Universidade de Aveiro - Departamento de Matemática

Matemática Discreta 2016/2017 - UC 47166 (1^o Ano/2^o Sem)

Exame de Recurso - 12/07/2017 **Duração: 2h 30m**

1. Admita que o universo do discurso é o conjunto dos seres Humanos e considere os seguintes predicados:

   - $\text{Xibu}(x)$: x é da tribo Xibu;
   - $\text{Tonga}(y)$: y é da tribo Tonga;
   - $\text{vendearmas}(x, y)$: x vende armas a y;
   - $\text{traidor}(x)$: x é traidor.

   (a) Segundo a lei da tribo Xibu é traidor quem desta tribo venda armas a alguém da tribo Tonga. Usando os predicados definidos, represente a lei da tribo Xibu em lógica de primeira ordem.

   (b) Traduza a seguinte fórmula bem formada da lógica de primeira ordem para linguagem comum:

   $$\exists y \ (\ \text{Tonga}(y) \wedge \text{vendearmas}(Guru, y) \wedge \text{Xibu}(Guru)\ )$$

   (c) Supondo verdadeiros os factos descritos nas alíneas anteriores, aplicando o princípio da resolução mostre que se pode concluir que $Guru$ é traidor. Justifique devidamente.

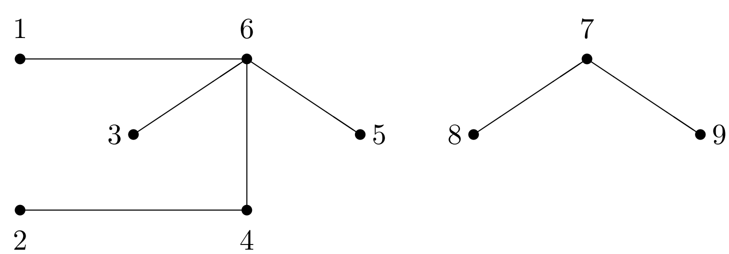
2. Suponha que 9 estudantes realizam um teste da disciplina de Matemática Discreta numa sala onde vão ser distribuídas três versões desse teste, T_a, T_b e T_c.

   (a) Sabendo que são distribuídos 3 testes de cada versão, de quantas maneiras podem ser distribuídos os 9 testes, de modo a que cada aluno receba uma única versão do teste.

   (b) Considere, agora, que são distribuídos pelo menos um teste T_a, pelo menos dois testes T_b e pelo menos três testes T_c. Determine o polinómio gerador do número de possibilidades de distribuir as três versões pelos 9 estudantes e, a partir desse polinómio, obtenha o valor do seu coeficiente que dá a solução do problema. Justifique.

3. Considere o grafo simples $G = (V, E)$ da figura seguinte, o qual contém três componentes conexas.

   G :



   Seja $\mathcal{R}$ a relação binária definida no conjunto de vértices V de G, tal que

   $$\mathcal{R} = \{(x, y) \in V \times V : \text{existe um caminho entre } x \text{ e } y\}.$$

   (a) Mostre que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência em V.

   (b) Determine o conjunto quociente $V/\mathcal{R}$. Justifique.

   (c) Determine, justificando, o número de arestas do grafo simples G^C complementar do grafo G.

4. Seja $G = (V, E)$ um grafo simples não orientado com conjunto de vértices $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e conjunto de arestas $E = \{12, 23, 35, 51, 34, 54, 65, 57, 76\}$. Suponha que, a cada aresta $ij \in E$ está associado um custo $c_{ij} = i+j$, com $i, j \in V$. Construa uma árvore abrangente de G de custo mínimo, aplicando o algoritmo de Prim. Justifique devidamente os passos do algoritmo e indique o custo total da árvore obtida.

5. Considere a sucessão dos números de Tribonacci $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $T_1 = T_2 = T_3 = 1$ e $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$, para $n \geq 4$. Mostre que $T_n < 2^n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Cotações:

1.(a)	**1.(b)**	**1.(c)**	**2.(a)**	**2.(b)**	**3.(a)**	**3.(b)**	**3.(c)**	**4.**	**5.**
2.0	1.0	2.5	2.0	2.5	2.0	2.0	1.5	2.5	2.0
