Dinámica de robots

IBERO PUEBLA ®
Departamento de Ciencias e Ingenierías /

Dinamica de Manipuladores

- Dinamica directa: $dado\ \theta, \dot{\theta}, y\ \tau\ encontrar\ \ddot{\theta}$
- Dinamica Inversa:$dado\ \theta, \dot{\theta}, y\ \ddot{\theta} encontrar\ \tau$

Soluciones:

Metodo Lagrangiano

Metodo Newton-Euler

IBERO PUEBLA ®

Departamento de Ciencias e Ingenierías /

Energia Potencial y cinetica

- La **energía cinética** es una medida de qué tan rápido se está moviendo cada parte del robot. Para cada eslabón, consideramos: $E_C = \frac{1}{2} m \cdot v^2$
  - **Movimiento lineal**: el eslabón moviéndose a través del espacio (masa×velocidad^2).
  - **Movimiento rotacional**: el eslabón girando alrededor de su propio eje (momento de inercia×velocidad angular^2).
- La **energía potencial** está relacionada con la posición del robot en un campo gravitatorio u otros tipos de campos (por ejemplo, resortes). Comúnmente, consideramos la energía potencial gravitatoria, que depende de la altura de cada eslabón con respecto a un punto de referencia. $E = mgh$

IBERO PUEBLA Departamento de Ciencias e Ingenierías /

Lagrangiano

- K: energia cinetica total
- P: energia cinetica potencial

$$L(\theta, \dot{\theta}) = K(\theta, \dot{\theta}) - P(\theta)$$

Esta única expresión captura la “imagen de energía” del robot

Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i$$

- q_i es el ángulo de la i-ésima articulación (o desplazamiento, si se desliza).
- $\dot{q}_i$ es la velocidad de la i-ésima articulación.
- τ_i es el torque o la fuerza externa que actúa sobre esa articulación (por ejemplo, la de un motor).

Euler-Lagrange

- Básicamente, para cada articulación q_i :
  - Se calcula la derivada parcial de L con respecto a la velocidad de la articulación $\dot{q}_i$.
  - Se toma la derivada con respecto al tiempo de ese resultado.
  - Se resta la derivada parcial de L con respecto a la posición q_i de la articulación.
  - Se iguala esa diferencia al torque τ_i en dicha articulación.

IBERO PUEBLA® Departamento de Ciencias e Ingenierías /

Euler-Lagrange

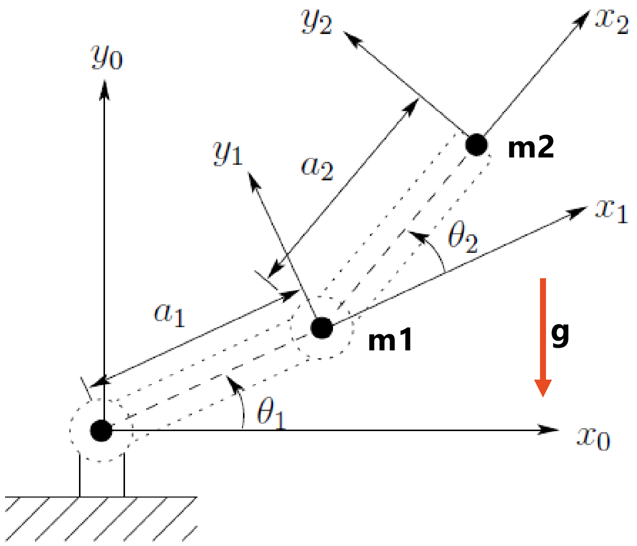
$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau$$

Donde:

- $M(q)$ es la **matriz de inercia** (cómo se distribuye la masa en el brazo).
- $C(q,\dot{q})\dot{q} +$ captura los **efectos de Coriolis y centrífugos** (fuerzas debidas a los eslabones en rotación).
- $G(q)$ es el **vector de la gravedad** (torques debidos al peso).
- τ es el **vector de torques o fuerzas** aplicadas en cada articulación (por ejemplo, a través de motores).

IBERO PUEBLA ®
Departamento de Ciencias e Ingenierías /

Euler-Lagrange



$$x = a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y = a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \sin \theta_1 - a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)) & -a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)) \\ a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)) & a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

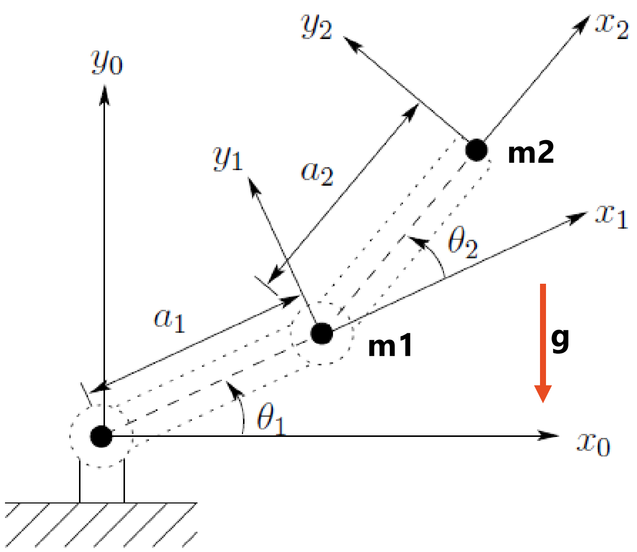
$$k_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)$$

$$k_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

$$P_1 = m_1 g y_1 = m_1 g a_1 sin\theta_1$$

$$P_2 = m_2 g y_2 = m_2 g (a_1 sin\theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

Euler-Lagrange



$$L(\theta,\dot{\theta}) = \sum_{1=i}^{2}(K_i - P_i) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i$$

$$L_{comp} = m_2 a_1 a_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 cos\theta_2$$

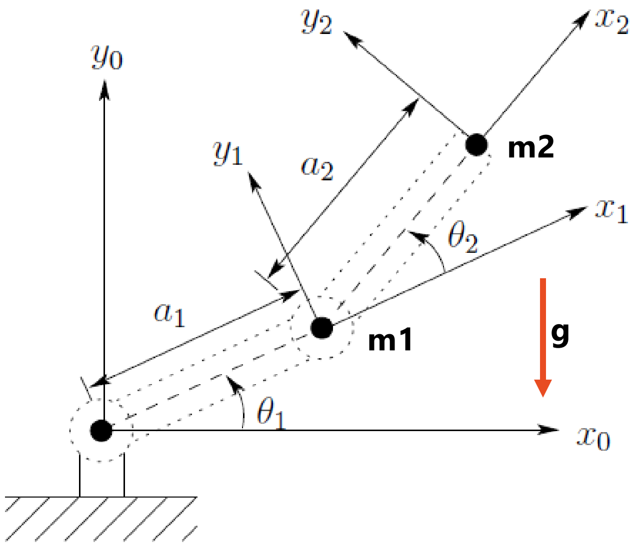
$$\tau_{2,comp} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_{comp}}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L_{comp}}{\partial \theta_2}$$

$$\tau_{2,comp} = \frac{d}{dt}(m_2 a_1 a_2 \dot{\theta}_1 cos\theta_2) + m_2 a_1 a_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 sin\theta_2$$

$$\tau_{2,comp} = m_2 a_1 a_2 \ddot{\theta}_1 cos\theta_2 - m_2 a_1 a_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 sin\theta_2 + m_2 a_1 a_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 sin\theta_2$$

$$\tau_{2,comp} = m_2 a_1 a_2 \ddot{\theta}_1 cos\theta_2$$

Euler-Lagrange



$$\tau_2 = m_2(a_1 a_2 cos\theta_2 + a_2^2)\ddot{\theta}_1 + m_2 a_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 a_1 a_2 \dot{\theta}_1^2 sin\theta_2 + m_2 g L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$