Análisis de Sensibilidad

ILI-292, Investigación de Operaciones I

Segundo período académico 2009

Carlos Castro
Departamento de Informática
UTFSM

Agosto de 2009

Análisis de sensibilidad

- Todo modelo es una simplificación
- Parámetros tienen algún grado de incertidumbre
- Variaciones pueden corresponder a cambios en el proceso tecnológico o información considerada
- Conveniencia de cuantificar incidencia de variaciones en parámetros

Idea: Determinar rangos en los cuales puedan variar los parámetros manteniendo la base óptima y la solución posible

Debido a dificultades de analizar cambios simultáneos en parámetros es usual reducir este análisis a variaciones en cada parámetro individual manteniendo los otros fijos.

Variación en coeficientes de función objetivo

- No afectan la región de soluciones posibles
- No afectan factibilidad de la solución óptima
- Puede cambiar naturaleza de una restricción (limitante/no limitante)
- Puede verse afectada optimalidad de la solución

Idea: Analizar tasas $c_j - z_j$ y determinar condiciones bajo las cuales no cambia la

Sea

x_j**:** Variable correspondiente a la columna j

c_j**:** Coeficiente original de x_j en función objetivo

c'_j**:** Nuevo coeficiente de x_j en función objetivo

Δc_j**:** Variación en coeficiente de x_j

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \Delta c_j &= c'_j - c_j \\ c'_j &= c_j + \Delta c_j \end{aligned}$$

Variación en coeficiente de variable no-básica

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
$Base$	c_j	10	9	0	0	0	0	b_i
x_2	9	0	1	$\frac{30}{16}$	0	$\frac{-21}{16}$	0	252
s_2	0	0	0	$\frac{-15}{16}$	1	$\frac{5}{32}$	0	120
x_1	10	1	0	$\frac{-20}{16}$	0	$\frac{30}{16}$	0	540
s_4	0	0	0	$\frac{-11}{32}$	0	$\frac{9}{64}$	1	18
z_j		10	9	$\frac{70}{16}$	0	$\frac{111}{16}$	0	7.668
$c_j - z_j$		0	0	$\frac{-70}{16}$	0	$\frac{-111}{16}$	0	

- Coeficiente de variable no-básica en la función objetivo no tiene influencia en el valor de la solución óptima pues el valor de la variable no-básica es cero
- Solución óptima se ve afectada cuando una variable no-básica se vuelve básica

Idea: Analizar condiciones bajo las cuales una variable no-básica ingresa en la base

Variación en coeficiente de variable no-básica

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
Base	c_j	10	9	0	0	0	0	b_i
x_2	9	0	1	$\frac{30}{16}$	0	$\frac{-21}{16}$	0	252
s_2	0	0	0	$\frac{-15}{16}$	1	$\frac{5}{32}$	0	120
x_1	10	1	0	$\frac{-20}{16}$	0	$\frac{30}{16}$	0	540
s_4	0	0	0	$\frac{-11}{32}$	0	$\frac{9}{64}$	1	18
z_j		10	9	$\frac{70}{16}$	0	$\frac{111}{16}$	0	7.668
$c_j - z_j$		0	0	$\frac{-70}{16}$	0	$\frac{-111}{16}$	0	

- Variable no-básica x_j ingresa si $c'_j - z_j > 0$
- No afecta la solución óptima si

$$\begin{aligned} c'_j - z_j &\leq 0 \\ c'_j &\leq z_j \end{aligned}$$

- *Rango de insignificancia*:

$$-\infty < c'_j \leq z_j$$

- Variaciones dentro de este rango no alteran la solución óptima

Variación en coeficiente de variable no-básica

- Cuando el coeficiente sale del rango de insignificancia, evidentemente sobrepasando el límite superior del rango, se obtendrá un valor positivo en la fila de evaluación neta $c_j - z_j$
- Esto implica realizar iteraciones adicionales para encontrar la nueva solución óptima
- Este cambio provoca simplemente el desplazamiento a otro punto extremo, de ninguna manera se afecta la factibilidad de la solución.

Variación en coeficiente de variable básica

- Cambios en coeficientes en la función objetivo de variables básicas afectan la solución óptima pues la variable tiene un valor distinto de cero
- Casos:
  - La base óptima se mantiene pero el valor de la solución cambia
  - Desplazamiento a otro punto extremo donde la variable permanece en la bas óptima aumentando su valor en desmedro de la disminución del valor de alguna otra variable
  - Desplazamiento a otro punto extremo donde la variable sale de la base permitiendo el ingreso de una nueva variable

Variación en coeficiente de variable básica

							s_4	
$Base$	c_j	$10+\Delta c_1$	9	0	0	0	0	b_i
x_2	9	0	1	$\frac{30}{16}$	0	$\frac{-21}{16}$	0	252
s_2	0	0	0	$\frac{-15}{16}$	1	$\frac{5}{32}$	0	120
x_1	$10+\Delta c_1$	1	0	$\frac{-20}{16}$	0	$\frac{30}{16}$	0	540
s_4	0	0	0	$\frac{-11}{32}$	0	$\frac{9}{64}$	1	18
z_j		$10+\Delta c_1$	9	$\frac{70}{16}-\frac{20\Delta c_1}{16}$	0	$\frac{111}{16}+\frac{30\Delta c_1}{16}$	0	$7.668+540\Delta$
c_j-z_j		0	0	$\frac{-70}{16}+\frac{20\Delta c_1}{16}$	0	$\frac{-111}{16}-\frac{30\Delta c_1}{16}$	0	

- La solución permanece óptima si:

$$\begin{aligned} \frac{-70}{16}+\frac{20}{16}\Delta c_1 &\leq 0 \Rightarrow \Delta c_1 \leq \frac{70}{20} \\ \frac{-111}{16}-\frac{30}{16}\Delta c_1 &\leq 0 \Rightarrow \Delta c_1 \geq \frac{-111}{30} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$-3,7 \leq \Delta c_1 \leq 3,5$$

- *Rango de optimalidad*: Como $c_1' = 10+\Delta c_1 \rightarrow 6,3 \leq c_1' \leq 13,5$
- Variaciones dentro de este rango
  - No afectan el punto óptimo
  - Afectan el valor de la solución óptima

Variación en coeficiente de variable básica

Rango de optimalidad para la variable básica asociada con la columna j y fila i:

- Para cada variable no-básica k:

$$(c_k - z_k) - a_{ik}\Delta c_j \leq 0$$

  Así, cada variable no-básica impone un límite superior o inferior sobre Δc_j

- A partir de:
  - α: límite inferior más restrictivo
  - β: límite superior más restrictivo

  se determina

$$\alpha \leq \Delta c_j \leq \beta$$

- *Rango de optimalidad* para variable básica x_j:

$$c_j + \alpha \leq c'_j \leq c_j + \beta$$

Rango de optimalidad del coeficiente de x_2

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
Base	c_j	$10+\Delta c_1$	9	0	0	0	0	b_i
x_2	9	0	1	$\frac{30}{16}$	0	$\frac{-21}{16}$	0	252
s_2	0	0	0	$\frac{-15}{16}$	1	$\frac{5}{32}$	0	120
x_1	$10+\Delta c_1$	1	0	$\frac{-20}{16}$	0	$\frac{30}{16}$	0	540
s_4	0	0	0	$\frac{-11}{32}$	0	$\frac{9}{64}$	1	18
z_j		$10+\Delta c_1$	9	$\frac{70}{16}-\frac{20\Delta c_1}{16}$	0	$\frac{111}{16}+\frac{30\Delta c_1}{16}$	0	$7.668+540\Delta$
$c_j - z_j$		0	0	$\frac{-70}{16}+\frac{20\Delta c_1}{16}$	0	$\frac{-111}{16}-\frac{30\Delta c_1}{16}$	0	

- Considerando la variable no-básica s_1: $\frac{-70}{16} - \frac{30}{16}\Delta c_2 \leq 0 \Rightarrow \Delta c_2 \geq \frac{7}{3}$
- Considerando la variable no-básica s_3: $\frac{-111}{16} + \frac{21}{16}\Delta c_2 \leq 0 \Rightarrow \Delta c_2 \leq \frac{111}{21}$

Por lo tanto

$$\frac{7}{3} \leq \Delta c_2 \leq \frac{111}{21}$$

Como $\Delta c_2 = c_2' - c_2$ y $c_2 = 9 \rightarrow \frac{34}{3} = 9 + \frac{7}{3} \leq c_2' \leq 9 + \frac{111}{21} = \frac{300}{21}$

Variación en coeficiente de variable básica

- Todo coeficiente de x_1 entre $6,3$ y $13,5$ deja la solución actual como óptima
- Se puede calcular fácilmente el valor de la función objetivo
- Considerando un coeficiente $c_1 = 12$:

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
Base	c_j	12	9	0	0	0	0	b_i
x_2	9	0	1	$\frac{30}{16}$	0	$\frac{-21}{16}$	0	252
s_2	0	0	0	$\frac{-15}{16}$	1	$\frac{5}{32}$	0	120
x_1	12	1	0	$\frac{-20}{16}$	0	$\frac{30}{16}$	0	540
s_4	0	0	0	$\frac{-11}{32}$	0	$\frac{9}{64}$	1	18
z_j		12	9	$\frac{70}{16}$	0	$\frac{111}{16}$	0	8.748
$c_j - z_j$		0	0	$\frac{-70}{16}$	0	$\frac{-111}{16}$	0	

Variación en coeficiente de variable básica

- Considerando un aumento de 4 unidades en el coeficiente c_1:

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
$Base$	c_j	14	9	0	0	0	0	b_i
x_2	9	0	1	$\frac{30}{16}$	0	$\frac{-21}{16}$	0	252
s_2	0	0	0	$\frac{-15}{16}$	1	$\frac{5}{32}$	0	120
x_1	14	1	0	$\frac{-20}{16}$	0	$\frac{30}{16}$	0	540
s_4	0	0	0	$\frac{-11}{32}$	0	$\frac{9}{64}$	1	18
z_j		14	9	$\frac{70}{16} - \frac{20\times4}{16}$	0	$\frac{111}{16} + \frac{30\times4}{16}$	0	$7.668 + 540 \times 4$
$c_j - z_j$		0	0	$\frac{10}{16}$	0	$\frac{-231}{16}$	0	

- Esto implica realizar iteraciones adicionales para calcular la nueva solución óptima

- Ingresa s_1 y sale x_2

Variación en coeficiente de variable básica

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
$Base$	c_j	14	9	0	0	0	0	b_i
s_1	0	0	$\frac{16}{30}$	1	0	$\frac{-7}{10}$	0	$134,4$
s_2	0	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{-1}{2}$	0	246
x_1	14	1	$\frac{2}{3}$	0	0	1	0	708
s_4	0	0	$\frac{22}{120}$	0	0	$\frac{-1}{10}$	1	$64,2$
z_j		10	$\frac{28}{3}$	0	0	10	0	9.828
$c_j - z_j$		0	$-\frac{1}{3}$	0	0	-10	0	

- El método vuelve a visitar un punto extremo

Variación en coeficiente de variable básica

- Considerando una disminución de 4 unidades en el coeficiente de x_1

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4		
$Base$	c_j	6	9	0	0	0	0	b_i	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
x_2	9	0	1	$\frac{30}{16}$	0	$\frac{-21}{16}$	0	252	$-$
s_2	0	0	0	$\frac{-15}{16}$	1	$\frac{5}{32}$	0	120	768
x_1	6	1	0	$\frac{-20}{16}$	0	$\frac{30}{16}$	0	540	288
s_4	0	0	0	$\frac{-11}{32}$	0	$\frac{9}{64}$	1	18	128
z_j		6	9	$\frac{70}{16}+\frac{20\times4}{16}$	0	$\frac{111}{16}-\frac{30\times4}{16}$	0	$7.668-540\times4$	
$c_j - z_j$		9	0	$\frac{-150}{16}$	0	$\frac{9}{16}$	0		

- Esto implica realizar iteraciones adicionales para calcular la nueva solución óptima

- Ingresa s_3 y sale s_4

Variación en coeficiente de variable básica

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
Base	c_j	6	9	0	0	0	0	b_i
x_2	9	0	1	$\frac{-4}{3}$	0	0	$\frac{21}{16}$	420
s_2	0	0	0	$\frac{-5}{9}$	1	0	$\frac{-5}{32}$	100
x_1	6	1	0	$\frac{10}{3}$	0	0	$\frac{-30}{16}$	300
s_3	0	0	0	$\frac{-22}{9}$	0	1	1	128
z_j		6	9	$\frac{-36}{3}+\frac{60}{3}$	0	0	$\frac{189}{16}-\frac{180}{16}$	5.580
$c_j - z_j$		0	0	-8	0	0	$\frac{-9}{16}$	

- El método visita un nuevo punto extremo

Variación en coeficiente de variable básica

- Situaciones analizadas implican desplazamiento del punto óptimo a un vértice adyacente lo cual requiere una sóla iteración del método simplex
- En general, la reoptimización puede implicar más de una iteración.
- Considerando el tableau final y una disminución de 7 unidades en el coeficiente de x_1:

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
$Base$	c_j	$10-7$	9	0	0	0	0	b_i
x_2	9	0	1	$\frac{30}{16}$	0	$\frac{-21}{16}$	0	252
s_2	0	0	0	$\frac{-15}{16}$	1	$\frac{5}{32}$	0	120
x_1	$10-7$	1	0	$\frac{-20}{16}$	0	$\frac{30}{16}$	0	540
s_4	0	0	0	$\frac{-11}{32}$	0	$\frac{9}{64}$	1	18
z_j		$10-7$	9	$\frac{70}{16}+\frac{140}{16}$	0	$\frac{111}{16}-\frac{210}{16}$	0	$7.668-540\times 7$
c_j-z_j		0	0	$-\frac{210}{16}$	0	$\frac{99}{16}$	0	

Variación en coeficiente de variable básica

- Ingresando s_3 en reemplazo s_4

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
$Base$	c_j	3	9	0	0	0	0	b_i
x_2	9	0	1	$\frac{-4}{3}$	0	0	$\frac{21}{16}$	420
s_2	0	0	0	$\frac{-5}{9}$	1	0	$\frac{-5}{32}$	100
x_1	3	1	0	$\frac{10}{3}$	0	0	$\frac{-30}{16}$	300
s_4	0	0	0	$\frac{-22}{9}$	0	1	1	128
z_j		3	9	-2	0	0	$\frac{99}{16}$	4.680
$c_j - z_j$		0	0	2	0	0	$\frac{-99}{16}$	

- Tableau actual no es óptimo

- s_1 debe entrar en reemplazo de x_1

Variación en coeficiente de variable básica

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
$Base$	c_j	3	9	0	0	0	0	b_i
x_2	9	$\frac{2}{5}$	1	0	0	0	$\frac{9}{16}$	540
s_2	0	$\frac{1}{6}$	0	0	1	0	$\frac{-15}{32}$	150
s_1	0	$\frac{3}{10}$	0	1	0	0	$\frac{-9}{16}$	90
s_3	0	$\frac{11}{15}$	0	0	0	1	$\frac{-3}{8}$	348
z_j		$\frac{18}{5}$	9	0	0	0	$\frac{81}{16}$	4.860
$c_j - z_j$		$\frac{-3}{5}$	0	0	0	0	$\frac{-81}{16}$	

Variación en los valores del lado derecho

Cambios en el valor de alguno de los elementos de la columna b_i de un programa lineal

- Pueden afectar la forma de la región de soluciones posibles
- Puede cambiar naturaleza de una restricción (limitante/no limitante/redundante)
- Pueden afectar factibilidad de la solución óptima
- Puede verse afectada optimalidad de la solución

Idea:

- Analizar efecto en la función objetivo
- Verificar no-negatividad de variables

Variación en los valores del lado derecho

$(c_j - z_j)$:

- En variables de holgura, representa aumento en función objetivo por unidad del recurso que es ingresada en la solución
- En restricciones limitantes, en el tableau final, es negativa:
  - Ingresando una unidad de la variable en la solución (se crea holgura) el valor de la función objetivo disminuye en $(c_j - z_j)$
  - Valor de una unidad adicional del recurso es $(c_j - z_j)$
- Razonamiento inverso:
  - Aumento en una unidad del recurso restringido genera aumento de $-(c_j - z_j)$ en el valor de la función objetivo
  - Válido si cambio en recursos no mueve a una solución básica imposible (se tenga tantas unidades del recurso tal que dicho recurso no restrinja el problema y, por lo tanto, no determine la solución óptima)

Variación en los valores del lado derecho

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
$Base$	c_j	10	9	0	0	0	0	b_i
x_2	9	0	1	$\frac{30}{16}$	0	$\frac{-21}{16}$	0	252
s_2	0	0	0	$\frac{-15}{16}$	1	$\frac{5}{32}$	0	120
x_1	10	1	0	$\frac{-20}{16}$	0	$\frac{30}{16}$	0	540
s_4	0	0	0	$\frac{-11}{32}$	0	$\frac{9}{64}$	1	18
z_j		10	9	$\frac{70}{16}$	0	$\frac{111}{16}$	0	7.668
$c_j - z_j$		0	0	$\frac{-70}{16}$	0	$\frac{-111}{16}$	0	

Recurso	Aumento en la función objetivo
1	$\frac{70}{16}$
2	0
3	$\frac{111}{16}$
4	0

- *Precio sombra*: Precio máximo a pagar por unidad adicional del recurso
- Precio sombra = 0: no conviene pagar para aumentar capacidad ociosa

Variación en los valores del lado derecho

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
$Base$	c_j	10	9	0	0	0	0	b_i
x_2	9	0	1	$\frac{30}{16}$	0	$\frac{-21}{16}$	0	252
s_2	0	0	0	$\frac{-15}{16}$	1	$\frac{5}{32}$	0	120
x_1	10	1	0	$\frac{-20}{16}$	0	$\frac{30}{16}$	0	540
s_4	0	0	0	$\frac{-11}{32}$	0	$\frac{9}{64}$	1	18
z_j		10	9	$\frac{70}{16}$	0	$\frac{111}{16}$	0	7.668
$c_j - z_j$		0	0	$\frac{-70}{16}$	0	$\frac{-111}{16}$	0	

Ingresando una unidad de s_1:	Aumentar b_1, *disminuir* s_1:
x_2 disminuye en $\frac{30}{16}$	x_2 aumenta en $\frac{30}{16}$
s_2 disminuye en $\frac{-15}{16}$ (o aumenta en $\frac{15}{16}$)	s_2 aumenta en $\frac{-15}{16}$ (o disminuye en $\frac{15}{16}$)
x_1 disminuye en $\frac{-20}{16}$ (o aumenta en $\frac{20}{16}$)	x_1 aumenta en $\frac{-20}{16}$ (o disminuye en $\frac{20}{16}$)
s_4 disminuye en $\frac{-11}{32}$ (o aumenta en $\frac{11}{32}$)	s_4 aumenta en $\frac{-11}{32}$ (o disminuye en $\frac{11}{32}$)

Variación en los valores del lado derecho

Suponiendo que b_1 aumenta de 630 a 631:

- Valor óptimo de la función objetivo: $7.668 + 4,375 = 7.672,375$
- Columna b_i:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ s_2 \\ x_1 \\ s_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 252 \\ 120 \\ 540 \\ 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{30}{16} \\ \frac{-15}{16} \\ \frac{-20}{16} \\ \frac{-11}{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 253\frac{14}{16} \\ 119\frac{1}{16} \\ 538\frac{12}{16} \\ 17\frac{21}{32} \end{bmatrix}$$

- Nuevo tableau final:

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
$Base$	c_j	10	9	0	0	0	0	b_i
x_2	9	0	1	$\frac{30}{16}$	0	$\frac{-21}{16}$	0	$253\frac{14}{16}$
s_2	0	0	0	$\frac{-15}{16}$	1	$\frac{5}{32}$	0	$119\frac{1}{16}$
x_1	10	1	0	$\frac{-20}{16}$	0	$\frac{30}{16}$	0	$538\frac{12}{16}$
s_4	0	0	0	$\frac{-11}{32}$	0	$\frac{9}{64}$	1	$17\frac{21}{32}$
z_j		10	9	$\frac{70}{16}$	0	$\frac{111}{16}$	0	$7.672\frac{6}{16}$
$c_j - z_j$		0	0	$\frac{-70}{16}$	0	$\frac{-111}{16}$	0	

Variación en los valores del lado derecho

- Nuevos valores deben verificar no-negatividad:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ s_2 \\ x_1 \\ s_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 252 \\ 120 \\ 540 \\ 18 \end{bmatrix} + \Delta b_1 \begin{bmatrix} \frac{30}{16} \\ \frac{-15}{16} \\ \frac{-20}{16} \\ \frac{-11}{32} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 252 + \frac{30}{16}\Delta b_1 &\geq 0 \Rightarrow \Delta b_1 \geq \frac{-252}{\frac{30}{16}} = -134,40 \\ 120 + \frac{-15}{16}\Delta b_1 &\geq 0 \Rightarrow \Delta b_1 \leq \frac{120}{\frac{15}{16}} = 128,00 \\ 540 + \frac{-20}{16}\Delta b_1 &\geq 0 \Rightarrow \Delta b_1 \leq \frac{540}{\frac{20}{16}} = 432,00 \\ 18 + \frac{-11}{32}\Delta b_1 &\geq 0 \Rightarrow \Delta b_1 \leq \frac{18}{\frac{11}{32}} = 52,36 \end{aligned}$$

- *Rango de factibilidad*: $-134,40 \leq \Delta b_1 \leq 52,36$

- En este rango
  - La base se mantiene óptima
  - Cambia el valor de las variables básicas
  - Cambia el valor de la función objetivo

Rango de factibilidad

Restricciones $\leq$:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} + \Delta b_i \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde

- $b_1 \ldots b_m$: columna b_i de la solución actual
- $a_{1j} \ldots a_{mj}$: columna j del tableau final correspondiente a la variable de holgura asociada a la restricción i

Rango de factibilidad

Restricciones $\geq$:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} - \Delta b_i \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde

- $b_1 \ldots b_m$: columna b_i de la solución actual
- $a_{1j} \ldots a_{mj}$: columna j del tableau final correspondiente a la variable de exceso asociada a la restricción i

Rango de factibilidad

Restricciones =:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} + \Delta b_i \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde

- $b_1 \ldots b_m$: columna b_i de la solución actual
- $a_{1j} \ldots a_{mj}$: columna j del tableau final correspondiente a la variable artificial asociada a la restricción i

Variación en los valores del lado derecho

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
$Base$	c_j	10	9	0	0	0	0	b_i
x_2	9	0	1	$\frac{30}{16}$	0	$\frac{-21}{16}$	0	252
s_2	0	0	0	$\frac{-15}{16}$	1	$\frac{5}{32}$	0	120
x_1	10	1	0	$\frac{-20}{16}$	0	$\frac{30}{16}$	0	540
s_4	0	0	0	$\frac{-11}{32}$	0	$\frac{9}{64}$	1	18
z_j		10	9	$\frac{70}{16}$	0	$\frac{111}{16}$	0	7.668
$c_j - z_j$		0	0	$\frac{-70}{16}$	0	$\frac{-111}{16}$	0	

- Cambio entre $-134,40$ y $52,36$ en recursos de restricción 1 no modifica la base
- Fácilmente se calcula valor de solución óptima
- Considerando un aumento de 16 unidades:

$$\begin{bmatrix} x_2^* \\ s_2^* \\ x_1^* \\ s_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 252 \\ 120 \\ 540 \\ 18 \end{bmatrix} + 16 \begin{bmatrix} \frac{30}{16} \\ \frac{-15}{16} \\ \frac{-20}{16} \\ \frac{-11}{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 282 \\ 105 \\ 520 \\ \frac{25}{2} \end{bmatrix}$$

- Función objetivo:

$$z^* = 7.668 + 16 \times \frac{70}{16} = 7.738$$

$$z^* = 10 \times 520 + 9 \times 282 = 7.738$$

Variación en los valores del lado derecho

Considerando un aumento de 64 unidades en los recursos de la primera restricción provoca la no factibilidad de la solución actual:

- Considerar un aumento de $52,36$ unidades en los recursos de la primera restricción, lo cual llevará a alguna variable básica a tomar el valor cero.
- Teniendo en la base una variable con valor cero es posible intercambiarla con la variable de holgura asociada a la primera restricción (actualmente no-básica). Esto se hace dejando un vector unitario en la columna asociada a la variable entrante.
- Finalmente, ahora que la variable de holgura está en la base su valor puede ser incrementado. Como la idea era incrementar en 64 los recursos de la primera restricción y ya se consideró un aumento de $52,36$, sólo falta incrementar en las $11,64$ unidades restantes dichos recursos.

Variación en coeficientes de restricciones

Análisis cualitativo de cambios en algún a_{ij} para una variable básica x_j:

Restricciones $\leq$:

- Si
  - a_{ij} aumenta
  - la restricción i es limitante
  - $x_j > 0$ (no es degenerada)

  entonces
  - x_j debe disminuir
  - la función objetivo debe disminuir
- Si
  - a_{ij} disminuye
  - la restricción i es limitante
  - $x_j > 0$

  entonces
  - x_j debe aumentar
  - la función objetivo debe aumentar

Variación en coeficientes de restricciones

Análisis cualitativo de cambios en algún a_{ij} para una variable básica x_j:

Restricciones $\geq$:

- Si
  - a_{ij} aumenta
  - la restricción es limitante

  entonces
  - la función objetivo aumenta
- Si
  - a_{ij} disminuye
  - la restricción es limitante

  entonces
  - la función objetivo disminuye

Variación en coeficientes de restricciones

Análisis cualitativo de cambios en algún a_{ij} para una variable básica x_j:

Restricciones =:

Se requiere análisis adicional

La regla del 100%

- Analiza variaciones simultaneas en coeficientes de la función objetivo
- Analiza variaciones simultaneas en valores del lado derecho de las restricciones

Variación en coeficientes de función objetivo

Variaciones en coeficientes de variables no-básicas:

- Si cada coeficiente está dentro de su rango de insignificancia (calculado suponiendo que sólo un coeficiente varía):
  - La base actual permanece óptima
  - Valor de las variables básicas no cambia
  - Valor de la función objetivo no cambia
- Si algún coeficiente sale de su rango de insignificancia:
  - La base actual deja de ser óptima

Variación en coeficientes de función objetivo

Variaciones en coeficientes de variables básicas
Sea

c_j: coeficiente original de x_j en la función objetivo

Δc_j: variación en el coeficiente c_j

I_j: incremento máximo en c_j manteniendo la base óptima cuando se analiza una sóla variación

D_j: decremento máximo en c_j manteniendo la base óptima cuando se analiza una sóla variación

Para cada variable x_j:

- Si $\Delta c_j > 0$ entonces $r_j = \frac{\Delta c_j}{I_j}$
- Si $\Delta c_j < 0$ entonces $r_j = \frac{-\Delta c_j}{D_j}$
- Si $\Delta c_j = 0$ entonces $r_j = 0$

r_j: tasa de cambio *real* en c_j con respecto al cambio máximo permitido en c_j tal qu
se mantenga la base óptima

Variación en coeficientes de función objetivo

Variaciones en coeficientes de variables básicas

- Si sólo un coeficiente c_j sufre variaciones, la base permanece óptima cuando $r_j \leq 1$ (en términos porcentuales, $r_j \leq 100\%$)
- Regla del 100% es generalización de esta idea
- Si
$$\sum_{j=1}^{n} r_j \leq 1$$
  - La base permanece óptima
  - Valores de variables no cambian
  - Valor de función objetivo podría cambiar
- Si
$$\sum_{j=1}^{n} r_j > 1$$
  la base podría como no podría mantenerse óptima, nada se puede asegurar

Variación en los valores del lado derecho

Variación en los valores del lado derecho de restricciones no limitantes

- Si cada valor del lado derecho está dentro de su rango de factibilidad (calculado suponiendo que sólo un valor varía):
  - La base actual permanece óptima
  - Valor de variables de decisión no cambia
  - Valor de la función objetivo no cambia
- Si algún valor del lado derecho sale de su rango de factibilidad:
  - La base actual deja de ser óptima

Variación en los valores del lado derecho

Variación en los valores del lado derecho de restricciones limitantes
Sea

b_j: valor del lado derecho de la restricción j

Δb_j: variación en el valor de b_j

I_j: incremento máximo en b_j manteniendo la base óptima cuando se analiza una sóla variación

D_j: decremento máximo para b_j manteniendo la base óptima cuando se analiza una sóla variación

Para cada restricción:

- Si $\Delta b_j > 0$ entonces $r_j = \frac{\Delta b_j}{I_j}$
- Si $\Delta b_j < 0$ entonces $r_j = \frac{-\Delta b_j}{D_j}$
- Si $\Delta b_j = 0$ entonces $r_j = 0$

r_j: tasa de cambio *real* en b_j con respecto al cambio máximo permitido en b_j tal qu
se mantenga la base óptima

Variación en los valores del lado derecho

Variación en los valores del lado derecho de restricciones limitantes

- Si sólo la j-ésima restricción sufre variaciones, la base permanece óptima cuand $r_j \leq 1$ (en términos porcentuales, $r_j \leq 100\%$)
- Regla del 100% es generalización de esta idea
- Si

$$\sum_{j=1}^{n} r_j \leq 1$$

  - La base permanece óptima
  - Valores de variables básicas podrían cambiar
  - Valor de función objetivo podría cambiar

- Si

$$\sum_{j=1}^{n} r_j > 1$$

  - La base podría como no podría mantenerse óptima, nada se puede asegurar

Introducción de una restricción adicional

- Una restricción adicional sólo puede eliminar soluciones posibles pero no puede agregar soluciones posibles
- Verificar si la solución óptima satisface la restricción adicional:
  - Si la solución óptima satisface la restricción adicional todavía es la solución óptima
  - Si la solución óptima no satisface la restricción adicional se debe calcular la nueva solución óptima

Introducción de una restricción adicional

$$Max \quad z = 10x_1 + 9x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

Sujeto a

$$\begin{aligned}
\frac{7}{10}x_1 + 1x_2 + 1s_1 &= 630 \\
\frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{6}x_2 + 1s_2 &= 600 \\
1x_1 + \frac{2}{3}x_2 + 1s_3 &= 708 \\
\frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + 1s_4 &= 135 \\
x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
$Base$	c_j	10	9	0	0	0	0	b_i
x_2	9	0	1	$\frac{30}{16}$	0	$\frac{-21}{16}$	0	252
s_2	0	0	0	$\frac{-15}{16}$	1	$\frac{5}{32}$	0	120
x_1	10	1	0	$\frac{-20}{16}$	0	$\frac{30}{16}$	0	540
s_4	0	0	0	$\frac{-11}{32}$	0	$\frac{9}{64}$	1	18
z_j		10	9	$\frac{70}{16}$	0	$\frac{111}{16}$	0	7.668
$c_j - z_j$		0	0	$\frac{-70}{16}$	0	$\frac{-111}{16}$	0	

Introducción de una restricción adicional

- Considerando la restricción adicional:

$$x_1 + x_2 \leq 800$$

- Evaluando la restricción en el punto óptimo $x_1^* = 540$ y $x_2^* = 252$:

$$540 + 252 = 792 \leq 800$$

  Por lo tanto, la restricción es satisfecha

- Se puede representar la restricción en forma estándar agregando la variable de holgura s_5:

$$x_1 + x_2 + s_5 = 800$$

  Así, la evaluación de la restricción en el punto óptimo entrega el valor de la variable de holgura s_5:

$$540 + 252 + s_5 = 800 \rightarrow s_5 = 8$$

Introducción de una restricción adicional

Agregando la restricción en forma estándar al tableau final:

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	
$Base$	c_j	10	9	0	0	0	0	0	b_i
x_2	9	0	1	$\frac{30}{16}$	0	$\frac{-21}{16}$	0	0	252
s_2	0	0	0	$\frac{-15}{16}$	1	$\frac{5}{32}$	0	0	120
x_1	10	1	0	$\frac{-20}{16}$	0	$\frac{30}{16}$	0	0	540
s_4	0	0	0	$\frac{-11}{32}$	0	$\frac{9}{64}$	1	0	18
		1	1	0	0	0	0	1	800
z_j		10	9	$\frac{70}{16}$	0	$\frac{111}{16}$	0		7.668
$c_j - z_j$		0	0	$\frac{-70}{16}$	0	$\frac{-111}{16}$	0		

Introducción de una restricción adicional

Ingresando s_5 en la base:

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	
Base	c_j	10	9	0	0	0	0	0	b_i
x_2	9	0	1	$\frac{30}{16}$	0	$\frac{-21}{16}$	0	0	252
s_2	0	0	0	$\frac{-15}{16}$	1	$\frac{5}{32}$	0	0	120
x_1	10	1	0	$\frac{-20}{16}$	0	$\frac{30}{16}$	0	0	540
s_4	0	0	0	$\frac{-11}{32}$	0	$\frac{9}{64}$	1	0	18
s_5	0	0	0		0		0	1	
z_j		10	9	$\frac{70}{16}$	0	$\frac{111}{16}$	0	0	7.668
$c_j - z_j$		0	0	$\frac{-70}{16}$	0	$\frac{-111}{16}$	0	0	

Introducción de una restricción adicional

- Si la nueva restricción elimina la solución óptima actual y se quiere encontrar la nueva solución, se introduce la restricción al tableau simplex final (como una fila adicional) como si fuera el tableau inicial
- Se designa la variable adecuada (holgura o artificial) como la variable básica qu corresponde a la nueva ecuación
- Como esta ecuación tal vez tenga coeficientes distintos de cero para algunas otras variables básicas, se debe aplicar operaciones fila para obtener la forma y tableau y aplicar el método simplex.