Departamento de Informática
Universidad Técnica Federico Santa María

Programación Lineal Entera - Modelamiento

v. 1.0.0

Renata Mella
renata.mella.12@sansano.usm.cl

October 9, 2016

Contenido

- En el mundo real, no se pueden tomar decisiones basadas en números reales. Por ejemplo, no se pueden producir 2,75 autos; se producen 2 autos o 3. De ésta manera, los valores que usaremos serán valores **enteros**.

- En el mundo real, no se pueden tomar decisiones basadas en números reales. Por ejemplo, no se pueden producir 2,75 autos; se producen 2 autos o 3. De ésta manera, los valores que usaremos serán valores **enteros**.
- Los problemas de programación lineal entera se definen de manera similar a un modelo de programación lineal con variables reales:
  - Variables.
  - Parámetros.
  - Función Objetivo.
  - Restricciones.
  - Naturaleza de las variables.*

- En el mundo real, no se pueden tomar decisiones basadas en números reales. Por ejemplo, no se pueden producir 2,75 autos; se producen 2 autos o 3. De ésta manera, los valores que usaremos serán valores **enteros**.
- Los problemas de programación lineal entera se definen de manera similar a un modelo de programación lineal con variables reales:
  - Variables.
  - Parámetros.
  - Función Objetivo.
  - Restricciones.
  - Naturaleza de las variables.*
- Pero la gran diferencia es que existe un límite de la naturaleza respecto al comportamiento de las variables, obligando a que éstas tomen valores enteros.

Dado que la naturaleza de las variables ahora está limitada por los números enteros, se pueden clasificar los problemas en 3 tipos de modelos:

- Modelos de Programación Lineal Entera Pura.
- Modelos de Programación Lineal Binaria.
- Modelos de Programación Lineal Mixta.

Un modelo de programación lineal entera puro es un modelo donde todas las variables son enteras (no existe espacio para fracciones).

Ejemplo

¿Cómo se puede representar 163 pesos utilizando la menor cantidad de monedas de 1, 5, 10, 50 y 100?

- Variables: x_i: Número de monedas de valor i.
- F.O: $\min z = x_1 + x_5 + x_{10} + x_{50} + x_{100}$
- Sujeto a: $1\,x_1 + 5\,x_5 + 10\,x_{10} + 50\,x_{50} + 100\,x_{100}$

Si el modelo fuera simplemente lineal...

La solución sería:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_{10} \\ x_{50} \\ x_{100} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1,63 \\ 1,63 \end{pmatrix}$$

Si el modelo fuera entero...

La solución sería:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_{10} \\ x_{50} \\ x_{100} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Los modelos de programación lineal binarios son modelos particulares de la programación entera donde las variables sólo pueden tomar valores 0 o 1.

Generalmente, las variables se definen de la siguiente forma:

$$x = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{si se toma la decisión} \\ 0, & \text{si no se toma la decisión} \end{array} \right\}$$

ó:

$$x = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{si se toma la decisión} \\ 1, & \text{si no se toma la decisión} \end{array} \right\}$$

Ejemplo

Tenemos una mochila con capacidad de K kilogramos y una serie n de objetos individualizables con un peso determinado (P_i). Se desea maximizar la cantidad de objetos en la mochila sin exceder la capacidad de ésta.

Variables:

$$x_i = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{si llevamos el objeto } i \text{ en la mochila.} \\ 0, & \text{si no llevamos el objeto.} \end{array} \right\}$$

F.O: $\max z = \sum_{i=1}^{n} x_i$

Sujeto a: $\sum_{i=1}^{n} P_i x_i \leq K$

Naturaleza de las variables: $x_i \in \{0, 1\}, \forall i$

Cuando aparecen variables binarias en los modelos, se pueden realizar decisiones puntuales o atómicas dentro de un mismo problema.

Existen varios tipos de restricciones utilizando estas variables:

- Restricciones de alternativas mutuamente excluyentes.
- Restricciones de alternativas contingentes.
- Restricciones de co-requisitos.
- Restricciones de activación de variables.

Alternaticas mutuamente excluyentes

Las restricciones de alternativas mutuamente excluyentes se definen bajo capacidades productivas o similares definiendo un límite máximo respecto a un conjunto de variables. Es decir, de un subconjunto de variables binarias, sólo una determinada cantidad podrá tener valor 1.

Sea V el conjunto de variables binarias de un problema. Se define V' como un subconjunto propio de V. Entonces, una restricción de alternativas mutuamente excluyentes es de la forma:

$$\sum_{i=1}^{|V'|} x_i \leq E, x_i \in V'$$

Se puede definir una variante donde en vez de $\leq$ sea $\geq$.

Alternativas contingentes

Las restricciones de alternativas contingentes se definen respecto a una condicionalidad entre variables binarias, donde si una variable x_i tiene valor 1, entonces otra serie de variables x_j debe tener valor 1. Pero si x_i es 0, entonces las variables x_j pueden tomar valores 0 o 1.

Se define una restricción de alternativas contingentes como $x_i \leq x_j$ Entonces, si $x_i = 1$ obligatoriamente $x_j = 1$. Mientras que si $x_i = 0$, $x_j = 0$ o $x_j = 1$.

Co-requisitos

Las restricciones de co-requisitos son "obligaciones" entre variables de manera que ambas se comporten de manera igual (o distinta) según se defina su comportamiento.

Se definen las restricciones de co-requisitos como $x_i = x_j$ o $x_i \neq x_j$. Se pueden definir también de manera que las variables estén en un sólo lado: $x_i - x_j = 0$ o $x_i + x_j = 1$.

Además de este trío de tipos de restricciones, se pueden definir varias más:

- Restricciones excluyentes.
- Resctricciones de costo fijo.
- Restricciones con múltiples co-requisitos.
- Restricciones con múltiples contingencias.

Activación de Variables

Por último, se define una restricción de activación de variables como una restricción que permite la asignación de valores a variables enteras o reales dependiendo de si tiene valor 1 o 0.

Sean $x_i, \cdots, x_n$ una serie de variables enteras o reales y sea y una variable binaria.

Se define una restricción de activación de variables como:

$$x_i + x_{i+1} + \cdots + x_{k-1} + x_k = \sum_{i}^{k} x_i \leq Cy$$

Donde C es una constante muy grande por determinar o una capacidad definida para el problema.

Tipos de Modelo
Modelos de Programación Lineal Mixta

Este tipo de modelo toma variables enteras o reales y variables binarias para poder modelar situaciones particulares, donde es necesario ir tomando decisiones que afectan las restricciones y la función objetivo.

Se consideran “múltiples decisiones pequeñas” durante la resolución final del problema.

Algunos ejemplos son:

- Producción con instalación de fábricas.
- Producción con elección de puntos de venta.
- Selección de proveedores para satisfacer necesidades múltiples.
- Elección de fuentes de recursos para la producción.

El consumo diario de energía eléctrica de una ciudad se puede suponer constante durante cuatro períodos. Sea K_i $(i = 1, \cdots, 4)$ el valor del consumo eléctrico total de la ciudad en cada período.

Para satisfacer dicho consumo energético se dispone de cuatro generadores petroleros. El costo de encender cada generador es C_j $(j = 1, \cdots, 4)$. La capacidad de producir energía de cada generador j durante el período i es E_{ij}. El costo de mantener funcionando el generador j durante el período i es P_{ij}. Como forma de evitar el sobrecalentamiento de los equipos, la empresa generadora ha decidido mantener funcionando como máximo dos períodos consecutivos un mismo generador.

Plantee un modelo que permita determinar la combinación óptima de funcionamiento de los motores de forma de minimizar los costos totales. Considere que los motores sólo pueden ser encendidos al comienzo de cada período.

Una cadena de supermercados está estudiando una nueva técnica de comercialización de verduras. Se considera la posibilidad de ofrecer 3 tipos de bandejas conteniendo una ensalada típica cada una: la Ensalada Chilena llevaría 2 tomates y 3 cebollas; la Ensalada Mexicana llevaría 1 tomate, 1 cebolla y 2 paltas; y la Ensalada Rusa llevaría 2 papas y 3 zanahorias.

El precio de venta de cada una sería de \$250, \$400 y \$180 respectivamente. Existen 5 proveedores quienes ofrecen al supermercado cada una de las verduras necesarias. El costo de una unidad de verdura j proveniente del proveedor i es $\$C_{ij}$. Además, el costo fijo por ordenar al proveedor i es $\$CF_i$. Por otra parte, cada proveedor i exige que, en caso de requerir sus productos, se le encargue un mínimo de $\$MIN_i$, sin incluir el costo fijo.

Por consideraciones de calidad, se estima que cada tipo de verdura debiera ordenarse a un mínimo de 2 y un máximo de 4 proveedores. Finalmente, el personal del supermercado puede clasificar y limpiar un máximo de L_j verduras de tipo j, pudiendo aumentar en L'_j unidades si se paga $\$H_j$ en horas extras.

Formule un modelo de programación lineal mixta que permita determinar la estrategia de comercialización que maximiza las utilidades del supermercado. Defina claramente variables, función objetivo y restricciones.

Usted ha decidido dedicarse al negocio de la agricultura, para lo cual posee un capital de $M. Como no tiene tierras optó por arrendar una o más parcelas. Su idea es plantar papas y maíz. Los que venderá a una fábrica a un precio de 50 [$/Kg] y 80[$/Kg] respectivamente.
Las parcelas disponibles para arrendar presentan las siguientes características:

Parcela	Tamaño (T_i) [ha]	% Producción [Ton/ha]	
		Papas (Pp_i)	Maíz (Pm_i)
1	100	5	7
2	150	8	3
3	200	5	5
4	50	4	6
5	70	7	2

Los costos de arriendo, plantación y cosecha, y la distancia a la fabrica, se muestran a continuación.

Parcela	Costo Arriendo (CA_i) [$]	% Costo Plantación y Cosecha		Distancia a la Fábrica (D_i) [Km]
		Fijo (CF_i) [$]	Variable (CV_i) [$ /ha]	
1	10.000.000	600.000	120.000	80
2	9.000.000	600.000	200.000	100
3	12.000.000	600.000	110.000	120
4	6.000.000	600.000	90.000	70
5	7.000.000	600.000	100.000	60

- El costo de transportar la cosecha es S[$/Ton-Km]
- Si arrienda más de 2 parcelas debe pagar un permiso especial al SAG equivalente a $K.
- El arriendo se paga por adelantado, pero el resto de los costos se puede pagar con lo ganado en la cosecha.
- Para no degradar la tierra le exigen, en cada parcela, que el terreno ocupado por cada cultivo no supere al otro en un 20%.
- La parcela 2 y la 5 pertenecen al mismo dueño y solo arrienda las 2 juntas.
- Usted decide que no arrendará más de 4 parcelas.
- La fábrica le comprará como máximo A[ton] de papas y B[ton] de maiz.
- Si arrienda la Parcela 1 y la 3 entonces debe arrendar la 4.
- Solo arrendará las parcelas una temporada.

Para tomar la decisión más acertada formule un modelo de Programación lineal entera que represente el problema.