

Matemática Discreta

Funções Geradoras 2

Universidade de Aveiro 2018/2019

<http://moodle.ua.pt>

O problema das torres de Hanoi

Equações de recorrência e funções geradoras

Exemplos de aplicação do método da função geradora na resolução de equações de recorrência

Referências bibliográficas

Torres de Hanoi

Exemplo (Torres de Hanoi)

São dados n discos com diâmetros distintos que se podem colocar em 3 pilhas. No início, todos os discos estão numa única pilha, por ordem decrescente dos respectivos diâmetros desde a base até ao topo. Pretende-se mudar os n discos da pilha inicial para outra pilha no número mínimo de passos, respeitando as seguintes regras:

- ▶ em cada passo podemos deslocar um único disco de um pino para qualquer outro;
- ▶ não pode haver discos com diâmetro superior colocados em cima de discos com diâmetro inferior.

Determinação do número mínimo de passos

- Seja a_n o número mínimo de passos necessários para transportar n discos da pilha inicial para outra pilha. Note-se que antes de transportar o n -ésimo disco (cujo diâmetro é máximo) é necessário transportar o disco de ordem $n - 1$.
- Assim, são necessários os seguintes passos:
 1. Resolver o problema de ordem $n - 1$ (para o que são necessários a_{n-1} passos);
 2. Seguidamente, transportar o disco com diâmetro máximo (o n -ésimo) para a pilha vazia (executando 1 passo);
 3. Transportar os $n - 1$ discos da pilha onde se encontram para cima do disco com diâmetro máximo (executando a_{n-1} passos).

Como consequência, obtém-se a relação de recorrência:

$$a_n = 2a_{n-1} + 1, \text{ para } n \geq 2, \text{ com } a_1 = 1.$$

Resolução da equação de recorrência com recurso à função geradora

- Sendo $f(x)$ a função geradora da sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, vem

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = a_1 x + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} x^n \\
 &= x + 2x \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} x^{n-2} \\
 &= x + 2x \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\
 &= x + 2xf(x) + \frac{x^2}{1-x} = 2xf(x) + \frac{x}{1-x}.
 \end{aligned}$$

- Logo, $f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}$.

Resolução da equação de recorrência com recurso à função geradora (cont.)

- Uma vez que

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} (2^n - 1)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (2^n - 1)x^n
 \end{aligned}$$

Podemos concluir que $a_n = 2^n - 1$, para $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1

Exemplo

Vamos utilizar o método da função geradora para resolver a equação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ cujas condições iniciais são $a_0 = 3$ e $a_1 = 4$.

Solução. Considerando a função geradora da sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, vem

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 + 4x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + 6 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \\ &= 3 + 4x + x(f(x) - 3) + 6x^2 f(x) = (6x^2 + x)f(x) + x + 3 \\ &= \frac{x + 3}{-6x^2 - x + 1} = \frac{x + 3}{(1 - 3x)(1 + 2x)}. \end{aligned}$$

Exemplo 1 (cont.)

- A representação desta função como soma de fracções simples, pode obter-se fazendo

$$\frac{1}{(1 - 3x)(1 + 2x)} = \frac{A}{1 - 3x} + \frac{B}{1 + 2x},$$

donde se obtém a igualdade $1 = A + 2xA + B - 3xB$ a qual equivale ao sistema de equações

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ 2A - 3B &= 0. \end{aligned}$$

- Resolvendo este sistema, obtém-se a solução $A = 3/5$ e $B = 2/5$ e, consequentemente,

$$\frac{1}{(1 - 3x)(1 + 2x)} = \frac{3}{5} \frac{1}{1 - 3x} + \frac{2}{5} \frac{1}{1 + 2x}.$$

Exemplo 1 (cont.)

- Logo, a função geradora $f(x)$ toma a forma

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{3}{5} \frac{x+3}{1-3x} + \frac{2}{5} \frac{x+3}{1+2x} \\
 &= \frac{3}{5} x \sum_{k=0}^{\infty} (3x)^k + \frac{9}{5} \sum_{k=0}^{\infty} (3x)^k + \frac{2}{5} x \sum_{k=0}^{\infty} (-2x)^k + \frac{6}{5} \sum_{k=0}^{\infty} (-2x)^k \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5} 3^k + \frac{2}{5} (-2)^k \right) x^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{9}{5} 3^k + \frac{6}{5} (-2)^k \right) x^k \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5} 3^k - \frac{1}{5} (-2)^k \right) x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{9}{5} 3^k + \frac{6}{5} (-2)^k \right) x^k.
 \end{aligned}$$

- Finalmente, o coeficiente de x^n em $f(x)$, vem dado por

$$a_n = 2 \cdot 3^n + (-2)^n.$$

Exemplo 2

Exemplo

Vamos resolver o sistema de equações de recorrência

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + b_{n-1} + 1 \\ b_n = a_{n-1} + 2b_{n-1} + 2^{n-1} \end{cases}$$

para o qual $a_0 = b_0 = 0$.

Solução.

- Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a função geradora de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Seja $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ a função geradora de $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemplo 2 (cont.)

- Utilizando estas funções geradoras obtém-se:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \\ \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} b_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n-1} x^n \end{cases}$$



$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + x \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n + x \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\ \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 2x \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n + x \sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^n \end{cases}$$

Exemplo 2 (cont.)

$$\begin{cases} f(x) = 2xf(x) + xg(x) + \frac{x}{x-1} \\ g(x) = xf(x) + 2xg(x) + \frac{x}{1-2x} \end{cases} \quad (1)$$

Da 1ª equação em (1) vem

$$f(x) = \frac{x}{1-2x}g(x) + \frac{x}{(1-x)(1-2x)} \quad (2)$$

e substituindo $f(x)$ na 2ª equação em (1) obtém-se

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x^2}{1-2x}g(x) + \frac{x^2}{(1-x)(1-2x)} + 2xg(x) + \frac{x}{1-2x} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow g(x) \left(1 - \frac{x^2}{1-2x} - 2x \right) &= \frac{x^2}{(1-x)(1-2x)} + \frac{x}{1-2x} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow g(x) &= \frac{x}{(1-x)(1-4x+3x^2)} \Leftrightarrow g(x) = \frac{x}{(1-x)^2(1-3x)} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Exemplo 2 (cont.)

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow g(x) &= -\frac{1}{4} \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2} \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{3}{4} \frac{1}{1-3x} \\
 &= -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+1}{n} x^n + \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} 3^n x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}(n+1) + \frac{3}{4}3^n \right) x^n
 \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned}
 b_n &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}(n+1) + \frac{3}{4}3^n \\
 &= -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}n + \frac{3}{4}3^n.
 \end{aligned}$$

Exemplo 2 (cont.)

Substituindo $g(x)$ em (2) vem

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{x^2}{(1-2x)(1-x)^2(1-3x)} + \frac{x}{(1-x)(1-2x)} \\
 &= \frac{x - 3x^2 + 3x^3}{(1-2x)(1-x)^2(1-3x)} \\
 &= -\frac{1}{4} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-2x} + \frac{3}{4} \frac{1}{1-3x} \\
 &= -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+1}{n} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^n + \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} (3x)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(n+1) - 2^n + \frac{3}{4}3^n \right) x^n.
 \end{aligned}$$

Donde se conclui $a_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}n - 2^n + \frac{3}{4}3^n$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Referências bibliográficas I



D. M. Cardoso, J. Szymanski e M. Rostami, *Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos*, Escolar Editora, 2008.



J. S. Pinto, *Tópicos de Matemática Discreta*, Universidade de Aveiro 1999 (disponível na página da disciplina).