Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I - Agrupamento IV — 2ª Prova de Avaliação Discreta

17 de janeiro de 2019

Duração: **2h**

– Justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

1. Considere a função F definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} t\ln(1+e^t)\,dt$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

[12pts] (a) Justifique que F é diferenciável em $\mathbb{R}$ e determine $F'(x)$.

[18pts] (b) Estude F quanto à monotonia e indique, se existirem, os extremos locais.

2. Considere a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = xe^x$.

[07pts] (a) Diga, justificando, se a função f é integrável em qualquer intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ com $b > a$.

[28pts] (b) Calcule o valor da área da região limitada do plano situada entre $x = -1$ e $x = 1$ e limitada pelo gráfico de f e pelo eixo das abcissas.

[17pts] 3. Mostre que o integral impróprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ é convergente e determine o seu valor.

[18pts] 4. Usando um dos critérios de convergência, estude a natureza do integral impróprio

$$\int_2^{+\infty} \frac{x-2}{x^3+2x+\pi}\,dx.$$

5. Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série numérica.

[05pts] (a) Defina série convergente.

[15pts] (b) Utilizando a definição, mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)$$

é convergente e indique a sua soma.

6. Verifique se as séries seguintes são convergentes e, em caso de convergência, indique se a convergência é absoluta ou simples:

[15pts] (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\ln(n)}{\sqrt[3]{n}}$

[15pts] (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-5)^n \cdot n^2}{n!}$

[25pts] (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right)$

7. Sabendo que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é uma série numérica simplesmente convergente e que

$$0 < |a_n| \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N},$$

determine, justificando, a natureza das seguintes séries:

[13pts] (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$

[12pts] (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$

Formulário

$(f(x)^p)' = p\ (f(x))^{p-1}\ f'(x)$, com $p \in \mathbb{R}$	
$\left(a^{f(x)}\right)' = f'(x)a^{f(x)} \ln(a)$, com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$(\log_a(f(x)))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)\ln(a)}$, com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
$(\operatorname{sen}(f(x)))' = f'(x)\cos(f(x))$	$(\cos(f(x)))' = -f'(x)\operatorname{sen}(f(x))$
$(\operatorname{tg}(f(x)))' = f'(x)\sec^2(f(x))$	$(\operatorname{cotg}(f(x)))' = -f'(x)\operatorname{cosec}^2(f(x))$
$(\sec(f(x)))' = f'(x)\sec(f(x))\operatorname{tg}(f(x))$	$(\operatorname{cosec}(f(x)))' = -f'(x)\operatorname{cosec}(f(x))\operatorname{cotg}(f(x))$
$(\operatorname{arcsen}(f(x)))' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$	$(\arccos(f(x)))' = -\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$
$(\operatorname{arctg}(f(x)))' = \dfrac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$	$(\operatorname{arccotg}(f(x))' = -\dfrac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$

$1+\operatorname{tg}^2(x) = \sec^2(x)$, para $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$	$1+\operatorname{cotg}^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x)$, para $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$	$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$
$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$	$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$