

## 5. Equações Diferenciais Ordinárias

baseado no texto de Alexandre Almeida, Cálculo II, fev. 2018, pp. 51–92, e versões anteriores de slides de Cálculo II

Isabel Brás

UA, 22/4/2019

Cálculo II – Agrup. IV 18/19

# Resumo dos Conteúdos

- 1 Diferencial de uma função
- 2 EDO – Introdução, Conceitos e Terminologia
- 3 Problemas de Valores Iniciais e Problemas de Valores na Fronteira
- 4 Equações de variáveis separáveis
- 5 Equações Diferenciais Homogéneas
- 6 EDO Exatas
- 7 EDO Redutíveis a Exatas, usando fatores integrantes
- 8 EDO Lineares de Primeira Ordem
- 9 EDO redutíveis a EDO linear de 1.<sup>a</sup> ordem: Equações de Bernoulli
- 10 EDO Lineares de Ordem Arbitrária
  - EDO lineares com coeficientes constantes
  - Problemas de Cauchy

# Diferencial de uma função real de uma variável real

## Reta Tangente/Linearização em torno de um ponto:

$f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável em  $x_0 \in \text{int}(D)$ . A reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $P = (x_0, f(x_0))$  tem equação  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ . A função  $L$  definida por

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

cujo gráfico é a reta tangente, é a chamada **linearização de  $f$  em  $x_0$** .

**Diferencial:** Como  $L$  é uma boa aproximação local de  $f$ , para  $x$  próximo de  $x_0$ , considerando  $\Delta f := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ,  $\Delta x := x - x_0$ ,

$$\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x.$$

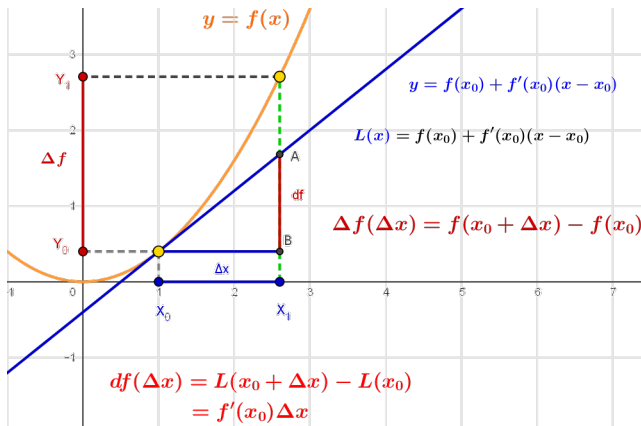
Representando  $\Delta x$  por  $dx$ , (para valores próximos de zero),

o **diferencial de  $f$  em  $x_0$**  é

$$df = f'(x_0)dx.$$

(ver interpretação geométrica no slide seguinte e/ou em [GeoGebra](#), agradecimentos a Ana Breda)

# Diferencial de uma função real de uma variável real (interpretação geométrica)



# Diferencial de uma função real de duas variáveis reais

## Plano Tangente/Linearização em torno de um ponto:

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável em  $(x_0, y_0) \in \text{int}(D)$ . O plano tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  tem equação

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

A função  $L$  definida por

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

cujos gráfico é o plano tangente, é a chamada **linearização de  $f$  em  $(x_0, y_0)$** .

**Diferencial Total:** Analogamente ao caso  $n = 1$ , para  $x$  próximo de  $x_0$  e  $y$  próximo de  $y_0$ , considerando  $\Delta f := f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ ,  $\Delta x := x - x_0$  e  $\Delta y := y - y_0$ ,

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y .$$

Representando  $\Delta x$  por  $dx$  e  $\Delta y$  por  $dy$  (para valores próximos de zero), o **diferencial total de  $f$  em  $(x_0, y_0)$**  é

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy .$$

**Generalização para  $n$  variáveis (análogo):**

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável em  $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \in \text{int}(D)$ .

O **diferencial total de  $f$  em  $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$**  é

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})dx_n .$$

# Equações Diferenciais, o que são?

Equações que envolvem uma função e as suas derivadas e/ou a variável que é o argumento dessa função.

Estas equações aparecem frequentemente quando se pretende modelar matematicamente fenómenos reais, em especial, naqueles de evolução temporal.

## Exemplos:

- 1 Taxa de variação de temperatura de um objeto:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m),$$

$T(t)$  → temperatura do objeto,

$T_m$  → temperatura do meio ambiente,  $k$  → constante positiva.

## Exemplos (cont.):

## 2. Movimento harmónico de uma mola:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$m \rightarrow$  massa do objeto colocado na extremidade da mola vertical;

$x(t) \rightarrow$  deslocamento a partir da posição (inicial) de equilíbrio da mola;

$k > 0 \rightarrow$  constante de mola; Ver figura

## 3. Lei de Kirchhoff aplicada a uma malha constituída por uma bobine em série com uma resistência:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E(t),$$

onde  $L$  e  $R$  são constantes (indutância e resistência, respetivamente),  $I(t)$  a intensidade de corrente e  $E(t)$  a tensão da fonte de energia.



# Equação diferencial ordinária

## Definição:

Chama-se **equação diferencial ordinária (EDO)** de ordem  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), a uma equação do tipo

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (\text{EDO})$$

onde  $y$  é função (real) de  $x$ .

## Terminologia associada:

$y$  é designada por **variável dependente**;

$x$  é designada por **variável independente**;

Uma EDO diz-se estar na **forma normal** quando se apresenta na forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

**Notação alternativa:** No slide anterior  $y^{(n)}$  denota a derivada de ordem  $n$  da função  $y$ . Em alternativa, podemos usar a notação  $\frac{d^n y}{dx^n}$  e (re)escrever a EDO na forma

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0.$$

Exemplos :

1

$$-y' + x^3 - 1 = 0$$

é uma equação diferencial de ordem 1, onde  $x$  é a variável independente e  $y$  a variável dependente;

2

$$3t \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = \cos(t)$$

é uma equação diferencial de ordem 2, onde  $t$  é a variável independente e  $x$  a variável dependente;

# Solução de uma EDO

## Definição

Chama-se **solução da equação diferencial**

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

num intervalo  $I$ , a toda a função  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ , com derivadas finitas até à ordem  $n$ , tal que

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$$

## Exemplo:

$\varphi_1(x) = \sin x$  e  $\varphi_2(x) = \cos x - \sin x$  são duas soluções (em  $\mathbb{R}$ ) de

$$y'' + y = 0$$

Identifique outras!



## Mais terminologia associada a uma EDO de ordem $n$

**Integral Geral:** Família de soluções que se obtêm por técnicas de integração adequadas, que é definida, em geral, usando  $n$  constantes arbitrárias; o processo de obtenção dessa família de soluções é usualmente designado por integração(ou resolução) da EDO.

**Integral Particular (ou solução particular):** Solução que faz parte do integral geral;

**Solução Singular:** Solução que não se obtém a partir do integral geral;

**Solução Geral:** Conjunto de todas as soluções.

**Exemplo:**  $(y')^2 - 4y = 0$ .

Integral geral:  $y = (x + C)^2$ , onde  $C \in \mathbb{R}$ ; Solução particular:  $y = x^2$ ;

Solução singular:  $y = 0$ .

# Problema de valores iniciais

## Definição:

Chama-se **problema de valores iniciais** (PVI) (ou **problema de Cauchy**) a todo o problema que consiste em encontrar a solução (ou soluções) de uma dada equação diferencial satisfazendo certas condições (ditas condições iniciais) num mesmo ponto:

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

## Exemplo:

$y = -\frac{x^3}{6} + 1$  é solução do PVI

$$\begin{cases} y'' + x = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Verifique!

# Problema de valores na fronteira

## Definição:

Chama-se **problema de valores na fronteira** (ou **problema de fronteira**) a todo o problema que consista em encontrar a solução (ou soluções) de uma dada equação diferencial satisfazendo condições em dois ou mais pontos.

## Exemplo:

O problema de fronteira

$$\begin{cases} y'' + x = 0 \\ y(0) + y'(1) = -\frac{1}{3} \\ y(1) + y'(0) = 0 \end{cases}$$

tem uma única solução. Qual é?

# Existência e Unicidade de Solução para um PVI

- Nem todo o PVI admite solução;
- Caso exista solução para o PVI, esta pode não ser única;
- É possível provar que um PVI de primeira ordem na forma normal, i.e., do tipo

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

admite uma e uma só solução (definida num intervalo centrado em  $x_0$ ), desde que a função  $f$  satisfaça determinadas condições (*Teorema de Cauchy-Picard*). Não estudamos aqui este resultado, mas trataremos um caso particular a propósito das EDO's lineares (mais à frente).

# Equações de variáveis separáveis

EDO de primeira ordem da forma:

$$y' = \frac{p(x)}{q(y)}, \quad (\text{com } q(y) \neq 0)$$

para  $p$  e  $q$  dependentes apenas de  $x$  e de  $y$ , respetivamente.

## Determinação dum integral geral

- 1 Escrever a equação na forma:

$$y' q(y) = p(x) \quad (1)$$

- 2 Integrar ambos os membros de (1), para obter um integral geral da equação na seguinte forma implícita:

$$Q(y) = P(x) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

onde  $Q(y)$  é uma primitiva de  $q(y)$  e  $P(x)$  é uma primitiva de  $p(x)$ .



## Exemplo

$$y' = \frac{1}{y} e^x, y \neq 0$$

Separando as variáveis a equação toma a forma:

$$yy' = e^x$$

Integrando membro a membro

$$\int y \, dy = \int e^x \, dx,$$

obtendo-se o seguinte integral geral:

$$y^2 = 2e^x + C, C \in \mathbb{R}$$

# Equações Diferenciais Homogêneas

EDO de primeira ordem da forma:

$$y' = f(x, y)$$

onde  $f: \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é homogênea de grau zero, i.e.,

$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$ ,  $\forall (x, y) \in \mathcal{D}$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , tais que  $(\lambda x, \lambda y) \in \mathcal{D}$ .

Exemplo:

$$y' = \underbrace{\frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}}_{f(x,y)}$$

$f$  é homogênea de grau zero pois, desde que  $\lambda \neq 0$ ,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2 + \lambda x \lambda y + \lambda^2 y^2}{\lambda^2 x^2} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2} = f(x, y)$$

## Determinação dum integral geral de uma equação diferencial homogénea:

- 1 Certifique-se que a equação na forma:

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

é homogénea;

- 2 Em (1), fazer a mudança de variável  $z = y/x$  (ou seja,  $z = \frac{y}{x}$ ) :

$$z + xz' = g(z), \quad (2)$$

onde  $g(z) = f(1, z)$ ;

- 3 Integrar a equação (2), como equação de variáveis separáveis.
- 4 No integral geral obtido fazer  $z = \frac{y}{x}$ .

## Voltando ao Exemplo do Slide 18

$$y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$$

Ora,

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{x^2} = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2, \quad x \neq 0,$$

Através da substituição  $y = zx$ , obtemos a equação de variáveis separáveis

$$\frac{1}{1 + z^2} z' = \frac{1}{x},$$

com integral geral dado por

$$\arctg z = \ln |x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Por conseguinte, um integral geral da equação homogênea dada tem a forma

$$\arctg \frac{y}{x} = \ln |x| + C, \quad i.e., \quad y = x \operatorname{tg} (\ln |x| + C), \quad C \in \mathbb{R}.$$

# Equações Diferenciais Exatas

Uma equação da forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

onde  $M, N: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas e  $D$  é aberto, diz-se uma **equação diferencial exata** se existir  $F: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F \in \mathcal{C}^1(D)$ , tal que

$$dF = M(x, y)dx + N(x, y)dy, \quad (1)$$

i.e.,  $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = M(x, y)$  e  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$ .

Resolver uma equação diferencial exata é encontrar uma função  $F$  (nas condições descritas). A família de funções

$$F(x, y) = C, C \in \mathbb{R},$$

forma o conjunto das soluções da equação (1).

## Exemplo:

$$y^2 dx + 2xy dy = 0$$

Esta equação é exata se existir  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = M(x, y) = y^2 \quad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = N(x, y) = 2xy \quad (3)$$

De (2) conclui-se que

$$F(x, y) = y^2 x + \phi(y),$$

derivando em ordem a  $y$  e conjugando com (3),  $\phi(y) = C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .  
Deste modo, a equação é exata e o conjunto das suas soluções é

$$y^2 x = C, C \in \mathbb{R}.$$

## Caracterização das EDO exatas em abertos simplesmente conexos

### Conjuntos abertos simplesmente conexos:

Um conjunto simplesmente conexo em  $\mathbb{R}^2$  é aquele que não apresenta “buracos”<sup>a</sup>. Exemplos de abertos simplesmente conexos:

$\mathbb{R}^2$ ;  $]a, b[ \times ]c, d[$ , onde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  e  $c < d$ ;  
bolas abertas; semiplanos abertos.

---

<sup>a</sup> A definição rigorosa ultrapassa o âmbito desta u.c., trabalharemos com casos dentro dos exemplos dados.

### Proposição:

Sejam  $M, N: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $M, N \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D})$ , e  $\mathcal{D}$  aberto simplesmente conexo.

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

é uma equação diferencial exata se e só se  $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)$ .

## Exemplos de classificação de EDO em exatas/não exatas

❶  $y^2 dx + 2xy dy = 0.$

Sejam  $M(x, y) = y^2$  e  $N(x, y) = 2xy$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Como

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = 2y,$$

a equação é exata (por aplicação da proposição do slide anterior).

❷  $(3y + 4xy^2) dx + (2x + 3yx^2) dy = 0.$

Sejam  $M(x, y) = 3y + 4xy^2$  e  $N(x, y) = 2x + 3yx^2$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .  
Como

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) \neq \frac{\partial N}{\partial x}(x, y),$$

a equação não é exata (por aplicação da proposição do slide anterior).



## Fatores integrantes para EDO redutíveis a exatas

Uma função não nula  $\mu(x, y)$  diz-se um **fator integrante** da equação (não exata)

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

se a equação

$$\mu(x, y)M(x, y) dx + \mu(x, y)N(x, y) dy = 0$$

é diferencial exata.

**Exemplo:**

A equação  $(3y + 4xy^2) dx + (2x + 3yx^2) dy = 0$  não é exata. Mas

$$x^2y(3y + 4xy^2) dx + x^2y(2x + 3yx^2) dy = 0$$

é exata **[Verifique!]**. Assim,  $\mu(x, y) = x^2y$  é um fator integrante da equação  $(3y + 4xy^2) dx + (2x + 3yx^2) dy = 0$ .

# Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem:

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = b(x)$$

onde  $a_0, a_1, b$  são funções definidas num certo intervalo  $I$ , com  $a_0(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ . Deste modo, esta equação pode tomar a seguinte forma:

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Quando  $b \equiv 0$  ( $q \equiv 0$ ), a equação diz-se incompleta ou homogénea.

## Exemplos

- $y' + xy = 1$  equação diferencial linear de 1.<sup>a</sup> ordem completa.
- $y' + xy = 0$  equação diferencial linear de 1.<sup>a</sup> ordem incompleta (ou homogénea).

**Note que**, se  $q \equiv 0$  ou se  $p$  e  $q$  forem funções constantes a EDO é de variáveis separáveis.

Resolução de uma EDO Linear de 1.<sup>a</sup> Ordem usando um Fator Integrante

Para resolver a equação

$$y' + p(x)y = q(x).$$

basta determinar uma primitiva  $P$  da função  $p$ , multiplicar ambos os membros pelo **fator integrante**  $\mu(x) = e^{P(x)}$  e integrar de seguida em ordem a  $x$ .

Exemplo:

$$y' - y = -e^x$$

Um fator integrante é  $e^{-x}$ , pois  $p(x) = -1$ . Multiplicando ambos os membros da equação por  $e^{-x}$  obtemos

$$e^{-x}y' - e^{-x}y = -1, \quad \text{i.e.,} \quad \frac{d}{dx}(e^{-x}y) = -1.$$

Integrando vem

$$e^{-x}y = \int (-1) dx = -x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Assim, um integral geral da equação linear é

$$y = (C - x)e^x, \quad C \in \mathbb{R}.$$



## PVI associado a EDO Linear de Primeira Ordem:

Teorema (existência e unicidade de solução):

Se  $p$  e  $q$  são funções contínuas num intervalo  $I$ , então o problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tem nesse intervalo uma e uma só solução.

Exemplo:

O problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' - y = -e^x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

tem como solução única  $y = -xe^x$ , para  $x \in \mathbb{R}$ . **Porquê?**

# Equações de Bernoulli:

$$y' + a(x)y = b(x)y^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

- Se  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = 1$ , a equação é linear de 1.ª ordem.
- Se  $\alpha \neq 0$  e  $\alpha \neq 1$ , a equação é redutível a uma EDO linear de 1.ª ordem, usando a mudança de variável  $z = y^{1-\alpha}$ .

De facto, a equação de Bernoulli pode escrever-se na forma

$$y^{-\alpha}y' + a(x)y^{1-\alpha} = b(x)$$

(eventualmente com  $y \neq 0$ ). Com a substituição  $z = y^{1-\alpha}$ , chegamos à equação linear de 1.ª ordem

$$z' + (1 - \alpha)a(x)z = (1 - \alpha)b(x),$$

## Exemplo:

A equação

$$y' + y = e^x y^2$$

é uma equação de Bernoulli (com  $\alpha = 2$ ). Fazendo  $z = 1/y$  ( $y \neq 0$ ) obtemos

$$z' - z = -e^x$$

cujo integral geral é

$$z = (C - x) e^x, \quad C \in \mathbb{R},$$

► Ver slide 27

Assim, um integral geral da equação de Bernoulli é

$$y = \frac{e^{-x}}{C - x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

# Equações Lineares de Ordem Arbitrária:

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = b(x)$$

onde

$$b: I \rightarrow \mathbb{R};$$

$$a_i: I \rightarrow \mathbb{R}, i = 0, \dots, n, \text{ com } a_0(x) \neq 0 \text{ para todo } x \in I.$$



coeficientes da equação

- Se  $b \equiv 0$ , a equação diz-se **incompleta** (ou homogénea); Caso contrário, a equação diz-se **completa** (ou não homogénea);
- Se os coeficientes da equação são funções constantes, a equação diz-se de **linear de coeficientes constantes**.

# Exemplos

1.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$$

EDO linear homogénea de segunda ordem com coeficientes constantes;

2.

$$e^x y' - \cos x y = x$$

EDO linear completa de primeira ordem;

3.

$$y^{(5)} + 2y' = 0$$

EDO linear homogénea de quinta ordem com coeficientes constantes.



## Equação homogénea associada a uma EDO linear

Se na equação

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = b(x)$$

tomarmos  $b(x) \equiv 0$ , obtemos a chamada **equação homogénea associada**.

**Exemplo:**

A equação homogénea associada à equação completa

$$y'' + y = \cos(x)$$

é a equação:

$$y'' + y = 0.$$

# Solução geral de uma EDO linear completa

## Teorema:

A solução geral de uma equação linear completa obtém-se adicionando uma qualquer sua solução (particular) à solução geral da equação homogénea associada.

## Exemplo:

$$y' - 2y = e^{5x}.$$

A equação homogénea associada é a equação

$$y' - 2y = 0,$$

cuja solução geral é dada por  $y_h = C e^{2x}$ , com  $C \in \mathbb{R}$ . Uma solução da EDO completa é  $y_p = \frac{1}{3} e^{5x}$  [Verifique!]. Assim, a solução geral da equação completa é

$$y = \underbrace{C e^{2x}}_{y_h} + \underbrace{\frac{1}{3} e^{5x}}_{y_p}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

# EDO linear homogénea – Conjunto das soluções

Considere-se a EDO:

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0 \quad (4)$$

onde  $a_i: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 0, \dots, n$ , com  $a_0(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ .

## Teorema:

Sejam  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $w: I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- (i)  $y \equiv 0$  é solução de (4);
- (ii) Se  $y$  e  $w$  são soluções de (4), então  $y + w$  é solução de (4);
- (iii) Se  $y$  é solução de (4), então  $\alpha y$  é solução de (4);

Isto é, o conjunto das soluções de (4) é um subespaço vetorial do espaço vetorial das funções reais de variável real definidas em  $I$ .

## EDO linear homogénea – Conjunto das soluções (cont.)

Na verdade, o conjunto das soluções de uma EDO linear homogénea é um subespaço vetorial de dimensão  $n$ , como se conclui do seguinte teorema:

**Teorema:** Toda a equação linear homogénea de ordem  $n$

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0,$$

num dado intervalo  $I$  ( $a_0, a_1, \dots, a_n$  contínuas em  $I$ ;  $a_0(x) \neq 0$  para todo o  $x \in I$ ) admite  $n$  soluções,  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , **linearmente independentes** e qualquer sua solução,  $y$ , pode escrever-se como sua combinação linear, *i.e.*,

$$y = C_1\varphi_1 + \cdots + C_n\varphi_n, \text{ para } C_j \in \mathbb{R}.$$

Qualquer **conjunto de  $n$  soluções linearmente independente** de uma EDO linear homogénea de ordem  $n$  é designado por **sistema fundamental de soluções** dessa equação.

Exemplo:

$$y'' + y = 0 \quad (5)$$

$\varphi_1(x) = \cos x$ ,  $\varphi_2(x) = \sin x$  são soluções desta equação e são linearmente independentes.

▶ Ver slide 11

Assim,  $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$  é sistema fundamental de soluções de (5). Logo, a solução geral da equação é

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$



Observações:

- ❶ A resolução de uma EDO linear homogénea reduz-se à determinação de um sistema fundamental de soluções. Todavia, para  $n > 1$ , não existe método geral que permita obter um tal conjunto de soluções.
- ❷ Se a EDO linear homogénea tiver **coeficientes constantes**, um sistema fundamental de soluções pode ser obtido a partir do conhecimento das raízes do chamado polinómio caraterístico( ▶ ver 43 e seguintes ).

# Como obter uma solução particular de uma EDO linear completa?

**Método da variação das constantes** — método de determinação de uma solução particular de uma equação linear completa que:

- pressupõe o conhecimento da solução geral da equação homogénea associada:

$$y_h = C_1\varphi_1(x) + \cdots + C_n\varphi_n(x), \quad C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R},$$

onde  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  é um sistema fundamental de soluções desta equação.

- procura obter uma solução particular da equação completa da forma

$$y_p = C_1(x)\varphi_1(x) + \cdots + C_n(x)\varphi_n(x),$$

admitindo que as constantes são funções (de  $x$ ) diferenciáveis, determinando-as da forma como é indicada no slide seguinte.

## Método da variação das constantes (cont.)

1. As funções  $C_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  determinam-se calculando as suas derivadas que constituem a solução do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} C_1' \varphi_1 + \dots + C_n' \varphi_n = 0 \\ C_1' \varphi_1' + \dots + C_n' \varphi_n' = 0 \\ \vdots \\ C_1' \varphi_1^{(n-2)} + \dots + C_n' \varphi_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1' \varphi_1^{(n-1)} + \dots + C_n' \varphi_n^{(n-1)} = \frac{b}{a_0} \end{cases}$$

2. Calculando primitivas  $G_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , das funções que se obtêm da resolução do sistema anterior, podemos escrever a seguinte solução particular da equação completa:

$$y_p = G_1(x)\varphi_1(x) + \dots + G_n(x)\varphi_n(x).$$

Exemplo:

$$y'' + y = \operatorname{cosec} x, \quad x \in ]0, \pi[$$

(6)

1. A solução geral da equação homogénea associada é

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

▶ Ver slide 37

2. Procure-se uma solução particular da forma

$$y_p = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x,$$

onde

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \\ C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x) \cos x = \operatorname{cosec} x. \end{cases}$$

3. Da resolução do sistema obtemos  $C_1'(x) = -1$  e  $C_2'(x) = \cotg x$ .  
Logo, podemos tomar

$$C_1(x) = -x \quad \text{e} \quad C_2(x) = \ln(\sin x), \quad 0 < x < \pi.$$



Exemplo (cont.):

4. Assim, uma solução particular é

$$y_p = -x \cos x + \sin x \ln(\sin x).$$

5. Logo, a solução geral da equação completa (6) é

$$\begin{aligned} y &= \underbrace{C_1 \cos x + C_2 \sin x}_{y_h} \underbrace{-x \cos x + \sin x \ln(\sin x)}_{y_p}, \quad 0 < x < \pi, \\ &= (C_1 - x) \cos x + (C_2 + \ln(\sin x)) \sin x, \quad 0 < x < \pi, \end{aligned}$$

onde  $C_1, C_2$  são constantes reais arbitrárias.

# Princípio de sobreposição

## Teorema:

Suponha-se que  $y_1$  é uma solução (particular) da equação

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x) y = b_1(x),$$

e que  $y_2$  é uma solução (particular) da equação

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x) y = b_2(x).$$

Então  $y_1 + y_2$  é uma solução (particular) da equação

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = b_1(x) + b_2(x).$$

# EDO lineares com coeficientes constantes

EDO linear de ordem  $n$  com coeficientes constantes tem a forma:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = b(x) ,$$

onde  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  com  $a_0 \neq 0$ .

Equação homogénea associada:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

Polinómio associado (polinómio característico):

$$P(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n$$

As  $n$  raízes do polinómio  $P(r)$  permitem determinar  $n$  soluções linearmente independentes da equação homogénea, cada uma associada a cada uma dessas raízes (ver como no slide seguinte). Portanto, permitem determinar a solução geral da equação homogénea.

## Construção dum sistema fundamental de soluções (base do subespaço das soluções) da EDO linear com coeficientes constantes e homogênea:

Considerem-se as raízes de  $P(r)$  identificadas e para cada uma delas real e para cada par delas complexas (se existirem) proceda-se à seguinte associação de soluções (no final do processo ter-se-à  $n$  soluções linearmente independentes):

- **1.º Caso:** A raiz,  $r$ , é real simples.

**Solução:**  $e^{rx}$

- **2.º Caso:** A raiz,  $r$ , é real de multiplicidade  $k$ .

**Soluções:**  $e^{rx}, xe^{rx}, \dots, x^{k-1}e^{rx}$

- **3.º Caso:** As raízes são complexas conjugadas simples,  $\alpha + \beta i$  e  $\alpha - \beta i$ .

**Soluções:**  $e^{\alpha x} \cos(\beta x)$  e  $e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

- **4.º Caso:** As raízes são complexas conjugadas,  $\alpha + \beta i$  e  $\alpha - \beta i$ , com multiplicidade  $k$ .

**Soluções:**  $e^{\alpha x} \cos(\beta x), xe^{\alpha x} \cos(\beta x), \dots, x^{k-1}e^{\alpha x} \cos(\beta x),$   
 $e^{\alpha x} \sin(\beta x), xe^{\alpha x} \sin(\beta x), \dots, x^{k-1}e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

**Exemplo:**  $y^{(5)} + 2y^{(4)} + 4y^{(3)} + 8y^{(2)} + 4y' + 8y = 0$

Polinómio característico:  $r^5 + 2r^4 + 4r^3 + 8r^2 + 4r + 8$

Raízes do polinómio característico:

$-2$  (simples);  $i\sqrt{2}$  e  $-i\sqrt{2}$ , raízes duplas;

Sistema fundamental de soluções:

$$\{e^{-2x}, \cos(\sqrt{2}x), x \cos(\sqrt{2}x), \sin(\sqrt{2}x), x \sin(\sqrt{2}x)\}$$

Assim, a solução geral da equação dada é

$$y = B e^{-2x} + (C_1 + C_2 x) \cos(\sqrt{2}x) + (D_1 + D_2 x) \sin(\sqrt{2}x),$$

com  $B, C_1, C_2, D_1, D_2 \in \mathbb{R}$ .

# Método dos Coeficientes Indeterminados:

- Método para determinar uma solução particular, aplicável às EDO lineares de coeficientes constantes completas

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = b(x) \quad (7)$$

com  $b(x)$  da forma

$$b(x) = P_m(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x) \quad \text{ou} \quad b(x) = P_m(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x),$$

onde  $P_m(x)$  denota um polinómio de grau  $m \in \mathbb{N}_0$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

- Neste caso, prova-se que existe uma solução particular da equação (7) do tipo

$$y_p(x) = x^k e^{\alpha x} (Q(x) \cos(\beta x) + R(x) \sin(\beta x)) \quad (8)$$

onde:

- $k$  é a multiplicidade de  $\alpha + i\beta$ , se  $\alpha + i\beta$  for raiz do polinómio característico da equação homogénea associada a (7); Senão,  $k = 0$ ;
- $Q(x)$ ,  $R(x)$  são polinómios de grau  $m$  cujos coeficientes terão de ser determinados usando a EDO (7) e a expressão para a solução (8).

**Exemplo** (Cálculo de solução particular de uma EDO linear de coeficientes constantes completa, usando o método dos coeficientes indeterminados):

$$y' - 3y = e^{3x}.$$

Como

$$e^{3x} = P_m(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

com  $P_m(x) \equiv 1$  (grau zero),  $m = 0$ ,  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 0$  e 3 é raiz do polinómio característico, com multiplicidade 1, então a solução particular a procurar é da forma

$$y_p = x e^{3x} A, \quad \text{com } A \in \mathbb{R} \text{ a determinar.}$$

Substituindo  $y_p$  e  $y'_p$  na equação:

$$\underbrace{A e^{3x} + 3Ax e^{3x}}_{y'_p} - 3(\underbrace{Ax e^{3x}}_{y_p}) = e^{3x}$$

obtemos  $(A - 1)e^{3x} = 0$ , e portanto  $A = 1$ . Assim,  $y_p = x e^{3x}$ .

# PVI associado a uma EDO linear de ordem arbitrária

## Teorema (existência e unicidade de solução):

Se  $a_0(x), a_1(x), \dots, a_{n-1}(x), a_n(x)$  e  $b(x)$  são funções contínuas num intervalo  $I$ ,  $a_0(x) \neq 0$ , para todo o  $x \in I$ , então o problema de Cauchy

$$\begin{cases} a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = b(x) \\ y(x_0) = \beta_0, y'(x_0) = \beta_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = \beta_{n-1}, \end{cases}$$

onde  $x_0 \in I$  e  $\beta_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , são reais dados, tem nesse intervalo uma e uma só solução.

**Exemplo:** O problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 2 \end{cases}$$

tem uma solução única em  $\mathbb{R}$ . **Porquê? e Qual?**