, \ldots, A_r$ são constantes reais a determinar.

Procedimento (cont.)

(ii) Ao fator de $D(x)$ do tipo

$$(x^2+\beta x+\gamma)^s, \quad \text{com} \quad \beta^2-4\gamma<0 \quad \text{e} \quad s\in\mathbb{N}$$

corresponde

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+\beta x+\gamma}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+\beta x+\gamma)^2}+\cdots+\frac{B_sx+C_s}{(x^2+\beta x+\gamma)^s}$$

onde B_i, C_i são constantes reais a determinar, $\quad i=1,\ldots,s$.

3. Escrever $\frac{R(x)}{D(x)}$ como soma dos elementos simples identificados no ponto anterior e determinar as constantes que neles ocorrem, usando o método dos coeficientes indeterminados.

Integração de Frações Simples

1. Fração do tipo: $\dfrac{A}{(x-\alpha)^r}$

   Se $r = 1$, $\displaystyle\int \frac{A}{x-\alpha}\,dx = A\ln|x-\alpha| + C,\ \ C \in \mathbb{R}$

   Se $r \neq 1$, $\displaystyle\int \frac{A}{(x-\alpha)^r}\,dx = \frac{A(x-\alpha)^{-r+1}}{-r+1} + C,\ \ C \in \mathbb{R}$

2. Fração do tipo: $\dfrac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^s}$

   Reduz-se à primitivação de frações do tipo (i) ou (ii):

   (i) $\dfrac{t}{(1+t^2)^s}$

   (ii) $\dfrac{1}{(1+t^2)^s}$

Integração das frações do tipo (i) e (ii) do slide anterior

(i) Fração do tipo: $\dfrac{t}{(1+t^2)^s}$

Se $s = 1$, $\displaystyle\int \frac{t}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\ln|1+t^2| + C,\ C \in \mathbb{R}$

Se $s \neq 1$, $\displaystyle\int \frac{t}{(1+t^2)^s}\,dt = \frac{(1+t^2)^{-s+1}}{2(-s+1)} + C,\ C \in \mathbb{R}$

(ii) Fração do tipo: $\dfrac{1}{(1+t^2)^s}$

Se $s = 1$, $\displaystyle\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \operatorname{arctg} t + C,\ C \in \mathbb{R}$

Se $s \neq 1$, aplica-se o método de integração por partes recursivamente, partindo de $\displaystyle\int \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

Exer. 3.31

Determine os seguintes integrais indefinidos:

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-5x+6}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{(x-2)(x-3)(x+1)}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{x+2}{(x-1)(x+3)^2}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x(x^2+4)}\,dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{x^3+4x-3}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+4x+5}\,dx$

Exer. 3.32

Determine os seguintes integrais indefinidos:

(a) $\displaystyle\int e^{2x} \operatorname{sen}\left(e^{2x}\right)\, dx$

(b) $\displaystyle\int x\sqrt{(1-x^2)^3}\, dx$

(c) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{arctg} x\, dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{(\operatorname{arcsen} x)^3}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

(e) $\displaystyle\int x \ln(1+x^2)\, dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\, dx$

(g) $\displaystyle\int \sqrt{9-x^2}\, dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{6x^2-7x-1}{(2x^2+1)(x-2)}\, dx$

3.3.
(a) x^2
(b) $e^x + 3$
(c) $\operatorname{sen} x$
(d) $\ln x$

3.10.
(a) $\frac{2^x}{\ln 2} + 3\cos x + c, \ c \in \mathbb{R}$
(b) $\frac{x^4}{4} + x^3 + c, \ c \in \mathbb{R}$
(c) $\ln|x| - \frac{3}{x} + c, \ c \in \mathbb{R}$
(d) $\frac{5}{8} x^{\frac{8}{5}} + c, \ c \in \mathbb{R}$

3.13.
(a) $\frac{1}{5}\ln|1 + x^5| + c, \ c \in \mathbb{R}$
(b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\sqrt{2}x) + c, \ c \in \mathbb{R}$
(c) $\frac{7^{x^2}}{2\ln 7} + c, \ c \in \mathbb{R}$
(d) $-\ln|\cos x| + c, \ c \in \mathbb{R}$
(e) $-\frac{\cos^6 x}{6} + c, \ c \in \mathbb{R}$
(f) $e^{\operatorname{tg} x} + c, \ c \in \mathbb{R}$
(g) $\frac{1}{2}\ln|x^2 + 9| + c, \ c \in \mathbb{R}$
(h) $-\frac{1}{x+9} + c, \ c \in \mathbb{R}$
(i) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) + c, \ c \in \mathbb{R}$
(j) $\operatorname{arctg}(e^x) + c, \ c \in \mathbb{R}$
(k) $\frac{3}{2}\operatorname{arcsen}(x^2) + c, \ c \in \mathbb{R}$
(l) $-\frac{1}{2}\sqrt{1 - x^4} + c, \ c \in \mathbb{R}$
(m) $\frac{\ln^2 x}{2} + c, \ c \in \mathbb{R}$
(n) $-\frac{5}{2}\frac{1}{\ln^2 x} + c, \ c \in \mathbb{R}$
(o) $\ln|\ln x| + c, \ c \in \mathbb{R}$

3.14.
1. $-\frac{1}{x} + x - \frac{3}{2}$
2. $2\ln|3 + e^x| - \ln 4$
3. $\frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$

3.17.
(a) $x\operatorname{sen} x + \cos x + c, \ c \in \mathbb{R}$
(b) $-\frac{e^{-3x}(6x+11)}{9} + c, \ c \in \mathbb{R}$
(c) $x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c, \ c \in \mathbb{R}$
(d) $\frac{x^4}{4}\left(\ln x - \frac{1}{4}\right) + c, \ c \in \mathbb{R}$
(e) $\frac{e^{x^2}(x^2-1)}{2} + c, \ c \in \mathbb{R}$
(f) $\frac{e^{2x}(2\operatorname{sen} x - \cos x)}{5} + c, \ c \in \mathbb{R}$
(g) $\frac{x(\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x))}{2} + c, \ c \in \mathbb{R}$
(h) $x(\ln^2 x - 2\ln x + 2) + c, \ c \in \mathbb{R}$

3.19.
(a) $\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)) + c, \ c \in \mathbb{R}$
(b) $-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c, \ c \in \mathbb{R}$
(c) $\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \operatorname{tg} x - x + c, \ c \in \mathbb{R}$
(d) $\frac{12x - 8\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}(4x)}{32} + c, \ c \in \mathbb{R}$
(e) $\frac{\sec x \operatorname{tg} x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|}{2} + c, c \in \mathbb{R}$
(f) $\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + \frac{2\operatorname{tg}^3 x}{3} + \operatorname{tg} x + c, \ c \in \mathbb{R}$
(g) $-\frac{\cos^3 x}{3} + c, \ c \in \mathbb{R}$
(h) $-\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{2\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + c, c \in \mathbb{R}$
(i) $\frac{1}{2}\left(\cos x - \frac{\cos(7x)}{7}\right) + c, \ c \in \mathbb{R}$
(j) $\frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}(5x)}{5} - \operatorname{sen} x\right) + c, \ c \in \mathbb{R}$

3.22.

(a) $-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{7}(1-x)^{\frac{7}{2}}+c,\ c\in\mathbb{R}$

(b) $\frac{1}{48}(2x+5)^{12}-\frac{5}{44}(2x+5)^{11}+c, c\in\mathbb{R}$

(c) $2\operatorname{arctg}(\sqrt{e^x-1})+c,\ c\in\mathbb{R}$

(d) $-2\cos(\sqrt{x})+c,\ c\in\mathbb{R}$

(e) $\frac{3}{2}\ln|x^{\frac{2}{3}}+1|+c,\ c\in\mathbb{R}$

(f) $\operatorname{arctg}(\ln x)+c,\ c\in\mathbb{R}$

(g) $-\frac{1}{e^x+1}+c,\ c\in\mathbb{R}$

(h) $\frac{1}{2}\ln(\ln^2 x+1)+c,\ c\in\mathbb{R}$

3.24.

(a) $-\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x}+c,\ c\in\mathbb{R}$

(b) $\frac{1}{3}(8+x^2)^{\frac{3}{2}}+c,\ c\in\mathbb{R}$

(c) $\frac{\sqrt{x^2-7}}{7x}+c,\ c\in\mathbb{R}$

(d) $-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}+\frac{2}{x}\right|+c, c\in\mathbb{R}$

(e) $2\operatorname{arcsen}\left(\frac{x+1}{2}\right)+\frac{(x+1)\sqrt{4-(x+1)^2}}{2}+c,\ c\in\mathbb{R}$

(f) $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x-\frac{x\sqrt{1-x^2}}{4}+c, c\in\mathbb{R}$

(g) $\sqrt{x^2-1}-\arccos\left(\frac{1}{x}\right)+c, c\in\mathbb{R}$

(h) $2\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x(2-x^2)\sqrt{4-x^2}}{4}+c,\ c\in\mathbb{R}$

3.31.

(a) $3\ln|x-3|-2\ln|x-2|+c, c\in\mathbb{R}$

(b) $-\ln|x-2|+\frac{5}{4}\ln|x-3|-\frac{1}{4}\ln|x+1|+c,\ c\in\mathbb{R}$

(c) $\frac{1}{16}\left(-\frac{4}{x+3}+3\ln|x-1|-3\ln|x+3|\right)+c,\ c\in\mathbb{R}$

(d) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+c, c\in\mathbb{R}$

(e) $\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{4}\ln(4+x^2)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)+c,\ c\in\mathbb{R}$

(f) $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)+c,\ c\in\mathbb{R}$

(g) $x+\frac{1}{x}-\ln|x|+2\ln|x-1|+c, c\in\mathbb{R}$

(h) $\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5)-\operatorname{arctg}(x+2)+c,\ c\in\mathbb{R}$

3.32.

(a) $-\frac{1}{2}\cos(e^{2x})+c,\ c\in\mathbb{R}$

(b) $-\frac{1}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}}+c,\ c\in\mathbb{R}$

(c) $\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x-\frac{x^2}{6}-\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+c,\ c\in\mathbb{R}$

(d) $\frac{(\operatorname{arcsen} x)^4}{4}+c,\ c\in\mathbb{R}$

(e) $\frac{1+x^2}{2}(\ln(1+x^2)-1)+c, c\in\mathbb{R}$

(f) $\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt{x}-6\sqrt[6]{x}+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+c,\ c\in\mathbb{R}$

(g) $\frac{9}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right)+\frac{x\sqrt{9-x^2}}{2}+c, c\in\mathbb{R}$

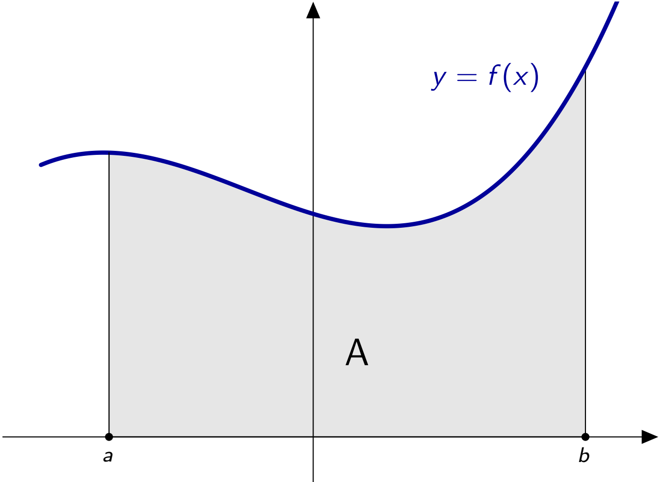
(h) $\ln|x-2|+\ln(2x^2+1)+\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x)+c,\ c\in\mathbb{R}$

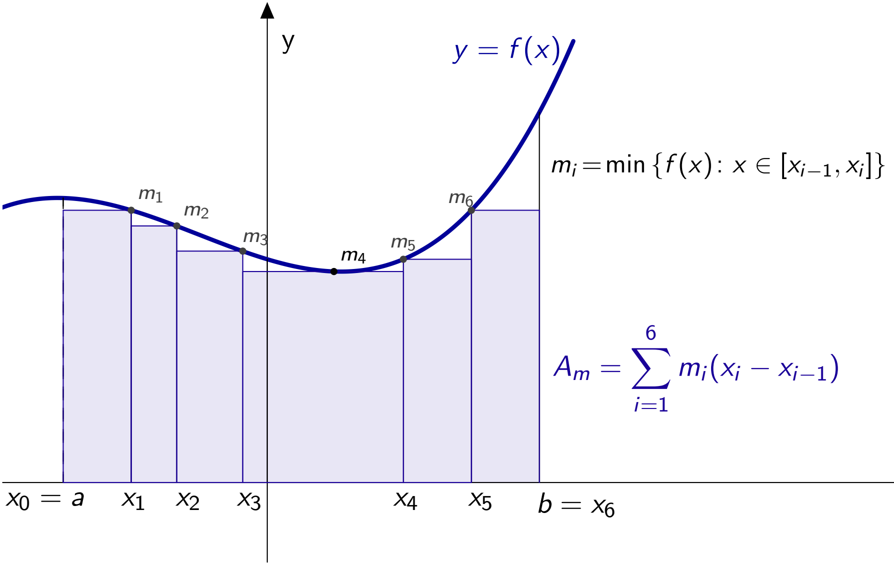
Integrais Definidos

Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados nos textos da Prof. Doutora Virgínia Santos (indicados na bibliografia).

Questão:

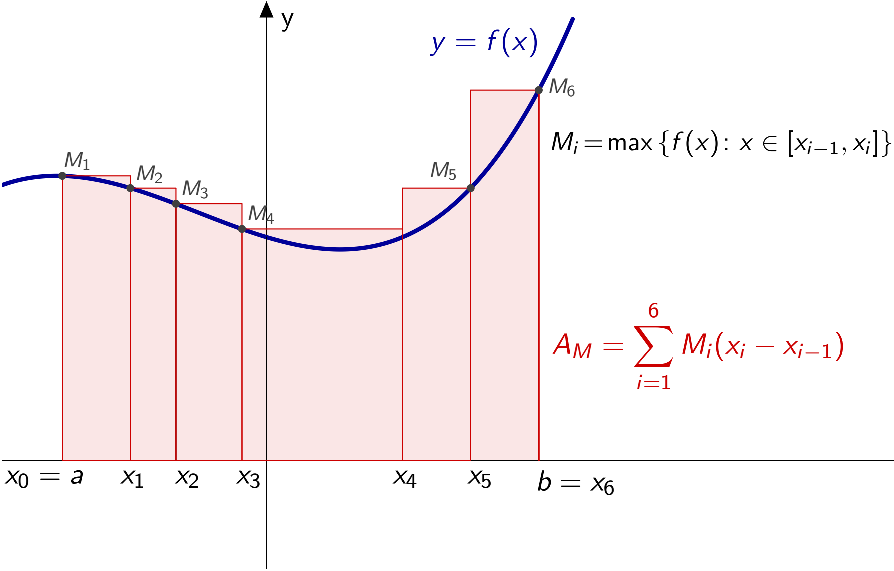
Como calcular a área delimitada pelo gráfico de f, pelas retas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$?

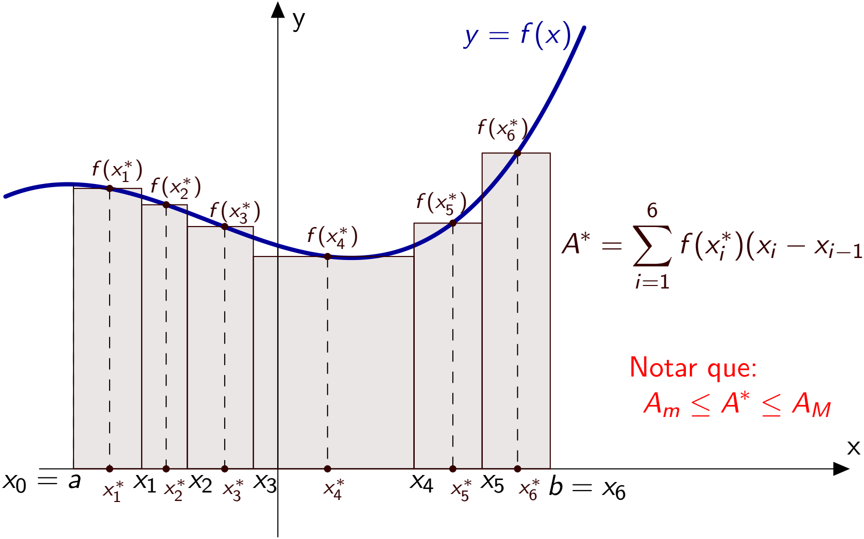




$m_i = \min\{f(x) \colon x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

$$A_m = \sum_{i=1}^{6} m_i(x_i - x_{i-1})$$


y
$y = f(x)$
M_1
M_2
M_3
M_4
M_5
M_6
$M_i = \max\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$
$A_M = \sum_{i=1}^{6} M_i(x_i - x_{i-1})$
$x_0 = a$
x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
$b = x_6$



$$A^* = \sum_{i=1}^{6} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

Notar que:

$$A_m \leq A^* \leq A_M$$

Def. 4.1

- Chama-se partição de $[a, b]$ a todo o subconjunto finito de $[a, b]$

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

tal que $a \equiv x_0 < x_1 < \cdots < x_n \equiv b$.

- Chama-se diâmetro de $\mathcal{P}$, e denota-se por $\Delta\mathcal{P}$, à maior das amplitudes dos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, isto é,

$$\Delta\mathcal{P} = \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

- Chama-se seleção de $\mathcal{P}$ a todo o conjunto

$$\mathcal{C} = \{x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\}$$

tal que $x_1^* \in [x_0, x_1]$, $x_2^* \in [x_1, x_2]$, $\ldots$, $x_n^* \in [x_{n-1}, x_n]$.

Def. 4.2

Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ uma partição de $[a, b]$ e $\mathcal{C} = \{x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\}$ uma sua seleção. Chama-se soma de Riemann de f associada à partição $\mathcal{P}$ e seleção $\mathcal{C}$ à seguinte soma,

$$S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C}) := \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) \; .$$

Exer. 4.3

1. Determine uma partição $\mathcal{P}$ de $[0, 4]$ com 4 pontos e uma sua seleção $\mathcal{C}$.
2. Calcular a soma de Riemann de $f(x) = \sqrt{x}$ associada à partição $\mathcal{P}$ e seleção $\mathcal{C}$ anteriores.

Obs. 4.4

Nos slides anteriores, as somas A_m, A_M e A^* são somas de Riemann de f para uma mesma partição de $[a, b]$ em 6 sub-intervalos, para três seleções diferentes.

Def. 4.5

Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $I \in \mathbb{R}$. Diz-se que I é o integral de Riemann (ou integral definido) de f em $[a, b]$ (ou de a para b) se para toda a sucessão $(\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de partições do intervalo $[a, b]$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} (\Delta\mathcal{P}_n) = 0$$

se tem

$$\lim_{n\to+\infty} S_f\left(\mathcal{P}_n, \mathcal{C}_n\right) = I$$

para toda a sucessão $(\mathcal{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}_n$ é uma seleção de $\mathcal{P}_n$. Caso exista I nas condições anteriores, diz-se que f é integrável em $[a, b]$ e escreve-se

$$I = \int_a^b f(x)\, dx\ .$$

limite superior de integração

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

variável de integração

função integranda

limite inferior de integração

Obs. 4.6

- A variável de integração é uma variável muda, i.e., podemos escrever
  $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$, por exemplo.
- Sendo f integrável em $[a, b]$, escrevemos, por convenção, que:
  - $\int_a^a f(x)\,dx = 0$;
  - Se $a > b$, então $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

Exer. 4.7

1. Sabendo que f definida por $f(x) = x$ é integrável em $[0, 1]$, mostre, usando a definição de integral de Riemann, que

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

2. Seja $k \in \mathbb{R}$. Sabendo que f definida por $f(x) = k$ é integrável no intervalo $[a, b]$, mostre, usando a definição de integral de Riemann, que

$$\int_a^b k\,dx = k(b - a)$$

Obs. 4.8

O cálculo do valor de $\int_a^b f(x)\,dx$ usando a definição pode por vezes ser complicado. Mais à frente veremos como determinar o valor do integral conhecendo apenas uma primitiva de f em $[a, b]$.

Exer. 4.9

Verifique que a função definida por

$$h(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 & se \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

é limitada mas não é integrável em $[0, 1]$.

Prop. 4.10

(Condição necessária de integrabilidade) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função. Se f é integrável em $[a, b]$, então f é limitada em $[a, b]$.

Obs. 4.11

- A proposição anterior permite concluir que
  f não é limitada em $[a, b]$ $\Rightarrow$ f não é integrável em $[a, b]$.
- A proposição anterior é apenas necessária, isto é, existem funções limitadas num intervalo que não são integráveis nesse intervalo (ver Exer. 4.9).

Exer. 4.12

Mostre que f definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & se \quad x \neq 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \end{cases}$ não é integrável em qualquer intervalo $[a, b]$, onde $a < 0 < b$.

Prop. 4.13

Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função.

1. Se f for contínua em $[a,b]$, então f é integrável em $[a,b]$.
2. Se f for limitada em $[a,b]$ e descontínua apenas num número finito de pontos, então f é integrável em $[a,b]$.
3. Se f for monótona em $[a,b]$, então f é integrável em $[a,b]$.

Prop. 4.14

Sejam f e g funções definidas em $[a,b]$. Se f é integrável em $[a,b]$ e g difere de f apenas num número finito de pontos (isto é, $f(x) = g(x)$, para todo o $x \in [a,b]$, exceto para um número finito de valores de x), então

$$g \text{ é integrável em } [a,b] \text{ e } \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Exer. 4.15

Diga, justificando, se as seguintes funções são integráveis no intervalo considerado:

1. $f(x) = \cos(x^2 - 2x)$, em $[0, 4]$

2. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{se} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ 2 & \text{se} \quad x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$, em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

3. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se} \quad x \in [-2, 0[\\ 2 & \text{se} \quad x = 0 \\ x & \text{se} \quad x \in]0, 1] \end{cases}$, em $[-2, 1]$

4. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se} \quad x \in [3, 7] \ \text{e} \ x \notin \mathbb{N} \\ 1 & \text{se} \quad x \in [3, 7] \cap \mathbb{N} \end{cases}$, em $[3, 7]$

Prop. 4.16

Sejam f e g funções integráveis em $[a,b]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $f+g$ é integrável em $[a,b]$ e
$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx;$$
2. αf é integrável em $[a,b]$ e $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx;$
3. $f \cdot g$ é integrável em $[a,b]$;
4. f é integrável em qualquer sub-intervalo $[c,d]$ de $[a,b]$;
5. Se $c \in]a,b[$, então f é integrável em $[a,c]$ e em $[c,b]$ e
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,;$$

Prop. 4.16 (cont.)

6. Se $f(x) \geq 0$, para todo o $x \in [a, b]$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$;
7. Se $f(x) \leq g(x)$, para todo o $x \in [a, b]$, então
$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx\,;$$
8. Se $m \leq f(x) \leq M$, para todo o $x \in [a, b]$, onde $m, M \in \mathbb{R}$, então
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a)\,;$$
9. $|f|$ é integrável em $[a, b]$ e $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx\,.$

Exer. 4.17

1. Mostre que $\int_0^2 e^{-x^2}\,dx \geq 0$.

2. Sabendo que

$$\int_1^3 f(x)\,dx = 5 \;\text{ e }\; \int_7^1 f(x)\,dx = -11,$$

calcule $\int_3^7 f(x)\,dx$.

3. Mostre que se f é uma função contínua e estritamente crescente no intervalo $[1,3]$, então

$$f(1) \leq \frac{1}{2}\int_1^3 f(x)\,dx \leq f(3).$$

Teo. 4.18

Seja f uma função integrável em $[a,b]$ e

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt\,,\quad x\in[a,b].$$

Então

(i) F é contínua em $[a,b]$;

(ii) se f é contínua em $c\in]a,b[$, então F é diferenciável em c e $F'(c)=f(c)$.

Cor. 4.19

Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$.
Então F é diferenciável em $[a,b]$ e tem-se que

$$F'(x)=f(x),\ \forall x\in[a,b],$$

isto é,

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'=f(x),\ \forall x\in[a,b].$$

Exer. 4.20

1. Calcule $F'(x)$ sendo F a f.r.v.r. dada por

   (a) $F(x)=\int_1^x \left(\operatorname{sen} t^2+e^{-t^2}\right) dt$ (b) $F(x)=\int_x^2 \cos t^4\, dt$

2. Seja f a função definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = x \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ e seja

   $$F(x) = \int_1^x f(t)\, dt, \quad \text{para } x > 1.$$

   Justifique que F é diferenciável em $x = 2$ e calcule $F'(2)$.

3. Mostre que se f é uma função contínua e não negativa em $[a, b]$ e $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = 0$, então $f(x) = 0$, $\forall x \in [a, b]$.

   Sugestão: Considere a função $F(t) = \int_a^t f(x)\, dx$ e use o Teo. 4.18.

Cor. 4.21

Seja f uma função contínua num intervalo $[a, b]$.
Então existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\int_a^b f(t)\,dt = f(c)(b-a)\ .$$

Exer. 4.22

Seja $f(x) = x^2$ e $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt$.

1. Justifique que a função F é contínua em $[1, 4]$.
2. Calcule $F(1)$ e $F'(2)$.
3. Mostre que existe um $c \in]1, 4[$ tal que $F(4) = 3c^2$.

Cor. 4.23

Se f é contínua em $[a,b]$, então $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, $x\in[a,b]$, é uma primitiva de f em $[a,b]$.

Cor. 4.24

Derivação de integrais com limites de integração variáveis: Sejam I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua em $]a,b[$ e $g_1:I\to\mathbb{R}$ e $g_2:I\to\mathbb{R}$ duas funções diferenciáveis em I tais que $g_1(I)\subseteq]a,b[$ e $g_2(I)\subseteq]a,b[$.

Então a função H definida em I por

$$H(x)=\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)\,dt\ ,$$

é diferenciável em I e

$$H'(x)=f\big(g_2(x)\big)g_2'(x)-f\big(g_1(x)\big)g_1'(x),\quad \forall x\in I\ .$$

Exer. 4.25

1 Calcule $F'(x)$ sendo F a f.r.v.r. dada por

(a) $F(x)=\displaystyle\int_{x^3}^{\cos x} \ln(t^2+1)\,dt$ (b) $F(x)= x^3 \displaystyle\int_1^x e^{-t^2}\,dt$

2 Determine $k \in \mathbb{R}$ de modo que $F'(1) = 0$, sendo F a função definida em $\mathbb{R}^+$ por

$$F(x) = \int_x^{k \ln x} e^{-t^2}\,dt.$$

3 Considere a função F definida em $\mathbb{R}$ por

$$F(x) = \int_0^{x^2} (4 + \operatorname{sen} t)\,dt.$$

(a) Calcule $F'(x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

(b) Estude a função F quanto à monotonia e existência de extremos locais.

Exer. 4.26

1. Considere a função F definida em $\mathbb{R}$ por

$$F(x) = \int_0^{x^3} t\, e^{\operatorname{sen} t}\, dt.$$

   (a) Justifique que F é diferenciável em $\mathbb{R}$ e determine $F'(x)$.

   (b) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{\operatorname{sen} x}$

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um função contínua. Considere a função φ dada por

$$\varphi(x) = \int_{e^x}^{1+x^2} f(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

   (a) Justifique que φ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e determine $\varphi'(x)$.

   (b) Mostre que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x} = -f(1)$.

Prop. 4.27

Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a,b]$ e se $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma primitiva de f então

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)\,.$$

Obs. 4.28

Notação: $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b = \Big[F(x)\Big]_a^b$

Exemplos de aplicação:

1. $\displaystyle\int_1^2 (x^2-1)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 = \frac{8}{3} - 2 - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{4}{3}$
2. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{y \ln y} dy = \Big[\ln|\ln y|\Big]_e^{e^2} = \ln|\ln(e^2)| - \ln|\ln(e)| = \ln(2)$

Exer. 4.29

1. Calcule

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{-\pi}^0 \operatorname{sen}(3x)\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_3^{11} \frac{1}{\sqrt{2x+3}}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$

(f) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2+2x-3}\,dx$

2. Calcule $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx$ onde $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{1+x^2} & \text{se} \quad x\in[-1,0[\\ 7 & \text{se} \quad x=0 \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{se} \quad x\in]0,1] \end{cases}$

Prop. 4.30

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Exemplo de aplicação:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\cos x\,dx &= \Big[\operatorname{sen} x\,.\,x\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx\\ &= 0 - \Big[-\cos x\Big]_0^\pi\\ &= \cos\pi - \cos 0 = 2\end{aligned}$$

Exer. 4.31

Calcule: (a) $\displaystyle\int_0^1 (x+2)e^x\,dx$ (b) $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,dx$

Prop. 4.32

Sejam f uma função contínua em I e

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & J & \longrightarrow & I \\ & t & \mapsto & x=\varphi(t) \end{array}$$

diferenciável em J e tal que φ' é contínua em J.
Sejam $a, b \in I$ e $c, d \in J$ tais que $\varphi(c)=a$ e $\varphi(d)=b$. Então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Obs. 4.33

I e J denotam intervalos não degenerados de $\mathbb{R}$.

Exer. 4.34

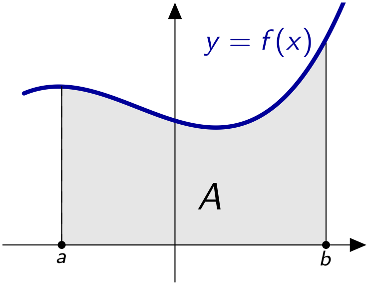
Calcule: (a) $\displaystyle\int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x+4}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$

Prop. 4.35

Se f é uma função contínua em $[a, b]$ tal que $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$, então a área da região plana delimitada pelo gráfico de f e pelas retas $y = 0$, $x = a$ e $x = b$ é dada por

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ilustração gráfica



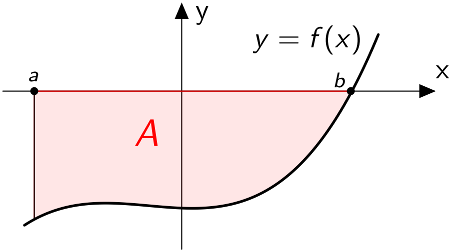
$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Prop. 4.36

Se f é uma função contínua em $[a, b]$ tal que $f(x) \leq 0$, $\forall x \in [a, b]$, então a área da região plana delimitada pelo gráfico de f e pelas retas $y = 0$, $x = a$ e $x = b$ é dada por

$$-\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ilustração gráfica



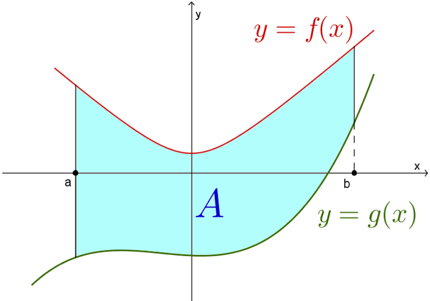
$$A = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Prop. 4.37

Se f e g são funções contínuas em $[a, b]$ tais que $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$, então a área da região plana delimitada pelos gráficos de f e de g e pelas retas $x = a$ e $x = b$ é dada por

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx.$$

Ilustração gráfica



$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

Exer. 4.38

1. Calcule a área da região delimitada pelos gráficos das funções $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = x^2$ e pelas retas $x = 2$ e $y = 0$.

2. Calcule a área da região do plano situada entre $x = -\frac{1}{2}$ e $x = 0$ e limitada pelo eixo das abcissas e pelo gráfico da função h definida por
$$h(x) = \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

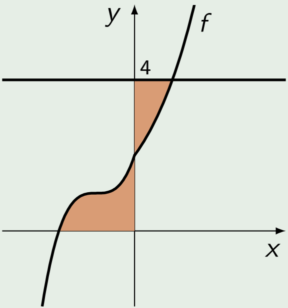
3. Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq (x - 3)^2, y \geq x - 1, y \leq 4\}$.
   (a) Represente geometricamente a região A.

   (b) Calcule o valor da área da região A.

Exer. 4.39

Calcule a área da seguinte região sombreada, onde

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^3 + 1 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ 2^{x+1} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}.$$



4.3.

1. Por exemplo:
   $\mathcal{P} = \{0, 1, 3, 4\}$
   $\mathcal{C} = \{0, 2, 4\}$
2. $2\sqrt{2} + 2$

4.15.

1. Sim
2. Não
3. Sim
4. Sim

4.17.

2. 6

4.20.

1. (a) $\operatorname{sen}(x^2) + e^{-x^2}$
   (b) $-\cos(x^4)$
2. $-2\ln 2$

4.22.

2. $F(1) = 0$; $F'(2) = 4$

4.25.

1. (a) $-\operatorname{sen} x \ln(\cos^2 x + 1) - 3x^2 \ln(x^6 + 1)$
   (b) $3x^2 \int_1^x e^{-t^2} + x^3 e^{-x^2}$
2. $k = e^{-1}$
3. (a) $2x(4 + \operatorname{sen}(x^2))$
   (b) Est. decresc. em $\mathbb{R}^-$
   Est. cresc. em $\mathbb{R}^+$
   Mín 0 em $x = 0$

4.26.

1. (a) $3x^5 e^{\operatorname{sen}(x^3)}$
   (b) 0
2. (a) $2x\, f(1+x^2) - e^x f(e^x)$

4.29.

1. (a) $\ln 2$
   (b) $-\frac{2}{3}$
   (c) $\frac{\pi}{6}$
   (d) 2
   (e) $\frac{1}{2}$
   (f) $-\frac{\ln 3}{4}$
2. $\frac{\pi}{2} + \ln 2$

4.31.

(a) $2e - 1$

(b) $\frac{e^2+1}{4}$

4.34.

(a) $\frac{\ln 3}{4}$

(b) $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

4.38.

1. $\frac{1}{3} + \ln 2$
2. $\frac{\pi^2}{72}$
3. (b) $\frac{37}{6}$

4.39. $6 - \frac{2}{\ln 2}$

Integrais Impróprios

Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados nos textos da Prof. Doutora Virgínia Santos (indicados na bibliografia).

Obs. 5.1

A definição de integral de Riemann exige que a função integranda, f, esteja definida num intervalo fechado e limitado, I, e que f seja limitada. Vamos agora estender este conceito omitindo uma (ou as duas) dessas condições, passando ao estudo do que chamamos Integrais Impróprios.

Os Integrais Impróprios podem ser de três espécies:

1.ª Espécie: I é ilimitado

2.ª Espécie: f é ilimitada ou não definida em alguns pontos de I

3.ª Espécie: I é ilimitado e f é ilimitada ou não definida em alguns pontos de I

Def. 5.2

Integral impróprio de 1.ª espécie no limite superior de integração

Seja $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a, t]$, $\forall t \geq a$.
Se existe e é finito o limite

$$\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\, dx$$

então o integral impróprio $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ diz-se convergente e escreve-se

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\, dx.$$

Caso contrário, o integral em causa diz-se divergente.

Exemplo de aplicação:

Como

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \lim_{t\to+\infty}\left[\operatorname{arctg}(x)\right]_0^t\\ &= \lim_{t\to+\infty}\operatorname{arctg} t\\ &= \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

o integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx$ é convergente e

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

Exer. 5.3

1. Determine a natureza dos seguintes integrais impróprios e, em caso de convergência, calcule o seu valor:

(a) $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \cos(x)dx$ (b) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{(x+2)^2}dx$ (c) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{(\ln x)^3}{x}dx$

2. Prove que o integral impróprio $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ é:

divergente se $\alpha \leq 1$;

convergente se $\alpha > 1$ e, neste caso, $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha - 1}$.

3. Prove que o integral impróprio $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{\beta x}\,dx$ é:

divergente se $\beta \geq 0$;

convergente se $\beta < 0$ e, neste caso, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{\beta x}\,dx = -\frac{1}{\beta}$.

Def. 5.4

Integral impróprio de 1.ª espécie no limite inferior de integração

Seja $f :]-\infty, a] \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[t, a]$, $\forall t \leq a$. Se existe e é finito o limite

$$\lim_{t \to -\infty} \int_t^a f(x)\, dx$$

então o integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)\, dx$ diz-se convergente e escreve-se

$$\int_{-\infty}^a f(x)\, dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^a f(x)\, dx.$$

Caso contrário, o integral em causa diz-se divergente.

Exemplo de aplicação:

Como

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to-\infty}\int_t^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \lim_{t\to-\infty}[\operatorname{arctg}(x)]_t^1 \\
&= \lim_{t\to-\infty}(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg} t) \\
&= \frac{3\pi}{4},
\end{aligned}$$

o integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ é convergente e

$$\int_{-\infty}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{3\pi}{4}\,.$$

Exer. 5.5

1. Determine a natureza dos seguintes integrais impróprios e, em caso de convergência, calcule o seu valor:

   (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx$

   (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{4-x}\,dx$

   (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{4}{1+(x+1)^2}\,dx$

2. Estude a natureza do seguinte integral impróprio em função do parâmetro $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$$\int_{-\infty}^{0} a^x\,dx$$

Prop. 5.6

Sejam $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ e $g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ funções integráveis em $[a, t]$, $\forall t \geq a$. Então verificam-se as seguintes condições:

1. Se $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ são convergentes, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx$ é convergente, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e
$$\int_a^{+\infty} (\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x)\,dx + \beta \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

2. Se $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ é divergente, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} (\alpha f(x))\,dx$ é divergente, $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Obs. 5.7

Resultado análogo é válido para integrais impróprios de 1.ª espécie no limite inferior de integração.

Prop. 5.8

Sejam $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a, t]$, $\forall t \geq a$, e $b > a$. Então os integrais impróprios

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_b^{+\infty} f(x)\,dx$$

têm a mesma natureza (*i.e.*, ou são ambos convergentes ou ambos divergentes). Em caso de convergência, tem-se que

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{b} f(x)\,dx + \int_b^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Obs. 5.9

Resultado análogo, com as devidas adaptações, é válido para integrais impróprios de 1.ª espécie no limite inferior de integração.

Exemplos de aplicação:

1. Pelo Exercício 7.3.2 tem-se que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx \text{ converge e que } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2}.$$

Portanto

$$\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2.$$

2. Como, atendendo ao Exercício 7.3.2, o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2\,dx$ é divergente, então o integral impróprio $\displaystyle\int_3^{+\infty} x^2\,dx$ também é divergente.

Def. 5.10

Integral impróprio de 1.º espécie em ambos os limites de integração

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[\alpha, \beta]$ para todos os $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha < \beta$.

1. Se, para algum $a \in \mathbb{R}$, os integrais impróprios

   $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ são ambos convergentes

   dizemos que o integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ é convergente e escrevemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx\,.$$

Def. 5.11 (cont.)

2. Se, para algum $a \in \mathbb{R}$, pelo menos um dos integrais impróprios

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \quad \text{ou} \quad \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$

é divergente dizemos que o integral impróprio $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ é divergente.

Exer. 5.12

Determine a natureza dos seguintes integrais impróprios e, em caso de convergência, calcule o seu valor:

(a) $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ (b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ (c) $\int_{-\infty}^{+\infty} 2^x\,dx$

Prop. 5.13

Sejam f e g duas funções definidas em $[a, +\infty[$, integráveis em $[a, t]$, $\forall t \geq a$, tais que

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \ ,$$

para todo o $x \in [a, +\infty[$. Então:

(i) se $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ é convergente, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ é convergente.

(ii) se $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ é divergente, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ é divergente.

Obs. 5.14

Com ligeiras adaptações, pode enunciar-se o mesmo critério para integrais impróprios de 1.ª espécie, impróprios no limite inferior de integração.

Exemplo de aplicação:

Usando o Critério de Comparação estudar a natureza do integral

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}\, dx\,.$$

Notar que, para todo o $x \in [1, +\infty[$ temos

$$0 \leq \operatorname{sen} \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}\,. \text{ (justifique!)} \tag{1}$$

Uma vez que o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ é convergente e que a desigualdade (1) se verifica, pelo Critério de Comparação, o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}\, dx$ é convergente.

Prop. 5.15

Sejam f e g duas funções definidas em $[a, +\infty[$ e integráveis em $[a, t]$, $\forall t \geq a$, tais que $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$, $\forall x \in [a, +\infty[$. Seja

$$L = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \, .$$

Então:

(i) Se $L \in \mathbb{R}^+$, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ e $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ têm a mesma natureza.

(ii) Se $L = 0$ e $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ é convergente, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ é convergente.

(iii) Se $L = +\infty$ e $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ é divergente, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ é divergente.

Exemplo de aplicação:

Usando o Critério do Limite estudar a natureza do integral

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}\, dx \,.$$

Notar que, $\forall x \in [1, +\infty[$, $\operatorname{sen} \frac{1}{x^2} \geq 0$ e $\frac{1}{x^2} > 0$. Além disso

$$L = \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = 1 \,.$$

Uma vez que $L \in \mathbb{R}^+$ e que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ é convergente, pelo Critério do Limite, o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}\, dx$ é convergente.

Obs. 5.16

Com ligeiras adaptações, pode enunciar-se o Critério do Limite para integrais impróprios de 1.ª espécie, impróprios no limite inferior de integração.

Exemplo de aplicação:

Estudo da natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{(x-1)^2}\,dx$.

$\forall x \in]-\infty, 0]$, $\frac{e^x}{(x-1)^2} > 0$ e $\frac{1}{(x-1)^2} > 0$.

Uma vez que

$$L = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{e^x}{(x-1)^2}}{\frac{1}{(x-1)^2}} = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

e que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$ é convergente (verifique!), concluímos, pelo Critério do Limite, que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{(x-1)^2}\,dx$ é convergente.

Exer. 5.17

Estude, utilizando o critério de comparação ou o critério do limite, a natureza dos seguintes integrais impróprios:

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^{\frac{5}{2}}}\, dx$

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{5x^2 - 3}{x^8 + x - 1}\, dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{x^2}\, dx$

(d) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{4 + \sqrt{x}}\, dx$

(e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2(\frac{1}{x})}{x^7 + 2x + 1}\, dx$

(f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x^3 + 3x}{2 + x^2}\, dx$

Def. 5.18

Seja $f\colon [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ integrável em $[a,t]$, para todo o $t\in[a,+\infty[$. Dizemos que o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

é absolutamente convergente, se o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$$

é também convergente.

Prop. 5.19

Seja $f\colon [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ integrável em $[a,t]$, para todo o $t\in[a,+\infty[$. Se o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

é absolutamente convergente, então também é convergente.

Obs. 5.20

Com ligeiras adaptações, pode definir-se convergência absoluta e enunciar-se a mesma proposição para integrais impróprios de 1.ª espécie, impróprios no limite inferior de integração.

Exer. 5.21

Verifique se os seguintes integrais impróprios são absolutamente convergentes:

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\, dx$

(b) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+2x^4}\, dx,\;$ para todo o $n \in \mathbb{N}$

Def. 5.22

Integral impróprio de 2.ª espécie no limite inferior de integração

Seja $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[t, b]$, $\forall a < t \leq b$. Se existe e é finito

$$\lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\, dx$$

dizemos que o integral impróprio $\int_a^b f(x)\, dx$ é convergente e escrevemos, por definição,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\, dx \; .$$

Caso contrário, dizemos que o integral impróprio é divergente.

Def. 5.23

Integral impróprio de 2.ª espécie no limite de integração superior

Seja $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a, t]$, $\forall a \leq t < b$.
Se existe e é finito

$$\lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\, dx$$

dizemos que o integral impróprio $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ é convergente e escrevemos, por definição,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\, dx\ .$$

Caso contrário, dizemos que o integral impróprio é divergente.

Def. 5.24

Integral impróprio de 2.ª espécie em ambos os limites de integração

Seja $f:]a, b[\to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[t_1, t_2]$, para todos os t_1 e t_2 tais que $a < t_1 < t_2 < b$.

Dizemos que o integral impróprio $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ é convergente se, para algum $c \in]a, b[$, os integrais

$$\int_a^c f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_c^b f(x)\,dx$$

são ambos convergentes e escreve-se

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

Caso contrário, dizemos que o integral impróprio é divergente.

Def. 5.25

Integral impróprio de 2.ª espécie num ponto interior do intervalo de integração

Seja f uma função definida em $[a, b]$ exceto possivelmente em $c \in]a, b[$, e integrável em $[a, t]$, para todo o $a \leq t < c$ e em $[r, b]$, para todo o $c < r \leq b$. Se os integrais impróprios

$$\int_a^c f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_c^b f(x)\,dx \quad \text{forem ambos convergentes,}$$

então o integral impróprio $\int_a^b f(x)\,dx$ diz-se convergente e escreve-se

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

Caso contrário, dizemos que o integral impróprio é divergente.

Exer. 5.26

Determine a natureza dos seguintes integrais impróprios e, em caso de convergência, calcule o seu valor:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{-3}^3 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{1}{|x|}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$

Obs. 5.27

As propriedades, definições e critérios de convergência apresentados para os integrais de 1.ª espécie têm as suas versões para os integrais de 2.ª espécie.
Nos slides seguintes apresentamos esses resultados para o caso dos integrais de 2.ª espécie no limite inferior de integração, para os outros o estudo faz-se analogamente.

Prop. 5.28

Sejam $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ e $g :]a, b] \to \mathbb{R}$ funções integráveis em $[t, b]$, para todo o $t \in]a, b]$. Então verificam-se as seguintes condições:

1. Se $\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_a^b g(x)\,dx$ são convergentes, então $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx$ é convergente, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e
$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx \,.$$
2. Se $\int_a^b f(x)\,dx$ é divergente, então $\int_a^b (\alpha f(x))\,dx$ é divergente, para todo o $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Prop. 5.29

Sejam $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[t, b]$, para todo o $t \in]a, b]$, e $a < b' < b$. Então os integrais impróprios

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_a^{b'} f(x)\,dx$$

têm a mesma natureza (*i.e.*, ou são ambos convergentes ou ambos divergentes). Em caso de convergência, tem-se que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{b'} f(x)\,dx + \int_{b'}^b f(x)\,dx.$$

Prop. 5.30

Sejam f e g duas funções definidas em $]a,b]$, integráveis em $[t,b]$, para todo o $t \in]a,b]$, tais que

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \ ,$$

para todo o $x \in]a,b]$. Então:

(i) se $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ é convergente, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ é convergente.

(ii) se $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ é divergente, então $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ é divergente.

Prop. 5.31

Sejam f e g duas funções definidas em $]a,b]$ e integráveis em $[t,b]$, $\forall t \in]a,b]$, tais que $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$, $\forall x \in]a,b]$. Seja

$$L = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} .$$

Então:

(i) Se $L \in \mathbb{R}^+$, então $\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_a^b g(x)\,dx$ têm a mesma natureza.

(ii) Se $L = 0$ e $\int_a^b g(x)\,dx$ é convergente, então $\int_a^b f(x)\,dx$ é convergente.

(iii) Se $L = +\infty$ e $\int_a^b g(x)\,dx$ é divergente, então $\int_a^b f(x)\,dx$ é divergente.

Def. 5.32

Seja $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ integrável em $[t, b]$, para todo o $t \in]a, b]$.
Dizemos que o integral impróprio

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ é absolutamente convergente},$$

se o integral impróprio

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \text{ é também convergente.}$$

Prop. 5.33

Seja $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ integrável em $[t, b]$, para todo o $t \in]a, b]$.
Se o integral impróprio

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

é absolutamente convergente, então também é convergente.

Exer. 5.34

1. Seja $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Prove que o integral impróprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ é:

   divergente se $\alpha \geq 1$;

   convergente se $\alpha < 1$ e, neste caso, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}$.

2. Estude a natureza dos seguintes integrais impróprios:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\pi}{1-\sqrt{x}}\,dx$

   (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\,dx$

Def. 5.35

Integral impróprio de 3.ª espécie do tipo $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$*,*
onde f *é ilimitada ou não está definida em* $x = a$*.*

Seja $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ integrável em $[t, t']$, quaisquer que sejam $t, t' \in \mathbb{R}$ tais que $a < t < t'$.
Dizemos que o integral impróprio $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ é convergente se, para algum $c \in]a, +\infty[$, os integrais impróprios $\int_a^c f(x)\,dx$ e $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ forem ambos convergentes e escrevemos

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx$$

Caso contrário, dizemos que o integral impróprio é divergente.

Def. 5.36

Integral impróprio de 3.ª espécie do tipo $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$, *onde* f *é ilimitada ou não está definida em* $x = b$.

Seja $f :]-\infty, b[\to \mathbb{R}$ integrável em $[t, t']$, quaisquer que sejam $t, t' \in \mathbb{R}$ tais que $t < t' < b$.

Dizemos que o integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ é convergente se, para algum $c \in]-\infty, b[$, os integrais impróprios $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ e $\int_{c}^{b} f(x)\,dx$ forem ambos convergentes e escrevemos

$$\int_{\infty}^{b} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{b} f(x)\,dx$$

Caso contrário, dizemos que o integral impróprio é divergente.

Obs. 5.37

- Definem-se de modo análogo os integrais impróprios de 3.ª espécie dos tipos

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

  onde f não está definida ou é ilimitada em algum ponto do interior do intervalo de integração.

- Atendendo às definições apresentadas, para estudar a natureza de integrais impróprios de 3.ª espécie, devemos decompor o intervalo de integração de modo conveniente e estudar a natureza de integrais impróprios de 1.ª e de 2.ª espécies (correspondentes).

Exer. 5.38

1. Estude a natureza dos seguintes integrais impróprios e, em caso de convergência, calcule o seu valor.

   (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

   (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx$

2. Calcule, caso exista, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ sendo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{se} \quad x \leq 0 \\ \operatorname{arctg} x & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

5.3.

1. (a) Divergente
   (b) $\frac{1}{4}$
   (c) Divergente

5.5.

1. (a) $-\frac{1}{2}$
   (b) Divergente
   (c) 3π
2. Diverge se $0 < a < 1$;
   Converge se $a > 1$
   e tem valor $\frac{1}{\ln a}$

5.12.

(a) Divergente

(b) π

(c) Divergente

5.17.

(a) Convergente

(b) Convergente

(c) Divergente

(d) Divergente

(e) Convergente

(f) Divergente

5.21.

(a) Sim

(b) Sim

5.26.

(a) $\frac{\pi}{2}$

(b) Divergente

(c) 0

(d) Divergente

(e) Divergente

5.34.

2. (a) Divergente
   (b) Convergente

5.38.

1. (a) 2
   (b) Divergente
2. Divergente

Séries Numéricas

Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados nos textos da Prof. Doutora Virgínia Santos (indicados na bibliografia).

Def. 6.1

Seja (a_n) uma sucessão de números reais. Chama-se **série numérica de termo geral** a_n à "soma de todos os termos da sucessão $(a_n)_n$":

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n \geq 1} a_n$$

A **sucessão das somas parciais** $(S_n)_n$ associada a esta série é a sucessão definida por

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Obs. 6.2

Um exemplo de série é a **série harmónica** dada por

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Def. 6.3

Dizemos que uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é **convergente** se $\lim_{n\to+\infty} S_n$ existe e é finito, caso em que é designado por **soma da série** e escrevemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

Se $(S_n)_n$ é divergente, dizemos que a série é **divergente**.

Exer. 6.4

Estude a convergência das seguintes séries:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$ (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

Def. 6.5

Uma **série geométrica** de *razão* $r \in \mathbb{R}$, é uma série do tipo

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n,$$

onde $a \in \mathbb{R}$ é o primeiro termo da série.

Obs. 6.6

Note-se que o termo geral da sucessão de somas parciais é dado por

$$S_n = \begin{cases} na, & \text{se } r = 1 \\ a\dfrac{1-r^n}{1-r}, & \text{se } r \neq 1 \end{cases}$$

Obs. 6.6 (cont.)

Conclui-se assim que, para $a \neq 0$:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \text{ converge se e só se } |r| < 1}$$

e nesse caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

Exer. 6.7

Verifique se as seguintes séries são convergentes e em caso afirmativo calcule a sua soma:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{99}{100}\right)^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{e}\right)^n$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} 2^{-n}$

Def. 6.8

Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diz-se **redutível** (ou de **Mengoli** ou **telescópica**) se o seu termo geral se puder escrever numa das seguintes formas:

$$a_n = u_n - u_{n+p} \quad \text{ou} \quad a_n = u_{n+p} - u_n$$

onde (u_n) é uma sucessão e $p \in \mathbb{N}$.

Obs. 6.9

No caso em que $a_n = u_n - u_{n+p}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{p} u_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k = u_1 + \cdots + u_p - (u_{n+1} + \cdots + u_{n+p})$$

e no caso em que $a_n = u_{n+p} - u_n$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k - \sum_{k=1}^{p} u_k = u_{n+1} + \ldots + u_{n+p} - (u_1 + \ldots + u_p)$$

Obs. 6.9 (cont.)

Assim, a série é convergente se $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}+\cdots+u_{n+p})$ for finito.

Além disso, se $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = k \in \mathbb{R}$, então $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}+\cdots+u_{n+p}) = pk$.

Exer. 6.10

Determine a soma (se existir) das seguintes séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}\right)$

(e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{3}{(n+1)(n+4)}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2}{n^2-1}$

Teo. 6.11

As séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{ e } \ \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n = a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots \ , \ \forall p \in \mathbb{N}$$

têm a mesma natureza. Assim, a natureza de uma série não depende dos seus primeiros termos.

Obs. 6.12

Como $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ e $S'_n = \sum_{k=p+1}^{n} a_k$ (com $n > p+1$), temos

$S_n = S'_n + \sum_{k=1}^{p} a_k$, e, portanto, se existir um dos limites o outro também existe:

$$\lim_n S_n = \lim_n S'_n + \sum_{k=1}^{p} a_k$$

Teo. 6.13

Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Obs. 6.14

O resultado anterior é considerado como um primeiro critério de convergência de uma série. Na verdade, o critério é útil na sua forma contrapositiva, isto é:

$$\boxed{\text{se } \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \text{ ou não existir} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ é divergente}}$$

revelando-se, assim, como um “critério de divergência”. Note-se que se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, nada se pode concluir sobre a natureza da série.

Exer. 6.15

Analise a natureza das séries seguintes à luz da condição necessária de convergência:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt[n]{n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{7}{10}\right)^n}$

Teo. 6.16

(a) Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries numéricas convergentes com somas A e B respetivamente. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ é convergente e

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A + B$$

(b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e tem soma A, então $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ é convergente e tem soma λA,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda A.$$

Teo. 6.16 (cont.)

(c) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente então $\forall \lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ é divergente.

(d) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ é divergente.

Obs. 6.17

Note-se que o resultado anterior nada diz quanto ao caso de ambas as séries serem divergentes. Na verdade, a série resultante $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ tanto pode ser convergente como divergente.

Exer. 6.18

Verifique se as seguintes séries são convergentes e, em caso afirmativo, determine a sua soma:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 50 \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{12}{n^2-1}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{7}{11}\right)^n + \left(\frac{10}{3}\right)^n\right]$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n-2^n}{4^n}$

Def. 6.19

Dizemos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é uma **série de termos não negativos** se, $\forall n \in \mathbb{N}$, se tem $a_n \geq 0$.

Exer. 6.20

Verifique quais das seguintes séries são séries de termos não negativos:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n)$

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{n} \right)$

Teo. 6.21

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de termos não negativos. Então a sucessão das somas parciais associada à série é monótona crescente.

Teo. 6.22

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de termos não negativos. Então, a série é convergente se e só se a sua sucessão das somas parciais é limitada superiormente.

Teo. 6.23

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos não negativos e $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função decrescente e tal que $f(n) = a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

têm a mesma natureza.

Exer. 6.24

Estude a natureza das seguintes séries:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

(c) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$

Def. 6.25

Às séries da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

chamamos **séries de Dirichlet** (ou **série harmónica de ordem** α).

Obs. 6.26

A convergência destas séries é analisada usando o critério do integral. É fácil ver que (exercício!)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ é : } \begin{cases} \text{convergente se } \alpha > 1 \\ \text{divergente se } \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

Exer. 6.27

Indique a natureza das seguintes séries

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[10]{n^5}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}$

Obs. 6.28

Convém notar que, na utilização do critério do integral, o valor obtido na resolução do integral impróprio quando este é convergente **não é** a soma da respectiva série.

Teo. 6.29

Suponha-se que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \leq a_n \leq b_n, \quad \forall n \geq n_0, n_0 \in \mathbb{N}.$$

Então:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

Obs. 6.30

Convém notar que, se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ for divergente ou $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for convergente, nada se pode concluir.

Teo. 6.31

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries tais que $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Suponha-se que existe o limite

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

Então verificam-se as condições seguintes:

(a) se $L \in \mathbb{R}^+$, então as séries têm a mesma natureza.

(b) se $L = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(c) se $L = +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Obs. 6.32

Podemos assim concluir que a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ funciona como referência, sendo necessário conhecer à partida a sua natureza. A escolha desta série é normalmente sugerida pela forma da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Em muitas situações, as séries de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ revelam-se de grande utilidade (como referência).

Exer. 6.33

Use o critério da comparação ou o critério do limite para estudar a natureza das séries seguintes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(n)}{n^4}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n^3}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{17n-13}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n^2}{n^6+1}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{37n^3+2}}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(1/n)}{n^2}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{1/n}}{n}$

Def. 6.34

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de números reais e $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ a correspondente **série dos módulos**.

(a) Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diz-se **absolutamente convergente**.

(b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge mas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diz-se **simplesmente convergente**.

Teo. 6.35

Toda a série absolutamente convergente é também convergente.

Obs. 6.36

(a) Realça-se que se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge, então nada se pode concluir sobre a natureza de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Esta pode ser convergente ou divergente.

(b) Como $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é uma série de termos não negativos, então podemos aplicar os critérios vistos anteriormente para estudar a sua natureza.

Exer. 6.37

Verifique se as séries seguintes são absolutamente convergentes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{e^n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$

Teo. 6.38

Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de números reais <u>não nulos</u> e

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

Se o limite existir, verificam-se as condições seguintes:

(a) se $0 \leq L < 1$, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

(b) se $L > 1$ ou $L = +\infty$, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

(c) se $L = 1$, nada se pode concluir (devemos utilizar outro critério para estudar a natureza da série).

Teo. 6.39

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de números reais e

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Se o limite existir, verificam-se as condições seguintes:

(a) se $0 \leq L < 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

(b) se $L > 1$ ou $L = +\infty$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

(c) se $L = 1$, nada se pode concluir (devemos utilizar outro critério para estudar a natureza da série).

Alguns limites notáveis úteis no estudo da natureza de séries numéricas:

- Para $b \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{b}{n}\right)^n = e^b$
- Para $a > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a^n}{n^k} = +\infty$
- Para $p \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^p} = 1$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$

Exer. 6.40

Estude a natureza das seguintes séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!2^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!n^2}{(2n)!}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^n}{3^{n^2}}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{4}{3}\right)^n$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n! + 1}{n^n}$

Def. 6.41

Uma **série alternada** é uma série onde os seus termos são alternadamente positivos e negativos, ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$$

onde $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exer. 6.42

Verifique se as seguintes séries são alternadas:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n^4}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n)}{n!}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n!}$

Teo. 6.43

Seja $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ com $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ uma série alternada. Se

(a) a sucessão (a_n) é monótona decrescente;

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$;

então a série é convergente.

Exer. 6.44

Estude a natureza das seguintes séries:

(a) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$

(b) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\ln n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$

Exer. 6.45

Estude a natureza (divergência, convergência absoluta ou convergência simples) das seguintes séries numéricas:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-10)^n}{n!}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}-1}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{sen}(1/n)$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n!}{n^{10}}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-\sqrt{n}}{(n+\sqrt{n})^2}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{5^n}\right]$

6.4.
(a) Div.
(b) Conv. e $S = 0$ se $\alpha = 0$; Div. se $\alpha \neq 0$
(c) Conv. e $S = 1$

6.7.
(a) Conv. e $S = 100$
(b) Div.
(c) Conv. e $S = 1$
(d) Conv. e $S = \frac{1}{4}$

6.10.
(a) $S = \frac{3}{2}$
(b) Div.
(c) $S = 1$
(d) $S = \frac{1}{2}$
(e) $S = \frac{47}{60}$
(f) $S = \frac{3}{2}$

6.15.
(a) Div.
(b) Nada se pode concluir
(c) Nada se pode concluir
(d) Div.
(e) Div.
(f) Div.

6.18.
(a) Div.
(b) Conv. e $S = 9$
(c) Div.
(d) Conv. e $S = 2$

6.20.
(a) Não
(b) Sim
(c) Não
(d) Sim

6.24.
(a) Div.
(b) Conv.
(c) Div.

6.27.
(a) Conv.
(b) Conv.
(c) Div.
(d) Div.

6.33.
(a) Conv.
(b) Conv.
(c) Div.
(d) Conv.
(e) Conv.
(f) Div.
(g) Conv.
(h) Div.

6.37.
(a) Sim
(b) Não
(c) Sim
(d) Não

6.40.
(a) Abs. Conv.
(b) Abs. Conv.
(c) Div.
(d) Abs. Conv.
(e) Abs. Conv.
(f) Div.
(g) Div.
(h) Div.

6.42.
(a) Sim
(b) Sim
(c) Não
(d) Sim

6.44.
(a) Conv.
(b) Conv.
(c) Div.
(d) Conv.

6.45.
(a) Simp. Conv.
(b) Abs. Conv.
(c) Div.
(d) Abs. Conv.
(e) Simp. Conv.
(f) Simp. Conv.
(g) Div.
(h) Div.
(i) Abs. Conv.
(j) Div.