4. Funções Reais de Várias Variáveis Reais: Extremos

baseado em slides de edições anteriores de Cálculo II

Isabel Brás

UA, 7/4/2019

Cálculo II – Agrup. IV 18/19

Resumo dos Conteúdos

Extremos locais e globais

Definições: Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $P \in \mathcal{D}$.

1. $f(P)$ é um máximo local de f, se existe uma bola aberta $B_r(P)$ tal que $\forall X \in B_r(P) \cap \mathcal{D}\,,\ f(X) \leq f(P)$;
   Nesse caso, P diz-se um maximizante local de f.
2. $f(P)$ é o máximo global de f, se $\forall X \in \mathcal{D}\,,\ f(X) \leq f(P)$;
   Nesse caso, P diz-se um maximizante global de f.
3. $f(P)$ é um mínimo local de f, se existe uma bola aberta $B_r(P)$ tal que $\forall X \in B_r(P) \cap \mathcal{D}\,,\ f(X) \geq f(P)$;
   Nesse caso, P diz-se um minimizante local de f.
4. $f(P)$ é o mínimo global de f, se $\forall X \in \mathcal{D}\,,\ f(X) \geq f(P)$;
   Nesse caso, P diz-se um minimizante global de f.

Máximos e mínimos (locais ou globais) designam-se, genericamente, por extremos (locais ou globais), os pontos onde são atingidos designam-se, genericamente, por extremantes (locais ou globais, consoante o caso).

Condição suficiente para a existência de extremos globais: Teorema de Weierstrass

Teorema de Weierstrass:

Se $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é contínua e $\mathcal{D}$ é fechado e limitado (compacto), então f admite máximo e mínimo globais em $\mathcal{D}$.

Exemplo 1:

Seja $f: \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, com $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$, tal que $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Uma vez que $\mathcal{D}$ é compacto e f é contínua, pelo Teorema de Weierstrass, f atinge, em $\mathcal{D}$, máximo e mínimo globais.

Exemplo 2: A função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ admite no seu domínio máximo global, atingido em $(0, 0)$, mas não possuí mínimo global.

Isto contradiz o Teorema de Weierstrass? Porquê?

Condição necessária para a existência de extremo relativo em ponto interior: Teorema de Fermat

Teorema de Fermat:

Sejam $f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $P \in \text{int}(\mathcal{D})$. Se f tem derivadas parciais de 1.ª ordem em P e $f(P)$ é um extremo local de f, então $\nabla f(P) = (0, 0, \ldots, 0)$.

Definição:

Um ponto $P \in \text{int}(\mathcal{D})$ tal que $\nabla f(P) = 0$ diz-se um ponto crítico de f.

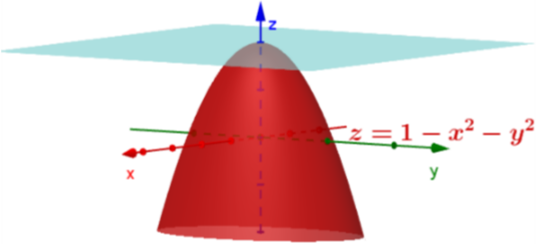
Observações:

- Se $P \in \text{int}(\mathcal{D})$ é um extremante de f, então P é ponto crítico de f ou não existe alguma das derivadas parciais de 1.ª ordem de f.
- Existem pontos críticos que não são extremantes, esses pontos designam-se por pontos de sela.

Exemplo – Extremante e ponto crítico:

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$.

Esboço Gráfico:

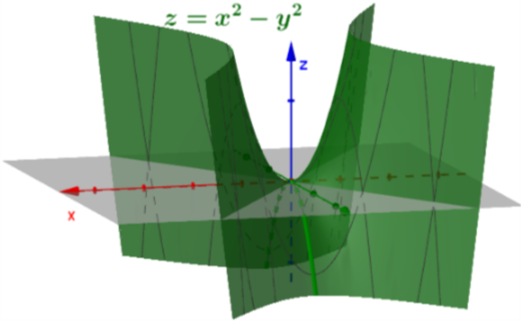


Notar que, $(0, 0)$ é um maximizante (global) de f, nesse ponto a função atinge o seu valor máximo: 1.
As derivadas parciais $f'_x(x, y) = -2x$ e $f'_x(x, y) = -2y$, existem para todo o (x, y). De acordo com o Teorema de Fermat, essas derivadas são nulas em $(0, 0)$, o que com facilidade se verifica.

Exemplo – Ponto crítico não extremante (ponto de sela):

A função real de domínio $\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = x^2 - y^2$ tem um ponto de sela. De facto, $\nabla f(0,0) = (0,0)$, ou seja, $(0,0)$ é um ponto crítico de f, mas não é extremante local de f, (justifique usando a definição).

Esboço Gráfico:



Matriz Hessiana

Como verificar se um ponto crítico é um extremante local?

Uma das abordagens pode ser através da matriz Hessiana de f.

Definição:

Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 em $\text{int}(\mathcal{D})$ e $P \in \text{int}(\mathcal{D})$. A matriz Hessiana de f em P é a matriz simétrica de ordem n:

$$H_f(P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(P) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(P) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(P) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(P) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(P) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(P) \end{bmatrix}.$$

O determinante desta matriz é chamado o Hessiano de f em P.

Teste dos valores próprios da Hessiana

Teorema:

Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 em $\text{int}(\mathcal{D})$, $P \in \text{int}(\mathcal{D})$ ponto crítico de f.

- Se os valores próprios de $H_f(P)$ são todos positivos, então P é um minimizante local de f.
- Se os valores próprios de $H_f(P)$ são todos negativos, então P é um maximizante local de f.
- Se existem valores próprios de sinais contrários de $H_f(P)$, então P é ponto de sela de f.

Note que, se $H_f(P)$ for singular e os valores próprios não nulos tiverem o mesmo sinal, <u>nada se pode concluir</u> acerca da natureza do ponto crítico.

Exemplo:

Seja f de domínio $\mathbb{R}^2$, tal que $f(x,y) = 5 - 2x^2 - y^2$. O único ponto crítico de f é $(0,0)$, e $H_f(0,0) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ (verifique!).
Assim, como os valores próprios de $H_f(0,0)$ são negativos, são -4 e -2, o ponto $(0,0)$ é um maximizante local de f.

Observações:

- A matriz Hessiana é uma matriz simétrica e portanto tem, contando multiplicidades, n valores próprios reais.
- As condições impostas aos valores próprios da Hessiana no Teste dos Valores Próprios, podem ser substituídas por outras, que usam determinantes de certas submatrizes (menores principais). Enunciaremos um teste alternativo, usando menores principais líderes, apenas para Hessianas invertíveis.[a]

[a] Podem enunciar-se versões, sem essa restrição, mas isso obrigaria a outras condições (mais exigentes e/ou de redação mais complexa).

Cadeia de menores principais líderes de uma matriz

Definição:

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $n \times n$. Considere-se M_k o determinante da submatriz que se obtém de A eliminando as últimas $n - k$ linhas e colunas de A, com $k = 1, 2, \ldots, n$. Isto é,

$$M_1 = |a_{11}|, M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, M_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \ldots, M_n = |A| .$$

M_1, M_2, ..., M_n diz-se a cadeia de menores principais líderes de A.

Exemplo: A matriz $\begin{bmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ tem os menores principais líderes:

$$M_1 = -5,\ M_2 = 11 \text{ e } M_3 = -22.$$

Da análise do sinal destes menores pode concluir-se que esta matriz tem todos os seus valores próprios negativos.
Veja a justificação na seguinte proposição.

Proposição:

Seja A uma matriz simétrica de ordem n <u>invertível</u> tal que $M_1, M_2, \ldots, M_n$ é a cadeia de menores principais lideres.

1. A tem todos os valores próprios positivos sse todos os M_k, $k = 1, \ldots, n$, são positivos.
2. A tem todos os valores próprios negativos sse $M_k < 0$, se k ímpar, e $M_k > 0$, se k par, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Teste da Hessiana (versão dos menores principais líderes)

Teorema:

Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 em $\text{int}(\mathcal{D})$, $P \in \text{int}(\mathcal{D})$ ponto crítico de f. Suponha-se que $\det(H_f(P)) \neq 0$, *i.e.*, $M_n(P) \neq 0$.

- Se a cadeia de menores principais líderes de $H_f(P)$ é positiva, i.e, $M_k(P) > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, então P é um minimizante local de f.
- Se a cadeia de menores principais é alternada, começando por um menor principal negativo, i.e,
  $M_k(P) < 0$, se k ímpar, e $M_k(P) > 0$, se k par, $k = 1, 2, \ldots, n$,
  então P é um maximizante local de f.
- Se nenhuma das situações anteriores ocorrer, P é um ponto de sela de f.

Note que, se $\det(H_f(P)) = 0$, este teste <u>não</u> serve para concluir da natureza do ponto crítico.

Exemplo de aplicação do Teste da Hessiana

Seja f a função de domínio $\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$.

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -3x^2 + 4y = 0 \\ \ \ 4x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Assim, $P = (0,0)$ e $Q = (\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ são os pontos críticos de f. Ora,

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} -6x & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

$H_f(P) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$, logo P é ponto de sela de f, pois $M_2(P) \neq 0$ e $M_1(P) = 0$.

$H_f(Q) = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$, como $M_1(Q) = -8 < 0$ e $M_2(Q) = 16 > 0$, Q é maximizante local de f. O máximo local correspondente é $f(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}) = \frac{59}{27}$.

Caso n=2: Teste da Hessiana

Teorema:

Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 em $\text{int}(\mathcal{D})$, $P \in \text{int}(\mathcal{D})$ ponto crítico de f. Suponha-se que $\det(H_f(P)) \neq 0$.

1. Se $\det(H_f(P)) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) > 0$, então P é um minimizante local.
2. Se $\det(H_f(P)) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) < 0$, então P é um maximizante local.
3. Se $\det(H_f(P)) < 0$, então P é ponto de sela.

Nota:

Neste caso ($n = 2$), quando $\det(H_f(P)) = 0$, qualquer teste baseado em $H_f(P)$ é inconclusivo . De facto, para Hessianas "idênticas", os pontos associados podem ter uma natureza completamente distinta (veja os exemplos do slide seguinte). Esta situação corresponde à observação a propósito do Teste dos Valores Próprios inconclusivo (ver Slide 9).

Exemplos de aplicação inconclusiva do Teste da Hessiana

Ex. 1: Determinar os extremos locais da função $f(x,y) = x^4 + x^2 + y^3$.

- Pontos críticos de f: $(0,0)$;
- $H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2+2 & 0 \\ 0 & 6y \end{bmatrix}$; $\det(H_f(0,0)) = 0$. O teste da Hessiana é inconclusivo. (Verifique que o dos valores próprios também o é).
- Análise, recorrendo à definição, da função numa vizinhança de $(0,0)$:
  Em toda a bola aberta centrada em $(0,0)$ existem pontos da forma $(0,b)$, com b negativo e com b positivo. Como
  $f(0,b) = b^3 < 0$, se $b < 0$, e $f(0,b) = b^3 > 0$, se $b > 0$,
  o ponto $(0,0)$ não é extremante de f, é um ponto de sela.

Ex. 2: A aplicação do Teste da Hessiana na determinação os extremos locais da função $f(x,y) = x^4 + x^2 + y^4$ é também inconclusiva. Mas, neste caso, $(0,0)$ é um minimizante local. Verifique, fazendo uma análise similar à do exemplo anterior.

Cálculo de Extremos Globais em Compactos

Se $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é contínua e $\mathcal{D}$ fechado e limitado (compacto), o Teorema de Weierstrass garante a existência de extremantes globais em D. A identificação desses extremantes, e respetivos valores extremos, pode ser feita usando o seguinte procedimento:

1. Determinar, no interior de $\mathcal{D}$, os pontos críticos de f.
2. Determinar, no interior de $\mathcal{D}$, os pontos onde não exista uma das derivadas parciais.
3. Determinar os candidatos a extremantes da restrição de f à fronteira de $\mathcal{D}$.
4. Considerar os pontos obtidos nos passos anteriores e calcular o valor de f em cada um deles.
   O menor dos valores é o mínimo global de f e o maior é o máximo global de f (em $\mathcal{D}$).

Exemplo de aplicação do procedimento do slide anterior:

$f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$, definida em $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$

1. Notar que, $\operatorname{int}(\mathcal{D}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1\}$.
   $P_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ é o único ponto crítico de f em $\operatorname{int}(\mathcal{D})$.
2. Como f tem derivadas parciais em todos os pontos de $\operatorname{int}(\mathcal{D})$, em relação ao ponto 2. não há pontos a acrescentar.
3. Notar que, $\operatorname{fr}(\mathcal{D}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$.
   Tomando $x = \cos\theta$ e $y = \operatorname{sen}\theta$, com $\theta \in [0, 2\pi]$,

   $$\operatorname{fr}(\mathcal{D}) = \{(\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \colon \theta \in [0, 2\pi]\}$$

   e a restrição de f, $f_{|\operatorname{fr}(\mathcal{D})}$ pode considerar-se como sendo a seguinte função a uma variável

   $$\begin{aligned} g(\theta) &= f_{|\operatorname{fr}(D)}(\theta) = f(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \\ &= 2 - \cos\theta - \operatorname{sen}\theta, \quad \text{com } \theta \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Conclusão do exemplo do slide anterior

Os candidatos as extremantes de g, são os seus pontos críticos $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\theta = \frac{5\pi}{4}$ e os pontos fronteiros do intervalo $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$.
Assim, devemos considerar os pontos:

$$P_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), P_3 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \text{ e } P_4 = (1, 0)$$

como candidatos a extremantes globais de f.

4. Como

$$f(P_1) = \frac{1}{2}, f(P_2) = 2 - \sqrt{2}, f(P_3) = 2 + \sqrt{2} \text{ e } f(P_4) = 1,$$

o máximo global de f em $\mathcal{D}$ é $2 + \sqrt{2}$, atingido em $P_3 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
o minímo global de f em $\mathcal{D}$ é $\frac{1}{2}$, atingido em $P_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

O que é um extremo condicionado (ou ligado) (ou sujeito a restrição)?

Um extremo condicionado de uma função é um extremo de uma sua restrição a um certo conjunto, definido por uma certa condição (ou conjunto de condições). Trataremos apenas o caso em que essa condição é uma igualdade. Mais precisamente, considerando funções a duas variáveis (a generalização para $n > 2$ é a natural):

Sejam $f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathcal{D}\colon g(x, y) = 0\}.$$

Os extremos da restrição $f_{|\mathcal{C}}$ são designados de extremos condicionados de f sujeitos (ou restritos) à condição (restrição) $g(x, y) = 0$.
A condição $g(x, y) = 0$ é chamada de condição de ligação ou condição de restrição (ou simplesmente, restrição).

Exemplo: $f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ e $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

Problema: Determinar os extremos de f no domínio restrito

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}.$$

Em esquema:

$$\begin{array}{cl} \text{min/max} & f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1 \\ \text{s.a.} & x^2 + y^2 = 1 \end{array}$$

Usando o estudo feito no exemplo do Slide 19, para a fronteira, podemos dizer que a resposta é $2 - \sqrt{2}$ e $2 + \sqrt{2}$ para o mínimo e máximo pedidos.

Multiplicadores de Lagrange

Teorema:

Sejam $\mathcal{D}$ um aberto de $\mathbb{R}^2$, $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1 em $\mathcal{D}$ e $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathcal{D}\colon g(x,y) = 0\}$.
Se $P \in \mathcal{C}$ é um extremante da restrição de f a $\mathcal{C}$ e $\nabla g(P) \neq 0$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$.

Multiplicador de Lagrange:

O teorema anterior (respeitadas as condições em f e g) afirma que que pontos de $\mathcal{C}$ onde os gradientes de f e g sejam colineares são os candidatos a extremantes condicionados.
O escalar λ é designado por multiplicador de Lagrange.

Método dos Multiplicadores de Lagrange

Problema: Sejam $\mathcal{D}$ um aberto de $\mathbb{R}^2$, $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1 em $\mathcal{D}$ e $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathcal{D}\colon g(x,y) = 0\}$.

$$\begin{array}{cl} \text{min/max} & f(x,y) \\ \text{s.a.} & g(x,y) = 0 \end{array}$$

Método:

1. Determinar as soluções (x,y) do sistema[a]
$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}, \text{ admitindo } \nabla g(x,y) \neq 0.$$
2. Verificar se $\nabla g(x_0,y_0) = 0$ em algum ponto $(x_0,y_0) \in \mathcal{C}$, esse ponto poderá também ser extremante.
3. Estudar a natureza dos pontos obtidos.

[a] Em geral, isso também envolve calcular λ.

Exemplo: $\begin{array}{cl} \min/\max & f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1 \\ \text{s.a.} & x^2 + y^2 = 1 \end{array}$

Aplicação do método dos multiplicadores de Lagrange:

1. $\begin{cases} \nabla f(x,y) & = & \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 & = & \lambda 2x \\ 2y - 1 & = & \lambda 2y \\ x^2 + y^2 & = & 1 \end{cases}$

   Resolvendo o sistema, obtém-se:

$$\begin{cases} x & = & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y & = & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \lambda & = & 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x & = & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y & = & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \lambda & = & 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

2. Os candidatos a extremantes são: $P = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $Q = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$. Como a condição define um conjunto limitado e fechado de $\mathbb{R}^2$, pelo Teorema de Weierstrass, P e Q terão que ser os extremantes. Calculando os respetivos valores, conclui-se que $f(P) = 2 - \sqrt{2}$ é o mínimo e $f(Q) = 2 + \sqrt{2}$ é o máximo (condicionados).