# Método Simplex

ILI-292, Investigación de Operaciones I

Segundo período académico 2009

Carlos Castro
Departamento de Informática
UTFSM
Agosto de 2009

## Estructura general de un algoritmo

- Procedimiento para iniciar
- Iteración
- Criterio de término

## Estructura de un algoritmo de optimización

- Paso de inicialización
- Iteración
- Prueba de optimalidad

## Fundamentos del método símplex

Propiedades de soluciones factibles en vértices:

1. Localización de soluciones óptimas:
   - Si existe una solución óptima, debe ser una solución factible en un vértice.
   - Si existen múltiples soluciones óptimas, al menos dos deben ser soluciones factibles en vértices adyacentes.

2. Existe un número finito de soluciones factibles en los vértices.

3. Si una solución en un vértice es igual o mejor que todas las soluciones factibles en vértices adyacentes, es igual o mejor que todas las soluciones en los vértices, es decir, es óptima.

## Bosquejo del método símplex

1. Paso inicial:
   - Inicio en una solución factible en un vértice.

2. Paso iterativo:
   - Traslado a una mejor solución factible en un vértice adyacente.

3. Prueba de optimalidad:
   - La solución factible en un vértice es óptima cuando ninguna de las solucione en vértices adyacentes a ella sea mejor.

## Preliminares

Considerando el modelo de programación lineal en forma estándar:

$$Max \quad z = 10x_1 + 9x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

Sujeto a

$$\begin{aligned}
\frac{7}{10}x_1 + 1x_2 + 1s_1 &= 630 \\
\frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{6}x_2 + 1s_2 &= 600 \\
1x_1 + \frac{2}{3}x_2 + 1s_3 &= 708 \\
\frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + 1s_4 &= 135 \\
x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

## Resolución de ecuaciones

$$\begin{aligned}
\frac{7}{10}x_1 + 1x_2 + 1s_1 &= 630 \\
\frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{6}x_2 + 1s_2 &= 600 \\
1x_1 + \frac{2}{3}x_2 + 1s_3 &= 708 \\
\frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + 1s_4 &= 135 \\
x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

- 4 ecuaciones en 6 variables
- 2 grados de libertad: fijar 2 variables y resolver las 4 ecuaciones en términos de las 4 variables restantes.
- El método símplex usa 0
- Variables no básicas/básicas: solución básica
- Considerando $n$ variables y $m$ ecuaciones ($n \geq m$): solución básica se obtiene haciendo $n-m$ variables iguales a cero
- Habrá $n-m$ variables no básicas y $m$ variables básicas (usualmente no cero).

## Resolución de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} \frac{7}{10}x_1 + 1x_2 + 1s_1 & = & 630 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{6}x_2 + 1s_2 & = & 600 \\ 1x_1 + \frac{2}{3}x_2 + 1s_3 & = & 708 \\ \frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + 1s_4 & = & 135 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Eligiendo variables no básicas $x_2 = 0 \wedge s_1 = 0$ permite determinar el valor de las variables básicas $x_1$, $s_2$, $s_3$ y $s_4$:

$$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4) = (900, 0, 0, 150, -192, 45)$$

## Resolución de ecuaciones

- Idea: Utilizar operaciones elementales de fila
  - Dejar en cada ecuación sólo una variable básica con coeficiente igual a +1
  - La variable básica no debe aparecer en otra ecuación (coeficiente igual a cero en todas las ecuaciones restantes)

- Los valores de las variables básicas aparecen en el lado derecho de las ecuaciones

## Resolución de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
\frac{7}{10}x_1 + 1x_2 + 1s_1 &= 630 \quad (1\\
\frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{6}x_2 + 1s_2 &= 600 \quad (2\\
1x_1 + \frac{2}{3}x_2 + 1s_3 &= 708 \quad (3\\
\frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + 1s_4 &= 135 \quad (4
\end{aligned}
$$

- Variables básicas: $x_1$, $s_2$, $s_3$ y $s_4$
- $s_2$, $s_3$ y $s_4$ aparecen en una sóla ecuación con coeficiente $+1$ (y en ecuaciones distintas)
- Caso de $x_1$:
  - Ecuaciones (2), (3) y (4) ya son utilizadas por las variables $s_2$, $s_3$ y $s_4$
  - $x_1$ puede ser asociada a la ecuación (1)

## Resolución de ecuaciones

$$\begin{aligned}
\frac{7}{10}x_1 + 1x_2 + 1s_1 &= 630 \quad (1)\\
\frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{6}x_2 + 1s_2 &= 600 \quad (2)\\
1x_1 + \frac{2}{3}x_2 + 1s_3 &= 708 \quad (3)\\
\frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + 1s_4 &= 135 \quad (4)
\end{aligned}$$

Para que $x_1$ aparezca en la ecuación (1) con coeficiente +1 esta ecuación debe ser multiplicada por $\frac{10}{7}$:

$$(1) \times \frac{10}{7} : 1x_1 + \frac{10}{7}x_2 + \frac{10}{7}s_1 = 900 \qquad (5$$

## Resolución de ecuaciones

$$\begin{aligned}
1x_1 + \frac{10}{7}x_2 + \frac{10}{7}s_1 &= 900 \quad (5)\\
\frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{6}x_2 + 1s_2 &= 600 \quad (2)\\
1x_1 + \frac{2}{3}x_2 + 1s_3 &= 708 \quad (3)\\
\frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + 1s_4 &= 135 \quad (4)
\end{aligned}$$

Para eliminar la variable $x_1$ de la ecuación (2) se puede multiplicar la ecuación (5) por $\frac{-1}{2}$ y sumarla a la ecuación (2):

$$(5) \times \frac{-1}{2} \quad : \quad \frac{-1}{2}x_1 - \frac{5}{7}x_2 - \frac{5}{7}s_1 = -450 \qquad (6$$

$$(6) + (2) \quad : \quad \frac{5}{42}x_2 - \frac{5}{7}s_1 + 1s_2 = 150 \qquad (7$$

## Resolución de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
1x_1 + \frac{10}{7}x_2 + \frac{10}{7}s_1 &= 900(5)\\
\frac{5}{42}x_2 - \frac{5}{7}s_1 + 1s_2 &= 150(7)\\
1x_1 + \frac{2}{3}x_2 + 1s_3 &= 708(3)\\
\frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + 1s_4 &= 135(4)
\end{aligned}
$$

De la misma manera se puede eliminar la variable $x_1$ de las ecuaciones (3) y (4):

$$
\begin{aligned}
(5)\times -1 \quad &: \quad -1x_1 - \frac{10}{7}x_2 - \frac{10}{7}s_1 = -900 && (8\\
(8)+(3) \quad &: \quad \frac{-16}{21}x_2 - \frac{10}{7}s_1 + 1s_3 = -192 && (9\\
(5)\times \frac{-1}{10} \quad &: \quad \frac{-1}{10}x_1 - \frac{1}{7}x_2 - \frac{1}{7}s_1 = -90 && (10\\
(10)+(4) \quad &: \quad \frac{3}{28}x_2 - \frac{1}{7}x_2 + 1s_4 = 45 && (11
\end{aligned}
$$

## Resolución de ecuaciones

Sistema de ecuaciones modificado:

$$
\begin{aligned}
(5) &\quad : \quad 1x_1 + \frac{10}{7}x_2 + \frac{10}{7}s_1 = 900 \\
(7) &\quad : \quad \frac{5}{42}x_2 - \frac{5}{7}s_1 + 1s_2 = 150 \\
(9) &\quad : \quad \frac{-16}{21}x_2 - \frac{10}{7}s_1 + 1s_3 = -192 \\
(11) &\quad : \quad \frac{3}{28}x_2 - \frac{1}{7}s_1 + 1s_4 = 45
\end{aligned}
$$

Haciendo $x_2 = 0 \wedge s_1 = 0$:

$$
\begin{aligned}
1x_1 &= 900 \\
1s_2 &= 150 \\
1s_3 &= -192 \\
1s_4 &= 45
\end{aligned}
$$

- Solución del sistema de 4 ecuaciones
- Solución básica no factible

## Resolución de ecuaciones

Considerando el problema en forma estándar:

$$\begin{aligned}
\frac{7}{10}x_1 + 1x_2 + 1s_1 &= 630 \\
\frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{6}x_2 + 1s_2 &= 600 \\
1x_1 + \frac{2}{3}x_2 + 1s_3 &= 708 \\
\frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + 1s_4 &= 135
\end{aligned}$$

- Variables de holgura tienen coeficiente +1 en una ecuación y 0 en las otras
- Lados derechos son no-negativos
- Haciendo $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ se obtiene $s_1 = 630$, $s_2 = 600$, $s_3 = 708$ y $s_4 = 135$
- Solución básica factible

Forma tableau:

- $m$ de las $n$ variables tienen coeficiente +1 en una ecuación y 0 en las otras ecuaciones
- Los valores del lado derecho de las ecuaciones son no-negativos

## Preparación para aplicar método simplex

- Formular un modelo de programación lineal para el problema
- Expresar el modelo de programación lineal en la forma estándar
- Expresar el modelo en la forma tableau

## Construcción del tableau símplex inicial

Sea:

$c_j$: Coeficiente de $x_j$ en la función objetivo

$b_i$: Valor del lado derecho de la restricción $i$

$a_{ij}$: Coeficiente de $x_j$ en la restricción $i$

Así:

$$
\begin{array}{ccc|c}
c_1 & \dots & c_n & \\
\hline
a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c}
\text{fila } c & \\
\hline
 & \\
\text{Matriz } A & \text{Columna } b \\
 &
\end{array}
$$

## Construcción del tableau símplex inicial

$$Max \quad z = 10x_1 + 9x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

Sujeto a

$$\begin{aligned}
\frac{7}{10}x_1 + 1x_2 + 1s_1 &= 630 \\
\frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{6}x_2 + 1s_2 &= 600 \\
1x_1 + \frac{2}{3}x_2 + 1s_3 &= 708 \\
\frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + 1s_4 &= 135 \\
x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

| $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | $b_i$ |
| $\frac{7}{10}$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 630 |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{6}$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 600 |
| 1 | $\frac{2}{3}$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 708 |
| $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 135 |

## Lectura de las soluciones

Se agregan 2 columnas:

**Base:** Variables básicas momentáneas

$c_j$**:** Coeficientes en la función objetivo de variables básicas momentáneas

## Lectura de las soluciones

| | | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Base$ | $c_j$ | 10 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | $b_i$ |
| $s_1$ | 0 | $\frac{7}{10}$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 630 |
| $s_2$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{6}$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 600 |
| $s_3$ | 0 | 1 | $\frac{2}{3}$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 708 |
| $s_4$ | 0 | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 135 |

- Las variables que están fuera de la base, las variables no-básicas, tienen valor cero
- El valor de las variables básicas se obtiene directamente desde la columna $b_i$ en la fila correspondiente a la variable en cuestión.

# Lectura de las soluciones

- Solución actual: $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4) = (0, 0, 630, 600, 708, 135)$
- El producto punto de la columna $c_j$ y la columna $b_i$ entrega el valor de la función objetivo (indicado bajo la columna $b_i$)

| | | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Base$ | $c_j$ | 10 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | $b_i$ |
| $s_1$ | 0 | $\frac{7}{10}$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 630 |
| $s_2$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{6}$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 600 |
| $s_3$ | 0 | 1 | $\frac{2}{3}$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 708 |
| $s_4$ | 0 | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 135 |
| | | | | | | | | 0 |

## Iteración

Se agregan dos filas:

**$z_j$:** Disminución del valor de la función objetivo que resulta si una unidad de la variable correspondiente a la columna $j$ de la matriz $A$ es ingresada en la solución

**$c_j - z_j$:** Cambio neto en la función objetivo que resulta al introducir en la solución una unidad de la variable correspondiente a la columna $j$

## Iteración

| Base | $c_j$ | $x_1$<br>10 | $x_2$<br>9 | $s_1$<br>0 | $s_2$<br>0 | $s_3$<br>0 | $s_4$<br>0 | $b_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | 0 | $\frac{7}{10}$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 630 |
| $s_2$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{6}$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 600 |
| $s_3$ | 0 | 1 | $\frac{2}{3}$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 708 |
| $s_4$ | 0 | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 135 |
| $z_j$ | | | | | | | | 0 |
| $c_j - z_j$ | | | | | | | | |

## Cálculo de $z_j$

Multiplicando elementos en $c_j$ por elemento en la columna $j$ y sumándolos:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 0 \times \frac{7}{10} + 0 \times \frac{1}{2} + 0 \times 1 + 0 \times \frac{1}{10} = 0 \\
z_2 &= 0 \times 1 + 0 \times \frac{5}{6} + 0 \times \frac{2}{3} + 0 \times \frac{1}{4} = 0 \\
z_3 &= 0 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 0 \\
z_4 &= 0 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 0 \\
z_5 &= 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 = 0 \\
z_6 &= 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 1 = 0
\end{aligned}
$$

| | | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Base* | $c_j$ | 10 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | $b_i$ |
| $s_1$ | 0 | $\frac{7}{10}$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 630 |
| $s_2$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{6}$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 600 |
| $s_3$ | 0 | 1 | $\frac{2}{3}$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 708 |
| $s_4$ | 0 | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 135 |
| $z_j$ | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $c_j - z_j$ | | | | | | | | |

## Cálculo de $c_j - z_j$

Resta de coeficiente en la función objetivo de la variable asociada a la columna $j$ y $z_j$:

$$
\begin{aligned}
c_1 - z_1 &= 10 - 0 = 10 \\
c_2 - z_2 &= 9 - 0 = 0 \\
c_3 - z_3 &= 0 - 0 = 0 \\
c_4 - z_4 &= 0 - 0 = 0 \\
c_5 - z_5 &= 0 - 0 = 0 \\
c_6 - z_6 &= 0 - 0 = 0
\end{aligned}
$$

| | | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Base* | $c_j$ | 10 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | $b_i$ |
| $s_1$ | 0 | $\frac{7}{10}$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 630 |
| $s_2$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{6}$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 600 |
| $s_3$ | 0 | 1 | $\frac{2}{3}$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 708 |
| $s_4$ | 0 | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 135 |
| $z_j$ | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $c_j - z_j$ | | 10 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | |

## Explicación de $z_j$

Considerando la primera ecuación:

$$\frac{7}{10} \times x_1 + 1 \times x_2 + 1 \times s_1 = 630$$

- $x_1 = 0$ por ser una variable no-básica
- Si $x_1$ toma un valor positivo se debe reducir $x_2$ y/o $s_1$ para satisfacer la restricción
- $x_2$ vale cero, por ser una variable no-básica, ésta no puede ser reducida para satisfacer la restricción de no-negatividad
- $s_1$ es el único que puede ser disminuído
- El coeficiente de $s_1$ es $+1$ y el coeficiente de $x_1$ es $\frac{7}{10}$, por lo tanto, un aumento en una unidad de $x_1$ implica que $s_1$ debe disminuir en $\frac{7}{10}$

## Explicación de $z_j$

| | | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Base$ | $c_j$ | 10 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | $b_i$ |
| $s_1$ | 0 | $\frac{7}{10}$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 630 |
| $s_2$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{6}$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 600 |
| $s_3$ | 0 | 1 | $\frac{2}{3}$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 708 |
| $s_4$ | 0 | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 135 |
| $z_j$ | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $c_j - z_j$ | | 10 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | |

En general, si una unidad de $x_1$ es producida:

- $s_1$ debe disminuir en $\frac{7}{10}$
- $s_2$ debe disminuir en $\frac{1}{2}$
- $s_3$ debe disminuir en 1
- $s_4$ debe disminuir en $\frac{1}{10}$

## Explicación de $z_j$

| | | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Base* | $c_j$ | 10 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | $b_i$ |
| $s_1$ | 0 | $\frac{7}{10}$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 630 |
| $s_2$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{6}$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 600 |
| $s_3$ | 0 | 1 | $\frac{2}{3}$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 708 |
| $s_4$ | 0 | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 135 |
| $z_j$ | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $c_j - z_j$ | | 10 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | |

- Coeficientes en filas de columna de $x_1$ indican unidades de variable básica en la fila que serán disminuídas cuando una unidad de $x_1$ es introducida en ésta
- Reducción de una variable básica puede resultar en reducción en la función objetivo
- Disminución en la función objetivo depende del coeficiente de variables básicas en la función objetivo
- Disminución en la función objetivo: suma de los productos de los valores de la columna y los coeficientes en la función objetivo de las variables básicas

## Criterio para ingresar variables en la base

Desde la fila de evaluación neta $c_j - z_j$ se selecciona la variable que causa el mayor incremento unitario en la función objetivo.

| | | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Base$ | $c_j$ | 10 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | $b_i$ |
| $s_1$ | 0 | $\frac{7}{10}$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 630 |
| $s_2$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{6}$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 600 |
| $s_3$ | 0 | 1 | $\frac{2}{3}$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 708 |
| $s_4$ | 0 | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 135 |
| $z_j$ | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $c_j - z_j$ | | 10 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | | $\uparrow$ | | | | | | |

## Criterio para remover variables de la base

Para cada fila $i$, se calcula la tasa $\frac{b_i}{a_{ij}}$ (para cada $a_{ij} > 0$), con $j$ determinado por la variable que ingresará en la base y se selecciona para sacar de la base aquella variable cuya tasa $\frac{b_i}{a_{ij}}$ sea mínima.

| | | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Base$ | $c_j$ | 10 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | $b_i$ | $\frac{b_i}{a_{ij}}$ |
| $s_1$ | 0 | $\frac{7}{10}$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 630 | $\frac{630}{\frac{7}{10}} = 900$ |
| $s_2$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{6}$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 600 | $\frac{600}{\frac{1}{2}} = 1.200$ |
| $s_3$ | 0 | 1 | $\frac{2}{3}$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 708 | $\frac{708}{1} = 708 \rightarrow$ |
| $s_4$ | 0 | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 135 | $\frac{135}{\frac{1}{10}} = 1.350$ |
| $z_j$ | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| $c_j - z_j$ | | 10 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |

## Criterio para remover variables: Explicación

Considerando la primera ecuación:

$$\frac{7}{10} \times x_1 + 1 \times x_2 + 1 \times s_1 = 630$$

- Al aumentar el valor de $x_1$ las variables $x_2$ y/o $s_1$ deben disminuir
- $x_2$ es igual a cero por ser una variable no-básica
- $s_1$ es la única que puede disminuir
- Disminución máxima de $s_1$ se produce cuando toma el valor 0
- Valor de $x_1$ cuando $s_1$ toma el valor 0:

$$x_1 = \frac{630}{\frac{7}{10}}$$

## Criterio para remover variables: Explicación

Despejando $x_1$ en cada ecuación:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{630 - 1 \times s_1 - 1 \times x_2}{\frac{7}{10}} \\
x_1 &= \frac{600 - 1 \times s_2 - \frac{5}{6} \times x_2}{\frac{1}{2}} \\
x_1 &= \frac{708 - 1 \times s_3 - \frac{2}{3} \times x_2}{1} \\
x_1 &= \frac{135 - 1 \times s_4 - \frac{1}{4} \times x_2}{\frac{1}{10}}
\end{aligned}
$$

Máximo valor de $x_1$ en cada ecuación:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{630}{\frac{7}{10}} = 900 \\
x_1 &= \frac{600}{\frac{1}{2}} = 1.200 \\
x_1 &= \frac{708}{1} = 708 \\
x_1 &= \frac{135}{\frac{1}{10}} = 1.350
\end{aligned}
$$

## Cálculo de la nueva solución básica posible

Cada ecuación debe tener sólo una variable básica con coeficiente +1 y esta variable básica no debe aparecer en otra ecuación

Para dejar la columna correspondiente a $x_1$:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

se realizan dos tipos de operaciones algebraicas:

- Multiplicar una ecuación por una constante diferente de cero
- Sumar un múltiplo de una ecuación a otra

# Cálculo de la nueva solución básica posible

| | | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Base$ | $c_j$ | 10 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | $b_i$ |
| $s_1$ | 0 | $\frac{7}{10}$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 630 |
| $s_2$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{6}$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 600 |
| $s_3$ | 0 | 1 | $\frac{2}{3}$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 708 |
| $s_4$ | 0 | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 135 |
| $z_j$ | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $c_j - z_j$ | | 10 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | |

- El coeficiente $+1$ ya aparece en la tercera fila
- Para dejar un cero en las filas 1, 2 y 4:
  - Multiplicar por $\frac{-7}{10}$ la tercera fila y sumar a la primera: nueva primera fila
  - Multiplicar por $\frac{-1}{2}$ la tercera fila y sumar a la segunda fila: nueva segunda fila
  - Multiplicar por $\frac{-1}{10}$ la tercera fila y sumar a la cuarta fila: nueva cuarta fila

## Cálculo de la nueva solución básica posible

| | | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Base$ | $c_j$ | 10 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | $b_i$ |
| $s_1$ | 0 | 0 | $\frac{16}{30}$ | 1 | 0 | $\frac{-7}{10}$ | 0 | $134,4$ |
| $s_2$ | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 1 | $\frac{-1}{2}$ | 0 | 246 |
| $x_1$ | 10 | 1 | $\frac{2}{3}$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 708 |
| $s_4$ | 0 | 0 | $\frac{22}{120}$ | 0 | 0 | $\frac{-1}{10}$ | 1 | $64,2$ |
| $z_j$ | | 10 | $\frac{20}{3}$ | 0 | 0 | 10 | 0 | 7.080 |
| $c_j - z_j$ | | 0 | $\frac{7}{3}$ | 0 | 0 | $-10$ | 0 | |

Nueva solución básica posible:

$$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4) = (708, 0, 134, 4, 246, 0, 64, 2)$$

y

$$z = 7.080$$

## Propiedades de la nueva solución

Tableau inicial:

| | | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Base$ | $c_j$ | 10 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | $b_i$ |
| $s_1$ | 0 | $\frac{7}{10}$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 630 |
| $s_2$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{6}$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 600 |
| $s_3$ | 0 | 1 | $\frac{2}{3}$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 708 |
| $s_4$ | 0 | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 135 |
| $z_j$ | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $c_j - z_j$ | | 10 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | |

Considerando la restricción de la segunda fila:

$$\frac{1}{2} \times x_1 + \frac{5}{6} \times x_2 + 1 \times s_2 = 600$$

- El ingreso de $x_1$ implica disminuir $s_2$
- Valor máximo para $x_1$: $\frac{600}{\frac{1}{2}} = 1.200$
- La tercera restricción impone cota más restrictiva para $x_1$: 708
- $s_2$ debe disminuir para evitar tener dos variables básicas en la misma fila

## Propiedades de la nueva solución

- Como $x_1$ tomará el valor 708, la ecuación quedaría:

$$\frac{1}{2} \times 708 + \frac{5}{6} \times x_2 + 1 \times s_2 = 600$$

$$\rightarrow s_2 = 600 - 354 = 246$$

Este valor es justamente el que aparece en la columna $b_i$ en la fila correspondiente a la variable $s_2$.

- Valor de $s_1$ en la primera fila:

$$s_1 = 630 - \frac{7}{10} \times 708 = 134,4$$

- Valor de $s_4$ en la cuarta fila:

$$s_4 = 135 - \frac{1}{10} \times 708 = 64,2$$

## Propiedades de la nueva solución

- Ingreso de una unidad de $x_1$ implica un aumento en la función objetivo de 10 unidades
- Variable $x_1$ ingresó con valor 708: el incremento en la función objetivo es de

$$708 \times 10 = 7.080$$

- Esto es coherente con el cálculo en el tableau actual:
  - Valor de la función objetivo en la solución actual : $10 \times 708$
  - Valor de la función objetivo en la solución anterior: 0

  Por lo tanto, el incremento es de: $7.080 - 0$.

## Nueva iteración

| Base | $c_j$ | $x_1$ <br> 10 | $x_2$ <br> 9 | $s_1$ <br> 0 | $s_2$ <br> 0 | $s_3$ <br> 0 | $s_4$ <br> 0 | $b_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | 0 | 0 | $\frac{16}{30}$ | 1 | 0 | $\frac{-7}{10}$ | 0 | $134,4$ |
| $s_2$ | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 1 | $\frac{-1}{2}$ | 0 | 246 |
| $x_1$ | 10 | 1 | $\frac{2}{3}$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 708 |
| $s_4$ | 0 | 0 | $\frac{22}{120}$ | 0 | 0 | $\frac{-1}{10}$ | 1 | $64,2$ |
| $z_j$ | | 10 | $\frac{20}{3}$ | 0 | 0 | 10 | 0 | 7.080 |
| $c_j - z_j$ | | 0 | $\frac{7}{3}$ | 0 | 0 | $-10$ | 0 | |

- La solución puede mejorarse: $\exists \;\; c_j - z_j > 0$
- Si $x_2$ se introduce en la base: $\begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{12}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \frac{b_3}{a_{32}} \\ \frac{b_4}{a_{42}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 252 \\ 492 \\ 1062 \\ 350,18 \end{bmatrix}$

La menor tasa $\frac{b_i}{a_{ij}}$ corresponde a la primera fila: $s_1$ debe abandonar la base

## Nueva iteración

- $x_2$ ingresa en lugar de $s_1$: se debe dejar en la matriz $A$, en la columna correspondiente a $x_2$, el siguiente vector:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Luego de realizar las operaciones de fila adecuadas se obtiene el nuevo tableau:

| | | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Base$ | $c_j$ | 10 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | $b_i$ |
| $x_2$ | 9 | 0 | 1 | $\frac{30}{16}$ | 0 | $\frac{-21}{16}$ | 0 | 252 |
| $s_2$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{-15}{16}$ | 1 | $\frac{5}{32}$ | 0 | 120 |
| $x_1$ | 10 | 1 | 0 | $\frac{-20}{16}$ | 0 | $\frac{30}{16}$ | 0 | 540 |
| $s_4$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{-11}{32}$ | 0 | $\frac{9}{64}$ | 1 | 18 |
| $z_j$ | | 10 | 9 | $\frac{70}{16}$ | 0 | $\frac{111}{16}$ | 0 | 7668 |
| $c_j - z_j$ | | 0 | 0 | $\frac{-70}{16}$ | 0 | $\frac{-111}{16}$ | 0 | |

## Propiedades de la nueva solución

- Valor de las variables básicas:

$$s_2 = 246 - \frac{1}{2} \times 252 = 120$$

$$x_1 = 708 - \frac{2}{3} \times 252 = 540$$

$$s_4 = 64,2 - \frac{22}{120} \times 252 = 18$$

- Valor de la función objetivo:
  - Valor de la función objetivo en la solución actual: $10 \times 540 + 9 \times 252 = 7.668$
  - Valor de la función objetivo en la solución anterior: $7.080$
  - Incremento en la función objetivo:

$$7.668 - 7.080 = 588$$

  - Esto es equivalente al valor que se estimaba: $\frac{7}{3} \times 252 = 588$

## Criterio de detención

Todos los valores en la fila de evaluación neta $c_j - z_j$ son negativos o cero.

| | | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Base$ | $c_j$ | 10 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | $b_i$ |
| $x_2$ | 9 | 0 | 1 | $\frac{30}{16}$ | 0 | $\frac{-21}{16}$ | 0 | 252 |
| $s_2$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{-15}{16}$ | 1 | $\frac{5}{32}$ | 0 | 120 |
| $x_1$ | 10 | 1 | 0 | $\frac{-20}{16}$ | 0 | $\frac{30}{16}$ | 0 | 540 |
| $s_4$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{-11}{32}$ | 0 | $\frac{9}{64}$ | 1 | 18 |
| $z_j$ | | 10 | 9 | $\frac{70}{16}$ | 0 | $\frac{111}{16}$ | 0 | 7668 |
| $c_j - z_j$ | | 0 | 0 | $\frac{-70}{16}$ | 0 | $\frac{-111}{16}$ | 0 | |

Solución óptima:

$$(x_1^*, x_2^*, s_1^*, s_2^*, s_3^*, s_4^*) = (540, 252, 0, 120, 0, 18)$$

y

$$z^* = 7.668$$

## La forma tableau: caso general

Propiedades de la forma tableau:

- $m$ de las $n$ variables tienen coeficiente $+1$ en una ecuación y cero en las otras ecuaciones
- Los valores del lado derecho de todas las ecuaciones son no-negativos

## Lados derechos negativos

Multiplicación por $-1$ de las restricciones necesarias:

$$Max \quad z = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 1x_4$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} -2x_1 + \frac{-1}{2}x_2 + 1x_3 - 6x_4 &= -60 \\ 1x_1 + 1x_3 + \frac{2}{3}x_4 &\leq 20 \\ -1x_2 - 5x_3 &\leq -50 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Se transforma en:

$$Max \quad z = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 1x_4$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 1x_3 + 6x_4 &= 60 \\ 1x_1 + 1x_3 + \frac{2}{3}x_4 &\leq 20 \\ 1x_2 + 5x_3 &\geq 50 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

## Restricciones $\leq$

La forma estándar de estas restricciones provee columnas unitarias para las variable de holgura asociadas con las restricciones, por lo tanto, la primera propiedad se satisface inmediatamente y la forma estándar es equivalente a la forma tableau.

## Restricciones $\geq$

Considerando el siguiente modelo de programación lineal:

$$Max \;\; z = 10x_1 + 9x_2$$

Sujeto a

$$
\begin{aligned}
\frac{7}{10}x_1 + 1x_2 &\leq 630 \\
\frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{6}x_2 &\leq 600 \\
1x_1 + \frac{2}{3}x_2 &\leq 708 \\
\frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{4}x_2 &\leq 135 \\
1x_1 &\geq 100 \\
1x_2 &\geq 100 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

## Restricciones $\geq$

La forma estándar es:

$$Max \quad z = 10x_1 + 9x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4 + 0s_5 + 0s_6$$

Sujeto a

$$\begin{aligned}
\frac{7}{10}x_1 + 1x_2 + 1s_1 &= 630\\
\frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{6}x_2 + 1s_2 &= 600\\
1x_1 + \frac{2}{3}x_2 + 1s_3 &= 708\\
\frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + 1s_4 &= 135\\
1x_1 - 1s_5 &= 100\\
1x_2 - 1s_6 &= 100\\
x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6 &\geq 0
\end{aligned}$$

## Restricciones $\geq$

Para obtener una solución básica posible inicial se podría asignar $x_1 = 0 \wedge x_2 = 0$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 630 \\ 600 \\ 708 \\ 135 \\ -100 \\ -100 \end{bmatrix}$$

Esta solución básica $x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = 0$ es imposible pues $s_5$ y $s_6$ violan las restricciones de no-negatividad.

## Restricciones $\geq$

Utilización de variables artificiales: $a_1$ y $a_2$

La representación en forma tableau del sistema de ecuaciones es:

$$
\begin{aligned}
\frac{7}{10}x_1 + 1x_2 + 1s_1 &= 630 \\
\frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{6}x_2 + 1s_2 &= 600 \\
1x_1 + \frac{2}{3}x_2 + 1s_3 &= 708 \\
\frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + 1s_4 &= 135 \\
1x_1 - 1s_5 + 1a_1 &= 100 \\
1x_2 - 1s_6 + 1a_2 &= 100 \\
x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, a_1, a_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Puesto que las variables $s_1$, $s_2$, $s_3$, $s_4$, $a_1$ y $a_2$ aparece cada una sólo una vez y en una sóla ecuación y los valores del lado derecho son no-negativos, se cumplen los do requerimientos de la forma tableau.

## Restricciones $\geq$

Una solución básica posible inicial se puede obtener haciendo $x_1 = 0 \wedge x_2 = 0 \wedge s_5 = 0 \wedge s_6 = 0$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 630 \\ 600 \\ 708 \\ 135 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Ésta no es una solución posible en términos del problema real, pues no se satisfacen los requerimientos de 100 unidades de cada variable.

## Restricciones $\geq$

- Una solución básica posible para la forma tableau de un problema de programación lineal no siempre es una solución básica posible para el problema real
- Si se asegura que las variables artificiales estén fuera de la base antes de alcanzar la solución óptima no existe dificultad en que las soluciones anteriores no sean soluciones posibles para el problema real
- Para garantizar la salida de las variables artificiales desde la base se asigna un valor muy grande a cada variable artificial en la función objetivo el cual es denotado por $-M$

## Restricciones $\geq$

La función objetivo para la forma tableau del ejemplo sería:

$$Max \quad z = 10x_1 + 9x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4 + 0s_5 + 0s_6 - Ma_1 - Ma_2$$

Tableau símplex inicial:

| | | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | $s_5$ | $s_6$ | $a_1$ | $a_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Base$ | $c_j$ | 10 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $-M$ | $-M$ | $b_i$ |
| $s_1$ | 0 | $\frac{7}{10}$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 630 |
| $s_2$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{6}$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 600 |
| $s_3$ | 0 | 1 | $\frac{2}{3}$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 708 |
| $s_4$ | 0 | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 135 |
| $a_1$ | $-M$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $-1$ | 0 | 1 | 0 | 100 |
| $a_2$ | $-M$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $-1$ | 0 | 1 | 100 |
| $z_j$ | | $-M$ | $-M$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $M$ | $M$ | $-M$ | $-M$ | $-200M$ |
| $c_j - z_j$ | | $10 + M$ | $9 + M$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $-M$ | $-M$ | 0 | 0 | |

## Restricciones =

Se utiliza una variable artificial:

La ecuación

$$6x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0$$

se transforma en:

$$6x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 1a_1 = 30$$

Luego, se procede igual que en el caso de restricciones $\geq$

# Forma tableau: caso general

$$Max \quad z = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 1x_4$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} -2x_1 + \frac{-1}{2}x_2 + 1x_3 - 6x_4 &= -60 \\ 1x_1 + 1x_3 + \frac{2}{3}x_4 &\leq 20 \\ -1x_2 - 5x_3 &\leq -50 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Eliminando los lados derechos negativos:

$$Max \quad z = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 1x_4$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 1x_3 + 6x_4 &= 60 \\ 1x_1 + 1x_3 + \frac{2}{3}x_4 &\leq 20 \\ 1x_2 + 5x_3 &\geq 50 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

# Forma tableau: caso general

$$Max \quad z = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 1x_4$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 1x_3 + 6x_4 &= 60 \\ 1x_1 + 1x_3 + \frac{2}{3}x_4 &\leq 20 \\ 1x_2 + 5x_3 &\geq 50 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Agregando variables de holgura y variables de exceso se obtiene la siguiente forma estándar:

$$Max \quad z = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 1x_4 + 0s_1 + 0s_2$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 1x_3 + 6x_4 &= 60 \\ 1x_1 + 1x_3 + \frac{2}{3}x_4 + 1s_1 &= 20 \\ 1x_2 + 5x_3 - 1s_2 &= 50 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

## Forma tableau: caso general

$$Max \;\; z = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 1x_4 + 0s_1 + 0s_2$$

Sujeto a

$$\begin{aligned}
2x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 1x_3 + 6x_4 &= 60\\
1x_1 + 1x_3 + \frac{2}{3}x_4 + 1s_1 &= 20\\
1x_2 + 5x_3 - 1s_2 &= 50\\
x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Agregando variables artificiales se obtiene la siguiente forma tableau:

$$Max \;\; z = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 1x_4 + 0s_1 + 0s_2 - Ma_1 - Ma_2$$

Sujeto a

$$\begin{aligned}
2x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 1x_3 + 6x_4 + 1a_1 &= 60\\
1x_1 + 1x_3 + \frac{2}{3}x_4 + 1s_1 &= 20\\
1x_2 + 5x_3 - 1s_2 + 1a_2 &= 50\\
x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2, a_1, a_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

## Forma tableau: caso general

El tableau inicial sería el siguiente:

| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $s_1$ | $s_2$ | $a_1$ | $a_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Base$ | $c_j$ | 6 | 3 | 4 | 1 | 0 | 0 | $-M$ | $-M$ | $b_i$ |
| $a_1$ | $-M$ | 2 | $\frac{1}{2}$ | $-1$ | 6 | 0 | 0 | 1 | 0 | 60 |
| $s_1$ | 0 | 1 | 0 | 1 | $\frac{2}{3}$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 20 |
| $a_2$ | $-M$ | 0 | 1 | 5 | 0 | 0 | $-1$ | 0 | 1 | 50 |
| $z_j$ | | $-2M$ | $\frac{-3}{2}M$ | $-4M$ | $-6M$ | 0 | $M$ | $-M$ | $-M$ | $-110M$ |
| $c_j - z_j$ | | $6+2M$ | $3+\frac{3}{2}M$ | $4+4M$ | $1+6M$ | 0 | $-M$ | 0 | 0 | |

Para obtener una solución básica posible inicial, se escoge las variables de decisión, $x_1$, $x_2$, $x_3$ y $x_4$, y la variable de exceso, $s_2$, como variables no-básicas:

$$x_1 = 0 \ \wedge x_2 = 0 \ \wedge \ x_3 = 0 \ \wedge \ x_4 = 0 \ \wedge s_2 = 0$$

Así, las variables básicas toman los siguientes valores:

$$a_1 = 60 \ \wedge \ s_1 = 20 \ \wedge \ a_2 = 50$$

## Problemas de minimización

Existen dos formas de resolver un problema de minimización utilizando el método símplex.

- Minimizar $z$ sujeta a un conjunto de restricciones es equivalente a maximizar $(-z)$ sujeta al mismo conjunto de restricciones. Se resuelve y al final el valor de $z$ se multiplica por $-1$.
- Se debe modificar el método símplex:
  - El coeficiente en la función objetivo de eventuales variables artificiales es $+M$.
  - En cada iteración se selecciona como variable que ingresa a la base aquella variable con el valor más negativo en la fila de evaluación neta $c_j - z_j$.
  - El criterio de detención consiste en obtener valores no-negativos en la fila de evaluación neta $c_j - z_j$.

# Problemas de minimización

Considerando el siguiente modelo de programación lineal:

$$Min \;\; z = 1x_1 + 1x_2$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 30 \\ x_2 &\geq 20 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 80 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$Max \;\; z = -1x_1 - 1x_2$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 30 \\ x_2 &\geq 20 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 80 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

## Casos especiales: Imposibilidad

Ocurre cuando no hay una solución al problema de programación lineal que satisfag[a]
todas las restricciones, incluyendo las restricciones de no-negatividad.

En el método símplex, esto se identifica cuando en el tableau final aparece una variable artificial en la base con un valor distinto de cero.

$$Max \;\; z = 10x_1 + 9x_2$$

Sujeto a

$$\begin{aligned}
\frac{7}{10}x_1 + 1x_2 &\leq 630 \\
\frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{6}x_2 &\leq 600 \\
1x_1 + \frac{2}{3}x_2 &\leq 708 \\
\frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{4}x_2 &\leq 135 \\
1x_1 &\geq 500 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

# Casos especiales: Imposibilidad

Tableau final:

| $Base$ | $c_j$ | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | $s_5$ | $s_6$ | $a_1$ | $a_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $10$ | $9$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $-M$ | $-M$ |
| $x_2$ | $9$ | $0$ | $1$ | $1$ | $0$ | $0$ | $0$ | $\frac{7}{10}$ | $0$ | $\frac{-7}{10}$ | $0$ |
| $s_2$ | $0$ | $0$ | $0$ | $\frac{-5}{6}$ | $1$ | $0$ | $0$ | $\frac{-1}{12}$ | $0$ | $\frac{1}{12}$ | $0$ |
| $s_3$ | $0$ | $0$ | $0$ | $\frac{-2}{3}$ | $0$ | $1$ | $0$ | $\frac{16}{30}$ | $0$ | $\frac{-16}{30}$ | $0$ |
| $s_4$ | $0$ | $0$ | $0$ | $\frac{-1}{4}$ | $0$ | $0$ | $1$ | $\frac{-9}{120}$ | $0$ | $\frac{-9}{120}$ | $0$ |
| $x_1$ | $10$ | $1$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $0$ |
| $a_2$ | $-M$ | $0$ | $1$ | $-1$ | $0$ | $0$ | $0$ | $\frac{-7}{10}$ | $-1$ | | $1$ |
| $z_j$ | | $-M$ | $-M$ | $0$ | $0$ | $0$ | $\frac{-37+7M}{10}$ | $M$ | $\frac{37-7M}{10}$ | $-M$ | $7.520 - 80M$ |
| $c_j - z_j$ | | $10 + M$ | $9 + M$ | $0$ | $0$ | $0$ | $\frac{37-7M}{10}$ | $-M$ | $\frac{-37-3M}{10}$ | $0$ | |

$a_2 = 80 \Rightarrow$ La solución final viola la sexta restricción en 80 unidades ($x_2 \geq 360$ no s cumple, pues $x_2 = 280$).

En general, problemas de programación lineal que involucren solamente restriccione $\leq$ y valores del lado derecho no-negativos, siempre tienen una solución posible, pues no es necesario introducir variables artificiales para obtener una solución básica posible inicial en el tableau símplex y, por lo tanto, no es posible que aparezca una variable artificial en la solución final.

## Casos especiales: No acotamiento

Ocurre cuando el valor de la solución puede crecer infinitamente sin violar las restricciones.

En el método símplex, esto se identifica cuando, en algún tableau, ninguna tasa $\frac{b_i}{a_{ij}}$ puede ser calculada, es decir, todos los $a_{ij} \leq 0$ en la columna correspondiente a la variable que debe entrar en la base.

$$Max \;\; z = 2x_1 + 1x_2$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 2 \\ x_2 &\leq 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

## Casos especiales: No acotamiento

Ocurre que:

| | | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $a_1$ | $s_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Base$ | $c_j$ | 2 | 1 | 0 | $-M$ | 0 | $b_i$ |
| $x_1$ | 2 | 1 | 0 | $-1$ | 1 | 0 | 2 |
| $s_2$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 5 |
| $z_j$ | | 2 | 0 | $-2$ | 2 | 0 | 4 |
| $c_j - z_j$ | | 0 | 1 | 2 | $-M-2$ | 0 | |

Interpretación: cada unidad de $s_1$ que es introducida en la base remueve cero unidades de $s_2$ y permite ingresar una unidad extra de $x_1$ puesto que $a_{13} = -1$. Esto es porque $s_1$ es una variable de exceso y puede ser interpretada como la cantidad de $x_1$ que es producida sobre el mínimo requerido.

## Casos especiales: Óptimos alternativos

Ocurre cuando un problema de programación lineal tiene dos o más soluciones óptimas.

En el método símplex, esto se manifiesta cuando en el tableau final una o más variables que no están en la base tienen la tasa $c_j - z_j$ igual a cero.

$$Max \quad z = 7x_1 + 10x_2$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} \frac{7}{10}x_1 + 1x_2 &\leq 630 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{6}x_2 &\leq 600 \\ 1x_1 + \frac{2}{3}x_2 &\leq 708 \\ \frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{4}x_2 &\leq 135 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

## Casos especiales: Óptimos alternativos

Tableau símplex final:

| | | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Base$ | $c_j$ | 7 | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | $b_i$ |
| $x_1$ | 7 | 1 | 0 | $\frac{10}{3}$ | 0 | 0 | $\frac{-40}{3}$ | 300 |
| $s_2$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{-10}{18}$ | 1 | 0 | $\frac{-20}{18}$ | 100 |
| $s_3$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{-22}{9}$ | 0 | 1 | $\frac{64}{9}$ | 128 |
| $x_2$ | 10 | 0 | 1 | $\frac{-4}{3}$ | 0 | 0 | $\frac{28}{3}$ | 420 |
| $z_j$ | | 7 | 10 | 10 | 0 | 0 | 0 | 6.300 |
| $c_j - z_j$ | | 0 | 0 | $-10$ | 0 | 0 | 0 | |

## Casos especiales: Degeneración

La degeneración no es propia de un problema de programación lineal, sino un comportamiento del método símplex ante ciertas características de ciertos problemas.

En el método símplex, se identifica esta situación cuando ocurre un empate entre dos o más variables básicas al elegir la variable básica que sale (empate entre las razones $\frac{b_i}{a_{ij}}$ para dos o más ecuaciones).

## Casos especiales: Degeneración

Implicaciones:

- Todas las variables empatadas se hacen cero. Aquellas que no se eligieron como variable que sale también tendrán un valor cero en la nueva solución. Las variables básicas con valor cero se llaman *degeneradas*, el mismo nombre se da a la solución básica factible correspondiente.
- Si alguna variable básica queda en cero y se obtiene la solución óptima al programa lineal, no existe problema.
- Si una variable degenerada se selecciona como variable que sale, la variable entrante deberá quedar con valor cero (ya que no puede crecer sin que la variable básica que sale se vuelva negativa), entonces el valor de $z$ permanecerá sin cambio.
- Si $z$ permanece igual, el método símplex puede caer en un ciclo que repite la misma secuencia de soluciones periódicamente, y no llega a la solución óptima.

## Casos especiales: Degeneración

$$Max \quad z = 10x_1 + 9x_2$$

Sujeto a

$$
\begin{aligned}
\frac{7}{10}x_1 + 1x_2 &\leq 630 \\
\frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{6}x_2 &\leq 480 \\
1x_1 + \frac{2}{3}x_2 &\leq 708 \\
\frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{4}x_2 &\leq 135 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$