Matemática Discreta

Elementos de Teoria dos Grafos - 4

Universidade de Aveiro 2018/2019

http://moodle.ua.pt

Árvores e florestas

Definição (de floresta)

Um grafo simples G diz-se uma floresta se G não contém circuitos. Uma floresta conexa designa-se por árvore.

Teorema

Se $G = (V, E)$ é um grafo simples com ν vértices, então são equivalentes seguintes afirmações:

(a) G é uma árvore.

(b) G não contém ciclos e tem $\nu - 1$ arestas.

(c) G é conexo e tem $\nu - 1$ arestas.

(d) G é conexo e cada aresta é uma ponte.

(e) $\forall x, y \in V(G)$ existe um único caminho-(x, y).

(f) G não contém ciclos, mas acrescentando uma aresta obtém-se um ciclo.

Condição necessária e suficiente para um grafo ser uma floresta.

Teorema

Um grafo G é uma floresta se e só se

$$\varepsilon(G) - \nu(G) + \mathrm{cc}(G) = 0.$$

Prova. $(\Rightarrow)$ A prova da condição necessária vai ser feita por indução sobre o número de arestas de G, tendo em conta que o resultado se verifica trivialmente para $\varepsilon(G) = 0$.
Suponha que o resultado se verifica para todas as florestas com menos do que $\varepsilon(G)$ arestas e $\varepsilon(G) > 0$. Seja G' um subgrafo de G obtido por eliminação de uma aresta arbitrária. Logo, G' é uma floresta com $\varepsilon(G) - 1$ arestas, $\nu(G)$ vértices e $\mathrm{cc}(G) + 1$ componentes. Por hipótese de indução, aplicada a G',

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon(G') - \nu(G') + \mathrm{cc}(G') = \varepsilon(G) - 1 - \nu(G) + \mathrm{cc}(G) + 1 \\ &= \varepsilon(G) - \nu(G) + \mathrm{cc}(G). \end{aligned}$$

Prova da condição suficiente.

($\Leftarrow$) Suponhamos que G tem p componentes, $G_1, \ldots, G_p$, pelo que $\varepsilon(G) - \nu(G) + p = \sum_{j=1}^{p} (\varepsilon(G_j) - \nu(G_j) + 1)$. Então

$$\varepsilon(G) - \nu(G) + p = 0 \ \Leftrightarrow \ \sum_{j=1}^{p} (\varepsilon(G_j) - \nu(G_j) + 1) = 0.$$

e, uma vez que $\forall j \in [p] \ \ \varepsilon(G_j) - \nu(G_j) + 1 \geq 0$,

$$\forall j \in [p] \ \ \varepsilon(G_j) - \nu(G_j) + 1 = 0.$$

Consequentemente, de acordo com o teorema anterior, todos os grafos G_j, com $j \in \{1, \ldots, p\}$, são árvores.

Árvores abrangentes

Definição (árvores abrangente)

Dado um grafo conexo G, designa-se por árvore abrangente (ou de suporte) de G, todo o subgrafo abrangente de G que é uma árvore, ou seja, todo o subgrafo que é uma árvore e contém todos os vértices de G.

Teorema

Todo o grafo conexo admite uma árvore abrangente.

Prova. Seja G um grafo conexo e seja T um subgrafo abrangente conexo minimal de G, ou seja, tal que $\mathrm{cc}(T) = 1$ e $\mathrm{cc}(T - e) > 1$, para cada $e \in T$. Então, cada aresta de T é uma ponte e, tendo em conta o primeiro teorema desta aula, T é uma árvore.

Operações de contracção e fusão de extremos de uma aresta

Definição (contracção de arestas)

Dado um grafo G, diz-se que uma aresta e de G é contraída se os seus vértices extremos são fundidos num único vértice, todas as arestas paralelas e lacetes (eventualmente) produzidos são eliminados. Esta operação designa-se por operação de contracção de arestas de G e, para uma aresta particular $e \in E(G)$, denota-se por G/e.

Definição (fusão de extremos de uma aresta)

Designa-se por fusão de extremos de uma aresta (ou fusão de vértices extremos de uma aresta) $e \in E(G)$ a operação que se denota por $G//e$ e difere da contracção de uma aresta apenas no facto de, com excepção da aresta contraída, todas as restantes arestas se mantem no grafo (incluindo arestas paralelas e lacetes eventualmente produzidos).

Consequências

- Dado um grafo G, após a fusão dos extremos da aresta $e \in E(G)$, o número de arestas decresce uma unidade, ou seja,

$$|E(G//e)| = |E(G)| - 1.$$

- A operação de fusão de extremos de arestas comuta com a operação de eliminação de arestas, ou seja, dadas duas arestas distintas $e, f \in E(G)$, verifica-se que

$$(G//e) - f = (G - f)//e.$$

Número de árvores abrangentes (fórmula recursiva)

Teorema

Dado um grafo G, se $e \in E(G)$ não é um lacete em G, então

$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G//e),$$

onde $\tau(G)$ denota o número de árvores abrangentes de G.

Prova. Sem perda de generalidade, vamos assumir que G é um grafo conexo. Cada árvore abrangente de G que não contém a aresta e é uma árvore abrangente de $G - e$ e reciprocamente, $\tau(G - e)$ é igual ao número das árvores abrangentes de G que não contêm a aresta e. Por outro lado, a cada árvore abrangente T de G que contém e corresponde uma árvore abrangente $T//e$ do grafo $G//e$ (e esta correspondência é biunívoca).

Alguns casos particulares

Para simplificar o processo de determinação do número de árvores abrangentes de um grafo, vamos considerar alguns casos especiais:

- se G não é conexo, então $\tau(G) = 0$;
- se G é uma árvore, então $\tau(G) = 1$;
- se G é um ciclo, com k arestas, então $\tau(G) = k$ (uma vez que a eliminação de uma aresta do ciclo produz uma árvore abrangente);
- se G é um grafo, constituído por dois vértices ligados por k arestas, então $\tau(G) = k$ (uma vez que cada aresta constitui uma árvore abrangente);
- se G é um grafo que resulta de dois subgrafos G_1 e G_2 unidos por uma ponte ou por um único vértice em comum, então $\tau(G) = \tau(G_1)\, \tau G_2$.

Referências bibliográficas I

D. M. Cardoso, J. Szymanski e M. Rostami, *Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos*, Escolar Editora, 2009.