INF221 – Algoritmos y Complejidad

Clase #5
Error de Interpolación

Aldo Berrios Valenzuela

Martes 16 de Agosto de 2016

1. Error de Interpolación

La clase pasada vimos como obtener la interpolación dado los pares de puntos $\left(x_k, f\left(x_j\right)\right)$ con $k \in \{0, \ldots, n\}$ que nos daban. Nuestro tema de interés ahora es obtener el error de esas interpolaciones (Figura 1).

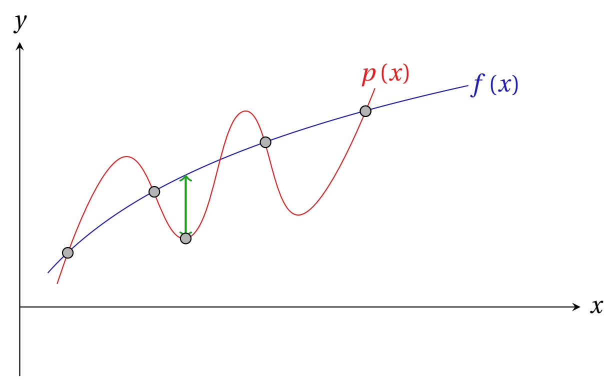

Figura 1: El error está dado por la diferencia entre $p(x)$ y $f(x)$ en cada punto (flecha verde).

Teorema 1.1 (Rolle)**.** Si f es continua en $[a,b]$ y tiene derivada continua en $[a,b]$, si $f(a) = f(b) = 0$, hay $x^* \in (a,b)$ tal que $f'(x^*) = 0$ (pariente del teorema del valor medio de la derivada).

Teorema 1.2. Sea $f \in C^{n+1}[a,b]$. Sea $Q_n(x)$ el polinomio de grado n que interpola f en los puntos distintos $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$. Entonces para todo $x \in [a,b]$ hay $\zeta \in [a,b]$ tal que

$$f(x) - Q_n(x) = \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\zeta) \prod_{0 \le j \le n} \left(x - x_j\right)}_{\text{Error}} \tag{1.1}$$

Demostración. Sea

$$\omega(x) = \prod_{0 \le j \le n} \left(x - x_j\right) \tag{1.2}$$

Notamos para referencia futura que $\omega(x)$ es mónico[1], con lo que $\omega^{(n+1)}(x) = (n+1)!$.

Fijemos $x \in [a,b]$. Si $x = x_j$, entonces $F(x) = 0$ sin importar λ, el lado izquierdo y derecho de (1.1) se anulan y estamos listos. Sea:

$$F(y) = f(y) - Q_n(y) - \lambda\omega(y) \tag{1.3}$$

[1] Para un polinomio de grado n, el coeficiente que acompaña a x^n es 1.

donde elegimos λ tal que $F(x) = 0$.

La función $F(y)$ está en $C^{n+1}[a,b]$, y tiene $n+2$ ceros en $[a,b]$ $(x, x_0, \ldots, x_n)$. Por teorema de Rolle, $F'(y)$ tiene $n+1$ ceros en $[a,b]$, ..., $F^{(n+1)}(y)$ tiene un cero en $[a,b]$, llamémosle ζ. O sea:

$$
\begin{aligned}
F^{(n+1)}(\zeta) &= f^{(n+1)}(\zeta) - \cancelto{0}{Q_n^{(n+1)}(\zeta)} - \lambda \quad \cancelto{(n+1)!}{\omega^{(n+1)}(\zeta)} = 0 \\
\therefore f^{(n+1)}(\zeta) &= \lambda (n+1)! \qquad \rightsquigarrow \lambda = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} \\
\therefore F(y) &= f(y) - Q_n(y) - \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}\omega(x)
\end{aligned}
$$

El error es:

$$
\frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}\omega(x)
$$

Donde n lo elegimos nosotros y corresponde al grado de la interpolación. Es claro que mientras mayor sea el grado de nuestra interpolación, menor será el error (vea en n como denominador). □

2. Cuadratura

Queremos evaluar:

$$
\int_a^b f(x)\,dx \tag{2.1}
$$

Supongamos f dado en $x_0, \ldots, x_n$ (aka *puntos de cuadratura*). Para encontrar el valor de (2.1) simplemente interpolamos f, e integramos el polinomio interpolante.

2.1. Caso más simple: Polinomio de grado 0

Corresponde a una aproximación con rectángulos (Figura 2)

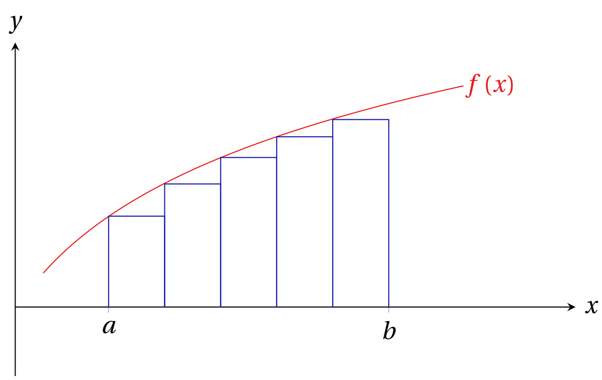

Figura 2: En tiempos precarios, nos enseñaron que podemos calcular el área bajo una curva usando una aproximación con rectangulitos (integral de Riemann).

Para ello, usábamos la fórmula:

$$
\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{0 \le j \le n} f(x_j)(x_{j+1} - x_j); \qquad a = x_0, b = x_n
$$

Si son igualmente espaciados, se tiene que $x_{j+1} - x_j = h$ para $0 \le j < n$

$$
\int_a^b f(x)\,dx \approx h \sum_{0 \le j < n} f(x_j)
$$

Consideremos la antiderivada[2]:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

¿podemos obtener un error más pequeño que el caso de la Figura 2?

2.1.1. Variante del caso simple: punto medio

En lugar de considerar una cota como se hizo en el caso de la Figura 2, el punto de evaluación de $f(x)$ será el punto medio de la base del rectángulo (Figura 3).

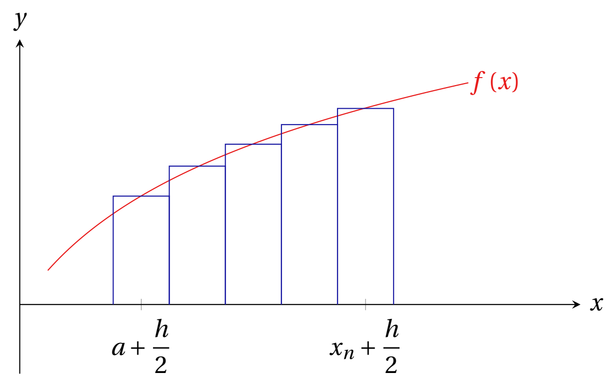

Figura 3: Tomamos el punto medio en lugar del extremo del rectángulo. Como puede observar, el excedente de "triangulitos" por sobre f compensan la falta de estos que están bajo f.

Para este caso se tiene que:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (n-a)\,f\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Expandimos usando *series de Taylor*:

$$\begin{aligned} F(a+h) &= F(a) + F'(a)\,h + \frac{1}{2}F''(a)\,h^2 + \frac{1}{6}F'''(a)\,h^3 + O\left(h^4\right) \\ &= f(a)\,h + \frac{1}{2}f'(a)\,h^2 + \frac{1}{6}f''(a)\,h^3 + O\left(h^4\right) \end{aligned}$$

Si $b = a + h$, tenemos (expandiendo $f\left(a + \frac{h}{2}\right)$) para el error:

$$\begin{aligned} E &= \int_a^{a+h} f(x)\,dx - hf\left(a + \frac{h}{2}\right) \\ &= hf(a) + \frac{h^2}{2}f'(a) + \frac{h^3}{6}f''(a) + O\left(h^4\right) - h\left(f(a) + \frac{h}{2}f'(a) + \frac{h^2}{8}f''(a) + O\left(h^3\right)\right) \\ &= hf(a) + \frac{h^2}{2}f'(a) + \frac{h^3}{6}f''(a) + O\left(h^4\right) - \left(hf(a) + \frac{h^2}{2}f(a) + \frac{h^3}{8}f''(a) + O\left(h^4\right)\right) \\ &= \frac{1}{24}f''(a)\,h^3 + O\left(h^4\right) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Sorprendentemente, el error es de carácter cúbico. Si nos dan la segunda derivada de f en a, estamos listos.

[2] Es claro suponer que la antiderivada existe, de lo contrario este cuento no tiene chiste.

2.2. Teorema del Valor Intermedio Ad Hoc

Considerando el error obtenido en la ecuación (2.2):

$$E = \frac{1}{24} f''(\zeta)\, h^3 \qquad \text{con } a \le \zeta \le a+h \tag{2.3}$$

Suponiendo intervalitos $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ con $x_{j+1} - x_j = h$, tenemos para cada uno:

$$E_j = \frac{1}{24} f''\left(\zeta_j\right) h^3, \qquad x_j \le \zeta_j \le x_{j+1}$$

Si $m \le f''(x) \le M$ en $[a, b]$

$$E = \sum_j E_j = \frac{h^3}{24} \sum_j f''\left(\zeta_j\right) = \frac{n h^3}{24} f''(\zeta)$$

porque

$$\begin{aligned} nm &\le \sum_j f''\left(\zeta_j\right) \le nM \\ m &\le \frac{1}{n} \sum_j f''\left(\zeta_j\right) \le M \end{aligned}$$

Lo que nos dice que hay $\zeta \in [a, b]$ tal que:

$$\frac{1}{n} \sum_j f''\left(\zeta_j\right) = f''(\zeta)$$