# 5. Valores Próprios e Vetores Próprios

UA, 27/11/2018

ALGA – Agrup. IV 18/19

# Resumo dos Conteúdos

# Valor próprio e vetor próprio de uma matriz real quadrada

### Definições:

Sejam $A$ uma matriz $n \times n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.
$\lambda$ é um valor próprio de $A$ se existe um vetor não nulo $X \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$AX = \lambda X.$$

Todo o vetor $X \in \mathbb{R}^n$ não nulo que satisfaz $AX = \lambda X$ é designado por vetor próprio de $A$ associado ao valor próprio $\lambda$.

### Exemplo:

O vetor $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é vetor próprio de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ associado ao valor próprio $\lambda = 3$.

# Polinómio caraterístico/Equação caraterística

**Note que:**

$$\lambda \text{ é um valor próprio de } A$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{o sistema homogéneo } (A - \lambda I_n)X = 0 \text{ possui uma solução não trivial}$$
$$\Updownarrow$$
$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

**Definição:**

Seja $A$ uma matriz $n \times n$. O polinómio caraterístico de $A$ é o polinómio de grau $n$ em $\lambda$ dado por

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

A equação $\det(A - \lambda I_n) = 0$ diz-se a equação caraterística de $A$.

**Teorema:**

Os valores próprios de $A$ são as raízes reais do polinómio caraterístico de $A$.

# Subespaço próprio associado a um valor próprio

**Definição:**

Seja $\lambda$ um valor próprio de $A$. Ao subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$

$$U_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda I_n)X = 0\} = \mathcal{N}(A - \lambda I_n)$$

chama-se o subespaço próprio de $A$ associado ao valor próprio $\lambda$.

**Note que:**

O subespaço próprio $U_\lambda$ é o conjunto de todos os vetores próprios de $A$ associados a $\lambda$, juntamente com o vetor nulo (que não é vetor próprio).

**Teorema:**

Seja $A$ $n \times n$ com $k$ valores próprios distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ e

$$p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_{\lambda_1}} \cdots (\lambda_k - \lambda)^{n_{\lambda_k}}.$$

Então $1 \leq \dim U_{\lambda_i} \leq n_{\lambda_i}$, $i = 1, \ldots, k$.

## Exemplo 1: Valores próprios e subespaços próprios de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

O polinómio caraterístico de $A$ é

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6.$$

Resolvendo a equação caraterística obtemos os valores próprios de $A$:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (2-\lambda)^1(3-\lambda)^1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \lambda = 2 \ \vee \ \lambda = 3 \end{aligned}$$

Os valores próprios de $A$ são $2$ e $3$, com $n_2 = n_3 = 1$. A dimensão dos subespaços associados é igual a 1, pois $1 \leq \dim U_2 \leq 1$ e $1 \leq \dim U_3 \leq 1$.

# Exemplo 1 – continuação

$$(A - 2I)X = 0 \iff \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff y = x, \ x \in \mathbb{R}$$

$$U_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \langle X_1 \rangle, \qquad \text{com } X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$(A - 3I)X = 0 \iff \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff y = 2x, \ x \in \mathbb{R}$$

$$U_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \langle X_2 \rangle, \qquad \text{com } X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

## Exemplo 2: Valores e subespaços próprios de $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

O polinómio caraterístico de $A$

$$p_A(\lambda) \,=\, \det(A - \lambda I) \,=\, \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 + 1)$$

possui uma única raiz real $\lambda = 0$ (e um par de raízes complexas[1] conjugadas).

O subespaço próprio de $A$ associado a $\lambda = 0$ é

$$U_0 = \mathcal{N}(A) = \langle X \rangle, \text{ com } X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \dim U_0 = 1.$$

[1] Neste capítulo apenas consideramos valores e vetores próprios reais. No entanto, pode considera-se toda a teoria, com ligeiras adaptações, admitindo valores/vetores próprios complexos. Este caso, apesar de muito relevante, ultrapassa o âmbito desta u.c.

## Exemplo 3: Valores e subespaços próprios de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Como $A$ é triangular, $p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$ e portanto, $A$ possui valores próprios $1$ e $2$.

$$X \in U_1 \iff (A - 1I_3)X = 0 \iff \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X = 0$$

$$X \in U_2 \iff (A - 2I_3)X = 0 \iff \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X = 0$$

Concluindo-se que, $U_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$ e $U_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

# Matrizes semelhantes

**Definição:**

$A$ e $B$ são matrizes semelhantes se existir uma matriz invertível $P$ tal que

$$P^{-1}A\,P \;=\; B.$$

**Observação:**

Com $P$ invertível, $P^{-1}AP = B \iff AP = PB \iff A = PBP^{-1}$.

**Teorema:**

Matrizes semelhantes possuem o mesmo polinómio caraterístico e, portanto, os mesmo valores próprios.

# Matriz diagonalizável

Definições:

Uma matriz diz-se diagonalizável se é semelhante a uma matriz diagonal.
Isto é, $A$ é diagonalizável se existe uma matriz $P$ invertível tal que

$$P^{-1} A\, P \,=\, D$$

é uma matriz diagonal. $P$ diz-se uma matriz diagonalizante de $A$.

Teorema:

$A$ $n \times n$ é diagonalizável $\iff$ $A$ possui $n$ vetores próprios l.i.

# Demonstração do teorema do slide anterior

$A$ é diagonalizável

sse

existem $P$ invertível e $D$ diagonal tais que $P^{-1}A\,P = D$,

sse

existem $P$ invertível e $D$ diagonal tais que $A\,P = P\,D$,

sse

existem $X_1, \dots X_n \in \mathbb{R}^n$ l.i e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$A \begin{bmatrix} X_1 & \cdots & X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & \cdots & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

sse

existem $X_1, \dots X_n \in \mathbb{R}^n$ l.i e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{bmatrix} AX_1 & \cdots & AX_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 X_1 & \cdots & \lambda_n X_n \end{bmatrix}$$

sse

$X_i$ é vetor próprio de $A$ associado a $\lambda_i$, $i = 1, \dots, n$, e $X_1, \dots, X_n$ são l.i.

# Diagonalização

Considerando a demonstração do teorema anterior, diagonalizar uma matriz $A$ é obter $P$, invertível, e $D$, diagonal, tais que $P^{-1}A\,P = D$ onde

- as colunas da matriz diagonalizante $P$ são $n$ vetores próprios l.i. de $A$,
- a diagonal principal da matriz diagonal $D$ é formada pelos valores próprios de $A$,
- a ordem dos vetores próprios em $P$ determina a ordem dos valores próprios em $D$.

Exemplo:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ tem dois vetores próprios l.i., por exemplo, $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (verifique!). Então $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ diagonaliza $A$ e a matriz diagonal (correspondente) semelhante a $A$ é $D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

# Independência linear de vetores próprios

**Teorema:**

Se $X_1, \ldots, X_k$ são vetores próprios de $A$ associados aos valores próprios distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, respetivamente, então $X_1, \ldots, X_k$ são l.i.

**Demonstração:** Ver slide 24

**Corolário:**

Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ os valores próprios distintos de $A$. Então

$$A \text{ possui } \dim U_{\lambda_1} + \cdots + \dim U_{\lambda_k} \text{ vetores próprios l.i.}$$

# Diagonalização e dimensão dos subespaços próprios

**Teorema:**

Seja $p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_{\lambda_1}} \cdots (\lambda_k - \lambda)^{n_{\lambda_k}}$ o polinómio caraterístico de $A$, sendo $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ os valores próprios distintos. Então,

$$A \text{ é diagonalizável se e só se } \dim U_{\lambda_i} = n_{\lambda_i},\ i = 1, \ldots, k.$$

**Observações:**

Seja $A$ uma matriz $n \times n$.

- Se $A$ possui $n$ valores próprios distintos, é diagonalizável.
- O recíproco da afirmação anterior é falso!
  *Vide* o exemplo 4 do slide seguinte.
- Para descobrir se $A$, com $k < n$ valores próprios distintos, é diagonalizável, basta verificar se $\dim U_{\lambda_i} = n_{\lambda_i}$, só para $n_{\lambda_i} > 1$.
- $\dim U_{\lambda_i} = \dim \mathcal{N}(A - \lambda_i I) = \operatorname{nul}(A - \lambda_i I) = n - \operatorname{car}(A - \lambda_i I)$.

# Exemplos

1. No ▸ Exemplo do slide 6, $A$ $2\times 2$ é diagonalizável, pois tem 2 valores próprios distintos.
2. No ▸ Exemplo do slide 8, $A$ $3\times 3$ não é diagonalizável, tendo apenas 1 vetor próprio l.i.
3. No ▸ Exemplo do slide 9 $A$ não é diagonalizável, pois $\dim U_1 = 1 < n_1 = 2$.
4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tem valores próprios 1 e 2 e $p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)^1$.

   Da análise da multiplicidade algébrica dos valores próprios, tem-se $\dim U_2 = 1$ e $\dim U_1 \in \{1,2\}$. Contudo,

   $$\dim U_1 = \operatorname{nul}(A-1I) = 3 - \operatorname{car}(A-1I) = 2\,. \quad \text{[Verifique!]}$$

   Logo, $A$ é diagonalizável.

# Exemplo 4 do slide anterior: Determinação dos subespaços próprios e de uma matriz diagonalizante de $A$

Como $A - 1I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$$U_1 = \langle X_1, X_2 \rangle \text{ com } X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como $A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$$U_2 = \langle X_3 \rangle \text{ com } X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Então, uma matriz diagonalizante de $A$ é

$$P = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ tal que } P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

# Aplicação ao cálculo da potência e da inversa

Se $A$ é diagonalizável, então existe $P$ invertível tal que $A = PDP^{-1}$.

- Cálculo da potência: Para $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = PDP^{-1}PDP^{-1} \cdots PDP^{-1} = PD^kP^{-1}.$$

- Cálculo da inversa: Se $A$ é invertível,

$$A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}.$$

Exemplo:

$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$ é semelhante a $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Então,

$$A^8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^8 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 256 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 511 & -255 \\ 510 & -254 \end{bmatrix}.$$

# Valores e vetores próprios de matrizes simétricas

Recorde que $A$ é simétrica se $A^T = A$.

Teorema:

Uma matriz simétrica $n \times n$ possui $n$ valores próprios (reais).

Teorema:

Vetores próprios de uma matriz simétrica associados a valores próprios distintos são ortogonais.

Demonstração do teorema anterior: Se $A$ $n \times n$ é simétrica e $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n$,

$$(AX_1) \cdot X_2 = X_1^T A^T X_2 = X_1^T A X_2 = X_1 \cdot (AX_2).$$

Se $X_1$ e $X_2$ são vetores próprios de $A$ associados, respetivamente, aos valores próprios $\lambda_1$ e $\lambda_2$, $(AX_1) \cdot X_2 = \lambda_1 X_1 \cdot X_2 = X_1 \cdot (AX_2) = \lambda_2 X_1 \cdot X_2$, donde $(\lambda_1 - \lambda_2) X_1 \cdot X_2 = 0$. Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então $X_1 \cdot X_2 = 0$.

# Diagonalização ortogonal de matrizes simétricas

**Definição:**

A matriz quadrada $P$ é ortogonal se $P^TP = I$, isto é, se $P$ é invertível e $P^{-1} = P^T$.

**Teorema:**

Dada uma matriz $P = \begin{bmatrix} P_1 & \cdots & P_n \end{bmatrix}$ de colunas $P_1, \ldots, P_n$,

$$P \text{ é ortogonal} \Leftrightarrow \{P_1, \ldots, P_n\} \text{ é uma base o.n. de } \mathbb{R}^n.$$

**Definição:**

$A$ é ortogonalmente diagonalizável se

$A$ possui uma matriz diagonalizante ortogonal.

**Teorema:**

Toda a matriz simétrica é ortogonalmente diagonalizável.

# Exemplo 5: Diagonalização ortogonal de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica, logo $A$ é ortogonalmente diagonalizável

$$p_A(\lambda) = (1 - \lambda^2) - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 3 \ \vee \ \lambda = -1$$

$$U_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \langle X_1 \rangle, \qquad X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_1 = \frac{X_1}{\|X_1\|} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$U_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} -x \\ x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \langle X_2 \rangle, \qquad X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \frac{X_2}{\|X_2\|} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Uma matriz diagonalizante ortogonal de $A$ é

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad \text{sendo} \quad P^T A P = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

# Exemplo 6: Diagonalização ortogonal de $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Como $A$ é simétrica, $A$ é ortogonalmente diagonalizável

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1 \ \vee \ \lambda = -1$$

$$U_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_1 \cdot P_2 = 0$$

# Exemplo 6 – continuação

$$U_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \qquad P_3 = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Então $\{P_1, P_2, P_2\}$ é uma base o.n. de vetores próprios de $A$ e

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

é uma matriz diagonalizante ortogonal de $A$ tal que

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

# Demonstração do teorema do ▸ slide 14

Suponha-se, por absurdo, que $X_1, \ldots, X_k$ são vetores próprios de $A$ linearmente dependentes. Então, existirá um $X_j$, para $j = 2, \ldots, k$, tal que $X_j = \langle X_1, \ldots, X_{j-1} \rangle$ e $X_1, \ldots, X_{j-1}$ são l.i.. Isto é,

$$X_j = \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_{j-1} X_{j-1}, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1} \in \mathbb{R} \text{ e } X_1, \ldots, X_{j-1} \text{ l.i..}$$

Por um lado, pré-multiplicando a igualdade anterior por $A$, tendo em conta que $X_1, \ldots, X_j$ são vetores próprios de $A$ associados a $\lambda_1, \ldots, \lambda_j$, e, por outro, multiplicando-a por $\lambda_j$, obtem-se

$$\begin{array}{rcl} \lambda_j X_j & = & \alpha_1 \lambda_1 X_1 + \cdots + \alpha_{j-1} \lambda_{j-1} X_{j-1}, \\ \lambda_j X_j & = & \alpha_1 \lambda_j X_1 + \cdots + \alpha_{j-1} \lambda_j X_{j-1}. \end{array}$$

Logo, $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_j) X_1 + \cdots + \alpha_{j-1}(\lambda_{j-1} - \lambda_j) X_{j-1} = 0.$

Como $X_1, \ldots, X_{j-1}$ são l.i, $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_j) = 0,\ i = 1, \ldots, j-1.$

Uma vez que, por hipótese, $\lambda_j \neq \lambda_i$, $i \neq j$, então $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{j-1} = 0.$

Donde, $X_j$ seria nulo, o que é absurdo, pois $X_j$ é um vetor próprio.