Teorema de Myhill-Nerode

Teoria da Computação

Fórmula 4.5.4 & Lema 4.5.8

João Gameiro, Nº93097
3 Novembro 2022

universidade
de aveiro

Fórmula 4.5.4

$$x \sim_L y \ sse \ \forall z \in \sum^*, xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$$

- A relação referida é de equivalência entre duas palavras, o que implica que duas palavras se comportam da mesma maneira quando concatenadas à direita com uma certa palavra arbitrária. Isto é ou ambas pertencem à linguagem ou nenhuma pertence.
- Considerando a Linguagem $L = \{aw : \ w \in \{a,b\}^\star\};$
  - Identificam-se três classes de equivalência $[\varepsilon] = \{\varepsilon\}, \ [a] = a(a+b)^*, \ [b] = b(a+b)^*$
  - Elementos da mesma classe verificam sempre a relação de equivalência.
  - Considerando as palavras ***aab*** e ***abab***, qualquer palavra ***z*** pertencente a a {a,b}* , ***aabz* ∈ L ⇔ *ababz* ∈ L**. Este comportamento verifica-se para qualquer palavra de [a].
  - Considerando as palavras ***baab*** e ***bbb***, podemos afirmar que para qualquer palavra z, ***baabz* ∉ L ⇔ *bbbz* ∉ L**. Este comportamento verifica-se para qualquer palavra de [b].
  - Em relação à classe de equivalência [ε], sendo esta constituída apenas pela palavra vazia qualquer palavra que se concatene à mesma irá dar origem à própria palavra.

Lema 4.5.8

- A relação $\sim_L$ é uma congruência à direita que refina **L**.
- Deste modo analisando para cada classe de equivalência para verificar a congruência à direita
  - [ε] é apenas constituída por um elemento, e como a relação $\sim_L$ é reflexiva sabemos que para qualquer palavra que seja concatenada à palavra vazia irá verificar a relação isto é:
    - $\varepsilon z \sim_L \varepsilon z$ verifica-se sempre qualquer que seja z
  - [a] no caso desta classe todas as palavras da mesma começam por a e por isso vamos considerar uma palavra **z = aw** em que $a \in \Sigma$, e $w \in \Sigma^*$
    - Assumindo $x, y \in [a]$, $x != y$ sabemos que $x \sim_L y$, e sendo assim qualquer que sejam os valores de **a** e **w**, como as palavras **xaw** e **yaw**, começam sempre pela letra a, podemos que concluir que $\mathbf{xz \in L \Leftrightarrow yz \in L}$, e consequentemente $\mathbf{xz \sim_L yz}$
  - [b] por sua vez no caso desta classe todas as palavras de mesma começam por b, logo vamos novamente considerar um **z = aw** em que $a \in \Sigma$, e $w \in \Sigma^*$
    - Novamente assumindo $x, y \in [b]$, $x != y$, e considerando as palavras **xaw** e **yaw**, qualquer que sejam os valores de **a** e **w** como **zaw** e **yaw** começam pela letra b, podemos afirmar que $\mathbf{xz \notin L \Leftrightarrow yz \notin L}$ e consequentemente $\mathbf{xz \sim_L yz}$

Lema 4.5.8

- Vamos agora verificar que a relação refina **L**. Para isso vamos considerar uma palavra z = ε
  - [ε] é constituída apenas pela palavra vazia logo como a relação é reflexiva o único elemento dessa classe verifica sempre a relação
  - [a] neste caso vamos considerar x, y ∈ [a], x != y
    - xz e yz como z = ε é o elemento neutro da concatenação sabemos que xz, yz vão sempre pertencer a [a]. Como todos os elementos de [a] pertencem a L, podemos afirmar que xz vai pertencer a L se e só se yz também pertencer.
  - [b] no caso desta classe, vamos outra vez considerar x, y ∈ [b], x != y
    - novamente, xz e yz vão sempre pertencer a [b] pois z = ε é o elemento neutro da concatenação. Como todos os elementos de [b] começam pela letra b, sabemos que estes nunca irão pertencer a L, logo podemos afirmar que xz não pertence a [b] se e só yz também não pertencer a [b].