universidade de aveiro

Teoria da Computação

Primeiro Teste

2019–2020

Data: 25 de Outubro de 2019 Duração: 60 minutos

Justifique de forma clara e sucinta todas as respostas.

1. (1 valor) Seja X_n o conjunto das palavras definidas sobre o alfabeto $\{a, b, c\}$ com tamanho menor ou igual a n, $n \in \mathbb{N}_0$. Determine o menor valor de n que satisfaz $|X_n| \geq (9^6 - 1)/2$.

Solução: Temos que $|X_n| = \left|\bigcup_{k=0}^{n} \Sigma^k\right| = \sum_{k=0}^{n} \left|\Sigma^k\right| = \sum_{k=0}^{n} |\Sigma|^k = \sum_{k=0}^{n} 3^k = \dfrac{3^{n+1} - 1}{3 - 1}$.

Assim, $|X_n| \geq (9^6 - 1)/2 \iff \dfrac{3^{n+1} - 1}{2} \geq (9^6 - 1)/2 \iff 3^{n+1} \geq 3^{12} \iff n \geq 11$. Logo $n = 11$.

2. (4 valores) Sejam Σ e Γ dois quaisquer alfabetos. Um *homomorfismo* $h : \Sigma^\star \to \Gamma^\star$ é uma função tal que: (i) $h(\varepsilon) = \varepsilon$; (ii) $\forall x, y \in \Sigma^\star, h(xy) = h(x)h(y)$.

   (a) Apresente uma definição indutiva de palavra reversa (w^{-1}) de uma palavra $w \in \Sigma^\star$.

   Solução:

$$w^{-1} = \begin{cases} \varepsilon & \text{se } w = \varepsilon \\ av^{-1} & \text{se } w = va, \text{ com } a \in \Sigma, v \in \Sigma^\star \end{cases}.$$

   (b) Seja $h : \Sigma^\star \to \Gamma^\star$ um homomorfismo. Mostre que $\forall w \in \Sigma^\star, h(w^{-1}) = h(w)^{-1}$.

   Solução: Demonstração por indução estrutural sobre $w \in \Sigma^\star$.

   Caso base: Para $w = \varepsilon$,

$$\begin{aligned} h(w^{-1}) = h(\varepsilon^{-1}) = h(\varepsilon) & \quad \text{def. de palavra reversa} \\ = \varepsilon & \quad \text{def. de homomorfismo} \\ = \varepsilon^{-1} & \quad \text{def. de palavra reversa} \\ = h(\varepsilon)^{-1} = h(w)^{-1} & \quad \text{def. de homomorfismo} \end{aligned}$$

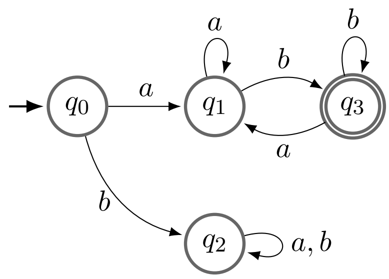
   Passo indutivo: Considere-se que a propriedade é verdadeira para $v \in \Sigma^\star$ e vamos mostrar que é válida para $w = va$.

$$\begin{aligned} h(w^{-1}) = h((va)^{-1}) &= h(av^{-1}) && \text{def. de palavra reversa} \\ &= h(a)h(v^{-1}) && \text{def. de homomorfismo} \\ &= h(a)h(v)^{-1} && \text{hipótese de indução} \\ &= (h(v)h(a))^{-1} && \text{def. de palavra reversa} \\ &= h(va)^{-1} = h(w)^{-1} && \text{def. de homomorfismo} \end{aligned}$$

3. (12 valores) Considere o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$.

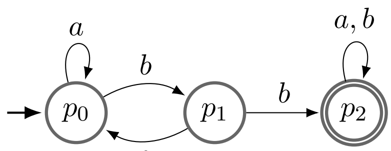
(a) Determine um AFD completo reconhecedor de $L_1 = \{awb \mid w \in \Sigma^\star\}$.

Solução:



(b) Determine um AFD completo reconhecedor de $L_2 = \{w \in \Sigma^\star \mid w$ tem dois b's consecutivos$\}$.

Solução:



(c) Determinize o AFNDε definido pela seguinte tabela de transições

δ	ε	a	b
$\rightarrow q_0$	$\{q_2\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$
$*q_1$	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$*q_2$	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
q_3	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$

Solução: Temos que: fecho$\varepsilon(q_0) = \{q_0, q_2\}$, fecho$\varepsilon(q_1) = \{q_1, q_2\}$, fecho$\varepsilon(q_2) = \{q_2\}$, fecho$\varepsilon(q_3) = \{q_3\}$. Assim a determinização do AFD dado é:

δ	a	b
$\rightarrow * \{q_0, q_2\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2\}$
$* \{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_2\}$
$* \{q_1, q_2\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
$* \{q_2, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_2\}$
$* \{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
$\{q_3\}$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

(d) Construa o AFD mínimo equivalente ao AFD completo definido pela seguinte tabela de transições

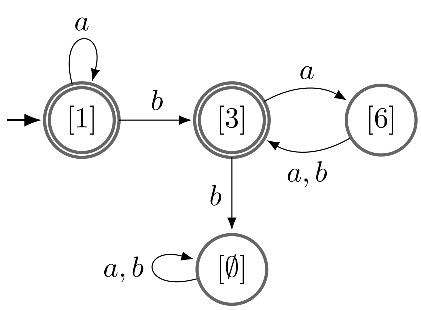
δ	a	b
$\rightarrow *1$	2	3
$*2$	4	5
$*3$	6	$\emptyset$
$*4$	4	5
$*5$	6	$\emptyset$
6	5	5
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Solução: Aplicando o algoritmo de determinização obtemos a tabela:

$*$ 2						
$*$ 3	a	a				
$*$ 4			a			
$*$ 5	a	a		a		
6	ε	ε	ε	ε	ε	
$\emptyset$	ε	ε	ε	ε	ε	a
	1	2	3	4	5	6
	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	

Assim as classes de equivalência do autómato quociente são: $[1] = [2] = [4] = \{1, 2, 4\}$, $[3] = [5] = \{3, 5\}$, $[6] = \{6\}$, $[\emptyset] = \{\emptyset\}$.

O AFD mínimo é assim:



4. (3 valores) Seja $A = \big(Q, \Sigma, \delta, s, F\big)$ um AFD completo e seja $\equiv$ a relação de indistinguibilidade de estados em Q. O *autómato quociente* do autómato A pela relação $\equiv$ é o autómato finito determinista $A_{\equiv} = \big(Q_{\equiv}, \Sigma, \delta_{\equiv}, [s], F_{\equiv}\big)$ onde: (i) $Q_{\equiv} = \{[q] \mid q \in Q\}$; (ii) $F_{\equiv} = \{[f] \mid f \in F\}$; (iii)

$\delta_{\equiv} : Q_{\equiv} \times \Sigma \to Q_{\equiv}$ é definida para $[q] \in Q_{\equiv}$ e $a \in \Sigma$ por $\delta_{\equiv}([q], a) = [\delta(q, a)]$. Mostre que o autómato quociente é reduzido, ou seja, que os estados em $Q_{\equiv}$ são dois a dois distinguíveis.

Solução: Sejam $p, q \in Q$ dois quaisquer estados tais que $[p] \neq [q]$. Então existe uma palavra $w \in \Sigma^\star$ que distingue p de q ou seja:

- $\delta^*(p, w) = f \in F$ e $\delta^*(q, w) = r \notin F$

ou

- $\delta^*(p, w) = r \notin F$ e $\delta^*(q, w) = f \in F$

Vamos mostrar que esta mesma palavra w também distingue $[p]$ de $[q]$.

Por indução estrutural usando a definição de função de transição estendida num AFD, mostra-se que $\delta^*_{\equiv}([q], w) = [\delta^*(q, w)]$, para qualquer estado $q \in Q$ e palavra $w \in \Sigma^\star$.

Assim,

- se $\delta^*(p, w) = f \in F$ e $\delta^*(q, w) = r \notin F$ então $\delta^*_{\equiv}([p], w) = [\delta^*(p, w)] = [f] \in F_{\equiv}$ e $\delta^*_{\equiv}([q], w) = [\delta^*(q, w)] = [r] \notin F_{\equiv}$.

ou

- se $\delta^*(p, w) = r \notin F$ e $\delta^*(q, w) = f \in F$ então $\delta^*_{\equiv}([p], w) = [\delta^*(p, w)] = [r] \notin F_{\equiv}$ e $\delta^*_{\equiv}([q], w) = [\delta^*(q, w)] = [f] \in F_{\equiv}$.

FIM.