UNIVERSIDAD IBEROAMERICANA

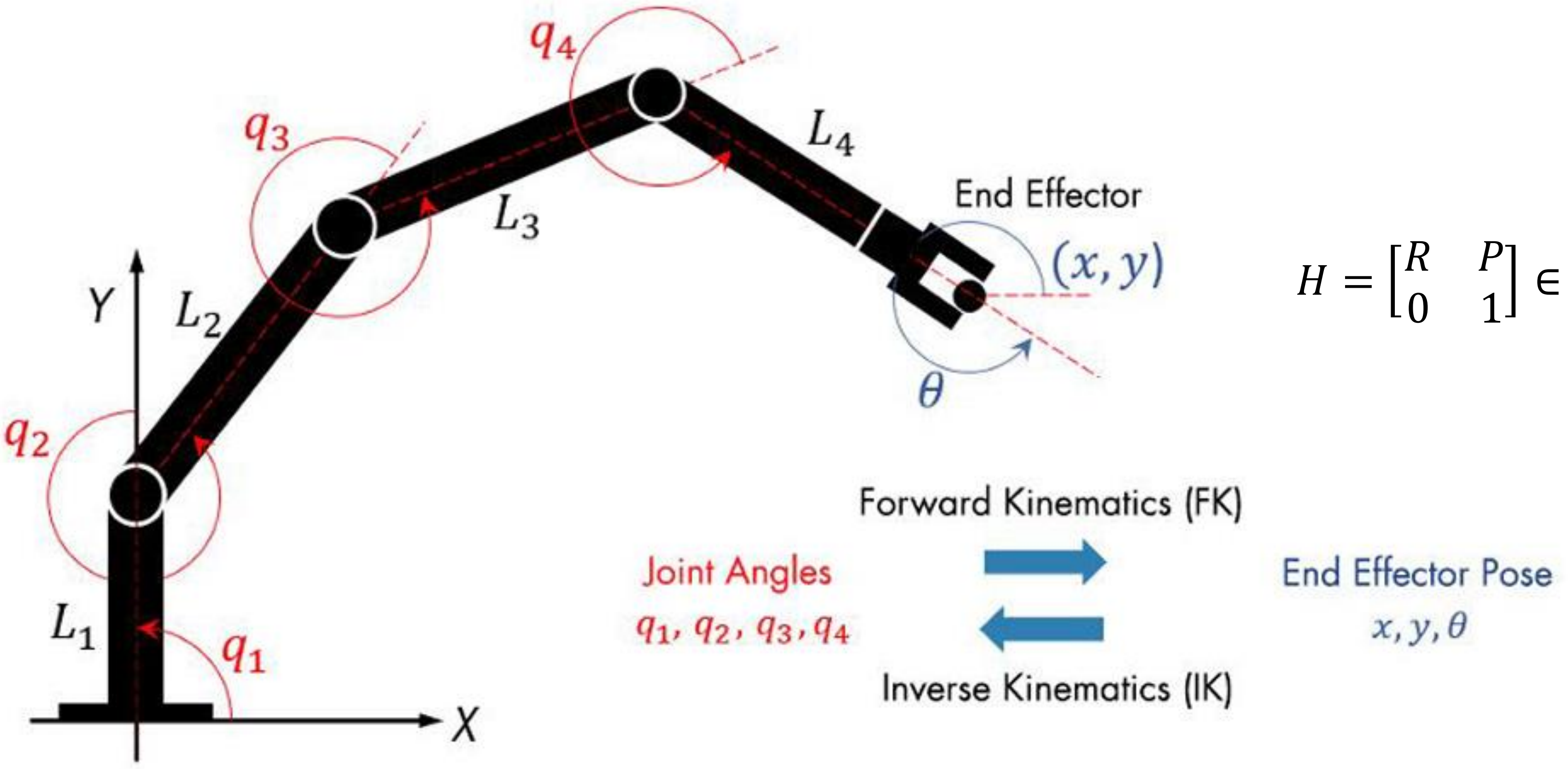
PUEBLA

Robótica Aplicada

Profesor: Oliver Ochoa García

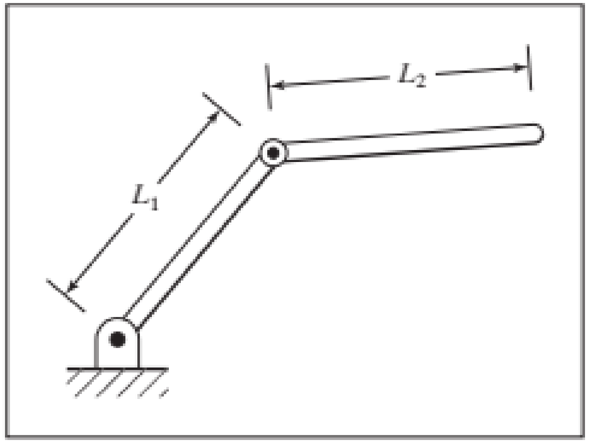
Cinemática Inversa

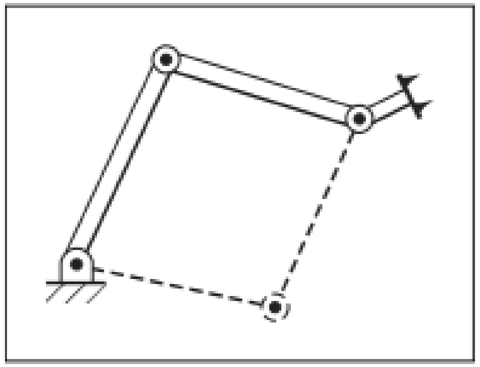
Introducción Cinemática Inversa

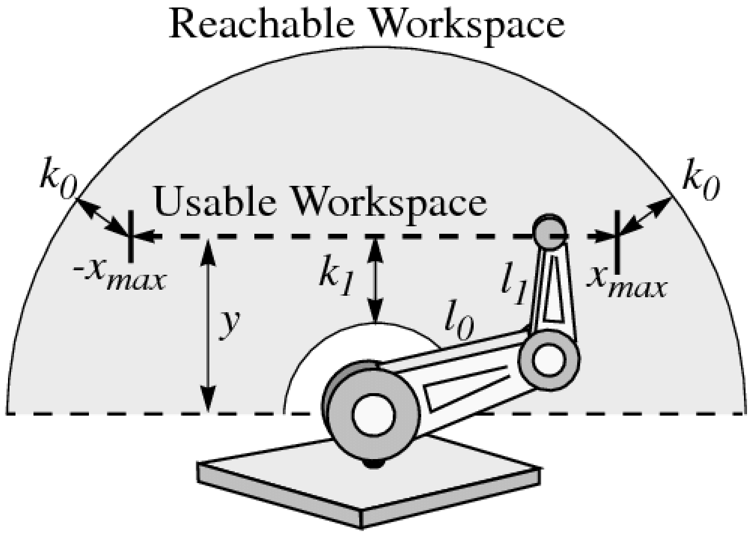


$$H = \begin{bmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)$$

Consideraciones Cinemática Inversa







a_i	Number of solutions
$a_1 = a_3 = a_5 = 0$	$\leqslant 4$
$a_3 = a_5 = 0$	$\leqslant 8$
$a_3 = 0$	$\leqslant 16$
All $a_i \neq 0$	$\leqslant 16$

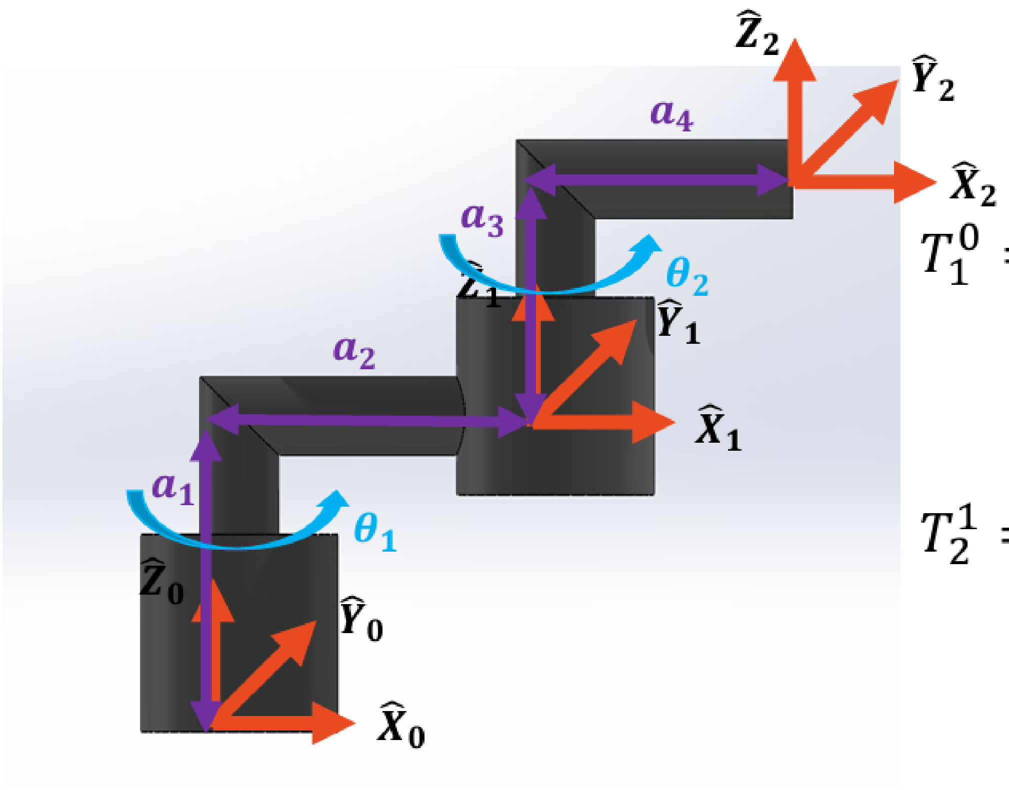
Método de Solución

- **Soluciones Cerradas**, Son métodos analíticos que proporcionan una solución explícita para las ecuaciones cinemáticas de un manipulador.
  - Algebraica
  - Geométrica
- **Soluciones Numéricas**, Consisten en métodos iterativos que buscan resolver las ecuaciones cinemáticas de manera aproximada.

Método de Solución

- **"Todos los sistemas que usen revolutas y prismáticos teniendo un total de 6 DoF en una sola cadena tiene Solución"*Aplican términos y condiciones**
- Solo aplica para soluciones numéricas
- O que al menos 3 ejes se intersequen en un punto.

Introducción Cinemática Inversa



$$T_1^0 = \begin{bmatrix} R_1^0 & p_1^0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & a_2\cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & a_2\sin\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} R_2^1 & p_2^1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & a_4\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & a_4\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^0 = T_1^0 T_2^1 = \begin{bmatrix} R_2^0 & p_2^0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Introducción Ecuaciones

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & a_2\cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & a_2\sin\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & a_4\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & a_4\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

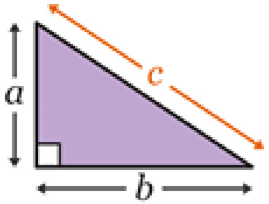
$$T_2^0 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 & -\cos\theta_1\sin\theta_2 - \sin\theta_1\cos\theta_2 & 0 & a_4\cos\theta_1\cos\theta_2 - a_4\sin\theta_1\sin\theta_2 + a_2\cos\theta_1 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2 & -\sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 & 0 & a_4\sin\theta_1\cos\theta_2 + a_4\cos\theta_1\sin\theta_2 + a_2\sin\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 + a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X_2^0 = a_4\cos\theta_1\cos\theta_2 - a_4\sin\theta_1\sin\theta_2 + a_2\cos\theta_1$$

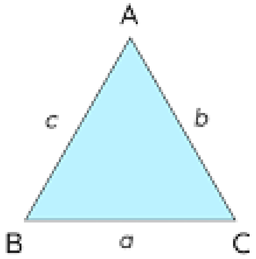
$$Y_2^0 = a_4\sin\theta_1\cos\theta_2 + a_4\cos\theta_1\sin\theta_2 + a_2\sin\theta_1$$

$$Z_2^0 = a_3 + a_1$$

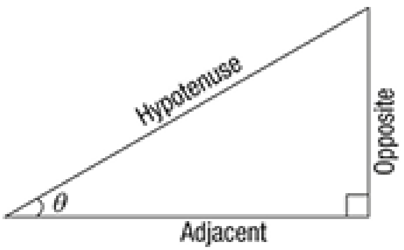
Repaso trigonometria



$$a^2 + b^2 = c^2$$

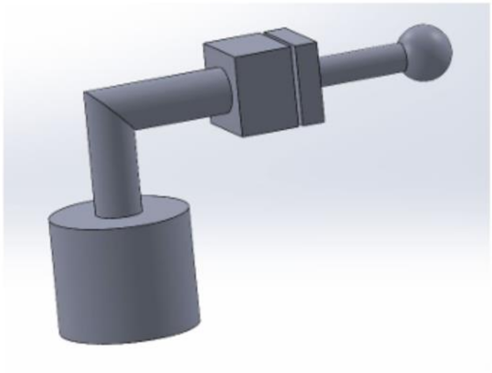


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



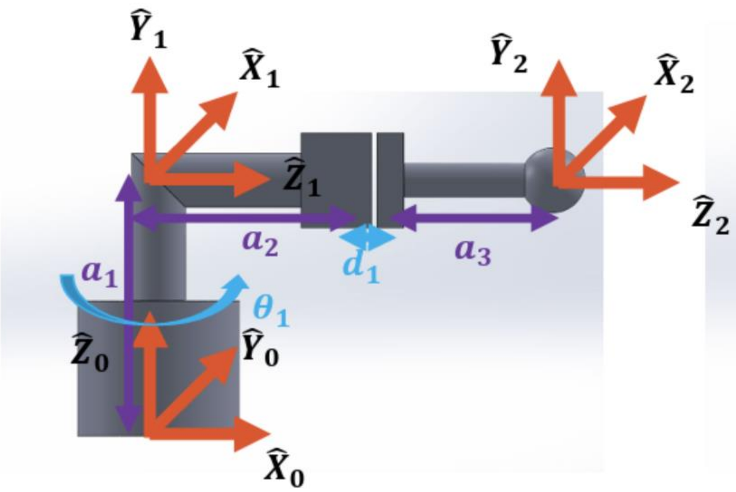
$$\sin\theta = \frac{\text{opposite}}{\text{hypotenuse}} \qquad \csc\theta = \frac{\text{hypotenuse}}{\text{opposite}}$$
$$\cos\theta = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypotenuse}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hypotenuse}}{\text{adjacent}}$$
$$\tan\theta = \frac{\text{opposite}}{\text{adjacent}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{adjacent}}{\text{opposite}}$$

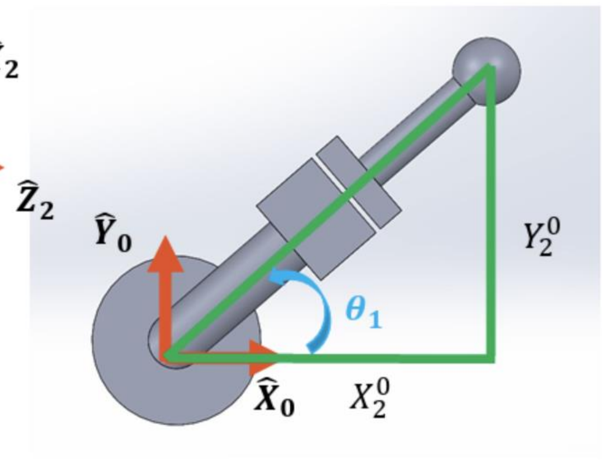
Solución analítica/geométrica



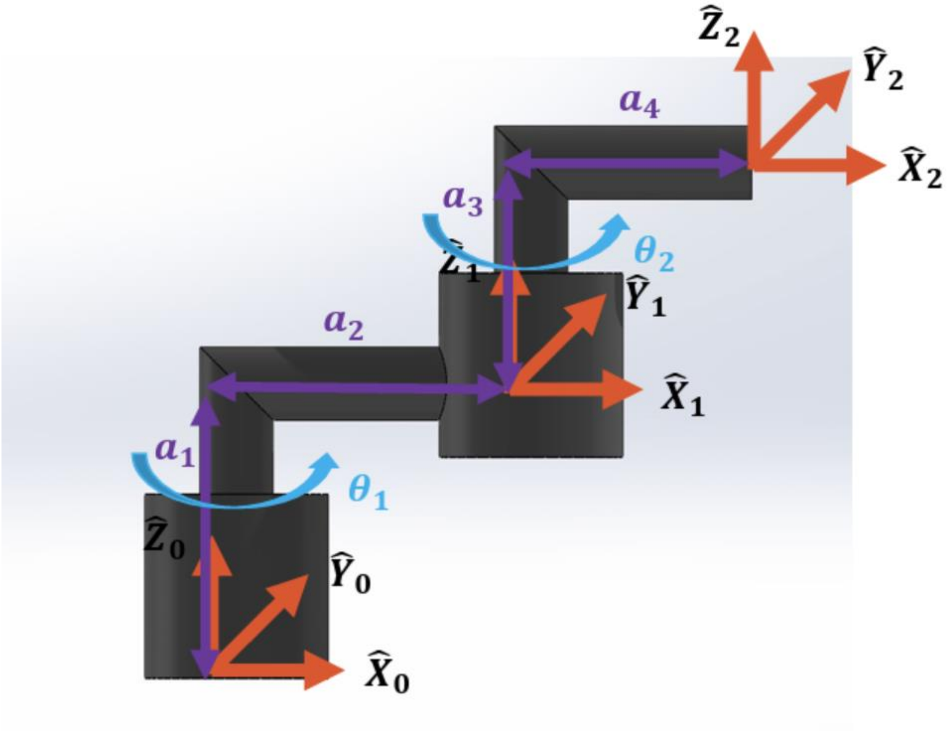
$$X_2^{0\,2} + Y_2^{0\,2} = (a_2 + a_3 + d_1)^2$$

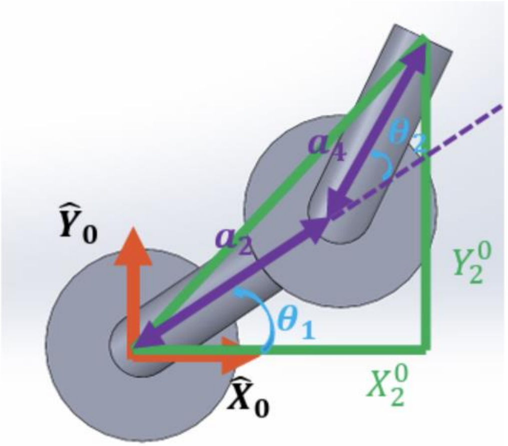
$$\tan\theta_1 = \frac{Y_2^0}{X_2^0}$$

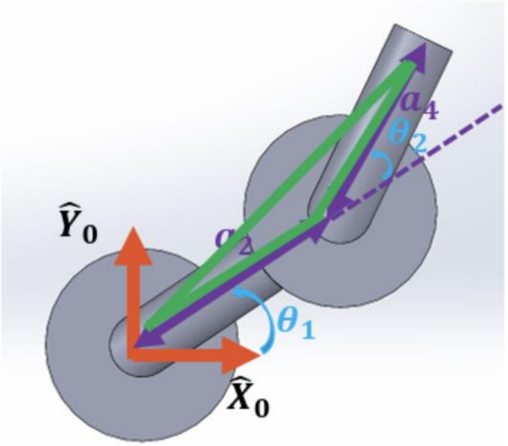




Solución analítica/geométrica







$$X_2^{0\,2} + Y_2^{0\,2} = \boldsymbol{h_1}^2$$

$$\tan \boldsymbol{\phi_2} = \frac{Y_2^0}{X_2^0}$$

$$a_4{}^2 = h_1{}^2 + a_2{}^2 - 2a_2h_1 \cos \boldsymbol{\phi_1}$$
$$h_1{}^2 = a_4{}^2 + a_2{}^2 - 2a_2a_4 \cos \boldsymbol{\phi_3}$$

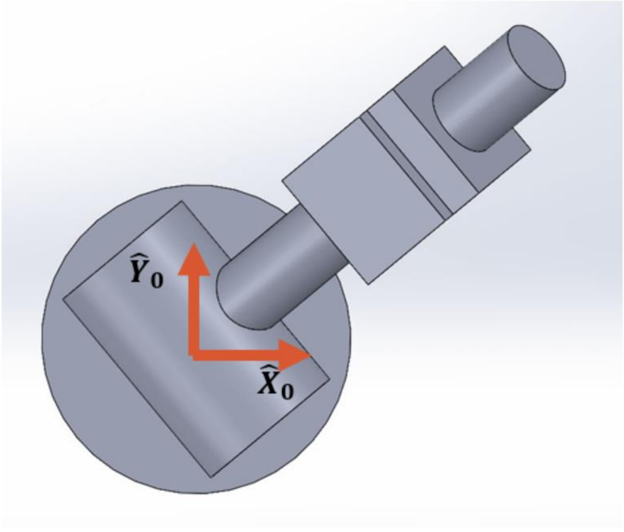
$$\theta_1 = \phi_2 \text{-} \phi_1$$

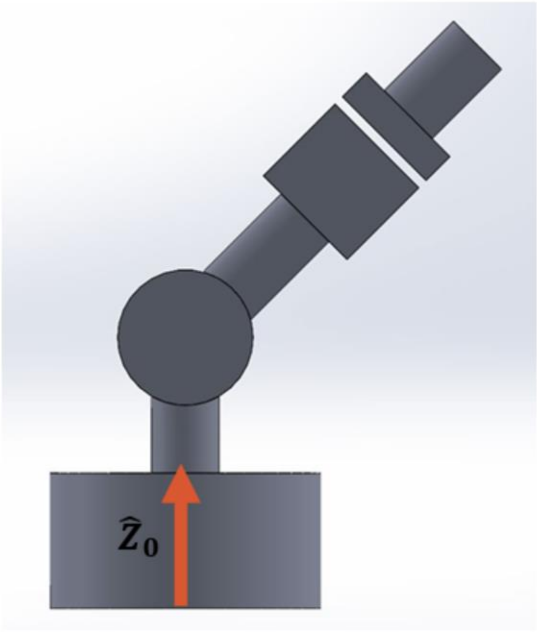
$$\theta_2 = 180 - \phi_3$$

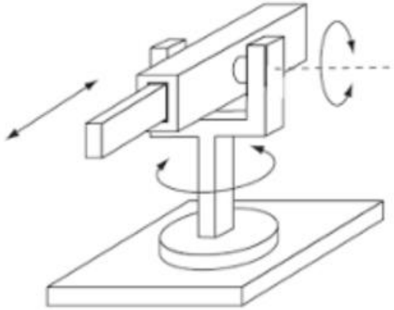
IBERO PUEBLA ®

Departamento de Ciencias e Ingenierías /

Ejercicio 1

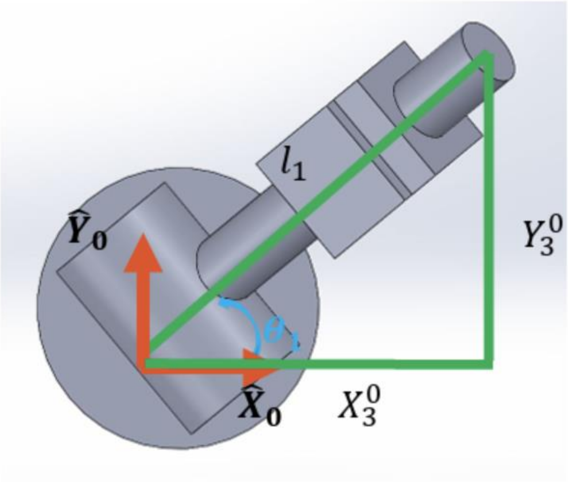






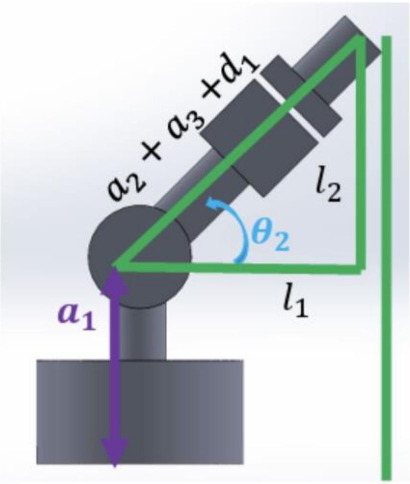
$$d_1 = ?$$
$$\theta_1 = ?$$
$$\theta_2 = ?$$

Solución Ejercicio 1



$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{Y_3^0}{X_3^0}\right)$$

$$l_1 = \sqrt{{Y_3^0}^2 + {X_3^0}^2}$$



Z_3^0

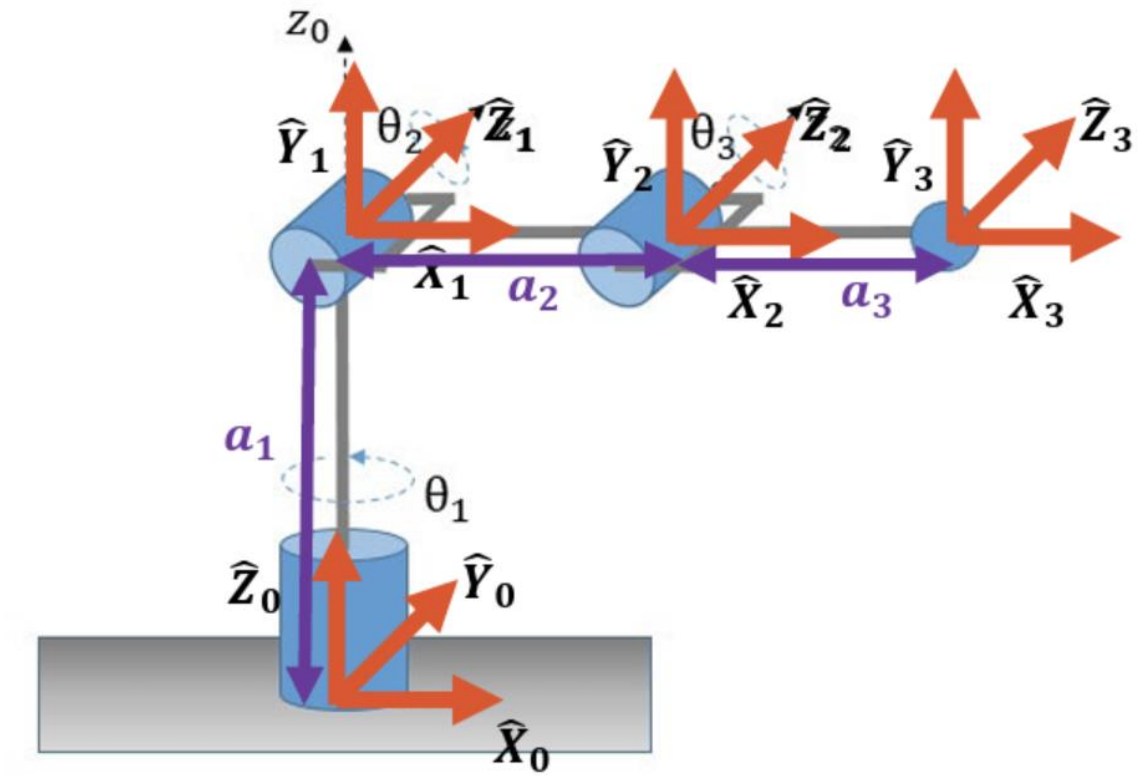
$$d_1 = \sqrt{{l_1}^2 + {l_2}^2} - a_2 - a_3$$

$$l_2 = Z_3^0 - a_1$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{l_2}{l_1}\right)$$

IBERO PUEBLA ®
Departamento de Ciencias e Ingenierías /

Ejercicio 2



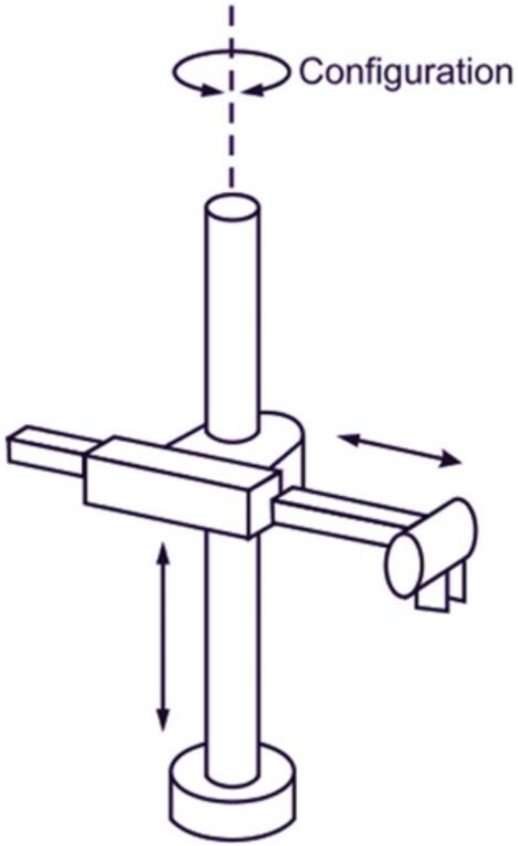
$\theta_1 = ?$

$\theta_2 = ?$

$\theta_3 = ?$

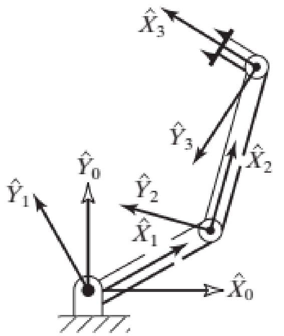
IBERO PUEBLA ® Departamento de Ciencias e Ingenierías /

Ejercicio 3



$$d_1 = ?$$
$$\theta_1 = ?$$
$$d_2 = ?$$

Solución Algebraica



i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	L_1	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3

$$ {}^{B}_{W}T = {}^{0}_{3}T = \begin{bmatrix} C_{123} & -S_{123} & 0 & l_1c_1 + l_1c_{12} \\ S_{123} & C_{123} & 0 & l_1s_1 + l_1s_{12} \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{0}_{3}T = \begin{bmatrix} C_\phi & -S_\phi & 0 & x \\ S_\phi & C_\phi & 0 & y \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

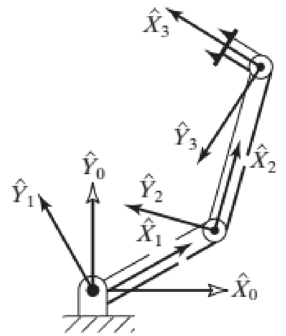
$$ C_\phi = C_{123} $$
$$ S_\phi = S_{123} $$

$$ x = l_1c_1 + l_1c_{12} $$
$$ \mathrm{y} = l_1s_1 + l_1s_{12} $$

Solución Algebraica

$$C_\phi = C_{123}$$
$$S_\phi = S_{123}$$

$$x = l_1 c_1 + l_1 c_{12}$$
$$y = l_1 s_1 + l_1 s_{12}$$



i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	L_1	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3

$$x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 c_2{}^*$$

$$\boxed{\boldsymbol{c_2 = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}}}$$

El Resultado debe ser **entre 1 y -1**
Si no, **no esta** en espacio de trabajo

$$s_2^2 + c_2^2 = 1^{**} \qquad s_2 = \pm\sqrt{1 - c_2^2}$$

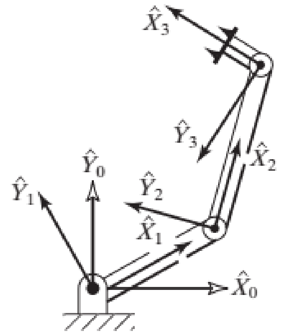
$$\boldsymbol{\theta_2 = Atan2(s_2, c_2)}$$

**Ley de Cosenos*
***Id. Pitagoras*

Solución Algebraica

$$C_\phi = C_{123}$$
$$S_\phi = S_{123}$$

$$x = l_1c_1 + l_1c_{12}$$
$$y = l_1s_1 + l_1s_{12}$$



i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	L_1	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3

$$c_{12} = c_1c_2 - s_1s_2$$
$$s_{12} = c_1s_2 - s_1c_2{}^{**}$$

**Ley de Cosenos*
***Suma de Ángulos*

Métodos numericos

- Se basan en resolver iterativamente el problema $f(\theta) = x_d$
- Se utilizan cuando no hay solución analítica o el problema es demasiado complejo.
  - **Método de Newton-Raphson**
  - **Método de Gauss-Newton**
  - **Método de Levenberg-Marquardt**

IBERO PUEBLA ® Departamento de Ciencias e Ingenierías /

Jacobiana

La matriz Jacobiana es una matriz que describe cómo cambian las salidas de un sistema con respecto a sus entradas.

En el contexto de **cinemática inversa**, la Jacobiana nos dice cómo cambia la posición del **efector final** (x,y,z) cuando se modifican los **ángulos articulares** (θ1,θ2,...,θn).

$$J = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \theta_n} \end{bmatrix}$$

Jacobiana Ejemplo Brazo de 2 Grados de Libertad

Supongamos que tenemos un brazo robótico con dos articulaciones (θ1,θ2) y dos eslabones (l1,l2). La posición del efector final en coordenadas cartesianas es:

$$x = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta_1} = \frac{\partial}{\partial \theta_1}(l_1 \cos\theta_1 + l_1 \cos(\theta_1 + \theta_2)) \qquad \frac{\partial x}{\partial \theta_1} = -l_1 \sin\theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta_2} = \frac{\partial}{\partial \theta_2}(l_1 \cos\theta_1 + l_1 \cos(\theta_1 + \theta_2)) \qquad \frac{\partial x}{\partial \theta_2} = -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

$$J = \begin{bmatrix} -l_1 \sin\theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos\theta_1 - l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

IBERO PUEBLA Departamento de Ciencias e Ingenierías /

Método de Newton-Raphson

- Empieza con una estimación inicial de los ángulos articulares (θ_0)
- Calcula la posición actual del efector final usando la cinemática directa $x_{actual} = f(\theta_k)$
- Calcula cuánto error hay entre la posición actual y la deseada: $error = x_{deseado} - x_{actual}$
- Calcula la matriz Jacobiana J, que nos dice cómo cambia la posición con respecto a los ángulos.
- Calcula la corrección necesaria para los ángulos: $\Delta\theta = J^{-1} \cdot error$
- Actualiza los valores de los ángulos: $\theta_{k+1} = \theta_k + \Delta\theta$
- Repite desde el paso 2 hasta que el error sea muy pequeño.

Método de Gauss-Newton

- Empieza con una estimación inicial de los ángulos articulares (θ_0)
- Calcula la posición actual del efector final usando la cinemática directa $x_{actual} = f(\theta_k)$
- Calcula cuánto error hay entre la posición actual y la deseada: $error = x_{deseado} - x_{actual}$
- Calcula la matriz Jacobiana J
- En lugar de invertir **J** (como en Newton-Raphson), usa una fórmula más estable: : $\Delta\theta = (J^T J)^{-1} J^T \cdot error$
- Actualiza los valores de los ángulos: $\theta_{k+1} = \theta_k + \Delta\theta$
- Repite desde el paso 2 hasta que el error sea muy pequeño.

Método de Levenberg-Marquardt

- Empieza con una estimación inicial de los ángulos articulares (θ_0)
- Calcula la posición actual del efector final usando la cinemática directa $x_{actual} = f(\theta_k)$
- Calcula cuánto error hay entre la posición actual y la deseada: $error = x_{deseado} - x_{actual}$
- Calcula la matriz Jacobiana J
- Usa una combinación entre **Gauss-Newton** y **descenso de gradiente** con un factor de ajuste (λ) : $\Delta\theta = (J^T J + \lambda I)^{-1} J^T \cdot error$
- Actualiza los valores de los ángulos: $\theta_{k+1} = \theta_k + \Delta\theta$
- Repite desde el paso 2 hasta que el error sea muy pequeño.

IBERO PUEBLA ®
Departamento de Ciencias e Ingenierías /

Comparación de métodos

Criterio	Newton-Raphson	Gauss-Newton	Levenberg-Marquardt
Concepto General	Usa la inversa de la Jacobiana para ajustar los ángulos rápidamente.	Minimiza el error cuadrático sin invertir directamente la Jacobiana.	Mezcla Gauss-Newton con descenso de gradiente para mayor estabilidad.
Fórmula Clave	$\theta_{k+1} = \theta_k + J^{-1}(x_d - f(\theta_k))$	$\theta_{k+1} = \theta_k (J^T J)^{-1} J^T (x_d - f(\theta_k))$	$\theta_{k+1} = \theta_k (J^T J + \lambda I)^{-1} J^T (x_d - f(\theta_k))$
Velocidad de Convergencia	Rápida si la estimación inicial es buena.	Buena, pero depende de $J^T J$	Moderada, pero más estable.
Robustez ante Singularidades	Mala, se vuelve inestable si J es singular.	Regular, puede fallar si $J^T J$ es mal condicionado.	Buena, gracias al parámetro λ
Computación Requerida	Alta, requiere calcular J^{-1}.	Media, usa $(J^T J)^{-1}$.	Media-alta, ajusta λ dinámicamente
Adecuado para	Sistemas bien condicionados y con buena estimación inicial.	Problemas sobredeterminados con bajo ruido.	Problemas mal condicionados o con singularidades.
Desventajas	No siempre converge, sensible a la estimación inicial.	Puede no converger si $J^T J$ está cerca de singular.	Más lento debido a la adaptación de λ.