

# Matemática Discreta

## Lógica de Primeira Ordem - 3

Universidade de Aveiro 2018/2019

<http://moodle.ua.pt>

- 1 Formas normais conjuntiva e disjuntiva
- 2 Redução de fórmulas à forma normal prenex
- 3 Cláusulas da lógica de primeira ordem
- 4 Forma normal de Skolem
- 5 Referências e bibliografia

### Definição (de literal e literal complementar)

Um **literal** é um átomo ou a negação de um átomo. Dois literais dizem-se **complementares** quando um é a negação do outro.

### Definição (de forma normal conjuntiva)

Uma fórmula  $F$  diz-se na **forma normal conjuntiva** se

$F \equiv \bigwedge_{i=1}^n F_i$ , com  $n \geq 1$ , onde cada fórmula  $F_i \in \{F_1, \dots, F_n\}$  é uma disjunção de literais.

### Definição (de forma normal disjuntiva)

Uma fórmula  $F$  diz-se na **forma normal disjuntiva** se

$F \equiv \bigvee_{i=1}^n F_i$ , com  $n \geq 1$ , onde cada fórmula  $F_i \in \{F_1, \dots, F_n\}$  é uma conjunção de literais.

### Exemplo 1

Se  $P$ ,  $Q$  e  $R$ , são fórmulas atômicas, então

- a fórmula  $F_1: (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q)$  está na forma normal conjuntiva;
- a fórmula  $F_2: (P \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q)$  está na forma normal disjuntiva.

### Exemplo 2

Sejam  $P$ ,  $Q$  e  $R$  fórmulas atômicas e considere a fórmula  $F$ :  
 $\neg P \vee (Q \wedge R) \Rightarrow R$ .

- Vamos reduzir a fórmula  $F$  à forma normal conjuntiva.
- Vamos reduzir a fórmula  $F$  à forma normal disjuntiva.

## Redução à forma normal disjuntiva prenex

**Passo 1:** Eliminar  $\Leftrightarrow$  e  $\Rightarrow$ :

$$F \Leftrightarrow G \equiv (F \Rightarrow G) \wedge (G \Rightarrow F) \quad (1)$$

$$F \Rightarrow G \equiv \neg F \vee G \quad (2)$$

**Passo 2:** Aplicação da dupla negação e das Leis de De Morgan:

$$\neg(\neg F) \equiv F \quad (3)$$

$$\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G \quad (4)$$

$$\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G \quad (5)$$

## Redução de fórmulas à forma normal disjuntiva prenex (cont.)

Denote-se por  $F[x]$  uma fórmula que contém uma variável  $x$  e por  $G$  uma fórmula que não contém  $x$ .

**Passo 3:** Posicionamento da negações imediatamente antes das proposições atômicas:

$$\neg((\forall x)F[x]) \equiv (\exists x)(\neg F[x]) \quad (6)$$

$$\neg((\exists x)F[x]) \equiv (\forall x)(\neg F[x]) \quad (7)$$

**Passo 4:** Movimentação dos quantificadores com mudança de variáveis, se necessário:

$$(Qx)F[x] \vee G \equiv (Qx)(F[x] \vee G) \quad (8)$$

$$(Qx)F[x] \wedge G \equiv (Qx)(F[x] \wedge G) \quad (9)$$

$$(\forall x)F[x] \wedge (\forall x)G[x] \equiv (\forall x)(F[x] \wedge G[x]) \quad (10)$$

$$(\exists x)F[x] \vee (\exists x)G[x] \equiv (\exists x)(F[x] \vee G[x]) \quad (11)$$

$$(Q_1x)F[x] \wedge (Q_2x)G[x] \equiv (Q_1x)(Q_2z)(F[x] \wedge G[z]) \quad (12)$$

$$(Q_3x)F[x] \vee (Q_4x)G[x] \equiv (Q_3x)(Q_4z)(F[x] \vee G[z]) \quad (13)$$

## Exemplo

Vamos reduzir a fórmula

$$(\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x)$$

à forma normal prenex.

- $\neg((\forall x)P(x)) \vee (\exists x)Q(x)$  (por aplicação de (2));
- $\equiv (\exists x)(\neg P(x)) \vee (\exists x)Q(x)$  (por aplicação de (6));
- $\equiv (\exists x)(\neg P(x) \vee Q(x))$  (por aplicação de (11)).

## Cláusulas

### Definição (de cláusula)

Uma  $r$ -cláusula é uma disjunção finita de  $r$  literais

$$L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_r$$

- Uma 0-cláusula é uma cláusula sem literais que vamos denotar por  $\diamond$ .

### Exemplos de cláusulas

- 1)  $P(x) \vee Q(a) \vee \neg R(y)$ ;
- 2)  $\neg P(x, f(x)) \vee Q(x, f(x), g(x))$ ;
- 3)  $\neg P(x, f(x)) \vee Q(x, f(x)) \vee R(y)$ .

## Conjunto de cláusulas

- O conjunto de cláusulas  $S = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$  corresponde à conjunção

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_k.$$

### Exemplo

O conjunto de cláusulas

$$S = \{\neg P(x, f(x)) \vee Q(x, f(x), g(x)), T(x, f(x)), R(y)\}$$

corresponde à fórmula (na forma normal conjuntiva)

$$(\neg P(x, f(x)) \vee Q(x, f(x), g(x))) \wedge T(x, f(x)) \wedge R(y).$$

## Forma normal de Skolem

### Definição (de forma normal de Skolem)

Uma fórmula diz-se na **forma normal de Skolem** se é uma conjunção de cláusulas universalmente quantificadas, ou seja, sem variáveis livres e sem quantificadores existenciais.

Exemplos de fórmulas na forma normal de Skolem:

- 1  $\forall x \forall y (P(x) \vee \neg Q(a, y));$
- 2  $\forall y \forall z (\neg Q(g(y, f(z))) \vee \neg P(b)).$

Uma vez que as cláusulas são disjunções de literais que não contêm quantificadores e em qualquer expressão na forma normal de Skolem cada variável está associado a um quantificador universal, nem sequer é necessário que tais quantificadores apareçam.

- **Referência bibliográfica:**

D. M. Cardoso, M. P. Carvalho, *Noções de Lógica Matemática*, Universidade de Aveiro, 2007 (versão revista em Março 2015, disponível na página da disciplina).