INF221 – Algoritmos y Complejidad

Clase #2
Análisis de Convergencia

Aldo Berrios Valenzuela

Miércoles 3 de Agosto de 2016

1. Análisis de Convergencia

Sea $f(x)$ la función que buscamos el cero x^*:

$$f\left(x^*\right) = 0$$

Suponiendo $f(x)$ continua, que puede derivarse dos veces en un entorno de x^*, por *teorema de Taylor*:

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(x^*\right) + f'\left(x^*\right)\underbrace{\left(x - x^*\right)}_{e_n} + \frac{1}{2} f''\left(x^*\right)\left(x - x^*\right)^2 + O\left(\left(x - x^*\right)^3\right) \\ &= f'\left(x^*\right)\left(x - x^*\right)\left(1 + M\left(x - x^*\right) + O\left(\left(x - x^*\right)^3\right)\right) \end{aligned}$$

con

$$M = \frac{f''\left(x^*\right)}{2 f'\left(x^*\right)}$$

Forma de Lagrange del residuo:

$$\frac{1}{3!} f'''(\zeta)\left(x - x^*\right)^3 \tag{1.1}$$

donde $x \leq \zeta \leq x^*$.

$$e_n = x_n - x^* \tag{1.2}$$

donde n es el número de la iteración correspondiente.

1.0.1. Regula Falsi

Para *regula falsi*, recordemos que:

$$x_{n+1} = x_n - f\left(x_n\right) \cdot \frac{x_n - x_0}{f\left(x_n\right) - f\left(x_0\right)} \tag{1.3}$$

entonces, el error es:

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= e_n - f\left(x_n\right) \cdot \frac{x_0 - x_n}{f\left(x_0\right) - f\left(x_n\right)} \\ &\approx e_n - f'\left(x^*\right) e_n \cdot \frac{x_0 - x^*}{f\left(x_0\right)} \\ &= e_n\left(1 - f'\left(x^*\right)\frac{x_0 - x^*}{f\left(x_0\right)}\right) \end{aligned}$$

Como $e_{n+1} \approx C e_n$, convergencia lineal. Ojo, esto es sólo para regula falsi. Si queremos encontrar el error de otro método, por ejemplo bisección, tendremos que realizar todo el análisis que hicimos anteriormente para encontrar el e_{n+1}.

1.0.2. Método de Newton

Considere la Figura 1:

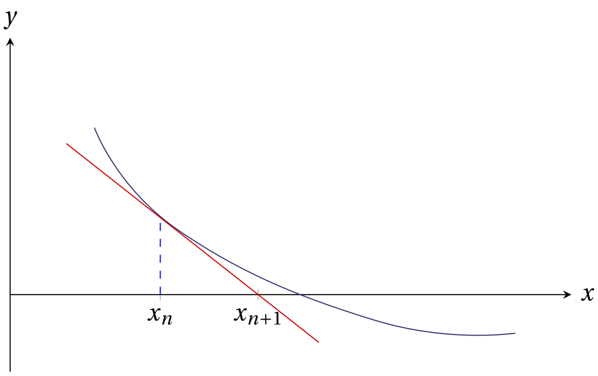

Figura 1: Una tangente de la curva f en el punto x_n corta al eje x en el punto x_{n+1}.

donde:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1.4}$$

Considere nuevamente a *forma de Lagrange del residuo*, entonces:

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= e_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &\approx e_n - \frac{f'(x^*)\, e_n (1 + M e_n)}{f'(x^*)} \\ &= -M e_n^2 = -\frac{f''(x^*)}{2 f'(x^*)} \cdot e_n^2 \end{aligned}$$

En el fondo, el *método de Newton* duplica el número de cifras correctas en cada iteración.

1.0.3. Método de la Secante

Considere la Figura 2, donde:

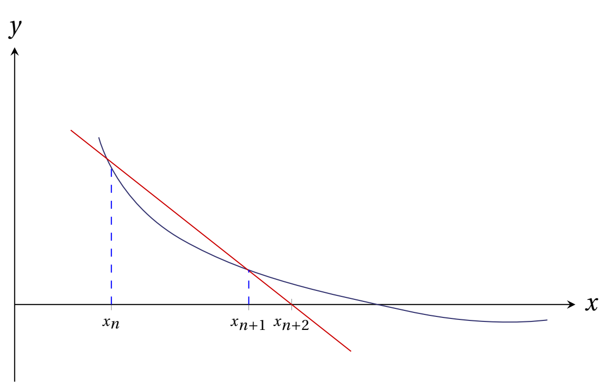

Figura 2: Una secante corta a la curva f en los puntos x_n y x_{n+1}. El intercepto con el eje x corta en x_{n+2}. Luego, se evalúa f en x_{n+2} y se obtiene una nueva secante que una los puntos $f(x_{n+1})$ y $f(x_{n+2})$. Finalmente, repetir el proceso hasta encontrar el valor de convergencia.

$$x_{n+2} = x_{n+1} - f\left(x_{n+1}\right) \cdot \frac{x_{n+1} - x_n}{f\left(x_{n+1}\right) - f\left(x_n\right)} \tag{1.5}$$

Considere nuevamente la forma de Lagrange del residuo, entonces:

$$\begin{aligned}
x_{n+2} &= x_{n+1} - f\left(x_{n+1}\right) \frac{x_{n+1} - x_n}{f\left(x_{n+1}\right) - f\left(x_n\right)} \\
&= \frac{x_n f\left(x_{n+1}\right) - x_{n+1} f\left(x_n\right)}{f\left(x_{n+1}\right) - f\left(x_n\right)} \\
e_{n+2} &= \frac{e_n f'\left(x^*\right) e_{n+1}\left(1 + M e_{n+1}\right) - e_{n+1} f'\left(x^*\right) e_n \left(1 + M e_n\right)}{f'\left(x^*\right)\left(e_{n+1} - e_n\right)} \\
&\approx \frac{e_n e_{n+1}\left(1 + M e_{n+1} - 1 - M e_n\right)}{e_{n+1} - e_n} \\
&= M e_n e_{n+1}
\end{aligned}$$

Supongamos:

$$\begin{aligned}
\left|e_{n+1}\right| &= C\left|e_n\right|^p \\
\left|e_{n+2}\right| &= C\left|e_{n+1}\right|^p \\
&= C\left(C\left|e_n\right|^p\right)^p \\
&= C^{p+1}\left|e_n\right|^{p^2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para la secante:

$$C^{p+1}\left|e_n\right|^{p^2} = MC\left|e_n\right|^{p+1} \tag{1.6}$$

Entonces:

$$p^2 = p + 1 \rightsquigarrow p = \tau \approx 1{,}618 \tag{1.7}$$

Por lo tanto, el método de la secante es *superlineal*.

El número τ viene de:

$$p^2 - p - 1 = 0 \rightsquigarrow p = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$