Mecánica de Fluidos

Claudio O. Dib[*]
Depto de Física, Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso, Chile

(Dated: 30 de noviembre de 2013)

Este es un apunte para la asignatura FIS-130, de introducción a la mecánica de fluidos. La versión es preliminar y está permanentemente sujeta a revisión. Si tiene comentarios o encuentra errores, se agradecerá que le avise al profesor.

I. INTRODUCCIÓN

Los fluidos están comprendidos por los líquidos, gases y plasmas. Los fluidos son substancias que se distinguen de los sólidos por una propiedad mecánica particular: los fluidos no resisten *esfuerzos de corte* en forma estática.

Se llama *esfuerzo* a la fuerza aplicada en la superficie de una substancia, medida por unidad de área de la superficie. Si la fuerza es normal (perpendicular) a la superficie, el esfuerzo se llama *presión, tracción o compresión.* Si es paralela a la superficie se llama *esfuerzo de corte o de cizalle.*

Al aplicar un esfuerzo de corte en un sólido, éste se deforma hasta un cierto punto y luego resiste en forma estática ese esfuerzo. Un fluido, en cambio, al aplicarle esfuerzo de corte se deforma continuamente (fluye).

En lenguaje cotidiano se habla de fluidos para referirse sólo a los líquidos, aunque los gases y plasmas también son fluidos.

Un líquido se diferencia de un gas en que el primero posee una *superficie libre* que no está definida por el recipiente que lo contiene, mientras que el gas se expande hasta donde lo limite el recipiente. A nivel atómico, en el líquido los átomos vecinos mantienen una distancia aproximadamente fija, mientras que en un gas las moléculas no están ligadas entre sí. Por lo mismo, los gases son altamente compresibles (su volumen depende mucho de la presión), mientras que los líquidos, como también los sólidos, en comparación con los gases son más bien incompresibles.

El estudio de los fluidos comprende tanto aspectos mecánicos como térmicos. En este estudio vamos a concentrarnos en los aspectos mecánicos. Esto es útil no sólo conceptualmente sino también en la práctica, porque existen muchas situaciones en las que los aspectos térmicos pueden ser despreciados, especialmente en casos de líquidos. Esto se debe a que, siendo casi incompresibles, no absorben mucha energía por trabajo, de modo que su energía interna no cambia, a menos que se les transfiera calor intencionalmente (salvo en casos de alta turbulencia donde el calor es inevitable).

II. ESTÁTICA DE FLUIDOS

Este es el estudio de fluidos en equilibrio mecánico, usualmente en reposo.

El equilibrio mecánico de un fluido ocurre si cada *elemento* (trocito infinitesimal) del fluido se encuentra en equilibrio mecánico, es decir si la suma de todas las fuerzas aplicadas sobre cada elemento del fluido es cero.

Las fuerzas a las que está sometido un elemento de fluido en equilibrio son usualmente:

- la gravedad,
- las fuerzas de presión sobre las superficies del elemento, debido al resto del fluido a su alrededor o a la pared del recipiente.

A. Presión

Tal como definimos en el capítulo de Termodinámica, la presión es la fuerza normal por unidad de área que ejerce un fluido sobre otro, o un fluido sobre una pared.

La presión es, esencialmente, la medida de cómo actúan mecánicamente entre sí (fuerza) dos elementos de fluido adyacentes, a través de la superficie imaginaria que los separa.

Dos propiedades importantes:

- La presión es una cantidad local (se puede definir en cada punto del fluido).
- La presión es una cantidad escalar (no tiene dirección), a pesar de que la fuerza debido a ésta es una cantidad vectorial.
- La dirección de la fuerza de presión sobre un área infinitesimal dA dada es siempre normal a dicha área.
- La magnitud de esa fuerza es $F = p\,dA$, independiente de la orientación del área.

Esto último requiere de explicación. Considere un elemento de fluido con forma de cubo (ver Fig. 13).

[*]Electronic address: `claudio.dib@usm.cl`

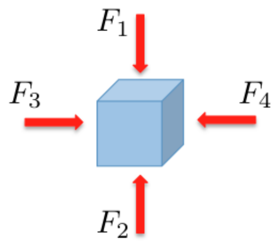

Figura 1: Fuerzas debido a la presión, sobre las caras de un elemento de fluido con forma de cubo. Las fuerzas en las dos caras perpendiculares al plano de la hoja no están dibujadas por simplicidad.

Según esto, todas las fuerzas F_1, F_2, F_3 y F_4 deberían ser iguales. Sin embargo, para mantener al cubo en equilibrio basta con que las dos fuerzas verticales (F_1 y F_2) se cancelen entre sí e, independientemente las fuerzas horizontales también (F_3 y F_4). Pero no parece haber razón para que las fuerzas en direcciones perpendiculares sean iguales ($F_1 = F_3$).

Una razón intuitiva es que si, por ejemplo, el par de fuerzas verticales fuera mayor que los pares horizontales, el fluido se empezaría a achatar escurriéndose en forma horizontal. Esta intuición no está mal, pero debería haber una razón más rigurosa. La hay.

EJERCICIO: Considere un elemento de fluido similar al de la Fig. 13, pero cortado por una diagonal, como en la Fig. 2. Para que el elemento esté en equilibrio mecánico, las tres fuerzas deben sumar cero (es decir, deben cerrar un triángulo). Demuestre que si la fuerza F_d es normal a la cara diagonal, entonces necesariamente $F_1 = F_3$. Demuestre además que la magnitud de F_d es $\sqrt{2}$ veces la magnitud de F_1, el mismo factor que es el área diagonal de las otras dos áreas.

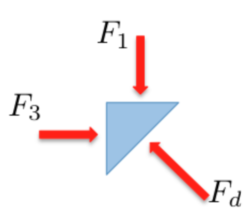

Figura 2: Fuerzas debido a la presión, sobre las caras de un elemento de fluido con sección triangular.

EJERCICIO: Haga el mismo análisis pero para una figura de sección triangular con catetos distintos. Demuestre en este caso que si las tres fuerzas son perpendiculares a sus respectivas áreas, sus magnitudes son proporcionales a sus respectivas áreas. (Note que el triángulo de la sección transversal del elemento es semejante al triángulo de las fuerzas).

B. Presión vs. altura

Para que un fluido sujeto a la gravedad esté en equilibrio dentro de un recipiente (por ejemplo el mar en la cuenca oceánica, el agua dentro de un vaso, o la atmósfera terrestre), cada elemento del fluido debe estar en equilibrio mecánico. Para ello, la presión debe ir aumentando con la profundidad.

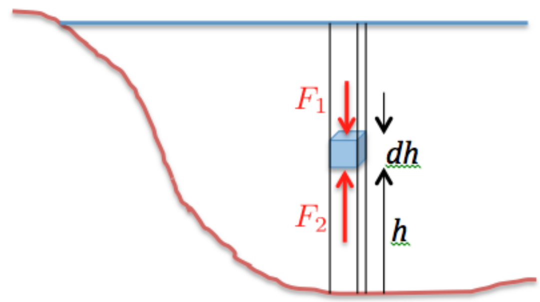

Figura 3: Columna de agua en el mar, mostrando un elemento de agua en forma de cubo. Se indican las fuerzas verticales debido a la presión, F_1 (en la cara inferior) y F_2 (en la cara superior). El peso del elemento no se muestra por simplicidad.

Consideremos el agua del mar. Tomemos una columna vertical de agua, con un elemento cúbico dentro de ésta, como se ve en la Fig. 3. Midamos la altura h desde el fondo hacia arriba, y estudiemos el balance de fuerzas verticales. Hay tres fuerzas sobre el elemento: el peso hacia abajo, $\rho V g$, la fuerza de presión que empuja hacia arriba desde la superficie inferior, F_1 y la que empuja hacia abajo desde la superficie superior, F_2. Siendo $p(h)$ la presión por debajo del elemento y $p(h+dh)$ la presión por encima, entonces el balance de fuerzas verticales sobre el elemento es:

$$\begin{array}{rcl} -\rho V g \quad + \quad F_1 \quad - \quad F_2 & = & 0 \\ -\rho\ A\ dh\, g + p(h)\cdot A - p(h+dh)\cdot A & = & 0, \end{array} \tag{1}$$

donde el volumen del elemento es $V = A\ dh$. Dividiendo todo por V, esto queda la ecuación de cambio de presión:

$$\frac{dp}{dh} = -\rho g. \tag{2}$$

Si consideramos el agua como incompresible (su densidad no varía con la presión), la solución de esta ecuación es:

$$p(h) = p_0 - \rho g h, \tag{3}$$

donde p_0 es la presión en el fondo del mar (en $h = 0$). Esta expresión indica que la presión va disminuyendo a medida que subimos.

EJERCICIO: En la Ec. 3, encuentre el valor de p_0, sabiendo que el mar tiene una profundidad H y que la presión atmosférica en la superficie del mar es p_{at}.

EJERCICIO: Demuestre que la presión a una profundidad ℓ bajo la superficie del agua está dada por:

$$p(\ell) = p_{at} + \rho g \ell.$$

EJERCICIO: Calcule cuánta distancia hay que descender en el mar para que la presión aumente en 1 $[atm]$.

EJERCICIO: Considere la columna de agua en el tubo de la Fig. 4. Siendo h la altura de la columna en el tubo, medida respecto a la superficie del agua en el recipiente inferior, determine la presión en la parte superior de la columna (es decir, en el aire que está en la parte superior del tubo). Cuál es la máxima altura que puede alcanzar la columna de agua? Por qué hay un máximo? Si en vez de agua, usáramos mercurio (Hg), cuál sería la altura máxima? Compare el peso de toda la columna de fluido con la diferencia de presión entre la parte superior e inferior.

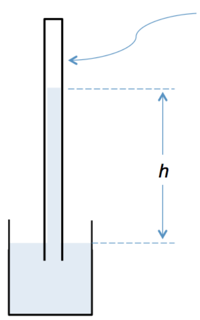

Figura 4: Columna de agua en un tubo invertido, cerrado en un extremo.

C. Presión en la atmósfera

Queremos aplicar las mismas ideas para saber cómo cambia la presión de la atmósfera a medida que subimos. La Ec. 3 sigue siendo válida para un gas como la atmósfera, pero la integración no es tan simple, porque la densidad de la atmósfera, siendo un gas, depende mucho de la presión y además de la temperatura. Usando la Ec. de Estado del gas ideal, $pV = nRT$, podemos expresar la densidad en términos de la presión y temperatura:

$$\rho = m_a \frac{n}{V} = \frac{m_a}{RT} p,$$

donde m_a es la masa molar (promedio ponderado) de la atmósfera. Así, la ecuación para la presión será:

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{m_a g}{RT} p. \qquad (4)$$

Si suponemos que la atmósfera es isotérmica (en realidad no lo es), esto se puede resolver fácilmente:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{m_a g}{RT} dh \quad \Rightarrow p(h) = p_{at}\ e^{-m_a g h/RT}. \qquad (5)$$

La cantidad $H_0 = RT/m_a g$ es una altura característica de la atmósfera, que representa la altura que uno debe subir para que la presión decrezca en un factor $1/e$.

EJERCICIO: Calcule H_0 para una temperatura atmosférica de 20^{o}C.

D. Flotación

Un objeto en presencia de la gravedad es empujado hacia abajo por una fuerza llamada *peso*. Si además el objeto está inmerso en un fluido, el fluido empuja al objeto hacia arriba por una fuerza de *flotación*. La fuerza de flotación es igual al peso del fluido desplazado por el objeto. Esto último se llama el *principio de Arquímedes*[1], aunque no es un principio fundamental, sino una consecuencia del equilibrio mecánico del fluido.

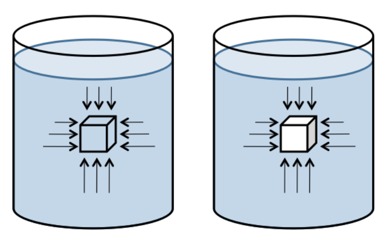

Figura 5: Izquierda: las fuerzas de presión sobre un trozo de fluido deben ser tales que compensen exactamente el peso del trozo para que éste quede en equilibrio. Derecha: las mismas fuerzas de presión son las que actúan sobre un objeto sumergido que ocupe exactamente el mismo espacio que ocupaba el trozo de fluido.

Vea la Fig. 5. Ambas figuras muestran un volumen idéntico sobre el cual el fluido exterior ejerce fuerzas de presión por toda la superficie. En un caso el volumen está relleno por un objeto (derecha) y en el otro caso el mismo volumen está relleno con el fluido (izquierda). Las fuerzas de presión son iguales en ambos casos, porque se deben al fluido exterior, independientemente de qué material esté ocupando el volumen en cuestión. Llamemos a la suma de todas esas fuerzas de presión $\vec{F}_b$ ("buoyancy" –flotación).

En la figura izquierda, las fuerzas sobre el trozo de fluido son $\vec{F}_b$ y el peso del trozo de fluido, $\vec{P} = m_f\vec{g}$. Como el trozo de fluido debe estar en equilibrio, estas fuerzas deben sumar cero: $\vec{F}_b + m_f\vec{g} = 0$, y por lo tanto la fuerza de flotación es exactamente igual (y opuesta) al peso del fluido en el volumen en cuestión:

$$\vec{F}_b = -m_f\,\vec{g}. \tag{6}$$

Como $\vec{g}$ es hacia abajo, $\vec{F}_b$ es hacia arriba. La masa del trozo de fluido se puede escribir como $m_f = \rho_f V$, donde ρ_f es la densidad del fluido y V el volumen del trozo. De este modo, si un objeto material cualquiera, con el mismo volumen V, se sumerge en el fluido, la fuerza de flotación sobre el objeto será:

$$F_b = \rho_f\,V\,g$$

hacia arriba, mientras que el peso del objeto será $\rho_o V g$ hacia abajo. La fuerza neta sobre el objeto entonces será:

$$\vec{F}_N = \hat{y}\,(\rho_f - \rho_o)V\,g,$$

donde $\hat{y}$ es el vector unitario que apunta hacia arriba. De este modo se ve que la fuerza neta apunta hacia arriba si el fluido es más denso que el objeto (el objeto flota), o apunta hacia abajo si el objeto es más denso que el fluido (el objeto se hunde).

Si el objeto es menos denso que el fluido, por ejemplo un trozo de madera en el agua, éste queda sumergido parcialmente, desplazando la cantidad justa de agua para que la fuerza de flotación compense al peso del objeto (ver Fig. 6). Eso ocurre cuando el volumen de agua desplazada, V_d, tiene una masa igual a la del objeto:

$$m_o = \rho_a\,V_d,$$

donde ρ_a es la densidad del agua. Esto se deduce, como siempre, del equilibrio de fuerzas:

$$m_o\,g = F_b,\ \text{con}\ F_b = \rho_a V_d\,g.$$

PREGUNTA: por qué un buque acorazado, que es de acero, logra flotar, siendo que el acero es un material más denso que el agua?

EJERCICIO: Considere una esfera hueca hecha de acero. Determine la razón entre los radios interior y exterior de modo que la esfera apenas logre flotar. Averigüe los datos que necesite.

EJERCICIO: Considere un globo lleno con gas helio (gas menos denso que la atmósfera). El globo está hecho de polietileno de densidad 0,9 [g/cm^3], 0,1 [mm] de espesor y 50 [cm] de diámetro. Suponga que la atmósfera y el globo están siempre a una sola temperatura de 10 ºC, y que el Helio en el globo está siempre a una presión de 1 [atm]. Conociendo el perfil de presión de la atmósfera en la sección anterior, determine hasta qué altura logra subir el globo. (Nota: en la realidad, la atmósfera no es isotérmica, de modo que el resultado que obtenga puede no ser muy realista).

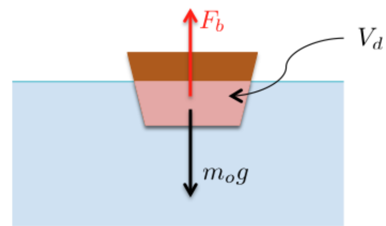

Figura 6: Objeto menos denso que el agua flota en la superficie sumergido parcialmente, desplazando un volumen de agua de peso igual al del objeto. V_d en color café claro, es el volumen desplazado (la parte sumergida del objeto).

PREGUNTA: Hay globos que se elevan sólo con calentar el aire interior mediante un soplete de fuego (ver Fig. 7). ¿Por qué logran elevarse? ¿Cuándo es mejor tratar de elevarse, en la madrugada cuando el clima está fresco, o a mediodía cuando hace calor?

Figura 7: Globo de aire caliente. El globo es abierto por abajo, donde van los quemadores para calentar el aire y donde cuelga el canasto para los tripulantes.

E. Sistemas acelerados

Considere un estanque con agua que va sobre un vehículo que lleva una aceleración constante y horizontal, $\vec{a}$ (ver Fig. 8). La pregunta es cuál es la inclinación de la superficie del agua con respecto a la horizontal.

La figura muestra el fenómeno en forma cualitativa, pero queremos entender por qué ocurre y hacer predicciones cuantitativas (para eso estudiamos!). El análisis es como siempre: ley de movimiento de Newton: sobre cada elemento del fluido debe cumplirse $\sum \vec{F} = m\vec{a}$.

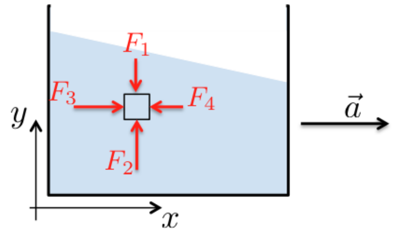

Figura 8: Estanque con agua, en movimiento con aceleración constante. El elemento de fluido debe estar sujeto a fuerzas de presión de modo tal que se mueva con la aceleración del conjunto.

La figura muestra, como antes, un elemento infinitesimal con forma de cubo. El análisis de fuerzas verticales aquí es idéntico a la Ec. 1, resultando en la misma ecuación de gradiente de presión, salvo que la altura h es aquí la coordenada y:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho\, g. \tag{7}$$

Similarmente, el análisis de fuerzas horizontales es:

$$\begin{aligned} F_3 \quad - \quad F_4 \quad &= \rho\, V\, a \\ p(x)\cdot A - p(x+dx)\cdot A &= \rho\, A\, dx\, a, \end{aligned} \tag{8}$$

lo que se reduce a:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho\, a. \tag{9}$$

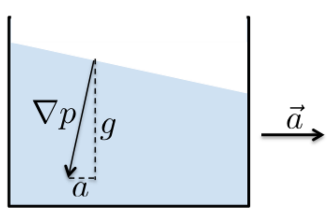

Figura 9: Vector gradiente de presión y superficie del líquido en el estanque con aceleración constante.

Así, las Ecs. 7 y 9 nos dan el *gradiente de presión*:

$$\nabla p = -\rho(a\,\hat{x} + g\,\hat{y}). \tag{10}$$

Este vector apunta hacia donde más bruscamente varía la presión y es perpendicular a las superficies de igual presión (isobáricas). En particular, la superficie del líquido debe ser perpendicular al gradiente de presión: en toda esa superficie, la presión tiene un solo valor (la presión atmosférica, si el estanque está abierto a la atmósfera). Vea la Fig. 9.

EJERCICIO: Si dentro del agua de ese estanque acelerado se suelta una piedra, en qué dirección tiende a caer? Si en medio del agua se forma una burbuja de gas, en qué dirección tiende a subir?

EJERCICIO: Si en vez de agua, consideramos el aire dentro de la cabina de un automóvil que acelera, los efectos de flotación deben ser similares (sólo cambia la densidad del agua por la densidad del aire. En tal caso, si sostenemos un péndulo sin oscilar, en qué dirección cuelga? Si sostenemos el hilo de un globo con helio, de esos que tienden a subir, en qué dirección se inclina el globo debido a la aceleración del automóvil? Consígase un globo con helio, súbase a un auto y haga el experimento (ojo: consígase además un acompañante! no conduzca usted mismo mientras sostiene el globo).

EJERCICIO: Determine la forma de la superficie del agua en un estanque que gira con velocidad angular constante, ω. El problema es similar al del estanque acelerado, excepto que ahora la aceleración es centrípeta y crece con el radio de giro según $a = \omega^2 r$. Defina su eje vertical y como antes, y su eje horizontal r, medido desde el eje de giro. Encuentre el vector gradiente de presión, como función de r. La dirección perpendicular al gradiente de presión define la pendiente del perfil de la superficie del agua, que debería resultar una parábola (la superficie es un paraboloide de revolución).

III. DINÁMICA DE FLUIDOS

El estudio del movimiento de fluidos en general es un tema muy complejo: ecuaciones difíciles de resolver y fenómenos difíciles de comprender. Dependiendo de si el fluido es más o menos viscoso, el movimiento puede ser *laminar* (ordenado y estacionario) o *turbulento* (desordenado y variable). Incluso en los casos más simples hay temas cuyas explicaciones han sido controversiales y confusas, o comportamientos que son contrarios al sentido común.

Además, hay casos en que los fenómenos térmicos deben ser incluidos, especialmente si se trata de flujos turbulentos, como también hay casos en los que no necesitan ser incluidos. En lo que vamos a estudiar, no incluiremos fenómenos térmicos, pero debe quedar claro que eso es una buena aproximación en algunos casos solamente.

A. Flujo

Tal como en el capítulo de Termodinámica estudiamos *flujo de calor*, aquí definimos *flujo* como la cantidad de fluido (masa) que cruza una cierta sección por unidad de tiempo (ver Fig. 10). Denotaremos el flujo con la letra mayúscula J:

$$J = \frac{masa\ que\ cruza\ la\ seccion\ A}{tiempo}.$$

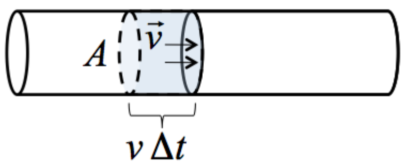

Figura 10: Flujo de un fluido que cruza una sección de área A con velocidad v.

El flujo se relaciona con la densidad y la velocidad del fluido. Considere la Fig. 10: en un tiempo Δt, el fluido que ha cruzado la sección de área A es el que está dentro del volumen coloreado (área A y largo $v\Delta t$). En ese volumen, la masa de fluido es: $\rho \cdot A \cdot v\ \Delta t$ y, por lo tanto, el flujo es:

$$J = \frac{\rho \cdot A \cdot v\ \Delta t}{\Delta t} = \rho\, v\, A.$$

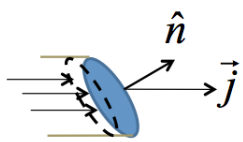

Figura 11: Flujo de un fluido que cruza una sección inclinada respecto a la velocidad v.

Este flujo cruza por toda el área A, que es una zona extendida. En general, la velocidad del fluido podría variar de un punto a otro, por lo cual no sabríamos qué valor de velocidad atribuir a v en la expresión. Para ello, lo que debemos hacer es tomar una sección de área dA infinitesimal. En tal caso, el flujo también es infinitesimal:

$$dJ = \rho\, v\ dA.$$

Además, si la velocidad del fluido no cruza al área en forma normal (perpendicular) sino en un cierto ángulo, entonces la expresión cambia en un factor trigonométrico (ver Fig. 11): el volumen de fluido que cruza la sección dA es un cilindro inclinado, de base dA y altura $v\Delta t \cos\theta$, donde θ es el ángulo entre la velocidad del fluido y el vector normal al área:

$$dJ = \rho v \cos\theta\ dA \quad = \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dA.$$

Definimos así el vector *densidad de flujo*:

$$\vec{\jmath} = \rho\ \vec{v}.$$

Este vector es paralelo a la velocidad, y de magnitud igual a la cantidad de masa que fluye por unidad de tiempo y por unidad de área normal. Esta densidad de flujo es una cantidad *local*, es decir: está definida en cada punto del espacio (no en una zona extendida). Esto es análogo a la comparación entre la masa de una substancia y su densidad: lo primero es algo propio del objeto extendido, mientras que la densidad está definida localmente, en cada punto del espacio.

DEF: Campo. En física, un campo es una cantidad distribuida por el espacio, y que tiene un valor definido para cada punto del espacio. En términos matemáticos, un campo es una función de las coordenadas, representadas por el vector posición $\vec{r}$. Por ejemplo, la distribución de temperatura en un material es una función $T(\vec{r})$. Esto es el campo de temperaturas, y es una función escalar del espacio. Asimismo la densidad de flujo, $\vec{\jmath}(\vec{r})$, que puede variar de un punto a otro, es también un campo, que en este caso es de valor vectorial.

Si queremos calcular la cantidad total de fluido que cruza una cierta superficie S por unidad de tiempo (es decir, el flujo), debemos integrar la densidad de flujo sobre esa superficie:

$$J = \int_S \vec{\jmath} \cdot d\vec{S},$$

donde $d\vec{S}$ es el elemento de área (vector normal al área y de magnitud dS).

EJERCICIO: un fluido se mueve con una densidad de flujo $\vec{\jmath}$ uniforme (igual en todas partes). Calcule el flujo que cruza una superficie con forma de casquete semiesférico, orientado de frente al flujo. Haga la integral sobre el área semiesférica y compruebe que el resultado es $\jmath \times \pi r^2$, donde r es el radio del casquete. Ese es el mismo resultado que si hubiese calculado el flujo sobre un círculo plano. Comente.

B. Flujo laminar y flujo turbulento

En un flujo laminar, las líneas de flujo se mantienen ordenadas y en un caso estacionario se mantienen fijas en el espacio. En cambio, en un flujo turbulento, el campo de velocidades presenta todo tipo de irregularidades y nunca se estaciona en una distribución bien definida. Los fenómenos de turbulencia se deben esencialmente a que el flujo es en general un fenómeno no lineal (las ecuaciones de movimiento no son lineales en $\vec{v}$). En este curso sólo estudiaremos flujos laminares.

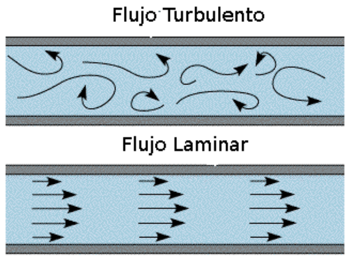

Figura 12: Flujo laminar y flujo turbulento en un ducto. Note las líneas de flujo ordenadas en el caso laminar. En el caso turbulento, las líneas, además de desordenadas, están permanentemente cambiando.

C. Ecuación de Continuidad

Toda cantidad física que se conserva (no se crea ni se destruye) y que se distribuye por el espacio, satisface una Ecuación de Continuidad. La masa, por ejemplo, es una cantidad que se conserva en todos los procesos como los que estudiamos aquí[2]. Si la masa disminuye en una parte del espacio significa que debe haberse desplazado continuamente por el espacio hacia otro lugar (no puede haber desaparecido de una parte y aparecido en otra, saltándose el espacio intermedio). En lenguaje matemático, si tomamos un volumen V cuyo borde es una superficie cerrada S, entonces toda masa que desaparece del interior de V debe haber fluido hacia afuera a través de la superficie S.

Si llamamos M a la masa total dentro del volumen V y llamamos J_{sal} al flujo neto de masa que sale por la superficie S, entonces la conservación de la masa significa que el flujo de salida debe ser igual a la tasa de pérdida de masa interior:

$$J_{sal} = -\frac{dM}{dt}.$$

Esto mismo, en forma de integrales, queda:

$$\oint_S \vec{\jmath} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho \, dV,$$

donde $\vec{\jmath}$ es la densidad de flujo de masa en la superficie y ρ la densidad de masa en el interior. En forma diferencial, la expresión anterior se escribe:

$$\nabla \cdot \vec{\jmath} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{11}$$

Esta es la *ecuación de continuidad*. En palabras, dice que el flujo de una cantidad conservada (masa, en este caso) que sale por el borde (superficie) de una región es igual a la tasa de pérdida de esa cantidad en el interior.

La derivación de la forma diferencial se basa en lo que se conoce como el Teorema de la Divergencia:

$$\oint_S \vec{\jmath} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{\jmath} \, dV,$$

donde la cantidad $\nabla \cdot \vec{\jmath}$ se llama la *divergencia* del campo vectorial $\vec{\jmath}(\vec{r})$. La demostración de esta relación, aparentemente fabulosa, no es muy difícil. Tomemos un volumen con forma de cubo, infinitesimalmente pequeño, y calculemos el flujo neto de $\vec{\jmath}(\vec{r})$ que sale por su superficie.

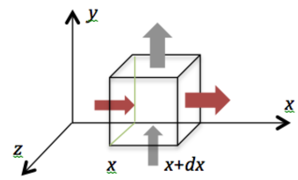

Figura 13: Cubo infinitesimal, de volumen $dV = dx\,dy\,dz$, por cuyas caras calculamos el flujo saliente de $\vec{\jmath}$.

Consideremos primero las caras normales al eje X. Considerando en general las componentes $\jmath_x$ como positiva, el flujo por la cara en x es entrante, de valor $\jmath_x(x)\ dy\,dz$ y el flujo por la cara en $x + dx$ es saliente, de valor $\jmath_x(x + dx)\ dy\,dz$. En total, el flujo neto saliente por las caras normales a X es:

$$\jmath_x(x+dx)\ dy\,dz \;-\; \jmath_x(x)\ dy\,dz \quad = \frac{\partial \jmath_x}{\partial x} dx\,dy\,dz.$$

La expresión para el flujo neto saliente por las caras normales a Y y normales a Z son similares. En total, el flujo neto saliendo del cubito infinitesimal es:

$$\oint_{cubo} \vec{\jmath} \cdot d\vec{S} = \left(\frac{\partial \jmath_x}{\partial x} + \frac{\partial \jmath_y}{\partial y} + \frac{\partial \jmath_z}{\partial z} \right) dV.$$

El factor entre paréntesis es justamente $\nabla \cdot \vec{\jmath}$, la divergencia del campo vectorial $\vec{\jmath}(\vec{r})$:

$$\nabla \cdot \vec{\jmath} \;\equiv\; \frac{\partial \jmath_x}{\partial x} + \frac{\partial \jmath_y}{\partial y} + \frac{\partial \jmath_z}{\partial z}.$$

Podemos así interpretar que la divergencia de un campo vectorial es simplemente el flujo neto saliente *por unidad de volumen*, en el límite de un volumen infinitesimalmente pequeño.

Volvamos a los fluidos: la ecuación de continuidad para el fluido entonces es:

$$\nabla \cdot (\,\rho\,\vec{v}\,) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \tag{12}$$

donde hemos usado $\vec{\jmath} = \rho\,\vec{v}$. En el caso de un fluido incompresible, la densidad es un valor fijo, y por lo tanto la ecuación de continuidad queda:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

Aquí $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$, es la velocidad del fluido en cada punto del espacio, es decir es el *campo de velocidades* del fluido. En forma integral, la expresión anterior es:

$$\oint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} \tag{13}$$

y significa que en una región dada del espacio, el volumen de fluido que sale debe ser igual al que entra.

Consideremos el caso de un fluido de densidad uniforme que pasa por un ducho de sección variable, como en la Fig. 14. En la región delimitada por el ducto y las dos secciones A_1 y A_2, la Ec. 13 se reduce al flujo por las secciones (pues no hay flujo por las paredes del ducto):

$$-A_1\ v_1 + A_2\ v_2 = 0.$$

Esta relación indica que la velocidad del fluido incompresible es inversamente proporcional al área de la sección.

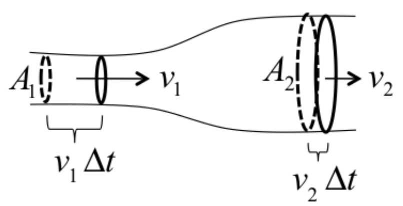

Figura 14: Ducto con fluido incompresible. Se ha supuesto que la velocidad varía a lo largo del ducto, pero es uniforme en cada sección. Se muestra el desplazamiento del fluido en un pequeño intervalo de tiempo Δt.

EJERCICIO: Considere el campo de velocidades del fluido, $\vec{v}(\vec{r})$. Argumente que este campo puede interpretarse como la *densidad de flujo de volumen* del fluido, así como $\vec{\jmath}(\vec{r})$ es la densidad de flujo de masa del fluido.

D. Ecuación de Bernoulli

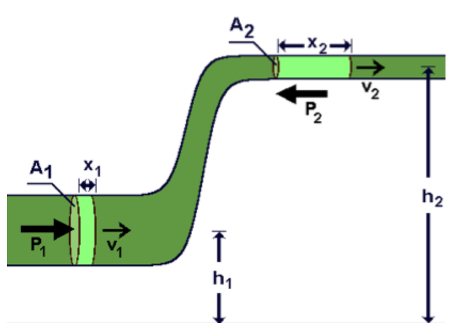

Figura 15: Ducto con fluido incompresible estacionario, a lo largo del cual podemos usar la ecuación de Bernoulli.

La ley de movimiento de un fluido es simplemente la ley de Newton, escrita en términos de las variables apropiadas. Las ecuaciones correspondientes son de carácter vectorial.

Sin embargo, tal como en el caso de la mecánica de una partícula, en vez de recurrir a la formulación de Newton, uno puede usar la conservación de energía. La formulación de energía usualmente es más simple porque es una relación escalar, no vectorial, y en algunos casos es suficiente para resolver lo que uno busca.

La relación de energía es en rigor una primera integral de la ecuación de movimiento, de modo que contiene velocidades, pero no aceleraciones. La relación de energía dice que el trabajo de las fuerzas externas es igual al cambio de energía cinética del sistema. Además, si alguna de las fuerzas externas es conservativa, su trabajo puede expresarse como cambio de energía potencial, lo que simplifica aún más el ejercicio.

En dinámica de fluidos, la ecuación de balance de energía para el caso de fluidos incompresibles no viscosos es la *Ecuación de Bernoulli*[3].

La Fig. 15 muestra un tubo de fluido en el que la sección transversal es variable, como también la altura. Veamos el balance de energía. Para ello, dejemos que transcurra un pequeño tiempo Δt, de modo que el fluido se desplace una pequeña distancia (x_1 en la parte inferior y x_2 en la parte superior). En la figura, las zonas de color más claro indican los extremos del segmento donde el fluido se ha desplazado. Al desplazarse el fluido, podemos considerar que todo el trozo de fluido queda igual, salvo el volumen más claro de la zona 1 que desaparece, y el volumen más claro de la zona 2 que aparece. Ambos volúmenes deben ser iguales porque el fluido es incompresible:

$$A_1 x_1 = A_2 x_2, \tag{14}$$

donde $x_1 = v_1 \Delta t$ y $x_2 = v_2 \Delta t$. Ahora, el trabajo debido a la presión sobre el trozo de fluido es:

$$W_p = p_1 A_1 x_1 - p_2 A_2 x_2.$$

Aquí, el primer término es el trabajo positivo hecho por la presión externa sobre el fluido en la zona 1 al desplazarse éste hacia la derecha, mientras que el trabajo hecho por la presión externa en la zona 2 es negativo (la fuerza apunta en contra del desplazamiento). Por otro lado, el cambio de energía cinética al desplazarse el fluido es:

$$\Delta E_K = \frac{1}{2}\rho(A_2 x_2) v_2^2 - \frac{1}{2}\rho(A_1 x_1) v_1^2.$$

Por último, el cambio de energía potencial gravitatoria:

$$\Delta E_p = \rho(A_2 x_2) g h_2 - \rho(A_1 x_1) g h_1$$

Así, como el trabajo de las fuerzas externas es igual al cambio de las energías cinética + potencial: $W_p = \Delta E_K + \Delta E_P$, obtenemos:

$$\begin{aligned} p_1 A_1 x_1 - p_2 A_2 x_2 \ &= \ \frac{1}{2}\rho(A_2 x_2) v_2^2 - \frac{1}{2}\rho(A_1 x_1) v_1^2 \\ &+ \ \rho(A_2 x_2) g h_2 - \rho(A_1 x_1) g h_1. \end{aligned}$$

Usando la Ec. 14, se elimina A_1x_1 con A_2x_2. Ordenando los términos, nos queda la ecuación de Bernoulli:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2. \qquad (15)$$

Dejando de lado la gravedad, esta relación dice que, a lo largo de una línea de flujo, la zona donde la presión es menor, la velocidad es mayor y viceversa.

EJERCICIO: averigüe sobre el tubo de Venturi para medir caudales en ductos de líquido y estudie su funcionamiento.

EJERCICIO: averigüe sobre el tubo de Pitot, que es el sensor usado por los aviones en vuelo para medir su velocidad relativa al viento.

E. Ecuación de movimiento del fluido

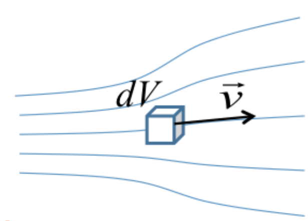

Figura 16: Elemento de fluido en movimiento, en un caso de flujo laminar. La forma y volumen del elemento puede ir variando en el tiempo, pero la masa encerrada es fija.

Veamos ahora la forma de la ecuación de movimiento de Newton ($F = ma$) aplicada a un fluido en movimiento. Esto es más general que la Ecuación de Bernoulli.

Consideremos un cubo infinitesimal de fluido, de volumen $dV = dx\,dy\,dz$. Las fuerzas sobre este cubo se pueden separar en: (a) fuerzas externas al fluido, como la gravedad, (b) fuerzas de presión debido al resto del fluido en contacto con el cubo y (c) fuerzas de fricción (viscosidad) debido al movimiento relativo del resto del fluido en contacto con el cubo. Por ahora consideremos sólo las dos primeras.

a) La fuerza de gravedad sobre el cubo de volumen dV y densidad ρ es simplemente mg, es decir,

$$dF_{gravedad} = \rho g\,dV.$$

b) La fuerza neta debido a la presión se puede calcular igual como se hizo en la Ec. 8: las fuerzas sobre las caras normales al eje X son $p(x)\,dA$ en dirección $+\hat{x}$ (en la cara izquierda) y $p(x+dx)\,dA$ en dirección $-x$ (en la cara derecha), donde el área de la cara es $dA = dydz$. En total, las fuerzas de presión en dirección x suman:

$$dF_x = (p(x) - p(x+dx))\,dA = -\frac{\partial p}{\partial x}\,dV,$$

donde $dV = dx\,dA$ es el volumen del cubo. Agregando de igual manera las componentes en y y en z, obtenemos la fuerza que ejerce el resto del fluido sobre el cubo mediante la presión:

$$dF_{presion} = -\nabla p\ dV.$$

Hemos así deducido que el gradiente de la presión, ∇p, es el negativo de la fuerza por unidad de volumen que experimenta un elemento de fluido debido a la presión.

Por lo tanto, la ecuación de movimiento, $F = m\,a$ para el cubo se reduce a:

$$\frac{d}{dt}(\rho\,dV\,\vec{v}) = -\nabla p\,dV + \rho\vec{g}\,dV.$$

Como la masa del cubo, $\rho\,dV$ es fija (aún cuando ρ pueda ir variando), el factor $\rho\,dV$ puede sacarse fuera de la derivada. Pero hay otra sutileza: en esta expresión, $\vec{v}$ se refiere a la velocidad de un cubo que se va moviendo (incluso el cubo podría deformarse a medida que pasa el tiempo, con tal que la masa $\rho\,dV$ sea siempre la misma). Sin embargo, $\vec{v}$ es en rigor un campo de velocidades, que describe a la velocidad de cada punto del fluido en cada instante: $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$.

Si usamos el campo $\vec{v}(\vec{r}, t)$ para describir la velocidad del cubito, debemos considerar correctamente su evolución en el espacio: si en el instante t el cubo está en la posición $\vec{r}$, entonces la velocidad del cubo en este instante es, efectivamente, $\vec{v}(\vec{r}, t)$.

En un instante posterior, $t + dt$, el cubo ya no estará en $\vec{r}$ sino en $\vec{r} + \vec{v}\,dt$, de modo que la velocidad del cubo en $t + dt$ será:

$$\vec{v}(\vec{r} + \vec{v}\,dt, t + dt),$$

y así, la derivada de la velocidad del cubo en rigor es:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{\vec{v}(r + \vec{v}dt, t + dt) - \vec{v}(\vec{r}, t)}{dt} = \\ &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_x\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \\ &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}. \qquad (16)\end{aligned}$$

A este tipo de derivada se le denomina en algunos textos *derivada convectiva*. Con esto, la ecuación de movimiento del fluido es:

$$\rho\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\nabla p + \rho\vec{g}. \qquad (17)$$

Esta ecuación, que es válida para fluidos no viscosos, se denomina *Ecuación de Euler*, derivada por primera vez por el matemático suizo Leonhard Euler[4]. En un problema de fluidos, esta ecuación debe resolverse en conjunto con la ecuación de continuidad, Ec. 12.

F. De nuevo Bernoulli

Ahora podemos derivar más formalmente la Ecuación de Bernoulli, que es esencialmente una expresión de la conservación de la energía, a partir de la ecuación de movimiento para el caso de un fluido incompresible no viscoso y en régimen esatcionario.

Un fluido es estacionario si el campo de velocidades no depende del tiempo:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0.$$

En tal caso, la ecuación de Euler se reduce a:

$$\rho(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\nabla p + \rho\vec{g}.$$

Ahora, tal como se deriva la ecuación de conservación de la energía para el movimiento de una partícula a partir de la ley de Newton, lo que debemos hacer aquí es integrar la expresión a lo largo de una línea de flujo (es decir, siguiendo la dirección de $\vec{v}$):

$$\rho\int_1^2 d\vec{r}\cdot(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\int_1^2 d\vec{r}\cdot\nabla p + \rho\int_1^2 d\vec{r}\cdot\vec{g}.$$

El lado derecho se puede hacer de inmediato:

$$-\int_1^2 d\vec{r}\cdot\nabla p = p_1 - p_2; \quad \int_1^2 d\vec{r}\cdot\vec{g} = gh_1 - gh_2. \quad (18)$$

En la última integral, h_1 y h_2 son las alturas, es decir, distancias verticales medidas hacia arriba (en dirección opuesta a $\vec{g}$ que es hacia abajo). Por su parte, la derivada convectiva se puede reescribir como:

$$(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = \nabla\left(\frac{1}{2}v^2\right) - \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v}). \quad (19)$$

Al integrar esto a lo largo de una línea de flujo, la integral del primer término es inmediata, mientras que el segundo término se anula porque es perpendicular a la línea de fluido (es decir, a $\vec{v}$):

$$\int_1^2 d\vec{r}\cdot(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = \frac{1}{2}v_2^2 - \frac{1}{2}v_1^2.$$

Así, la ecuación queda:

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_1 - p_2 + \rho g h_1 - \rho g h_2.$$

Ordenando los términos del punto r_1 a un lado y del punto r_2 al otro lado de la ecuación, tenemos la ecuación de Bernoulli (ver Fig. 15):

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2.$$

Es importante tener en mente que esta ecuación relaciona las presiones, velocidades y alturas en dos puntos *a lo largo* de una línea de flujo. La ecuación de Bernoulli no dice nada acerca de dichas cantidades entre una línea de flujo y otra línea paralela a la anterior.

EJERCICIO: Demuestre la identidad de la Ec. 19.

EJERCICIO: Demuestre el resultado del lado derecho de la Ec. 18.

G. Viscosidad

La viscosidad es una medida de resistencia al deslizamiento entre capas adyacentes del fluido. En líquidos, la viscosidad está asociada a la idea de "espesor" del fluido. Los aceites comestibles son más viscosos que el agua, y la miel es aún más viscosa que los aceites.

La viscosidad se mide como un esfuerzo de corte (fuerza paralela a la superficie de contacto –a diferencia de la presión que genera una fuerza normal a la superficie), que produce más o menos diferencia de velocidad entre capas adyacentes del fluido.

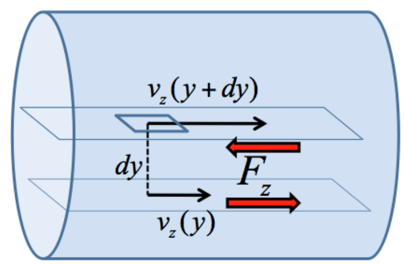

Figura 17: Viscosidad: las capas superiores del fluido se mueven hacia la derecha con velocidades mayores que las capas inferiores debido al esfuerzo de corte (fuerza paralela a la superficie de contacto).

Considere el fluido de la Fig. 17. El fluido se mueve hacia la derecha (dirección $+z$), donde las superiores se mueven más rápido que las inferiores, debido al esfuerzo de corte. El esfuerzo de corte corresponde a una fuerza aplicada paralelamente a una superficie, por unidad de área de esa superficie. En la figura, el área es normal al eje Y, llamada A_y. La fuerza es en dirección z, F_z. El esfuerzo de corte correspondiente se define como:

$$s_{yz} \equiv \frac{F_z}{A_y}.$$

La letra s viene del inglés *shear*. El hecho de que el esfuerzo sea un cuociente entre fuerza y área es debido a que si considero un área mayor, la fuerza también debe ser mayor para obtener el mismo efecto de movimiento.

El deslizamiento, por otro lado, lo medimos como la diferencia de velocidades por unidad de distancia transversal.

En la figura, la distancia transversal entre las capas es dy (en dirección normal al área de contacto). A un mismo esfuerzo de corte, la diferencia de velocidades es mayor mientras mayor sea la distancia entre las capas. Así, el deslizamiento lo medimos por el cuociente:

$$\frac{v_z(y+dy)-v_z(y)}{dy}.$$

La viscosidad es la relación que existe entre el esfuerzo de corte y el deslizamiento:

$$\frac{F_z}{A_y}=\mu\frac{v_z(y+dy)-v_z(y)}{dy},$$

es decir:

$$s_{yz}=\mu\ \frac{\partial v_z}{\partial y}. \quad (20)$$

El coeficiente μ es la viscosidad, que depende sólo del tipo de fluido, no de la geometría.

La fuerza neta debido a la viscosidad, que actúa sobre un elemento de fluido (un pequeño cubo, como de costumbre), se puede calcular como sigue.

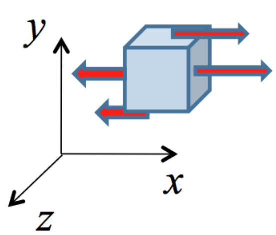

Figura 18: Fuerza sobre un elemento de fluido debido a viscosidad: en cada cara del cubo (ej. dA_x) aparece una fuerza con dos componentes tangenciales (F_y y F_z) y una componente normal (F_x).

Consideremos la componente de fuerza F_x sobre el elemento. Esta es una suma de las fuerzas sobre cada cara. Por ejemplo, tomemos las caras normales al eje Y: son dos caras, una en la coordenada y y la otra en $y+dy$. Las correspondientes fuerzas de corte suman:

$$\begin{aligned} F_x &= dA_y\,(s_{yx}(y+dy)-s_{yx}(y))+\text{otras caras} \\ &= dV\ \frac{\partial s_{yx}}{\partial y}+\text{otras caras.} \end{aligned}$$

Las otras caras son aquéllas normales al eje X y al eje Z. Generalizando lo anterior, queda:

$$F_x=dV\left(\frac{\partial s_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial s_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial s_{zx}}{\partial z}\right). \quad (21)$$

Sabiendo que los esfuerzos de corte s_{ij} son proporcionales a la tasa de deslizamiento según la Ec. 20, la expresión anterior queda:

$$F_x=dV\,\mu\,\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)v_x.$$

El operador diferencial entre paréntesis es el llamado *Laplaciano*, ∇^2, de modo que la expresión anterior para las fuerzas de viscosidad sobre el elemento de fluido es:

$$\vec{F}_{visc}=dV\,\mu\,\nabla^2\vec{v}.$$

Por si no lo ha notado, hay algo raro: en la Ec. 21, el primer término, s_{xx}, no es un esfuerzo de corte, sino de compresión (como lo es la presión), y del mismo modo éste no es proporcional a un deslizamiento de capas, sino más bien a una compresión.

Aparentemente entonces, tenemos dos tipos de términos: los de deslizamiento, que involucran a ∂s_{ij} con $i\neq j$ y los de compresión, que involucran a s_{ii}. En forma de cantidades vectoriales, los dos términos se pueden escribir como $\nabla^2\vec{v}$ y $\nabla(\nabla\cdot\vec{v})$, de modo que la fuerza de viscosidad sobre el cubo queda:

$$\vec{F}_{visc}=dV\Big(\mu\nabla^2\vec{v}+\mu'\nabla(\nabla\cdot\vec{v})\Big).$$

Si el fluido es más bien incompresible, podemos despreciar el segundo término. Agregando esta fuerza por unidad de volumen a la Ecuación de Euler (Ec. 17), obtenemos la Ecuación de Navier-Stokes, que describe el movimiento de fluidos viscosos:

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}=-\nabla p+\rho\vec{g}+\mu\nabla^2\vec{v}+\mu'\nabla(\nabla\cdot\vec{v}),$$

donde μ y μ' son los coeficientes de viscosidad. Si el fluido es incompresible, se elimina el último término:

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}=-\nabla p+\rho\vec{g}+\mu\nabla^2\vec{v}. \quad (22)$$

La aproximación incompresible es válida incluso en gases (que son claramente compresibles), si el movimiento no incluye la formación de ondas sonoras u ondas de choque. Para movimiento cercano a supersónico, la comprensibilidad se vuelve importante y no puede despreciarse. Estos son temas de estudio que caen fuera del nivel del curso.

Además, el hecho de que existan términos no lineales en $\vec{v}$ tiene como consecuencia la aparición de fenómenos como la turbulencia. En tales regímenes, la transferencia entre energía cinética y energía térmica también se vuelve importante. Eso tampoco será estudiado en este curso.

Lo último que debemos mencionar es que si el coeficiente de viscosidad μ es constante (independiente de v), se habla de un *fluido newtoniano*. Existen, sin embargo, fluidos para los cuales μ depende fuertemente de la velocidad. A ésos se les llama fluidos no-newtonianos. Un ejemplo notable es una solución espesa de maicena (polvo de fécula de maíz) con agua. Al agitarla suavemente es muy líquida, pero al agitarla bruscamente se vuelve prácticamente como un sólido. Haga el experimento en su casa o busque videos en la web ("corn starch" en inglés).

EJERCICIO: Resolvamos un caso simple: flujo estacionario por una cañería.

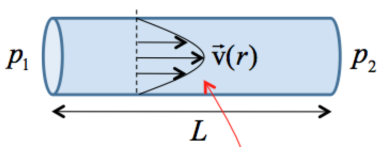

Figura 19: Fluido incompresible, viscoso, que fluye en forma estacionaria por una cañería. La velocidad sólo tiene componente axial y depende sólo de la coordenada radial: $v_z(r)$).

La ecuación de movimiento del fluido, que suponemos incompresible, está dada en la Ec. 22, pero donde vamos a ignorar la fuerza de gravedad. Además, en el régimen estacionario no hay variaciones en el tiempo, de modo que $\partial\vec{v}/\partial t = 0$. Así, la ecuación queda:

$$\rho(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\nabla p + \mu\nabla^2\vec{v}.$$

Como el fluido es incompresible, debe cumplirse que:

$$\nabla\cdot\vec{v} = 0.$$

Además, por la simetría del problema, las líneas del flujo laminar no pueden tener componente radial. Por último, suponemos que no hay rotación del fluido, de modo que las líneas tampoco tienen componente angular. En resumen, la velocidad sólo puede tener componente axial: $v = v_z$. Así,

$$\nabla\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow \partial v_z \partial z = 0,$$

por lo cual v_z es además independiente de z. La única dependencia de v_z puede ser en la coordenada radial, r: $v = v_z(r)$.

De este modo, el término conectivo también es cero:

$$(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = v_z\frac{\partial}{\partial z}v_z = 0.$$

La ecuación de movimiento entonces se reduce a:

$$\mu\nabla^2\vec{v} - \nabla p = 0.$$

Necesitamos la expresión para el Laplaciano en coordenadas cilíndricas, manteniendo sólo las derivadas en r:

$$\nabla^2 v_z = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}v_z\right).$$

Por otro lado, el gradiente de presión lo suponemos conocido como dato externo:

$$-\nabla p = \frac{p_1 - p_2}{L}\hat{z} \quad \equiv \frac{\Delta p}{L}\hat{z}.$$

Nuestra ecuación de movimiento queda entonces:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}v_z\right) = -\frac{\Delta p}{\mu L}.$$

Multiplicamos por r e integramos entre $r = 0$ y un r cualquiera:

$$r\frac{d}{dr}v_z = -\frac{\Delta p}{2\mu L}r^2.$$

Integramos de nuevo:

$$v_z(r) - v_z(0) = -\frac{\Delta p}{4\mu L}r^2.$$

Imponiendo la condición de borde $v_z(r = R) = 0$ (la fricción impide que se mueva el fluido en contacto con la pared de la cañería), obtenemos la solución para el perfil de velocidad:

$$v_z(r) = \frac{\Delta p}{4\mu L}\left(R^2 - r^2\right).$$

Ahora podemos calcular el flujo (o caudal) en términos de este perfil de velocidad: $J \sim A\ v_z$, sin embargo, como v_z varía sobre el área A de la sección, debemos calcular el flujo integrando sobre áreas infinitesimales con forma de anillos:

$$J = \int_0^R v_z(r)\ 2\pi r dr \quad = \frac{\pi R^4}{8\mu}\frac{\Delta p}{L}.$$

Este resultado nos dice que el flujo es proporcional al gradiente de presión, $\Delta p/L$, es inversamente al coeficiente de viscosidad, y es proporcional a la cuarta potencia del radio de la cañería (a una misma diferencia de presión, una cañería con el doble del radio conduce 16 veces más flujo).

---

[1] Arquímedes de Siracusa (287 AC - 212 AC), matemático, físico, ingeniero, inventor y astrónomo griego, es considerado el matemático más grande de la antigüedad. Hizo

avances en Hidrostática como el principio de flotación y en Estática como el principio de la palanca. Fue uno de los primeros en hacer cálculos infinitesimales, en hacer uso de series infinitas para calcular el número π, en encontrar áreas en sectores limitados por curvas y calcular volúmenes de revolución. Sus inventos mecánicos fueron muy conocidos en su tiempo, pero sus avances matemáticos fueron valorados muy posteriormente.

[2] En estricto rigor, de acuerdo a la teoría de la relatividad, la masa no se conserva, sino que es una forma más de energía. En los procesos químicos, la conversión de masa a energía cinética o viceversa es muy pequeña (1 parte de 10^9), de modo que es casi imposible determinar variaciones de masa. Sin embargo, en procesos nucleares o subnucleares, la conversión de masa a energía y viceversa es de 1 parte en 10^3, lo que es claramente apreciable.

[3] Esta relación fue derivada por Daniel Bernoulli (1700-1782), físico-matemático suizo, miembro de una familia de notables matemáticos, profesor en la Universidad de Basilea, y contemporáneo y amigo de Leonhard Euler, uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos.

[4] Leonhard Euler (1707-1783), matemático y físico suizo, uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos. Resolvió problemas que habían quedado pendientes por más de mil años en Teoría de Números, contribuyó notablemente en Análisis (Cálculo), donde mucha notación actual se debe a él (Σ para la suma, i para la unidad imaginaria, e para la base de logaritmo natural, y los nombres de las funciones trigonométricas). En especial estableció el concepto de función matemática, denotada como $f(x)$. Hizo también contribuciones notables en Mecánica, Dinámica de Fluidos, Optica y Astronomía. Pasó la mayor parte de su vida en la Academia de San Peterburgo, Rusia, y ha sido uno de los matemáticos más prolíficos de la historia. Las revistas de matemática continuaron revisando y publicando sus artículos por varias décadas después de su muerte.