Matemática Discreta - 2019/2020

Resolução do Teste N$^{\underline{o}}$2 (Prova de Substituição) Realizado em 27-06-2020

Nas perguntas com mais do que uma versão apenas se inclui uma delas.

1 Recorrência

a) As casas da Praia Branquinha caracterizam-se por ter um friso de azulejos alinhados.

Os azulejos que compõem o friso podem ser azuis ou pintados com um nó de marinheiro. Existem 12 nós de marinheiro diferentes nos azulejos pintados.

Entre dois azulejos pintados deve ser colocado pelo menos um azulejo liso (é possível repetir nós no friso e é possível que um friso tenha apenas azulejos lisos).

Sendo a_n o número de possibilidades para um friso com n azulejos, determine uma formula recursiva para a_n.

b) Determine uma formula fechada para cada uma das equações de recorrência

i. $n(a_n - 4a_{n-2}) + 8a_{n-2} = 0$ com $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$.

ii. $u_n - u_{n-1} = 5 + 3^n$ com $u_0 = 0$.

Resolução:

a) $a_1 = 13$; $a_2 = 12 + 12 + 1 = 25$; O número de possibilidades de frisos que terminam com um nó são $12a_{n-2}$ (o penúltimo azulejo tem de ser azul). O número de possibilidades de frisos que terminam com uma azulejo azul são a_{n-1}. Logo $a_n = 12a_{n-2} + a_{n-1}$.

b) i.

Equação: $n(a_n - 4a_{n-2}) + 8a_{n-2} = 0$

$na_n - 4na_{n-2} + 8a_{n-2} = 0$

$na_n - 4(n-2)a_{n-2} = 0$

Substituição: $b_n = na_n$.

$b_n - 4b_{n-2} = 0$

Equação característica: $x^2 - 4 = 0$.

Solução geral: $b_n = A(-2)^n + B2^n$.

$a_0 = 0$ e $a_1 = 1$

$A + B = 0$ e $1 = -2A + 2B$

Logo $B = 1/4$ e $A = -1/4$

Solução: $b_n = -(-2)^{n-2} + 2^{n-2}$

$a_n = \frac{-(-2)^{n-2}+2^{n-2}}{n}$, $n > 0$; $a_0 = 0$

ii.

$$
\begin{aligned}
\text{Equação característica:}\quad & x-1=0;\\
\text{Solução geral da equação homogénea:}\quad & u_n^H = A\\
\text{Equação particular (1):}\quad & u_n - u_{n-1} = 5\\
\text{Solução particular (1):}\quad & u_n^{P1} = Bn^r \text{ onde } r=1\\
& Bn - B(n-1) = 5\\
& B = 5\\
& u_n^{P1} = 5n\\
\text{Equação particular (2):}\quad & u_n - u_{n-1} = 3^n\\
\text{Solução particular (2):}\quad & u_n^{P2} = Cn^m 3^n \text{ onde } m=0\\
& C3^n - C3^{n-1} = 3^n\\
& C = 3/2\\
& u_n^{P2} = \tfrac{3^{n+1}}{2}\\
\text{Solução geral:}\quad & u_n = u_n^H + u_n^{P1} + u_n^{P2} = A + 5n + \tfrac{3^{n+1}}{2}\\
& \text{Como } u_0 = 0, \text{ temos } A = -3/2.\\
\text{Solução:}\quad & u_n = -\tfrac{3}{2} + 5n + \tfrac{3^{n+1}}{2}
\end{aligned}
$$

2 Funções Geradoras

a) Determine a função geradora da sucessão $(a_n)_{n\geq 0}$ tal que $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ e $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} - n$, $n \geq 2$.

b) Determine a sucessão (u_n) associada à função geradora $f(x) = \frac{1}{2x^2+x-1}$.

Resolução:

a) Da definição de função geradora (ordinária) obtém-se

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty}(2a_{n-1} + 3a_{n-2} - n)x^n\\
&= 1 + 2x\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} + 3x^2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2} - x\sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-1} \qquad (1)\\
&= 1 + 2x\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + 3x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - x\left(\sum_{n=2}^{\infty} x^n\right)'\\
&= 1 + 2x(f(x)-1) + 3x^2 f(x) - x\left(\frac{1}{1-x} - 1 - x\right)'\\
&= 1 - 2x + (2x+3x^2)f(x) - x\left(\frac{1}{(1-x)^2} - 1\right)\\
&= 1 - x + (2x+3x^2)f(x) - \frac{x}{(1-x)^2}.
\end{aligned}
$$

onde a terceira igualdade é obtida substituindo, em (1), n por $n+1$ na primeira série de potências e n por $n+2$ na segunda série de potências. Então

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1-x}{1-2x-3x^2} - \frac{x}{(1-x)^2(1-2x-3x^2)}\\
&= \frac{1-x}{1-2x-3x^2} - \frac{x}{(1-x)^2(1-2x-3x^2)}
\end{aligned}
$$

b) Considerando $f(x)$ tem-se

$$f(x) = \frac{1}{(2x-1)(x+1)} = \frac{-\frac{2}{3}}{1-2x} - \frac{\frac{1}{3}}{1+x} = -\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-2^{n+1}+(-1)^{n+1}}{3}\right)x^n.$$

Logo, $u_n = \frac{(-1)^{n+1}-2^{n+1}}{3}, \ n \geq 0.$

3 Grafos I

Considera o grafo $G = (V,E)$ onde $V = \{1,2,3,4,5,6\}$ e $E = \{12,13,14,16,23,26,46,56\}$.

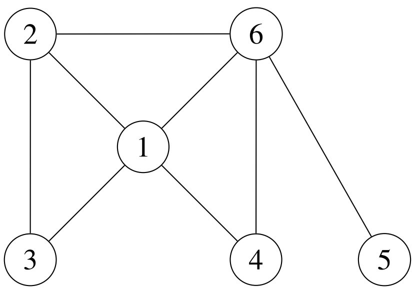
a) Determina a sequências dos graus dos vértices $(d_G(1), d_G(2), \ldots, d_G(6))$, $\Delta(G)$, $\delta(G)$ e a cintura de G, $g(G)$.

b) Aplica o algoritmo de Dijkstra para determinar o caminho de custo mínimo entre os vértices 4 e 5 do grafo G, considerando que o custo associado a cada aresta $ij \in E$ é $i \times j$.

c) Aplica o algoritmo de Kruskal para determinar uma árvore abrangente de G com custo mínimo, considerando que o custo associado a cada aresta $ij \in E$ é $i \times j$.

Resolução:

O grafo é



a) A sequência dos graus dos vértices de G é $(4,3,2,2,1,4)$.

O menor dos graus dos vértices de G é $\delta(G) = 1$. O maior dos graus dos vértices de G é $\Delta(G) = 4$. O comprimento de um circuito de comprimento mínimo em G, por exemplo $C_3 = 1,2,3,1$ é 3, pelo que a cintura de G é $g(G) = 3$.

b) Aplicamos o algoritmo de Dijkstra, começando pelo vértice 4 e parando quando o vértice 5 se torna definitivo:

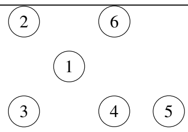
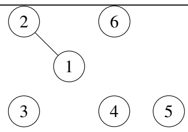
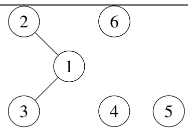
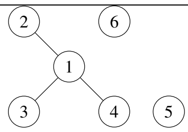
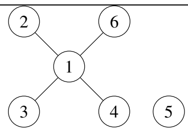
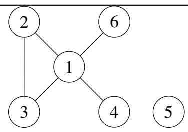
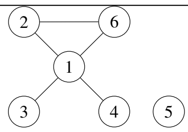
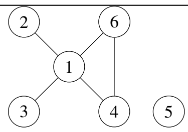
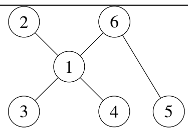
Iteração	1	2	3	4	5	6	z
0	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(0,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	4
1	$(4,4)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	x	$(\infty,-)$	$(24,4)$	1
2	x	$(6,1)$	$(7,1)$	x	$(\infty,-)$	$(10,1)$	2
3	x	x	$(7,1)$	x	$(\infty,-)$	$(10,1)$	3
4	x	x	x	x	$(\infty,-)$	$(10,1)$	6
5	x	x	x	x	$(40,6)$	x	5

Concluímos que o caminho de custo mínimo entre os vértices 4 e 5 é $P = 4,1,6,5$ com custo 40.

c) Começamos por ordenar as arestas de G por ordem crescente dos custos:

12	13	14	16	23	26	46	56
2	3	4	6	6	12	24	30

Aplicamos agora o algoritmo de Kruskal, adicionando sucessivamente as arestas até obter uma árvore abrangente e ignorando as arestas que, ao serem adicionadas, produzem um ciclo:

Iteração	Aresta	Floresta	Custo
0	–		0
1	12		2
2	13		5
3	14		9
4	16		15
5	23		Ciclo
6	26		Ciclo
7	46		Ciclo
8	56		45

No final da iteração 8, obtemos uma árvore abrangente de custo mínimo 45, $G[\{12,13,14,16,56\}]$.

4 Grafos II

Considere o grafo simples G, com o conjunto de vértices $V(G) = \{1, 2, \ldots, 8\}$, representado pelo matriz de adjacência

$$A_G = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Sabendo que qualquer que seja o grafo H, as entradas $a_{ij}^{(p)}$ da matriz A_H^p dão o número de passeios de comprimento p entre os vértices i e j, prove que a soma dos elementos diagonais de A_H^3 é igual a 6 vezes o número de triângulos (ciclos de comprimento 3).

b) A partir de A_G^2, determine o número total de passeios de comprimento 2 entre os diferentes pares de vértices, (i, j), com $i \neq j$.

c) Verifique se G é um grafo bipartido e, no caso afirmativo, determine a respetiva bipartição.

d) Calcule o número de árvores abrangentes de G, $\tau(G)$, com base nos resultados que se conhecem para casos particulares.

e) Calcule, o centro de G, $Centro(G)$, o diâmetro, $diam(G)$, e o raio, $r(G)$.

Resolução:

a) Cada ciclo de comprimento 3 corresponde a um triângulo e para cada um dos 3 vértices desse triangulo existem dois passeios fechados de comprimento 3 (um no sentido dos ponteiros do relógio e outro no sentido contrário) os quais determinam o mesmo triângulo. Logo, na contagem do número de passeios fechados de comprimento 3, que é dada pela soma das entradas diagonais de A_H^3, cada triângulo é contado 6 vezes. Assim, o número de ciclos de comprimento 3 (triângulos) é igual à soma dos elementos diagonais de A_H^3 dividida por 6.

b) As entradas $a_{ij}^{(2)}$ de A_H^2 dão o número dos passeios de comprimento 2 com início no vértice i e fim no vértice j, que naturalmente é igual ao número de passeios de comprimento 2 com início no vértice j e fim no vértice i. Assim, dado que

$$A_G^2 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array},$$

contando em cada linha, o número de passeios de comprimento 2 entre vértices distintos é igual a

$$3 + 2 + 4 + 4 + 3 + 2 + 3 + 3 = 24.$$

Em cada linha excluem-se os elementos diagonais que dão o número de passeios fechados de comprimento 2 (graus dos vértices) que se iniciam e terminam no mesmo vértice. Note-se que contados os passeios de comprimento 2 com início no vértice i e fim no vértice j (entrada (i,j)), também se devem contar os passeios com início em j e fim em i (entrada (j,i)).

c) Considere-se o vértice 1 e defina-se V_0 como sendo o subconjunto de vértices de G à distância par de 1 e V_1 o subconjunto dos vértices de G à distância ímpar, ou seja, $V_0 = \{1,4,6,8\}$ e $V_1 = \{2,3,5,7\}$. Com facilidade se conclui que não existem arestas nem entre vértices de V_0, nem entre vértices de V_1. Logo G é bipartido, com bipartição $V(G) = V_0 \cup V_1$.

d) Sabe-se que sendo H um grafo conexo formado por dois subgrafos conexos H_1 e H_2 ligados por uma aresta (uma ponte), $\tau(H) = \tau(H_1)\tau(H_2)$. Uma vez que G é formado por dois subgrafos G_1 e G_2, cada um dos quais é um ciclo C_4, $\tau(G) = \tau(C_4)\tau(C_4) = 4^2 = 16$ (dado que o número de árvores abrangentes de um ciclo C_p é igual a p).

e) Vamos começar por determinar as excentricidades dos vértices.

$$\begin{aligned} e(1) &= e(5) = e(7) = e(8) = 4 \\ e(2) &= e(6) = 5 \\ e(3) &= e(4) = 3. \end{aligned}$$

Logo, $Centro(G) = \{3,4\}$, $diam(G) = 5$ e $r(G) = 3$.