| Apellido Paterno | Apellido Materno | Nombres |
|---|---|---|
| | | |

| Rut | Rol | Firma |
|---|---|---|
| | | |

| Paralelo | Nombre del Profesor |
|---|---|
| | |

## Instrucciones :

- Tiempo 90 minutos.
- Escriba con lápiz pasta o tinta. Los desarrollos con lápiz grafito no tienen derecho a apelación
- Escriba con claridad y **justifique** cada uno de sus desarrollos.
- No se permiten calculadoras, computadores, celulares ni hojas adicionales.
- No debe arrancar hojas del cuadernillo.
- Quienes sean sorprendidos cometiendo actos de deshonestidad académica tendrán nota 0 en esta prueba.

| | Puntaje |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| **Nota** | |

1. (25 PUNTOS) Considere la curva parametriza por $\vec{r}(t) = (1+t, 1-t, 1-t^2)$ con $t \in [-1, 1]$.
   (a) ¿En qué punto de la curva se obtiene la curvatura máxima?. Calcule dicho valor máximo.
   (b) Muestre que la curva es plana. Justifique.

**Solución:**

(a) Calculemos

$$\vec{r}\,'(t) = (1, -1, -2t) \quad \text{y} \quad \vec{r}\,''(t) = (0, 0, -2) \Longrightarrow \vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) = (2, 2, 0)$$

Entonces

$$\kappa(t) = \frac{||\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)||}{||\vec{r}\,'(t)||^3} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{(2+4t^2)^3}}$$

Note que $\kappa(t)$ alcanzará su máximo valor cuando $2 + 4t^2$ tome su mínimo valor. Esto ocurre cuando $t = 0$. Por lo tanto, $\kappa(t)$ es máxima cuando $t = 0$, es decir, en el punto $\vec{r}(0) = (1, 1, 1)$ y su valor es $\kappa(0) = \dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2^3}} = 1$.

(b) Note que $\vec{r}\,'''(t) = (0, 0, 0)$, entonces $\tau(t) = 0$ (la torsión). Por lo tanto, la curva es plana.

2. (25 PUNTOS) Sea la curva $\mathcal{C}$ dada por la intersección de las superficies

$$\frac{25x^2}{16} + (1-y)^2 = 1, \qquad z + \frac{1}{5}\sqrt{25 - 25x^2 - 16(1-y)^2} = x.$$

Encuentre la ecuación del plano que contiene a la curva $\mathcal{C}$.

**Solución:**

Como

$$\begin{aligned} \frac{25x^2}{16} + (1-y)^2 &= 1 \\ &\Leftrightarrow \\ \left(\frac{5x}{4}\right)^2 + (1-y)^2 &= 1 \end{aligned}$$

pongamos

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{4}{5}\cos t \\ y(t) &= 1 - \sin t \end{aligned}$$

para $t \in [0, 2\pi]$ entonces

$$\begin{aligned} z(t) &= -\frac{1}{5}\sqrt{25 - 25\left(\frac{4}{5}\cos t\right)^2 - 16(1-(1-\sin t))^2} + \frac{4}{5}\cos t \\ &= -\frac{1}{5}\sqrt{-16\cos^2 t - 16\sin^2 t + 25} + \frac{4}{5}\cos t \\ &= -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\cos t \end{aligned}$$

entonces la curva queda parametrizada por $\mathbf{f} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $t \to \mathbf{f}(t) = \left(\frac{4}{5}\cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\cos t\right)$.

Calcularemos la torsión,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{4}{5}\cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\cos t\right) \\ &= \left(-\frac{4}{5}\sin t, -\cos t, -\frac{4}{5}\sin t\right) \\ \mathbf{f}''(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{4}{5}\sin t, -\cos t, -\frac{4}{5}\sin t\right) \\ &= \left(-\frac{4}{5}\cos t, \sin t, -\frac{4}{5}\cos t\right) \\ \mathbf{f}'''(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{4}{5}\cos t, \sin t, -\frac{4}{5}\cos t\right) \\ &= \left(\frac{4}{5}\sin t, \cos t, \frac{4}{5}\sin t\right) \end{aligned}$$

como

$$\tau(t) = \frac{(\mathbf{f}'(t) \times \mathbf{f}''(t)) \cdot \mathbf{f}'''(t)}{\|\mathbf{f}'(t) \times \mathbf{f}''(t)\|^2}$$

calculamos

$$\begin{aligned} &\mathbf{f}'(t) \times \mathbf{f}''(t) \\ =\ & \left(-\frac{4}{5}\sin t, -\cos t, -\frac{4}{5}\sin t\right) \times \left(-\frac{4}{5}\cos t, \sin t, -\frac{4}{5}\cos t\right) \\ =\ & \left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{4}{5}\right) \end{aligned}$$

así

$$
\begin{aligned}
& \left(\mathbf{f}'(t) \times \mathbf{f}''(t)\right) \cdot \mathbf{f}'''(t) \\
= & \left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{4}{5}\sin t, \cos t, \frac{4}{5}\sin t\right) \\
= & \ 0
\end{aligned}
$$

entonces $\tau(t) \equiv 0$ luego es una curva plana y por tanto contenida en el plano osculador, evaluando el camino en $t = 0$ obtenemos el punto $\mathbf{f}(0) = \left(\frac{4}{5}\cos 0, 1 - \sin 0, -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\right) = \left(\frac{4}{5}, 1, \frac{1}{5}\right)$ de la curva, entonces el plano osculador es

$$\left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{4}{5}\right) \cdot \left(x - \frac{4}{5}, y - 1, z - \frac{1}{5}\right) = 0$$

es decir

$$\left(x - \frac{4}{5}\right) - \left(z - \frac{1}{5}\right) = 0$$

o equivalentemente $z = x - \frac{3}{5}$.

3. (25 PUNTOS) Sea $t_0 \in \mathbb{R}$ un número fijo dado. Se define la curva $C : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ parametrizada por $\vec{r}(t) = \Big(e^{-t}\cos(t), e^{-t}\operatorname{sen}(t)\Big)$.

   (a) Pruebe que la curva es simple, suave y regular.

   (b) Pruebe que la curva $C$ cruza una infinidad de veces cada uno de los ejes coordenados. Además, pruebe que si $t > t_0$, entonces $\|\vec{r}(t)\| < \|\vec{r}(t_0)\|$.

   (c) Calcule $\lim\limits_{t\to+\infty} \vec{r}(t)$.

   (d) Considere la longitud de de la curva $C$ entre $t_0$ y $t$, y denótela como $L[t_0, t]$. Calcule la longitud total de la curva $C$, calculando $\lim\limits_{t\to\infty} L[t_0, t]$.

**Solución:**

(a)
- La curva es simple. En efecto, sean $t_1, t_2 \in [t_0, \infty)$.

$$\begin{aligned}
&(e^{-t_1}\cos(t_1), e^{-t_1}\sin(t_1)) = (e^{-t_2}\cos(t_2), e^{-t_2}\cos(t_2)) \\
&\Rightarrow e^{-t_1}\cos(t_1) = e^{-t_2}\cos(t_2) \quad \wedge \quad e^{-t_1}\sin(t_1) = e^{-t_2}\sin(t_2) \\
&\Rightarrow e^{-2t_1}\cos^2(t_1) = e^{-2t_2}\cos^2(t_2) \quad \wedge \quad e^{-2t_1}\sin^2(t_1) = e^{-2t_2}\sin^2(t_2) \\
&\Rightarrow e^{-2t_1}(\cos^2(t_1) + \sin^2(t_1)) = e^{-2t_2}(\cos^2(t_2) + \sin^2(t_2)) \\
&\Rightarrow e^{-2t_1} = e^{-2t_2} \\
&\Rightarrow t_1 = t_2.
\end{aligned}$$

- La curva es suave (es decir $\vec{r}$ es de clase $C^1$). En efecto, la exponencial y las funciones seno y coseno son funciones de clase $C^1$, por lo que $x(t) = e^{-t}\cos(t)$ e $y(t) = e^{-t}\sin(t)$ también lo son, y así $\vec{r}(t)$ también lo es.
- La curva es regular. En efecto,

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| &= \|(-e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\sin(t), -e^{-t}\sin(t) + e^{-t}\cos(t))\| \\
&= e^{-t}\sqrt{(\cos^2 t + 2\cos(t)\sin(t) + \sin^2(t)) + (\sin^2 - 2\sin(t)\cos(t) + \cos^2(t))} \\
&= \sqrt{2}e^{-t} \\
&\neq 0 \qquad \forall t \geq t_0.
\end{aligned}$$

(b) Esto es evidente de la parametrización de la curva. Por ejemplo, en el eje $x$, los puntos tienen la forma $\vec{r}(t) = (e^{-t}\cos(t), 0)$, lo que implica que la curva corta el eje $x$ en todos los instantes $t > t_0$ donde $\operatorname{sen} t = 0$, es decir cuando $t = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . De forma análoga, en el eje $y$, los puntos tiene la forma $\vec{r}(t) = (0, e^{-t}\operatorname{sen}(t))$, lo que implica que la curva corta el eje $y$ en todos los instantes $t > t_0$ donde $\cos t = 0$, es decir cuando $t = \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Para probar lo segundo, basta calcular $\|\vec{r}(t)\| = e^{-t}$ y $\|\vec{r}(t_0)\| = e^{-t_0}$. Desde aquí se tiene lo deseado, pues $e^{-(\cdot)}$ es una función decreciente y luego $e^{-t} < e^{-t_0}, \forall t > t_0$.

(c) Directo desde la definición

$$\lim_{t\to+\infty} \vec{r}(t) = \left(\lim_{t\to+\infty} e^{-t}\cos(t), \lim_{t\to+\infty} e^{-t}\operatorname{sen}(t)\right) = (0,0).$$

(d) Para $t > t_0$ la longitud de arco de $C$ está dada por

$$L[t_0, t] = \int_{t_0}^{t} \|\vec{r}\,'(t)\|\, dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{2}e^{-t}\, dt = -\sqrt{2}e^{-t}\Big|_{t_0}^{t} = \sqrt{2}\left(e^{-t_0} - e^{-t}\right).$$

Pasando al límite obtenemos el largo total de $C$

$$L = \lim_{t\to\infty} L[t_0, t] = \lim_{t\to\infty} \sqrt{2}(e^{-t_0} - e^{-t}) = \sqrt{2}e^{-t_0}.$$

4. (25 PUNTOS) Sea $C$ la curva obtenida de la intersección de las superficies

$$S_1: \quad z = 2x + 3, \quad y \geq 0 \qquad \text{y} \qquad S_2: \quad z = x^2 + y^2, \quad x \geq 1.$$

Calcule la masa de la curva, si se sabe que la función de densidad es $f(x, y, z) = (x - 1)\sqrt{1 + y^2}$

**Solución:**

Al interceptar las dos superficies obtenemos la proyección en el plano $XY$ dada por

$$x^2 + y^2 = 2x + 3 \;\Rightarrow\; (x-1)^2 + y^2 = 4$$

en donde hacemos $x(t) = 1 + 2\cos t,\; y(t) = 2\operatorname{sen} t$, reemplazando en $S_1$ ó $S_2$ obtenemos $z(t) = 5 + 4\cos t$. La restricción para $t$ lo obtenemos a partir de $y \geq 0 \wedge x \geq 1$, así

$$y \geq 0 \wedge x \geq 1 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{sen} t \geq 0 \wedge 1 + 2\cos t \geq 1 \;\Leftrightarrow \operatorname{sen} t \geq 0 \wedge \cos t \geq 0,$$

de donde se obtiene que $t \in [0, \pi/2]$, siendo la parametrización

$$\vec{r}(t) = (1 + 2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 5 + 4\cos t), \;\; t \in [0, \pi/2],$$

con $\vec{r}\,'(t) = (-2\operatorname{sen} t, 2\cos t, -4\operatorname{sen} t)$, $\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{4 + 16\operatorname{sen}^2 t}$ para $t \in [0, \pi/2]$. Entonces, la masa $M$ viene dada por

$$\begin{aligned}
M = \int_C f\,ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\vec{r}(t))\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t\sqrt{1 + 4\operatorname{sen}^2 t}\sqrt{4 + 16\operatorname{sen}^2 t}\,dt \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 4\operatorname{sen}^2 t)\cos t\,dt, \qquad u = \operatorname{sen} t, \\
&= 4\left(\operatorname{sen} t + \frac{4\operatorname{sen}^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{28}{3}.
\end{aligned}$$