UNIVERSIDAD IBEROAMERICANA

PUEBLA

Robótica Aplicada

Profesor: Oliver Ochoa García

Cinemática Directa

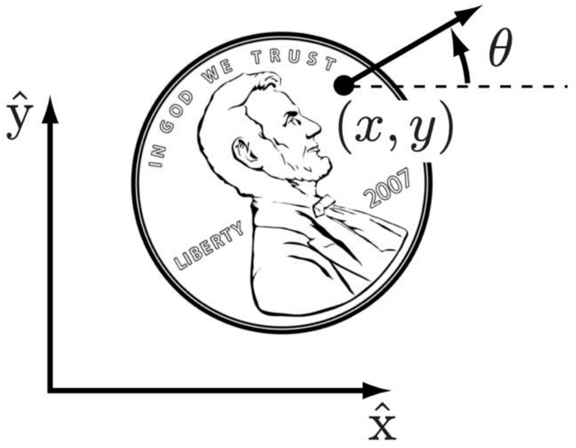
Descripción

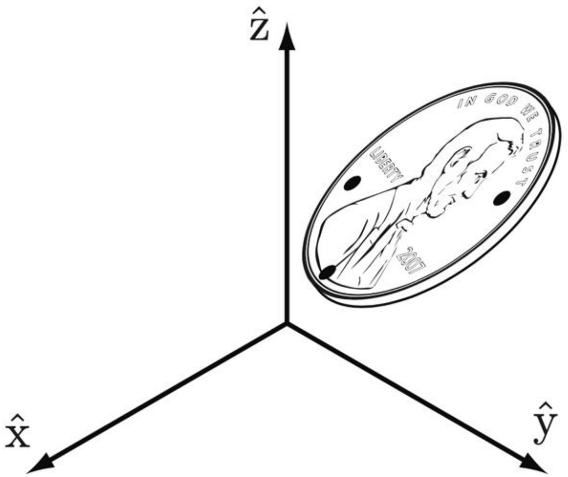
- La cinemática estudia el **movimiento sin considerar fuerzas**. Se enfoca en:
  - **Posición**
  - **Velocidad**
  - **Aceleración**
- Cinemática de Manipuladores:
  - Analiza las **propiedades geométricas y temporales** del movimiento.
  - Relaciona la **posición y orientación de los eslabones** del manipulador.
  - Se **asignan marcos de referencia** a las partes del mecanismo para describir sus relaciones.

IBERO PUEBLA ® Departamento de Ciencias e Ingenierías /

Conceptos

- **configuración:** una especificación de las posiciones de todos los puntos de un mecanismo
- **grados de libertad (dof):** # de # reales requeridos para describir una configuración
  - dof de un cuerpo plano: m = 3;
  - dof de un cuerpo espacial: m = 6
- **espacio de configuración (espacio C):** el espacio de dimensiones dof de todas las configuraciones

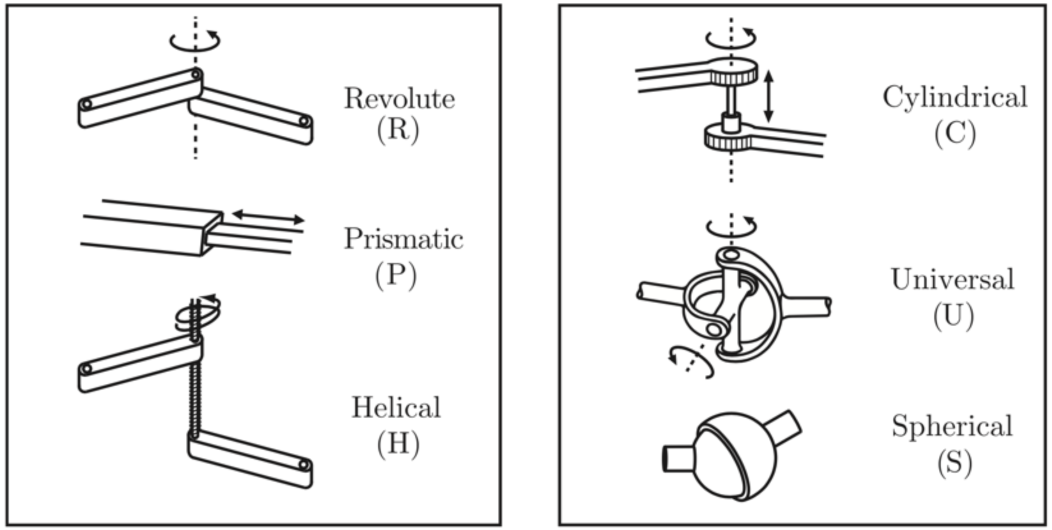


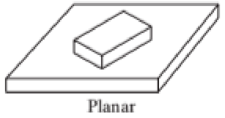


IBERO PUEBLA ® Departamento de Ciencias e Ingenierías /

Descripción

- Un manipulador puede considerarse como un conjunto de cuerpos conectados en cadena por medio de **articulaciones**. Estos cuerpos se llaman **eslabones**.

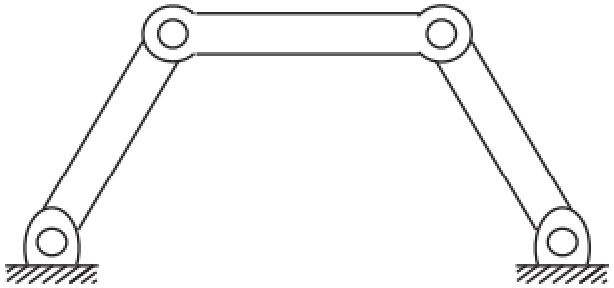


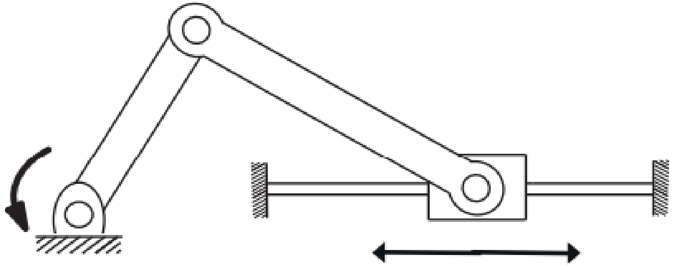


Tipo de Union	**dof *f***	**Restricciones (C) entre dos cuerpos rígidos planos**	**Restricciones (C) entre dos cuerpos rígidos espaciales**
Revoluta	1	2	5
Prismatico	1	2	5
Helicoidal	1	N/A	5
Cilindrica	2	N/A	4
Universal	2	N/A	4
Esferica	3	N/A	3
Planar	3	0	3

DOF de un mecanismo

- Dof de un mecanismo = Σ (Numero de Elementos) – Σ (Restricciones independientes por Unión)





$$\text{dof} = \underbrace{m(N-1)}_{\text{rigid body freedoms}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{J} c_i}_{\text{joint constraints}}$$

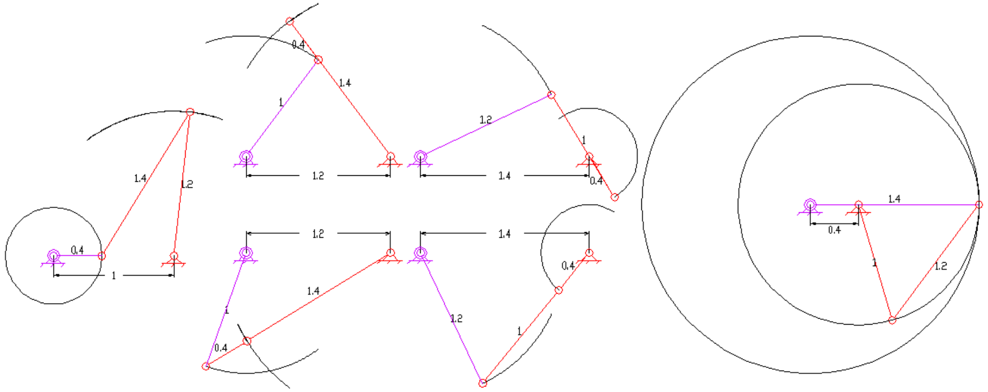
$$= m(N-1) - \sum_{i=1}^{J}(m - f_i)$$

$$= m(N-1-J) + \sum_{i=1}^{J} f_i.$$

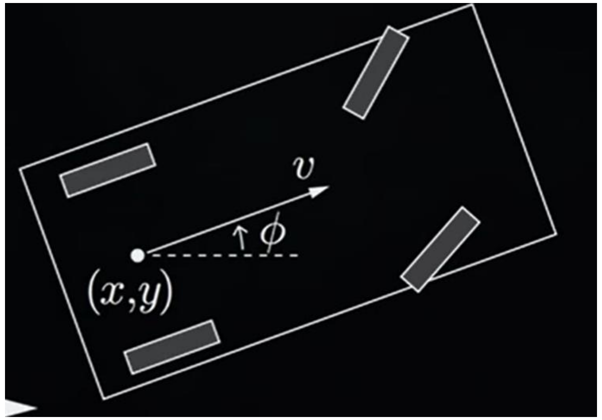
Formula de Grübler

Restricciones de Movimiento

- **Holonómicas** Son limitaciones que dependen **únicamente de la posición** del sistema.



- **No Holonómicas** Son limitaciones que dependen **de la velocidad o del camino que toma el sistema**, no solo de su posición.



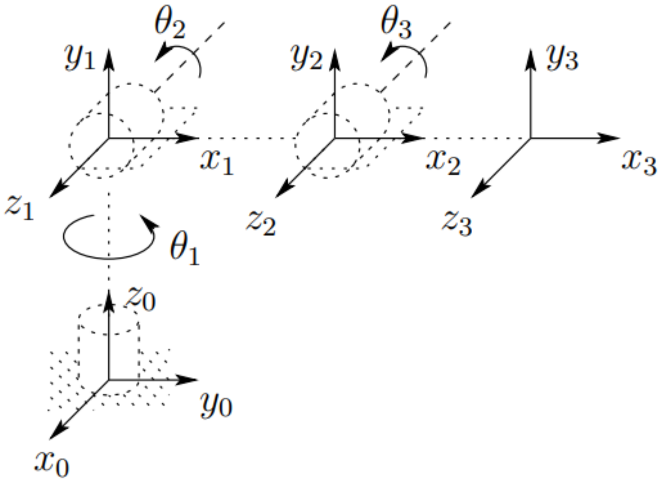
Cadenas Cinemáticas

- Se asume que se usan uniones de **un solo grado de Libertad** es decir, prismático o revoluta.
- Un robot con ***n* articulaciones** tendrá ***n+1* eslabones.**
- Se numeran las **articulaciones de 1 a *n*** y lo **eslabones de 0 a *n*** por lo que la articulación i conecta eslabón i-1 y eslabón i.
- La unión i es fija con respecto a eslabón i-1, por lo que **cuando articulación i es actuado, el eslabón *i* se mueve**.
- Cualquier articulación *i* es asociada con una variable $\boldsymbol{q_i}$

$$q_i = \begin{cases} \theta_i revoluta \\ d_i prismatico \end{cases}$$

Cadenas Cinemáticas

- Para realizar un análisis cinemático colocamos u **marco de coordenadas a cada eslabón,** $o_i x_i y_i$



- Debido a que la homogénea entre $o_i x_i y_i z_i$ y $o_{i-1} x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$ no es constante y varia con el movimiento se debe modificar en función a la variable de la articulacion q_i

$$T_i = T_i(q_i)$$

Cadenas Cinemáticas

$$ {}_{j}^{i}T = H_{i+1}H_{i+2} \ldots H_{j-1}H_{j} $$

$$ H = \begin{bmatrix} R_{i}^{i-1} & P_{i}^{i-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}_{j}^{i}T = H_{i+1} \ldots H_{j} = \begin{bmatrix} R_{j}^{i} & P_{j}^{i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ R_{j}^{i} = R_{i+1}^{i} \ldots R_{j}^{j-1} $$

$$ P_{j}^{i} = P_{j-1}^{i} + R_{j-1}^{i} P_{j}^{j-1} $$

Denavit Hartenberg

- Esta convención indica que una transformada homogénea puede ser representada por 4 transformaciones básicas

$$T_i = R_{z,\theta_i} P_{z,d_i} P_{z,a_i} R_{x,\alpha_i}$$

$$T_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde:

θ_i : *Angulo de Articulacion*

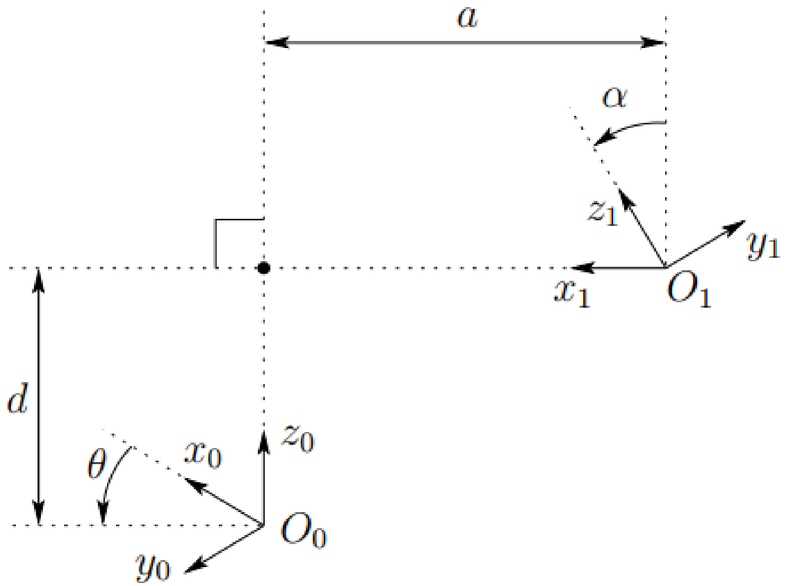
α_i: *torsión del eslabón*

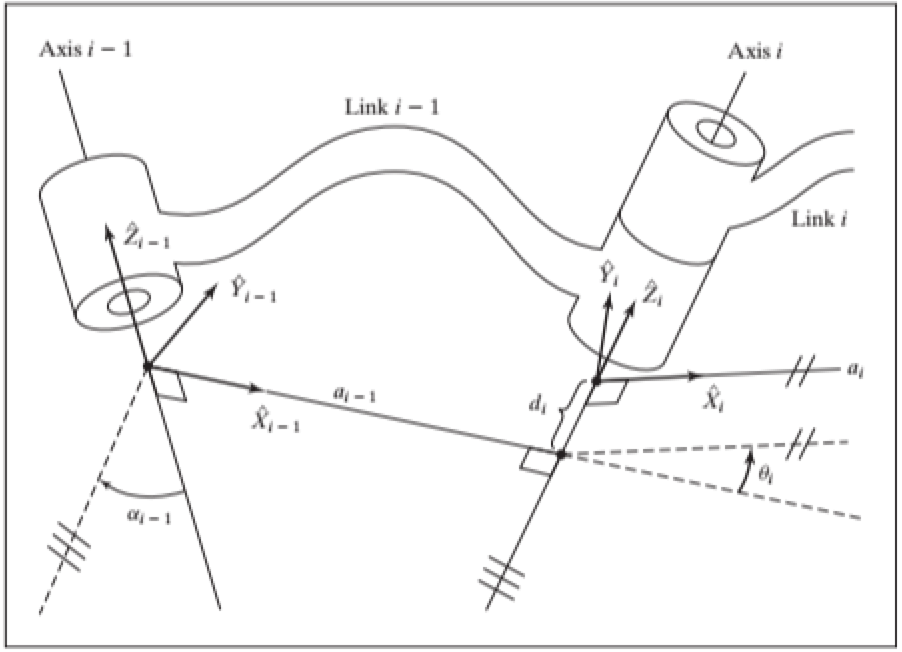
a_i: *longitud de eslabón*

d_i: *desplazamiento del eslabón*

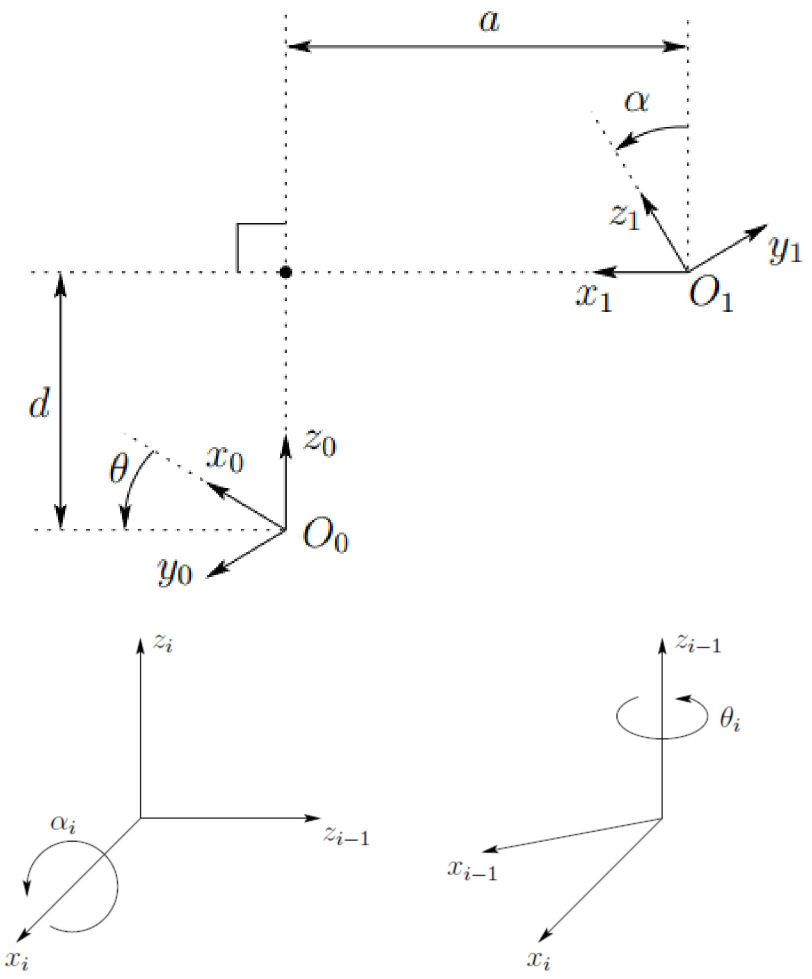
Convención Denavit-Hartenberg

$$\theta_i : Angulo\ de\ Articulacion$$
$$\alpha_i : torsión\ del\ eslabón$$
$$a_i : longitud\ de\ eslabón$$
$$d_i : desplazamiento\ del\ eslabón$$





Convención Denavit-Hartenberg

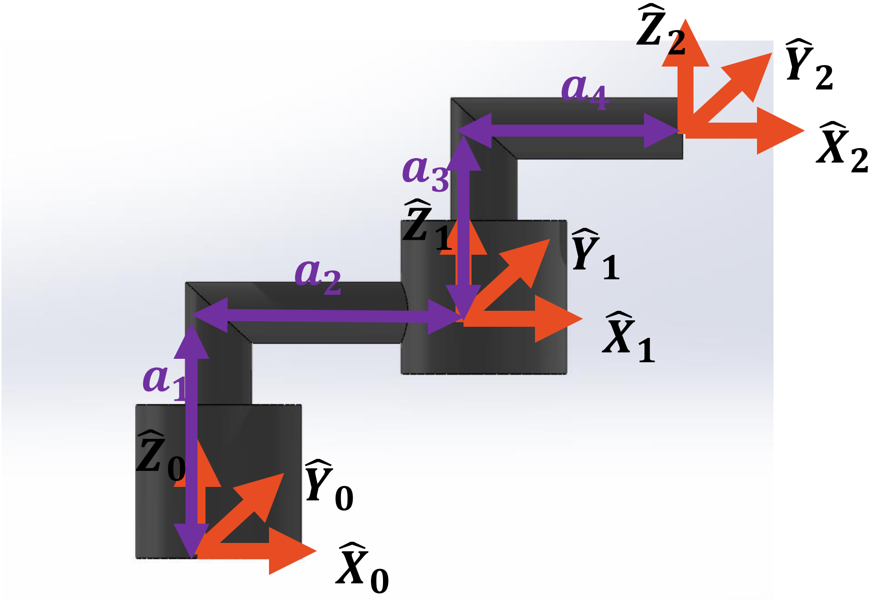


- Como se vio antes, se necesitan 6 números para definir la matriz, esto se logra con el correcto posicionamiento de los orígenes y ejes del robot

- **El eje x_1 es perpendicular al eje z_0.**
- **El eje x_1 intersecta al eje z_0.**

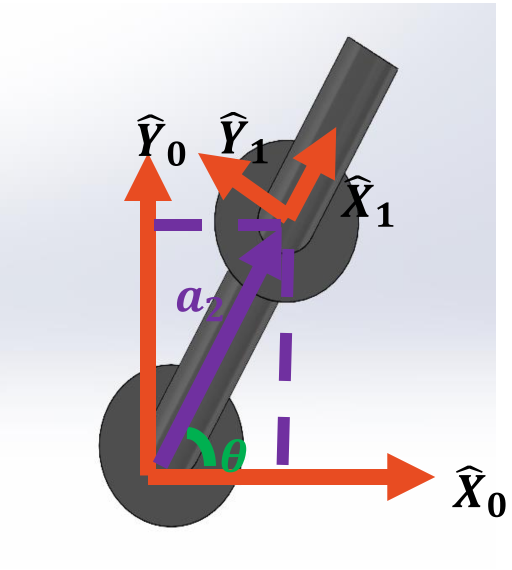
IBERO PUEBLA
Departamento de Ciencias e Ingenierías /

Convención Denavit-Hartenberg



$$p_1^0 = \begin{bmatrix} X_1^0 \\ Y_1^0 \\ Z_1^0 \end{bmatrix}$$

$$p_2^1 = \begin{bmatrix} X_2^1 \\ Y_2^1 \\ Z_2^1 \end{bmatrix}$$



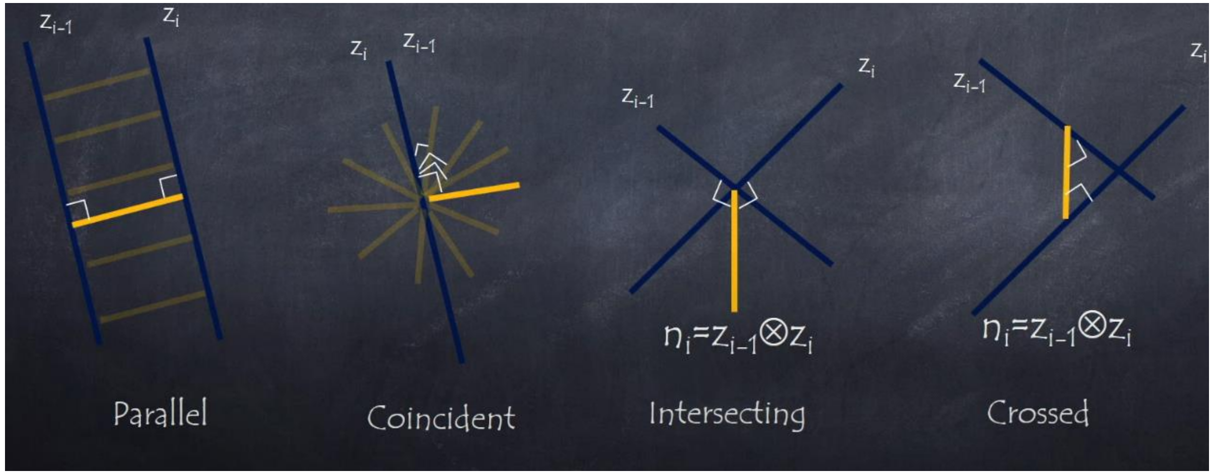
$$p_1^0 = \begin{bmatrix} a_2 \cos\theta \\ a_2 \sin\theta \\ a_1 \end{bmatrix}$$

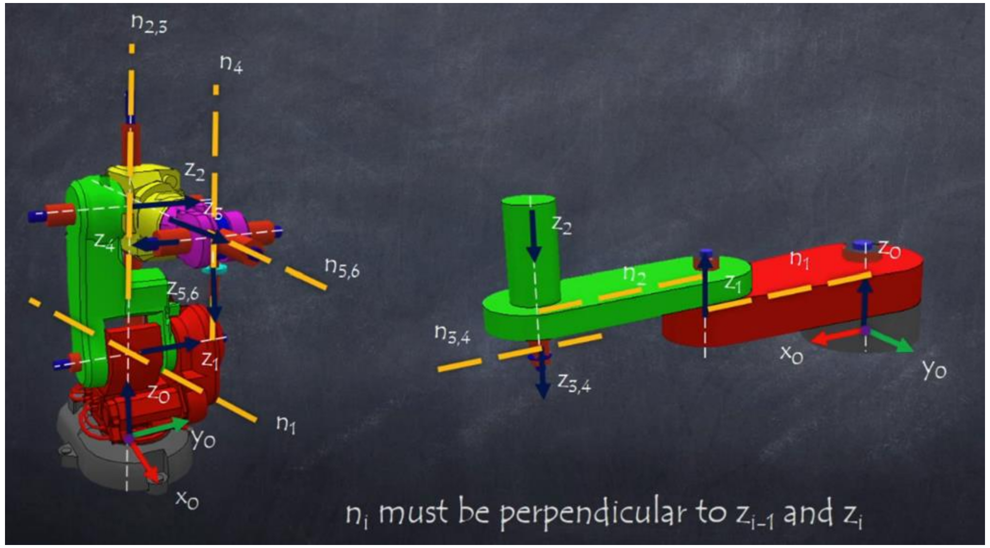
$$p_2^1 = \begin{bmatrix} a_4 \cos\theta \\ a_4 \sin\theta \\ a_3 \end{bmatrix}$$

IBERO PUEBLA
Departamento de Ciencias e Ingenierías /

Pasos para denavit

1. Ubicar y etiquetar los ejes de las articulaciones $z_0, \ldots, z_{n-1}$ siendo que z_i sea el eje de movimiento de la articulación
2. Establecer el marco base. Colocar el origen en cualquier punto del eje z_0 . Los ejes x_0 y y_0 se eligen de acuerdo con la referencia de mano derecha y la normal de los ejes.
3. Ubicar el origen O_i donde la normal común a z_i y z_{i-1} intersecte z_i . Si z_i intersecta z_{i-1}, colocar O_i en esta intersección. Si z_i y z_{i-1} son paralelos, ubicar O_i en cualquier posición a lo largo de z_i .

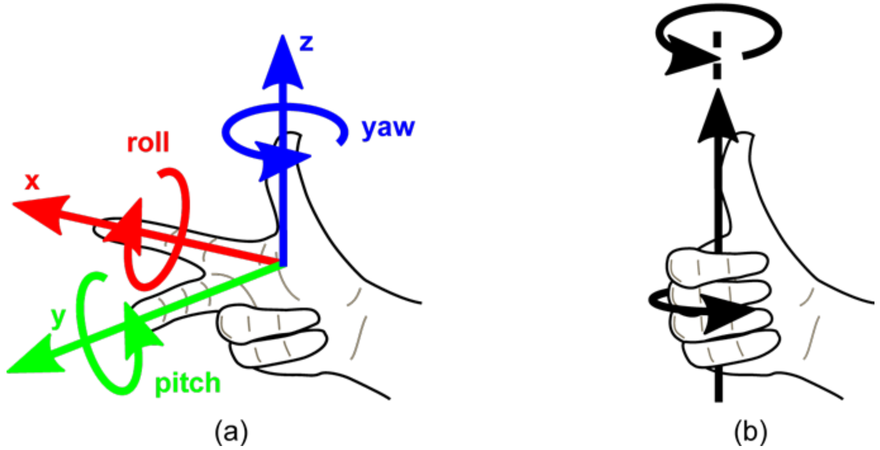




IBERO PUEBLA Departamento de Ciencias e Ingenierías /

Pasos para denavit

4. Establecer x_i a lo largo de la normal común entre z_{i-1} y z_i o en la dirección normal al plano $z_{i-1} - z_i$ si z_{i-1} y z_i se intersectan.
5. Establecer y_i para completar un sistema de referencia de mano derecha.



Pasos para denavit

6. Crear una tabla de los parámetros $a_i, d_i\ , \alpha_i, \theta_i$

$$\theta_i\ :Angulo\ de\ x_{i-1}\ a\ x\ medido\ a\ lo\ largo\ de\ z_{i-1}$$
$$\alpha_i: Angulo\ de\ z_{i-1}\ a\ z\ medido\ a\ lo\ largo\ de\ x_i$$
$$a_i: distancia\ a\ lo\ largo\ de\ x_i\ desde\ o_{i-1}\ a\ o_i$$
$$d_i: distancia\ a\ lo\ largo\ de\ z_i\ desde\ o_{i-1}\ a\ o_i$$

Eslabon	a_i	d_i	α_i	θ_i
1	a_1	d_1	α_1	θ_1
…				
n	a_n	d_n	α_n	θ_n

Pasos para denavit

7. Formar las matrices de transformación T_i sustituyendo con los datos de la tabla

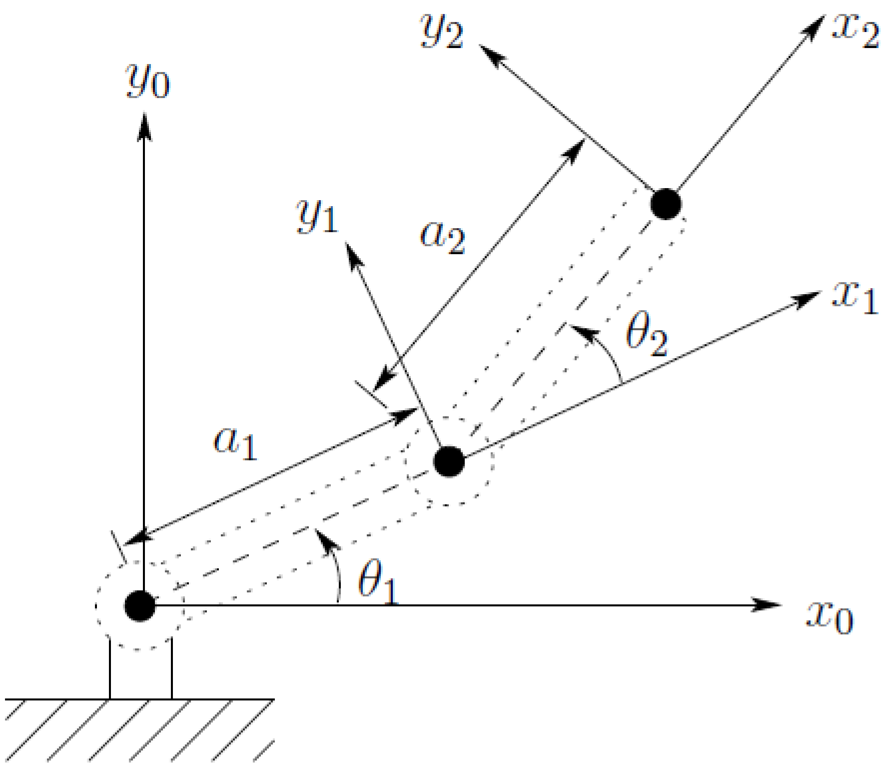
$$T_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Sacar la transformada final multiplicando las distintas transformadas

$${}^{0}_{n}T = {}^{0}_{1}T, {}^{1}_{2}T, \ldots {}^{n-1}_{n}T$$

Ejemplo 1

Eslabon	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	a_1	0	0	$\boldsymbol{\theta_1}$
2	a_2	0	0	$\boldsymbol{\theta_2}$



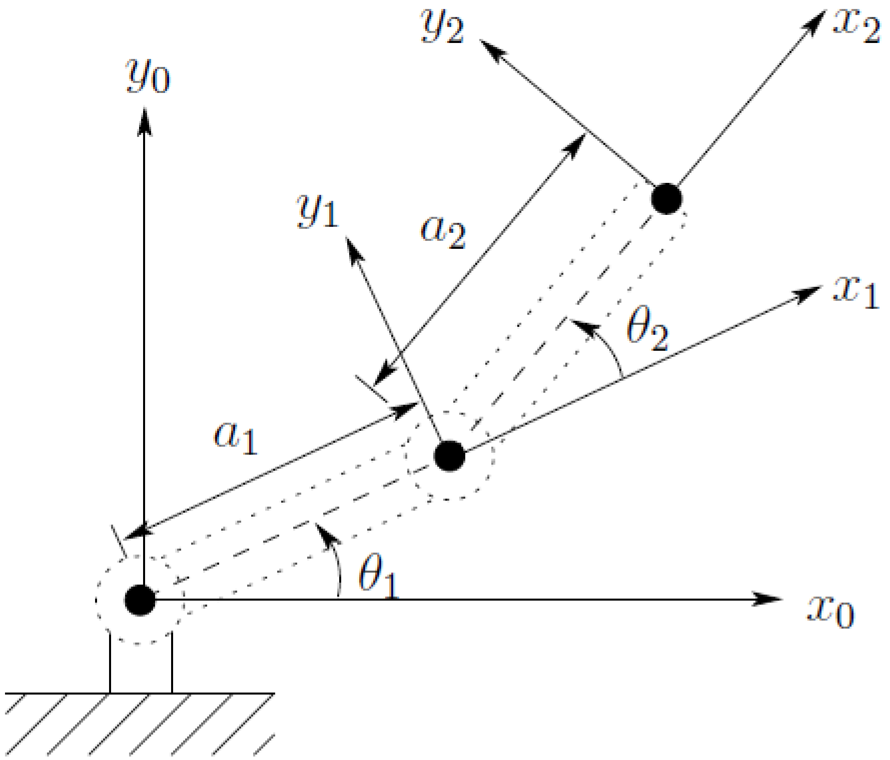
Ejemplo 1

Eslabón	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	a_1	0	0	$\boldsymbol{\theta_1}$
2	a_2	0	0	$\boldsymbol{\theta_2}$

$$ {}_1^0T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_i & 0 & a_1c\theta_1 \\ s\theta_1 & c\theta_i & 0 & a_1s\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

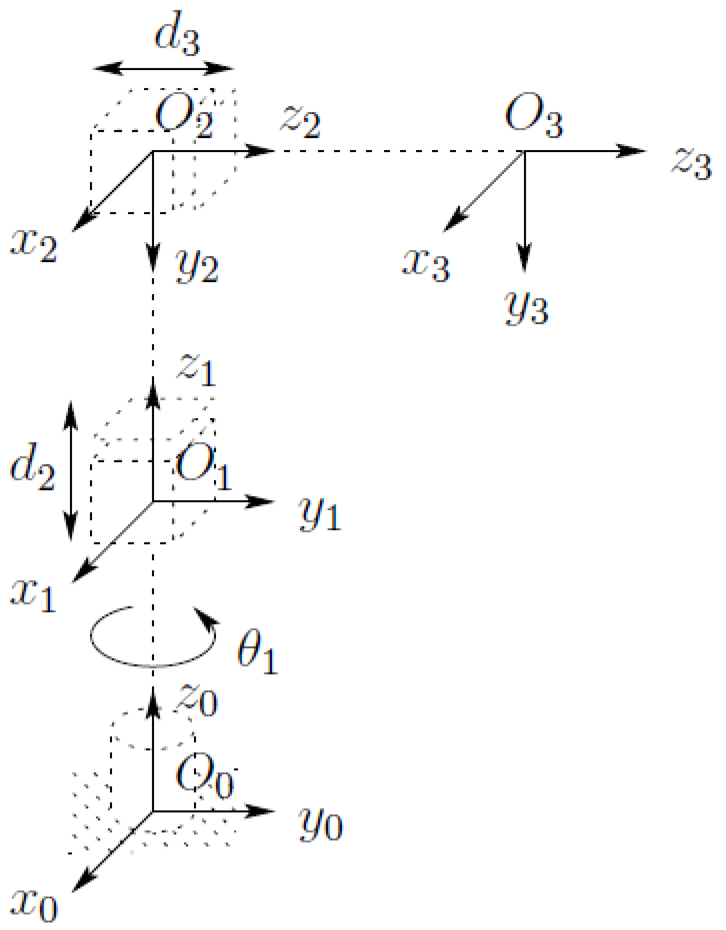
$$ {}_2^1T = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & a_2c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & a_2s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}_2^0T = \begin{bmatrix} c\theta_{12} & -s\theta_{12} & 0 & a_1c\theta_1 + a_2c\theta_2 \\ s\theta_{12} & c\theta_{12} & 0 & a_1s\theta_1 + a_2s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$



Ejemplo 2

Eslabón	a_i	α_i	d_i	θ_i
1				
2				
3				



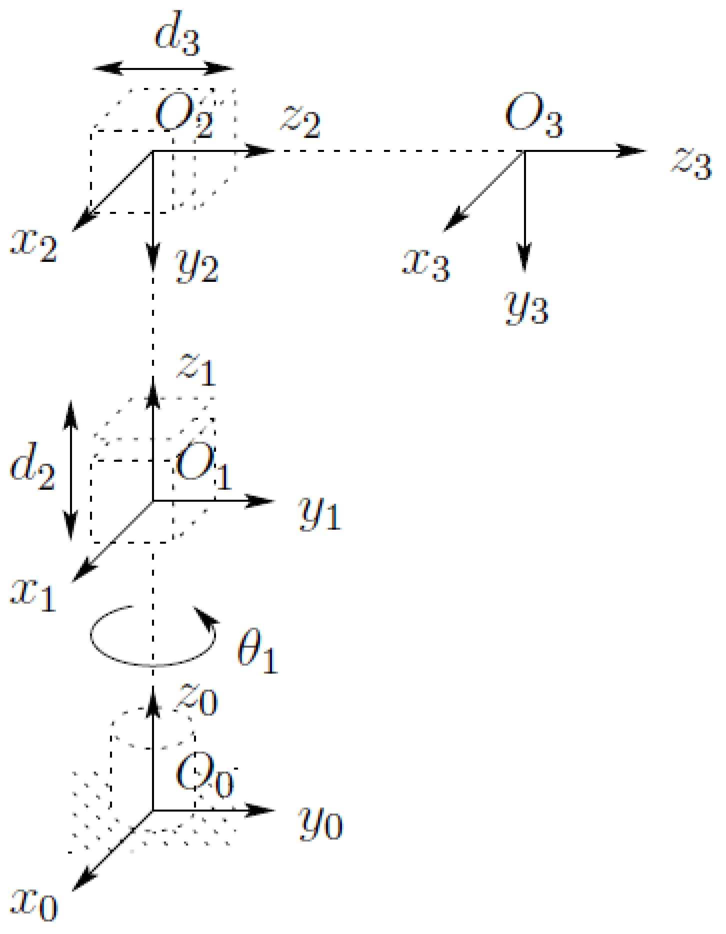
Ejemplo 2

Eslabón	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	0	d_1	$\boldsymbol{\theta_1}$
2	0	-90	$\boldsymbol{d_2}$	0
3	0	0	$\boldsymbol{d_3}$	0

$$ {}^{0}_{1}T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

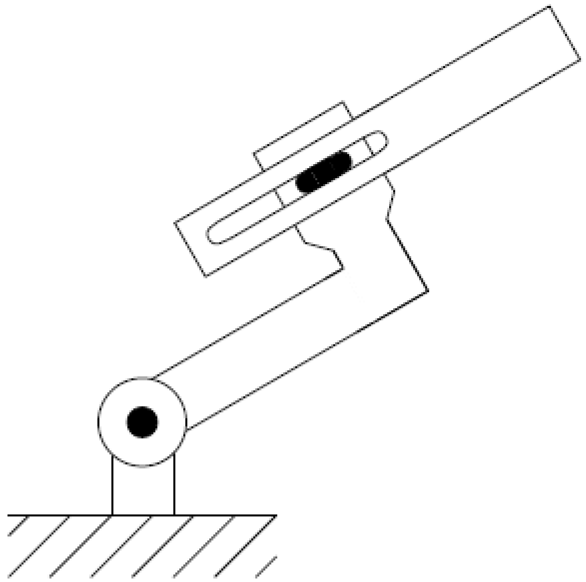
$$ {}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{0}_{2}T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & -s\theta_1 & -s\theta_1 d_3 \\ s\theta_1 & 0 & c\theta_1 & c\theta_1 d_3 \\ 0 & -1 & 1 & d_1 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

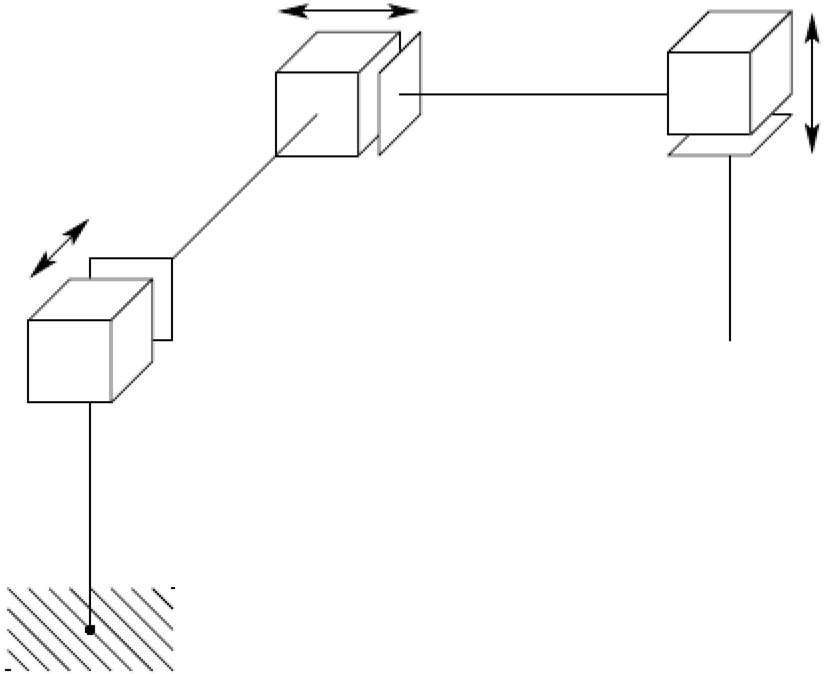


IBERO PUEBLA Departamento de Ciencias e Ingenierías /

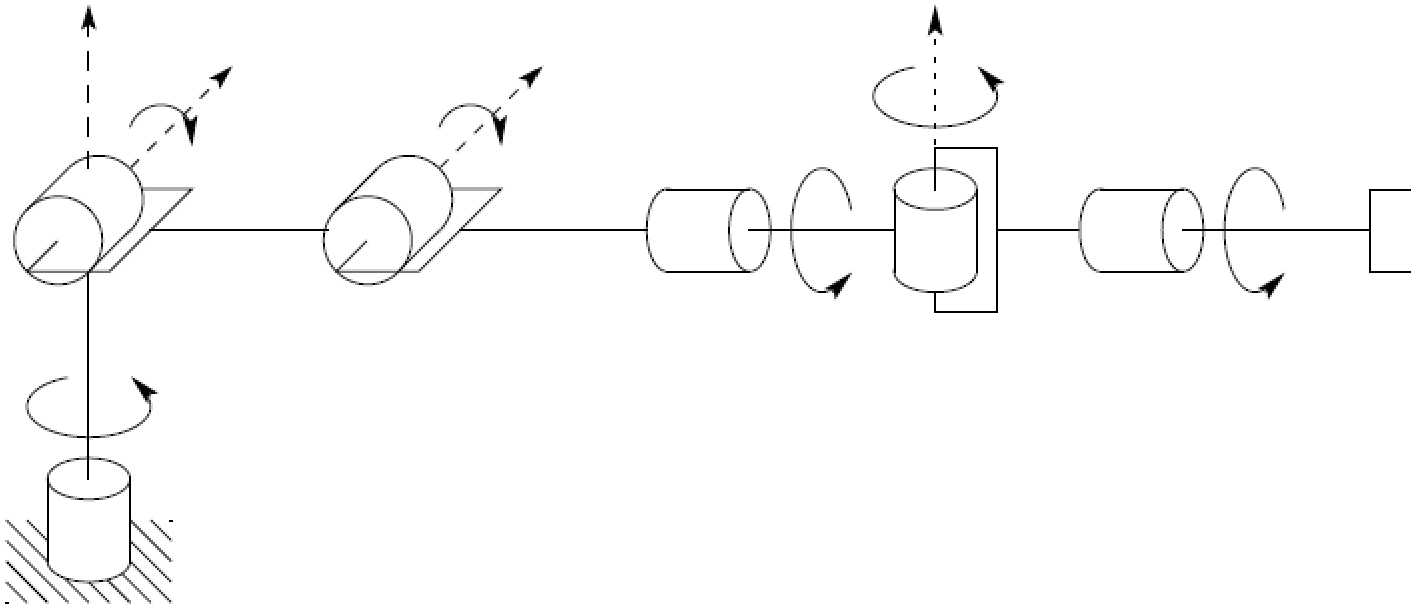
Ejercicio 1 Robot Planar



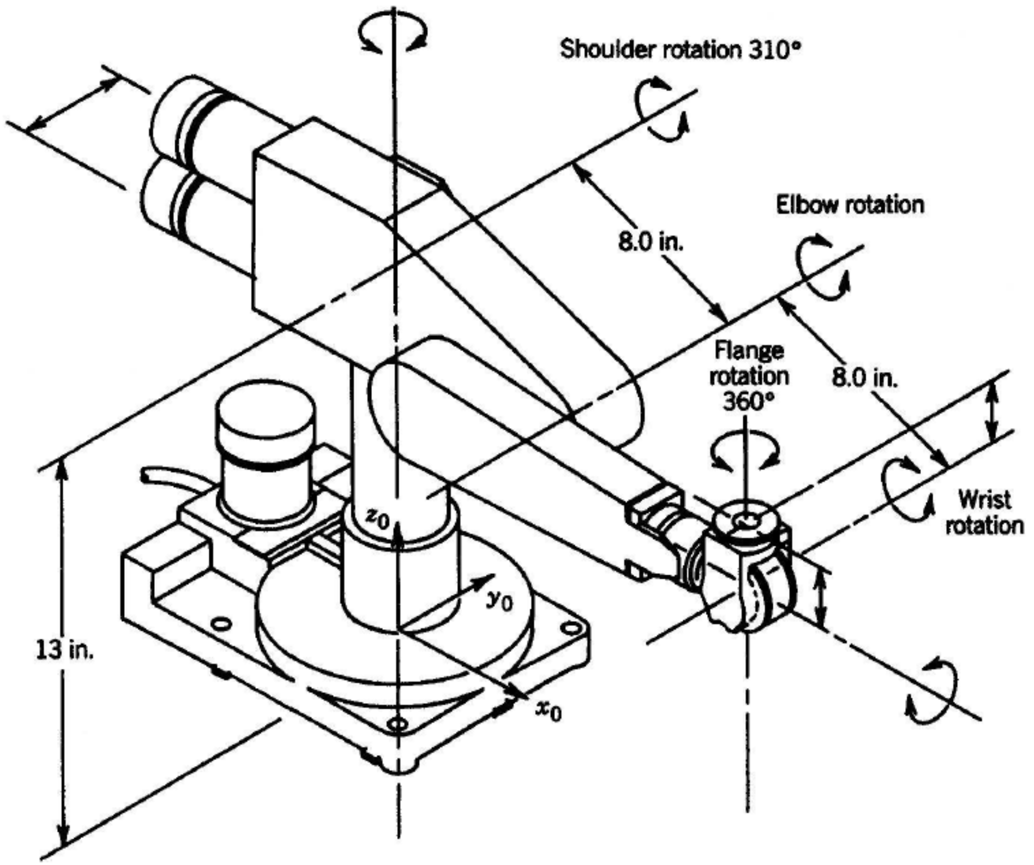
Ejercicio 2 Robot Cartesiano



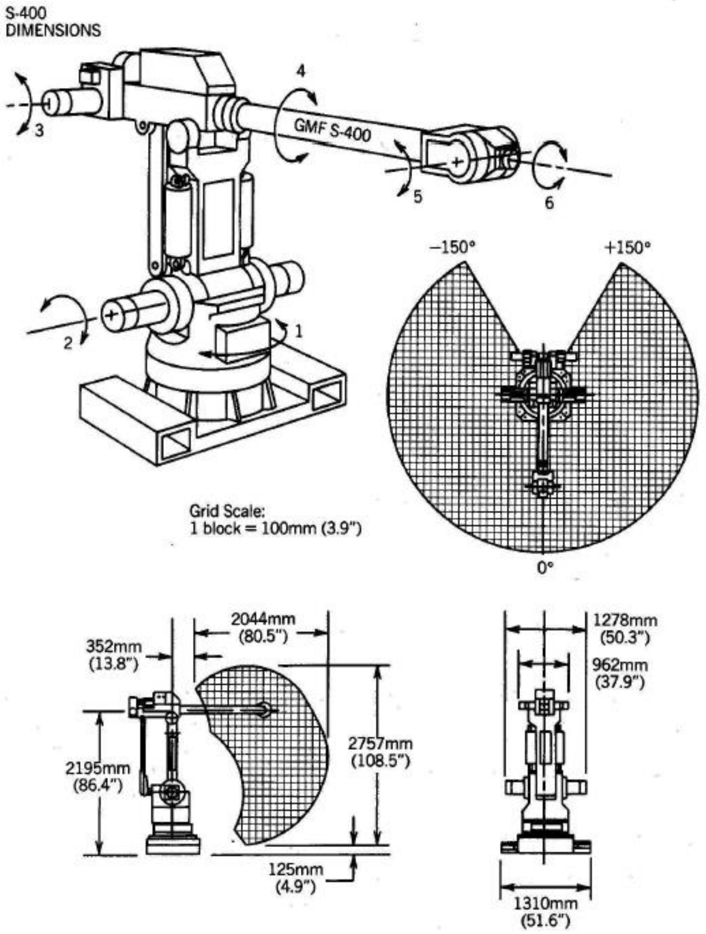
Ejercicio 3 Manipulador con muñeca esférica



Ejercicio 4 PUMA 260



Ejercicio 5


S-400
DIMENSIONS
GMF S-400
1
2
3
4
5
6
−150°
+150°
0°
Grid Scale:
1 block = 100mm (3.9")
352mm
(13.8")
2044mm
(80.5")
2195mm
(86.4")
2757mm
(108.5")
125mm
(4.9")
1278mm
(50.3")
962mm
(37.9")
1310mm
(51.6")