universidade de aveiro

João Gameiro
Nº 93097

Teoria da Computação

Tarefa 1

Provar que $\overline{(L^{-1})} = (\overline{L})^{-1}$

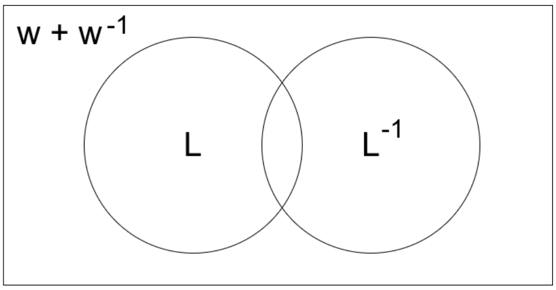
Sabendo que L^{-1} representa a linguagem reversa de L, ou seja é a linguagem cujas palavras são todas as reversas das palavras que pertencem a L, isto é:

$$L^{-1} = \{w^{-1} :\ w \in L\}$$

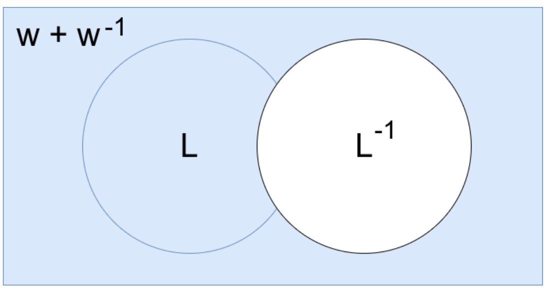
Por sua vez a linguagem complementar $\overline{L}$, é composta por todas as palavras que não pertencem a L, ou seja:

$$\overline{L} = \{w \in \Sigma^{*} :\ w \notin L\}$$

Para a justificação vamos então primeiro considerar o seguinte diagrama de Venn constituído por 3 conjuntos que são: L com as palavras pertencentes à linguagem L, L^{-1} que contém todas as palavras reversas das palavras da linguagem L e finalmente $w + w^{-1}$ que é constituído por todas as palavras que não pertencem nem a L nem a L^{-1} e com as suas respectivas reversas.



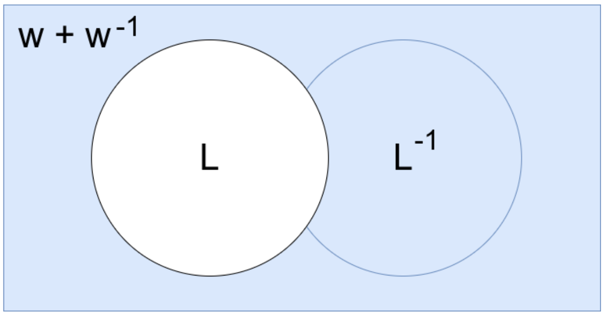
Sendo assim analisando $\overline{(L^{-1})}$ percebemos que o conjunto obtido no fim é o complementar a L^{-1} ou seja o conjunto resultante desta expressão é o seguinte:



universidade de aveiro

João Gameiro
Nº 93097

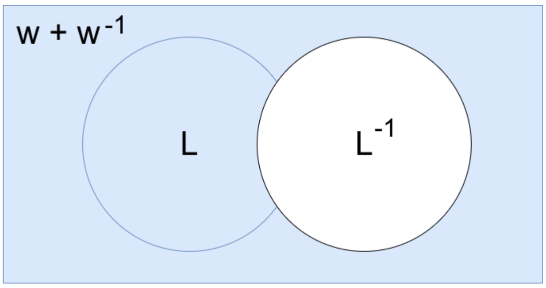
Tendo em conta as definições especificadas em cima, vamos analisar que palavras pertencem ao conjunto $(\overline{L})^{-1}$. Este conjunto é em primeiro lugar definido pela linguagem complementar de L, isto é por todas as palavras que não pertencem à linguagem L o que inclui o conjunto $w + w^{-1}$ e o conjunto L^{-1} ignorando todos os elementos em interseção com L.



Finalmente, a definição desta linguagem indica-nos que este é constituído por todas as palavras reversas das palavras que não pertencem à linguagem L, ou seja o reverso do diagrama apresentado em cima. Para isso é preciso considerar três situações:

- Reverso de $w + w^{-1}$ = $w + w^{-1}$ isto porque $(w)^{-1} = w^{-1}$ e $(w^{-1})^{-1} = w$
- Reverso de L^{-1}, $(L^{-1})^{-1} = L$
- Palavras que pertencem a L e a L^{-1} simultaneamente, não irão pertencer ao conjunto final pelo facto de apenas pertencerem as palavras reversas das que não pertencem à linguagem L,

Ou seja tendo em conta o que concluímos em cima chegamos à conclusão de que o conjunto final é dado por:



E como podemos ver os conjuntos finais obtidos em cada lado da igualdade são iguais logo fica assim provado que $\overline{(L^{-1})} = (\overline{L})^{-1}$

universidade de aveiro

João Gameiro
Nº 93097

Provar que $L^{*}L^{*} = L^{*}$

Considerando que o fecho de Kleene de uma linguagem é a linguagem constituída pelas palavras que são a concatenação de um qualquer número de palavras, ou seja a união de todas as potências de uma linguagem.

$$L^{*} = \bigcup_{i \geq 0} L^{i}$$

Ou seja a partir do fecho de Kleene tiramos que, sendo w uma qualquer palavra pertencente ao fecho de Kleene da linguagem L sabemos que existe pelo menos um k positivo maior ou igual a zero tal que

$$k \geq 0,\ w \in L^{k}$$

Sendo assim considerando a concatenação, podemos definir que a linguagem resultante da seguinte forma

$$L^{*}L^{*} = \left\{ xy : x \in L^{*} \ \wedge \ y \in L^{*} \right\}$$

Ou seja na linguagem definida anteriormente vamos encontrar uma qualquer palavra w tal que $w = xy$ e podemos concluir assim que existe um certo k e um certo v que verificam a seguinte condição

$$x \in L^{k} \wedge \ y \in L^{v}, \quad k, v \in IN_{0}$$

E a partir desta análise concluímos também que

$$w \in L^{k}L^{v} \Leftrightarrow w \in L^{k+v} \quad , (k + v) \in IN_{0}$$

Sendo assim verificamos que tal como no caso do fecho de Kleene, que para qualquer palavra que exista que pertença à concatenação do fecho de Kleene da linguagem L com com o fecho de Kleene da linguagem L, esta irá pertencer a uma potência de L cujo expoente é um número positivo maior que zero. Ou seja, no fundo verifica-se que a concatenação do fecho de Kleene de uma linguagem consigo mesmo dá origem ao fecho de Kleene dessa mesma linguagem.