universidade de aveiro

Teoria da Computação

Exame Final

2019–2020

Data: 14 de Janeiro de 2020 Duração: 2 horas e 30 minutos

1. (2 valores) Sejam Σ e Γ dois quaisquer alfabetos e seja $h : \Sigma^\star \to \Gamma^\star$ um homomorfismo. Apresente uma definição indutiva de palavra reversa e em seguida mostre que $\forall w \in \Sigma^\star,\ h(w^{-1}) = h(w)^{-1}$.

2. (4 valores) Considere o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$.

   (a) Determinize o AFNDε definido pela seguinte tabela de transições:

δ	ε	a	b
$\to q_0$	$\{q_2\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$
$*q_1$	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

δ	ε	a	b
$*q_2$	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
q_3	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$

   (b) Construa o AFD mínimo equivalente ao AFD completo definido pela tabela de transições seguinte, onde $\emptyset$ denota um estado ratoeira:

δ	a	b
$\to *1$	2	3
$*2$	4	5

δ	a	b
$*3$	6	$\emptyset$
$*4$	4	5

δ	a	b
$*5$	6	$\emptyset$
6	5	5

3. (1 valor) Mostre que o autómato quociente de um AFD completo pela relação de indistinguibilidade de estados é um autómato reduzido, ou seja, que os estados do autómato quociente são dois a dois distinguíveis.

4. (4 valores) Considere a GIC $G = (\{S, A, B, X\}, \{a, b\}, P, S)$ com as seguintes produções P:

$$S \to ASA \mid XB \qquad A \to B \mid S \qquad B \to bb \mid \varepsilon \qquad X \to aa$$

   Sabendo que G não tem produções inúteis:

   (a) Reduza G à Forma Normal de Chomsky.

   (b) Determine, como função de $n \in \mathbb{N}$, o número de passos utilizados para derivar palavras da forma $a^{2n}b^{2n}$ usando a gramática na forma normal de Chomsky obtida na alínea (a).

5. (5 valores) Considere a linguagem $L = \{w \in \{a, b\}^\star :\ \#_a(w) \neq \#_b(w)\}$.

   (a) Usando o lema da bombagem mostre que $\overline{L}$ não é regular. Conclua, justificando, que L também não é regular.

(b) Construa um autómato de pilha determinista que reconheça L. Indique a modalidade de reconhecimento.

6. (1 valor) Considere o problema HALT $= \{\langle M, w\rangle :\ M$ é uma máquina de Turing que pára com $w\}$. Sabendo que HALT é recorrentemente enumerável mas não é decidível, mostre que $\overline{\text{HALT}}$ não é recorrentemente enumerável.

7. (3 valores) Usando a máquina de Turing DUPLICA como um subprograma que cumpre a especificação $p_i 01^k \vdash^\star p_f 01^{2k}$, para $k \geq 1$, construa uma máquina de Turing que cumpra a especificação $q_i 1^n 0 \vdash^\star q_f 1^n 01^{2^n}$, $n \geq 1$. Note que $2^n = 2 \times 2^{n-1}$.

FIM.

Homomorfismo

Um *homomorfismo* $h : \Sigma^\star \to \Gamma^\star$ é uma função tal que: (i) $h(\varepsilon) = \varepsilon$; (ii) $\forall x, y \in \Sigma^\star, h(xy) = h(x)h(y)$.

Autómato Quociente

Seja $A = \big(Q, \Sigma, \delta, s, F\big)$ um AFD completo e seja $\equiv$ a relação de indistinguibilidade de estados em Q. O *autómato quociente* do autómato A pela relação $\equiv$ é o autómato finito determinista $A_\equiv = \big(Q_\equiv, \Sigma, \delta_\equiv, [s], F_\equiv\big)$ onde: (i) $Q_\equiv = \{[q] :\ q \in Q\}$; (ii) $F_\equiv = \{[f] :\ f \in F\}$; (iii) $\delta_\equiv : Q_\equiv \times \Sigma \to Q_\equiv$ é definida para $[q] \in Q_\equiv$ e $a \in \Sigma$ por $\delta_\equiv([q], a) = [\delta(q, a)]$.

Conversão à Forma Normal de Chomsky: $A \to BC$; $A \to a$

1. Eliminar as produções inúteis;
2. Substituir os símbolos terminais não isolados nos lados direitos por variáveis;
3. Reduzir cada um dos lados direitos das produções a um máximo de duas variáveis;
4. Eliminar as produções ε;
5. Eliminar as produções unitárias.

Lema da Bombagem para Linguagens Regulares:

Se L é uma linguagem regular então $\exists n > 0 :\ \forall w \in L :\ |w| \geq n,\ \exists x, y, z \in \Sigma^\star :$ (i) $w = xyz$; (ii) $y \neq \varepsilon$; (iii) $|xy| \leq n$; (iv) $\forall k \geq 0,\ xy^k z \in L$.

Lema da Bombagem para LIC:

Se L é uma linguagem independente do contexto então $\exists n > 0 :\ \forall z \in L :\ |z| \geq n,\ \exists u, v, w, x, y \in \Sigma^\star :$ (i) $z = uvwxy$; (ii) $|vwx| \leq n$; (iii) $|vx| > 0$; (iv) $\forall k \geq 0,\ uv^k wx^k y \in L$.