UNIVERSIDAD IBEROAMERICANA

PUEBLA

# Robótica Aplicada

Profesor: Oliver Ochoa García

# Descripción Espacial y transformadas



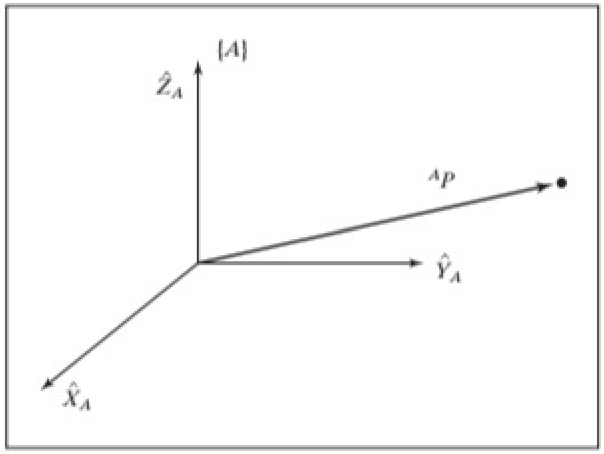
IBERO PUEBLA ®

Departamento de Ciencias e Ingenierías /

# Posición

- Debe existir un **sistema de coordenadas universal**
- Podemos encontrar cualquier punto usando un **vector de posición** 3x1
- E.G. tenemos el vector P relativo al marco A dado representado por px, py, pz

$$^{A}P_{1}=\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$



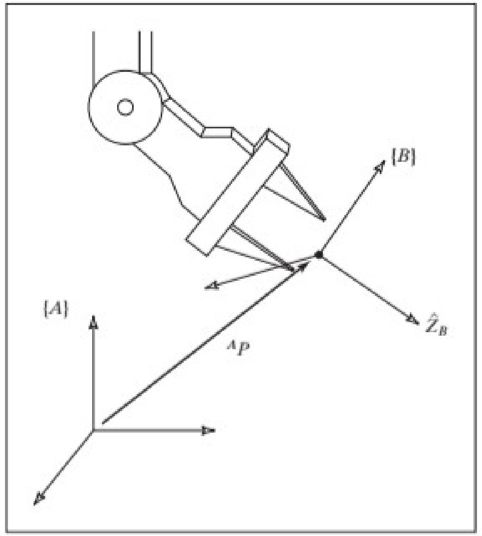



IBERO PUEBLA ®
Departamento de Ciencias e Ingenierías /

# Orientación

- Para describir la orientación pondremos al cuerpo su propio marco, relativo al marco de referencia.
- El nuevo marco se describe usando **vectores unitarios** de sus ejes principales (x,y,z) en términos de A.
- Al agruparlos se convierte en una **matriz de rotación** de 3x3

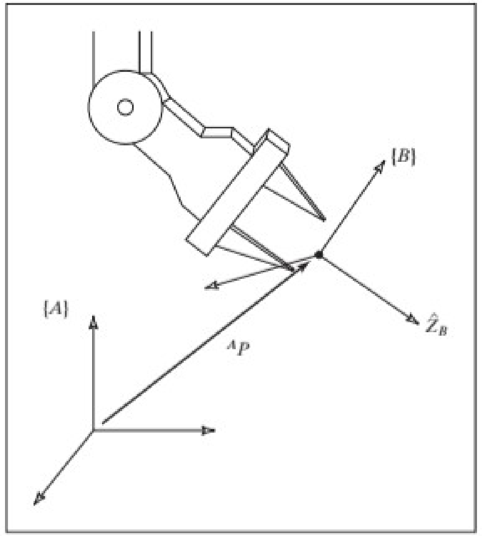
$$ {}^{A}_{B}R = \left[ {}^{A}\hat{X}_{B} \quad {}^{A}\hat{Y}_{B} \quad {}^{A}\hat{Z}_{B} \right] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} $$



# Orientación

- Para describir la orientación pondremos al cuerpo su propio marco, relativo al marco de referencia.
- El nuevo marco se describe usando **vectores unitarios** de sus ejes principales (x,y,z) en términos de A.
- Al agruparlos se convierte en una **matriz de rotación** de 3x3

$$ {}^{A}_{B}R = \left[ {}^{A}\hat{X}_{B} \quad {}^{A}\hat{Y}_{B} \quad {}^{A}\hat{Z}_{B} \right] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} $$

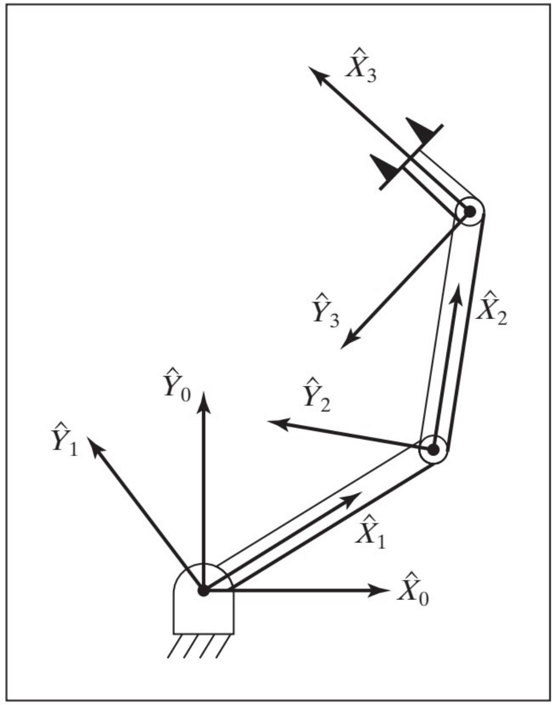




IBERO PUEBLA ® Departamento de Ciencias e Ingenierías /

# Transformadas

- Para poder representar el comportamiento de un robot a la hora de cambiar sobre el tiempo debemos obtener **funciones**
- Se requieren funciones que describan el movimiento en el espacio, considerando la posición y la orientación, y sus transformaciones: **traslación y rotación.**



# Funciones

$$f(P) = AP$$

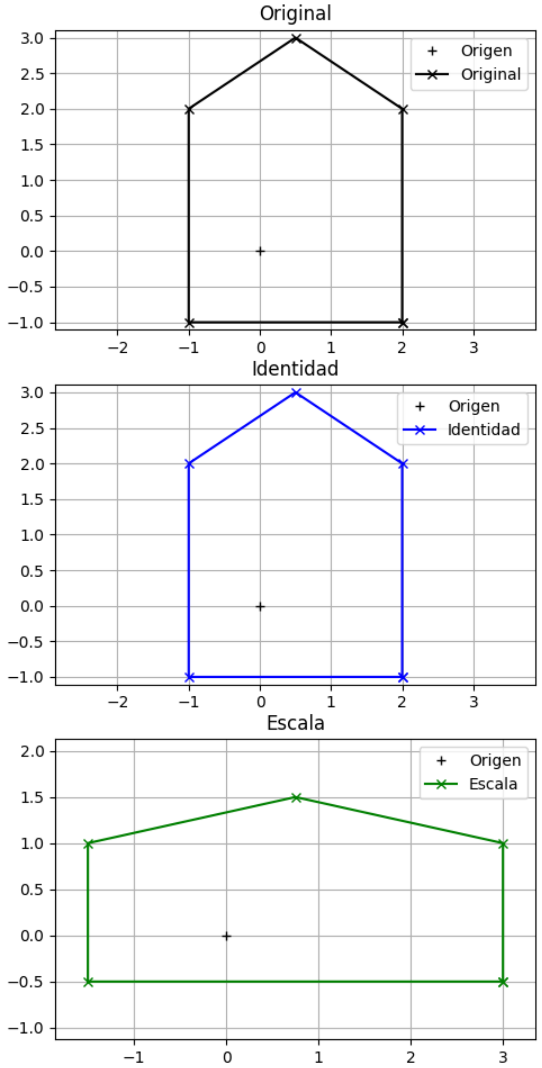
- Donde **A** es una matriz de n×n, y n es el número de dimensiones en P.
- Las funciones para las transformadas deben ser **lineares**
- Ejemplos:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

Matriz de Identidad

=

Transformada escala




*Ver código *Transformada_Ejemplo.py*

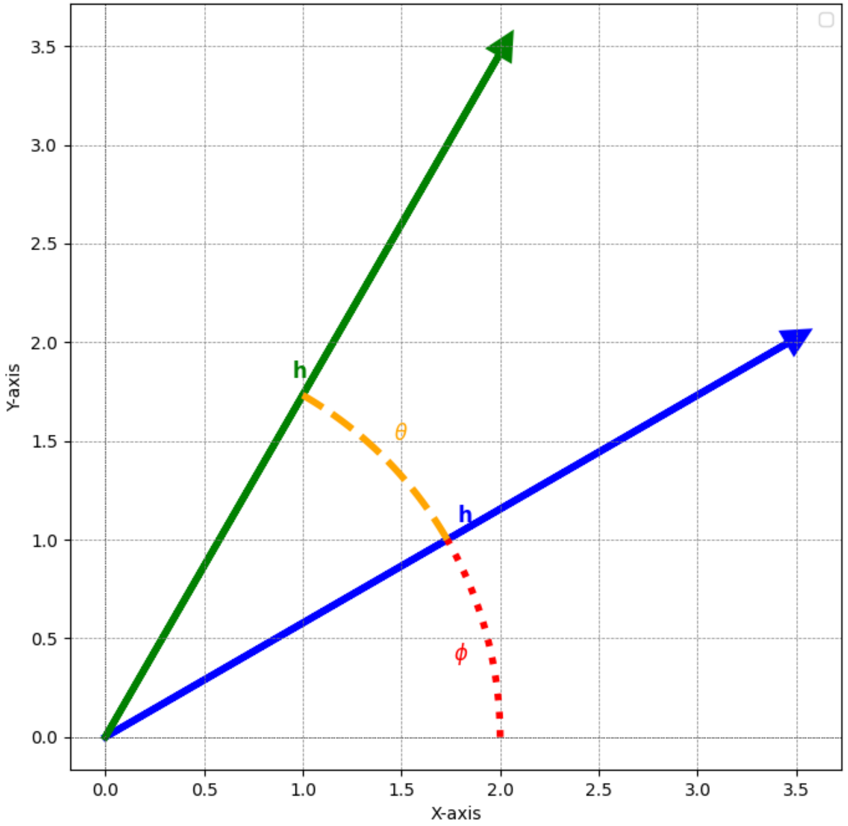
# Funciones lineares

- El 0 siempre se asigna a 0. No hay forma de mover el origen.
- Las transformaciones lineales siempre son impares (f(−p) = −f(p)). Esto produce un efecto de espejo.
- Las transformaciones lineales se encadenan mediante multiplicación. Si queremos escalar algunos puntos, luego aplicar un corte y después rotarlos, solo necesitamos multiplicar todas las matrices entre sí.

$$f_3\left(f_2\left(f_1\left(P\right)\right)\right)=A_3 A_2 A_1 P$$

# Rotación

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$




$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h\cos\Phi \\ h\sin\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h\cos(\Phi+\theta) \\ h\sin(\Phi+\theta) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}^{*} = \begin{bmatrix} h\cos(\Phi)\cos-(\theta)h\sin(\Phi)\sin(\theta) \\ h\sin(\Phi)\sin(\theta)+h\cos(\Phi)\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1\cos\theta - y_1\sin\theta \\ x_1\sin\theta + y_1\cos\theta \end{bmatrix}$$

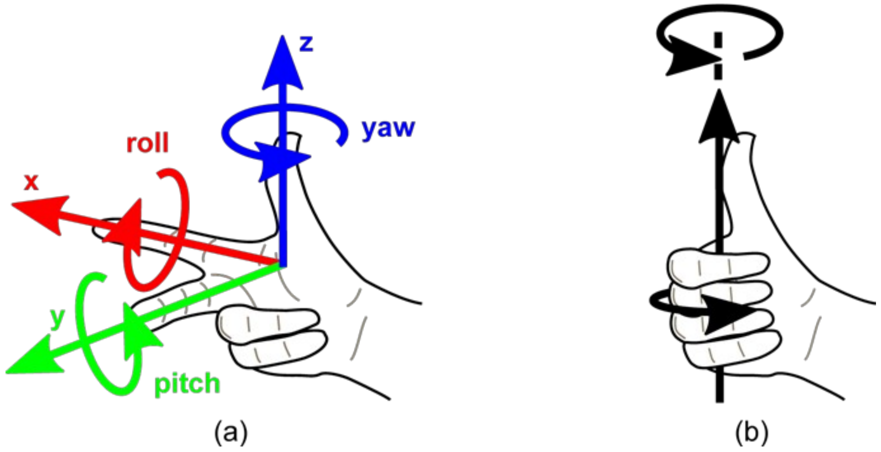
$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

Matriz de Rotación

*Lista Id. Trig. *Ver código *Rot2d.py*

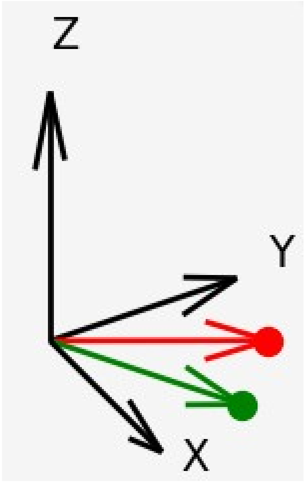
# Rotación Propiedades y reglas

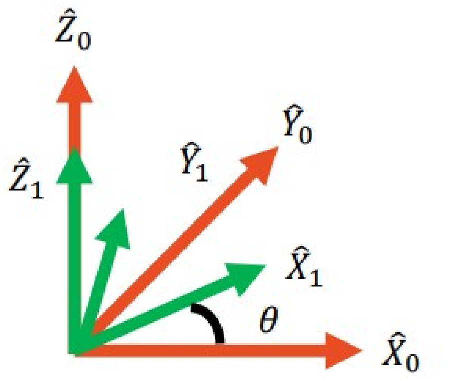
- Inversa=Transpuesta
- Determinante = 1
- Rotación * Rotación = Rotación Final
- Regla mano derecha



# Rotación 3D

$$R_z(\theta)=\begin{array}{cccc} x_1 & y_1 & z_1 & \\ \left[\begin{array}{c} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{array}\right. & \begin{array}{c} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{array} & \left.\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right] & \begin{array}{c} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{array} \end{array}$$



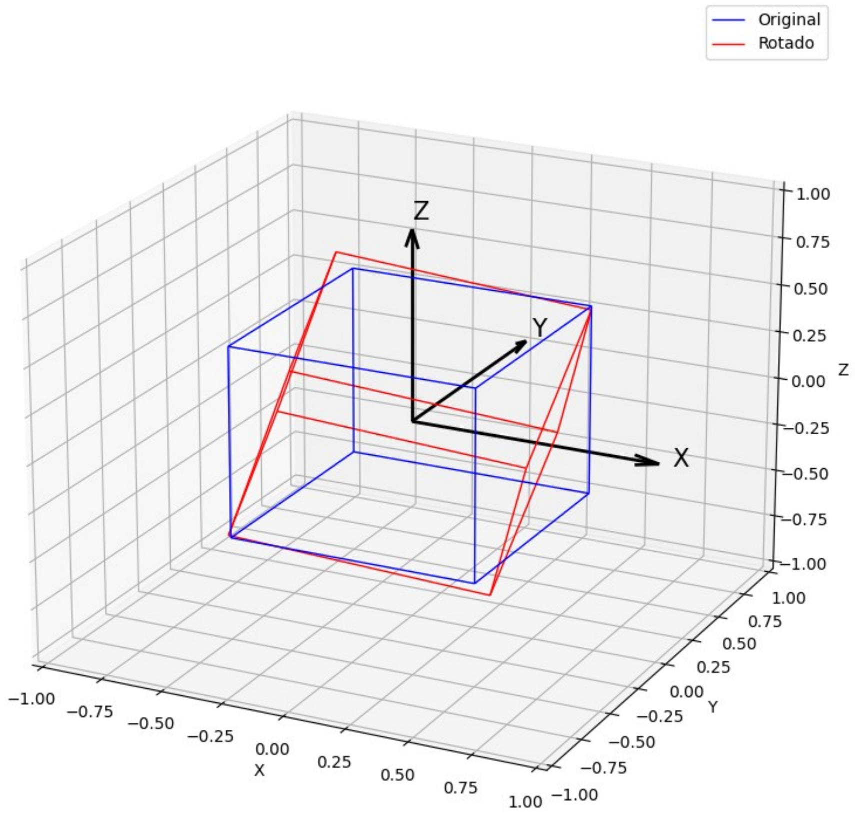




$$R_X(\theta)=[¿]$$

$$R_y(\theta)=[¿]$$

# Rotación 3D

- Cualquier rotación aleatoria se puede lograr utilizando 3 rotaciones a lo largo de sus ejes llamadas **ángulos de Euler****
- Se pueden multiplicar las rotaciones para llegar a un resultado



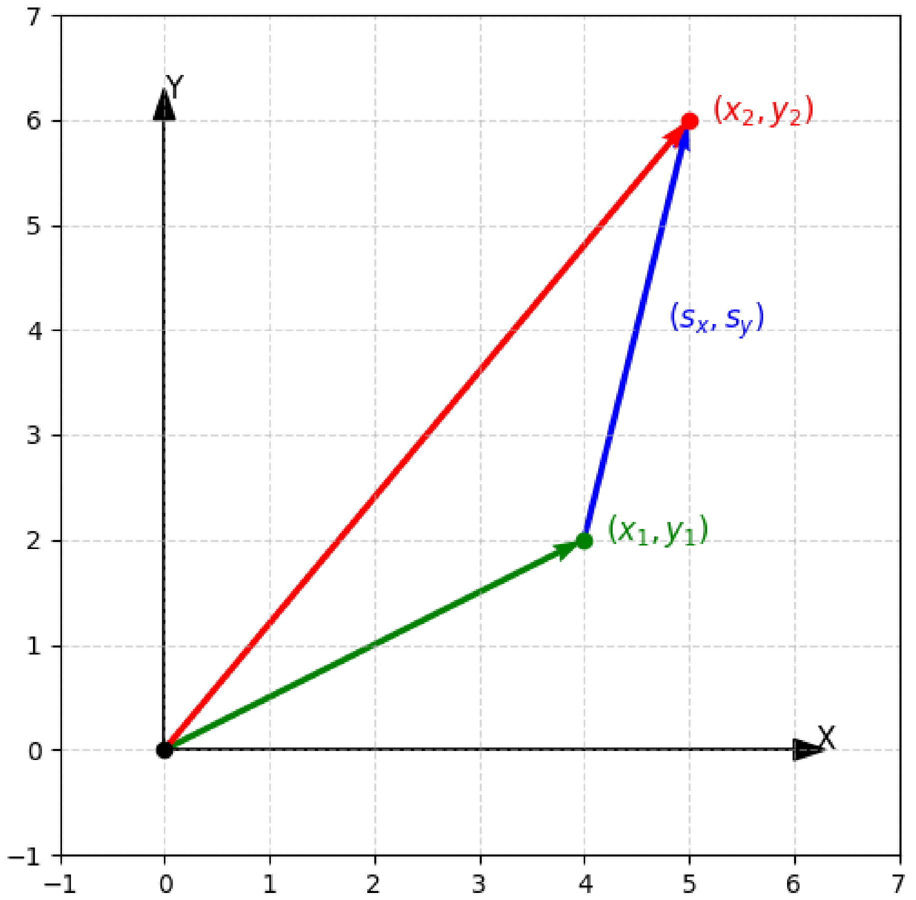

*Ver código *Rot3d.py*
***Mas info pg 44-55  Craig*

# Traslación

$$f(p)=p+b$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+p_x \\ y+p_y \end{bmatrix}$$

- Función correcta e incorrecta ya que es no linear
- La **traslación es una operación no linear** puesto que agrega vectores constantes
- La multiplicación de matrices es un proceso linear por lo que no permite representar traslación



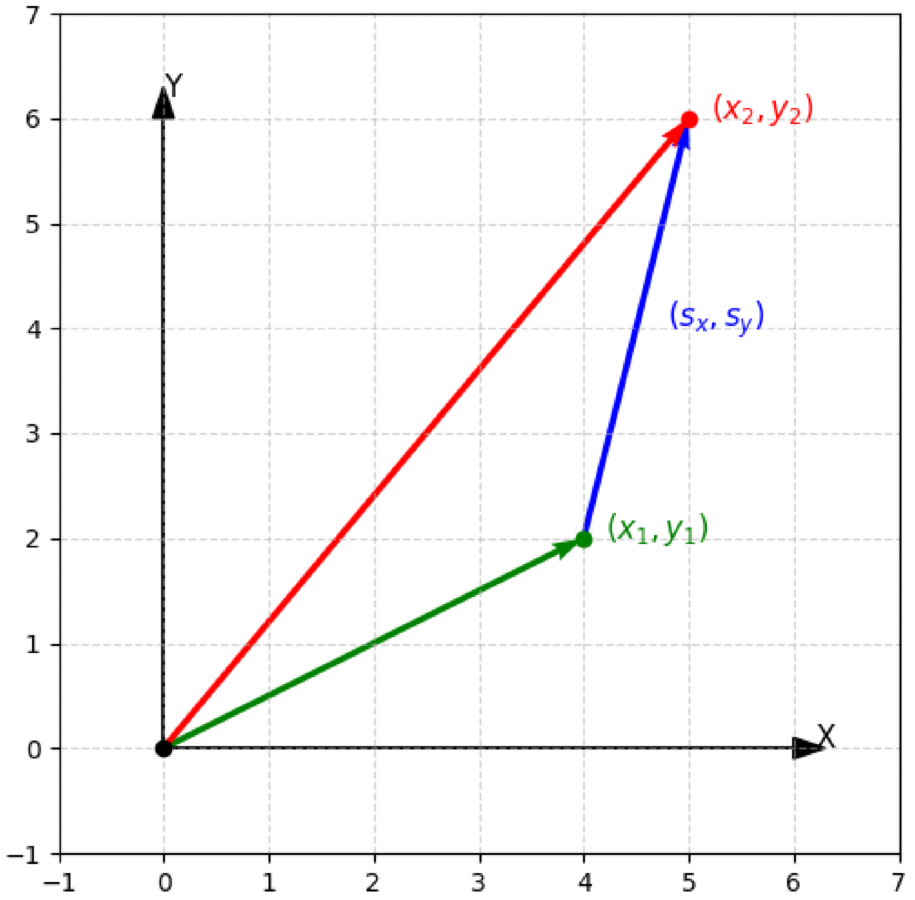
# Coordenadas Homogéneas

$$\bar{p}=\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}$$

$$\bar{p}_2=A\,\bar{p}_1=\bar{p}_1+s$$

$$\begin{bmatrix}x_2\\y_2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}? & ? & ?\\? & ? & ?\\? & ? & ?\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+p_x\\y_1+p_y\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_2\\y_2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & p_x\\0 & 1 & p_y\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+p_x\\y_1+p_y\\1\end{bmatrix}$$

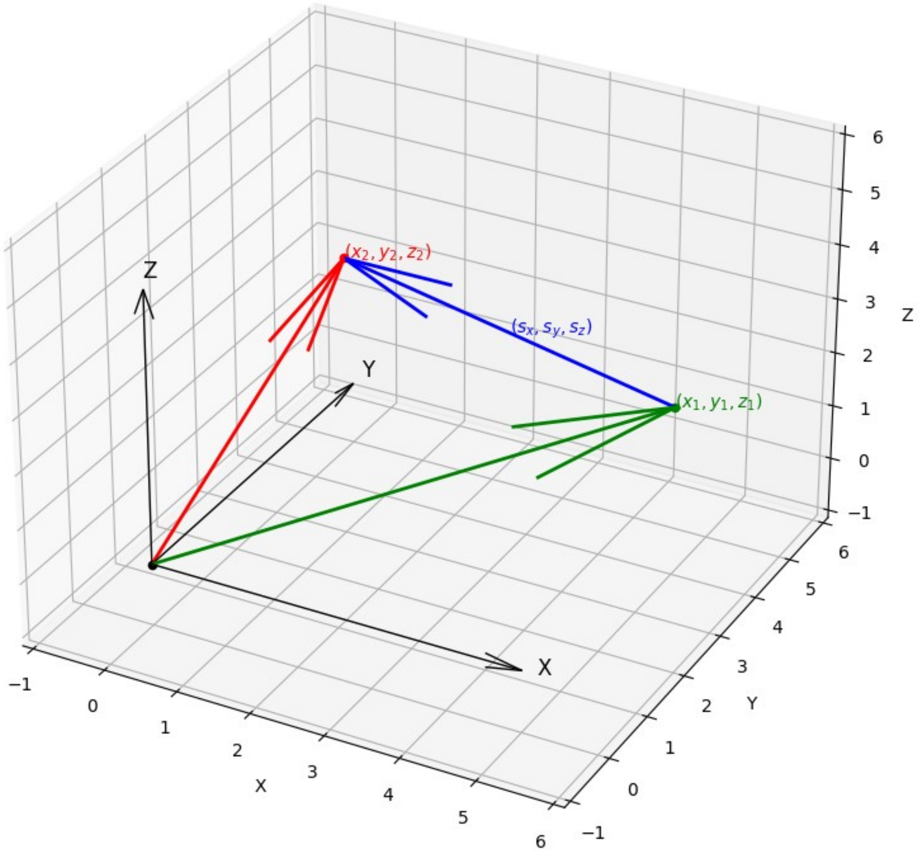



*Ver código *tras2d.py*

# Matriz de Traslación 3D

$$\overline{p}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+p_x \\ y_1+p_y \\ z_1+p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$



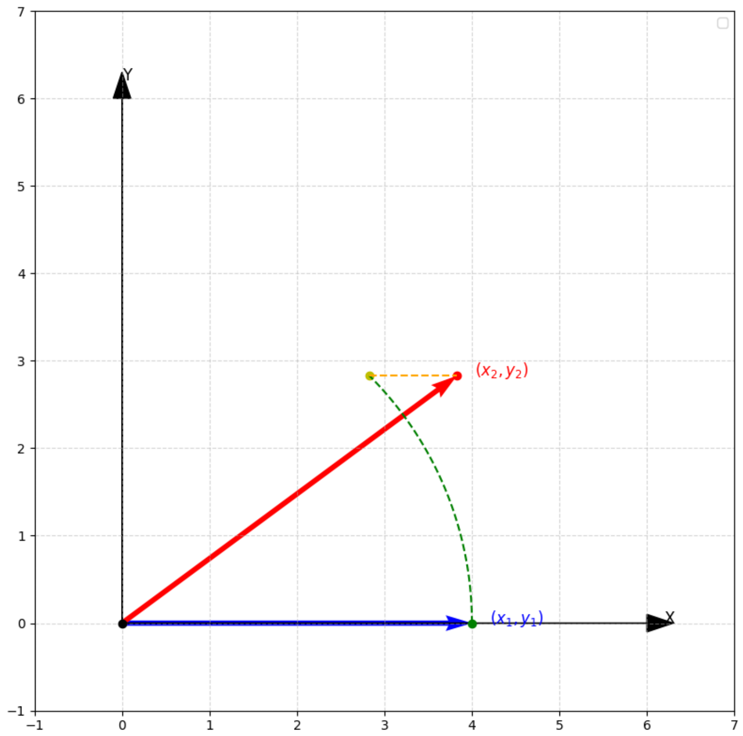

*Ver código *tras3d.py*

# Transformada Homogénea

$$f(p) = R(\theta)p + b \longrightarrow g(\overline{p}) = T\,\overline{p}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1 + p_x \\ y_1 + p_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & p_x \\ \sin\theta & \cos\theta & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



# Transformada Homogénea 3D

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & p_x \\ \sin\theta & \cos\theta & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformada 2D

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}$$

Rotacion 3D

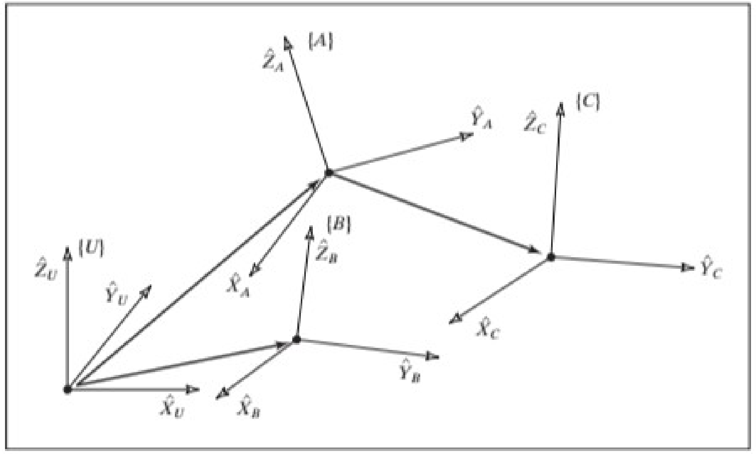
$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + p_x \\ y_1 + p_y \\ z_1 + p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

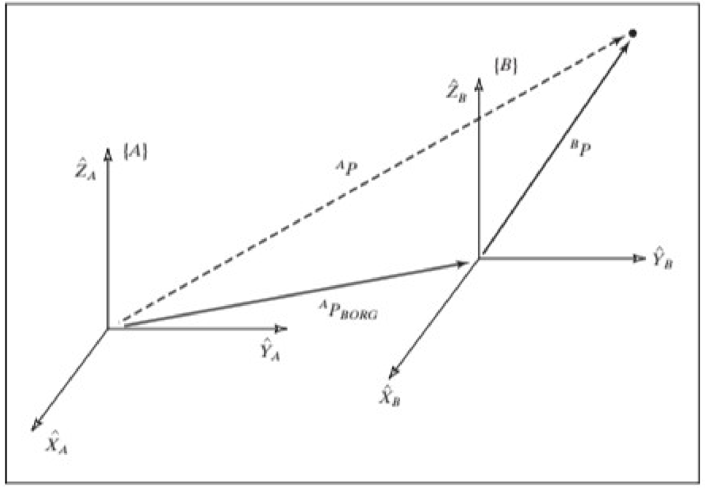
Traslacion 3D

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & p_x \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & p_y \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

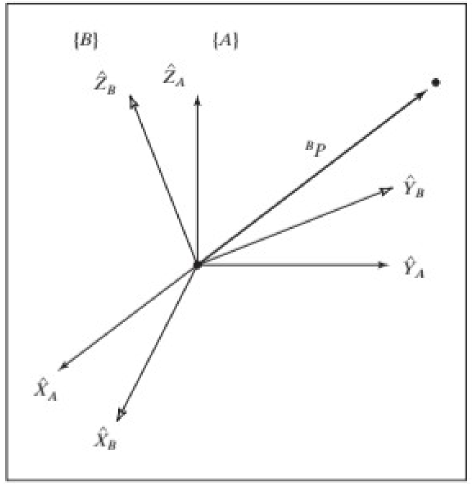
Matriz Transformada Homogenea

# Descripción de marcos de Referencia




$$^{A}P = {}^{B}P + {}^{A}P_{Borg}$$



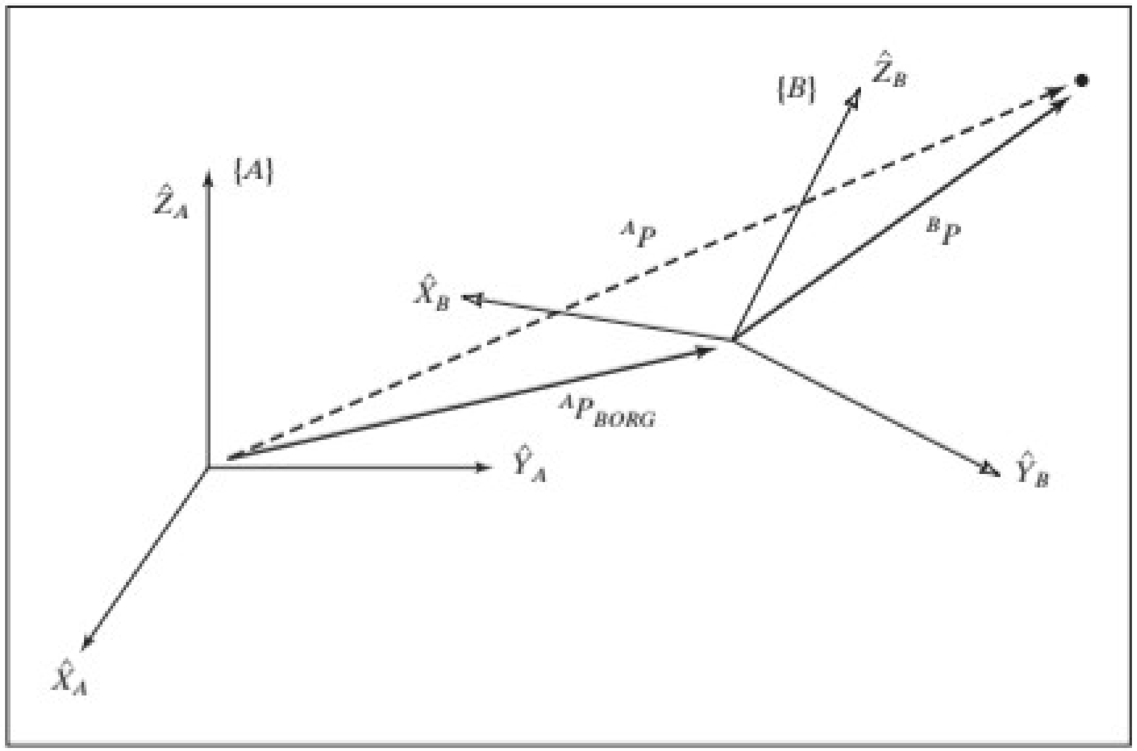

$$^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P$$

*Ver código *tras3d.py**



IBERO PUEBLA ® Departamento de Ciencias e Ingenierías /

# Descripción de marcos de Referencia

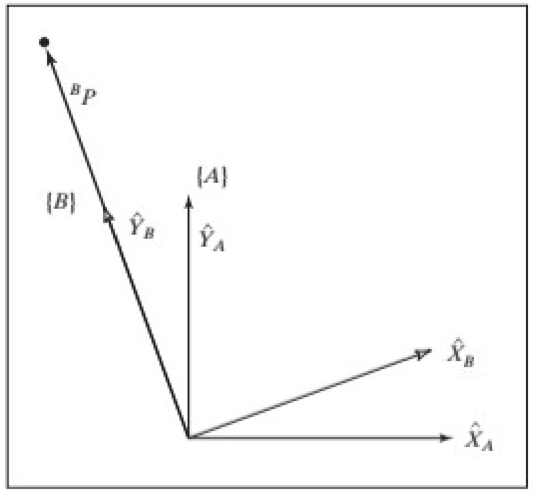



$$^{A}P = {}^{A}_{B}R\, {}^{B}P + {}^{A}P_{Borg}$$

$$^{A}P = {}^{A}_{B}T\, {}^{B}P$$

*Ver código *tras3d.py*

# Ejemplo 1

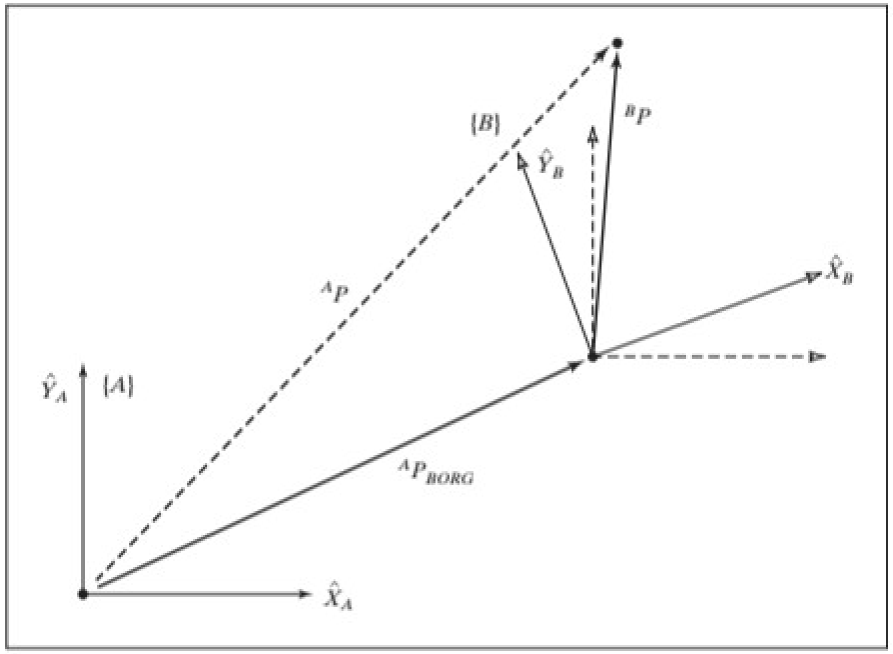



$${}^{A}_{B}R = 30°$$

$${}^{B}P = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^{A}P = ?$$

# Ejemplo 2




$$^A_BR = 30°$$

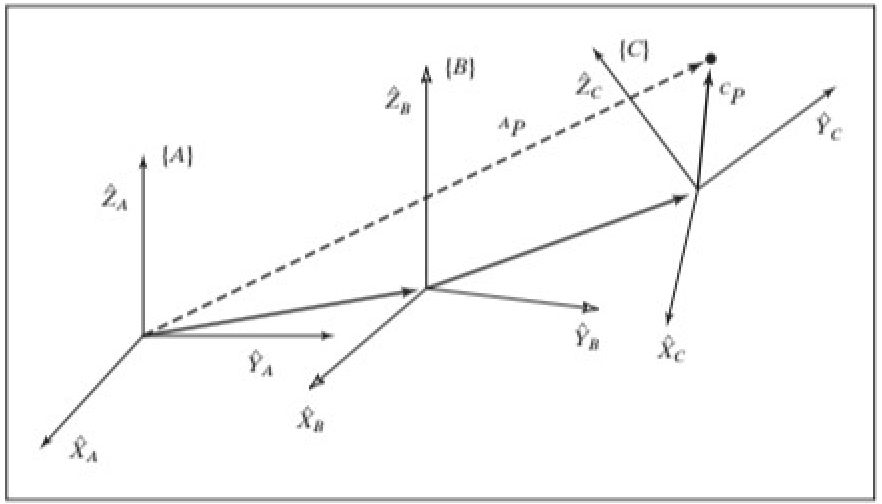
$$^AP_{Borg} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$^BP = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Departamento de Ciencias e Ingenierías /

# Ejemplo 3




$$^{B}P = {}^{B}_{C}T\,{}^{C}P$$

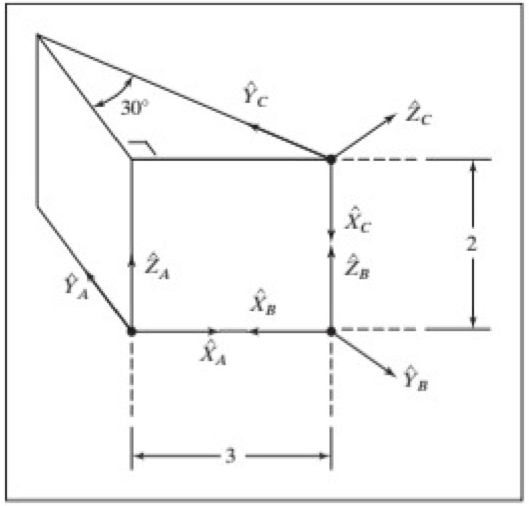
$$^{A}P = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}P$$

$$^{A}P = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}_{C}T\,{}^{C}P$$


IBERO PUEBLA ® Departamento de Ciencias e Ingenierías /

# Ejercicios

1. Un vector  es rotado alrededor del eje  por un ángulo de **45** grados y posteriormente es rotado alrededor del eje  por un ángulo de **60** grados. Da la matriz de rotación que realiza estas rotaciones en el orden indicado.
2. El sistema de referencia **{B}** se rota con respecto a **{A}** alrededor de  en **30** grados. La traslación de **{B}** desde **{A}** está dada por  Formula la matriz de transformación homogénea
3. A partir de la imagen dada obtén:
    1. El valor de
    2. El valor de

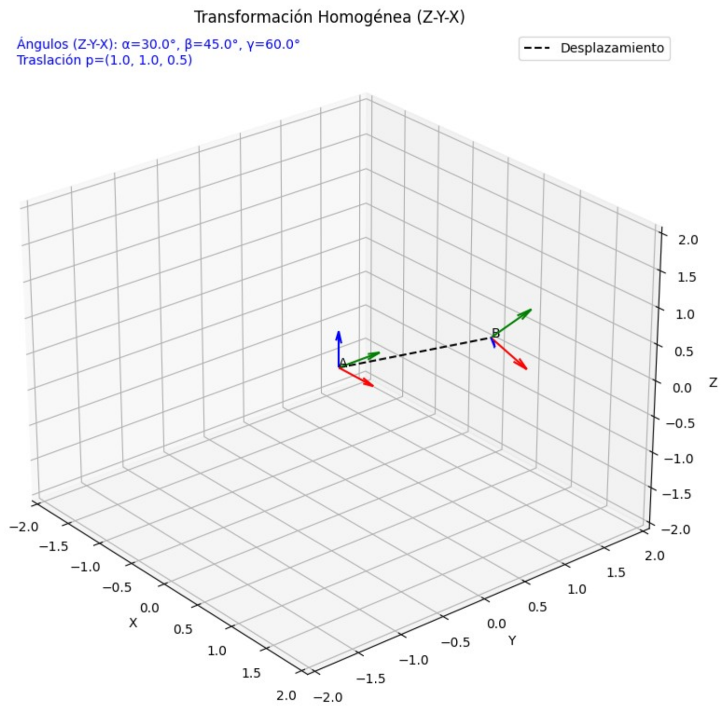


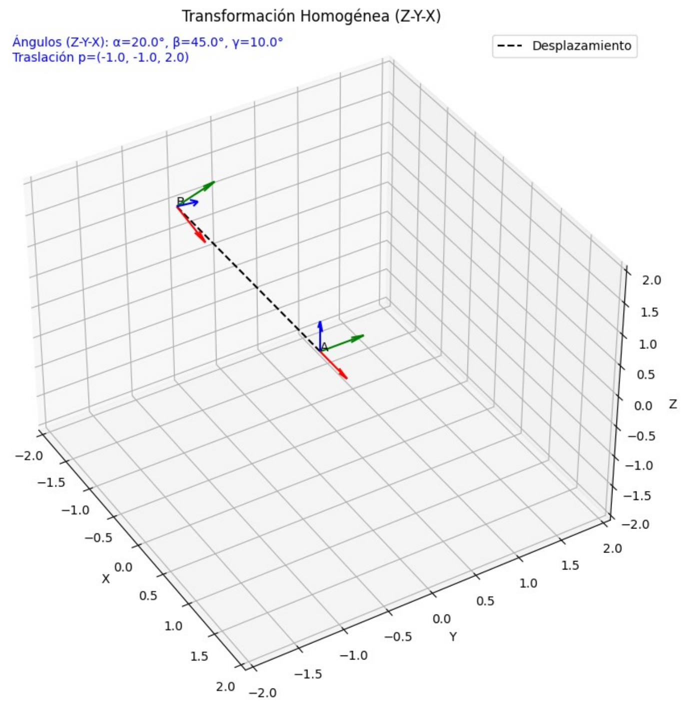



IBERO PUEBLA ®
Departamento de Ciencias e Ingenierías /

# Ejercicio Programación

1. Escribe un programa que calcule la transformada homogénea de una matriz , el usuario debe ser capaz de dar los valores de rotación de Z-Y-X utilizando los ángulos de rotación y el vector y que lo grafique como se muestra a continuación.





IBERO PUEBLA ®
Departamento de Ciencias e Ingenierías /