**Contenidos**

- Diferenciabilidad.
- Regla de la Cadena.
- Aplicaciones del Gradiente.
- Teoremas de la Función Implícita e Inversa.

# Problemas Propuestos

1. Dada la función
$$f(x,y)=\begin{cases} x+y+\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}, & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
   (a) ¿Es $f$ continua en $(0,0)$?
   (b) ¿Es $f$ diferenciable en $(0,0)$?

2. Considere las función
$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
   Demuestre que $f$ es diferenciable en el origen y pruebe la continuidad de sus derivadas parciales en dicho punto.

3. Dada la función escalar $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida del siguiente modo
$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^4-y^4}{x^2+xy+y^2}, & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
   (a) ¿Admite $f$ derivada direccional en $(0,0)$ para todo vector unitario $\hat{u}=(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)$?
   (b) ¿Es $f$ diferenciable en $(0,0)$?

4. Se define
$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy-2y}{y+\sqrt{y^2+(x-2)^2}}, & \text{si} \quad (x,y)\neq(2,y) \\ 0, & \text{si} \quad (x,y)=(2,y)\end{cases}$$
   (a) Determine si $f$ es diferenciable en $(2,1)$. En tal caso determine la ecuación del plano tangente.
   (b) Determine si $H(x,y)=(\cos(x^2+y^3),f(x,y))$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

5. Si $\phi\in\mathcal{C}^1$, demostrar que la función
$$z=e^y\phi(y\,e^{x^2/2y^2})$$
   satisface la ecuación
$$(x^2-y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xyz.$$

6. Dada $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$. Si $F=(F_1,F_2,F_3)$ Se define su *divergencia* como la función de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}$ dada por
$$\nabla\cdot F=\frac{\partial}{\partial x}F_1+\frac{\partial}{\partial y}F_2+\frac{\partial}{\partial z}F_3.$$
   Sea $P:(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Se define el vector de posición como $\vec{r}=\overrightarrow{OP}=(x,y,z)$. Una función $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ se dice *radial* si $f=f(r)$, donde $r=\|\vec{r}\|$.
   (a) Calcular la divergencia de la función $\vec{r}$.

(b) Encontrar una fórmula para la divergencia de la función $F(\vec{r}) = f(r)\,\vec{r}$. Si $c > 0$, aplique su resultado para demostrar que la función $F(\vec{r}) = c\dfrac{\vec{r}}{r^3}$, $r \neq \vec{0}$ posee divergencia nula.

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$. El *Laplaciano* de $f$ es el operador dado por

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

(a) Muestre que $f(x, y) = \arctan(y/x)$ tiene por gradiente al campo vectorial

$$F(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

(b) Demuestre que la función del ítem anterior satisface la ecuación de $\Delta f = 0$.
*Ayuda:* Puede utilizar coordenadas polares y la forma del operador Laplaciano en coordenadas polares vista en la tercera ayudantía.

8. Un cono circular recto cambia de tamaño de tal forma que su área lateral se mantiene constante e igual a $480\pi\,\text{cm}^2$. El radio de su base crece a razón de 2 cm/seg. Hallar la rapidez con la que cambia su altura y volumen, en el instante en que el radio es de 12 cm.

9. Halle la ecuación cartesiana del plano tangente a la superficie $xyz = a^3$ en un punto genérico de la misma $(x_0, y_0, z_0)$. Calcular el volumen del tetraedro limitado por ese plano y los tres planos coordenados.

10. Determine la derivada direccional de $f(x, y) = \text{máx}\{|x|, |y|\}$ en el punto $(1, 1)$ en la dirección de la recta $y = x$.

11. Dadas las superficies $xyz = 1$ y $axy + byz + x = 3$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Determine todos los valores reales de $a, b$, si existen, tales que las superficies se corten ortogonalmente en el punto $(1, 1, 1)$.

(b) Si $a = 0$ y $b = 1$. Determine todos los puntos sobre las superficies donde estas se cortan ortogonalmente.

12. Desde el origen del sistema de coordenadas se trazan rectas normales a la superficie $xy + z = 2$.

(a) Hallar las ecuaciones vectoriales de las rectas normales.

(b) Hallar todos los puntos en que dichas normales intersectan a la superficie dada.

13. Dada una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, considere la ecuación dada por $2x - xy + xz^2 = f(x + z, y + xz)$.

(a) Dar condiciones para $f$ que garanticen la existencia de una función $z = z(x, y)$ en una vecindad de $(1, 2, 3)$.

(b) Bajo las condiciones anteriores, encontrar $z_x(1, 2)$.

14. Muestre que las ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4 &= 0 \\ 2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8 &= 0 \end{aligned}$$

determinan funciones $u(x, y), v(x, y)$ de clase $\mathcal{C}^1$ en la vecindad del punto $(x_0, y_0) = (2, -1)$ tal que $u(2, -1) = 2$ y $v(2, -1) = 1$. Calcule la derivada direccional de $u$ en la dirección de la recta $y = -x$ en $(2, -1)$.

15. Pruebe o refute que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} e^u + xy^2 + v &= 2 \\ \operatorname{sen} u + x^2 y + v^3 &= 1, \end{aligned}$$

define a $u, v$ com funciones de $x, y$ en una vecindad del punto $(a, b, c, d) = (0, 2, 0, 1)$. De ser cierto, calcular

$$u(0, 2), \quad v(0, 2), \quad \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}(0, 2).$$

16. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $z_0 \in \mathbb{R}$ una raíz de multiplicidad uno del polinomio con coeficientes reales

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n.$$

Sea $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Demuestre que en una vecidad de $(0, z_0)$ la ecuación

$$F(x, z) = (a_0 + x_0) + (a_1 + x_1)z + \cdots + (a_n + x_n)z^n = 0$$

admite una única solución $z = z(x) = z(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de clase $\mathcal{C}^1$ que cumple con

$$\nabla z(0) = -\frac{1}{P'(z_0)} \left(1, z_0, z_0^2, \ldots, z_0^n\right).$$

*Hint:* Una raíz de multiplicidad uno $y_0$ del polinomio $p(y)$ es tal que $p(y_0) = 0$, pero $p'(y_0) \neq 0$.

17. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$ e invertible y sea:

$$\begin{aligned} u &= f(x) \\ v &= -y + xf(x). \end{aligned}$$

Si $f'(x_0) \neq 0$, mostrar que esta transformación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ esinvertible cerca de $(x_0, y)$ con inversa dada por:

$$\begin{aligned} x &= f^{-1}(u) \\ y &= -v + uf^{-1}(u). \end{aligned}$$

18. Sea $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.
    (a) Demuestre que para todo $(x, y) \neq (0, 0)$ $f$ es localmente invertible.
    (b) Demuestre que $f$ no es inyectiva.
    (c) Calcular aproximadamente $f^{-1}(-2{,}99; 3{,}99)$.
    *Hint:* Use el plano tangente y note que $f(1, 2) = (-3, 4)$.

19. Pruebe que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = (s, t) = \left(x + \frac{1}{2}\arctan y, y + \frac{1}{2}\arctan x\right)$$

admite una inversa local $f^{-1}$ de clase $\mathcal{C}^1$ alrededor de todo punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Calcule la mejor aproximación lineal de $f^{-1}$ en una vecindad de $(s_0, t_0) = f(0, 1)$.

20. (a) Calcule el Jacobiano de la transformación

$$u = \cos x \cosh y, \qquad v = \operatorname{sen} x \cosh y, \qquad w = \operatorname{senh} z.$$

    (b) ¿Cuál es la imagen de la superficie $\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 z = 1$?

# Problemas Resueltos

1. Se define la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)(y+1)^2}{(x-1)^3+(y+1)^2}, & \text{si} \quad (x-1)^3+(y+1)^2\neq 0\\ 0, & \text{si} \quad (x-1)^3+(y+1)^2=0.\end{cases}$$

Determine los puntos del plano cartesiano donde $f$ es diferenciable.
**Solución.**
Sea la curva $C:(x-1)^3+(y+1)^2=0$. Para los puntos fuera de la curva, $f$ es un cuociente de funciones diferenciables, por lo que es diferenciable en tales puntos.
Ahora, con el cambio de variables $u=x-1$, $v=y+1$, basta considerar:

$$F(u,v)=\begin{cases}\dfrac{uv^2}{u^3+v^2}, & \text{si} \quad u^3+v^2\neq 0\\ 0, & \text{si} \quad u^3+v^2=0.\end{cases}$$

Sea $(u_0,v_0)$ tal que $u_0^3+v_0^2=0$, entonces

$$\begin{aligned} F_u(u_0,v_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(u_0+h,v_0)-F(u_0,v_0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(u_0+h)v_0^2}{((u_0+h)^3+v_0^2)h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{u_0v_0^2+hv_0^2}{(3u_0^2h+3u_0h^2+h^3)h},\end{aligned}$$

que existe y es cero solo si $(u_0,v_0)=(0,0)$. De forma análoga, $F_v(u_0,v_0)=0$ solo si $(u_0,v_0)=(0,0)$ y no existe en otro caso. Por lo tanto $F$ no es diferenciable en los puntos de la curva fuera del $(0,0)$. Resta por analizar el origen, donde $F_u(0,0)=F_v(0,0)=0$. Veamos si es diferenciable:

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{F(h,k)-F(0,0)-F_u(0,0)h-F_v(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{hk^2}{(h^3+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}\\ (\text{elija } y=x) &= \lim_{h\to 0}\frac{h^3}{(h^3+h^2)h\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto $f$ no es diferenciable sobre ningún punto de la curva $C$ y luego $f$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2\setminus C$.

2. Sea $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ tal que $h(3)=0, h'(3)=1$ y $h''(3)=2$. Se definen las funciones

$$g(x,y)=(x-y,x^2+2y), \qquad f(u,v)=(\operatorname{senh}(h(u^2+v)),u-v,h'(u+v))$$

y $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ diferenciable tal que $\nabla\varphi(0,-3,1)=(-1,2,0)$. Calcule, de ser posible, la derivada direccional de la función

$$z=\varphi\circ f\circ g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$

en el punto $(1,1)$ en la dirección del vector $\vec{v}=(-1,1)$.
**Solución.**
El panorama de la composición se presenta a continuación:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "g"'] \arrow[rrr, bend right, "z=\varphi\circ f\circ g"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "\varphi"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Diagrama de composición. Esto permite implementar la regla de la cadena.

Con esto, aplicamos la regla de la cadena como sigue. Definimos

$$u=u(x,y)=x-y, \qquad v=v(x,y)=x^2+2y,$$

con lo cual $u(1,1)=0$ y $v(1,1)=3$. Así $g(1,1)=(0,3)$ y $f(g(1,1))=f(0,3)=(0,-3,1)$. Entonces, dado que las funciones involucradas son de clase $\mathcal{C}^1$, se tiene por la regla de la cadena que:

$$\begin{aligned}\nabla z(1,1) &= \nabla\varphi(f(g(1,1)))\cdot J_f(g(1,1))\cdot J_g(1,1)\\ &= \nabla\varphi(0,-3,1)\cdot J_f(0,3)\cdot J_g(1,1),\end{aligned}\tag{1}$$

donde $J_f, J_g$ representan las matrices jacobianas de $f$ y $g$ respectivamente. De esta manera

$$J_g(x,y)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2x & 2\end{pmatrix}\Rightarrow J_g(1,1)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

Además

$$\begin{aligned}J_f(u,v) &= \begin{pmatrix}2uh'(u^2+2v)\cosh(h(u^2+2v)) & h'(u^2+2v)\cosh(h(u^2+2v))\\ 1 & -1\\ h''(u+v) & h''(u+v)\end{pmatrix}\\ \Rightarrow J_f(0,3) &= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Y de esta manera, usando (1) y el dato del ejercicio obtenemos

$$\nabla z(1,1)=(-1,2,0)\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=-4(1,2).$$

Entonces, la derivada direccional de $z$ en el punto $(1,1)$ en la dirección del vector $\vec{v}=(-1,1)$ es

$$D_{\vec{v}}\,z(1,1)=\nabla z(1,1)\cdot(-1,1)/\sqrt{2}=-2\sqrt{2}.$$

3. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie

$$S: 5x^2+y^2+7z^2=1089,$$

que es ortogonal a la recta tangente en el punto $(2,1,6)$ a la curva de intersección de las superficies

$$S_1: z=x^2+2y^2,\qquad S_2: z=2x^2-3y^2+1.$$

**Solución.**
Nótese que las coordenadas del punto $(2,1,6)$ verifican las ecuaciones de $S_1$ y $S_2$, por lo que pertenece a su intersección. Además, por condición del ejercicio, el plano es ortogonal a la recta tangente, luego su vector normal debe ser paralelo al vector director de la recta.
Sea $l_T$ la recta tangente por el punto $(2,1,6)$. Para encontrar su vector director, consideramos las superficies de nivel cero de

$$F(x,y,z)=z=x^2+2y^2-z,\qquad G(x,y,z)=2x^2-3y^2-z+1,$$

cuyos gradientes en $(2,1,6)$ son $(4,4,-1)$ y $(8,-6,-1)$ respectivamente. Entonces, el vector director de $l_T$ es

$$\vec{d}=\nabla F(2,1,6)\times\nabla G(2,1,6)=(4,4,-1)\times(8,-6,-1)=-2(5,2,28).$$

Considerando a su vez que la superficie $S$ es la superficie de nivel cero de la función

$$f(x,y,z)=5x^2+y^2+7z^2-1089\Longrightarrow\nabla f(x,y,z)=2(5x,y,7z).$$

Si en algún punto $(x,y,z)$ de esta superficie el plano tangente es ortogonal a $l_T$, debe verificarse para algún $\lambda\in\mathbb{R}$ que

$$\nabla f(x,y,z)=\lambda\vec{d}\quad\Leftrightarrow\quad(5x,y,7z)=\lambda(5,2,28).$$

Despejando componente a componente sigue que $x=\lambda, y=2\lambda, z=4\lambda$ y como este punto pertenece a $S$ se verifica que

$$5\lambda^2+4\lambda^2+112\lambda^2=1089\Rightarrow\lambda^2=9\Rightarrow\lambda=\pm3.$$

Con estos valores encontramos los puntos de $S$: $(3,6,12)$ y $(-3,-6,-12)$. Así, los planos tangentes a $S$ que son ortogonales a $l_T$ son

$$\Pi_1: 5(x-3)+2(y-6)+28(z-12)=0,\qquad\Pi_2: 5(x+3)+2(y+6)+28(z+12)=0.$$

4. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} u^2(1+v)+10v-xy &= 11 \\ xu+yv^3 &= 2 \end{aligned}$$

(a) Demuestre que en una vecindad del punto $(x,y,u,v)=(1,1,1,1)$ es posible definir a $u=u(x,y)$ y a $v=v(x,y)$ como funciones de clase $\mathcal{C}^1$ de $(x,y)$.

(b) Si $x=y=0{,}8$, determine una solución aproximada del sistema

$$\begin{aligned} u^2(1+v)+10v &= 12{,}0201 \\ u+v^3 &= 1{,}9802 \end{aligned}$$

**Solución.**

(a) Sean $F(x,y,u,v)=u^2(1+v)+10v-xy$ y $G(x,y,u,v)=xu+yv^3$. Es claro que $(1,1,1,1)$ cumple con $F(1,1,1,1)=11$ y $G(1,1,1,1)=2$ y que $F,G$ son de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^4)$ pues son polinomios. Además

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{pmatrix} 2u(1+v) & u^2+10 \\ x & 3yv^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(1,1,1,1)=\begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

que es invertible con determinante $1\neq 0$. Luego, por el Teorema de la Función Implícita $u=u(x,y)$ y $v=v(x,y)$ de forma única y de clase $\mathcal{C}^1$ en torno al punto $(x,y)=(1,1)$.

(b) Note que el nuevo sistema se obtiene de reemplazar $x=y=1{,}01$ en el sistema original. Como estos valores son cercanos a $x=y=1$ y las funciones $F,G\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})^4$, una solución aproximada del nuevo sistema se obtiene de calcular el plano tangente a $u(x,y)$, $v(x,y)$ en $(1,1)$ y evaluar en $x=y=1{,}01$. Entonces

$$\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u(1,1) \\ v(1,1) \end{pmatrix}+\left.\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|_{(1,1)}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

Donde $u(1,1)=v(1,1)=1$ y el Jacobiano $\left.\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|_{(1,1)}$ se determina usando el Teorema de la función implícita mediante la fórmula

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|_{(1,1)} &= -\left[\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{(1,1,1,1)}\right]^{-1}\cdot\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{(1,1,1,1)} \\ \Rightarrow &= \begin{pmatrix} 3 & -11 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 & 14 \\ -5 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De esta manera

$$\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 14 & 14 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

Al evaluar obtenemos $u=1{,}28$, $v=0{,}9$. Usando computadora, los valores reales son $u=1{,}26808$, $v=0{,}896841$, con lo cual el error relativo es del $0{,}94\,\%$ para $u$ y del $0{,}35\,\%$ para $v$.

5. La superficie del Toro está definida paramétricamente por las ecuaciones

$$\begin{aligned} x&=(a+b\cos\varphi)\cos\theta \\ y&=(a+b\cos\varphi)\operatorname{sen}\theta \\ z&=b\operatorname{sen}\varphi \end{aligned}$$

con $\theta,\varphi\in[0,2\pi]$ y $a>b>0$ constantes.

(a) Determine si existe una vecindad de $(x,y,z)=(a,0,b)$, en la superficie del Toro, en la que se puede despejar $z=f(x,y)$ como función de clase $\mathcal{C}^1$ en términos de $x$ e $y$.

(b) Calcular $\nabla f(x,y)$ en términos de $\theta$ y $\varphi$

**Solución.**

(a) Despejar $z$ en términos de $x$ e $y$, es equivalente a despejar de las dos primeras ecuaciones $\varphi$ en términos de $x$ e $y$. Para esto se aplica el teorema de la función inversa a la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $F(\theta, \varphi) = ((a + b\cos\varphi)\cos\theta, (a + b\cos\varphi)\operatorname{sen}\theta) = (x, y)$

Si

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (a, 0, b) \\ &= ((a + b\cos\varphi)\cos\theta, (a + b\cos\varphi)\operatorname{sen}\theta, b\operatorname{sen}\varphi) \\ &\Rightarrow (\theta, \varphi) = (0, \pi/2), \end{aligned}$$

$F$ satisface las hipótesis del teorema de la función inversa porque las funciones componentes de $F$ son funciones de clase $\mathcal{C}^1$ , por otra parte, el Jacobiano de $F$ en el punto $(\theta, \varphi)$ es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \varphi)} = JF(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -(a + b\cos\varphi)\operatorname{sen}\theta & -b\cos\theta\operatorname{sen}\varphi \\ \cos\theta(a + b\cos\varphi) & -b\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \end{pmatrix} \quad \therefore \; JF(0, \pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

Como $\det(JF(0, \pi/2)) = ab \neq 0$, entonces por el teorema de la función inversa, existen vecindades $U$ de $(\theta, \varphi) = (0, \pi/2)$ en $\mathbb{R}^2$ y $W$ de $(x, y) = (a, 0)$ en $\mathbb{R}^2$, tal que $F : U \to W$ es biyección, con inversa de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $(\theta, \varphi) = F^{-1}(x, y) = (g(x, y), f(x, y))$, para todo $(x, y) \in W$. Por lo tanto

$$z = b\operatorname{sen}\varphi = b\operatorname{sen}(f(x, y))$$

(b) La matriz Jacobiana de $JF^{-1}(x, y)$, está dada por

$$JF^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{\operatorname{sen}\theta}{a+b\cos\varphi} & \frac{\cos\theta}{a+b\cos\varphi} \\ -\frac{\cos\theta\csc\varphi}{b} & -\frac{\csc\varphi\operatorname{sen}\theta}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_x & \theta_y \\ \varphi_x & \varphi_y \end{pmatrix}$$

Entonces el gradiente de $z = f(x, y)$ es

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= (z_x, z_y) = (b\cos\varphi\varphi_x, b\cos\varphi\varphi_y) = \left(-\frac{\cos\theta\csc\varphi}{b} b\cos\varphi, -\frac{\csc\varphi\operatorname{sen}\theta}{b} b\cos\varphi\right) \\ &= -\cot\varphi(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \end{aligned}$$