Teoria da Computação

Segundo Teste

2019–2020

Data: 29 de Novembro de 2019 Duração: 60 minutos

Justifique de forma clara e sucinta todas as respostas.

1. (9 valores) Considere a linguagem não regular $L_1 = \{0^n 1^n \mid n > 0\}$ e a linguagem L_2 associada à expressão regular $(aa)^*(bb)^*$.

   (a) Mostre que $L_3 = \{(aa)^n(bb)^n \mid n > 0\}$ não é regular. (Sugestão: defina um homomorfismo entre L_1 e L_3.)

   Solução: Defina-se o homomorfismo $h : \{0, 1\}^\star \to \{a, b\}^\star$, por $h(0) = aa$ e $h(1) = bb$. Então $h^{-1}(L_3) = L_1$. Como a classe das linguagens regulares é fechada para a imagem inversa por intermédio de um homomorfismo, se L_3 fosse regular então também L_1 seria regular, o que não é o caso. Logo L_3 não pode ser regular.

   (b) Mostre que $L_4 = \{(aa)^n(bb)^m \mid m \neq n \text{ e } m, n > 0\}$ não é regular. (Sugestão: considere a linguagem $L_2 \cap \overline{L_4}$.)

   Solução: $\overline{L_4}$ é constituída pelas palavras sobre o alfabeto $\{a, b\}$ que não são da forma $(aa)^n(bb)^m$, com $m \neq n$ e $m, n > 0$. Note-se que $\overline{L_4} \neq L_3$, mas $L_3 = L_2 \cap \overline{L_4}$. Como a classe das linguagens regulares é fechada para o complementar e para a interseção, se L_4 fosse regular então $\overline{L_4}$ seria regular e como L_2 é regular, tabém L_3 seria regular, o que é falso, conforme vimos na alínea anterior. Logo L_4 não pode ser regular.

   (c) Mostre que a linguagem $\left\{a^m b^{m^2+n} c^n \,\middle|\, m \geq 0 \text{ e } 0 \leq n \leq m\right\}$ não é Independente do Contexto.

   Solução: Seja $z = a^m b^m \in L$, para algum m tal que $|z| = m + m^2 \geq n$, onde n é o inteiro indicado no lema da bombagem. Consideremos uma qualquer partição $z = uvwxy$ nas condições do lema. Temos os seguintes casos:

   1. Se vwx contém apenas a's então $v = a^p$, $x = a^q$ com $p + q \geq 1$ e, para $k = 0$, $uv^0wx^0y = a^{m-p-q}b^{m^2} \notin L$ uma vez que $(m - p - q)^2 \neq m^2$.
   2. Se vwx contém apenas b's então $v = b^p$, $x = b^q$ com $p + q \geq 1$ e, para $k = 0$, $uv^0wx^0y = a^m b^{m^2-p-q} \notin L$ uma vez que $m^2 \neq m^2 - p - q$.
   3. Se vwx contém a's e b's então temos os seguintes casos:

(a) v contém a's e b's: neste caso $v = a^p b^q$ com $p + q \geq 2$ e, para $k = 2$, $uv^2wx^2y \notin L$ pois conteria a subpalavra $a^p b^p a^p b^q$.

(b) x contém a's e b's: neste caso $x = a^p b^q$ com $p + q \geq 2$ e, para $k = 2$, $uv^2wx^2y \notin L$ pois conteria a subpalavra $a^p b^p a^p b^q$.

(c) v contém apenas a's e x contém apenas b's então $v = a^p$ e $x = b^q$ com $p + q \geq 1$ e, para $k = 2$, $uv^2wx^2y = a^{m+p}b^{m^2+q} \notin L$ uma vez que $(m + p)^2 = m^2 + q \iff 2mp + p^2 = q$ é impossível (atendendo a que $q \leq m$).

Em qualquer dos casos chegamos a uma contradição com $\forall k \in \mathbb{N}_0, uv^kwx^ky \in L$, pelo que L não é uma LIC.

2. (9 valores) Considere a GIC $G = (\{S, A, B, X\}, \{a, b\}, P, S)$ com as seguintes produções P:

$$S \to ASA \mid XB \qquad A \to B \mid S \qquad B \to bb \mid \varepsilon \qquad X \to aa$$

(a) Mostre que G não tem variáveis inúteis.

Solução:

- Todas as variáveis de G são atingíveis: S é atingível porque é o axioma da gramática; A é atingível porque S é atingível e $S \to ASA$; B é atingível porque S é atingível e $S \to XB$; X é atingível porque S é atingível e $S \to XB$;
- Todas as variáveis são geradoras: B é geradora porque $B \to bb$; X é geradora porque $X \to aa$; A é geradora porque $A \to B$ e B é geradora; S é geradora porque $S \to XB$ e X e B são geradoras.

(b) Reduza G à Forma Normal de Chomsky.

Solução:

1. Não existem produções inúteis (provado na alínea anterior).
2. Substituir terminais não isolados nos lados direitos por variáveis:

$$\begin{array}{llll} S \to ASA \mid XB & A \to B \mid S & B \to YY \mid \varepsilon & X \to ZZ \\ Y \to b & Z \to a & & \end{array}$$

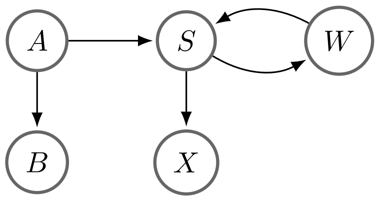
3. Reduzir os lados direitos a duas variáveis:

$$\begin{array}{llll} S \to AW \mid XB & A \to B \mid S & B \to YY \mid \varepsilon & X \to ZZ \\ W \to SA & & & \\ Y \to b & Z \to a & & \end{array}$$

4. Eliminar produções ε: as variáveis anuláveis são A e B.

$$S \to AW \mid W \mid XB \mid X \qquad A \to B \mid S \qquad B \to YY \qquad X \to ZZ$$
$$W \to SA \mid S$$
$$Y \to b \qquad Z \to a$$

5. Eliminar as produções unitárias: O grafo de dependências unitárias é



Assim os pares unitários são:

- $(A, B), (A, S), (A, W), (A, X)$: $A \to YY \mid AW \mid XB \mid SA \mid ZZ$
- $(S, X), (S, W)$: $S \to ZZ \mid SA$
- $(W, S), (W, X)$: $W \to AW \mid XB \mid ZZ$

Daqui resulta a gramática na FNC

$$S \to AW \mid XB \mid ZZ \mid SA$$
$$A \to YY \mid AW \mid XB \mid SA \mid ZZ$$
$$B \to YY \qquad X \to ZZ$$
$$W \to SA \mid AW \mid XB \mid ZZ$$
$$Y \to b \qquad Z \to a$$

(c) Determine, como função de $n \in \mathbb{N}$, o número de passos utilizados para derivar palavras da forma $a^{2n}b^{2n}$ usando a gramática na forma normal de Chomsky obtida na alínea anterior.

Solução: Para derivar uma qualquer palavra de tamanho $m \in \mathbb{N}$ usando uma qualquer gramática na FNC é necessário aplicar $m-1$ produções da forma $A \to BC$ seguida de m produções da forma $A \to a$, num total de $2n-1$ passos. Assim, para derivar uma palavra da forma $a^{2n}b^{2n}$, a qual tem tamanho $4n$, são necessários $8n-1$ passos.

3. (2 valores) Sabe-se que uma linguagem é regular se e só se é gerada por uma gramática linear à direita. Mostre que toda a linguagem gerada por uma gramática linear à esquerda é também gerada por uma gramática linear à direita.

Solução: Seja L uma linguagem linear à esquerda gerada por uma gramática linear à esquerda G_L. Então a gramática $(G_L)^{-1}$, obtida de G_L revertendo os lados direitos das produções, é uma gramática linear à direita que gera a linguagem L^{-1}. Logo a linguagem L^{-1} é uma linguagem regular. Uma vez que a classe das linguagens regulares é fechada para a operação de inversão (reversão), $L = (L^{-1})^{-1}$ é uma linguagem regular e portanto é gerada por uma gramática linear à direita.

FIM.

GIC:

Para $A, B, C \in V$, $a \in T$ e $\alpha \in T^*$,

- **Linear à esquerda:** $A \to \alpha$; $A \to B\alpha$.
- **Linear à direita:** $A \to \alpha$; $A \to \alpha B$.
- **Regular:** $A \to \varepsilon$; $A \to aB$.
- **F. N. Chomsky:** $A \to BC$; $A \to a$.

Conversão à Forma Normal de Chomsky:

1. Eliminar as produções inúteis;
2. Substituir os símbolos terminais não isolados nos lados direitos por variáveis;
3. Reduzir cada um dos lados direitos das produções a um máximo de duas variáveis;
4. Eliminar as produções ε;
5. Eliminar as produções unitárias.

Lema da Bombagem para Linguagens Regulares:

Se L é uma linguagem regular então existe $n > 0$ tal que, para toda a palavra $w \in L$ com $|w| \geq n$, existem $x, y, z \in \Sigma^\star$ tais que: (i) $w = xyz$; (ii) $y \neq \varepsilon$; (iii) $|xy| \leq n$; (iv) $\forall k \geq 0$, $xy^kz \in L$.

Lema da Bombagem para LIC:

Se L é uma linguagem independente do contexto sobre um alfabeto Σ então existe um inteiro positivo n tal que, para qualquer palavra $z \in L$ de tamanho $|z| \geq n$, existem $u, v, w, x, y \in \Sigma^\star$ tais que: (i) $z = uvwxy$; (ii) $|vwx| \leq n$; (iii) $|vx| > 0$; (iv) $\forall k \geq 0$, $uv^kwx^ky \in L$.