Matemática Discreta - 2019/2020

Teste N^{o}2 22-06-2020

Apenas inclui uma versão de cada pergunta.

1 Equações de recorrência

a) Sabendo que $a_n = \frac{3^{n+2}}{4}$ é solução da equação $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 3^n$, resolva a equação de recorrência

$$b_n = 2b_{n-1} - b_{n-2} + 3^n + 5,$$

com condições iniciais $b_0 = \frac{1}{4}$ e $b_1 = \frac{27}{4}$.

Resolução:

Equação característica:	$x^2 - 2x + 1 = 0$
Solução da eq. característica:	$x = 1$ (dupla)
Solução geral da eq. homogénea:	$b_n^H = A + Bn$
Equação (1):	$b_n = 2b_{n-1} - b_{n-2} + 5$
Solução particular (1):	$b_n^{(1)} = Cn^r$ onde $r = 2$
	$Cn^2 - 2C(n^2 - 2n + 1) + C(n^2 - 4n + 4) = 5$
	$C = 5/2$
	$b_n^{(1)} = \frac{5n^2}{2}$
Equação (2):	$b_n = 2b_{n-1} - b_{n-2} + 3^n$
	$b_n^{(2)} = \frac{3^{n+2}}{4}$
Solução geral:	$b_n = b_n^H + b_n^{(1)} + b_n^{(2)}$
	$b_n = A + Bn + \frac{5n^2}{2} + \frac{3^{n+2}}{4}$
Cálculo de A e B:	$b_0 = \frac{1}{4}$ e $b_1 = \frac{27}{4}$
	$\frac{1}{4} = A + \frac{9}{4}$ e $\frac{27}{4} = A + B + \frac{5}{2} + \frac{27}{4}$
	$A = -2$ e $B = \frac{1}{2}$
Solução:	$b_n = -2 + \frac{n}{2} + \frac{5n^2}{2} + \frac{3^{n+2}}{4}$

b) Escreva uma equação de recorrência que tenha solução geral

$$a_n = A + (Bn + C)2^n + n.$$

Resolução:

Soluções da eq. característica:	1 (simples) e 2 (dupla)
Equação característica:	$(x-1)(x-2)^2 = 0$
	$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$
Solução particular:	$a_n^p = n$
	$r = 1$
	$f(n) = K$, K constante
	$n - 5(n-1) + 8(n-2) - 4(n-3) = K$
	$K = 1$
Equação de recorrência:	$a_n - 5a_{n-1} + 8a_{n-2} - 4a_{n-3} = 1$

2 Funções Geradoras

A função geradora ordinária de uma sucessão (b_n), $n \in \mathbb{N}_0$, é

$$G(x) = \frac{2}{(1-x)(1-x^2/4)} + \frac{x^{300}}{(1-x)^4}.$$

Determina b_{222}.

Resolução:

$$\frac{2}{(1-x)(1-x^2/4)} = \frac{A}{(1-x)} + \frac{B}{(1-x/2)} + \frac{C}{(1+x/2)}$$

$A = \left.\frac{2}{(1-x/2)(1+x/2)}\right|_{x=1} = \frac{8}{3}$

$B = \left.\frac{2}{(1-x)(1+x/2)}\right|_{x=2} = -1$

$C = \left.\frac{2}{(1-x)(1-x/2)}\right|_{x=-2} = \frac{1}{3}$

Logo,

$$\begin{aligned}
G(x) &= \frac{8}{3} \times \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x/2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{1+x/2} + x^{300} \times \frac{1}{(1-x)^4} \\
&= \frac{8}{3}\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n + x^{300}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+4-1}{n}x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{8}{3} - (\frac{1}{2})^n + \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n\right)x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+3}{n}x^{n+300}.
\end{aligned}$$

Uma vez que o coeficiente do termo de ordem 222 em $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+3}{n}x^{n+300}$ é igual a 0, concluímos que $b_{222} = \frac{8}{3} - (\frac{1}{2})^{222} + \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{222}$.

3 Grafos I

a) Mostre que se G tem ordem 201 e $\delta(G) \geq 100$ então $diam(G) \leq 2$.

Resolução:

Suponhamos que existem vertices v e w tais que $dist(v,w) \geq 3$. Então $\mathscr{V}(v) \cap \mathscr{V}(w) = \emptyset$ logo, por um lado

$$|\mathscr{V}(v) \cup \mathscr{V}(w)| \leq n - |\{v,w\}| = n-2 = 201-2 = 199.$$

Por outro lado $|\mathscr{V}(v) \cup \mathscr{V}(w)| = d(v) + d(w) \geq 2\delta(G) = 200$, que é uma contradição. Concluímos assim que $dist(v,w) < 3$ para todo $v,w \in V(G)$. Consequentemente, $diam(G) \leq 2$.

b) Qual o número máximo de componentes conexas que deve ter uma floresta com 200 vertices para garantir que, qualquer que seja o número de arestas de cada componente, uma das componentes tem pelo menos 20 arestas?

Resolução:

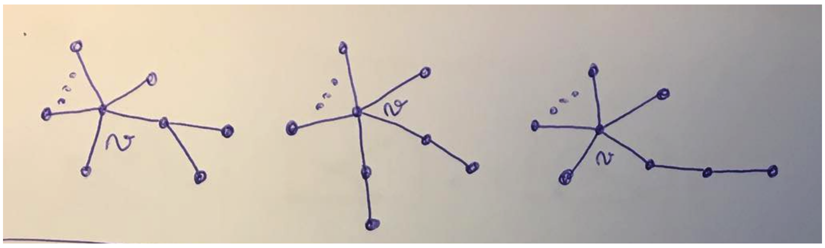
Sejam m e n a dimensão e a ordem de G respectivamente. Temos que $m = n - cc(G) = 200 - cc(G)$. Para garantir que uma componente tenha pelo menos 20 arestas, pelo Princípio da Gaiola de Pombos, $m > 19cc(G)$. Ou seja $200 - cc(G) > 19cc(G)$, donde resulta $cc(G) < 10$. Logo G tem no máximo 9 componentes conexas.

c) Quantas florestas de ordem 200 não isomorfas com $\Delta(G) = 197$ existem?

Resolução:

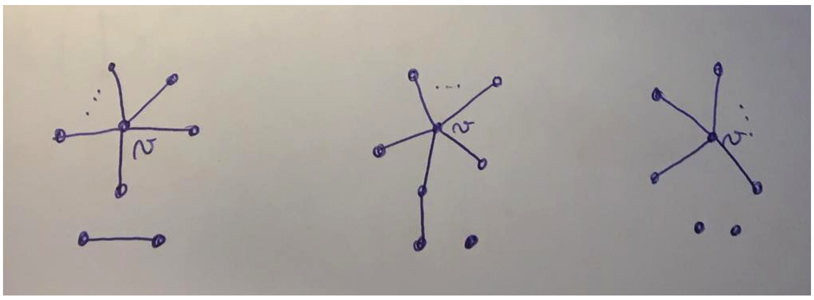
Seja v é o vertice de grau 197.

Existem 3 grafos não isomorfos conexos.



No 1º a sequência de graus dos vertices é $(197, 3, 1, \ldots, 1)$ e o diâmetro igual a 3; no 2º a sequência de graus dos vertices é $(197, 2, 2, 1, 1, \ldots, 1)$ e o diâmetro é igual a 3; no 3º a sequência de graus de vertices é $(197, 2, 2, 1, \ldots 1)$ e o diâmetro é igual a 4.

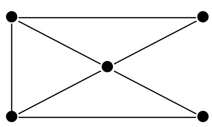
Os 3 grafos seguintes, não conexos, também estão nas condições do problema.



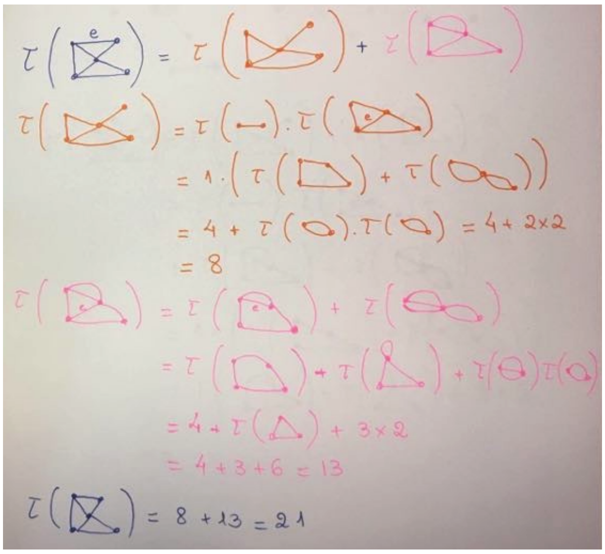
O 1º não tem vertices isolados, o 2º tem um vertice isolado e a 3ª com dois vertices isolados.

No total existem 6 florestas não isomorfas.

d) Determine o número de árvores abrangentes do grafo seguinte.



Resolução:



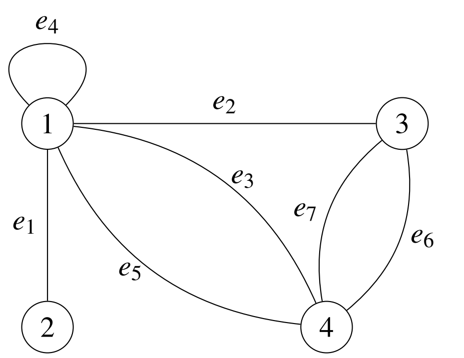
4 Grafos II

1. Considera o grafo $G = (V, E, \Psi)$, em que $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ e $\Psi(e_1) = \{1, 2\}$, $\Psi(e_2) = \{1, 3\}$, $\Psi(e_3) = \{1, 4\}$, $\Psi(e_4) = \{1, 1\}$, $\Psi(e_5) = \{4, 1\}$, $\Psi(e_6) = \Psi(e_7) = \{3, 4\}$.
   - (a) Indica a matriz de incidência de G.
   - (b) Indica, justificando, um passeio em G de comprimento 3 que não seja um caminho.
   - (c) Averigua, justificando, se existe em G alguma ponte.
   - (d) Determina, justificando, o centro de G.
2. Sabe-se que em qualquer grafo bipartido, $G = (X, Y, E)$,

$$\sum_{x \in X} d_G(x) = \sum_{y \in Y} d_G(y).$$

Prova que num qualquer grafo bipartido e r-regular, com $r > 0$, $|X| = |Y|$.

Resolução:



1. (a)

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	1	1	2	1	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0	1	1
4	0	0	1	0	1	1	1

(b) Por exemplo, $P = 1e_4 1e_2 3e_6 4$ é um passeio de comprimento 3 (3 arestas) que não é um caminho pois repete vértices intermédios.

(c) A aresta e_1 é uma ponte pois $cc(G) = 1$ enquanto $cc(G - e_1) = 2$.

(d) A matriz das distâncias entre vértices é

	1	2	3	4
1	0	1	1	1
2	1	0	2	2
3	1	2	0	1
4	1	2	1	0

A excentricidade de um vértice $u \in V(G)$ é $e(u) = \max_{v \in V(G)} \operatorname{dist}(u, v)$, logo $e(1) = 1$, $e(2) = 2$, $e(3) = 2$ e $e(4) = 2$.
O raio de G é $r(G) = \min_{u \in V(G)} e(u) = 1$.
Assim, o centro de G é $\{u \in V(G) : e(u) = r(G)\} = \{1\}$.

2. Se G é r-regular então $\sum_{x \in X} d_G(x) = \sum_{x \in X} r = r|X|$ e $\sum_{y \in Y} d_G(y) = \sum_{y \in Y} r = r|Y|$. Se, além disso, G é bipartido então $r|X| = r|Y|$ e portanto $|X| = |Y|$.