INF221 – Algoritmos y Complejidad

Clase #28
Una pizca de probabilidad

Aldo Berrios Valenzuela

Martes 22 de noviembre de 2016

1. Definiciones Básicas

Definición 1.1. f es *convexa* si para todo $0 \leq \alpha \leq 1$,

$$\alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \leq f(\alpha x + (1-\alpha) y) \tag{1.1}$$

Monito:

`/* Dibujo */`

Por inducción, si

$$\sum_i \alpha_i = 1$$

entonces `/*` α_i `corresponde a la frecuencia de los` x_i `*/`

$$\sum_i \alpha_i f(x_i) \geq f\left(\sum_i \alpha_i x_i\right)$$

Por lo tanto:

$$\mathbb{E}[f(X)] \geq f(\mathbb{E}[X]) \tag{1.2}$$

Cota de unión: Dos conjuntos cualquiera:

$$|A \cup B| \leq |A| + |B|$$

O sea:

$$\Pr[A \cup B] \leq \Pr[A] + \Pr[B] \tag{1.3}$$

Teorema 1.1. El valor esperado es lineal:

$$\mathbb{E}[\alpha X + \beta Y] = \alpha \mathbb{E}[X] + \beta \mathbb{E}[Y]$$

Donde:

$$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_x f(x) \Pr[X = x]$$
$$\operatorname{Var}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]$$

Ademas:

- $\mathbb{E}[X]$ generalmente se anota μ
- $\mathrm{Var}[X]$ generalmente se anota σ^2

Definición 1.2. X, Y son *independientes* si $\Pr[X = x \wedge Y = y] = \Pr[X = x] \cdot \Pr[Y = y]$

Una colección de variables es *mutuamente independiente* si para todo subconjunto $S \subseteq N$:

$$\forall S' \subseteq N, \Pr\left[X_{i_1} = x_{i_1} \wedge \ldots \wedge X_{i_s} =_{i_s}\right] = \Pr\left[X_{i_1} = x_{i_1}\right] \cdot \ldots \cdot \Pr\left[X_{i_s} = x_{i_s}\right]$$

Teorema 1.2. Si X_1, X_2 son independientes:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_1 X_2] &= \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[X_2] \\ \mathbb{E}[f(X_1) f(X_2)] &= \mathbb{E}[f(X_1)] \cdot \mathbb{E}[f(X_2)] \end{aligned}$$

1.1. Cota de Markov

Sea X una variable aleatoria discreta, no negativa, y sea $c > 0$ una constante. $\mu = \mathbb{E}[X]$.

Tenemos:

$$\begin{aligned} \mu &= \mathbb{E}[X] \\ &= \sum_x x \Pr[X = x] \\ &= \sum_{0 \le x < c} x \Pr[X = x] + \sum_{x \ge c} x \Pr[X = x] \\ &\ge \sum_{x \ge c} x \Pr[X = x] \\ &\ge \sum_{x \ge c} c \Pr[X = x] \\ &= c \sum_{x \ge c} \Pr[X = x] \\ &= c \Pr[X \ge c] \\ \therefore \Pr[X \ge c] &\le \frac{\mu}{c} \end{aligned}$$

1.2. Desigualdad de Chebyshev

Sea X una variable discreta general (puede ser cualquier cosa). Interesa saber cuánto se desvía la media.

$$\begin{aligned} \Pr\left[|X - \mu| \ge a\right] &= \Pr\left[(X - u)^2 \ge a^2\right] \\ &\le \frac{\mathbb{E}\left[(X - \mu)^2\right]}{\alpha^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, con $a = c\sigma$:

Teorema 1.3 (Chebyshev)**.**

$$\Pr\left[|X - \mu| \ge \sigma\right] \le \frac{1}{c^2} \tag{1.4}$$

1.3. Cotas de Chernoff

Teorema 1.4. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables independientes, $0 \le X_i \le 1$, y sea

$$X = \sum_i X_i$$

y $\mu = \mathbb{E}[X]$. Entonces para todo $c \ge 1$:

$$\Pr[X \ge c] \le e^{-\beta(c)\mu}$$

donde $\beta(c) = c \ln(c) - c + 1$.

Demostración. Para Chebyshev, cuadrados. Ahora exponenciales ...

$$\begin{aligned}
\Pr\left[X \geq c\mu\right] &= \Pr\left[c^X \geq c^{c\mu}\right] \\
&\geq \frac{\mathbb{E}\left[c^X\right]}{c^{c\mu}} && \text{(Markov)} \\
&\geq \frac{e^{(c-1)\mu}}{c^{c\mu}} && \text{(lema 1, luego)} \\
&= e^{-\beta(c)\mu}
\end{aligned}$$

□

/* colocar un entorno para el Lema */

Lema 1.

$$\mathbb{E}\left[c^X\right] \leq e^{(c-1)\mu}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[c^X\right] &= \mathbb{E}\left[c^{X_1+\cdots+X_n}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[c^{X_1}\right] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}\left[c^{X_n}\right] \\
&\leq e^{(c-1)\mathbb{E}[X_1]} \cdot \ldots \cdot e^{(c-1)\mathbb{E}[X_n]} && \text{(lema 2)} \\
&= e^{(c-1)(\mathbb{E}[X_1]+\cdots+\mathbb{E}[X_n])} \\
&= e^{(c-1)\mathbb{E}[X]}
\end{aligned}$$

□

Lema 2.

$$E\left[c^{X_i}\right] \leq e^{(c-1)\mathbb{E}[X_i]} \tag{1.5}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[c^{X_i}\right] &= \sum_x c^x \Pr\left[X = x\right] \\
&\leq \sum_x (1 + (c-1)\,x) \Pr\left[X = x\right] && \text{(convexidad de } c^x\text{)} \\
&= \sum_x \Pr\left[X = x\right] + (c-1) \sum_x x \Pr\left[X = x\right] \\
&= 1 + (c-1)\,\mathbb{E}\left[X_i\right] \\
&\leq e^{(c-1)\mathbb{E}[X_i]} && \text{(En este paso aplicamos } 1 + z \leq e^z\text{)}
\end{aligned}$$

□

/* en la parte de convexidad se tiene que $x = 0$ e $y = 1$ de la desigualdad (1.1) */

/* Dibujo */