Princípio de Inclusão Exclusão

Universidade de Aveiro 2018/2019

http://moodle.ua.pt

Princípio de inclusão-exclusão

Dados dois conjuntos finitos A e B,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Exemplo: Vamos determinar o número de bytes (sequências binárias de comprimento 8) que começam por 1 ou terminam em 00?

Solução: Seja A o conjunto dos bytes que começam com 1 e B o conjunto dos bytes que terminam em 00. Pelos princípios da bijecção e da multiplicação,

$$|A| = |\{(1, x_2, \ldots, x_8) : x_i \in \{0,1\}, i = 2, ..., 8\}| = 2^7 = 128,$$

$$|B| = |\{(x_1, x_2, ..., x_6, 0, 0) : x_i \in \{0,1\}, i = 1, ..., 6\}| = 2^6 = 64$$

e $|A \cap B| = |\{(1, x_2, \cdots, x_6, 0, 0) : x_i \in \{0,1\}, i = 2, \ldots, 6\}| = 2^5 = 32$. Pelo princípio de inclusão-exclusão, o número de bytes que começam por 1 ou terminam em 00 é dado por $|A| + |B| - |A \cap B| = 128 + 64 - 32 = 160.$

Princípio de inclusão-exclusão

No caso mais geral podemos aplicar a fórmula de Daniel da Silva:

Dados os conjuntos finitos arbitrários $A_1, A_2, \ldots, A_n$,

$$|\bigcup_{k=1}^{n} A_k| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k^{(n)},$$

onde $S_k^{(n)} = \sum_{I \in [n]^k} |\bigcap_{i \in I} A_i|$ e $[n]^k$ é o conjunto de subconjuntos de $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ com k elementos.

Princípio de inclusão-exclusão (continuação)

O princípio de inclusão-exclusão pode ser descrito da seguinte forma:
Seja X um conjunto finito, $1, 2, \ldots, n$, as propriedades que cada elemento de X pode ou não ter e $N(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ o número de elementos de X que têm pelo menos as propriedades $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Então o número de elementos de X que têm pelo menos uma das propriedades $1, 2, \ldots, n$ é dado por

$$\begin{aligned}
N(1) + N(2) + & \cdots & +N(n) - N(1,2) - N(1,3) - \cdots \\
& \cdots & -N(n-1,n) + N(1,2,3) + N(1,2,4) + \cdots \\
& \cdots & +N(n-2,n-1,n) - \cdots \\
& \cdots & +(-1)^{(n-1)} N(1,2,\ldots,n).
\end{aligned}$$

Princípio da inclusão-exclusão (continuação)

O número de elementos de X que não possui nenhuma das propriedades $1, 2, \cdots, n$ é dado por

$$\begin{aligned}
|X| - N(1) - N(2) - & \cdots & -N(n) + N(1,2) + N(1,3) + \cdots \\
& \cdots & +N(n-1,n) - N(1,2,3) - N(1,2,4) - \cdots \\
& \cdots & -N(n-2,n-1,n) + \cdots \\
& \cdots & +(-1)^{n} N(1,2,\ldots,n).
\end{aligned}$$

Exemplo

Sendo A o conjunto dos números inteiros positivos não superiores a 500 que não são divisíveis por 2, nem por 3, nem por 5, vamos determinar o número de elementos de A.
Solução: Sendo $A_i = \{n \in [500] : \ n \text{ é divisível por } i\}$, para $i = 2, 3, 5$. Então, $A = A_2^c \cap A_3^c \cap A_5^c = [500] \setminus (A_2 \cup A_3 \cup A_5)$ e, pelo princípio de inclusão-exclusão,

$$\begin{aligned}
|A| &= 500 - |A_2 \cup A_3 \cup A_5| \\
&= 500 - |A_2| - |A_3| - |A_5| \\
&\quad +|A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_5| + |A_3 \cap A_5| - |A_2 \cap A_3 \cap A_5| \\
&= 500 - \lfloor \frac{500}{2} \rfloor - \lfloor \frac{500}{3} \rfloor - \lfloor \frac{500}{5} \rfloor \\
&\quad + \lfloor \frac{500}{2 \times 3} \rfloor + \lfloor \frac{500}{2 \times 5} \rfloor + \lfloor \frac{500}{3 \times 5} \rfloor - \lfloor \frac{500}{2 \times 3 \times 5} \rfloor \\
&= 500 - 250 - 166 - 100 + 83 + 50 + 33 - 16 = 134.
\end{aligned}$$

Referências e bibliografia I

D. M. Cardoso, J. Szymanski e M. Rostami, *Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos*, Escolar Editora, 2008.