Pauta de Corrección

Recuperación Primer Certamen Introducción a la Informática Teórica

6 de diciembre de 2011

1. Hay una relación entre el número de a y b, todo indicaría que no es regular.

   Supongamos que el lenguaje es regular, con lo que cumple el lema de bombeo. Sea N la constante del lema, elegimos un número n en el rango $N < n < 2N$ y un primo $p > 2N$, con lo que $\sigma = a^n b^p$ es parte del lenguaje y suficientemente largo para que se aplique el lema. Entonces existen x, y y z tales que:

   - $\sigma = xyz$
   - $|xy| \leq N$
   - $y \neq \epsilon$
   - Para todo $k \geq 0$ la palabra xy^kz pertenece al lenguaje

   Por las condiciones dadas, x e y están formadas únicamente por a. Para $k \geq 0$ el string xy^kz tendrá $n + (k-1) \cdot |y|$ veces a y p veces b. Si elegimos k tal que

   $$\begin{aligned} n + (k-1) \cdot |y| &\equiv 0 \pmod{p} \\ k \cdot |y| &\equiv |y| - n \pmod{p} \end{aligned}$$

   resulta que $\gcd(n + (k-1) \cdot |y|, p) \neq 1$, lo que llevaría a una contradicción. Pero la ecuación dada tiene solución para k en $\mathbb{Z}_p$, ya que es un campo. Además, $|y| - n \not\equiv 0 \pmod{p}$ porque $|y| \leq N$ y $N < n < 2N$, con lo que $k \not\equiv 0 \pmod{p}$, y falla el lema.

Puntajes

Total	15
– Sospecha que no es regular	3
– Planteo lema del bombeo	5
– Encontrar contradicción	7

2. Para demostrar que la equivalencia no vale, basta exhibir una palabra que pertenece a uno de los lados pero no el otro para valores particulares de R y S. Para demostrar que vale, debe demostrarse que expresan lo mismo.

   (a) Informalmente, el lado izquierdo es cualquier número de R y S en cualquier orden, mientras el lado derecho es un número arbitrario de R o un número arbitrario de S.

   Consideremos expresiones regulares sobre $\Sigma = \{a, b\}$:

   $$ab \in (a + b)^*$$
   $$ab \notin a^* + b^*$$

   Como ab pertenece al lado izquierdo y no al derecho, no son equivalentes. Si no son equivalentes en este caso particular, no lo son en general.

   (b) En este caso, podemos escribir:

   $$\begin{aligned}(R^* S^*)^* &= ((\epsilon + R \cdot R^*) \cdot (\epsilon + S \cdot S^*))^* \\ &\subseteq ((\epsilon + R) \cdot (\epsilon + S))^* \\ &= (\epsilon + R + S + RS)^* \\ &\subseteq (R + S)^*\end{aligned}$$

   Por otro lado:

   $$\begin{aligned}(R + S)^* &= ((R + S)^* \cdot (R + S)^*)^* \\ &\subseteq (R^* S^*)^*\end{aligned}$$

   Como demostramos $\subseteq$ en ambas direcciones, los conjuntos son iguales.

Puntajes

Total		20
a)	10	
b)	10	
$\subseteq$ en cada dirección	5	

3. La figura 1 da un autómata posible.

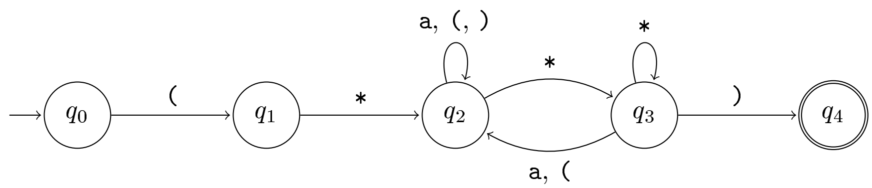

Figure 1: Un autómata finito que reconoce comentarios C

Puntajes

Total	10
Discusión	10

4. El autómata en nuestra notación gráfica es el de la figura 2.

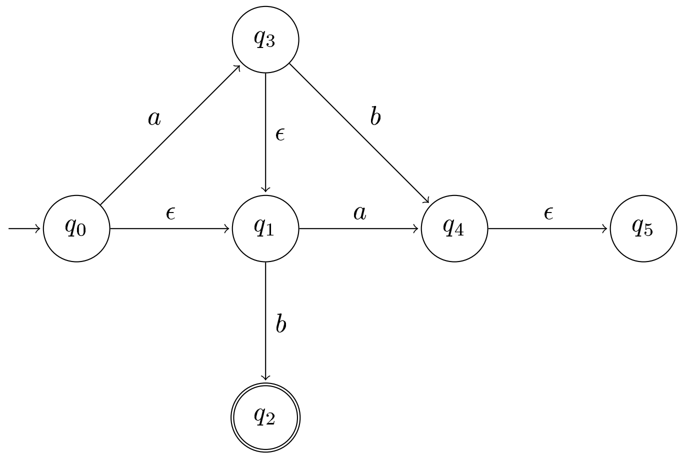

Figure 2: El autómata finito de la pregunta

(a) $\delta(q_0, aaba)$ es el conjunto de estados en que puede estar el autómata si consume $aaba$ partiendo en el estado q_0. Paso a paso:

$$\begin{aligned} \delta(\{q_0\}, aaba) &= \delta(\{q_3, q_4\}, aba) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

Acá se "traba" el autómata, con lo que $\delta(q_0, aaba) = \emptyset$.

$\delta(q_3, b)$ acá hay varias opciones:

- En un solo paso: q_4
- Consumiendo ϵ, luego b: q_2
- Consumiendo b, luego ϵ: q_5

Resumiendo: $\delta(q_3, b) = \{q_2, q_4, q_5\}$

De la figura 2 se ve que no hay camino hasta el estado final q_2 desde los estados q_4 y q_5, con lo que son inútiles. A los demás estados se puede llegar desde el estado inicial q_0, por lo que son relevantes. Restringiendo el autómata a los estados $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, se ve que sólo acepta ab y b. Como no hay ciclos en esta parte del autómata, el lenguaje que acepta es finito.

Puntajes

Total			20
a)		10	
$\delta(q_0, aaba)$	5		
$\delta(q_3, b)$	5		
b)		10	
Eliminar estados inútiles	3		
No hay ciclos, el lenguaje es finito	7		

5. Cada situación por turno.

(a) Sean $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1$ y $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ autómatas finitos deterministas tales que $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}(M_1)$ y $\mathscr{L}_2 = \mathscr{L}(M_2)$. Construimos el autómata determinista $M = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta, (q_1, q_2), F_1 \times F_2)$, en el cual la función de transición está dada por:

$$\delta((q', q''), a) = (\delta_1(q', a), \delta_2(q'', a))$$

Este autómata traza el funcionamiento de M_1 en la primera componente de su estado, y simultáneamente el de M_2 en la segunda. Acepta sólo si ambos aceptan, vale decir, acepta la intersección.

Alternativamente, sabemos que la clase de los lenguajes regulares es cerrada respecto de la unión, y es cerrada respecto de complemento (tome un autómata determinista $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ que acepta $\mathscr{L}$, el autómata $\overline{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \smallsetminus F)$ acepta $\overline{\mathscr{L}}$). Como $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$, también es cerrada respecto de intersección.

(b) No es regular en todos los casos.

Supongamos que fuera regular para $\mathscr{L}_1 = \{a, b\}^*$, es aplicable el lema de bombeo. Sea N la constante del lema, elegimos $ab^N ab^N$ en el lenguaje, al dividir en xyz con $|xy| < N$ resulta que si $x = \epsilon$ en xy^2z hay b repetidas en la primera parte, que no se replican en la segunda; de ser y sólo a, la segunda b no estará en el punto central. O sea, xy^kz no siempre pertenece al lenguaje, que no es regular.

(c) ¡Esto es trampa! Este lenguaje no es más que Σ^+ (cualquier cosa no vacía que se pueda obtener de $(\omega\omega)^*$ pertenece a Σ^+), y por tanto regular.

(d) Podemos usar una construcción similar a la de la parte (a), sólo que cambiando el segundo autómata para que acepte cualquier símbolo:

$$\delta((q', q''), a) = (\delta_1(q', a), \delta_2(q'', \Sigma))$$

El resultado es un autómata no determinista, pero igualmente el lenguaje aceptado es regular.

Alternativamente, podemos definir el homomorfismo $h(x) = a$ para todo $x \in \Sigma$, entonces por propiedades de los lenguajes regulares es regular $\mathscr{L}_1 \cap h^{-1}(h(\mathscr{L}_2))$, que es exactamente el lenguaje pedido.

Puntajes

Total	15
a)	3
b)	4
c)	4
d)	4

6. Construimos un autómata finito determinista que alternativamente da un paso en $\mathscr{L}_1$ y uno en $\mathscr{L}_2$. Sean $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ y $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ autómatas finitos deterministas tales que $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}(M_1)$ y $\mathscr{L}_2 = \mathscr{L}(M_2)$. La estrategia es que el estado es el estado de M_1, el estado de M_2 y el turno. Construimos el autómata determinista $M = (Q_1 \times Q_2 \times \{1, 2\}, \Sigma, \delta, (q_1, q_2, 1), F_1 \times F_2 \times \{2\})$, en el cual la función de transición está dada por:

$$\delta((q', q'', t), a) = \begin{cases} (\delta(q', a), q'', 2) & \text{si } t = 1 \\ (q', \delta(q'', a), 1) & \text{si } t = 2 \end{cases}$$

Entonces M acepta SHUFFLE($\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2$).

Otra alternativa es usar propiedades. Sea x un nuevo símbolo, definimos homomorfismos:

$$\begin{aligned} h_1(a) &= ax \text{ para todo } a \in \Sigma \\ h_2(a) &= xa \text{ para todo } a \in \Sigma \\ h_3(a) &= x \text{ para todo } a \in \Sigma \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} h_1(\mathscr{L}_1) &= \{a_1 x a_2 x \dots a_n x : a_1 a_2 \dots a_n \in \mathscr{L}\} \\ h_2(\mathscr{L}_2) &= \{x b_1 x b_2 \dots x b_m : b_1 b_2 \dots b_m \in \mathscr{L}\} \end{aligned}$$

Así $h_3^{-1}(h_1(\sigma_1))$ para $\sigma_1 \in \mathscr{L}_1$ es alternativamente un símbolo de σ_1 y uno cualquiera, y similarmente $h_3^{-1}(h_2(\sigma_2))$ con $\sigma_2 \in \mathscr{L}_2$. La intersección entre ambos es SHUFFLE($\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2$). Pero la clase de lenguajes regulares es cerrada respecto de todas estas operaciones.

Puntajes

Total	20
Discusión	20