INF221 – Algoritmos y Complejidad

Clase #21
Métodos de Ordenamiento

Aldo Berrios Valenzuela

Martes 25 de octubre de 2016

1. Métodos de Ordenamiento

Los métodos de ordenamiento de la burbuja, inserción realizan una inversión por cada permutación. A través del método simbólico, podemos representar la clase permutación $\mathscr{P}$ como sigue:

$$\mathscr{P} = \mathscr{E} + \mathscr{Z} \star \mathscr{P}$$

donde la clase pasada, vimos que la función generatriz resultante para una clase de permutación no es más que la ecuación (1.1)

$$\hat{P}(z) = \frac{1}{1 - z} \tag{1.1}$$

Nos interesan las inversiones de permutaciones. Sea $\iota(\pi)$ el número de inversiones de la permutación π. Como el orden de los elementos en la permutación π es de importancia (ya que define la cantidad de inversiones que debemos hacer), definimos la función generatriz exponencial (1.2) para representar dichas inversiones de π.

$$\hat{I}(z) = \sum_{\pi \in \mathscr{P}} \iota(\pi) \frac{z^{|\pi|}}{|\pi|!} \tag{1.2}$$

Nos interesa el número promedio de inversiones en permutaciones de tamaño n:

$$\begin{aligned} E_n(\iota) &= \frac{[z^n]\,\hat{I}(z)}{[z^n]\,\hat{P}(z)} \\ &= \left[z^n\right]\hat{I}(z) \end{aligned} \tag{1.3}$$

A simple vista, resulta algo difícil de ver la razón de por qué el número promedio de inversiones se define como muestra (1.3). Lo explicamos por partes:

- Cada $\pi_i \in \mathscr{P}$ representa una permutación sobre un arreglo de tamaño n (por simplicidad, suponemos que no hay elementos repetidos).
- Cada una de las permutaciones $\pi_i \in \mathscr{P}$ tiene $\iota(\pi_i)$ inversiones.
- En un arreglo de tamaño n, la cantidad de permutaciones $\pi_i \in \mathscr{P}$ es $n!$.
- Por lo tanto, para un arreglo de tamaño n, la cantidad de inversiones sería (consideramos todas las permutaciones):

$$\sum_{1 \le i \le n!} \iota(\pi_k) \tag{1.4}$$

- Usando la definición de promedio, dividimos por la cantidad total de permutaciones presentes en un arreglo de tamaño n. Usando funciones generatrices, el promedio de inversiones estaría dado por (1.3).

La receta para construir permutaciones hace $\pi \star (1)$. Este *conjunto* de permutaciones tiene las inversiones de π, $|\pi|+1$ veces. Si al último elemento (el (1)) se le asigna el rótulo j, aporta $|\pi|+1-j$ inversiones. Pero $1 \leq j \leq |\pi|+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq j \leq |\pi|+1} \left(|\pi|+1-j\right) &= \sum_{1 \leq j \leq |\pi|+1} (|\pi|+1) - \sum_{1 \leq j \leq |\pi|+1} j \\
&= (|\pi|+1)^2 - \frac{(\pi+1)\,|\pi|}{2} \\
&= (|\pi|+1)\left(|\pi|+1-\frac{|\pi|}{2}\right) \\
&= \frac{(|\pi|+1)\,(|\pi|+2)}{2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el número total de inversiones en $\pi \star (1)$ es:

$$(|\pi|+1)\,\iota(\pi) + \frac{(|\pi|+1)}{2}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\hat{I}(z) &= 0 + \sum_{\pi \in \mathscr{P}} \left((|\pi|+1)\,\iota(\pi) + \frac{(|\pi|+1)}{2}\right) \frac{z^{|\pi|+1}}{(|\pi|+1)!} \\
&= z \sum_{\pi \in \mathscr{P}} \iota(\pi)\,\frac{z^{|\pi|}}{|\pi|!} + \frac{1}{2} z \sum_{\pi \in \mathscr{P}} |\pi|\,\frac{z^{|\pi|}}{|\pi|!} \\
&= z\hat{I}(z) + \frac{1}{2} z \sum_{k \geq 0} k z^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{I}(z) &= z\hat{I}(z) + \frac{1}{2} z^2 \frac{d}{dz} \frac{1}{1-z} \\
&= z\hat{I}(z) + \frac{1}{2} \frac{z^2}{(1-z)^2} \\
\hat{I}(z) &= \frac{1}{2} \frac{z^2}{(1-z)^3} \\
\left[z^n\right] \hat{I}(z) &= \frac{1}{2} \left[z^{n-2}\right] (1-z)^{-3} \\
&= \frac{1}{2} \binom{-3}{n-2} \\
&= \frac{1}{2} \binom{n-2+(3-1)}{3-1} \\
&= \frac{1}{2} \binom{n}{2} \\
&= \binom{n\,(n-1)}{4}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, asintóticamente se tiene que:

$$E_n(\iota) \sim \frac{n^2}{4} \tag{1.5}$$

Los nuevos elementos aportan entre 0 y $|\pi|$ nuevas inversiones:

$$\sum_{0 \leq k \leq |\pi|} \frac{|\pi|\,(|\pi|+1)}{4}$$

Siguiente método más simple: shell sort.

1.1. Selection Sort

Recordemos el algoritmo:

```
void sort(double a[], int n){
  for (int i = 1; i < n; i++) {
    int imax = i;
    double max = a[i];
    for (int j = i + 1; j < n; j++) {
      if (a[j] > max) {
        min = a[j]; imin = j;
      }
    }
    double tmp = a[imin]; a[imin] = a[i]; a[i] = tmp;
  }
}
```

Nos interesa el número de asignaciones a `max`.

- $\rightsquigarrow$ Máximo de izquierda a derecha en la permutación $\pi, \chi(\pi)$ ($\chi(\pi)$: máximos de izquierda a derecha en la permutación π).

Si en $\pi \star (1)$ el último elemento $|\pi|+1$, hay un máximo más; en caso contrario, nada cambia. El número total de máximo es:

$$(|\pi|+1)\,\chi(\pi)+1$$

O sea, para:

$$\hat{M}(z)=\sum_{\pi\in\mathscr{P}}\chi(\pi)\,\frac{z^{|\pi|}}{|\pi|!}$$

De la ecuación simbólica para permutaciones:

$$\begin{aligned}
\hat{M}(z) &= 0+\sum_{\pi\in\mathscr{P}}\big((|\pi|+1)\,\chi(\pi)+1\big)\\
&= z\sum_{\pi\in\mathscr{P}}\chi(\pi)\,\frac{z^{|\pi|}}{|\pi|!}+z\sum_{\pi\in\mathscr{P}}\frac{z^{|\pi|}}{(|\pi|+1)!}\\
&= z\hat{M}(z)+\sum_{k\geq 0}\frac{z^{k+1}}{k+1}\\
&= \hat{M}(z)=\frac{1}{1-z}\ln\frac{1}{1-z}\\
\left[z^n\right]\hat{M}(z) = H_n &= \sum_{1\geq k\geq n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Donde $\gamma\approx 0{,}5772156\ldots$ y además, se tiene que H_n son los números armónicos. La demostración:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-z}\sum_{k\geq 1}\frac{z^k}{k} &= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{1\geq k\geq n}\frac{1}{n}\right)z^n\\
&= \sum_{n\geq 0}H_n z^n
\end{aligned}$$