INF221 – Informática Teórica

Clase #3
Iteración de Punto Fijo

Aldo Berrios Valenzuela

Martes 9 de Agosto de 2016

1. Iteración de Punto Fijo

Definición 1.1. Sea $g(x)$ una función. Un *punto fijo* de g es x^* tal que $x^* = g(x^*)$.

Teorema 1.1 (Punto fijo de Brouwer, 1 dimensión)**.** Sea $g : [a,b] \to [a,b]$ una función continua. Entonces g tiene al menos un punto fijo.

Demostración. Por definición de g, sabemos:

$$a \leq g(x) \leq b$$

En particular, $a \leq g(a)$ y $g(b) \leq b$. Si alguna vez se cumple con igualdad estamos listos.

Supongamos entonces $a < g(a)$ y $g(b) < b$. Consideremos $f(x) = g(x) - x$. Vemos que f es continua, y $f(a) = g(a) - a > 0$, $f(b) = g(b) - b < 0$. Por el *teorema del valor medio*, hay $x^* \in [a,b]$ tal que $f(x^*) = 0 \rightsquigarrow g(x^*) = x^*$. □

Definición 1.2. Sea $g : [a,b] \to [a,b]$. Se dice que g es una *contracción* si existe L, $0 < L < 1$, tal que para todo $x, y \in [a,b]$ es:

$$\left|g(x) - g(y)\right| \leq L\left|x - y\right| \tag{1.1}$$

(condición de Lipschitz, L es la constante de Lipschitz)

Teorema 1.2 (Contraction Mapping)**.** Suponga que $g : [a,b] \to [a,b]$ es continua y cumple la condición de Lipschitz. Entonces tiene un único punto fijo en $[a,b]$.

Demostración. Por Brouwer, g tiene al menos un punto fijo. Para demostrar que es único, supongamos puntos fijos c_1, c_2:

$$|c_1 - c_2| = \left|g(c_1) - g(c_2)\right| \leq L|c_1 - c_2| \tag{1.2}$$

Como $0 < L < 1$, esto es posible solo si $c_1 = c_2$. Esto es algo bastante obvio, ya que en el fondo tomamos un área más grande y en cada iteración la vamos reduciendo hasta tal punto que $c_1 = c_2$ (Figura 1) □

Definamos la secuencia:

$$x_{n+1} = g(x_n) \tag{1.3}$$

Si g es una *contracción* en $[a,b]$, la secuencia converge al punto fijo x^* de g en $[a,b]$.

De partida, si

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$$

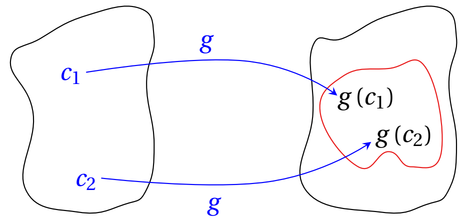

Figura 1: Al iterar el proceso iremos acotando cada vez el área hasta converger en un punto. Cabe destacar, que cada vez que hacemos este mapeo, el área se contrae un factor L.

existe, es un punto fijo de g. Si $x_0 \in [a,b]$, consideremos:

$$\begin{aligned}
\left|x_{n+1}-x^*\right| = \left|g(x_n)-g(x^*)\right| &\leq L\left|x_n-x^*\right| && (1.4)\\
&\leq \ldots \\
&\leq L^{n+1}\left|x_0-x^*\right| && (1.5)
\end{aligned}$$

Como $|L|<1$, $L^n \to 0$, y el lado izquierdo también $\to 0$ (para llegar a (1.5) sólo tenemos que desarrollar paso a paso (1.4)).

Si queremos llegar a $|x_n-x^*| \leq \epsilon$.

Sabemos que $|x_n-x^*| \leq L^n|x_0-x^*|$. Queremos deshacernos del x^* desconocido al lado derecho:

$$\begin{aligned}
\left|x_0-x^*\right| &= \left|(x_0-x_1)+(x_1-x^*)\right| \\
&\leq |x_0-x_1| + \left|x_1-x^*\right| \\
&\leq |x_0-x_1| + L\left|x_0-x^*\right| \quad \Big/ -L\left|x_0-x^*\right| \\
(1-L)\left|x_0-x^*\right| &\leq |x_1-x_0| \\
\left|x_0-x^*\right| &\leq \frac{|x_1-x_0|}{1-L}
\end{aligned}$$

O sea:

$$\left|x_n-x^*\right| \leq \frac{L^n}{1-L}|x_1-x_0| \tag{1.6}$$

Queremos $|x_n-x^*| \leq \epsilon$:

$$\begin{aligned}
\epsilon &\leq \frac{L^n}{1-L}|x_1-x_0| \\
L^n &\geq \frac{\epsilon(1-L)}{|x_1-x_0|} \\
n &\geq \frac{1}{\ln(L)} \cdot \ln\left(\frac{\epsilon(1-L)}{|x_1-x_0|}\right)
\end{aligned}$$

No hemos supuesto g diferenciable, pero en casos de interés lo es.

La condición de Lipschitz es:

$$\begin{aligned}
\frac{\left|g(x)-g(y)\right|}{\left|x-y\right|} &\leq L \\
\left|\frac{g(x)-g(y)}{x-y}\right| &\leq L
\end{aligned}$$

Por el teorema del valor intermedio[1]:

$$\frac{g(x)-g(y)}{x-y} = g'(\zeta), \qquad x \leq \zeta \leq y \tag{1.7}$$

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Mean_value_theorem

por lo tanto, $\left|g'(\zeta)\right| \leq L$ para $\zeta \in [a, b]$ es condición suficiente para Lipschitz, se aplica el teorema de contraction mapping hay un único punto fijo en $[a, b]$ y $x_{n+1} = g(x_n)$ converge.

Importante: No buscamos encontrar ζ, sólo demostrar que existe. Y por favor, ζ se lee "zeta".