UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

CONTROL 2

CURSO: CÁLCULO INTEGRAL SEC.1 STGO S-SEM. 2022/1
PROFESOR: GLADYS ANDREA FARIAS DIAZ,IGNACIA ANTONIA NORAMBUENA MONTERO
FECHA: MONDAY 13TH JUNE 12:40AM
ESTUDIANTES: 37

N°	NÚMERO DE ID	FOTOGRAFÍA	NOMBRE	FIRMA
1	21137295-8		AGUERO SOLER, PAULA ANTONIA	
2	21304898-8		BAEZ TAPIA, CLEMENTE PATRICIO ELÍAS	Clemente
3	21200495-2		BARTHOU WERTH, SEBASTIÁN	
4	21081905-3		BENAVIDES HERRERA, DIEGO ALONSO	
5	21086303-6		BERNDT GIGOUX, IAN GUSTAVO	
6	21131034-0		BEZMALINOVIC VELIZ, GORAN ENRIQUE	
7	21023549-3		BURGOS ROA, DIEGO RAÚL	
8	20664481-8		CAMPOS MARTÍNEZ, BASTIÁN	Bastian
9	21294252-9		CID ARAYA, CLARA MARIA ANTONIETA	
10	21094970-4		CORTES GOMEZ, BENJAMIN IGNACIO	
11	21179758-4		EDWARDS GONZÁLEZ, NICOLÁS RODRIGO	
12	20810496-9		ESCOBAR CASTILLO, AGUSTIN ANDRES	
13	21041322-7		FEHRMANN FERNÁNDEZ, EMILIA MARTINA	
14	21162065-K		GAJARDO BAZÁN, DIEGO ALONSO	
15			GARCÍA COVARRUBIAS, IGNACIO	
16	20987654-K		GAYA GOIRI, MARIA LORETO	Loreto Gaya
17	20072104-7		GIGOGNE GODOY, EUGENIO	
18	19606669-1		GUTIERREZ LOPEZ, DIEGO LUCAS	
19			HAAG RODRIGUEZ, ENRIQUE	
20	21060122-8		HERNANDEZ VARGAS, RENATA ANTONIA	Renata
21	21066598-6		HERNANDEZ VELIZ, JOSE IGNACIO	
22	21239736-9		JELDRES CONTRERAS, MARÍA JOSÉ	
23	20950568-1		LEAL ROMERO, GONZALO VICENTE	
24	21031477-6		LOBO OYARZO, PATXI	
25	20809344-4		MALDONADO LIBERONA, VICENTE NICOLÁS	

26	20755823-0		MORALES GARNICA, MARTN IVN	
27	20970085-9		MORALES SIMUNOVIC, VICENTE LEÓN	
28	21062444-9		NOEMI DIAZ, MATIAS	
29	20922605-7		RAMIREZ BELMAR, RICARDO TOMAS	
30	20808532-8		RODAS HIDALGO, JOSE IGNACIO	
31	21198059-1		RUIZ MENESES, RAMON EDUARDO	
32	21581862-4		SANHUEZA MAGARINOS, JULIANA	
33	20810946-4		UTZ CAÑETE, DIEGO PABLO RAMÓN	
34	21161532-K		WHIPPLE GONZÁLEZ, CRISTÓBAL ANTONIO	
35			ZARO SOTO, SAVKA ZDENKA	
36	21080974-0		ZEBALLOS AYCA, CRISTÓBAL ANDRÉS	

SMART + SUSTAINABLE

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

MAT-106 Cálculo Integral
Control 2

14 de Junio de 2022.
70 minutos

PREGUNTA	PUNTAJE MÁXIMO	PUNTOS OBTENIDOS
1	15	
2	15	
3	15	
4	8+7	
TOTAL	60	
NOTA		

Atención:

- Cada respuesta debe ser justificada con claridad.
- Durante el desarrollo de la prueba no se responde ningún tipo de pregunta.
- Está permitido el uso de calculadora simple.
- El o la estudiante que sea sorprendido o sorprendida usando o intentando utilizar procedimientos ilícitos durante el desarrollo de la prueba, será calificado con la nota mínima (1.0) en cha prueba.

1. Calcule la longitud de la curva dada por

$$x(t) = e^{-t}\cos(t),$$
$$y(t) = e^{-t}\sin(t), \qquad t \in [0, \pi/2].$$

$y(t) = e^{-t} \operatorname{sen}(t)$

$y'(t) = e \cos(t)$

$(y'(t))^2 = e^2 \cos^2(t)$

$L = \sqrt{[f'(x)]^2 + [g'(x)]^2}\, dx$

$x(t) = e^{-t}\cos(t)$

$x'(t) = -e \operatorname{sen}(t)$

$(x'(t))^2 = -e^2 \operatorname{sen}^2(t)$

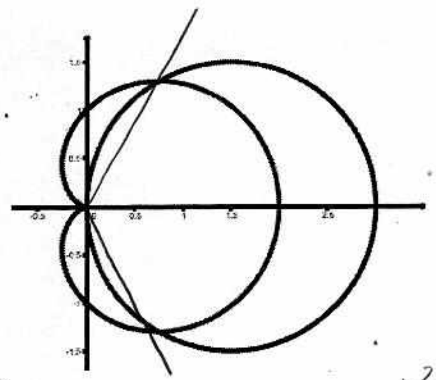
$L = \sqrt{e^2\cos^2(t) - e^2 \operatorname{sen}^2(t)}\, dx$

$L =$

CONTROL 2
NOMBRE: HERNANDEZ VELIZ, JOSE IGNACIO
RUT: 21066598-6
CURSO: CÁLCULO INTEGRAL SEC.1 STGO S-SEM. 2022/1

2. Calcule el área de la región exterior a la cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ e interior a la circunferencia de ecuación $r = 3\cos(\theta)$.

$$A = \int_0^{2\pi} \sqrt{r_1^2 - r'^2}\; dr$$



$$A = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\cos(\theta))^2 - (-\operatorname{sen}(\theta))^2}$$

$$A = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta)}$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1+1}$$

$$A = \int_0^{2\pi} \sqrt{(3\cos(\theta))^2 - (3\cos(\theta))'^2}$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{9\cos^2(\theta) + (3\operatorname{sen}(\theta))^2}$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{9\cos^2(\theta) + 9\operatorname{sen}^2(\theta)}$$

3. Analice la convergencia de la integral,

Tipo I

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}.$$

$$\longrightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+7)} \cdot dx$$

$$\longrightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}(x+7)} \cdot dx \longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^{3/2}(x+7)}}{\frac{1}{x^{3/2}}}\, dx \longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{3/2}(x+7)} \cdot \frac{x^{3/2}}{1}\, dx$$

$$\longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^{3/2}}}{\cancel{x^{3/2}}(x+7)} \longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+7}^{\,0}$$

$p = 3/2 > 1$ por criterio P $g(x)$ converge, y además con $L=0$ por criterio de Limite $f(x)$ también converge.

CONTROL 2
NOMBRE: HERNANDEZ VELIZ, JOSE IGNACIO
RUT: 21066598-6
CURSO: CÁLCULO INTEGRAL SEC.1 STGO S-SEM. 2022/1

$s = \frac{o}{h}$

$c = \frac{a}{h}$

$t = \frac{o}{a}$

Telescopica → Fracciones parciales $A_n - A_{n-1}$

Geometrica → $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^{n-1}$ $\quad \frac{a}{1-r}$

4. Calcule el valor de las siguientes series numéricas. Justifique.

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\arctan(n) - \arctan(n-1))$.

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{9^n}$.

$r < 1$ converge
$r \geq 1$ diverge

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{9^n} \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^{n-1}}{7^{n-1}} \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 1 \cdot \left(\frac{9}{7}\right)^{n-1}$

$a = 1$
$r = 9/7$ diverge

$\frac{1}{\frac{1}{1} - 7/9}$

$\frac{1}{\frac{9}{9} - \frac{7}{9}} \rightarrow \frac{1/1}{2/9} \rightarrow \boxed{9/2}$

diverge hacia 9/2 por la serie geometrica.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\underset{a_n}{\arctan(n)} - \underset{a_{n-1}}{\arctan(n-1)})$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\tan(n) - \tan(n-1)}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\tan(n)} - \frac{1}{\tan(n-1)}$

$\frac{A}{\tan(n)} + \frac{B}{\tan(n-1)}$

$n = 0 \qquad n = 1$

$A = \frac{1}{\tan(-1)} \qquad B = \frac{1}{\tan(1)}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\tan(-1) \cdot \tan(n)} - \frac{1}{\tan(1) \cdot \tan(n-1)}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \underset{a_n}{\frac{1}{\tan(n-1)}} - \underset{a_{n+1}}{\frac{1}{\tan(n)}}$

$a_1 - \lim_{n \to \infty} a_{n+1}$

$0 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\tan(n)} = 0$ Converge en 0

SMART + SUSTAINABLE

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

MAT-106 Cálculo Integral
Control 2

14 de Junio de 2022.
70 minutos

PREGUNTA	PUNTAJE MÁXIMO	PUNTOS OBTENIDOS
1	15	
2	15	
3	15	
4	8+7	
TOTAL	60	
NOTA		

Atención:

- Cada respuesta debe ser justificada con claridad.
- Durante el desarrollo de la prueba no se responde ningún tipo de pregunta.
- Está permitido el uso de calculadora simple.
- El o la estudiante que sea sorprendido o sorprendida usando o intentando utilizar procedimientos ilícitos durante el desarrollo de la prueba, será calificado con la nota mínima (1.0) en cha prueba.

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

CONTROL 2
NOMBRE: RODAS HIDALGO, JOSE IGNACIO
RUT: 20808532-8
CURSO: CÁLCULO INTEGRAL SEC.1 STGO S-SEM. 2022/1

1. Calcule la longitud de la curva dada por

$$x(t) = e^{-t}\cos(t),$$
$$y(t) = e^{-t}\sin(t), \qquad t \in [0, \pi/2].$$

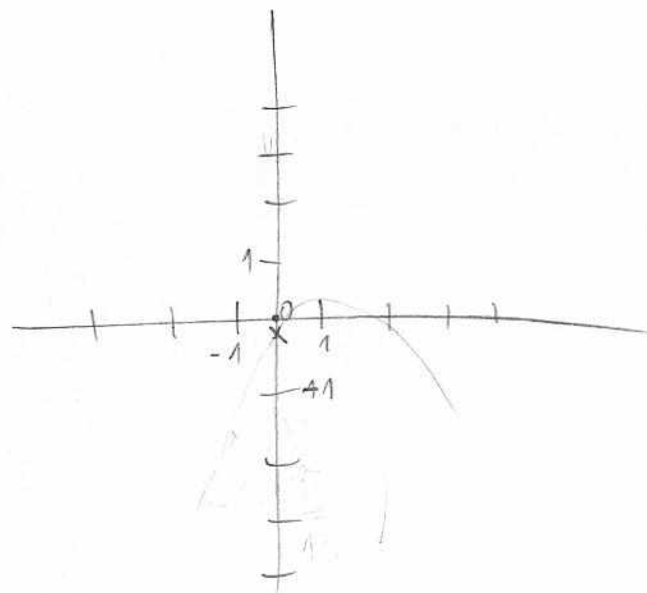
$x(t) = e^{-t} \cos(t)$

$y(t) = e^{-t} \sin(t)$

$x(\pi/2) = e^{-\pi/2} \cdot \cos \pi/2$

$x = 0$

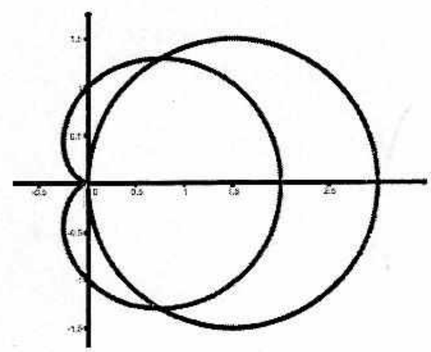
$Y = e^{-\pi/2} \cdot \sin \pi/2$



+56994348083
hable me

CONTROL 2
NOMBRE: RODAS HIDALGO, JOSE IGNACIO
RUT: 20808532-8
CURSO: CÁLCULO INTEGRAL SEC.1 STGO S-SEM. 2022/1

2. Calcule el área de la región exterior a la cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ e interior a la circunferencia de ecuación $r = 3\cos(\theta)$.



$$1 + \cos(\theta) = 3\cos(\theta)$$

$$1 = 2\cos(\theta)$$

$$\frac{1}{2} = \cos(\theta)$$

$$\int_0^3 g(x)^2 - F(x)^2$$

$$\int^3 (9\cos^2) - (1 + 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta))$$

$$\int^3 9 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$$

$$\frac{9}{4} - 1 + \frac{1}{4} = \boxed{1}$$

3. Analice la convergencia de la integral,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}.$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}$$

4. Calcule el valor de las siguientes series númericas. Justifique.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1))$.

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{9^n}$.

a

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{9^n} = \frac{7^1\cdot 7^{n-1}}{9^1\cdot 9^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^1\cdot 7^{n-1}}{3^2\cdot 9^{n-1}}$$

$$\lim_{n=1} \frac{7^1\cdot 7^{n-1}}{3^2\cdot 9_n} = \frac{7}{3}\sum_{1}^{\infty}\frac{7^{n-1}}{9^{n-1}} \longrightarrow \boxed{\frac{7}{3}}$$

SMART + SUSTAINABLE

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

MAT-106 Cálculo Integral
Control 2

14 de Junio de 2022.
70 minutos

PREGUNTA	PUNTAJE MÁXIMO	PUNTOS OBTENIDOS
1	15	
2	15	
3	15	
4	8+7	
TOTAL	60	
NOTA		

Atención:

- Cada respuesta debe ser justificada con claridad.
- Durante el desarrollo de la prueba no se responde ningún tipo de pregunta.
- Está permitido el uso de calculadora simple.
- El o la estudiante que sea sorprendido o sorprendida usando o intentando utilizar procedimientos ilícitos durante el desarrollo de la prueba, será calificado con la nota mínima (1.0) en cha prueba.

CONTROL 2
NOMBRE: JELDRES CONTRERAS, MARÍA JOSÉ
RUT: 21239736-9
CURSO: CÁLCULO INTEGRAL SEC.1 STGO S-SEM. 2022/1

Parametrica -

1. Calcule la longitud de la curva dada por

$$x(t) = e^{-t}\cos(t),$$
$$y(t) = e^{-t}\sin(t), \quad \boxed{t \in [0, \pi/2].}$$

> intervalos

> Se derivan

FORMULA : $L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{[x']^2 + [y']^2}\, dx$

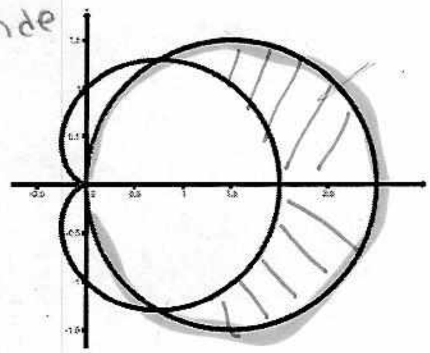
$X(t) = e^{-t}\cos(t)$	$y(t) = e^{-t}\operatorname{sen}(t)$
$x'(t) = e^{-t}\cos(t) \cdot e^{-t}\operatorname{sen}(t)$	$y'(t) = e^{-t}\operatorname{sen}(t) \cdot e^{-t}\cos(t)$
$= -e^{-t}\cos(t) \cdot \operatorname{sen}(t)$	$= e^{-t}\operatorname{sen}(t)\cos(t)$

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(-e^{-t}\cos(t)\operatorname{sen}(t)\right)^2 + \left(e^{-t}\operatorname{sen}(t)\cos(t)\right)^2}$$

Area en coordenadas polares Integra

2. Calcule el área de la región exterior a la cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ e interior a la circunferencia de ecuación $r = 3\cos(\theta)$.

• Igualar las ecuaciones
Para encontrar los puntos donde cortan



$$3\cos\theta = 1 + \cos\theta$$

$$2\cos\theta = 1$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \quad / \cos^{-1}$$

$$\theta = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\theta = \frac{5\pi}{6} \lor \theta = \frac{\pi}{6}}$$ Puntos de Intersección

$\frac{\pi}{6} = 0,5$

$\frac{5\pi}{6} = 2,6$

multiplico
sumo
integro
pruebo

$$A = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sqrt{(3\cos\theta)^2 - (1+\cos\theta)^2}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sqrt{9\cos^2\theta - 1 - 2\cos\theta - \cos^2\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sqrt{8\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1}\, d\theta$$

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sqrt{4\cos^3\theta - \cos^2\theta - 1}\, d\theta$$

→ Sigue en la parte de atrás

(1) $\sqrt{4\cos^3\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \cos^2\left(\frac{5\pi}{6}\right) - 1}$ } $\frac{5\pi}{6}$

$= 1{,}34\ u^2$

(2) $\sqrt{4\cos^3\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - 1}$

$= 1{,}41\ u^2$

(1)−(2) $= -0{,}07\ u^2$ el resultado es negativo ya que al elevar las f(x) al cuadrado están en forma incorrecta, debe ir $(1+\cos\theta)$ primero y luego $(3\cos\theta)$

3. Analice la convergencia de la integral,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}.$$

→ La función es continua en $[1, \infty[$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+7)}\, dx$$

$\sqrt{x} = x^{1/2}$ $p \leq 1$

* diverge

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}(x+7)}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \Bigg/ \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}(x+7)} \Bigg/ \lim_{x \to \infty} \frac{1}{(x+7)} \cdot \frac{1/x}{1/x}$$

$$\lim_{x \to \infty} = \frac{\cancel{\frac{1}{x}}^{\to 0}}{1 + \cancel{\frac{7}{x}}^{\to 0}} = 0$$

Por lo tanto por criterio de comparación $p < 1$ entonces $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$ diverge por ende $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+7)}$ diverge

4. Calcule el valor de las siguientes series numéricas. Justifique.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1)).$

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{9^n}.$

SMART + SUSTAINABLE

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

MAT-106 Cálculo Integral
Control 2

14 de Junio de 2022.
70 minutos

PREGUNTA	PUNTAJE MÁXIMO	PUNTOS OBTENIDOS
1	15	
2	15	
3	15	
4	8+7	
TOTAL	60	
NOTA		

Atención:

- Cada respuesta debe ser justificada con claridad.
- Durante el desarrollo de la prueba no se responde ningún tipo de pregunta.
- Está permitido el uso de calculadora simple.
- El o la estudiante que sea sorprendido o sorprendida usando o intentando utilizar procedimientos ilícitos durante el desarrollo de la prueba, será calificado con la nota mínima (1.0) en cha prueba.

$(-e^{-t}\cos(t) \cdot e^{-t}\sin(t))$

$(-e^{-t}\cos(t))^2 + 2(-e^{-t}\cos t \cdot -e^{-t}\sin(t)) + (-e^{-t}\sin(t))^2$

1. Calcule la longitud de la curva dada por

$$x(t) = e^{-t}\cos(t),$$
$$y(t) = e^{-t}\sin(t), \qquad t \in [0, \pi/2].$$

$x' = -e^{-t}\cos(t) - e^{-t}(\sin(t))$

$y' = -e^{-t}\sin(t) + e^{-t}\cos(t)$

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-e^{-t}\cos(t) - e^{-t}(\sin(t)))^2 + (-e^{-t}\sin(t) + e^{-t}\cos(t))^2}$$

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{}$$

Me fui a Blanco, perdon profe :(

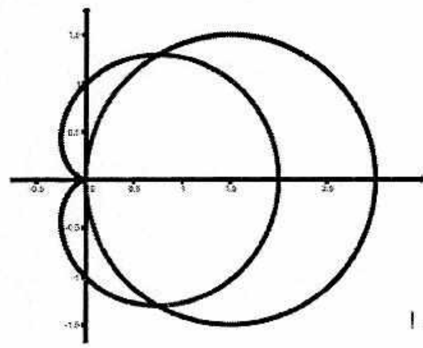
2. Calcule el área de la región exterior a la cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ e interior a la circunferencia de ecuación $r = 3\cos(\theta)$.

$3\cos\theta = 1 + \cos\theta$

$2\cos\theta = 1$

$\cos\theta = \frac{1}{2}$

Simetría $\frac{\pi}{3}$ y $-\frac{\pi}{3}$



$\frac{1+\sin}{2}$

$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta$

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi/3} (3\cos\theta)^2 - (1+\cos(\theta))^2 = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi/3} 9\cos\theta - 1 - 2\cos\theta - \cos^2\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi/3} -\cos^2 + 7\cos - 1 = \frac{1}{2}\left(\int_{-\pi/3}^{\pi/3} -\cos^2 + \int_{-\pi/3}^{\pi/3} 7\cos - \int_{-\pi/3}^{\pi/3} 1\right)$$

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\sin(\theta)}{2}\Big/_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi/3} + 7\sin()\Big/_{-\pi/3}^{\pi/3} - x\Big/_{-\pi/3}^{\pi/3}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1+\sin(\pi/3)}{2} - \frac{1+\sin(-\pi/3)}{2}\right.\right.$$

$$+ \left(7\sin(\pi/3) - 7\sin(-\pi/3) - (2\pi/3)\right)$$

$$A = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1+\sin(\pi/3)}{2} - \frac{1+\sin(-\pi/3)}{2}\right) + \left(7\sin(\pi/3) - 7\sin(-\pi/3)\right) - \left((2\pi/3)\right)\right)$$

$\frac{\cancel{7\sqrt{x}}}{\cancel{x\sqrt{x}}}$

3. Analice la convergencia de la integral,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}.$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}+7\sqrt{x}}\,dx$$

$\frac{1}{x\sqrt{x}}$

$1/x\sqrt{x}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+7\sqrt{x}} \longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{7}{\cancel{x}}} \longrightarrow 1$$

converge

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}} \longrightarrow$$

4. Calcule el valor de las siguientes series númericas. Justifique.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1))$.

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{9^n}$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{9^n} = \left(\frac{7}{9}\right)^n \quad /\cdot \left(\frac{7}{9}\right)^1 \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^{-1}$

$\displaystyle\sum \left(\frac{7}{9}\right)^n \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^{n-1}$

R R

$$\frac{7/9}{1-7/9} = \frac{7/9}{2/9} = \frac{7}{\cancel{9}} \cdot \frac{\cancel{9}}{2} = \frac{7}{2}$$

SMART + SUSTAINABLE

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

MAT-106 Cálculo Integral
Control 2

14 de Junio de 2022.
70 minutos

PREGUNTA	PUNTAJE MÁXIMO	PUNTOS OBTENIDOS
1	15	
2	15	
3	15	
4	8+7	
TOTAL	60	
NOTA		

Atención:

- Cada respuesta debe ser justificada con claridad.
- Durante el desarrollo de la prueba no se responde ningún tipo de pregunta.
- Está permitido el uso de calculadora simple.
- El o la estudiante que sea sorprendido o sorprendida usando o intentando utilizar procedimientos ilícitos durante el desarrollo de la prueba, será calificado con la nota mínima (1.0) en cha prueba.

1. Calcule la longitud de la curva dada por

$$x(t) = e^{-t}\cos(t),$$
$$y(t) = e^{-t}\sin(t), \qquad t \in [0, \pi/2].$$

$x(t) = e^{-t}\cos(t) \qquad y(t) = e^{-t}\sin(t)$

$x'(t) = e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\sin(t) \qquad y'(t) = e^{-t}\sin(t) + e^{-t}\cos(t)$

$L = \int_a^b \sqrt{[f'(x)]^2 + [g'(x)]^2}\, dx \rightarrow$ formula principal

$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(e^{t}\cos(t) - e^{t}\sin(t))^2 + (e^{-t}\sin(t) + e^{-t}\cos(t)}$

$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{e^{2t}\cos^2(t) - 2e^{2t}\cos(t)\sin(t) + e^{2t}\sin^2(t)} \rightarrow$

$\rightarrow \overline{+\, e^{2t}\sin^2(t) + 2e^{2t}\cos(t)\sin(t) + e^{2t}\cos^2(t)}$

$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2e^{2t}\cos^2(t) + 2e^{t}\sin^2(t)}$

$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2e^{2t}\underbrace{(\cos^2(t) + \sin^2(t))}_{1}} = \int_0^{2\pi} \sqrt{2e^{2t}}$

$L = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{e^{2t}} = \sqrt{2} \cdot e^{t} \Big/_0^{\pi/2} = \sqrt{2}(e^{\pi/2} - e^{0})$

$\sqrt{e^{2t}} \rightarrow e^{\frac{2t}{2}} = e^{t}$

$= \sqrt{2}(e^{\pi/2} - 1)$

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

CONTROL 2
NOMBRE: CID ARAYA, CLARA MARIA ANTONIETA
RUT: 21294252-9
CURSO: CÁLCULO INTEGRAL SEC.1 STGO S-SEM. 2022/1
PÁGINA: 3 DE 5

deri x^3 $3x^2$

integral $\frac{x^4}{3}$

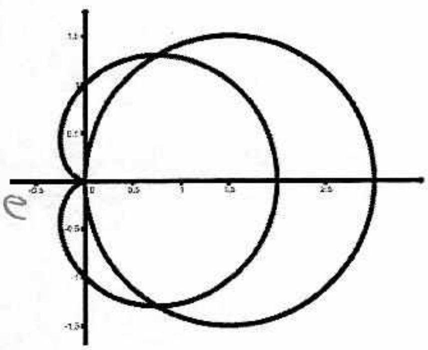
2. Calcule el área de la región exterior a la cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ e interior a la circunferencia de ecuación $r = 3\cos(\theta)$.

$1 + \cos(\theta) = 3\cos\theta$

$1 = 2\cos\theta$

$\cos\theta = \frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{6}$ $\frac{5\pi}{6}$



fórmula ya existente

$$A = \frac{1}{2}\int_a^b \sqrt{[f(x)]^2 - [g(x)]^2}$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sqrt{(1+\cos(\theta))^2 - (3\cos)^2}\, d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sqrt{1 + 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta) - 9\cos^2(\theta)}\, d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sqrt{-8\cos^2(\theta) + 2\cos(\theta) + 1}\, d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} (-8\cos^2(\theta) + 2\cos(\theta) + 1)^{1/2}$$

$$A = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\, (-8\cos^2(\theta) + 2\cos(\theta) + \theta) \Big/_{\pi/6}^{5\pi/6}$$

$$A = -8\cos^2(5\pi/6) + 2\cos(5\pi/6) + (5\pi/6) - (-8\cos^2(\pi/6) + 2\cos(\pi/6) + \pi/6)$$

$-8\cos^2(5\pi/6)+2\cos(5\pi/6)+5\pi/6$ $\qquad \frac{5\pi}{6}=2.61$

$-(-8\cos^2(\pi/6)+2\cos(\pi/6)+\pi/6$ $\qquad \frac{\pi}{6}=0.52$

$$\left.\begin{array}{l}-8\cdot 0{,}99+2\cdot 0{,}99+2.61\\ +8\cdot 0.99-2\cdot 0{,}99-0.52\end{array}\right\}=2.09\,U^2$$

el area de la region exterior es 2.09 U^2

C. L.

$0 \leq f(x) \leq g(x)$

$L=0$ si $g(x)$ CV $\rightarrow f(x)$ CV

$L=\infty$ $g(x)$ DV $\rightarrow f(x)$ DV

$L \neq 0$ ambas se comportan igual

3. Analice la convergencia de la integral,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}.$$

$\boxed{\text{Primera especie}}$

$\rightarrow$ Para que se indetermine $x=0$ $x=-7$

como no se indetermina es de primera especie

lo comparamos con $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$

$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+7)} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ comparación al limite

$\sqrt{x(x+7)^2}$

$\sqrt{x(x^2+14x+49)}$

$\sqrt{x^3+14x^2+49x} > \sqrt{x^3}$

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+14x^2+49x}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x^3+14x^2+49x}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3+14x^2+49x}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x^3+14x^2+49x}} \; \frac{1/x^3}{1/x^3} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1+\frac{14}{x}+\frac{49}{x^2}}} = 1$$

entonces el limite $\neq 0$ por lo que ambas se comportan igual y tenemos $\int_1^\infty \sqrt{x^3}$ $P=\frac{3}{2}>1$ significa que converge $\therefore$ por comparación al limite $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}$ converge.

4. Calcule el valor de las siguientes series númericas. Justifique.

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1))$. $\to$ geometrica $|r| < 1$ converg

   b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{9^n}$. $\to$ telescopica

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{7^n}{9^n}}_{a_n} < \underbrace{\frac{7^{n+1}}{9^{n+1}}}_{b_n}$$

regla cuociente $r = \frac{7}{9} > 1$ diverge

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7^n}{9^n}}{\frac{7^{n+1}}{9^{n+1}}} = \frac{7n}{9n} \cdot \frac{9^{n+1}}{7^{n+1}} = \frac{\cancel{7^n}}{\cancel{9^n}} \cdot \frac{\cancel{9^n} \cdot 9}{\cancel{7^n} \cdot 7} = \frac{9}{7}$$

entonces como $\frac{7^{n+1}}{9^{n+1}}$ converge por regla del cuociente $\frac{7^n}{9^n}$ converge.

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{9^n} = \left(\frac{7}{9}\right)^n$$

$r < 1$ $\therefore$ converge

$p \leq 1$ diverge
$p > 1$ converge
$\Big\}$ tipo 1

4a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\underbrace{\arctan(n)} - \underbrace{\text{arcatan}(n-1)})$

$n=1$ $\arctan(1) - \arctan(1-1)^{0} = 0$

$n=2$ $\arctan(2) - \text{arcotan}(2-1)^{1}$

$n=3$ $\arctan(3) - \text{arcotan}(3-1)^{2}$

$n=4$ $\text{arcotan}(4) - \text{arcotan}(4-1)^{3}$

4a) $\sum_{n=1}^{\infty} \text{arcotan}(0) - \text{arcotan}(n)$ criterio comparación directa

$\text{arcotan}(0) \sum_{n=1}^{\infty} \text{arcotan}(n)$

$\text{arcotan}(0) - \lim_{n \to \infty} \text{arcotan}(n) = \infty$

$\text{arcotan}(0) - \lim_{n \to \infty} |\text{arcotan}(n)| > 1$ diverge

$r = \text{arcotan}(n)$

SMART + SUSTAINABLE

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

MAT-106 Cálculo Integral
Control 2

14 de Junio de 2022.
70 minutos

PREGUNTA	PUNTAJE MÁXIMO	PUNTOS OBTENIDOS
1	15	
2	15	
3	15	
4	8+7	
TOTAL	60	
NOTA		

Atención:

- Cada respuesta debe ser justificada con claridad.
- Durante el desarrollo de la prueba no se responde ningún tipo de pregunta.
- Está permitido el uso de calculadora simple.
- El o la estudiante que sea sorprendido o sorprendida usando o intentando utilizar procedimientos ilícitos durante el desarrollo de la prueba, será calificado con la nota mínima (1.0) en cha prueba.

$L = \int_e^b \sqrt{(f(x)')^2 + g(x)'^2}$

$L_p = \int_a^b$

2^{-4}

$\frac{1}{16}$

$(2^{-2})^2$ $\quad (e^{-T})^2 \quad e^{-2T} \quad \frac{sen^2}{e^{2T}} + \frac{cos^2}{}$

$\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ $\quad \frac{1}{e^{2T}}$

sen, $-\cos$, cos, $-sen$

$2^2 \cdot 2^3 = 2^4$

$2^5 =$

$(2^2)^3 =$

1. Calcule la longitud de la curva dada por

$$x(t) = e^{-t}\cos(t),$$
$$y(t) = e^{-t}\sin(t), \qquad t \in [0, \pi/2].$$

$$L = \int_a^b \sqrt{(f(x)')^2 + (g(x)')^2}\,dx$$

$x(T)' = -e^{-T} \cdot -sen(t)$

$y(t) = -e^{-t} \cdot cos(t)$

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{(+e^{-T}sen(t))^2 + (-e^{-T}cos(t))^2}\,dt$$

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{e^{-2T}sen^2(t) + e^{-2T}cos^2(t)}\,dt$$

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{sen^2(t) + cos^2(t)}{e^{2T}}}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1}{e^{2T}}}$$

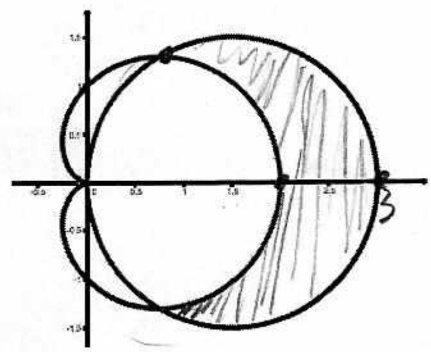
$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{e^{-2T}}\,dt = \int_0^{\pi/2} e^{-T} = e^{-\pi/2} - e^{0} = e^{-\pi/2} - 1$$

$$A=\int_a^b \frac{1}{2}\left(f(\theta)^2-g(\theta)^2\right)$$

2. Calcule el área de la región exterior a la cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ e interior a la circunferencia de ecuación $r = 3\cos(\theta)$.

$(1+\cos)(1+\cos)$

$1+2\cos+\cos^2$



$$A=\int_a^b \frac{1}{2}\left(f(\theta)^2-g(\theta)^2\right)$$

$$A=\int_a^b \frac{1}{2}\left((3\cos\theta)^2-(1+\cos(\theta))^2\right)$$

$$A=\int_a^b \frac{1}{2}\left(9\cos^2-(1+2\cos+\cos^2)\right)$$

$$A=\int_a^b \frac{1}{2}\left(9\cos^2-\cos^2-1-2\cos\right)$$

$$A=\int_a^b \frac{1}{2}\left(8\cos^2-2\cos-1\right) \to A=\int_A^b \left(4\cos^2_{(\theta)}-\cos(\theta)-\frac{1}{2}\right)$$

$$A=\int_A^b \left(4(8\cos-1)-\frac{1}{2}\right)$$

$1+\cos(\theta)=3\cos(\theta)$

$1=2\cos(\theta)$

$\frac{1}{2}=\cos(\theta)$ / Arctng

$=\theta$

$\frac{1}{u(x+7)}$ $\frac{\sqrt{-x}}{2(x\sqrt{x}+7\sqrt{x})}$

$u = \sqrt{x} = x^{1/2}$

$du = \frac{1}{2} x^{-1/2}$

$\frac{1\sqrt{-x}}{2} dx$

3. Analice la convergencia de la integral,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}.$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+7)} dx = \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}+\sqrt{49x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x^3}+\sqrt{49x}}}{\frac{1}{\sqrt{x^3}}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^3 \cdot 1/x^3}{x^3+49x \cdot 1/x^3}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1+\frac{49}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} 1$$

$p = 3/2$

$L = 1$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}$$

p es mayor a 1 por lo que converge, además por criterio de comparación al límite $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}}$ converge por lo que $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}$ converge

CONTROL 2
NOMBRE: BURGOS ROA, DIEGO RAÚL
RUT: 21023549-3
CURSO: CÁLCULO INTEGRAL SEC.1 STGO S-SEM. 2022/1
PÁGINA: 5 DE 5

$\sum_{N=1}^{\infty} a r^{N-1}$

$\frac{a}{1-r}$

$-1<r<1$ C

4. Calcule el valor de las siguientes series numéricas. Justifique.

$a)$ $\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1))$.

$b)$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{9^n}$.

arctan(N-1) - arctan(N) = 0

a) $\sum_{N=1}^{\infty} \text{Arctng}(N-(N-1)) = \sum_{N=1} \text{Arctng}$

b) $\sum_{N=1}^{\infty}\left(\frac{7^N}{9^N}\right) = \sum_{N=1}^{\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^N = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^N \to \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{7}{9}} = \frac{1}{\frac{2}{9}} = 4{,}5$

La serie converge ya que $-1<r<1$; siendo $r = \frac{7}{9}$

Con lim

CONTROL 2
NOMBRE: BERNDT GIGOUX, IAN GUSTAVO
RUT: 21086303-6
CURSO: CÁLCULO INTEGRAL SEC.1 STGO S-SEM. 2022/1

SMART + SUSTAINABLE

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

MAT-106 Cálculo Integral
Control 2

14 de Junio de 2022.
70 minutos

PREGUNTA	PUNTAJE MÁXIMO	PUNTOS OBTENIDOS
1	15	
2	15	
3	15	
4	8+7	
TOTAL	60	
NOTA		

Atención:

- Cada respuesta debe ser justificada con claridad.
- Durante el desarrollo de la prueba no se responde ningún tipo de pregunta.
- Está permitido el uso de calculadora simple.
- El o la estudiante que sea sorprendido o sorprendida usando o intentando utilizar procedimientos ilícitos durante el desarrollo de la prueba, será calificado con la nota mínima (1.0) en cha prueba.

~~Forma Parametrización:~~
~~$x(t) = r\cos(t)$~~
~~$y(t) = r\,\text{sen}(t)$~~

1. Calcule la longitud de la curva dada por

$$x(t) = e^{-t}\cos(t),$$
$$y(t) = e^{-t}\sin(t), \qquad t \in [0, \pi/2].$$

$x(t) = e^{-t}\cos(t)$ $\quad x'(t) = (e^{-t})'\cos(t) + e^{-t}\cdot(\cos'(t))$

$x'(t) = -e^{-t}\cos(t) + e^{-t}\cdot -\text{sen}(t)$

$x'(t) = -e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\text{sen}(t)$

$[x'(t)]^2 = \left(-e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\text{sen}(t)\right)^2$

$= -1^2\left(e^{-t}\cos(t) + e^{-t}\text{sen}(t)\right)^2$

$= e^{-2t}\cos^2(t) + 2e^{-2t}\cos(t)\cdot\text{sen}(t) + e^{-2t}\text{sen}^2(t)$

$= e^{-2t}\left(\cos^2(t) + 2\cos(t)\text{sen}(t) + \text{sen}^2(t)\right)$

$= e^{-2t}\cdot\left(\cos(t) + \text{sen}(t)\right)^2$

$y(t) = e^{-t}\text{sen}(t)$ $\quad y'(t) = -e^{-t}\text{sen}(t) + e^{-t}\cos(t)$

$[y'(t)]^2 = \left(-e^{-t}\text{sen}(t) + e^{-t}\cos(t)\right)^2$

$e^{-2t}\left(-\text{sen}(t) + \cos(t)\right)^2$

$e^{-2t}\left(\cos(t) - \text{sen}(t)\right)^2$

$$L = \int_0^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

$$e^{-2t}(\cos(t)+sen(t))^2 + e^{-2t}(\cos(t)-sen(t))^2$$

$$e^{-2t}\left((\cos(t)+sen(t))^2 + (\cos(t)-sen(t))^2\right)$$

$$e^{-2t}\left(\cos^2(t) + \cancel{2\cos(t)sen(t)} + sen^2(t) + \cos^2(t) - \cancel{2\cos(t)sen(t)} + sen^2(t)\right)$$

$$\left(\underbrace{\cos^2(t)+sen^2(t)}_{} + \underbrace{\cos^2(t)+sen^2(t)}_{}\right)$$

$$e^{-2t}\,(1 \quad + \quad 1)$$

$$\underbrace{2e^{-2t}} \qquad L = \int_0^{\pi/2} 2e^{-2t}\, dt$$

$$\left.\begin{aligned} u &= -2t \\ du &= -2dt \\ -du &= 2dt \end{aligned}\right\} \int -e^{u}\, du$$

$$\underbrace{-e^{u}}$$

$$\left[-e^{-2t}\right]_0^{\pi/2}$$

$$\left[-e^{-2t}\right]_0^{\pi/2}$$

$$L = -e^{-\pi} + e^{0} \Big\} L = -\frac{1}{e^{\pi}} + 1$$

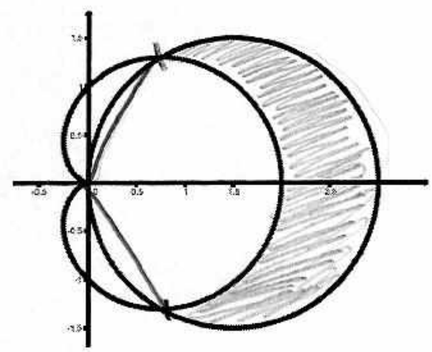
$$L = 1 - \frac{1}{e^{\pi}}\, \text{U} \,//$$

°	0	$\pi/6$			
Sen	0	$\frac{1}{2}$			
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	

2. Calcule el área de la región exterior a la cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ e interior a la circunferencia de ecuación $r = 3\cos(\theta)$.

Ptos de Corte:

$\underbrace{r_1 = r_2}$



$\frac{\pi}{3} + \pi$

$1 + \cos(\theta) = 3\cos\theta$

$1 = 2\cos\theta$

$\cos\theta = 1/2 \rightarrow \theta_1 = \pi/3 \ , \ \theta_2 = \frac{4\pi}{3}$

2) Integral:

$$A_B = \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\frac{4\pi}{3}} (3\cos\theta)^2 - (1+\cos\theta)^2 \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int 9\cos^2\theta - 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta \, d\theta$$

$$= \frac{9}{2}\int \cos^2\theta \, d\theta - \frac{1}{2}\int 1 \, d\theta - \int \cos\theta \, d\theta + \frac{1}{2}\int \cos^2\theta \, d\theta$$

$$9\int \cos^2\theta \, d\theta - \frac{1}{2}\int 1 \, d\theta - \int \cos\theta \, d\theta$$

$$9\int \frac{1 - 2\cos\theta/2}{2} \quad \left[-\frac{\theta}{2} - \operatorname{sen}\theta\right]_{\pi/3}^{4\pi/3}$$

$$9\left(\int \frac{1}{2} - \right.$$

$$\cos^2 = \frac{1 - 2\cos\theta}{2}$$

3. Analice la convergencia de la integral,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}.$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}+7\sqrt{x}}\,dx$$

Comparacion directa:

$$\underbrace{\sqrt{x^3}+7\sqrt{x} > \sqrt{x^3}}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^3}+7\sqrt{x}} < g(x)=\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

Siendo $f(x) < g(x) \ \forall x \in [1,\infty[$

$$\therefore \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}+7\sqrt{x}}\,dx}_{\text{converge}} < \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx}_{\text{converge}}$$

converge por criterio de comparacion directa

converge por criterio P. $(3/2 > 1)$

· Aplicamos criterio comparacion directa al encontrar una funcion $g(x) > f(x)$ $\forall x \in [1,\infty[$ y podemos concluir que $\int_1^\infty f(x)\,dx$ converge.

4. Calcule el valor de las siguientes series númericas. Justifique.

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1))$.

   b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{9^n}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{9^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^n$

Convertimos a integral.

1) la serie n es siempre positiva $\rightarrow f(n) = \left(\frac{7}{9}\right)^n \quad n > 0 \ \forall n$

2) la serie es decreciente $\rightarrow \left(\frac{7}{9}\right)^n > \left(\frac{7}{9}\right)^{n+1} \quad \forall n > 0$

3) la funcion es continua ya que esta compuesta de funciones continuas y no se indefine para ningun $N \in \mathbb{R}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^n$ tiene el mismo tipo de convergencia que:

$$\int_1^{\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^x dx$$

Calculamos integral:

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^x dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^{n} \left(\frac{7}{9}\right)^x dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\left(\frac{7}{9}\right)^x}{\ln(7/9)}\right]_1^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(7/9)^n}^{\to 0}}{\ln(7/9)} - \frac{7/9}{\ln(7/9)}$$

$$= -\frac{7}{9\underbrace{\ln(7/9)}}$$

$\ln(7/9)$ es negativo

Así que se anulan los signos.

$\ln(7/9) = -$

$e^x = 7/9$

SMART + SUSTAINABLE

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

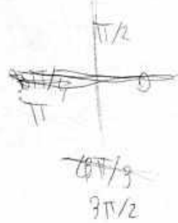
MAT-106 Cálculo Integral
Control 2

14 de Junio de 2022.
70 minutos

PREGUNTA	PUNTAJE MÁXIMO	PUNTOS OBTENIDOS
1	15	
2	15	
3	15	
4	8+7	
TOTAL	60	
NOTA		

Atención:

- Cada respuesta debe ser justificada con claridad.
- Durante el desarrollo de la prueba no se responde ningún tipo de pregunta.
- Está permitido el uso de calculadora simple.
- El o la estudiante que sea sorprendido o sorprendida usando o intentando utilizar procedimientos ilícitos durante el desarrollo de la prueba, será calificado con la nota mínima (1.0) en cha prueba.

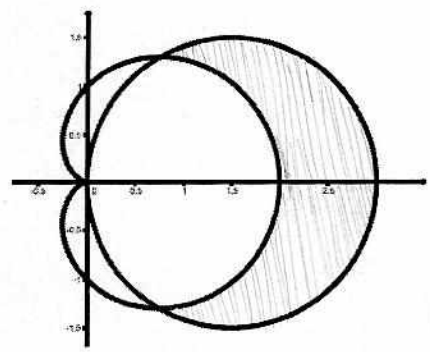


1. Calcule la longitud de la curva dada por

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{-t}\cos(t), \\
y(t) &= e^{-t}\sin(t), \qquad t \in [0, \pi/2].
\end{aligned}
$$

$\frac{1}{e^t}$ cos(t)

2. Calcule el área de la región exterior a la cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ e interior a la circunferencia de ecuación $r = 3\cos(\theta)$.



$\cancel{A_f = A_O - A_C}$

$\cancel{2\pi}$

$\cancel{2\pi}$

3. Analice la convergencia de la integral,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}.$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+7)}\,dx$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}(x+8)}}{\frac{1}{\sqrt{x}(x+7)}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{x}(x+7)}{\sqrt{x+1}(x+8)}$$

$$\frac{x\sqrt{x}+7\sqrt{x}}{x\sqrt{x+1}+8\sqrt{x+1}}$$

$$\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{49x}}{\sqrt{x^3+x}+\sqrt{64x+64}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^3+49x}{x^3+65x+64}}$$

$$\sqrt{\frac{x(x^2+49)}{x(x^2+65+\frac{64}{x})}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{x^2+49}{x^2+65+\frac{64}{x}}}$$

[redacted]

4. Calcule el valor de las siguientes series numéricas. Justifique.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1))$.

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{9^n}$.

$b)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{9^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7^{n+1}}{9^{n+1}}}{\frac{7^n}{9^n}}$$

$$\frac{\cancel{7^{n+1}}}{\cancel{9^{n+1}}} \cdot \frac{\cancel{9^n}}{\cancel{7^n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7}{9} = \frac{7}{9} \ //$$

como $7/9 < 1$ la susecion diverge sen criterio del cuociente

$a)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\arctan(n) - \arctan(n-1))$

$A = \int \frac{1}{2}\left(r_2^2 - r_1^2\right)$

$A = \int_a^b$

$\ell \int \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2}$

$A = \int g(t)\, f'(t)\, \partial t$

$\ell = \int \sqrt{[f'(x)]^2 + [g'(x)]^2}$

SMART + SUSTAINABLE

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

MAT-106 Cálculo Integral
Control 2

14 de Junio de 2022.
70 minutos

PREGUNTA	PUNTAJE MÁXIMO	PUNTOS OBTENIDOS
1	15	
2	15	
3	15	
4	8+7	
TOTAL	60	
NOTA		

Atención:

- Cada respuesta debe ser justificada con claridad.
- Durante el desarrollo de la prueba no se responde ningún tipo de pregunta.
- Está permitido el uso de calculadora simple.
- El o la estudiante que sea sorprendido o sorprendida usando o intentando utilizar procedimientos ilícitos durante el desarrollo de la prueba, será calificado con la nota mínima (1.0) en cha prueba.

$\sin = \frac{a}{c}$

$\cos = \frac{b}{c}$

$$\frac{b/c}{a/c} = b/a$$

$$e^t = \frac{\sin(t)}{y(t)} \Rightarrow y(t$$

$$x(t) = \frac{y(t) \cdot \cos(t)}{\sin(t)}$$

1. Calcule la longitud de la curva dada por

$$x(t) = e^{-t}\cos(t),$$
$$y(t) = e^{-t}\sin(t), \qquad t \in [0, \pi/2].$$

$$\alpha = \int_0^{\pi/2} \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, \partial t$$

$$x(t) = \frac{\cos(t)}{e^t}$$

$$y(t) = \frac{\sin(t)}{e^t}$$

$$x(t) = e^{-t}\cos(t)$$

$$x'(t) = -e^{-t} \cdot \cos(t) + e^{-t} \cdot -\mathrm{sen}(t)$$

$$x'(t) = \frac{-\cos(t)}{e^t} - \frac{\mathrm{sen}(t)}{e^t} = \frac{-\cos(t) - \mathrm{sen}(t)}{e^t}$$

$$y(t) = e^{-t}\sin(t)$$

$$y'(t) = \frac{-\sin(t)}{e^t} + \frac{\cos(t)}{e^t} = \frac{\cos(t) + \sin(t)}{e^t}$$

$$\alpha = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{(\cancel{-\cos^2(t)} + 2\mathrm{sen}\cancel{\cos(t)} + \cancel{\mathrm{sen}^2(t)} + \cancel{\cos^2(t)} + 2\cancel{\mathrm{sen}}\cos(t) + \cancel{\sin^2(t)}}{e^{t^2}}}$$

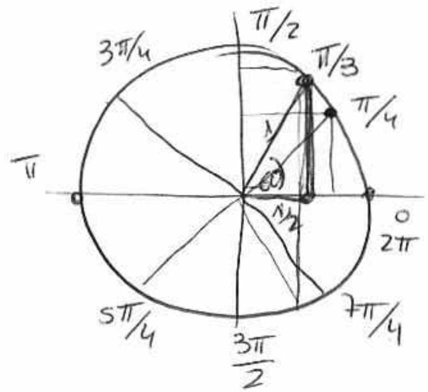
$$\alpha = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{e^t}\, \partial t \Rightarrow \left[\frac{-1}{e^t}\right]_0^{\pi/2} \Rightarrow \boxed{\frac{-1}{e^{\pi/2}} + 1}$$

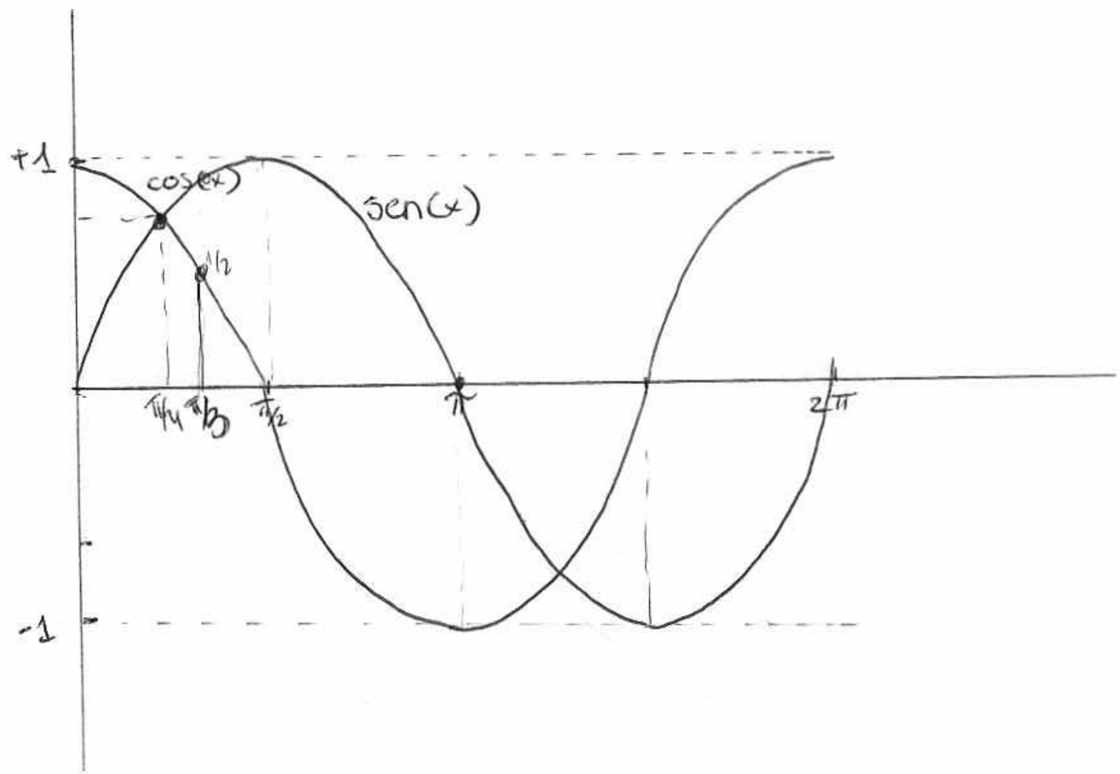
$$\int_0^{\pi/2} e^{-t}$$

$$\frac{60 \circ \pi}{180} = \frac{\pi}{3}$$

$\frac{1}{2} \circ \sqrt{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$





$$2\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{6\pi - \pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

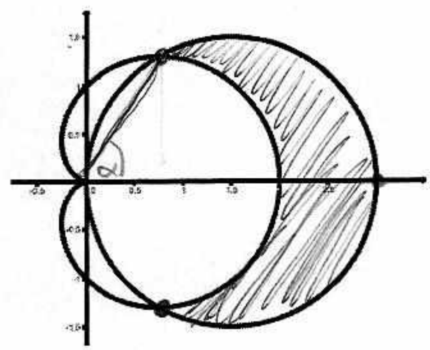
$\cos\theta \cdot \cos\theta$

$u = \cos(x) \quad du = -\operatorname{sen}(x)$

$\cancel{dv = \cos(x) \quad v = \operatorname{sen}(x)}$

$-\operatorname{sen}^2(x)$

2. Calcule el área de la región exterior a la cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ e interior a la circunferencia de ecuación $r = 3\cos(\theta)$.



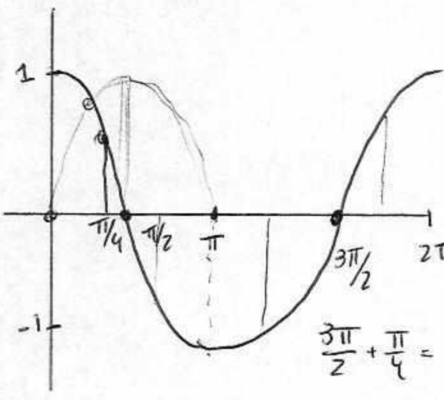
$A = 2 \cdot [0, \alpha]$

igualar para encontrar intersección

$1 + \cos(\theta) = 3\cos(\theta)$

$3\cos(\theta) - \cos(\theta) = 1 \iff \cos(\theta)(3-1) = 1$

$\cos(\theta) = \frac{1}{2}$



$\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

$A = 2 \cdot \int_0^{\pi/3} \frac{1}{2} \left[r_2^2 - r_1^2\right] d\theta$

$A = \int_0^{\pi/3} \left(9\cos^2(\theta) - \left[1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta\right]\right) d\theta$

$A = \int_0^{\pi/3} 8\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1 \, d\theta$

$A = 8\int_0^{\pi/3} \cos^2\theta \; - 2\int_0^{\pi/3} \cos\theta \; - \pi/3$

$A = 8\int_0^{\pi/3} \cos^2\theta \; - 2\left[\operatorname{sen}\theta\right]_0^{\pi/3} - \pi/3 \Rightarrow 8\int_0^{\pi/3} \cos^2\theta - 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right] - \pi/3$

$\cancel{= 8\int_0^{\pi/4} \cos^2\theta - \sqrt{3} - \pi/4}$

$\boxed{A = 8\int_0^{\pi/4} \cos^2\theta - \sqrt{3} - \pi/3}$

$\frac{1}{x^{1/2}}$ por $p > 1$ converge,, ≤ 1 diverge

3. Analice la convergencia de la integral,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}.$$

$\sqrt{x} \leq \sqrt{x}\,(x+7)$

$\frac{1}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+7)}$

com $1 \leq x \leq \infty$

$\sqrt{x} \geq 1$ siempre y $(x+7) \geq 1$ siempre

no hay problema en el dinominador.

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{n}\,(n+7)} \to$ tiende a 0,, no me sirve.

analizamos que $\sqrt{x} \leq \sqrt{x}\,(x+7)$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+7)}$ pero $\frac{1}{\sqrt{x}}$ diverge.

~~converge~~,

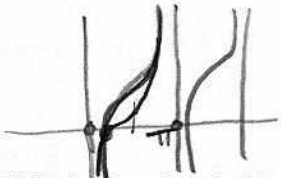
analizamos al limite.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}\,(x+7)}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{1}{(x+7)} = \infty$$

Entonces $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+7)}\,dx$ diverge porque comparando al limite con otra que diverge da infinito.

$\frac{\text{sen}}{\text{cos}} = \frac{[-1|1]}{[-1|1]}$

arctan va de



4. Calcule el valor de las siguientes series númericas. Justifique.

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1))$.

   b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{9^n}$.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1))$ $\quad \cancel{\arctan(1)} - \arctan(0) + \cancel{\arctan(2)} - \cancel{\arctan}$

$\circ\circ\circ \quad \cancel{\arctan(n)} - \cancel{\arctan(n-1)}$

$\Rightarrow -\arctan(0) + \arctan(n)$ $\quad \arctan(n+1) \; \cancel{-\arctan(n)}$

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} \overset{?}{=} 0 \Rightarrow \text{limite}_{n\to\infty} \arctan(n+1) \neq 0$

suponiendo $\arctan(n\circ\pi + 1)$

~~diverge~~

converge si $\arctan(1) = 0$

diverge en caso contrario (no se el valor)

pero dá con forma $\arctan(n+1)$ con $n \to \infty$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{9^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^n$ es geometrica

$\sum_{n=1}^{\infty} a \circ r^n$ con $r = \frac{7}{9}$ y $a = 1$

como es geometrica y $|r| = |\frac{7}{9}| < 1$

la serie converge.

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

MAT-106 Cálculo Integral
Control 2

14 de Junio de 2022.
70 minutos

PREGUNTA	PUNTAJE MÁXIMO	PUNTOS OBTENIDOS
1	15	
2	15	
3	15	
4	8+7	
TOTAL	60	
NOTA		

Atención:

- Cada respuesta debe ser justificada con claridad.
- Durante el desarrollo de la prueba no se responde ningún tipo de pregunta.
- Está permitido el uso de calculadora simple.
- El o la estudiante que sea sorprendido o sorprendida usando o intentando utilizar procedimientos ilícitos durante el desarrollo de la prueba, será calificado con la nota mínima (1.0) en dicha prueba.

1. Calcule la longitud de la curva dada por

$$x(t) = e^{-t}\cos(t),$$
$$y(t) = e^{-t}\sin(t), \qquad t \in [0, \pi/2].$$

$$L = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\, dt$$

$$f(t) = e^{-t}\cos(t) \quad , \quad g(t) = e^{-t}\sin(t)$$

$$f'(t) = -e^{-t}\sin(t) \quad , \quad g'(t) = e^{-t}\cos(t)$$

$$f'^2(t) = -e^{-2t}\sin^2(t) \quad , \quad g'^2(t) = e^{-2t}\cos^2(t) \quad \underset{+}{\Rightarrow} \quad -e^{-2t}\sin^2(t) + e^{-2t}\cos^2(t)$$

$$\Rightarrow e^{-2t}\left(-\sin^2(t) + \cos^2(t)\right)$$

$$\Rightarrow e^{-2t}$$

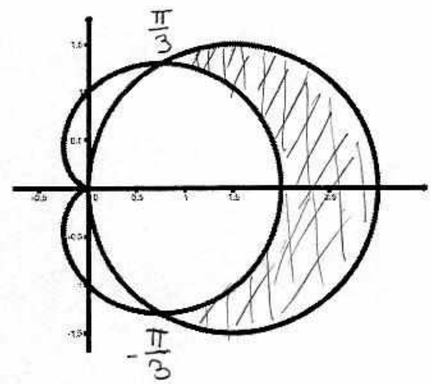
$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \sqrt{e^{-2t}}\, dt = \int_0^{\pi/2} (e^{-2t})^{1/2}\, dt = \int_0^{\pi/2} e^{-t}\, dt = \frac{1}{e^{t}}\Big|_0^{\pi/2} =$$

2. Calcule el área de la región exterior a la cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ e interior a la circunferencia de ecuación $r = 3\cos(\theta)$.

cardioide: $r = 1 + \cos(\theta) = g(\theta)$

circunf.: $r = 3\cos(\theta) = f(\theta)$

$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \left[(f(\theta))^2 - (g(\theta))^2\right] d\theta$



$1{,}047 = 3{,}141x$

$x = \frac{1{,}047}{3{,}141}$

$x = \frac{1}{3}$

Puntos de intersección: $f(\theta) = g(\theta)$

$3\cos(\theta) = 1 + \cos(\theta)$

$2\cos(\theta) = 1$

$\cos(\theta) = \frac{1}{2}$ / arc

$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{\pi}{3}}$

CONTROL 2

NOMBRE: ....

CURSO: CÁLCULO INTEGRAL SEC.2 STGO S-SEM. 2022/1

3. Analice la convergencia de la integral,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}. \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+7)}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+7)} = 0.$$

$$\lim_{a \to \infty} \int_1^{a} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+7)}$$

4. Calcule el valor de las siguientes series numéricas. Justifique.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1))$.

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{9^n}$.

SMART + SUSTAINABLE

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

MAT-106 Cálculo Integral
Control 2

14 de Junio de 2022.
70 minutos

PREGUNTA	PUNTAJE MÁXIMO	PUNTOS OBTENIDOS
1	15	
2	15	
3	15	
4	8+7	
TOTAL	60	
NOTA		

Atención:

- Cada respuesta debe ser justificada con claridad.
- Durante el desarrollo de la prueba no se responde ningún tipo de pregunta.
- Está permitido el uso de calculadora simple.
- El o la estudiante que sea sorprendido o sorprendida usando o intentando utilizar procedimientos ilícitos durante el desarrollo de la prueba, será calificado con la nota mínima (1.0) en dicha prueba.

1. Calcule la longitud de la curva dada por

$$x(t) = e^{-t}\cos(t), \qquad y(t) = e^{-t}\sin(t), \qquad t \in [0, \pi/2].$$

$\to x'(T) = -e^{-T} sen(T) + (-e^{-T}) \cdot \cos(T)$

$L = \int_a^b \sqrt{(x'(T))^2 + (y'(T)^2)}$

$\to y'(T) e^{-T}\cos(T) + - e^{-T}\sin(T)$

$(x'(T))^2 = e^{-T2} sen(T)^2 + 2 e^{-T} sen(T) \cdot -e^{-T}\cos(T) + (-e^{-2T}) \cdot \cos(T)^2$

$-e^{-2T} sen(T)^2 - e^{-2T}\cos^2(T) + 2e^{-2T}\cos sen(T)$

$-e^{-2T}(\overset{1}{\cancel{sen^2(T) + \cos^2(T)}} + 2\cos(T) sen(T))$

$-e^{2T} + 2\cos(T) sen(T)$

$\int_0^{\pi/2} \sqrt{0} = 0$?

$(y'(T))^2 = e^{-2T}\cos^2(T) - 2e^{-T}\cos(T) e^{-T} sin(T) + e^{-2T}\sin^2(T)$

$e^{2T}\cos^2(T) + e^{-2T}\sin^2(T) - 2e^{-T}\cos(T)\sin(T)$

$e^{-2T}(\overset{1}{\cancel{\cos^2(T) + \sin^2(T)}} - 2\cos(T)\sin(T))$

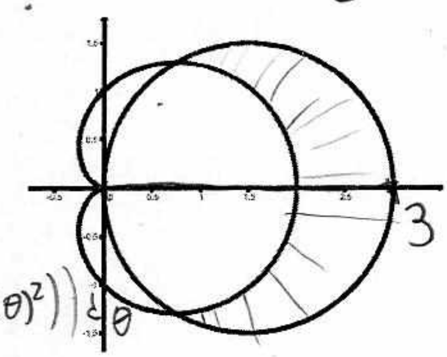
$e^{-2T} - 2\cos(T)\sin(T)$

$(x'(T))^2 + (y'(T))^2 = -\cancel{e^{-2T}} + \cancel{2\cos(T)\sin(T)} + \cancel{e^{-2T}} - \cancel{2\cos T\sin(T)} = 0$?

2. Calcule el área de la región exterior a la cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ e interior a la circunferencia de ecuación $r = 3\cos(\theta)$.

$$\frac{1}{2}\int_a^b \left((f(\theta))^2 - (g(\theta))^2 \right)$$

radio $= \frac{3}{2}$



$$1 + \cos(\theta) = 3\cos(\theta)$$

$$\frac{1}{\cos(\theta)} + 1 = 3$$

$$\frac{1}{\cos(\theta)} = 2^{\,()^{-1}}$$

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}$$

$$(\theta) = \frac{\pi}{4} \text{ y } -\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi/4} \left(9\cos^2(\theta) - \left(1^2 + 2\cos(\theta) + \cos(\theta)^2\right)\right) d\theta$$

$$9\cos^2 + \cos^2(\theta) + 2\cos(\theta) - 1$$

$$\cos^2(\theta)\,(9 - 8\cos^2(\theta) - 2\cos(\theta) - 1$$

$$8\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2(\theta) + [2\sin(\theta)]$$

$$\pi r^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \pi$$

$$\frac{9\pi}{4} - \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 1 + \cos(\theta) = \frac{9\pi}{4} - \left[x - \operatorname{sen}(\theta)\right]\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

$$\frac{9\pi}{4} - \left(\left[\frac{\pi}{4} - \cancel{\frac{1}{2}}\right] - \left[-\frac{\pi}{4} + \cancel{\frac{1}{2}}\right]\right.$$

$$\frac{9\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{9\pi - 2\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}\ //$$

3. Analice la convergencia de la integral,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)} = (\sqrt{x}(x+7))^{-1}$$

$$\lim_{T\to\infty} \int_1^T \frac{1}{\sqrt{x^3}+7\sqrt{x}}$$

$$\sqrt[2]{x^3} < \sqrt[2]{x^3} + 7\sqrt{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$$\frac{1}{\sqrt[2]{x^3}} > \frac{1}{\sqrt[2]{x^3}+7\sqrt{x}} \to \frac{1}{x^{3/2}}, \text{ converge, Por criterio p} \quad \therefore \frac{1}{\sqrt[2]{x^3}+7\sqrt{x}} \text{ tambien converge}$$

$$p = \tfrac{3}{2} > 1$$

NOMBRE: BENAVIDES HERRERA, DIEGO ALONSO
RUT: 21081905-3

4. Calcule el valor de las siguientes series númericas. Justifique.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1))$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{9^n}$. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^n = \dfrac{1}{\frac{9}{9}-\frac{7}{9}} = \dfrac{1}{\frac{2}{9}} = \dfrac{9}{2}$ //

$\star = ar^n = \dfrac{a}{1-r}$, si $r<1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\text{Arctan}(n-1) + \text{Arctan}(n) =$$

$$-\text{Arctan}(0) + \underbrace{\text{Arctan}(1) - \text{Arctan}(1)}_{0} + \underbrace{\text{Arctan}(2) - \text{Arctan}(2)}_{0}, \ldots + \text{Arctan}(n)$$

$$\lim_{T\to\infty} \sum_{n=1}^{T} -\text{Arctan}(n-1) + \text{Arctan}(n) = \lim_{T\to\infty} \text{Arctan}(T) - \text{Arctan}(0)$$

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

MAT-106 Cálculo Integral
Control 2

14 de Junio de 2022.
70 minutos

PREGUNTA	PUNTAJE MÁXIMO	PUNTOS OBTENIDOS
1	15	
2	15	
3	15	
4	8+7	
TOTAL	60	
NOTA		

Atención:

- Cada respuesta debe ser justificada con claridad.
- Durante el desarrollo de la prueba no se responde ningún tipo de pregunta.
- Está permitido el uso de calculadora simple.
- El o la estudiante que sea sorprendido o sorprendida usando o intentando utilizar procedimientos ilícitos durante el desarrollo de la prueba, será calificado con la nota mínima (1.0) en cha prueba.

$e^{u} \to u' \cdot e^{u}$

$a^2 + 2aB + b^2$

1. Calcule la longitud de la curva dada por

$$x(t) = e^{-t}\cos(t),$$
$$y(t) = e^{-t}\sin(t), \qquad t \in [0, \pi/2].$$

longitud curvas paramétricas:

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left((e^{-t}\cos(t))'\right)^2 + \left((e^{-t}\sin(t))'\right)^2}\, dt$$

$$(e^{-t}\cdot\cos(t))' = -1\cdot e^{-t}\cdot\cos(t) + -\text{sen}(t)\cdot e^{-t}\cdot -1$$

$$(e^{-t}\sin(t))' = -1\cdot e^{-t}\cdot \text{sen}(t) + +\cos(t)\cdot e^{-t}\cdot -1$$

$$\left((e^{-t}\cdot\cos(t))'\right)^2 = (-1e^{-t}\cdot\cos(t))^2 + \cancel{2(-1\cdot e^{-t}\cdot\cos(t)\cdot\text{sen}(t)\cdot(e^{-t})} + (-\text{sen}(t)\cdot e^{-t})^2$$

$$\left((e^{-t}\cdot\text{sen}(t))'\right)^2 = (-1\cdot e^{-t}\cdot\text{sen}(t))^2 + \cancel{2\cdot(-e^{-t}\cdot\text{sen}(t)\cdot\cos(t)\cdot e^{-t})} + (\cos(t)\cdot e^{-t})^2$$

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2(e^{-t2}\cdot\text{sen}^2(t)) + 2(e^{-t2}\cdot\cos^2(t))}\, dt$$

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2(e^{-2t} \cdot \operatorname{sen}^2(t)) + 2(e^{-2t} \cdot \cos^2(t))}\, dt$$

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2e^{-2t} \cdot \left(\operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t)\right)}\, dt$$

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2e^{-2t}}\, dt$$

$$L = \int_0^{\pi/2} 2^{1/2} \cdot e^{\frac{-2t}{2}}\, dt$$

$$L = \sqrt{2} \cdot \int_0^{\pi/2} e^{-t}\, dt$$

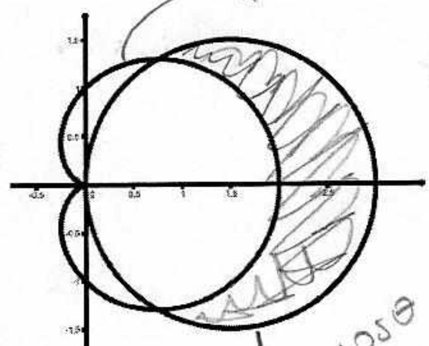
$$L = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{e^{-t}}{-1} \Bigg|_0^{\pi/2} \right)$$

$$L = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{e^{-\pi/2}}{-1} - \frac{e^0}{-1} \right) = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{-1}{e^{\pi/2}} + 1 \right)$$

$$L = \boxed{\frac{-\sqrt{2}}{e^{\pi/2}} + \sqrt{2}}$$

2. Calcule el área de la región exterior a la cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ e interior a la circunferencia de ecuación $r = 3\cos(\theta)$.

$1+\cos(\theta)$



$3\cos\theta$

$$1+\cos(\theta) = 3\cos(\theta)$$

$$1 = 2\cos(\theta)$$

$$\frac{1}{2} = \cos(\theta)$$

$$60^\circ = \theta$$

$$60 \cdot \frac{\pi}{180} = \boxed{\frac{\pi}{3}}$$

$$120 \cdot \frac{\pi}{180} = \boxed{\frac{2\pi}{3}}$$

$$A = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{1}{2}\left((3\cos\theta)^2 - (1+\cos(\theta))^2\right) d\theta$$

$$A = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{1}{2}\left(9\cos^2\theta - (1^2 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\right) d\theta$$

$$(1+\cos\theta)^2 = 1^2 + 2\cos\theta + \cos^2\theta$$

$$A = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{2}\left(9\cos^2\theta - 1 - 2\cos\theta - \cos^2\theta\right) d\theta$$

$$A = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \left(8\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1\right) d\theta$$

$$A = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \left(8\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1\right) d\theta$$

$$\underbrace{8\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \cos^2\theta \, d\theta}_{} - 2\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \cos\theta \, d\theta - \int_{\pi/3}^{2\pi/3} 1 \, d\theta$$

$$8 \cdot \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2\theta\right) d\theta = 4\left(\int_{\pi/3}^{2\pi/3} 1 \, d\theta + \int^{2\pi/3} \cos(2\theta) \, d\theta\right)$$

$$A = 4\int_{\pi/3}^{2\pi/3} 1 \, d\theta + 4\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \cos(2\theta) \, d\theta - 2\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \cos\theta \, d\theta - \int_{\pi/3}^{2\pi/3} 1 \, d\theta$$

$u = 2\theta$

$du = 2d\theta$

$$= 4 \cdot \left(\theta \Big|_{\pi/3}^{2\pi/3}\right) + 2 \cdot \left(\operatorname{sen}(u) \Big|_{\pi/3}^{2\pi/3}\right) - 2 \cdot \left(\operatorname{sen}(\theta) \Big|_{\pi/3}^{2\pi/3}\right) - \left(\theta \Big|_{\pi/3}^{2\pi/3}\right)$$

$$A = 8\pi/3 - 4\pi/3 + 2 \cdot \left(\operatorname{sen}(4\pi/3) - \operatorname{sen}(2\pi/3)\right)$$

$$- 2\left(\operatorname{sen}(2\pi/3) - \operatorname{sen}(\pi/3)\right) - \left(2\pi/3 - \pi/3\right)$$

Área =

$$\boxed{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3\pi}{3} + 2 \cdot \left(\operatorname{sen}(4\pi/3) - \operatorname{sen}(2\pi/3)\right) - 2\left(\operatorname{sen}(2\pi/3) - \operatorname{sen}(\pi/3)\right)\right)}$$

$\frac{1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3}{2}$ $\quad$ $x^{1/2} \cdot x^{1} =$

3. Analice la convergencia de la integral,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)} = \int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2} + 7\sqrt{x}}\, dx$$

$$\frac{1}{x^{3/2} + 7\sqrt{x}} \leq \frac{1}{x^{3/2}} \quad \therefore \text{ Si } \int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\, dx \text{ converge,}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2} + 7\sqrt{x}}\, dx \text{ también.}$$

$$\lim_{c \to \infty} \int_1^c \frac{1}{x^{3/2}}\, dx \longrightarrow$$ Por criterio P, como $3/2$ es > 1, se concluye que converge.

$$\therefore \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+7)}\, dx \text{ converge.}$$

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

CONTROL 2
NOMBRE: GAYA GOIRI, MARIA LORETO
RUT: 20987654-K
CURSO: CÁLCULO INTEGRAL SEC.1 STGO S-SEM. 2022/1

$90 \to \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{2}$ $\quad -\text{Arctan}(n-1) + \text{Arctan}(n)$

4. Calcule el valor de las siguientes series numéricas. Justifique.

$A_n - a_{n+1}$

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1))$. $\to$ telescopica $\nearrow$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{9^n}$. $\to$ geometrica $\to \alpha \cdot r^{n-1} = \frac{\alpha}{1-r}$

a) $\sum_{n=1}^{\infty} -1(\text{Arctan}(n-1) - \text{Arctan}(n)) =$

$-1 \cdot (\text{Arctan}(0) - \text{Arctan}(n)) =$

$\lim_{n\to\infty} -1(\underbrace{\text{Arctan}(0)}_{\to 0} - \underbrace{\text{Arctan}(n)}_{\to \pi/2}) = \frac{\pi}{2} \neq 0$

$\therefore$ diverge.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^n \cdot \left(\frac{7/9}{7/9}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{7}{9}\right)$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{7}{9}\right) = \frac{(7/9)}{1-7/9}$

$r = \frac{7}{9} < 1 \quad \therefore$ converge.

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^p} \rightarrow \begin{array}{l} \text{Converge si} > 1 \\ \text{D si} \leq 1 \end{array}$$

$$\int_0^1 \text{ Al revez.}$$

Área polar: $\int \sqrt{r^2 + ((r)')^2}$

parametricas $\sqrt{(((y)')^2 + ((x)')^2}$

$$\frac{1}{2}\left(f(x)^2 - g(x)^2\right)$$

Geo $\rightarrow ar^{n-1} = \dfrac{a}{1-r}$

SMART + SUSTAINABLE

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

MAT-106 Cálculo Integral
Control 2

14 de Junio de 2022.
70 minutos

PREGUNTA	PUNTAJE MÁXIMO	PUNTOS OBTENIDOS
1	15	
2	15	
3	15	
4	8+7	
TOTAL	60	
NOTA		

Atención:

- Cada respuesta debe ser justificada con claridad.
- Durante el desarrollo de la prueba no se responde ningún tipo de pregunta.
- Está permitido el uso de calculadora simple.
- El o la estudiante que sea sorprendido o sorprendida usando o intentando utilizar procedimientos ilícitos durante el desarrollo de la prueba, será calificado con la nota mínima (1.0) en cha prueba.

cos -sin
sin -cos

$x'(t) = e^{-t} \cdot \cos(t) + (-\sin(t)) \cdot e^{-t}$

1. Calcule la longitud de la curva dada por

$$x(t) = e^{-t}\cos(t),$$
$$y(t) = e^{-t}\sin(t), \qquad t \in [0, \pi/2].$$

$e^{-t} \cdot \cos(t)$
$e^{-t} \cdot \sin(t)$

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

$x'(t) = e^{-t} \cdot \cos(t) - \sin(t) \cdot e^{-t}$
$y'(t) = e^{-t} \cdot \sin(t) + \cos(t) \cdot e^{-t}$

$x'(t)^2 = - e^{-2t} \cdot \cos^2(t) - 2\sin(t) \cdot \cos(t) \cdot e^{-2t}$
$+ \sin^2(t) \cdot e^{-2t}$

$y'(t)^2 = e^{-2t} \cdot \sin^2(t) + 2\sin(t) \cdot \cos(t) \cdot e^{-2t} + \cos^2(t) \cdot e^{-2t}$

$x'(t)^2 + y'(t)^2 = e^{-2t}\big(\cos^2(t) \cancel{- 2\sin(t) \cdot \cos(t)} + \sin^2(t) +$
$\sin^2(t) \cancel{+ 2\sin(t) \cdot \cos(t)} + \cos^2(t) \big)$

$x'(t)^2 + y'(t)^2 = e^{-2t}\big(2\cos^2(t) + 2\sin^2(t)\big)$

$x'(t)^2 + y'(t)^2 = 2e^{-2t}\big(\underbrace{\cos^2(t) + \sin^2(t)}_{1}\big)$

$\longrightarrow$

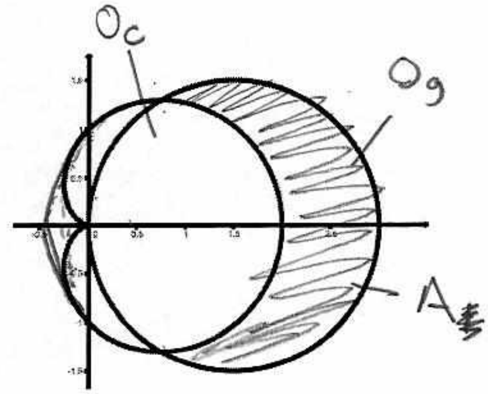
$x'(t)^2 + y'(t)^2 = 2e^{-2t}$

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{2 \cdot e^{-2t}}\, dt = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} e^{-t}\, dt$$

$$= \sqrt{2}\left[e^{-t}\right]_0^{\pi/2} = e^{-\pi/2} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2}$$

=

2. Calcule el área de la región exterior a la cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ e interior a la circunferencia de ecuación $r = 3\cos(\theta)$.



$A_{O_g} = \pi(1,5)^2$

$A_{O_g} \approx 7,07\ u^2$

$A_{O_c} = \pi(1,25)^2$

$A_{O_c} \approx 4,909$

$A = A_{O_g} - A_{O_c} \approx 2,16\ u^2$

3. Analice la convergencia de la integral,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}.$$ integral de tipo I

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+7)}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{\sqrt{x}(x+7)}\,dx$$

↳ ∞

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(x)} = x^{-3/2} \to \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$$

Por criterio p, $p>1$ ∴ $g(x)$ converge

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\cancel{\sqrt{x}}(x+7)} \cdot \cancel{\sqrt{x}} \cdot x \text{ tiende a } \infty$$

tiende a ∞

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} = 1$$

∴ Converge ya que el limite es un numero real

4. Calcule el valor de las siguientes series numéricas. Justifique.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1)).$

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{9^n}.$

SMART + SUSTAINABLE

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

MAT-106 Cálculo Integral
Control 2

14 de Junio de 2022.
70 minutos

PREGUNTA	PUNTAJE MÁXIMO	PUNTOS OBTENIDOS
1	15	
2	15	
3	15	
4	8+7	
TOTAL	60	
NOTA		

Atención:

- Cada respuesta debe ser justificada con claridad.
- Durante el desarrollo de la prueba no se responde ningún tipo de pregunta.
- Está permitido el uso de calculadora simple.
- El o la estudiante que sea sorprendido o sorprendida usando o intentando utilizar procedimientos ilícitos durante el desarrollo de la prueba, será calificado con la nota mínima (1.0) en cha prueba.

1. Calcule la longitud de la curva dada por

$$x(t) = e^{-t}\cos(t),$$
$$y(t) = e^{-t}\sin(t), \qquad t \in [0, \pi/2].$$

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

$a'b + ab'$

$$x(t)' = -e^{-t}\cos(t) + e^{-t} - \operatorname{sen}(t)$$

$$= -e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\operatorname{sen}(t).$$

$$y(t)' = -e^{-t}\operatorname{sen}(t) + e^{-t}\cos(t).$$

$$(x(t)')^2 = e^{-2t}\cos^2(t) + 2\cdot e^{-t}\cos(t)\cdot e^{-t}\operatorname{sen}(t) + e^{-t}\operatorname{sen}^2(t)$$

$+$

$$(y(t)')^2 = e^{-2t}\operatorname{sen}^2(t) - 2\cdot e^{-t}\operatorname{sen}(t) + e^{-t}\cos(t) + e^{-t}\cos^2(t)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{e^{-2t}\cos^2(t) + e^{-t}\operatorname{sen}^2(t) + e^{-2t}\operatorname{sen}^2(t) + e^{-t}\cos^2(t)}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{e^{-2t}\underbrace{\cos^2(t) + e^{-2t}\operatorname{sen}^2(t)}_{1} + e^{-t}\underbrace{\operatorname{sen}^2(t) + e^{-t}\cos^2(t)}_{1}}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{e^{-2t} + e^{-t}}\, dt$$

*Ahi

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

CONTROL 2
NOMBRE: MALDONADO LIBERONA, VICENTE NICOLÁS
RUT: 20809344-4
CURSO: CÁLCULO INTEGRAL SEC.1 STGO S-SEM. 2022/1

2. Calcule el área de la región exterior a la cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ e interior a la circunferencia de ecuación $r = 3\cos(\theta)$.

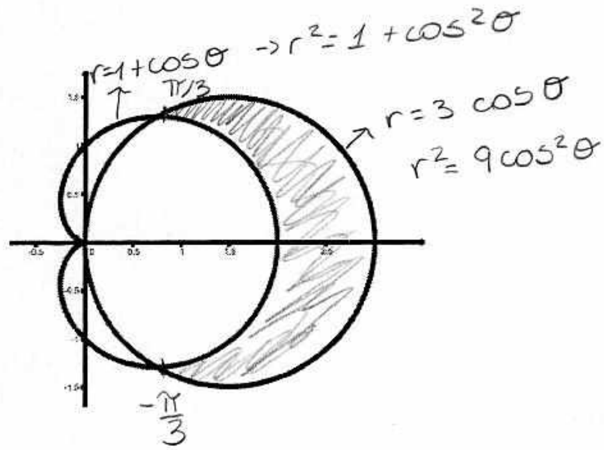
$$1 + \cos(\theta) = 3\cos(\theta)$$

$$1 = 3\cos(\theta) - \cos(\theta)$$

$$1 = 2\cos(\theta)$$

$$\frac{1}{2} = \cos(\theta)$$

$$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$



r

$$Ar = \cancel{2} \cdot \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cancel{2}} \left(9\cos^2(\theta) - 1\cos^2\theta \right)$$

$$\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

$$= \int_0^{\pi/3} \left(8\cos^2(\theta) \right) = 8 \int_0^{\pi/3} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

$$4 \int_0^{\pi/3} 1 + \cos(2\theta) = 4 \int_0^{\pi/3} 1 \, d\theta + 4 \int_0^{\pi/3} \cos(2\theta)$$

$$= 4\left(\frac{\pi}{3} - 0\right) + 4\left(\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right)\Big/_0^{\pi/3}$$

$$\frac{4\pi}{3} + 4\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - 0\right) = \frac{4}{3}\pi + \sqrt{3} \approx 5{,}92\ u^2$$

3. Analice la convergencia de la integral,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}.$$

Primera especie

converge >1

diverge ≤ 1

$$X+7 > X$$

$$\sqrt{x}\,(x+7) > \sqrt{x} \cdot x$$

$$\sqrt{x}\,(x+7) > x^{3/2}$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}\,(x+7)}}_{\text{converge}} < \underbrace{\frac{1}{x^{3/2}}}_{\text{converge}}$$

$$X+7 > x$$

$$\sqrt{x}\,(x+7) > \sqrt{x} \cdot x$$

$$\sqrt{x}\,(x+7 > x^{3/2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}\,(x+7)} < \frac{1}{x^{3/2}}$$

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$, converge por criterio $p = 3/2 > 1$

* Por lo tanto $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+7)}$ converge por comparación directa.

4. Calcule el valor de las siguientes series numéricas. Justifique.

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1))$. Telescopica

   b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{9^n}$. geometrica.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\arctan(n)}_{a_{n+1}} - \underbrace{\arctan(n-1)}_{a_n}$

$a_n = \arctan(n-1)$

$a_{n+1} = \arctan(n+1-1)$
$= \arctan(n)$

$* \lim_{n \to \infty} a_1 - a_{n+1}$

$a_1 - \lim_{n\to\infty} a_{n+1} \to \underbrace{\arctan(0)}_{0} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} \arctan(n)}_{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{9^n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{9} \cdot \frac{7^{n-1}}{9^{n-1}} \to a r^{n-1}$

$a = \frac{7}{9}$ $\quad r = \frac{7}{9}$

$r = \frac{7}{9} < 1$
converge

$-1 < r < 1$
converge

$-1 > r > 1$
diverge

$\boxed{\frac{a}{1-r}}$

$\frac{7/9}{1 - 7/9} = \frac{7/9}{2/9} = \frac{7}{2}$

SMART + SUSTAINABLE

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

MAT-106 Cálculo Integral
Control 2

14 de Junio de 2022.
70 minutos

PREGUNTA	PUNTAJE MÁXIMO	PUNTOS OBTENIDOS
1	15	
2	15	
3	15	
4	8+7	
TOTAL	60	
NOTA		

Atención:

- Cada respuesta debe ser justificada con claridad.
- Durante el desarrollo de la prueba no se responde ningún tipo de pregunta.
- Está permitido el uso de calculadora simple.
- El o la estudiante que sea sorprendido o sorprendida usando o intentando utilizar procedimientos ilícitos durante el desarrollo de la prueba, será calificado con la nota mínima (1.0) en cha prueba.

1. Calcule la longitud de la curva dada por

$$x(t) = e^{-t}\cos(t),$$
$$y(t) = e^{-t}\sin(t), \qquad t \in [0, \pi/2].$$

$e^{-t} \cdot \cos'(t)$

$e^{-t} \cdot \sin(t) + e^{-t} \cdot \cos(t)$

$$L = \int_a^b \sqrt{(f'(x))^2 + (g'(x))^2}\, dx$$

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(e^{-t}\cos(t)')^2 + (e^{-t}\sin(t)')^2}\, dt$$

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(e^{-2t} \cdot \sin(t) \cdot \cos(t))^2 + (e^{-2t} \cdot -\cos(t) \cdot \sin(t))^2}\, dt$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{e^{-4t}\sin^2(t) \cdot \cos^2(t) + e^{-2t} \cdot -\cos^2(t) \cdot \sin^2(t)}\, dt$$

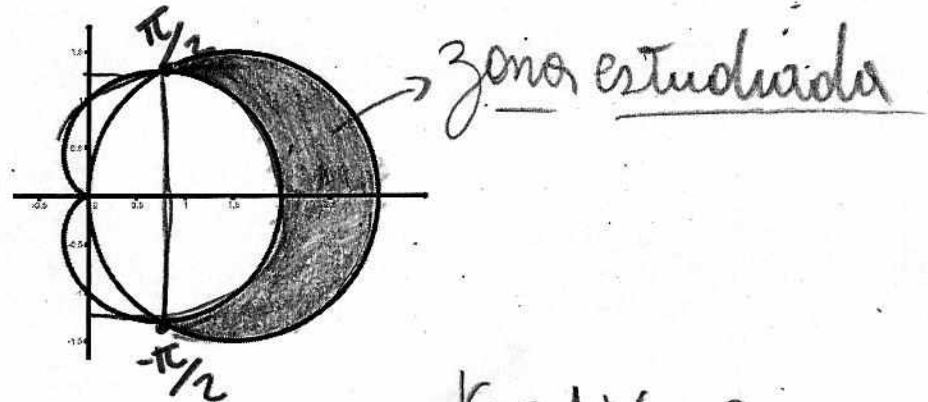
$$L = \int_0^{\pi/2} (e^{-4t}\sin^2(t) \cdot \cos^2(t) + e^{-2t} \cdot -\cos^2(t)\sin^2(t))^{1/2}\, dt$$

$$L = \int_0^{\pi/2} (e^{-4t}(\sin(t) \cdot \cos(t))^2 + e^{-2t}(-\cos(t) \cdot \sin(t))^2)^{1/2}\, dt$$

$$L = \int_0^{\pi/2} (e^{-4t} + e^{-2t}(\sin^2(t) \cdot -\cos(t))^2)^{1/2}\, dt$$

$$L = \int_0^{\pi/2} (e^{-2t}(e^{2t} + 1)(\sin^2(t) - \cos(t))^2)^{1/2}\, dt$$

2. Calcule el área de la región exterior a la cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ e interior a la circunferencia de ecuación $r = 3\cos(\theta)$.



$1+\cos(\theta) = 3\cos\theta$ $\quad (1/2, -\tfrac{1}{2})$

$r_1 = 1+\cos\theta$

$r_2 = 3\cos\theta$

$1 = 2\cos\theta$

$\frac{1}{2} = \cos\theta$

$\pi/2 , -\pi/2$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}\cdot(r_1^2 - r_2^2)\, d\theta.$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos\theta)^2 - (3\cos\theta)^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+2\cos\theta+\cos^2(\theta) - (9\cos^2(\theta)$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+2\cos\theta - 8\cos^2\theta) = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\, d\theta + \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos\theta\, d\theta - \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 8\cos^2\theta\, d$$

$$\frac{1}{2}\left(\theta\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}\right) + \sin(\theta)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - 4\left(1 - \sin(\theta)\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$1/2\left(\pi/2 + \pi/2\right) + \sin(\pi/2) + \sin(-\pi/2) - 4\left(1 - \sin(\pi/2) + (-\sin$$

$$\frac{\pi}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin(-\pi/2) - 4 + 4\sin(\pi/2) - \sin(\pi/2$$

CONTROL 2
NOMBRE: RUIZ MENESES, RAMON EDUARDO
RUT: 21198059-1
CURSO: CÁLCULO INTEGRAL SEC.1 STGO S-SEM. 2022/1

3. Analice la convergencia de la integral,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}.$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+7)}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}(x+7)} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{(\sqrt{x}\cdot x)+(7\sqrt{x})}\,dx$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{(\sqrt{x})^{-1}}{(x+7)}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b (\sqrt{x})^{-1}\cdot\frac{1}{(x+7)}\,dx$$

$$\lim_{b\to\infty} \frac{x^{-1/2}}{2}\cdot x^{-2} = \infty \quad \boxed{\text{La integral diverge}}$$

4. Calcule el valor de las siguientes series numéricas. Justifique.

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1))$.

   b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{9^n}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{9^n} = \dfrac{\frac{7^{n+1}}{9^{n+1}}}{\frac{7^n}{9^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{9^n(7^{n+1})}{7^n(9^{n+1})} = \lim_{n\to\infty} \frac{9^n\cdot(7^n\cdot 7)}{7^n\cdot 9^n\cdot 9} =$

$\lim_{n\to\infty} \frac{56^n\cdot 7}{56^n\cdot 9}\cdot \frac{1}{56^n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot \frac{7}{56^n}\to 0}{1\cdot \frac{1}{56^n}\to 0} = 0$ $\boxed{\text{diverge.}}$

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n)-\arctan(n-1))$ $\quad a_1 = \arctan(n-1)$

$a_2 = \arctan(n)$

$\left(a_1 - \lim_{n\to\infty} a_{n+1}\right) = \arctan(n-1) - \lim_{n\to\infty}\arctan(n)$

$\boxed{\text{La serie converge.}}$

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

MAT-106 Cálculo Integral
Control 2

14 de Junio de 2022.
70 minutos

PREGUNTA	PUNTAJE MÁXIMO	PUNTOS OBTENIDOS
1	15	
2	15	
3	15	
4	8+7	
TOTAL	60	
NOTA		

Atención:

- Cada respuesta debe ser justificada con claridad.
- Durante el desarrollo de la prueba no se responde ningún tipo de pregunta.
- Está permitido el uso de calculadora simple.
- El o la estudiante que sea sorprendido o sorprendida usando o intentando utilizar procedimientos ilícitos durante el desarrollo de la prueba, será calificado con la nota mínima (1.0) en dicha prueba.

1. Calcule la longitud de la curva dada por

$$x(t) = e^{-t}\cos(t),$$
$$y(t) = e^{-t}\sin(t), \qquad t \in [0, \pi/2].$$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

$$x(t) = e^{-t}\cos(t) \rightarrow x'(t) = -te^{-t}\cos(t) + e^{-t}\cdot \operatorname{sen}(t)$$
$$y(t) = e^{-t}\operatorname{sen}(t) \rightarrow y'(t) = -te^{-t}\sin(t) + e^{-t}\cdot -\cos(t)$$

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-te^{-t}\cos(t) + e^{-t}\operatorname{sen}(t))^2 + (-te^{-t}\sin(t) - e^{-t}\cos(t))^2}\, dt$$

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{t^2e^{-2t}\cos^2(t) \cancel{-2te^{-2t}\cos(t)\operatorname{sen}(t)} + e^{-2t}\operatorname{sen}^2(t) + t^2e^{-2t}\operatorname{sen}^2(t) + \cancel{2te^{-2t}\operatorname{sen} t\cos t} + e^{-2t}\cos^2 t}\, dt$$

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{t^2e^{-2t}\cos^2(t) + e^{-2t}\operatorname{sen}^2(t) + t^2e^{-2t}\operatorname{sen}^2(t) + e^{-2t}\cos^2 t}\, dt$$

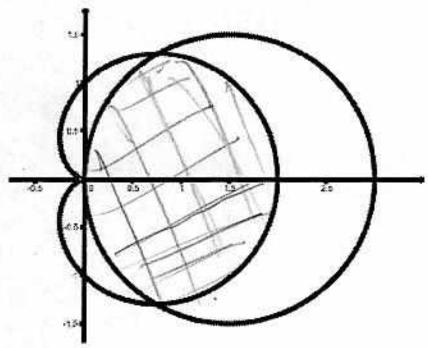
$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{e^{-2t}(t^2\cos^2(t) + \sin^2(t) + t^2\operatorname{sen}^2(t) + \cos^2 t)}\, dt$$

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{e^{-2t}(t^2\underbrace{(\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t))}_{1} + \underbrace{\operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t)}_{1})}\, dt$$

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{e^{-2t}t^2 + e^{-2t})}\, dt$$

2. Calcule el área de la región exterior a la cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ e interior a la circunferencia de ecuación $r = 3\cos(\theta)$.

1° Pts intersección



$1+\cos(\theta) = 3\cos(\theta) \,/ -\cos(\theta)$

$1 = 2\cos\theta \,/ \cdot \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = \cos\theta$

$\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \wedge \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$

Luego usamos $A_R = \int_a^b \frac{1}{2} [f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2 \, d\theta$:

$$A_R = \int_{\pi/3}^{4\pi/3} \frac{1}{2} (1+\cos(\theta))^2 - (3\cos(\theta))^2 \, d\theta$$

$$A_R = \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\frac{4\pi}{3}} 1+2\cos(\theta)+\cos^2(\theta) - (9\cos^2(\theta)) \, d\theta$$

$$A_R = \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\frac{4\pi}{3}} 1+2\cos(\theta) - 8\cos^2(\theta) \, d\theta$$

$$A_R = \frac{1}{2}\left(\int_{\pi/3}^{4\pi/3} d\theta + 2\int_{\pi/3}^{4\pi/3} \cos(\theta) d\theta - 8\int_{\pi/3}^{4\pi/3} \cos^2(\theta) \, d\theta\right) \to \frac{1}{2}\left(\theta \Big|_{\pi/3}^{4\pi/3} - 2\,\mathrm{sen}\,\theta \Big|_{\pi/3}^{4\pi/3}\right.$$

$$A_R = \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3} + 2\left(-\cancel{\mathrm{sen}\left(\frac{4\theta}{3}\right)} - \left(-\cancel{\mathrm{sen}(\pi/3)}\right)\right)\right)$$

$\frac{1}{2}\left(\pi\right.$

3. Analice la convergencia de la integral,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}. \rightarrow \text{Impropia tipo I}$$

$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+7)}\,dx \rightarrow$ Usando comparacion al limite, con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}(x+7)}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\cancel{\sqrt{x}}(x+7)} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{x}}}{1} \rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+7} = 0$$

Por lo tanto, como el limite existe, si $\int_1^\infty g(x)\,dx$ converge, $\int_1^\infty f(x)\,dx$ converge.

Sin embargo, por criterio p para impropias de tipo I,
$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}$ diverge $(p = 1/2 \leq 1)$. Entonces:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}\,dx \text{ diverge.}$$

4. Calcule el valor de las siguientes series númericas. Justifique.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n)-\arctan(n-1))$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{9^n}$.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n)-\arctan(n-1)) \to \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\arctan(k)-\arctan(k-1))$

Por serie telescópica inversa:

$\lim_{n\to\infty} \arctan(n)-\arctan(0) \to \lim_{n\to\infty}\arctan(n) = \pi/4$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{9^n} \to \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{7^k}{9^k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{7}{9}\right)^k \to$ Sabemos que es serie geométrica, de la forma $a=1$, $r=\frac{7}{9}$. Entonces, como $|r|=\frac{7}{9}<1$, Tenemos:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{7}{9}\right)^k = \frac{1}{1-7/9} = \frac{1}{\frac{9-7}{9}} = \frac{1}{2/9} = 9/2$$

CONTROL 2
NOMBRE: GIGOGNE GODOY, EUGENIO
RUT: 20072104-7
CURSO: CÁLCULO INTEGRAL SEC.1 STGO S-SEM. 2022/1

SMART + SUSTAINABLE

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

MAT-106 Cálculo Integral
Control 2

14 de Junio de 2022.
70 minutos

PREGUNTA	PUNTAJE MÁXIMO	PUNTOS OBTENIDOS
1	15	
2	15	
3	15	
4	8+7	
TOTAL	60	
NOTA		

Atención:

- Cada respuesta debe ser justificada con claridad.
- Durante el desarrollo de la prueba no se responde ningún tipo de pregunta.
- Está permitido el uso de calculadora simple.
- El o la estudiante que sea sorprendido o sorprendida usando o intentando utilizar procedimientos ilícitos durante el desarrollo de la prueba, será calificado con la nota mínima (1.0) en cha prueba.

1. Calcule la longitud de la curva dada por

$$x(t) = e^{-t}\cos(t), \qquad y(t) = e^{-t}\sin(t), \qquad t \in [0, \pi/2].$$

$$L = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt$$

$$f(x) = x(t) = e^{-t}\cos(t) =$$

$$f'(x) = x'(t) = e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\,\mathrm{sen}(t)$$

$$g(x) = y(t) = e^{-t}\,\mathrm{sen}(t)$$

$$g'(x) = y'(t) = e^{-t}\,\mathrm{sen}(t) + e^{-t}\cos(t)$$

$\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$L = 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(e^{-t}\cos(t) - e^{-t}(\mathrm{sen}(t))\right)^2 + \left(e^{-t}\mathrm{sen}(t) + e^{-t}\cos(t)\right)^2}\,dt$$

$$[x'(t)]^2 = e^{-2t}\cos^2(t) - 2e^{-t}\mathrm{sen}(t)\cdot\cos(t) + e^{-2t}\mathrm{sen}^2(t)$$

$$[y'(x)]^2 = e^{-2t}\mathrm{sen}^2(t) + 2e^{-t}\mathrm{sen}(t)\cos(t) + e^{-2t}\mathrm{sen}^2(t)$$

$$L = 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{2e^{-2t}\mathrm{sen}^2(t) + 2e^{-2t}\cos^2(t)}\,\Bigg|_0^{\pi/2}$$

$$L = 2\cdot(-1)\underbrace{\left(\sqrt{\underbrace{2e^{-2\cdot 0}\cdot \mathrm{sen}^2(0)}_{\underbrace{1\cdot 0}_{0}} + \underbrace{2e^{-2\cdot 0}\cdot\cos^2(0)}_{2\cdot 1\,\cdot\,1}}\right.}_{2}$$

+ Siguiente Hoja

2da parte $\Rightarrow [y'(t)]^2 \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$$\Downarrow$$

$$-(-1)\sqrt{\underbrace{\underbrace{2e^{-2\cdot\frac{\pi}{2}}}_{0}\cdot\underbrace{2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0}}_{0}+\underbrace{2e^{-2\frac{\pi}{2}}\cdot\operatorname{Sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{e^{-\pi}\cdot 1}}_{e^{-\pi}}$$

$$\Downarrow$$

$$2\left(\sqrt{e^{-\pi}}-\sqrt{2}\right)$$ unidades de medida

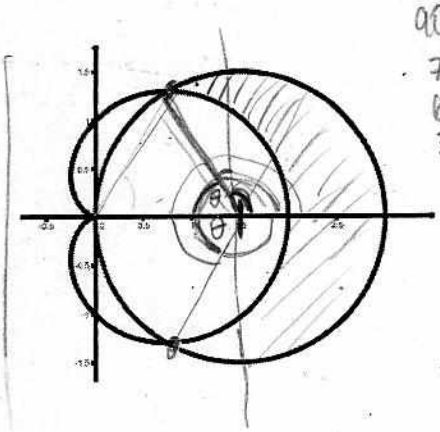
$\pi/2$ ... 0 $\pi/2$ ... 0

CONTROL 2
NOMBRE: GIGOGNE GODOY, EUGENIO
RUT: 20072104-7
CURSO: CÁLCULO INTEGRAL SEC.1 STGO S-SEM. 2022/1

2. Calcule el área de la región exterior a la cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ e interior a la circunferencia de ecuación $r = 3\cos(\theta)$.

$r = 1 + \cos(\theta)$
$r = 3\cos(\theta)$

$1 + \cos(\theta) = 3\cos(\theta)$
$1 = 2\cos(\theta)$
$\frac{1}{2} = \cos(\theta)$
$= \theta = \frac{2\pi}{6} + \frac{\pi}{2}$
$= \frac{5\pi}{6}$



90 $\frac{\pi}{2} = 0$
75
60
3

0 60 90 120 150 180
90
0 30 45 60 90
60 90 120 180
$0 \ \frac{\sqrt{1}}{2} \ \frac{\sqrt{2}}{2} \ \frac{\sqrt{3}}{2} \ \frac{\sqrt{4}}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2} \ \frac{\sqrt{3}}{2}$

$1{,}5\cos(\theta) = r$

$\frac{1}{2} \rightarrow$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = 60$
$\frac{1}{2}$ 30 $\rightarrow$

$\pi r^2 = (3\cos(\theta))^2 \pi$
$\left(\frac{3}{2}\right)^2$
$\frac{9}{4}\pi$

$[\cos(\theta)]'$
$\cos(\theta) - \mathrm{Sen}(\theta)$
$[1 + \cos(\theta)]'$
$\cos(\theta)\,\mathrm{Sen}(\theta)$

$A = \int_{2\pi/6}^{5\pi/6} \sqrt{r^2 - \frac{dr}{d\theta}}\, d\theta$ Cartoide

r'

$\sqrt{1 + 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta) +}$

Sigue en la otra hoja

Area cuteoide $= -2\left(\sqrt{\frac{7-\sqrt{3}}{4}} - \sqrt{\frac{5+\sqrt{3}}{4}}\right)$

$$-\cancel{2}\left(\frac{\sqrt{7-\sqrt{3}} - \sqrt{5+\sqrt{3}}}{\cancel{2}}\right) = \boxed{\sqrt{5+\sqrt{3}} - \sqrt{7-\sqrt{3}}}$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{r^2 - \left(\sqrt{5+\sqrt{3}} + \sqrt{7-\sqrt{3}}\right)}$$

$$\sqrt{1+\cos(\theta)}$$

3. Analice la convergencia de la integral,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}.$$

Tipo I

P $\leq$ 1 Diverge
P > Converge
(Si lo tengo malo perdon)

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+7)}\,dx$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}+7\sqrt{x}}\,dx$$

limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}(x+7)}}{\frac{1}{\sqrt{x}(x)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}(x)}{\sqrt{x}(x+7)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+7} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\cancel{7}^{0}} = 1$$

Ambas Convergen o Divergen

y por criterio P $\rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x)} \circ \int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}} = \int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}} \rightarrow \frac{3}{2} > 1$

converge //

4. Calcule el valor de las siguientes series numéricas. Justifique.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1))$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{9^n}$. $= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^n$ $\quad \frac{49}{81}$

$\sum_{k\to 1}^{n} r^k = \frac{r\cdot(1-r^n)}{1-r}$

$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n+1} =$

Geometrica-∞

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^n \to a\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$

r^{n+1} $\quad |r| = \frac{a-1}{n}$

$\frac{1-1}{\infty} = \frac{0}{\infty}$

$\downarrow$

$0_{//}$

Se que tiende a infinito pero
Me cuesta comprobarlo

a) → Telescopica $\arctan(n) - \arctan(0)$

$\arctan(n) \quad - \quad 1$

$\hookrightarrow \lim_{n\to\infty} \arctan(n)$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{cosec}}{\sec}(n)$

SMART + SUSTAINABLE

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

MAT-106 Cálculo Integral
Control 2

14 de Junio de 2022.
70 minutos

PREGUNTA	PUNTAJE MÁXIMO	PUNTOS OBTENIDOS
1	15	
2	15	
3	15	
4	8+7	
TOTAL	60	
NOTA		

Atención:

- Cada respuesta debe ser justificada con claridad.
- Durante el desarrollo de la prueba no se responde ningún tipo de pregunta.
- Está permitido el uso de calculadora simple.
- El o la estudiante que sea sorprendido o sorprendida usando o intentando utilizar procedimientos ilícitos durante el desarrollo de la prueba, será calificado con la nota mínima (1.0) en cha prueba.

1. Calcule la longitud de la curva dada por

$$x(t) = e^{-t}\cos(t),$$
$$y(t) = e^{-t}\sin(t), \qquad t \in [0, \pi/2].$$

$$L = \int_a^b \sqrt{(f'(x))^2 + (g'(x))^2}\, dx$$

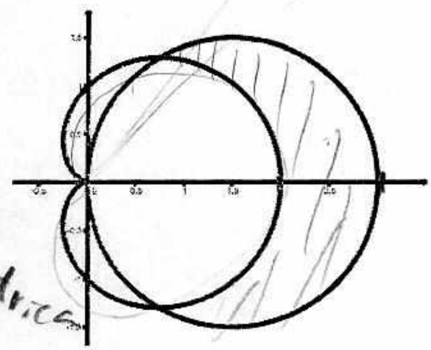
$$x(t) = e^{-t}\cos(t)$$

$$x'(t) = e^{-t}\cos(t) + e^{-t}\operatorname{sen}(t)$$

$$(x'(t))^2 = e^{-2t}\cos^2(t) + 2(e^{-t}\cos(t)\cdot e^{-t}\operatorname{sen}(t) + e^{-2t}\operatorname{sen}^2$$

2. Calcule el área de la región exterior a la cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ e interior a la circunferencia de ecuación $r = 3\cos(\theta)$.

$$A = \frac{1}{2}\int_a^b (F(\theta))^2 - (g(\theta))^2 \, d\theta$$



$1 + \cos\theta = 3\cos\theta$

$1 = 2\cos\theta$

$\cos\theta = \frac{1}{2}$

$\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right)$

$\theta = \pi/4$

$\theta = 5\pi/4$

multiplicamos por 2 pq es simétrica

$$A = 2\left(\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\left((1+\cos(\theta))^2 - (3\cos(\theta))^2\right) d\theta\right.$$

$$A = \int_0^{\pi/4}\left((1 + 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta)) - (9\cos^2(\theta)\right) d\theta$$

$$A = \int_0^{\pi/4}(1 + 2\cos(\theta) - 8\cos^2(\theta))d\theta = \int_0^{\pi/4} 1 \, d\theta + \int_0^{\pi/4} 2\cos(\theta) d\theta - \int_0^{\pi/4} 8\cos^2(\theta)\, d\theta$$

$$x)\Big|_0^{\pi/4} + 2(-\operatorname{sen}(\theta))\Big|_0^{\pi/4} - 8\left(\cdot\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)\Big|_0^{\pi/4}$$

$$\left((\pi/4) + 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 8\left(\frac{1+\cos(\pi/2)}{2} - 1\right)\right) u^2$$

TiPO I

3. Analice la convergencia de la integral,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}.$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+7)}\,dx = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}\,(x+7)}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}\,(x+7)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\cancel{x+7}} \to 0$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1/2}}$$ $\therefore$ por criterio $P = 1/2 < 1$ Diverge,

entonces $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}$ diverge por comparación d Límite

4. Calcule el valor de las siguientes series numéricas. Justifique.

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1))$.

   b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{9^n}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{9^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7 \cdot 7^{n-1}}{9 \cdot 9^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1}$

$\boxed{a = 7/9 \quad r = 7/9}$

Como $r = 7/9 < 1$ converge

$\frac{a}{1-r} = \frac{\frac{7}{9}}{1-\frac{7}{9}} = \frac{\frac{7}{9}}{\frac{2}{9}} = \frac{63}{18} = \frac{21}{6} = \boxed{\frac{7}{2}}$

La serie converge a $7/2$

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\arctan(n) - \arctan(n-1))$

$a_n = \arctan(n-1)$

$a_{n+1} = \arctan((n+1)-1)$

$a_{n+1} = \arctan(n)$

$\frac{1}{2}\left(a_1 - \lim_{n\to\infty} a_{n+1}\right)$

$\frac{1}{2}\left(\arctan(0) - \lim_{n\to\infty} \arctan(n)\right) = 0$

$$L\ Arco = \int_{a}^{b} \sqrt{}$$

$$Area = \frac{1}{2} \int g(t)\ F'(t)$$

Polar

$$L = \int_{a}^{b} \sqrt{r^2 + (r')^2}$$

$$A = \frac{1}{2} \int_{a}^{b} (F(\theta)^2 - g(\theta))^2\ d\theta$$

4) A) La serie converge por uso de la Función Telescopica

/

SMART + SUSTAINABLE

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

MAT-106 Cálculo Integral
Control 2

14 de Junio de 2022.
70 minutos

PREGUNTA	PUNTAJE MÁXIMO	PUNTOS OBTENIDOS
1	15	
2	15	
3	15	
4	8+7	
TOTAL	60	
NOTA		

Atención:

- Cada respuesta debe ser justificada con claridad.
- Durante el desarrollo de la prueba no se responde ningún tipo de pregunta.
- Está permitido el uso de calculadora simple.
- El o la estudiante que sea sorprendido o sorprendida usando o intentando utilizar procedimientos ilícitos durante el desarrollo de la prueba, será calificado con la nota mínima (1.0) en cha prueba.

1° = encontrar x' e y'
2° = calcular $(x')^2 + (y')^2$
3° = Sumarlas

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f'(x)]^2 + [g'(x)]^2}\, dx$$

1. Calcule la longitud de la curva dada por

4° sacar raiz
5° eliminar integral
6° evaluar en los lim. de la int

$$x(t) = e^{-t}\cos(t),$$
$$y(t) = e^{-t}\sin(t), \qquad t \in [0, \pi/2].$$

$X(t) = e^{-t} \cos(t)$

$x'(t) = -e^{-t} \cdot \cos(t) + e^{-t} \cdot -\text{sen}(t)$

$y(t) = e^{-t}\,\text{sen}(t)$

$y'(t) = -e^{-t} \cdot \text{sen}(t) + e^{-t} \cdot \cos(t)$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-e^{-t} \cdot \cos(t) + e^{-t} \cdot -\text{sen}(t))^2 + (e^{-t} \cdot \text{sen}(t) + e^{-t} \cdot \cos(t))^2}$$

$(-e^{-t} \cdot \cos(t))^2 + 2(-e^{-t} \cdot \cos(t) \cdot e^{-t} \cdot -\text{sen}(t)) + (e^{-t} \cdot -\text{sen}(t))^2 + (-e^{-t} \cdot \text{sen}(t))^2 + 2 \cdot e^{-t} \cdot \text{sen}(t) \cdot e^{-t} \cdot \cos t + (e^{-t} \cdot \cos t$

2. Calcule el área de la región exterior a la cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ e interior a la circunferencia de ecuación $r = 3\cos(\theta)$.

$A = \frac{1}{2}\int_a^b \sqrt{f^2(x) - g'(x)}$

$180 \to \pi$

$60 \to \frac{\pi}{3}$

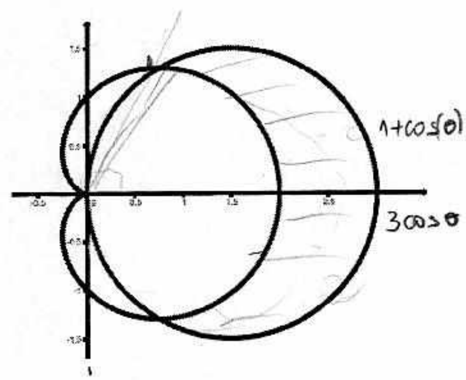
para punto intersección

$1 + \cos(\theta) = 3\cos(\theta)$

$1 = 2\cos(\theta)$

$\cos(\theta) = \frac{1}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$



$r1 = 1 + \cos(\theta)$

$r^2 = 1 + 2\cos(\theta) + \cos^2$

$r2 = 3\cos(\theta)$

$r^2 = 9\cos^2(\theta)$

$A = \frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sqrt{(9\cos^2 - 1 - 2\cos - \cos^2(\theta))}\, d\theta$

$= \frac{1}{2}\int_0 \sqrt{8\cos^2\theta - 2\cos(\theta) - 1}\, d\theta$

3. Analice la convergencia de la integral,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}.$$

$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}$

$\frac{1}{2} < 1$
diverge
por
criterio p

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+7)} = \int_1^\infty \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}(x+7)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}(x+7)}}{\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \left(\frac{1}{\cancel{x+7}}\right)^{\to 0} \text{ :. div}$$

Como $\int_1^n \frac{1}{x+7}$ diverge y $\int_1^n \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}$ diverge, por comparación al limite

la integral $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+7)}$ diverge

4. Calcule el valor de las siguientes series numéricas. Justifique.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1))$.

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{9^n}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{9^n} \to$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^n = \frac{\frac{7}{9}}{1-\frac{7}{9}} = \frac{7}{2}$$

La serie diverge

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\arctan(n) - \arctan(n-1)$ $\to$ telescópica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_k - a_{k-1})$$
$$= (a_n - a_{1-1})$$

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\arctan(n) - \arctan(k-1))$$

$$\lim_{k\to\infty} \arctan(n) - \lim_{n\to\infty} \cancel{(k-1)}^{\infty}$$

$$\lim_{k\to\infty} \arctan(n) = \frac{\pi}{4} = 45^{\circ}$$

SMART + SUSTAINABLE

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

MAT-106 Cálculo Integral
Control 2

14 de Junio de 2022.
70 minutos

PREGUNTA	PUNTAJE MÁXIMO	PUNTOS OBTENIDOS
1	15	
2	15	
3	15	
4	8+7	
TOTAL	60	
NOTA		

Atención:

- Cada respuesta debe ser justificada con claridad.
- Durante el desarrollo de la prueba no se responde ningún tipo de pregunta.
- Está permitido el uso de calculadora simple.
- El o la estudiante que sea sorprendido o sorprendida usando o intentando utilizar procedimientos ilícitos durante el desarrollo de la prueba, será calificado con la nota mínima (1.0) en cha prueba.

$e^{-t}\cos(t) = e^{-t}\sin(t)$

1. Calcule la longitud de la curva dada por

$$x(t) = e^{-t}\cos(t),$$
$$y(t) = e^{-t}\sin(t), \qquad t \in [0, \pi/2].$$

$e^{-1}\cos(1)$

$e^{-1}\sin(1)$

t	X	Y
0	$e^{-0}\cos(0)$	$e^{-0}\sin(0)$
1	$e^{-1}\cos(1)$	$e^{-1}\sin(1)$
$\frac{\pi}{4}$	$e^{-\frac{\pi}{4}}\cos(\frac{\pi}{4})$	$e^{-\frac{\pi}{4}}\sin(\frac{\pi}{4})$
$\frac{\pi}{2}$	$e^{-\frac{\pi}{2}}\cos(\frac{\pi}{2})$	$e^{-\frac{\pi}{2}}\sin(\frac{\pi}{2})$

$\int_a^b \sqrt{(f(t))^2 + (g(t))^2}$

$1^{-1} = 1 \cdot (-1)$

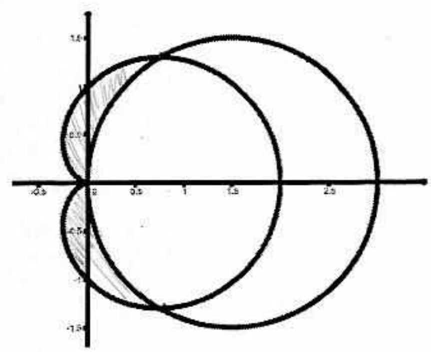
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{[(et^{-t-1}\cos(t)]^2 + [et^{-t-1}\operatorname{Sen}(t)]^2}$

$X'(t) = e^{-t}\cos'(t)$

$e \cdot t^{-t-1}\cos(t)$

$et^{-t-1}\cos(t)$

2. Calcule el área de la región exterior a la cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ e interior a la circunferencia de ecuación $r = 3\cos(\theta)$.



$1 + \cos(\theta) = 3\cos(\theta)$

$\cos(\theta) + 3\cos(\theta) = 1$

$4\cos(\theta) = 1$

$\cos(\theta) = \frac{1}{4}$

$A = (2)\frac{1}{2} \cdot \int \sqrt{1+\cos(\theta)^2 - 3\cos(\theta)^2}$

3. Analice la convergencia de la integral,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}.$$ diverge

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+7)} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{db}{\sqrt{b}\,(b+7)} = \Big/_1^b \int \frac{d\infty}{\sqrt{\infty}\,(\infty+7)} - \int \frac{d1}{\sqrt{1}\,(8)} = \frac{\infty}{\infty} = \text{diverg}$$

4. Calcule el valor de las siguientes series númericas. Justifique.

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1))$.

   b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{9^n}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{9^n} = a_n = \frac{7^n}{9^n}$

$b_n = \frac{7}{9}$

$$\left[\frac{\frac{7^n}{9^n}}{\frac{7}{9}}\right] = \frac{7^n}{9^n} \cdot \left(\frac{7}{9}\right) = \frac{49^n}{81^n}$$

SMART + SUSTAINABLE

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

MAT-106 Cálculo Integral
Control 2

14 de Junio de 2022.
70 minutos

PREGUNTA	PUNTAJE MÁXIMO	PUNTOS OBTENIDOS
1	15	
2	15	
3	15	
4	8+7	
TOTAL	60	
NOTA		

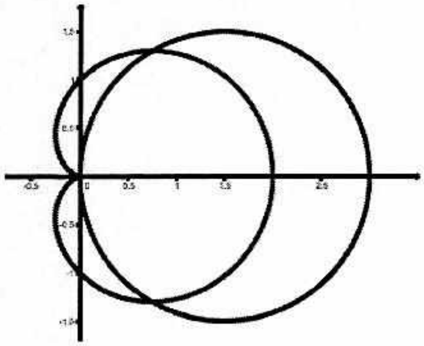
Atención:

- Cada respuesta debe ser justificada con claridad.
- Durante el desarrollo de la prueba no se responde ningún tipo de pregunta.
- Está permitido el uso de calculadora simple.
- El o la estudiante que sea sorprendido o sorprendida usando o intentando utilizar procedimientos ilícitos durante el desarrollo de la prueba, será calificado con la nota mínima (1.0) en dicha prueba.

1. Calcule la longitud de la curva dada por

$$\begin{aligned} x(t) =& e^{-t}\cos(t), \\ y(t) =& e^{-t}\sin(t), \qquad t \in [0, \pi/2]. \end{aligned}$$

2. Calcule el área de la región exterior a la cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ e interior a la circunferencia de ecuación $r = 3\cos(\theta)$.



3. Analice la convergencia de la integral,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}.$$

4. Calcule el valor de las siguientes series númericas. Justifique.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1))$.

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{9^n}$.

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

MAT-106 Cálculo Integral
Control 2

14 de Junio de 2022.
70 minutos

PREGUNTA	PUNTAJE MÁXIMO	PUNTOS OBTENIDOS
1	15	
2	15	
3	15	
4	8+7	
TOTAL	60	
NOTA		

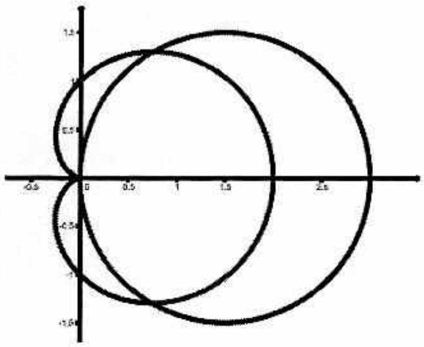
Atención:

- Cada respuesta debe ser justificada con claridad.
- Durante el desarrollo de la prueba no se responde ningún tipo de pregunta.
- Está permitido el uso de calculadora simple.
- El o la estudiante que sea sorprendido o sorprendida usando o intentando utilizar procedimientos ilícitos durante el desarrollo de la prueba, será calificado con la nota mínima (1.0) en cha prueba.

1. Calcule la longitud de la curva dada por

$$
\begin{aligned}
x(t) =& e^{-t}\cos(t), \\
y(t) =& e^{-t}\sin(t), \qquad t \in [0, \pi/2].
\end{aligned}
$$

2. Calcule el área de la región exterior a la cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ e interior a la circunferencia de ecuación $r = 3\cos(\theta)$.



3. Analice la convergencia de la integral,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}.$$

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

CONTROL 2
NOMBRE: LEAL ROMERO, GONZALO VICENTE
RUT: 20950568-1
CURSO: CÁLCULO INTEGRAL SEC.1 STGO S-SEM. 2022/1

4. Calcule el valor de las siguientes series númericas. Justifique.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1))$.

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{9^n}$.

SMART + SUSTAINABLE

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

MAT-106 Cálculo Integral
Control 2

14 de Junio de 2022.
70 minutos

PREGUNTA	PUNTAJE MÁXIMO	PUNTOS OBTENIDOS
1	15	
2	15	
3	15	
4	8+7	
TOTAL	60	
NOTA		

Atención:

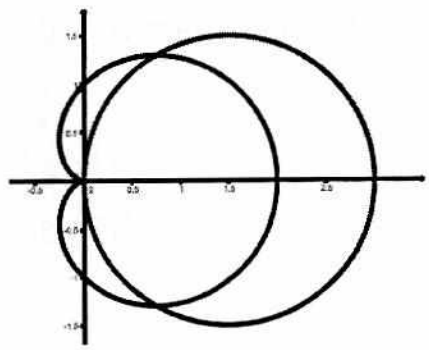
- Cada respuesta debe ser justificada con claridad.
- Durante el desarrollo de la prueba no se responde ningún tipo de pregunta.
- Está permitido el uso de calculadora simple.
- El o la estudiante que sea sorprendido o sorprendida usando o intentando utilizar procedimientos ilícitos durante el desarrollo de la prueba, será calificado con la nota mínima (1.0) en cha prueba.

CONTROL 2
NOMBRE: FEHRMANN FERNÁNDEZ, EMILIA MARTINA
RUT: 21041322-7
CURSO: CÁLCULO INTEGRAL SEC.1 STGO S-SEM. 2022/1

1. Calcule la longitud de la curva dada por

$$\begin{aligned} x(t) =& e^{-t}\cos(t), \\ y(t) =& e^{-t}\sin(t), \qquad t \in [0, \pi/2]. \end{aligned}$$

2. Calcule el área de la región exterior a la cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ e interior a la circunferencia de ecuación $r = 3\cos(\theta)$.



3. Analice la convergencia de la integral,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}.$$

4. Calcule el valor de las siguientes series númericas. Justifique.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1))$.

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{9^n}$.

SMART + SUSTAINABLE

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

MAT-106 Cálculo Integral
Control 2

14 de Junio de 2022.
70 minutos

PREGUNTA	PUNTAJE MÁXIMO	PUNTOS OBTENIDOS
1	15	
2	15	
3	15	
4	8+7	
TOTAL	60	
NOTA		

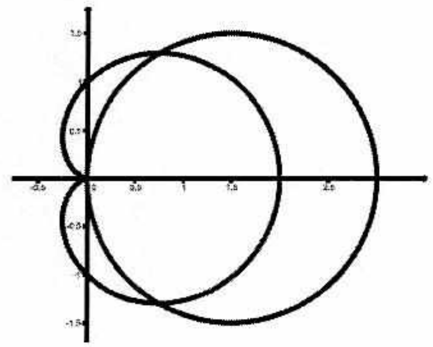
Atención:

- Cada respuesta debe ser justificada con claridad.
- Durante el desarrollo de la prueba no se responde ningún tipo de pregunta.
- Está permitido el uso de calculadora simple.
- El o la estudiante que sea sorprendido o sorprendida usando o intentando utilizar procedimientos ilícitos durante el desarrollo de la prueba, será calificado con la nota mínima (1.0) en cha prueba.

1. Calcule la longitud de la curva dada por

$$
\begin{aligned}
x(t) =& e^{-t}\cos(t),\\
y(t) =& e^{-t}\sin(t), \qquad t \in [0, \pi/2].
\end{aligned}
$$

2. Calcule el área de la región exterior a la cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ e interior a la circunferencia de ecuación $r = 3\cos(\theta)$.



3. Analice la convergencia de la integral,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}.$$

4. Calcule el valor de las siguientes series numéricas. Justifique.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1))$.

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{9^n}$.

SMART + SUSTAINABLE

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

MAT-106 Cálculo Integral
Control 2

14 de Junio de 2022.
70 minutos

PREGUNTA	PUNTAJE MÁXIMO	PUNTOS OBTENIDOS
1	15	
2	15	
3	15	
4	8+7	
TOTAL	60	
NOTA		

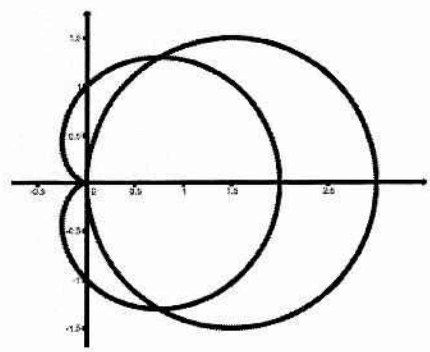
Atención:

- Cada respuesta debe ser justificada con claridad.
- Durante el desarrollo de la prueba no se responde ningún tipo de pregunta.
- Está permitido el uso de calculadora simple.
- El o la estudiante que sea sorprendido o sorprendida usando o intentando utilizar procedimientos ilícitos durante el desarrollo de la prueba, será calificado con la nota mínima (1.0) en cha prueba.

1. Calcule la longitud de la curva dada por

$$\begin{aligned} x(t) =& e^{-t}\cos(t),\\ y(t) =& e^{-t}\sin(t), \qquad t \in [0, \pi/2]. \end{aligned}$$

2. Calcule el área de la región exterior a la cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ e interior a la circunferencia de ecuación $r = 3\cos(\theta)$.



3. Analice la convergencia de la integral,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}.$$

4. Calcule el valor de las siguientes series númericas. Justifique.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1))$.

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{9^n}$.

CONTROL 2
NOMBRE: LOBO OYARZO, PATXI
RUT: 21031477-6
CURSO: CÁLCULO INTEGRAL SEC.1 STGO S-SEM. 2022/1
PÁGINA: 1 DE 5

SMART + SUSTAINABLE

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

MAT-106 Cálculo Integral
Control 2

14 de Junio de 2022.
70 minutos

PREGUNTA	PUNTAJE MÁXIMO	PUNTOS OBTENIDOS
1	15	
2	15	
3	15	
4	8+7	
TOTAL	60	
NOTA		

Atención:

- Cada respuesta debe ser justificada con claridad.
- Durante el desarrollo de la prueba no se responde ningún tipo de pregunta.
- Está permitido el uso de calculadora simple.
- El o la estudiante que sea sorprendido o sorprendida usando o intentando utilizar procedimientos ilícitos durante el desarrollo de la prueba, será calificado con la nota mínima (1.0) en cha prueba.

1. Calcule la longitud de la curva dada por

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{-t}\cos(t),\\
y(t) &= e^{-t}\sin(t), \qquad t \in [0, \pi/2].
\end{aligned}
$$

$$x(t)' = -e^{-t}\cdot\cos(t) + e^{-t}\cdot -\operatorname{sen}(t) \xrightarrow{(\ )^2} \left(-e^{-t}\cdot\cos(t) - e^{-t}\operatorname{sen}(t)\right)^2$$

$$y(t)' = -e^{-t}\cdot\sin(t) + e^{-t}\cdot\cos(t) \rightarrow \left(-e^{-t}\cdot\operatorname{sen}(t) + e^{-t}\cdot\cos(t)\right)^2$$

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(-e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\operatorname{sen}(t)\right)^2 + \left(-e^{-t}\operatorname{sen}(t) + e^{-t}\cos(t)\right)^2}$$

$$\sqrt{e^{-2t}\cdot\cos^2(t) \cancel{+ 2e^{-t}\cos(t)\cdot e^{-t}\operatorname{sen}(t)} + e^{-2t}\operatorname{sen}^2(t) + e^{-2t}\operatorname{sen}^2(t) \cancel{- 2e^{-t}\operatorname{sen}(t)e^{-t}\cos(t)} + e^{-2t}\cos^2(t)}$$

$$\sqrt{e^{-2t}\cos^2(t) + e^{-2t}\operatorname{sen}^2(t) + e^{-2t}\operatorname{sen}^2(t) + e^{-2t}\cos^2(t)} \; dt$$

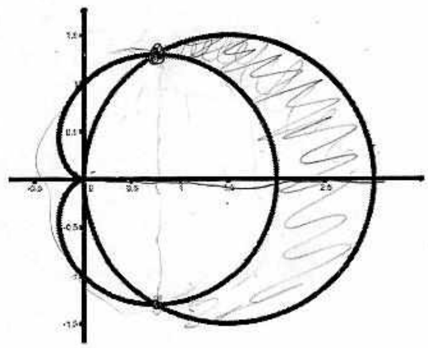
$$\sqrt{e^{-2t}\left(\underbrace{\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t)}_{1} + \underbrace{\operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t)}_{1}\right)} \; dt$$

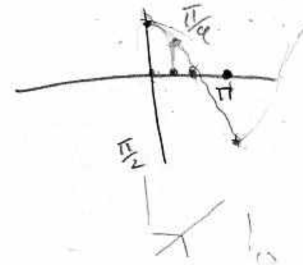
$$1 + 1$$

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{e^{-2t}\cdot 2} \; dt = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \sqrt{e^{-2t}} = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{-2t}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t}$$

$$\sqrt{2}\left(-e^{-t} \Big/_{0}^{\pi/2}\right) = \sqrt{2}\left(-e^{-\pi/2} + 1\right)$$

2. Calcule el área de la región exterior a la cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ e interior a la circunferencia de ecuación $r = 3\cos(\theta)$.





$1 + \cos(\theta) = 3\cos(\theta)$

$1 + \cos(\theta) - 3\cos(\theta) = 0$

$1 - 2\cos(\theta) = 0$

$1 = 2\cos(\theta)$

$\cos(\theta) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{\pi}{4}$

$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 9\cos^2(\theta) - (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)$

$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 9\cos^2\theta - 1 - 2\cos\theta - \cos^2\theta$

$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 8\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1$

$\rightarrow \frac{1}{2}\left(8\int_0^{\pi/4}\cos^2(\theta)\,d\theta - 2\int_0^{\pi/4}\cos(\theta)\,d\theta - \int_0^{\pi/4} 1\,d\theta\right)$

P>1 conv

3. Analice la convergencia de la integral,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}.$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+7)}\,dx \qquad \text{TiPo I}$$

$= x^{\frac{1}{2}}(x+7)$

$x^{\frac{3}{2}} + 7x^{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ → lA Utilizaremos Para comparar Porque P > 1 $\frac{3}{2}$ criterio (P)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}(x+7)}}{\frac{1}{\sqrt{x^3}}}$$ → Metodo criterio Al limite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x\sqrt{x}}{\cancel{\sqrt{x}}\,(x+7)}$$

→ g>f

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x \to \infty}{x+7 \to \infty} = \frac{\infty}{\infty}$$ utilizamos Hopital

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{1+7} = \boxed{\frac{1}{8}}$$ lo cual converge. $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+7)}\,dx$

7

4. Calcule el valor de las siguientes series númericas. Justifique.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1))$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{9^n}$.

a) $-\lim$

$\frac{7}{9}$ $\frac{49}{81}$ $\frac{343}{729}$

$\left(\frac{7}{9}\right)^1$ $\left(\frac{7}{9}\right)^2$ $\left(\frac{7}{9}\right)^3$

$r = \dfrac{\frac{343}{729}}{\frac{49}{81}} = \dfrac{343 \cdot 81}{729 \cdot 49}$

$\dfrac{7^3 \cancel{9^2}}{9^3 \cdot 7^2}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^n$

converge $-1 < r < 1$

$r = \frac{7}{9}$

$\dfrac{\frac{7}{9}}{1-\frac{7}{9}} = \dfrac{\frac{7}{\cancel{9}}}{\frac{2}{\cancel{9}}} = \boxed{\frac{7}{2}}$ valor de la serie.

SMART + SUSTAINABLE

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

MAT-106 Cálculo Integral
Control 2

14 de Junio de 2022.
70 minutos

PREGUNTA	PUNTAJE MÁXIMO	PUNTOS OBTENIDOS
1	15	
2	15	
3	15	
4	8+7	
TOTAL	60	
NOTA		

Atención:

- Cada respuesta debe ser justificada con claridad.
- Durante el desarrollo de la prueba no se responde ningún tipo de pregunta.
- Está permitido el uso de calculadora simple.
- El o la estudiante que sea sorprendido o sorprendida usando o intentando utilizar procedimientos ilícitos durante el desarrollo de la prueba, será calificado con la nota mínima (1.0) en dicha prueba.

$\int \text{sen} = -\cos$

$\int \cos = \text{sen}$

1. Calcule la longitud de la curva dada por

$$x(t) = e^{-t}\cos(t),$$
$$y(t) = e^{-t}\sin(t), \qquad t \in [0, \pi/2].$$

$\int e^{-x} = -e^{-x}$

$$L = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$$

$x = e^{-t} \cos(t)$.

$y(t) = e^{-t} \text{sen}(t)$

$x' = e^{-t} \text{sen}(t)$

$y' = e^{-t} - \cos(t)$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(e^{-t} \cdot \text{sen}(t)\right)^2 + \left(e^{-t} - \cos(t)\right)^2}$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{e^{-2t} \text{sen}^2(t) + e^{-2t} - \cos^2(t)}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{e^{-2t} \underbrace{\left(\text{sen}^2(t) - \cos^2(t)\right)}_{?}}$$

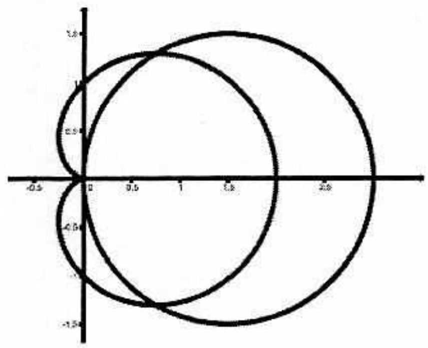
UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

CONTROL 2
NOMBRE: ZEBALLOS AYCA, CRISTÓBAL ANDRÉS
RUT: 21080974-0
CURSO: CÁLCULO INTEGRAL SEC.1 STGO S-SEM. 2022/1

2. Calcule el área de la región exterior a la cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ e interior a la circunferencia de ecuación $r = 3\cos(\theta)$.

c	0	30	45	60	90
sen	0	1	2	3	4
cos θ	4	3	2	1	0

2



$3\cos(\theta) = 1 + \cos(\theta)$

$2\cos(\theta) = 1$

$\cos(\theta) = \frac{1}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ $\quad \int_0^{\frac{\pi}{3}}$

$\int \cos = \text{sen}$

$$A = \frac{1}{2}\Big(f(x) - g(x) \Big)$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}\Big(3\cos(\theta) - \big(1 + \cos(\theta)\big) \Big)$$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \big(2\cos(\theta) - 1\big) = \frac{1}{2} \cdot \Big| 2\,\text{sen}(\theta) - 1 \Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{1}{4}\Big(\big(2\,\text{sen}(0) - 1\big) - \big(2\,\text{sen}(\tfrac{\pi}{3}) - 1\big) \Big)$$

$$\frac{1}{2}\left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

3. Analice la convergencia de la integral,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}.$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}(x+7)}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+7)} \Big/ \frac{1}{\sqrt{x}}$$

lim

Converge

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x+7)} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}(x+7)} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$\therefore$ por criterio de que $\frac{1}{\sqrt{x}}$ converge al ser mayor que $\frac{1}{\sqrt{x}(x+7)}$ también converge

4. Calcule el valor de las siguientes series númericas. Justifique.

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1))$.

   b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{9^n}$.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\text{arctan}(n) - \text{arctan}(n-1))$

$a_n \quad - \quad a_{n-1}$

$\text{arctan}(n-1) \quad , \lim_{n \to \infty} \text{arctan}(n)$

X

B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{9^n} = \left(\frac{7}{9}\right)^n \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{9^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{7}{9}\right)}_{a} \cdot \underbrace{\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1}}_{R}$$

$R \geq 1$

$$\frac{\frac{7}{9}}{1 - \frac{7}{9}} = \frac{\frac{7}{9}}{\frac{2}{9}} = \boxed{\frac{7}{2}}$$ diverge

$\frac{9-7}{9}$

$\frac{7}{\cancel{1}} \cdot \frac{2}{\cancel{1}} =$

SMART + SUSTAINABLE

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

MAT-106 Cálculo Integral
Control 2

14 de Junio de 2022.
70 minutos

PREGUNTA	PUNTAJE MÁXIMO	PUNTOS OBTENIDOS
1	15	
2	15	
3	15	
4	8+7	
TOTAL	60	
NOTA		

Atención:

- Cada respuesta debe ser justificada con claridad.
- Durante el desarrollo de la prueba no se responde ningún tipo de pregunta.
- Está permitido el uso de calculadora simple.
- El o la estudiante que sea sorprendido o sorprendida usando o intentando utilizar procedimientos ilícitos durante el desarrollo de la prueba, será calificado con la nota mínima (1.0) en ˉ cha prueba.

$x' \cdot y + x \cdot y'$ $\quad (e^{-t})' \to e^{-t}$

sen
-cos $\quad$ cos
-sen

1. Calcule la longitud de la curva dada por

$$x(t) = e^{-t}\cos(t),$$
$$y(t) = e^{-t}\sin(t), \qquad t \in [0, \pi/2].$$

$x(t) = e^{-t} \cdot \cos(t)$

$x(t)' = e^{-t} \cdot \cos(t) + e^{-t} \cdot -\text{sen}\, t$

$(x(t)')^2 = (e^{-t})^2 \cdot \cos^2(t) + (e^{-t})^2\, \text{sen}^2\, t$

$L = \int_a^b \sqrt{(f(x)')^2 + (g(x)')^2}\, d$

$(e^{-t}\cos(t) + e^{-t} \cdot -\text{sen}\, t)^2$

$y(t) = e^{-t}\,\text{sen}(t)$

$y(t)' = e^{-t} \cdot \text{sen}(t) + e^{-t} \cdot \cos t$

$(y(t)')^2 = (e^{-t})^2 \cdot \text{sen}^2(t) + (e^{-t})^2 \cdot \cos^2 t$

$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{((e^{-t})^2 \cdot \cos^2(t) + (e^{-t})^2\, \text{sen}^2\, t) + (e^{-t})^2 \cdot \text{sen}^2(t) + (e^{-t})^2 \cdot \cos^2}$

$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{e^{-t\cdot 2} \cdot \cos^2(t) + e^{-t2} \cdot \text{sen}^2(t) + e^{-2t} \cdot \text{sen}^2(t) + e^{-2t} \cdot \cos^2(t)}$

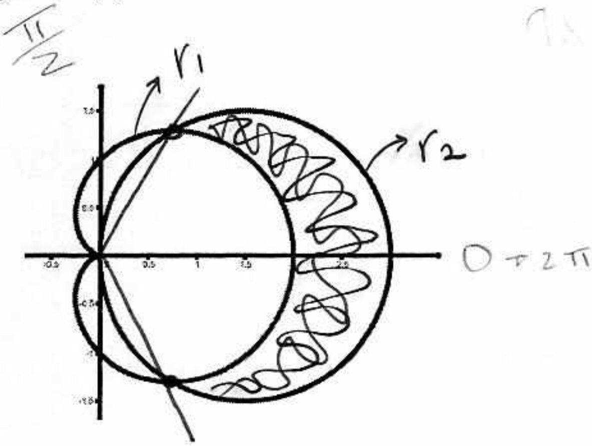
$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{e^{-2t} \cdot \cos^2(t) + e^{-2t}\cos^2(t) + e^{-2t}\,\text{sen}^2 t + e^{-2t} \cdot \text{sen}^2(t)}\, dt$

polar

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\theta$$

$$A = \frac{1}{2} \int_{a}^{\beta} f(x)^2 - g^2$$

2. Calcule el área de la región exterior a la cardioide de ecuación $r_1 = 1 + \cos(\theta)$ e interior a la circunferencia de ecuación $r_2 = 3\cos(\theta)$.



$$1 + \cos(\theta) = 3\cos(\theta)$$

$$1 + \cos(\theta) - 3\cos(\theta) = 0$$

$$1 - 2\cos(\theta) = 0$$

$$-2\cos\theta = -1$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\theta_1 = \frac{1}{3}\pi}$$

$$\boxed{\theta_2 = -\frac{1}{3}\pi}$$

$$(r_1)^2 = 1 + \cos^2\theta$$

$$(r_2)^2 = 9\cos^2\theta$$

$$A = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} r_2^2 - r_1^2 \, d\theta$$

$$\frac{1 + \cos\theta}{2}$$

π

$$A = \int_0^{\pi/3} 9\cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta)\, d\theta \rightarrow \int_0^{\pi/3} -1 + 8\cos^2\theta \, d\theta$$

$$A = -\int 8\cos^2\theta \, d\theta$$

$$-2\int 8\cdot\cos\theta \, d\theta \qquad \frac{1+\cos\theta}{2}$$

$$-2\cdot 8\,\mathrm{sen}\,\theta \Big|_0^{\pi/3}$$

$$-16\left(\mathrm{sen}\,\pi/3 - \mathrm{sen}(0)\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{}$$

Tipo I $\begin{cases} p \leq 1 & \text{diverge} \\ p > 1 & \text{converge} \end{cases}$

II $\begin{cases} p \geq 1 & \text{diverge} \\ p < 1 & \text{converge} \end{cases}$

3. Analice la convergencia de la integral,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}.$$

$L \neq 0$ actuan igual

$L = 0$ $g(x) \to c \therefore f(x) \to c$

$L = \infty$ $f(x) \to d \therefore g(x) \to d$

Discontinuidad en $x = -7$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}(x+7)}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{3/2}+7x^{1/2}}$$

$$\int_0^1 \frac{\frac{dx}{x^{3/2}+7x^{1/2}}}{\frac{1}{x^{3/2}}} = \frac{dx}{x^{3/2}+7x^{1/2}} \cdot \frac{x^{3/2}}{1}$$

$$= \frac{dx \cdot x^{3/2}}{}$$

4. Calcule el valor de las siguientes series numéricas. Justifique.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1))$.

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{9^n}$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{9^n}$ geométrica $\dfrac{a}{1-r}$

$\dfrac{7^1}{9^1} + \dfrac{49}{81} + \dfrac{343}{729} + \dfrac{2401}{6561} + \dots$

$\dfrac{\frac{343}{729}}{\frac{49}{81}}$ $r = \dfrac{7}{9}$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} (\arctan(n) - \arctan(n-1)) = \frac{a}{\arctan(n)} + \frac{B}{\arctan(n-1)}$$

$$\frac{1}{\quad} =$$

SMART + SUSTAINABLE

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

MAT-106 Cálculo Integral
Control 2

14 de Junio de 2022.
70 minutos

PREGUNTA	PUNTAJE MÁXIMO	PUNTOS OBTENIDOS
1	15	
2	15	
3	15	
4	8+7	
TOTAL	60	
NOTA		

Atención:

- Cada respuesta debe ser justificada con claridad.
- Durante el desarrollo de la prueba no se responde ningún tipo de pregunta.
- Está permitido el uso de calculadora simple.
- El o la estudiante que sea sorprendido o sorprendida usando o intentando utilizar procedimientos ilícitos durante el desarrollo de la prueba, será calificado con la nota mínima (1.0) en cha prueba.

CONTROL 2
NOMBRE: AGUERO SOLER, PAULA ANTONIA
RUT: 21137295-8
CURSO: CÁLCULO INTEGRAL SEC.1 STGO S-SEM. 2022/1
PÁGINA: 2 DE 5

$L = \int_{\alpha}^{\beta} [f'(x)]^2 + [g(x)]^2$

integral   derivado

sen
$-\cos$ $\cos$
$-$sen

1. Calcule la longitud de la curva dada por

derivar cada función

$$x(t) = e^{-t}\cos(t),$$
$$y(t) = e^{-t}\sin(t), \qquad t \in [0, \pi/2].$$

$X'(T) = e^{-T} \cdot -\text{sen}(T)$
$Y'(T) = e^{-T} \cdot \cos(T)$

reemplazar en la formula

$L = \int_{\alpha}^{\beta} [f'(T)]^2 + [g(T)]^2$
$[X(T)]^2 + [Y(T)]^2$

$L = \int_0^{\pi/2} [e^{-T'} \cdot \text{sen}(T)]^2 + [e^{-T'} \cdot \cos(T)]^2$

$L = \int_0^{\pi/2} e^{-T^{2'}} \cdot \text{sen}^2(T) + e^{-T^{2'}} \cdot \cos^2(T)$

$L = \int_0^{\pi/2} e^{-T^{2'}} \underbrace{(\text{sen}^2(T) + \cos^2(T))}_{1}$

$L = \int_0^{\pi/2} e^{-T^2} \cdot \cancel{1}$

$L = e^{-T^2} \Big/_0^{\pi/2}$

$L = e^{-\pi^2/4}$ //

$\cos^2(x) + \text{sen}^2(x) = 1$

$\therefore$ la longuitud de curva es

$\boxed{e^{-\pi^2/4}}$ //

$$\int \frac{1}{2} r^2 \, d\theta \rightarrow \frac{1}{2}\int \sqrt{r_1^2 - r_2^2}\, d\theta$$

2. Calcule el área de la región exterior a la cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ e interior a la circunferencia de ecuación $r = 3\cos(\theta)$.

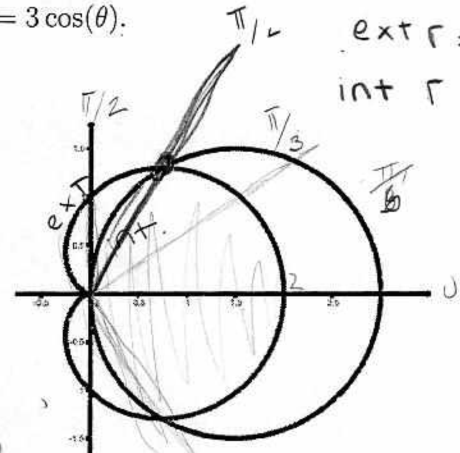
ext $r = 1 + \cos(\theta)$

int $r = 3\cos(\theta)$

$r = 1 + \cos(\theta)$

$0 = 1 + \cos(\theta)$

$-1 = \cos(\theta)$ 2π



$\sqrt{r_1^2 \quad r_2^2}\, d\theta$

área $= \int g(x) \cdot f(x)$

$1 + \cos(\theta) = 3\cos(\theta)$

$1 = 2\cos(\theta)$

$60° \rightarrow \frac{1}{2} = \cos(\theta)$ $\rightarrow 2\pi/3 \quad \theta \quad 3\pi/2$

Exterior

$r = 1 + \cos(\theta)$
$r' = -\operatorname{sen}(\theta)$

$A = \int \frac{1}{2} r^2$

$\frac{1}{2}\int (1 + \cos(\theta))^2$

$\frac{1}{2}\int (1 + 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta))$

$\int 1 + \int 2\cos(\theta) + \int \cos^2(\theta)$

$\frac{1}{2}(1 + \cancel{2}\cdot \operatorname{sen}(\theta) + \cancel{2}\operatorname{sen}(2\theta))$

área exterior $= \frac{1}{2} + \operatorname{sen}(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta)\, u^2$

Interior

$r = 3\cos\theta$
$r' = -3\operatorname{sen}(\theta)$

$A = \int \frac{1}{2} (3\operatorname{sen}(\theta))^2$

$\frac{1}{2}\int 9\operatorname{sen}^2(\theta)$

$\frac{9}{2}\int \operatorname{sen}^2(\theta)$

$-\frac{9\cos^2(\theta)}{2}$

área interior:

$\frac{9}{2}\cos^2(\theta)\, u^2$

$ext = 1 + \cos(\theta)$ entre $[0, 2\pi/3]$

(se que es 60° en coseno pero no se si está bien $2\pi/3$, la transformacion no me acuerdo)

$int = 3\cos(\theta)$

$$A = \frac{1}{2}\int_a^b [f(x)]^2 - [g(x)]^2$$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi/3} [1+\cos]^2 - [3\cos(\theta)]^2$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi/3} [1 + 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta) - 9\cos^2(\theta)]$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi/3} 1 + 2\cos(\theta) - 8\cos^2(\theta) \rightarrow \int \frac{1}{2} + \cos\theta - 4\cos^2(\theta)$$

$$\frac{1}{2}\left(\int 1 + \int 2\cos(\theta) - \int 8\cos^2\theta\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(1 + 2\int \cos(\theta) - 8\int \cos^2(\theta)\right)$$

$$\frac{1}{2}(1 + 2\,\mathrm{sen}(\theta) - 8\,\mathrm{sen}^2(\theta)$$

$$\frac{1}{2} + \mathrm{sen}(\theta) - 4\,\mathrm{sen}^2(\theta)$$

∴ El area sería $\frac{1}{2} + \mathrm{sen}(\theta) - 4\,\mathrm{sen}^2(\theta)$ //

3. Analice la convergencia de la integral,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}$$

- $[1, \infty^{+}[$
- $x \neq 7$, ya que si se mutiplica por 0 la $f(x) = \frac{1}{0}$ = indefinido

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+7)} \cdot dx$$

* Procedimiento Obtener $f(x)$ en la integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+7)} dx \rightarrow$$

$$\rightarrow = \lim_{T \to \infty^{+}} \int_1^T \frac{1}{\sqrt{x}(x+7)} dx$$

$$= \lim_{T \to \infty} \int_1^T \frac{\frac{1}{\sqrt{x}(x+7)}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{\cancel{\sqrt{x}}(x+7)} \cdot \sqrt{x} = \frac{1}{(x+7)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \lim_{T \to \infty} \int \frac{1}{\cancel{x+7}}^{\infty} \rightarrow = \infty$$

∴ converge, ya que su limite tiende a ∞ //

telescopica = siempre converge

4. Calcule el valor de las siguientes series númericas. Justifique.

$1 - r^2$

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1))$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{9^n}$.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\arctan(n) - \arctan(n-1))$

$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan(n) - \arctan(n-1)$

$\lim_{n \to \infty} \arctan(n) - \arctan(n-1) = \infty$ ×

$\int_1^{\infty} \arctan(n) - \arctan(n-1)$

$\int_1^{\infty} \arctan(n) - \int_1^{\infty} \arctan(n-1)$

$\tan(n) \Big|_1^{\infty} - \tan(n-1) \Big|_1^{\infty}$

evaluar y ver si es convergente o divergente

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{9^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^n$

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^n = \int_1^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^n$

$\hookrightarrow r$

$\therefore$ converge porque el $r<1$, y la

tendría que ser $n>1$.

SMART + SUSTAINABLE

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

MAT-106 Cálculo Integral
Control 2

14 de Junio de 2022.
70 minutos

PREGUNTA	PUNTAJE MÁXIMO	PUNTOS OBTENIDOS
1	15	
2	15	
3	15	
4	8+7	
TOTAL	60	
NOTA		

Atención:

- Cada respuesta debe ser justificada con claridad.
- Durante el desarrollo de la prueba no se responde ningún tipo de pregunta.
- Está permitido el uso de calculadora simple.
- El o la estudiante que sea sorprendido o sorprendida usando o intentando utilizar procedimientos ilícitos durante el desarrollo de la prueba, será calificado con la nota mínima (1.0) en cha prueba.

1. Calcule la longitud de la curva dada por

$$x(t) = e^{-t}\cos(t),$$
$$y(t) = e^{-t}\sin(t), \qquad t \in [0, \pi/2].$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$\frac{dx}{dt} = e^{-t}\cos(t) \qquad u'\cdot v + u \cdot v' = e^{-t\cdot}\cdot -1 \cdot \cos(t) + e^{-t} \cdot -\operatorname{Sen}(1)$$

$$\frac{dy}{dt} = e^{-t}\sin(t) \qquad -e^{-t\cdot 1}\cdot \cos t + e^{-t} - \operatorname{Sen}(1)$$

$$\frac{dx}{dt} \; -e^{-t\cdot 1}(\cos t + \operatorname{Sen}(1))$$

$$\frac{dy}{dt} = -e^{-t}\cdot \operatorname{Sen}(t) + e^{-t}\cdot \cos(1)$$

$$-e^{-t}(\operatorname{Sen} t - \cos(1)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-e^{-t}(\cos t + \operatorname{Sen}(t))^2 + (-e^{-t}(\operatorname{sen}(t) - \cos(1))^2}\; dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{-e^{-2t}(\cos^2 t + 2\cos(t)\operatorname{sen}(t) + \operatorname{Sen}^2 t) + (\operatorname{Sen}^2(t) - 2\operatorname{sen}(t)\cos(t) + \cos^2(t)) - e^{-2t}}\; dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{-e^{-2t}(1 + 2\cos t \operatorname{sen}(t)) + (-e^{-2t}(1 - 2\operatorname{sen} t \cos(1))}\; dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{-e^{-2t}(1 + 2\cos t \operatorname{sen}(1)) + 1 - 2\operatorname{sen} t \cos(1)}\; dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{-e^{-2t}\cdot 2}\; dt$$

$$\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{-e^{2t}} \, dt$$

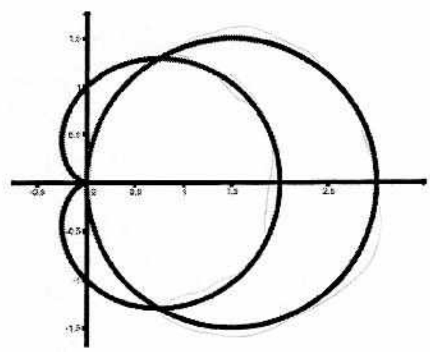
$$(-e^{2t})^{\frac{1}{2}} = -e^{t} \qquad -1 \cdot -e^{t}$$

$$\sqrt{2} \cdot -1 \cdot -e^{t}$$

$$-\sqrt{2} \cdot -e^{\frac{\pi}{2}} - \cancel{\sqrt{2}} \cdot -e^{0}$$

$$-\sqrt{2} \qquad - \sqrt{2}^{1} = -\sqrt{2}\left(-e^{\frac{\pi}{2}} + 1\right)$$

2. Calcule el área de la región exterior a la cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ e interior a la circunferencia de ecuación $r = 3\cos(\theta)$.



2π

Cardiode

2π por el cardiode y circunferencia

$$A_1 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos\theta)^2 \, dr$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta)) \, dr$$

$$\frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} r + 2\int_0^{2\pi} \cos(\theta) + \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)\right) dr$$

A_2

$$\frac{1}{2}\left((2\pi - 0) + 2\cdot\left(-\operatorname{sen}(2\pi) + \cancel{\operatorname{sen}(0)}\right) + \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)\right) dr$$

$$\frac{1}{2}\left(2\pi + 2\cdot -\operatorname{sen}(2\pi)\right) + \left(\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)\, dr\right.$$

$$\left(\pi - \operatorname{sen}(2\pi)\right) + \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) \, dr$$

$$\frac{3\pi}{4} + 2\pi\left(\int_0^{2\pi} -\operatorname{sen}^2(\theta)\right) dr$$

$$\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) \, dr \to \int_0^{2\pi} 1 - \operatorname{sen}^2(\theta) \, dr$$

$$\frac{11\pi}{4} + \int$$

$A_2 = r = 3\cos(\theta)$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (3\cos(\theta))^2 \, dr$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (9 \cdot \cos^2(\theta) \, dr$$

$$\frac{9}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) \, dr$$

$$\frac{9}{2}\int_0^{2\pi} 1 - \operatorname{sen}^2(\theta) \, dr$$

$$\frac{9}{2}\left(\cdot 2\pi - \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(\theta) \, dr\right.$$

$$9\pi - \frac{9}{2}\left(\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(\theta) dr \right)$$

3. Analice la convergencia de la integral,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}.$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)} = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}$$

$$\lim_{b \to \infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)} \Big]_1^b \qquad \lim_{b \to \infty} \frac{1}{2} \sqrt{x}(x+7)$$

$$\lim_{b \to \infty} \ln \left| x + \sqrt{7x} \right]_1^b \qquad \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\infty} \,($$

$$\lim_{b \to \infty} \ln |\infty + \sqrt{\infty}| - \ln |1 + \sqrt{7}| \to$$ divergе porque el resultado no es un numero finito que se puedo contar o determinado

∞

4. Calcule el valor de las siguientes series númericas. Justifique.

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1))$.

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{9^n}$.

Geometrica

$ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{9^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7^n}{9^n}\right) \cdot \left(\frac{9}{7} \cdot \frac{7}{9}\right)$

$130 - 63 = 67$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{9} + \frac{9}{7}\right)^{n-1} \cdot \frac{7}{9} = \frac{\frac{7}{9}}{1 - \frac{130}{63}} \quad \frac{63}{63}$

$\frac{49+81}{63} =$

$\frac{7}{9} \cdot \frac{63}{67} = \frac{49}{67}$

Por ende diverge

Telescopica

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\arctan(n) - \arctan(n-1))$

$\sum_{n=1}^{\infty} 2\arctan(n) - \arctan(n^2)$

$r < 1$ Por ende Converge

SMART + SUSTAINABLE

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

MAT-106 Cálculo Integral
Control 2

14 de Junio de 2022.
70 minutos

PREGUNTA	PUNTAJE MÁXIMO	PUNTOS OBTENIDOS
1	15	
2	15	
3	15	
4	8+7	
TOTAL	60	
NOTA		

Atención:

- Cada respuesta debe ser justificada con claridad.
- Durante el desarrollo de la prueba no se responde ningún tipo de pregunta.
- Está permitido el uso de calculadora simple.
- El o la estudiante que sea sorprendido o sorprendida usando o intentando utilizar procedimientos ilícitos durante el desarrollo de la prueba, será calificado con la nota mínima (1.0) en cha prueba.

1. Calcule la longitud de la curva dada por

$$x(t) = e^{-t}\cos(t),$$
$$y(t) = e^{-t}\sin(t), \qquad t \in [0, \pi/2].$$

$(x(t))' = -e^{-t} \cdot \cos(t) + e^{-t} \cdot -\operatorname{sen}(t)$

$(y(t))' = -e^{-t} \cdot \operatorname{sen}(t) + e^{-t} \cdot \cos(t)$

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(x(t)')^2 + (y(t)')^2}\, dt$$

$(x(t)')^2 = (-e^{-t} \cdot \cos(t))^2 + (e^{-t} \cdot -\operatorname{sen}(t))^2 =$

$(+e^{-2t}\cos^2(t)) + 2(-e^{-t} \cdot \cos(t)) \cdot (e^{-t} \cdot -\operatorname{sen}(t)) + (e^{-2t} \cdot (+\operatorname{sen}^2(t))$

$e^{-2t}\cos^2(t) + 2e^{-2t}\cos(t)\cdot\operatorname{sen}(t) + e^{-2t}\operatorname{sen}^2(t)$

$(y(t)')^2 = (-e^{-t} \cdot \operatorname{sen}(t) + e^{-t} \cdot \cos(t))^2 =$

$(e^{-2t}\operatorname{sen}^2(t)) + -2e^{-2t}\operatorname{sen}(t)\cos(t)) + (e^{-2t}\cos^2(t))$

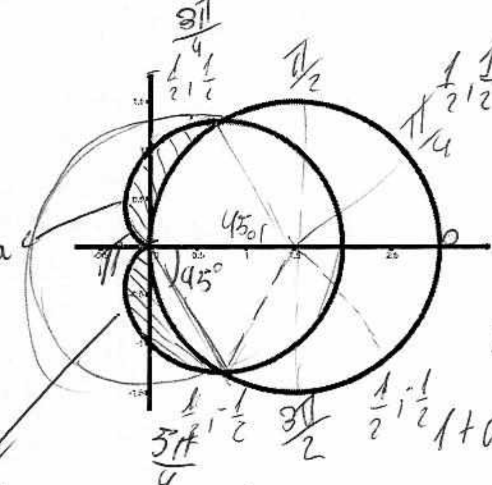
$\sqrt{(x(t)')^2 + (y(t)')^2} = 2e^{-2t}\cos^2(t) + 2e^{-2t}\operatorname{sen}^2(t)$

$2e^{-2t}(\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t))$ $\to 1$

$$\int_0^{\pi/2} 2e^{-2t} = -4e^{-2t}\Big|_0^{\pi/2} \to [-4e^{-\pi} - 4] = [-\tfrac{4}{e^{\pi}} - 4]$$

2. Calcule el área de la región exterior a la cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ e interior a la circunferencia de ecuación $r = 3\cos(\theta)$.

$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (f(\theta))^2 \, d\theta$



simetría

$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

$r_1 = r_2$

$1 + \cos(\theta) = 3\cos(\theta)$

$2\cos(\theta) - 1 = 0$

$2\cos(\theta) = 1$

$\cos(\theta) = \frac{1}{2}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

$9 - \frac{7\pi}{4} - 4 + \pi =$

$5 - \frac{3\pi}{4}$

$2 \cdot \frac{1}{2} \int_{\pi} \left((3\cos(\theta))^2 - (1+\cos(\theta))^2\right) d\theta$

$2 \cdot \frac{1}{2} \int_{\pi}^{\frac{7\pi}{4}} \left(9\cos^2(\theta) - (1 + 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta)\right) d\theta$

$2 \cdot \frac{1}{2} \int_{\pi}^{\frac{7\pi}{4}} (8\cos^2(\theta) - 2\cos(\theta) - 1) \, d\theta$

$\left(8 \cdot \operatorname{sen}^2(\theta) - 2\operatorname{sen}(\theta) - \theta\right)\Big|_{\pi}^{\frac{7\pi}{4}}$

$\left(8 \cdot \left(\frac{1 - \operatorname{sen}(\theta 2)}{2}\right) - 2\operatorname{sen}(\theta) - \theta\right)$

$\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

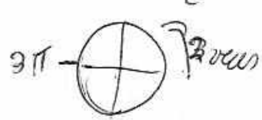
$-\frac{1}{2}$

$\left(8 \cdot \left(\frac{2}{2}\right) - 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right) - \frac{7\pi}{4}\right) -$

$\frac{7\pi}{2} = 3{,}5\pi$

$3\pi + \frac{\pi}{2}$

$\left(8 \cdot \left(\frac{1 - \operatorname{sen}(2\pi)}{2}\right) - 2\operatorname{sen}(\pi) - \pi\right)$



$\left(8 + 1 - \frac{7\pi}{4}\right) - \left(8 \cdot \frac{1}{2} - 0 - \pi\right) = A = 5 - \frac{3\pi}{4}$

3. Analice la convergencia de la integral,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}.$$

$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+7)} dx$ comparar con $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$ divergente por $P = \frac{1}{2} \leq 1$

$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\cancel{\sqrt{x}}(x+7)} \cdot \frac{\sqrt{x}}{1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\underbrace{(x+7)}_{0}} = 0$, si el limite es 0, entonces si

4. Calcule el valor de las siguientes series númericas. Justifique.

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1))$.

   b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{9^n}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^n$ ~~criterio de la raíz~~ $\sqrt[n]{\frac{7^n}{9^n}}$

$\cancel{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{7^n}{9^n}} = \frac{7}{9}}$

$\sum_{n=1}\left(\frac{7}{9}\right)^n$ geométrica

con $|r|<1$ convergente

serie geométrica $= \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{7}{9}} = \frac{1}{\frac{2}{9}} = \frac{9}{2}$

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1))$ telescópica

$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$

SMART + SUSTAINABLE

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

MAT-106 Cálculo Integral
Control 2

14 de Junio de 2022.
70 minutos

PREGUNTA	PUNTAJE MÁXIMO	PUNTOS OBTENIDOS
1	15	
2	15	
3	15	
4	8+7	
TOTAL	60	
NOTA		

Atención:

- Cada respuesta debe ser justificada con claridad.
- Durante el desarrollo de la prueba no se responde ningún tipo de pregunta.
- Está permitido el uso de calculadora simple.
- El o la estudiante que sea sorprendido o sorprendida usando o intentando utilizar procedimientos ilícitos durante el desarrollo de la prueba, será calificado con la nota mínima (1.0) en cha prueba.

1. Calcule la longitud de la curva dada por

$$x(t) = e^{-t}\cos(t),$$
$$y(t) = e^{-t}\sin(t), \qquad t \in [0, \pi/2].$$

deri
sen = cos
cos = -sen

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{((x)')^2 + (y')^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{((e^{-t}\cos)')^2 + ((e^{-t}\sin)')^2}$$

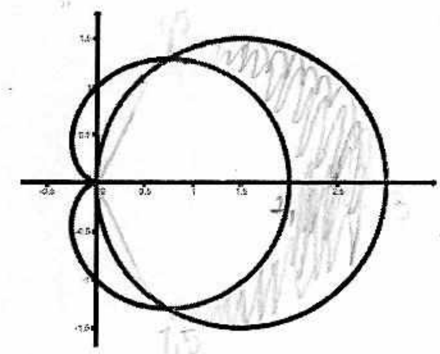
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-te^{-t}\cos + -\operatorname{sen} e^{-t})^2 + (-te^{-t}\operatorname{sen} + \cos e^{-t})^2}$$

$$-t^2e^{-2t}\cos^2 + 2 - te^{-t}\cos\operatorname{sen} e^{-t} - \operatorname{sen}^2 e^{-2t} + -te^{-2}\operatorname{sen}^2 + 2 - te^{-t}\operatorname{sen}\cos e^{-t} + \cos^2 e^{-2t}$$

CONTROL 2
NOMBRE: GAJARDO BAZÁN, DIEGO ALONSO
RUT: 21162065-K
CURSO: CÁLCULO INTEGRAL SEC.1 STGO S-SEM. 2022/1

2. Calcule el área de la región exterior a la cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ e interior a la circunferencia de ecuación $r = 3\cos(\theta)$.

	0	30	45	60	90
sen θ		1	2	3	4
cos		3	2	1	0



$A = \frac{1}{2} r^2$

$1 + \cos(\theta) = 3\cos(\theta)$

$1 = 2\cos(\theta)$

$\cos(\theta) = \frac{1}{2}$

$60^0 = \frac{\pi}{3}$

$300^0 = \frac{2\pi}{6}$

$\int_0^{\frac{\pi}{3}}$

180

$(3\cos - 1 - \cos)$

$(2\cos - 1)^2$

$r^2 = 4\cos^2 - 4\cos - 1$

$2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left((2\cos - 1)^2 + (2\cos - 1) \right)^2$

$\cos^2 + \cos^2 - 1$

$\int (9\cos^2 - 1 + 2\cos + \cos)$

$(1 \cos^2 - \cos - 1)$

3. Analice la convergencia de la integral,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}.$$

-7 se indefine
tipo II

$uv' = uv - \int v\,du$

$$\lim_{b \to 7^-} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}(x+7)} + \lim_{b \to 7^+} \int_b^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+7)}$$

$$\lim_{b \to 7^-} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}(x+7)}$$

$u = (x+7)^{-1}$
$du = \ln(x+7)$
$v' = x^{-1/2}$
$dv = 2x^{\frac{1}{2}}\,dx$

I
L
A
T
E

4. Calcule el valor de las siguientes series númericas. Justifique.

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1))$.

   b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{9^n}$.

telescopica

b) $\sum_{n=1}^{\infty} 1\left(\frac{7}{9}\right)^n$ $x(an)^n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{7}{9}} \quad \frac{1}{\frac{-2}{9}} = -\frac{9}{2}$$

SMART + SUSTAINABLE

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

MAT-106 Cálculo Integral
Control 2

14 de Junio de 2022.
70 minutos

PREGUNTA	PUNTAJE MÁXIMO	PUNTOS OBTENIDOS
1	15	
2	15	
3	15	
4	8+7	
TOTAL	60	
NOTA		

Atención:

- Cada respuesta debe ser justificada con claridad.
- Durante el desarrollo de la prueba no se responde ningún tipo de pregunta.
- Está permitido el uso de calculadora simple.
- El o la estudiante que sea sorprendido o sorprendida usando o intentando utilizar procedimientos ilícitos durante el desarrollo de la prueba, será calificado con la nota mínima (1.0) en cha prueba.

CONTROL 2
NOMBRE: WHIPPLE GONZÁLEZ, CRISTÓBAL ANTONIO
RUT: 21161532-K
CURSO: CÁLCULO INTEGRAL SEC.1 STGO S-SEM. 2022/1

Polares

$L = \int_a^b \sqrt{r^2 + r'^2}$

$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$

1. Calcule la longitud de la curva dada por

$$x(t) = e^{-t}\cos(t),$$
$$y(t) = e^{-t}\sin(t), \qquad t \in [0, \pi/2].$$

$\sin \rightarrow \cos$, $\uparrow$ $\downarrow$, $-\cos \leftarrow -\sin$

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dx$$

$x(t) = e^{-t}\cos(t)$ | $y(t) = e^{-t}\sin(t)$

$x'(t) = (e^{-t})' \cdot \cos(t) + e^{-t} \cdot (\cos(t))'$ | $y'(t) = (e^{-t})' \cdot \sin(t) + e^{-t} \cdot (\sin t)'$

$x'(t) = -\frac{1}{e^{t}} \cdot \cos(t) + \frac{1}{e^{t}} \cdot -\sin(t)$ | $y'(t) = -\frac{1}{e^{t}} \cdot \sin(t) + \frac{1}{e^{-t}} \cos(t)$

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{-\cos(t)}{e^t} + \frac{-\sin(t)}{e^t}\right)^2 + \left(\frac{-\sin(t)}{e^t} + \frac{\cos(t)}{e^t}\right)^2}\, dx$$

$(x'(t))^2 = \left(\frac{-\cos(t) + -\sin(t)}{e^t}\right)^2$ | $(y'(t))^2 = \left(\frac{-\sin(t) + \cos(t)}{e^t}\right)^2$

$(x'(t))^2 = \frac{\cos^2(t) + 2\cos(t)\sin(t) + \sin^2(t)}{e^{t^2}}$ | $(y'(t))^2 = \frac{\sin^2(t) - 2\sin(t)\cos(t) + \cos^2(t)}{e^{t^2}}$

$(x'(t))^2 = \frac{1 + 2\cos(t)\sin(t)}{e^{t^2}}$ | $(y'(t))^2 = \frac{1 - 2\sin(t)\cos(t)}{e^{t^2}}$

sabemos que $\sin(t)\cos(t) = \cos(t)\sin(t)$

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1 + 2\cancel{\cos(t)\sin(t)}}{e^{t^2}} + \frac{1 - 2\cancel{\sin(t)\cos(t)}}{e^{t^2}}}\, dx$$

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{2}{e^{t^2}}}\, dx$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{e^t} \cdot \sqrt{2}\, dx$$

$$L = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{e^t}\, dx$$

$$L = \sqrt{2} \left[-\frac{1}{e^t} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

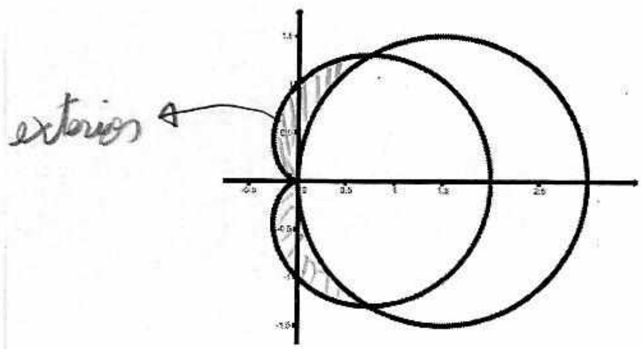
$$L = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} - -\frac{1}{\cancel{e^0}_1} \right)$$

$$L = \sqrt{2} \left(\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} + 1 \right)$$

$$L = \frac{\sqrt{2}}{e^{\pi/2}} + \sqrt{2}$$

$A = \int_a^b \frac{1}{2} r^2 \, dr$

2. Calcule el área de la región exterior a la cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ e interior a la circunferencia de ecuación $r = 3\cos(\theta)$.



Primero sacaremos el area de las 2 figuras

$$A_{car} = \int_0^{2\pi} (1+\cos(\theta))^2 \, dx$$

$$\int_0^{2\pi} 1 + 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta) \, dx$$

$$\int_0^{2\pi} 1 \, dx + 2\int_0^{2\pi} \cos(\theta) \, dx + \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) \, dx$$

$$\frac{1}{2} \left(x \Big|_0^{2\pi} + 2[\sin\theta] \Big|_0^{2\pi} + [1 - 2\sin^2(\theta)] \Big|_0^{2\pi} \right)$$

$$\frac{1}{2} (2\pi + 0 + 1 - 1$$

$$\frac{1}{2} (2\pi + 0 + 0) = \pi$$

$$\text{area circulo} = \frac{1}{2}\int_a^b r^2\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3\cos(\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{3}{2}\left[1-2\sin^2(x)\right]\Big|_0^{2\pi}$$

$$\frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}\, u$$

Para sacar el area interna igualamos r y ~~usamos~~ la integral

$$3\cos(\theta) = 1+\cos(\theta)$$

$$2\cos(\theta) = 1$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2\, d\theta$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (2\cos\theta - 1)^2\, d\theta$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 4\cos^2(\theta) - 4\cos(\theta) + 1\, d\theta$$

$$+ x\Big|_0^{2\pi}$$

3. Analice la convergencia de la integral,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}.$$

(recuerda si $P \geq 1$ converge en el tipo I)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+7)}\, dx$$

tenemos un problema en el ∞ por lo que tenemos una integral impropia de tipo I

ocuparemos el criterio de comparacion al limite para resolverlo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}(x+7)}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}(x+7)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+7} = 0$$

Por comparacion al limite converge y por criterio P tambien ya que $\frac{1}{x^P} \geq 1$

$\therefore$ Esta integral si converge

4. Calcule el valor de las siguientes series númericas. Justifique.

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1))$.

   b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{9^n}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{9^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^n = \frac{\frac{7}{9}}{1-\frac{7}{9}} = \frac{\frac{7}{9}}{\frac{2}{9}} = \frac{7}{2}$

sabemos que converge ya que podemos considerar el criterio P de tipo 1 que si $P \geq 1$ este converge y sabemos aca que $n \in [1, +\infty[$.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\arctan(n) - \arctan(n-1))$ (sabemos que su rango sería de $(0, 2\pi)$)

SMART + SUSTAINABLE

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

MAT-106 Cálculo Integral
Control 2

14 de Junio de 2022.
70 minutos

PREGUNTA	PUNTAJE MÁXIMO	PUNTOS OBTENIDOS
1	15	
2	15	
3	15	
4	8+7	
TOTAL	60	
NOTA		

Atención:

- Cada respuesta debe ser justificada con claridad.
- Durante el desarrollo de la prueba no se responde ningún tipo de pregunta.
- Está permitido el uso de calculadora simple.
- El o la estudiante que sea sorprendido o sorprendida usando o intentando utilizar procedimientos ilícitos durante el desarrollo de la prueba, será calificado con la nota mínima (1.0) en cha prueba.

$$L = \int_a^b \sqrt{[f(x)']^2 + [g'(x)]^2}$$

1. Calcule la longitud de la curva dada por

$$x(t) = e^{-t}\cos(t),$$
$$y(t) = e^{-t}\sin(t), \qquad t \in [0, \pi/2].$$

En primer lugar aplicar la formula de longitud de curva y luego desarrollar.

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{[f(x)']^2 + [g'(x)]^2}}$$

$$f(x)' = e^{-t}\overset{\text{cadena}}{\cos(t)} = -e^{-t}\cos(t) + e^{-t} - \operatorname{sen}(t)$$

$$g'(x) = e^{-t}\overset{\text{cadena}}{\operatorname{sen}(t)} = -e^{-t}\operatorname{sen}(t) + e^{-t}\cos(t)$$

$$[f(x)']^2 = [-e^{-t}\cdot\cos(t) - e^{-t}\operatorname{sen}(t)]\cdot[-e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\operatorname{sen}(t)] = [e^{-t}\cos(t)]^2 + 2\cdot[-e^{-t}\cos(t)\cdot - e^{-t}\operatorname{sen}(t)] + [-e^{-t}\operatorname{sen}(t)]$$

$$[g(x)']^2 = [-e^{-t}\operatorname{sen}(t) + e^{-t}\cos(t)]\cdot[-e^{-t}\operatorname{sen}(t) + e^{-t}\cos(t)] = [-e^{-t}\operatorname{sen}(t)]^2 + 2\cdot[-e^{-t}\operatorname{sen}(t)\cdot e^{-t}\cos(t)] + [e^{-t}\cos(t)]$$

$$\sqrt{[f(x)']^2 + [g'(x)]^2} = \sqrt{[-e^{-t}\cos(t)]^2 + 2[-e^{-t}\cos(t)\cdot -e^{-t}\operatorname{sen}(t)] + [-e^{-t}\operatorname{sen}(t)]^2 + [-e^{-t}\operatorname{sen}(t)]^2 + 2[-e^{-t}\operatorname{sen}(t)\cdot e^{-t}\cos(t)] + [e^{-t}\cos}$$

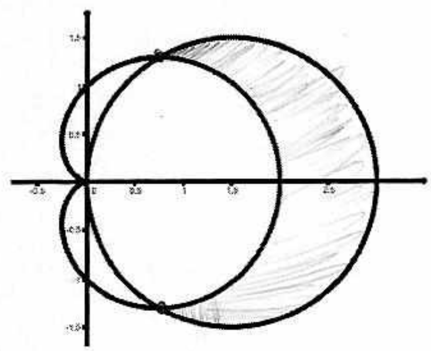
$$\int_a^b \sqrt{[f(x)']^2 + [g'(x)]^2} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{[-e^{-t}\cos(t)]^2 + 2[-e^{-t}\cos(t)\cdot -e^{-t}\operatorname{sen}(t)] + [-e^{-t}\operatorname{sen}(t)]^2 + [-e^{-t}\sin(t)]^2 + 2[-e^{-t}\sin(t)}$$

2. Calcule el área de la región exterior a la cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ e interior a la circunferencia de ecuación $r = 3\cos(\theta)$.

$\pi = 180$

$\frac{\pi}{2} = 90$

$\frac{\pi}{3} = 60$



$A = \frac{1}{2}\int_a^b \sqrt{r'^2 - r^{2\,2}}\, dx$

$r1 = 1 + \cos(\phi)$

$r_2 = 3\cos(\phi)$

1 Intersecciones para rango de la Integral

$\hookrightarrow\ r_1 = r_2 \Rightarrow 1 + \cos(\phi) = 3\cos(\phi) \xrightarrow{-3\cos(\phi)} 1 - 2\cos(\phi) = 0 \xrightarrow{+2\cos(\phi)} 1 = 2\cos(\phi) \xrightarrow{\div 2} \frac{1}{2} = \cos(\phi)$

$\underbrace{\cos(\phi) = \frac{1}{2}}$ cuando $\phi = \frac{\pi}{3}$ y $-\frac{\pi}{3}$ //

$\phi = \mathrm{Arc}\left(\frac{1}{2}\right)$

$\phi = 60$

2. Realitar la integral:

$A = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{([r^2]^2 - [r^1]^2}\, d\phi \Rightarrow \frac{1}{2}\int_a^b \sqrt{[3\cos(\phi)]^2 - [1+\cos(\phi)]^2}\, d\phi \Rightarrow \frac{1}{2}\int_a^b \sqrt{9\cos(x)^2 - 1 - 2\cos(\phi) - \cos(\phi)^2}\, d$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_a^b \sqrt{8\cos(x)^2 - 2\cos(\phi) - 1}\, d\phi \Rightarrow \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{8\cos(x)^2 - 2\cos(\phi) - 1}\, dx$

$r_1^2 = 1^2 + 2(\cos(\phi)) + \cos(\phi)^2$

$f(x) < g(x)$

3. Analice la convergencia de la integral,

$f(x)$ = no se indefine //

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}.$$

$f(x)$ = se evalua a ∞ //

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+7)}\,dx$$

↳ Se sabe que esta es una integral de tipo I.

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\cdot x}$$

$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+7)}\,dx$ se puede evaluar por comparación al Limite con $g(x)$.

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}\,dx}$$

$$\text{↳} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}(x+7)}}{\frac{1}{\sqrt{x}\cdot x}} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{\sqrt{x}}\cdot x}{\cancel{\sqrt{x}}(x+7)} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x}{(x+7)} \Big\backslash \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{7}{x}\to 0} = 1 //$$

↳ Según el criterio de comparación al Limite si $g(x)$ diverge o converge implica la convergencia de $f(x)$.

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\cdot x} = \frac{1}{\sqrt{x\cdot x^2}} = \frac{1}{\sqrt[2]{x^3}} = \frac{1}{x^{2/3}} \Bigg\} \; P = \frac{2}{3}$$

} Por criterio $P<1$, se puede decir que para una integral de tipo I diverge //

⇒ Entonces gracias al criterio P y comparación al Limite puedo decir que

$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}$ diverge //

4. Calcule el valor de las siguientes series númericas. Justifique.

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1))$. } Log.

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{9^n}$. } geo

Logaritmica:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\arctan(n) - \arctan(n-1))$ } logaritmica } $a_n = \arctan(n)$

$a_{n+1} = \arctan(n+1)$

↳ $a_1 - \lim_{n \to \infty} \arctan(n-1) \rightarrow \arctan(1) - \lim_{n \to \infty} \cancel{\arctan} (n-1)$ ∞

↳ La serie diverge por propiedad Logaritmica

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{9^n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 7 \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^n \Rightarrow R = \frac{7}{9} \Rightarrow R < 1 \rightarrow$ La sucesión converge

por criterio R de sucesiones geometricas.

Suma geometrica $= \frac{a}{1-r}$ } $\frac{7}{1-\frac{1}{9}}$ } $\frac{7}{\frac{8}{9}}$ } $\frac{7 \cdot 8}{9}$ } $\boxed{\frac{56}{9}}$

CONTROL 2
NOMBRE: CORTES GOMEZ, BENJAMIN IGNACIO
RUT: 21094970-4
CURSO: CÁLCULO INTEGRAL SEC.1 STGO S-SEM. 2022/1

SMART + SUSTAINABLE

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS
UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

MAT-106 Cálculo Integral
Control 2

14 de Junio de 2022.
70 minutos

PREGUNTA	PUNTAJE MÁXIMO	PUNTOS OBTENIDOS
1	15	
2	15	
3	15	
4	8+7	
TOTAL	60	
NOTA		

Atención:

- Cada respuesta debe ser justificada con claridad.
- Durante el desarrollo de la prueba no se responde ningún tipo de pregunta.
- Está permitido el uso de calculadora simple.
- El o la estudiante que sea sorprendido o sorprendida usando o intentando utilizar procedimientos ilícitos durante el desarrollo de la prueba, será calificado con la nota mínima (1.0) en cha prueba.

$-e^{-t}\,sen(t)\cdot($

$e^{-t \cdot t}$ $\quad e^{2t}$

1. Calcule la longitud de la curva dada por

$$x(t) = e^{-t}\cos(t),$$
$$y(t) = e^{-t}\sin(t), \qquad t \in [0, \pi/2].$$

$$x'(t) = (e^{-t}\cos(t))' \quad \wedge \quad y'(t) = (e^{-t}sen(t))'$$

$$L = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\, dt$$

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{[(e^{-t}\cos(t))']^2 + [(e^{-t}sen(t))']^2}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-e^{-t}sen(t))^2 + (e^{-t}\cos(t))^2}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{e^{-2t}sen^2(t) + e^{-2t}\cos^2(t)}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{e^{-2t}(\underbrace{sen^2(t) + \cos^2(t)}_{1})}\, dt$$

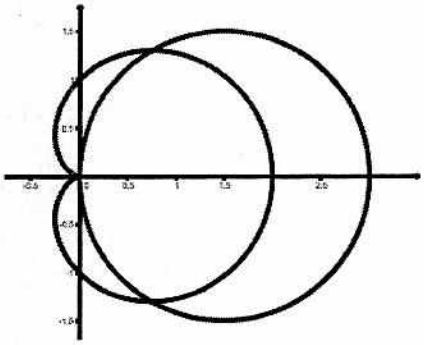
$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{e^{-2t}}\, dt = \int_0^{\pi/2} e^{-t}\, dt$$

$$\frac{-t}{e^{-(t+1)}}$$

CONTROL 2
NOMBRE: CORTES GOMEZ, BENJAMIN IGNACIO
RUT: 21094970-4
CURSO: CÁLCULO INTEGRAL SEC.1 STGO S-SEM. 2022/1

$$\frac{1}{2}\sqrt{(f(\theta))^2-(g(\theta))^2}$$

2. Calcule el área de la región exterior a la cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ e interior a la circunferencia de ecuación $r = 3\cos(\theta)$.



Primero sacamos los puntos de intersección

$$1+\cos(\theta)=3\cos(\theta)$$

$$3\cos(\theta)-\cos(\theta)=1$$

$$\cos(\theta)(3-1)=1$$

$$\cos(\theta)(2)=1$$

$$\cos(\theta)=\frac{1}{2}$$

$$\theta=\frac{\pi}{6}+2k\pi$$

$$k\in\mathbb{Z}$$

$$\theta=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$$

$$A(R) = \int_a^b \frac{1}{2}\left[(f(\theta))^2 - (g(\theta))^2\right] d\theta$$

$$= \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \frac{1}{2}\left[(3\cos(\theta))^2 - (1+\cos(\theta))^2\right] d\theta \qquad -1-2\cos(\theta)-\cos^2(\theta)$$

$$\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \frac{1}{2}\left[9\cos^2(\theta) - (1+2\cos(\theta)+\cos^2(\theta))\right] d\theta$$

$$= \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \frac{1}{2}\left[8\cos^2(\theta) - 1 - 2\cos(\theta)\right] d\theta = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left(4\cos^2(\theta) - \frac{1}{2} - \cos(\theta)\right) d\theta$$

$$= \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \underbrace{4\cos^2(\theta)}_{\downarrow \, X} d\theta - \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \frac{1}{2}\, d\theta - \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \cos(\theta)\, d\theta$$

$$= \left(\underbrace{\quad X \quad} - \frac{1}{2}\theta - \operatorname{sen}(\theta)\right)\Big|_{\pi/6}^{5\pi/6}$$

$$= \left(X - \frac{1}{2}\cdot\frac{5\pi}{6} - \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) - \left(X - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6} - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= \left(X - \frac{5\pi}{12} - 0\right) - \left(X - \frac{\pi}{12} - 0\right)$$

$$= X - \frac{5\pi}{12} - X + \frac{\pi}{12}$$

$$= X - X - \frac{\pi}{3}$$

3. Analice la convergencia de la integral,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}.$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+7)}\,dx$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}(x+7)}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}(x+7)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+7} \xrightarrow{\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}\to 0}{1+\frac{7}{x}\to 0} = 0$$

Dado que la integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ diverge por criterio p $\left(p=\frac{1}{2}<1\right)$, entonces por comparación la integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+7)}\,dx$ diverge

4. Calcule el valor de las siguientes series númericas. Justifique.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1))$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{9^n}$.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(\underbrace{\arctan(n)}_{a_{n+1}} - \underbrace{\arctan(n-1)}_{a_n})$

$\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(1) - \arctan(0))$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{9^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^n \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^1$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right) \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^{n-1}$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\left(\frac{7}{9}\right)}{1-\left(\frac{7}{9}\right)} = \frac{\frac{7}{9}}{\frac{9}{9}-\frac{7}{9}} = \frac{\frac{7}{9}}{\frac{2}{9}} = \frac{7}{\cancel{9}} \cdot \frac{\cancel{9}}{2} = \frac{7}{2}$$

Por lo tanto el valor de la serie es,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{9^n} = \frac{7}{2} \,//$$

SMART + SUSTAINABLE

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

MAT-106 Cálculo Integral
Control 2

14 de Junio de 2022.
70 minutos

PREGUNTA	PUNTAJE MÁXIMO	PUNTOS OBTENIDOS
1	15	
2	15	
3	15	
4	8+7	
TOTAL	60	
NOTA		

Atención:

- Cada respuesta debe ser justificada con claridad.
- Durante el desarrollo de la prueba no se responde ningún tipo de pregunta.
- Está permitido el uso de calculadora simple.
- El o la estudiante que sea sorprendido o sorprendida usando o intentando utilizar procedimientos ilícitos durante el desarrollo de la prueba, será calificado con la nota mínima (1.0) en cha prueba.

1. Calcule la longitud de la curva dada por

$$x(t) = e^{-t}\cos(t),$$
$$y(t) = e^{-t}\sin(t), \qquad t \in [0, \pi/2].$$

Usamos $L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$

* $x'(t) = -e^{-t} \cdot t\,\text{sin}(t) \,/\, ()^2 = (-e^{-t} \cdot t\,\text{sin}(t))^2$
* $y'(t) = -e^{-t} \cdot t \cdot -\cos(t) \,/\, ()^2 = (-e^{-t} \cdot t \cdot -\cos(t))^2$

$$\therefore L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-e^{-t} \cdot t\,\text{sin}(t))^2 + (-e^{-t} \cdot t \cdot -\cos(t))^2}\,dt$$

$$\hookrightarrow \left(-\frac{t}{e^t}\,\text{sin}(t)\right)^2 \qquad \hookrightarrow \left(-\frac{t}{e^t} \cdot -\cos(t)\right)^2$$

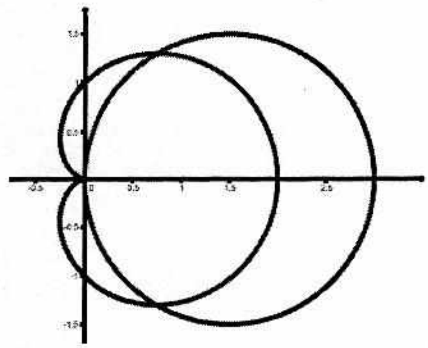
$$= \frac{t^2}{e^{t^2}}\,\text{sen}^2(t) + \frac{t^2}{e^{t^2}}\cos^2(t)$$

$$= L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{t^2(\text{sen}^2(t) + \cos^2(t))}{e^{t^2}}}\,dt, \quad \text{sen}^2(t) + \cos^2(t) = 1$$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{t^2}{e^{t^2}}}\,dt = \int_0^{\pi/2} t e^{-t}\,dt, \quad u = -t, \quad du = -1\,dt, \quad dt = -du$$

$$= \int_0^{-\pi/2} -u e^{u} - du = \int_0^{-\pi/2} u e^{u}\,du = L \;//$$

2. Calcule el área de la región exterior a la cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ e interior a la circunferencia de ecuación $r = 3\cos(\theta)$.



· Usamos $A_R = \frac{1}{2}\int_a^b \sqrt{(f(\theta))^2 - (g(\theta))^2}\, d\theta$ donde $f(\theta) \leq g(\theta)$

~ En este caso, $r_1 = f(\theta) = 1 + \cos(\theta) \leq r_2 = g(\theta) = 3\cos(\theta)$

$\therefore \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{(3\cos(\theta))^2 - (1+\cos(\theta))^2}\, d\theta$

$4(9\cos^2(\theta)) - (1 + 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta))$

$\sim \sqrt{9\cos^2(\theta) - 1 - 2\cos(\theta) - \cos^2(\theta)}$

$= \sqrt{9\cos^2(\theta) - 2\cos - \underbrace{\cos^2(\theta) - 1}_{sen^2(\theta)}} = \sqrt{9\underbrace{\cos^2(\theta) - sen^2(\theta)}_{1} - 2\cos(\theta)}$

$= \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{9 - 2\cos(\theta)}\, d\theta$ //

3. Analice la convergencia de la integral,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}. \rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+7)}dx$$

$\sim \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{\sqrt{x}(x+7)}dx$, donde $\sqrt{x}(x+7) \geq \sqrt{x}$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{x}(x+7)} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ en $x \in [1,\infty[$

$\therefore \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+7)}dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$* \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^{1/2}}dx$, entonces, por criterio p la integral $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ es convergente

· Por lo tanto, ya que $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+7)}dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx$, la integral $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+7)}dx$ es convergente. //

4. Calcule el valor de las siguientes series númericas. Justifique.

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1))$. → Telescopica

   b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{9^n}$. → geometrica

→ positivo en $[1, \infty[$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{9^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^n$. Ya que $|r| = 7/9 < 1$, por definición de la serie geometrica decimos que converge

~ Ya que $\sum_{n=1}^{\infty} 7^n/9^n$ converge, se tiene que : $\sum_{n=1}^{\infty} a(r)^n = \frac{a}{1-r}$

$\cdot \sum_{n=1}^{\infty}(7/9)^n = \frac{1}{1 - 7/9} = \frac{1}{2/9} = \frac{9}{2} = S_n$ //

SMART + SUSTAINABLE

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

MAT-106 Cálculo Integral
Control 2

14 de Junio de 2022.
70 minutos

PREGUNTA	PUNTAJE MÁXIMO	PUNTOS OBTENIDOS
1	15	
2	15	
3	15	
4	8+7	
TOTAL	60	
NOTA		

Atención:

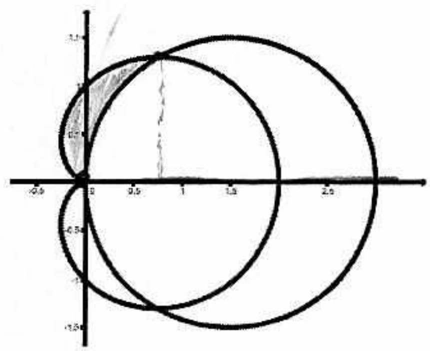
- Cada respuesta debe ser justificada con claridad.
- Durante el desarrollo de la prueba no se responde ningún tipo de pregunta.
- Está permitido el uso de calculadora simple.
- El o la estudiante que sea sorprendido o sorprendida usando o intentando utilizar procedimientos ilícitos durante el desarrollo de la prueba, será calificado con la nota mínima (1.0) en cha prueba.

1. Calcule la longitud de la curva dada por

$$x(t) = e^{-t}\cos(t),$$
$$y(t) = e^{-t}\sin(t), \qquad t \in [0, \pi/2].$$

$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}}$

2. Calcule el área de la región exterior a la cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ e interior a la circunferencia de ecuación $r = 3\cos(\theta)$.



convergencia.

$1 + \cos(\theta^*) = 3\cos(\theta^*)$

$1 = 2\cos(\theta^*)$

$\frac{1}{2} = \cos(\theta^*)$

$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \theta^* \cong 60° = \frac{\pi}{3}$

$$\cancel{2}\cdot\left(\frac{1}{\cancel{2}}\int_0^{\frac{\pi}{3}^*}\left[(1+\cos(\theta))^2 - (3\cos(\theta))^2\right]d\theta\right)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos^2(\theta) + 2\cos(\theta) + 1 - 9\cos^2(\theta)\right)d\theta$$

$$= -8\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2(\theta)\,d\theta + 2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos(\theta)\,d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta$$

$$+2\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cancel{\sin(0)}\right) + \left(\frac{\pi}{3} - \cancel{0}\right)$$

$$-8\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2(\theta)\,d\theta + 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}$$

3. Analice la convergencia de la integral,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+7)}.$$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(x+7)}$; es una función positiva decreciente, por lo tanto cumple con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+7)}$.

si $\sqrt{x} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x}(x+7) \geq (x+7)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}(x+7)} \leq \underbrace{\frac{1}{x+7}}_{\text{analizar convergencia}}$; $x \in \mathbb{R}, x = [1, +\infty[$ //

si $7 > 0 \Leftrightarrow 7 + x > x \Leftrightarrow \frac{1}{7+x} < \frac{1}{x}$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{x}(x+7)} < \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{analizar convergencia}}$; $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x}$, por criterio "p" la serie es divergente

si $\sqrt{x}(x+7) \leq x(x+7) > x^2 \Leftrightarrow 1$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{x}(x+7)}{\sqrt{x+1}(x+8)} = 0$, portanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+7)}$ diverge,

lo que implica que $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+7)}$ tambien diverge.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x}(x+7)}{\sqrt{x+1}(x+8)} = 0$$

4. Calcule el valor de las siguientes series númericas. Justifique.

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1))$.

   b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{9^n}$.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1))$ cumple con una serie telescopica.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n) - \arctan(n-1)) = \arctan(1) - \underbrace{\arctan(\infty)}_{\text{indefinido}} =$

Es una serie divergente.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^n \Rightarrow \sqrt[n]{a_n}$; $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{7}{9}\right)^n} = \frac{7}{9} = L < 1$

~ La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^n$ al tener $L<1$, es una serie divergente.