Matemática IV
Ayudantia #4
08 Septiembre 2016

1. Para los siguientes problemas recuerde que:

   - $k = \dfrac{\|\vec{r'}(t) \times \vec{r''}(t)\|}{\|\vec{r'}(t)\|^3}$
   - $\tau = \dfrac{\vec{r'}(t) \times \vec{r''}(t) \cdot \vec{r'''}(t)}{\|\vec{r'}(t) \times \vec{r'}(t)\|^2}$
   - $\vec{B} = \dfrac{\vec{r'}(t) \times \vec{r''}(t)}{\|\vec{r'}(t) \times \vec{r''}(t)\|}$
   - Además para comprobar sus resultados, usando *Mathematica*, puede usar los siguientes comandos:

     - Definir función paramétrica: `r[t_]:={3Log[t],t,Cos[t]}`
     - Derivada de la función: `r'[t],r''[t],`$\cdots$, primera, segunda,$\cdots$
     - Producto punto: `{t,-3Tan[t],2 }.{ 0,1,3Sec[t]}`
     - Producto cruz: `Cross[r'[t],r''[t]]`, recuerde que para usar el comando `Cross[`$\cdots$`]` las funciones tienen que estar definidas con 3 componentes, si es una curva plana use la última componente como 0.

2. Muestre que para una curva plana $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, la curvatura se puede expresar como:

$$k = \frac{|y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)|}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{3/2}}$$

3. Demuestre que la curvatura de una circunaferencia de radio R es $k = \dfrac{1}{R}$.

4. Parametrice la Γ que resulta de la intersección de $4z = x^2 + y^2$ y $4x + y^2 = 0$. Hallar la ecuación del plano osculador en el punto $(-1, 2, 2)$.

5. Parametrice la curva resultante de la intersección de $z = xy$ y $x^2 + y^2 = 1$. Hallar los puntos donde la torsión es nula.

6. Considere la curva σ, intersección de las superficies $x + y + z = 4$ y $x^2 + y^2 - x + y + z = 4$.

   - Encuentre una parametrización para σ.
   - Encuentre el vector binormal en el punto $(1, -1, 4)$.
   - Encuentre la torsión en el punto $(1, -1, 4)$.

7. Considere la siguiente parametrización: $\vec{\Gamma}(t) \begin{cases} x(t) &= 1 + 3t + 2t^2 \\ y(t) &= 2 - 2t + 5t^2 \\ z(t) &= 1 - t^2 \end{cases}$ Demuestre que la curva está contenida en un plano, además encontrar la ecuación del plano.
   Sugerencia: Para todas las curvas planares se cumple $\tau = 0$

8. Considere la curva $\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, donde $a > 0$, $b > 0$

   - Pruebe que la torsión es constante e igual a $\dfrac{b}{a^2 + b^2}$
   - Encuentre b tal que la torsión sea máxima, con a constante.
   - Demuestre que la razón entre la curvatura y la torsión es constante e igual a $\dfrac{a}{b}$.
   - Si $\theta(t)$ es el ángulo formado por la recta tangente a la curva con el eje z, pruebe que:

$$\cos\theta(t) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

9. Calcule el centro de inercia de la intersección de las curvas $x^2 + y^2 = 4$ y $x + y + z = 1$, si la densidad viene dada por $\delta(x, y, z) = \dfrac{(1-z)^2}{\sqrt{8-2xy}}$.

10. Calcule la energía cinética de la curva $\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, b)$, $0 \le t \le 2\pi$, de densidad $\delta(t) = \dfrac{e^t}{(a\cos t - a/2)^2 + a^2\sin^2 t}$, que gira en torno a la recta $\vec{l} = t(a/2, 0, 1)$, $t \in \mathbb{R}$, a una velocidad angular $\omega = be^{-t}\,[rad/s]$.

    Sugerencia: Recuerde que $\omega \cdot r = v$, además $dE = \dfrac{1}{2}v^2 dm$.