Matemática Discreta

Lógica de Primeira Ordem - 4

Universidade de Aveiro 2018/2019

http://moodle.ua.pt

Demonstração Automática de Teoremas

Procedimento de refutação

Consiste em provar que uma fórmula é válida provando que a sua negação é inconsistente.

- Este procedimento tem por base as seguintes propriedades:

1) Qualquer fórmula da lógica de primeira ordem se pode transformar na forma normal prenex.
2)A parte da fórmula que não contém quantificadores pode transformar-se na forma normal conjuntiva.
3) É possível eliminar os quantificadores existenciais sem alterar as propriedades de inconsistência com recurso às designadas funções de Skolem.

Redução de formas normais prenex à forma normal de Skolem

Dada a fórmula $(Q_1 x_1)(Q_2 x_2) \ldots (Q_n x_n)\ M$, aplicar a cada quantificador existencial Q_r as seguintes transformações:

1) Se nenhum quantificador universal aparece à esquerda de Q_r, então
- Escolher uma constante c (que não figure em M).
- Substituir x_r por c e eliminar $Q_r x_r$.

2) Se $Q_{s_1} \ldots Q_{s_m}$ são quantificadores universais que ocorrem à esquerda de Q_r então
- Escolher um símbolo de função f, diferente dos existentes, com m argumentos.
- Substituir em M, x_r por $f(x_{s_1}, \ldots, x_{s_m})$.
- Eliminar $Q_r x_r$.

3) Aplicar 1) e 2) a todos os quantificadores existenciais.

Exemplo

Vamos reduzir à forma normal de Skolem a seguinte fórmula:

$$(\forall x)(\exists y)(\exists z)((\neg P(x,y) \vee Q(x,z))$$

- Uma vez que $(\exists y)$ e $(\exists z)$ são precedidos por $(\forall x)$, as variáveis y e z são substituídas, respectivamente, pelas funções de uma variável $f(x)$ e $g(x)$.
- Logo, obtém-se

$$(\forall x)((\neg P(x, f(x)) \vee Q(x, g(x))).$$

Princípio da resolução de Robinson

- O princípio da resolução consiste em verificar se um dado conjunto de cláusulas S contém a cláusula vazia, $\Diamond$, ou se ela pode ser deduzida de S.
- O princípio da resolução pode ser visto como uma regra de inferência usada para gerar novas cláusulas de acordo com o seguinte procedimento:

Procedimento de resolução

1. Sejam C_1 e C_2 duas cláusulas de S;
2. Se existe um literal L_1 em C_1 complementar relativamente a um literal L_2 de C_2, então
   - Eliminar L_1 de C_1 e L_2 de C_2;
   - Construir a disjunção do que resta de C_1 e C_2, obtendo-se uma nova cláusula designada por resolvente de C_1 e C_2 (ou consequência lógica de C_1 e C_2).

Exemplos

- $C_1: \; P \vee \neg R$;
- $C_2: \; Q \vee R$;
- ______________________
- $C_{12}: \; P \vee Q$ $\rightarrow$ resolvente de C_1 e C_2.

- $C_1: \; P \vee \neg Q \vee R$;
- $C_2: \; \neg P \vee S$;
- ______________________
- $C_{12}: \; \neg Q \vee R \vee S$ $\rightarrow$ resolvente de C_1 e C_2.

Dedução (ou resolução)

Definição (de dedução)

Dado um conjunto de cláusulas S, uma dedução (ou resolução) de C a partir de S é uma sequência finita de cláusulas $C_1, C_2, \ldots, C_k$ tais que cada C_i ou é uma cláusula em S ou uma resolvente de cláusulas que precedem C_i e $C_k = C$.

A dedução de $\Diamond$ a partir de S é designada por refutação ou prova da inconsistência de S.

Exemplo

Considerando o conjunto de fórmulas

$$S = \{P \vee Q,\ \neg P \vee Q,\ P \vee \neg Q,\ \neg P \vee \neg Q\}$$

identificam-se as seguintes cláusulas:
$C_1 : P \vee Q$; $C_2 : \neg P \vee Q$;
$C_3 : P \vee \neg Q$; $C_4 : \neg P \vee \neg Q$.

$$\frac{\begin{array}{l} C_1 : P \vee Q \\ C_2 : \neg P \vee Q \end{array}}{C_{12} : Q} \qquad \frac{\begin{array}{l} C_3 : P \vee \neg Q \\ C_4 : \neg P \vee \neg Q \end{array}}{C_{34} : \neg Q} \qquad \frac{\begin{array}{l} C_{12} : Q \\ C_{34} : \neg Q \end{array}}{\Diamond}$$

- Referência bibliográfica:
  D. M. Cardoso, M. P. Carvalho, *Noções de Lógica Matemática*, Universidade de Aveiro, 2007 (versão revista em Março 2015, disponível na página da disciplina).