Integrales de Superficie: Problemas Resueltos

Importante: *Recuerde que $d\sigma$ representa el diferencial de área de superficie que también es denotado como dA o bien, como dS. Por otra parte las funciones vectoriales se denotan por $\vec{F}$ o bien $\boldsymbol{F}$.*

1. Determine la masa de la superficie S parametrizada mediante $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$ donde $0 \leq r \leq 1$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y función de densidad $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+1}$.

   Solución: A partir de la parametrización indicada para la superficie S procedemos calculando el vector normal, el cual viene dado por

   $$\frac{\partial\Phi}{\partial r} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = (\cos\theta, \sin\theta, 0) \times (-r\sin\theta, r\cos\theta, 1) = (\sin\theta, -\cos\theta, r)\,,$$

   de este modo se tiene que

   $$\text{Masa} \;=\; \iint_S f\, d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^1 f(\Phi(r,\theta)) \left\| \frac{\partial\Phi}{\partial r} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right\| dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1+r^2) dr d\theta = 2\pi \int_0^1 (1+r^2) dr = \frac{8\pi}{3}$$

2. Calcular $\displaystyle\iint_S x d\sigma$, donde S es el triángulo con vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$.

   Solución: Notar que el plano que une los tres vértices del triángulo está dado por $x+y+z=1$, luego $\hat{n} = (1,1,1)/\sqrt{3}$ es el vector normal unitario. Así

   $$\int_S x d\sigma = \sqrt{3}\int_0^1\int_0^{1-x} x dy dx = \int_0^1 x(1-x) dx = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

3. La porción del cilindro $x^2+y^2=a^2$, para $0 \leq z \leq mx$, donde $a>0$ y $m>0$, es la ubicación espacial de una lámina delgada homogénea de densidad a^{-2}. Determinar el valor de $m \in \mathbb{R}$, de tal manera que el momento de inercia de esta lámina, respecto del eje z sea igual a $4a^2$.

   Solución: Una parametrización para la superficie S, está dada por

   $$\phi(t,z) = (a\,\mathrm{sen}(t), a\cos(t), z), \quad \text{donde } (t,z) \in D = \{(t,z):\; 0 \leq z \leq ma\,\mathrm{sen}(t),\; 0 \leq t \leq \pi\}$$

   Luego,

   $$\left.\begin{array}{rcl} \phi_t &=& (a\cos(t), -a\,\mathrm{sen}(t), 0) \\ \phi_z &=& (0,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} \phi_t \times \phi_z &=& (-a\,\mathrm{sen}(t), -a\cos(t), 0) \\ \|\phi_t \times \phi_z\| &=& a \end{array}$$

   El momento de inercia de S respecto al eje z viene dado por:

   $$I_z \;=\; \iint_S (x^2+y^2)a^{-2} d\sigma \;=\; \int_0^{\pi}\int_0^{ma\,\mathrm{sen}(t)} (a^2\,\mathrm{sen}^2(t) + a^2\cos^2(t))a^{-2} a dz dt = \int_0^{\pi}\int_0^{ma\,\mathrm{sen}(t)} a dz dt = 2ma^2$$

   Por lo tanto, solo si $m=2$ se cumple que $I_z = 4a^2$.

4. Determine la masa de la superficie S descrita por $z = x^2+y^2$ con $x^2+y^2 \leq 1$. Considere que la densidad en cada punto de la superficie es $\rho(x,y,z) = 1+4z$.

Solución: Parametrizamos la superficie S mediante $\Phi(x,y) = (x, y, x^2 + y^2)$ con $x^2 + y^2 \leq 1$ y vector normal definido por $\vec{n} = (-2x, -2y, 1)$, luego

$$\begin{aligned}
\iint_S (1+4z)\ d\sigma &= \iint_{x^2+y^2\leq 1} (1+4x^2+4y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}dA, \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r(1+4r^2)^{3/2} dr d\theta = \frac{\pi}{10}(1+4r^2)^{5/2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{10}\left(5^{5/2}-1\right),
\end{aligned}$$

Integrales de Superficie: Problemas Propuestos

1. Mostrar que el área de la superficie de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que está arriba del rectángulo $[-a, a] \times [-a, a]$, donde $2a^2 < 1$, en el plano xy es

$$A = 2\int_{-a}^{a} \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{a}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$$

2. Hallar la masa de una superficie esférica S de radio r tal que en cada punto $(x, y, x) \in S$ la densidad de la masa es igual a la distancia de (x, y, z) a algún punto fijo $(x_0, y_0, z_0) \in S$.

3. El cilindro $x^2 + y^2 = x$ divide la esfera unitaria S en dos regiones S_1 y S_2, donde S_1 está dentro del cilindro y S_2 afuera. Hallar la razón de las áreas $A(S_1)/A(S_2)$.

4. Evaluar $\int_S z^2 d\sigma$, donde S es la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

5. Suponer que una función de temperatura está dada por $T(x, y, x) = x^2 + y^2 + z^2$ y sea S la esfera unitaria orientada con la normal exterior. Hallar el flujo de calor a través de la superficie S.

6. (a) Un fluido uniforme que fluye verticalmente hacia abajo, como la lluvia fuerte, se describe por el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, -1)$. Hallar el flujo total a través del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. $x^2 + y^2 \leq 1$
   (b) Debido al fuerte viento, la lluvia cae de lado, de manera que forma un ángulo de 45^o, y se describe por $\vec{F}(x, y, z) = (-1, 0, -1)/\sqrt{2}$, ¿cuál es ahora el flujo a través del cono?

7. Sean S la superficie cerrada, frontera de la región de $\mathbb{R}^3$ definida mediante: $\Omega = \{(x, y, z) :\ x^2 + z^2 - 1 \leq y \leq 1 - z\}$ y $\vec{F}$ el campo vectorial:

$$\vec{F}(x, y, z) = (x, y - 1, z + 1).$$

   Calcule mediante parametrización de la superficie S, la integral de flujo:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\ d\sigma,$$

   donde $\hat{n}$ es normal unitario exterior a la superficie S.

Teorema de Stokes: Problemas Resueltos

1. Usar el teorema de Stokes para evaluar la integral de línea

$$\int_C -y^3dx + x^3dy - z^3dz,$$

donde C es la intersección del cilindro $x^2+y^2=1$ y el plano $x+y+z=1$, y la orientación de C es en sentido contrario al de las manesillas del reloj, en el plano xy.

Solución: Notar que la curva C es borde de la superficie S definida por $z = 1 - x - y$ con vector normal $\vec{n} = (1,1,1)$ esto para $(x,y) \in D = \{(x,y) : \; x^2+y^2 \leq 1\}$. Hacemos $\vec{F} = (-y^3, x^3, -z^3)$, cuyo rotacional $\nabla \times \vec{F} = (0,0,3x^2+3y^2)$. Luego por el teorema de Stokes, la integral de línea es igual a la integral de superficie

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F})\hat{n}d\sigma \quad = \quad \iint_D (3x^2+3y^3)dxdy = 3\int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 r d\theta dr = \frac{3\pi}{2}$$

2. Sea C una curva cerrada simple la cual es borde de una superficie S de área λ, orientada respecto a la normal $\vec{n} = (1,0,1)$. Calcule el trabajo de un campo vectorial $\vec{F}$ cuyo rotacional es $\nabla \times \vec{F} = (1,1,1)$ a lo largo de C.

Solución: Por el Teorema de Stokes

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad = \quad \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n} d\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_S (1,1,1) \cdot (1,0,1) d\sigma = 2\text{Area}(S) = 2\lambda$$

3. Determine la magnitud de la circulación del campo

$$\vec{F}(x,y,z) = \big(x\cos(x^2) - 2y, y\sin(y^3) - 2z, z\cos(z^4) - 2x\big)$$

a lo largo de la curva C que se obtiene de la intersección del elipsoide $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1$ con el plano $y = z$.

Solución: Usando el Teorema de Stokes se tiene que

$$\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n} d\sigma = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde S es la superficie $y = z$ encerrada por la curva C, además $\nabla \times \vec{F} = (2,2,2)$ y $\hat{n} = (0,1,-1)$. De este modo

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

4. Obtener el trabajo del campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2\right),$$

sobre la curva C determinada por la intersección del cubo $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 4$, $0 \leq z \leq 4$ y el plano $x + y + z = 6$.

Solución: Usando el Teorema de Stokes, luego

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} d\sigma,$$

donde $\nabla \times \vec{F} = (-2y-2z, -2z-2x, -2x-2y)$ y la superficie S esta parametrizada como $\phi(x,y) = (x, y, 6 - x - y)$ con $\hat{n} = (1,1,1)/\sqrt{3}$ y $(x,y) \in D$, donde

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; / \; 0 \leq x \leq 2, \; 2 - x \leq y \leq 4\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; / \; 2 \leq x \leq 4, \; 0 \leq y \leq 6 - x\}$$

Luego, podemos concluir que

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \;=\; \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} d\sigma = -\frac{4}{\sqrt{3}} \iint_S (x+y+z) d\sigma = \iint_D -24 dA = -24 \cdot \text{Area}(D) = -288$$

5. Resuelva los siguientes problemas:

   (i) Considere la superficie $S = S_1 \cup S_2$, definida a partir de:

   $$S_1: \quad x^2+y^2+z^2 = 4z, \qquad 1 \leq z \leq 4-x, \qquad \text{y} \qquad S_2: \quad x^2+y^2 \leq 3, \qquad z = 1.$$

   Para $g(x)$ una función diferenciable en todo $\mathbb{R}$ considere el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = \Big(z, g(x), x\Big)$. Encuentre el flujo del campo $\vec{F}$ a través de la superficie S en dirección de la normal unitaria exterior.

   (ii) Una curva C está descrita mediante la intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 4z$ y el plano $z+x=4$. Si la densidad en cada punto de la curva C es $f(x,y,z) = \sqrt{2+y^2}$ calcule la masa de la curva.

Solución:

(i) Utilizamos el Teorema de Gauss. Para esto es necesario construir o tomar una superficie S_3 arbitraria que permita definir como superficie cerrada a $S^* = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, luego denotaremos como Ω a la región solida cuyo borde es $\partial\Omega = S^*$. Así:

$$\oiint_{S^*} \vec{F} \cdot \hat{n} \; d\sigma = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \hat{n}_{S_1} \; d\sigma + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \hat{n}_{S_2} \; d\sigma + \iint_{S_3} \vec{F} \cdot \hat{n}_{S_3} \; d\sigma = \iiint_\Omega \text{div}(\vec{F}) \; dV$$

donde $\hat{n}$ es la normal unitaria exterior a S^* y $\hat{n}_{S_i} = \hat{n}\Big|_{S_i}$

• Cálculo de integral de superficie: Una elección adecuada para la superficie S_3 corresponde a definirla mediante

$$\varphi(x,y) = (x, y, 4-x) \quad \text{con} \quad D: \; 2(x-1)^2 + y^2 \leq 2,$$

tal región se obtiene al interceptar las graficas del elipsoide con el plano, es decir, desarrollar la expresión: $x^2+y^2+(4-x)^2 = 4(4-x)$. El vector normal a la superficie S_3 esta dado por $\vec{n} = (1,0,1)$. Así:

$$\begin{aligned} \iint_{S_3} \vec{F} \cdot \hat{n}_{S_3} \; d\sigma &= \iint_D \Big(4-x, g(x), x\Big) \cdot (1,0,1) \; dA \\ &= \iint_D 4 \; dA = 4\pi\sqrt{2} \end{aligned}$$

• Cálculo de integral de triple: Notamos que la divergencia viene dada por $\nabla \cdot \vec{F} = \text{div}(\vec{F}) = 0$ y la región sólida encerrada por S^* esta descrita por $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x^2+y^2+z^2 \leq 4z, \;\; 1 \leq z \leq 4-x\}$. Así:

$$\iiint_\Omega \text{div}(\vec{F}) \; dV \;=\; 0$$

de esta forma $\displaystyle\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \; d\sigma = -4\pi\sqrt{2}$

(ii) Al interceptar las graficas del elipsoide con el plano se tiene que las ecuaciones que describen a la curva C son $z = 4-x$ y $2(x-1)^2 + y^2 = 2$, tal curva esta parametrizada mediante

$$\vec{r}(t) = \Big(1+\cos t, \sqrt{2}\sin t, 3-\cos t\Big), \quad \text{con} \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

de lo anterior el vector velocidad es $\vec{v}(t) = \Big(-\sin t, \sqrt{2}\cos t, \sin t\Big)$ y además $\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{2}$, luego:

$$\begin{aligned}
\text{Masa}_C &= \int_C f\, ds = \int_0^{2\pi} f(\vec{r}(t)) \cdot \|\vec{v}(t)\|\; dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\cdot\sqrt{2+2\sin^2 t}\; dt = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\sin^2 t}\; dt
\end{aligned}$$

Observación: Solo es necesario plantear la integral que permite calcular la masa.

6. Determine el trabajo ejercido por el campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = \Big(\cos(x^2) - 2y, e^y - 2z, \sin(z^6) - 2x\Big),$$

a lo largo de la curva C que se obtiene de la intersección del elipsoide $9x^2+3y^2+\dfrac{z^2}{4} = 36$ con el plano $z = 2y$.

Solución: Observamos que al interceptar las superficies tenemos que se genera una curva C descrita mediante $9x^2 + 4y^2 = 36$ y $z = 2y$, luego procederemos aplicando el Teorema de Stokes. Notamos que la curva C es borde de la superficie S descrita mediante:

$$\varphi(x,y) = (x,y,2y) \quad \text{con} \quad (x,y) \in \Omega = \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; 9x^2+4y^2 \leq 36\Big\},$$

para la aplicación del Teorema de Stokes necesitamos el vector normal a la superficie S el cual está dado por

$$\vec{n} = \partial_x\varphi \times \partial_y\varphi = (0,-2,1)$$

además el rotacional del campo vectorial esta determinado mediante $\nabla\times\vec{F} = (2,2,2)$, luego:

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \iint_S \nabla\times\vec{F}\cdot\hat{n}\; d\sigma \\
&= \iint_\Omega (2,2,2)\cdot(0,-2,1)\; dA \\
&= -2\cdot\text{Área}(\Omega) = -12\pi
\end{aligned}$$

7. Sea $\vec{F}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^2$ sobre un sólido $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ definido mediante:

$$\Omega = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2\leq 1, \quad 0\leq z\leq 4-x\big\}.$$

Donde $\partial\Omega$ es la superficie cerrada borde de Ω la cual está orientada respecto a la normal unitaria exterior $\hat{n}$. Sea S_1 la superficie plana inferior, S_2 la superficie plana superior y S_3 una superficie lateral. Considere:

- C_1 y C_2 son las correspondientes fronteras de las superficies S_1 y S_2 ambas recorridas en sentido antihorario, respecto a la normal unitaria exterior a $\partial\Omega$.
- En la superficie S_2 existe f campo escalar de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $\vec{F} = \nabla f$.

(i) Verifique que:

$$\iint_{S_3} \big(\nabla\times\vec{F}\big)\cdot\hat{n}\; d\sigma = -\oint_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

(ii) Suponiendo que $\vec{F}\cdot\hat{T} = 1$ donde $\hat{T}$ es el vector tangente unitario de la curva C_1. Concluya que:

$$\iint_{S_3} \big(\nabla\times\vec{F}\big)\cdot\hat{n}\; d\sigma = -2\pi$$

Solución:

(i) Utilizamos el Teorema de Gauss con el rotacional del campo vectorial, es decir, se aplica al campo $\nabla\times\vec{F}$. Además como $\partial\Omega$ es una superficie cerrada tenemos:

$$\oiint_{S^*}\left(\nabla\times\vec{F}\right)\cdot\hat{n}\ d\sigma=\sum_{k=1}^{3}\iint_{S_k}\left(\nabla\times\vec{F}\right)\cdot\hat{n}_{S_k}\ d\sigma=\iiint_{\Omega}\operatorname{div}\left(\nabla\times\vec{F}\right)\ dV$$

donde $\hat{n}$ es la normal unitaria exterior a $\partial\Omega$ y $\hat{n}_{S_k}=\hat{n}\Big|_{S_k}$. Ahora como $\vec{F}$ es de clase C^2 tenemos que $\operatorname{div}\left(\nabla\times\vec{F}\right)=0$, luego

$$\iint_{S_3}\left(\nabla\times\vec{F}\right)\cdot\hat{n}_{S_3}\ d\sigma=-\sum_{k=1}^{2}\iint_{S_k}\left(\nabla\times\vec{F}\right)\cdot\hat{n}_{S_k}\ d\sigma,$$

posteriormente en las superficies S_1 y S_2 es posible aplicar el Teorema de Stokes. Orientando las curvas respecto a las normales $\hat{n}_{S_k}$, se tiene:

$$\iint_{S_3}\left(\nabla\times\vec{F}\right)\cdot\hat{n}_{S_3}\ d\sigma=-\sum_{k=1}^{2}\oint_{C_k}\vec{F}\cdot d\vec{r},$$

como en la superficie S_2 existe f campo escalar de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $\vec{F}=\nabla f$. Tenemos que:

$$\iint_{S_2}\left(\nabla\times\vec{F}\right)\cdot\hat{n}_{S_2}\ d\sigma=\oint_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\oint_{C_2}\nabla f\cdot d\vec{r}=0$$

lo anterior se tiene pues C_2 es una curva cerrada y f es el potencial del campo $\vec{F}$ sobre la superficie S_2. De esta forma:

$$\iint_{S_3}(\nabla\times\vec{F})\cdot\hat{n}\ d\sigma=-\oint_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

(ii) Por definición de integral de línea

$$\iint_{S_3}(\nabla\times\vec{F})\cdot\hat{n}\ d\sigma=-\oint_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}=-\oint_{C_1}\vec{F}\cdot\hat{T}ds=-\oint_{C_1}ds=-\text{long}_C=-2\pi$$

8. Para f una función continua en todo $\mathbb{R}$. Determine el trabajo ejercido por el campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z)=\Big(f(x)-2y,f(y)-2z,f(z)-2x\Big),$$

a lo largo de la curva C que se obtiene de la intersección de las superficies:

$$S_1:\quad 9x^2+3y^2+\frac{z^2}{4}=36,\qquad S_2:\quad z=2y.$$

Solución: Observamos que al interceptar las superficies tenemos que se genera una curva C descrita mediante $9x^2+4y^2=36$ y $z=2y$, luego procederemos aplicando el Teorema de Stokes. Notamos que la curva C es borde de la superficie S descrita mediante:

$$\varphi(x,y)=(x,y,2y)\quad\text{con}\quad(x,y)\in\Omega=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 9x^2+4y^2\leq 36\Big\},$$

para la aplicación del Teorema de Stokes necesitamos el vector normal a la superficie S el cual está dado por

$$\vec{n} = \partial_x\varphi \times \partial_y\varphi = (0, -2, 1)$$

además el rotacional del campo vectorial esta determinado mediante $\nabla \times \vec{F} = (2, 2, 2)$, luego:

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n}\ d\sigma \\
&= \iint_\Omega (2, 2, 2) \cdot (0, -2, 1)\ dA \\
&= -2 \cdot \text{Área}(\Omega) = -12\pi
\end{aligned}$$

9. Sea C la curva obtenida de la intersección de las superficies

$$S_1 : \quad z = 2x, \quad y \geq 0 \qquad \text{y} \qquad S_2 : \quad z = x^2 + y^2,$$

(i) Calcule el valor de $\displaystyle\int_C f\ ds$ si la función f esta definida como $f(x, y, z) = (x - 1)y$.

(ii) Si $h(y)$ es una función diferenciable en todo $\mathbb{R}$, determine el trabajo efectuado por el campo vectorial $\vec{F}$ sobre la curva C, si:

$$\vec{F}(x, y, z) = \Big(z - 4x - 2y, h(y), x\Big).$$

Sugerencia: Para obtener el trabajo solicitado en el ítem b) recorra la curva C desde el punto $P_A = (2, 0, 4)$ hasta el punto $P_B = (0, 0, 0)$.

Solución:

(i) Comenzamos parametrizando la curva C intersección de las superficies, así tenemos que al interceptar las superficies se observa: $x^2 + y^2 = 2x, \quad y \geq 0$ con $z = 2x$, luego la parametrización de esta curva es: $\vec{r}(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2 + 2\cos t)$ con $0 \leq t \leq \pi$ y $\vec{v}(t) = (-\sin t, \cos t, -2\sin t)$. De este modo:

$$\begin{aligned}
\int_C f\ ds &= \int_0^\pi f(\vec{r}(t))\|\vec{v}(t)\|dt = \int_0^\pi \cos t \sin t\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 2\sin^2 t}dt \\
&= \int_0^\pi \cos t \sin t\sqrt{1 + 2\sin^2 t}dt = \frac{1}{6}(1 + 2\sin^2 t)^{3/2}\Big|_0^\pi = 0
\end{aligned}$$

(ii) Para el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = \Big(z - 4x - 2y, h(y), x\Big)$ tenemos que su rotacional es $\nabla \times \vec{F} = (0, 0, 2)$, luego aplicaremos el Teorema de Stokes y no procederemos por definición pues $h(y)$ no es conocida y el rotacional del campo vectorial es independiente de la función h, de esta forma:

Denotamos por Γ el segmento recto que conecta el punto P_B con P_A, así $C \cup \Gamma$ es una curva cerrada simple la cual encierra a la superficie S parametrizada por $\varphi(x, y) = (x, y, 2x)$ con $D : \ (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, \ \ y \geq 0$ y vector normal dado por $\vec{n} = (-2, 0, 1)$. Así:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \Big(\nabla \times \vec{F}\Big) \cdot \hat{n}\ d\sigma,$$

- Calculo de integral de superficie:

$$\iint_S \Big(\nabla \times \vec{F}\Big) \cdot \hat{n}\ d\sigma = \iint_D (0, 0, 2) \cdot (-2, 0, 1)dA = 2 \cdot \text{area}(D) = \pi$$

• Calculo de integral de línea: La curva Γ esta parametrizada por $\gamma(t) = (2t, 0, 4t)$ con $0 \leq t \leq 1$ así $\gamma'(t) = (2, 0, 4)$

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad = \quad \int_0^1 \vec{F}(2t, 0, 4t) \cdot (2, 0, 4)dt = \int_0^1 (-4t, h(0), 2t) \cdot (2, 0, 4)dt = 0$$

luego $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \pi$

Teorema de Stokes: Problemas Propuestos

1. Sea $S = S_1 \cup S_2$ donde S_1 es el conjunto de (x, y, z) con $x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 1$ y S_2 es el conjunto de (x, y, x) con $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1,\ z \geq 1$. Sea $\vec{F} = (zx + z^2y + x, z^3yx + y, z^4x^2)$. Calcular

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} d\sigma$$

2. Sea S una superficie suave con frontera C la cual se obtiene de la intersección de las superficies de ecuaciones $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2/9 + z^2 = 1$. Si $\vec{F}$ es un campo vectorial continuo el cual es perpendicular a la superficie S. Calcular el flujo del rotor de $\vec{F}$ a través de la superficie S.

3. Considere el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = (4z, 0, 4y),$$

y la curva C dada por la intersección de las superficies

$$S_1: \quad z = 2x^2 + 2y^2, \qquad S_2: \quad 4x^2 + 4y^2 + 1 = 4x + 4y.$$

Calcule el trabajo mediante el Teorema de Stokes.

4. Hallar el trabajo del campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{y}{(x-1)^2 + y^2}, \frac{1-x}{(x-1)^2 + y^2}, z - x + y \right)$$

sobre la curva C intersección de las superficies S_1 y S_2, definidas como

$$S_1: \ |x| + |y| = a, \qquad S_2: \ z + x = 4a, \qquad \text{si} \quad a > 1.$$

5. Sea $\vec{F}(x, y, z) = \Big(f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)\Big)$ un campo vectorial diferenciable en $\mathbb{R}^3$ tal que $\nabla \cdot \vec{F} = 0$.

   (a) Verifique que el campo vectorial $\vec{G}(x, y, z) = \Big(M(x, y, z), N(x, y, z), P(x, y, z)\Big)$ donde

   - $M(x, y, z) = \displaystyle\int_{z_0}^{z} f_2(x, y, u)du$
   - $N(x, y, z) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f_3(u, y, z_0)du - \int_{z_0}^{z} f_1(x, y, u)du$
   - $P(x, y, z) = 0$

   para x_0 y z_0 arbitrarios cumple que

$$\nabla \times \vec{G} = \vec{F}$$

   (b) Sea S una superficie regular orientada según la normal unitaria $\hat{n}$ cuyo borde es un curva cerrada simple C parametrizada por $\vec{r}(t) = \big(\cos^2 t, \sin^2 t + \cos t, \sin t\big)$ con $t \in [0, 2\pi]$. Determine el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (y, y + x, y - z)$ a través de la superficie S.

(c) Considere que S es una superficie regular orientada según la normal unitaria $\hat{n}$ cuyo borde es un curva cerrada simple C, si además se sabe que el campo vectorial $\vec{G}$ cumple que para todo punto $t \in [a,b]$ de la parametrización $\vec{r}(t)$ de la curva C se tiene que $G(\vec{r}(t)) = \vec{T}(t)$ con $\vec{T}(t)$ el vector tangente unitario a la curva C. Muestre que si la longitud de la curva es ℓ entonces:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} d\sigma = \ell$$

Teorema de Gauss: Problemas Resueltos

1. Calcule el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = \left(2x, z - \dfrac{zx}{x^2+y^2+z^2}, \dfrac{xy}{x^2+y^2+z^2}\right)$ a través de la superficie S descrita por $\dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{9} + (z-2)^2 = 1$ la cual esta orientada respecto a la normal unitaria exterior.

   Solución: Es necesario determinar $\displaystyle\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}_S \, d\sigma$ donde $\hat{n}_S$ es la normal unitaria exterior a S, para esto procedemos aplicando el teorema de la divergencia. Observamos el campo es de clase $\mathcal{C}^1$ en la superficie. Luego si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ representa sólido limitado por el interior de S tenemos que:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}_S \, d\sigma = \iiint_\Omega \nabla \cdot \vec{F} \, dV,$$

   luego

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{F} &= \partial_x (2x) + \partial_y \left(z - \frac{zx}{x^2+y^2+z^2}\right) + \partial_z \left(\frac{xy}{x^2+y^2+z^2}\right) \\ &= 2 + \frac{2xyz}{(x^2+y^2+z^2)^2} - \frac{2xyz}{(x^2+y^2+z^2)^2} = 2 \end{aligned}$$

   de esta forma

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}_S \, d\sigma = \iiint_\Omega \nabla \cdot \vec{F} \, dV = 2\text{Vol}(\Omega) = 16\pi$$

2. Considere el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (x, x(y-1), xyz)$, y la superficie S_1, definida como

$$S_1 : \qquad x^2 + y^2 = 16, \qquad 0 \leq z \leq 4 - y.$$

   Encuentre el flujo del campo $\vec{F}$ a través de S_1 en dirección de la normal unitaria exterior

   Solución: Para usar el teorema de Gauss, sea S la superficie cerrada constituida por el manto del cilindro S_1 las tapas superior e inferior dadas por S_2 y S_3 respectivamente, además sea Ω el sólido encerrado por S, luego

$$\iiint_\Omega \textbf{div } \vec{F} dV = \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} d\sigma,$$

   de esta forma

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \hat{n} d\sigma = \iiint_\Omega \textbf{div } \vec{F} dV - \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \hat{n} d\sigma - \iint_{S_3} \vec{F} \cdot \hat{n} d\sigma,$$

   además notamos que

$$\iiint_\Omega \textbf{div } \vec{F} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^4 \int_0^{4 - r\sin\theta} (1 + r\cos\theta + r^2 \cos\theta \sin\theta) r dz dr d\theta = 64\pi$$

   para la tapa superior S_2 notamos que

$$\iint_{S_2} \vec{F}\cdot\hat{n}d\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}\iint_{S_2}(x, x(y-1), xyz)\cdot(0,1,1)d\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}\iint_{S_2}(xy - x + xyz)d\sigma$$

la cual viene parametrizada por $\varphi(x,y) = (x, y, 4-y)$, con $(x,y) \in D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \leq 16\}$, de esta forma

$$\iint_{S_2} \vec{F}\cdot\hat{n}d\sigma = \iint_D (xy - x + xy(4-y))dA = \int_0^{2\pi}\int_0^4 (r^2\cos\theta\sin\theta - r\cos\theta + r^2\cos\theta\sin\theta(4 - r\sin\theta))rdrd\theta = 0$$

para la tapa inferior S_3 notamos que

$$\iint_{S_3} \vec{F}\cdot\hat{n}d\sigma = \iint_{S_3}(x, x(y-1), xyz)\cdot(0,0,-1)d\sigma = -\iint_{S_3} xyzd\sigma$$

la cual viene parametrizada por $\varphi(x,y) = (x,y,0)$, con $(x,y) \in D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \leq 16\}$, de esta forma

$$\iint_{S_3} \vec{F}\cdot\hat{n}d\sigma = 0,$$

luego

$$\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\hat{n}d\sigma = 64\pi$$

3. Considere las superficies S_1 y S_2 definidas como

$$S_1 :\ \ x^2+y^2 \leq 4,\ \ z = 1, \qquad\qquad S_2 :\ \ x^2+y^2 = 4,\ \ 1 < z < 5.$$

Determine el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = \big(y^2, x^2, z\big)$ a través de $S = S_1 \cup S_2$.

Solución: Una solucion consiste en utilizar el Teorema de Gauss, para esto se debe agregar una superficie S_3 que permita construir una superficie S cerrada, definida como $S = S_1\cup S_2\cup S_3$. Para esto sea S_3 definida como

$$S_3 :\ \ x^2+y^2 \leq 4,\ \ z = 5$$

y sea S la superficie cerrada la cual encierra el solido

$$\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 /\ x^2+y^2 \leq 4,\ 1 \leq z \leq 5\},$$

de esta forma

$$\iiint_\Omega \nabla\cdot\vec{F}dV = \iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}d\sigma,$$

con $\hat{n}$ la normal unitaria exterior a la superficie S.

• Calculo de $\displaystyle\iiint_\Omega \nabla\cdot\vec{F}dV$: Como $\nabla\cdot\vec{F} = 1$, se tiene que

$$\iiint_\Omega \nabla\cdot\vec{F}dV = 16\pi$$

• Calculo de $\displaystyle\iint_{S_3} \vec{F}\cdot\hat{n}_3d\sigma$: En la superficie S_3 la normal $\hat{n}_3 = (0,0,1)$, luego

$$\iint_{S_3} \vec{F}\cdot\hat{n}_3d\sigma = \iint_{S_3} zd\sigma = 5\iint_{x^2+y^2\leq 4} dA = 20\pi,$$

luego

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}_Sd\sigma = -4\pi$$

4. Considere el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = \Big(x + y^8 + e^y \sin(y^6), 2x^2 + 6y^2, 1 - z\Big)$, y la superficie $S = S_1 \cup S_2$, definida a partir de

$$S_1 : \quad x^2 + y^2 = 1, \qquad 0 \leq z \leq 1 - y, \qquad \text{y} \quad S_2 : \quad x^2 + y^2 \leq 1, \qquad z = 0.$$

Encuentre el flujo del campo $\vec{F}$ a través de la superficie S en dirección de la normal unitaria exterior,

Solución: De acuerdo a la complejidad del campo vectorial es conveniente para el calculo utilizar el Teorema de Gauss. Para esto es necesario construir o tomar una superficie S_3 arbitraria que permita definir como superficie cerrada a $S^* = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, luego denotaremos como Ω a la región solida cuyo borde es $\partial\Omega = S^*$. Así:

$$\oiint_{S^*} \vec{F} \cdot \hat{n} \, d\sigma = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \hat{n}_{S_1} \, d\sigma + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \hat{n}_{S_2} \, d\sigma + \iint_{S_3} \vec{F} \cdot \hat{n}_{S_3} \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{F}) \, dV$$

donde $\hat{n}$ es la normal unitaria exterior a S^* y $\hat{n}_{S_i} = \hat{n}\Big|_{S_i}$

• Calculo de integral de superficie: Una elección adecuada para la superficie S_3 corresponde a definirla mediante $\varphi(x,y) = (x, y, 1-y)$ con $D: \; x^2 + y^2 \leq 1$ y vector normal dado por $\vec{n} = (0,1,1)$. Así:

$$\begin{aligned}
\iint_{S_3} \vec{F} \cdot \hat{n}_{S_3} \, d\sigma &= \iint_D \Big(x + y^8 + e^y \sin(y^6), 2x^2 + 6y^2, y\Big) \cdot (0,1,1) \, dA \\
&= \iint_D (2x^2 + 6y^2 + y) \, dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r\left(2r^2 + 4r^2 \sin^2\theta + r\sin\theta\right) \, drd\theta = \frac{2}{4} \cdot 2\pi + \frac{4}{4} \cdot \pi + \frac{1}{3} \cdot 0 = 2\pi
\end{aligned}$$

• Calculo de integral de triple: Notamos que la divergencia viene dada por $\nabla \cdot \vec{F} = \operatorname{div}(\vec{F}) = 12y$ y la región solida encerrada por S^* esta descrita por $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 \leq 1, \;\; 0 \leq z \leq 1 - y\}$. Así:

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{F}) \, dV &= \iiint_{\Omega} 12y \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1 - r\sin\theta} r(12r\sin\theta) \, dzdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 12r^2 \sin\theta(1 - r\sin\theta) \, drd\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (12r^2 \sin\theta - 12r^3 \sin^2\theta) \, drd\theta \\
&= \frac{12}{3} \cdot 0 - \frac{12}{4} \cdot \pi = -3\pi
\end{aligned}$$

de esta forma $\displaystyle\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, d\sigma = -5\pi$

5. Sea $\vec{F}$ el campo vectorial definido como

$$\vec{F}(x,y,z) = \Big(2xz - x, y + 5, x^2 + y^2 - z^2 - 9\Big),$$

y considere las superficies S_1, S_2 y S_3 descritas mediante

$$S_1 : \; x^2 + z^2 = 4, \quad -5 \leq y \leq 8 - 2z; \qquad S_2 : \; x^2 + y^2 = 4, \quad -3 \leq z \leq 3; \qquad S_3 : \; x^2 + z^2 \leq 4, \quad y = -5.$$

Determine el flujo de $\vec{F}$ a través de la superficie $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ orientada según la normal exterior.

Solución: La superficie S no es cerrada, de esta forma es que procedemos a cerrarla para aplicar el Teorema de Gauss. Así se definen las superficies:

$$S_4 : \; x^2 + y^2 \leq 4, \quad z = -3; \qquad S_5 : \; x^2 + y^2 \leq 4, \quad z = 3; \qquad S_6 : \; x^2 + z^2 \leq 4, \quad y = 8 - 2z;$$

de esta forma $\hat{S} = S \cup S_4 \cup S_5 \cup S_6$ es una superficie cerrada, luego definimos Ω como el sólido encerrado por la superficie $\hat{S}$, de esta forma el Teorema de Gauss queda escrito como:

$$\iint_{\hat{S}} \vec{F} \cdot \hat{n}_{\hat{S}} d\sigma = \iint_{S} \vec{F} \cdot \hat{n}_{S} d\sigma + \sum_{k=4}^{6} \iint_{S_k} \vec{F} \cdot \hat{n}_{S_k} d\sigma = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} \; dV,$$

notamos también que $\nabla \cdot \vec{F} = 0$, luego $\displaystyle\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} \; dV = 0$, así

$$\iint_{S} \vec{F} \cdot \hat{n}_{S} d\sigma = -\sum_{k=4}^{6} \iint_{S_k} \vec{F} \cdot \hat{n}_{S_k} d\sigma$$

• La superficie S_4 es parametrizada mediante $\varphi_{S_4}(x,y) = (x,y,-3)$ con $D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; / \; x^2 + y^2 \leq 4\Big\}$ y vector normal $\hat{S_4} = (0,0,-1)$, asi:

$$\iint_{S_4} \vec{F} \cdot \hat{n}_{S_4} d\sigma = \iint_{D} -(x^2 + y^2 - 18) dA = -\int_0^{2\pi} \int_0^2 r(r^2 - 18) dr d\theta = 64\pi$$

• La superficie S_5 es parametrizada mediante $\varphi_{S_5}(x,y) = (x,y,3)$ con $D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; / \; x^2 + y^2 \leq 4\Big\}$ y vector normal $\hat{S_4} = (0,0,1)$, asi:

$$\iint_{S_5} \vec{F} \cdot \hat{n}_{S_5} d\sigma = \iint_{D} (x^2 + y^2 - 18) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 r(r^2 - 18) dr d\theta = -64\pi$$

• La superficie S_6 es parametrizada mediante $\varphi_{S_6}(x,z) = (x, 8-2z, z)$ con $W = \Big\{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \; / \; x^2 + z^2 \leq 4\Big\}$ y vector normal $\hat{S_6} = (0,1,2)$, así:

$$\begin{aligned}
\iint_{S_6} \vec{F} \cdot \hat{n}_{S_6} d\sigma &= \frac{1}{\sqrt{5}} \iint_{S_6} \Big((13 - 2z) + 2(x^2 + (8-2z)^2 - z^2 - 9)\Big) d\sigma \\
&= \iint_{W} (6z^2 + 2x^2 - 66z + 123) dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r\Big(6r^2 \sin^2\theta + 2r^2 \cos^2\theta - 66r \sin\theta + 123\Big) dr d\theta \\
&= \frac{123r^2}{2} + \frac{2r^3\pi}{3} + 2r^3\pi \Big|_0^2 = 246 + \frac{16\pi}{3} + 16\pi = 246 + \frac{64\pi}{3}
\end{aligned}$$

luego

$$\iint_{S} \vec{F} \cdot \hat{n}_{S} d\sigma = -246 - \frac{64\pi}{3}$$

Teorema de Gauss: Problemas Propuestos

1. Sea S una superficie definida como el borde del solido $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq 4, \ -1 \leq z \leq 4\}$. Determine el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (2x, y + x^2 + z, e^x + \sin y)$, a través de la superficie S orientada respeto a la normal unitaria exterior.

2. Usar el teorema de la divergencia para evaluar
$$\iint_{\partial W} (x^2 + y + z) d\sigma,$$
donde W es la bola sólida $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

3. Considere el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (x, x(y - 1), xyz)$, y la superficie S_1, definida como
$$S_1 : \qquad x^2 + y^2 = 4, \qquad 0 \leq z \leq 2 - x.$$
Encuentre el flujo del campo $\vec{F}$ a través de S_1 en dirección de la normal unitaria exterior.

4. Considere el sólido Ω definido como
$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ |y| \leq 1 + z^2, \ \ 0 \leq 7z \leq y + 9, \ \ -1 \leq x \leq 1\right\},$$
donde el borde de Ω es denotado por $\partial\Omega$ y corresponde a una superficie cerrada orientada respecto a la normal exterior, además $\partial\Omega$ se puede considerar compuesta por una superficie superior S_1, una superficie inferior S_2 y una superficie lateral S_3. Para el campo vectorial $\vec{F}$ definido como
$$\vec{F}(x, y, z) = (2x - y, x + 4z - 6, 1 + 2z).$$
Determinar el flujo del rotor del campo $\vec{F}$ a través de la superficie S_3 orientada respecto a la normal exterior.

5. Considere el sólido Ω definido como
$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ |y| \leq 1 + z^2, \ 0 \leq 7z \leq y + 9, \ \ -1 \leq x \leq 1\right\},$$
donde el borde de Ω es denotado por $\partial\Omega$ y corresponde a una superficie cerrada orientada respecto a la normal unitaria exterior, además $\partial\Omega$ se puede considerar compuesta por una superficie superior S_1, una superficie inferior S_2 y una superficie lateral S_3.

   (i) Para el campo vectorial $\vec{F} = (2x - y, x + 4z - 6{,}1 + 2z)$, determinar el flujo a través de la superficie S_3 orientada respecto a la normal unitaria exterior.

   (ii) Sean C_1 y C_2 las correspondientes fronteras de las superficies S_1 y S_2 recorridas en sentido en contra de las manesillas del reloj, respecto a la normal exterior a Ω. Encuentre $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que
$$\iint_{S_3} \left(\nabla \times (\nabla \times \vec{G})\right) \cdot \hat{n} d\sigma = \lambda \oint_{C_1} \nabla \times \vec{G} \cdot \Delta d\vec{r},$$
donde $\hat{n}$ es la normal unitaria exterior a $\partial\Omega$ sobre S_3, $\vec{G}$ un campo vectorial de clase $\mathfrak{C}^2$ sobre un abierto que contiene a Ω, si además se sabe que $\nabla \times \vec{G}$ es ortogonal a todo punto del vector tangente de la curva C_2.

6. Determine el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = \left(y, -\dfrac{zx}{4x^2 + y^2 + z^2}, \dfrac{xy}{4x^2 + y^2 + z^2}\right)$ a través de la superficie S descrita por:
$$x^2 + y^2 + z^2 = 10, \qquad |x| \leq 1,$$
la cual esta orientada respecto a la normal unitaria exterior.

7. Evaluar la integral de superficie $\displaystyle\iint_{\partial S} \vec{F} \cdot \hat{n} dA$, donde $\vec{F}(x, y, z) = \left(1, 1, z(x^2 + y^2)^2\right)$ y ∂S es la superficie del ciliendro $x^2 + y^2 \leq 1, \ 0 \leq z \leq 1$.

Problemas Extras

1. Sea $\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ definido sobre una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ compacta cuya frontera es una superficie cerrada denotada por $\partial\Omega$ orientada respecto a la normal unitaria exterior $\hat{n}$, y sea $u = u(x,y,z)$ una función escalar de clase $\mathcal{C}^2(\Omega)$. Suponga además que:
   - $\displaystyle\iiint_\Omega u\ dA = -\oiint_{\partial\Omega} u\vec{F}\cdot\hat{n}\ d\sigma + \oiint_{\partial\Omega} \nabla u\cdot\hat{n}\ d\sigma,$
   - $\operatorname{div}(\vec{F}) = \nabla\cdot\vec{F} = 0.$

   Calcule:
$$\iiint_\Omega \Big(u + \vec{F}\cdot\nabla u - \Delta u\Big)\ dV$$

2. **Teorema de Stokes y Gauss:** Determine el flujo del rotacional del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = \Big(x^2-6x+y, 2x+y^2, z-x\Big)$ a través de la superficie S definida como:
$$S = \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ x^2+y^2=6x,\ (x-3)^2+y^2-9 \le z \le 6-x\Big\}$$

   Alternativa de Solución 1: Buscando utilizar el Teorema de Gauss es que cerramos la superficie S agregando las superficies:
$$S_1:\ z=6-x,\quad x^2+y^2\le 6x;\qquad S_2:\ z=(x-3)^2+y^2-9,\quad x^2+y^2\le 6x.$$

   Luego $S^* = S\cup S_1\cup S_2$ es una superficie cerrada la cual encierra un sólido Ω y a la cual se le puede aplicar el Teorema de Gauss, de este modo
$$\iint_{S^*}\nabla\times\vec{F}\cdot\hat{n}d\sigma = \iint_{S_1}\nabla\times\vec{F}\cdot\hat{n}_1 d\sigma + \iint_{S_2}\nabla\times\vec{F}\cdot\hat{n}_2 d\sigma + \iint_S \nabla\times\vec{F}\cdot\hat{n}d\sigma = \iiint_\Omega \nabla\cdot(\nabla\times\vec{F})\ dV,$$
   el rotacional del campo $\vec{F}$ es $\nabla\times\vec{F} = (0,1,1)$ así la divergencia de este campo es nula luego $\displaystyle\iiint_\Omega \nabla\cdot(\nabla\times\vec{F})\ dV = 0$, de esta forma solo resta calcular los flujos respecto a las normales exteriores en las superficies S_1 y S_2.

   • La superficie S_1 la parametrizamos como $\Phi(x,y) = (x,y,6-x)$ con $(x,y)\in D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x^2+y^2\le 6x\}$ y vector normal exterior $\vec{n}_1 = (1,0,1)$ de este modo
$$\begin{aligned}\iint_{S_1}\nabla\times\vec{F}\cdot\hat{n}_1 d\sigma &= \frac{1}{\sqrt{2}}\iint_{S_1}(0,1,1)\cdot(1,0,1)d\sigma\\ &= \iint_D dA = 9\pi\end{aligned}$$

   • La superficie S_2 la parametrizamos como $\Phi(x,y) = \big(x,y,(x-3)+y^2-9\big) = (x,y,x^2+y^2-6x)$ con $(x,y)\in D$ y vector normal exterior $\vec{n}_2 = (2x-6,2y,-1)$ de este modo
$$\begin{aligned}\iint_{S_2}\nabla\times\vec{F}\cdot\hat{n}_2 d\sigma &= \iint_{S_2}(0,1,1)\cdot\hat{n}_2 d\sigma\\ &= \iint_D (2y-1)dA\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 9r(6r\sin\theta-1)drd\theta = -9\pi,\end{aligned}$$

en el desarrollo se usaron las coordenadas $x = 3 + 3r\cos\theta$, $\quad y = 3r\sin\theta$, $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = 9r$, luego

$$\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n} d\sigma = 0$$

Alternativa de Solución 2: Buscando utilizar el Teorema de Gauss es que cerramos la superficie S agregando las superficies:

$$S_1: \; z = 6 - x, \quad x^2 + y^2 \leq 6x; \qquad S_2: \; z = (x-3)^2 + y^2 - 9, \quad x^2 + y^2 \leq 6x.$$

Luego $S^* = S \cup S_1 \cup S_2$ es una superficie cerrada la cual encierra un sólido Ω y a la cual se le puede aplicar el Teorema de Gauss, de este modo

$$\iint_{S^*} \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n} d\sigma = \iint_{S_1} \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n}_1 d\sigma + \iint_{S_2} \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n}_2 d\sigma + \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n} d\sigma = \iiint_\Omega \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) \; dV,$$

el rotacional del campo $\vec{F}$ es $\nabla \times \vec{F} = (0,1,1)$ así la divergencia de este campo es nula luego $\iiint_\Omega \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) \; dV = 0$, de esta forma solo resta calcular calcular los flujos respecto a las normales exteriores en las superficies S_1 y S_2.

• En la superficie S_1 aplicamos el Teorema de Stokes, así que sea ∂S_1 la curva cerrada simple borde de S_1, tal curva esta parametrizada mediante $\vec{r}(t) = (3 + 3\cos t, 3\sin t, 3 - 3\cos t)$ con $t \in [0, 2\pi]$, de este modo se tiene que

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n}_1 d\sigma &= \oint_{\partial S_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_0^{2\pi} \vec{F}\,(3 + 3\cos t, 3\sin t, 3 - 3\cos t) \cdot (-3\sin t, 3\cos t, 3\sin t)\, dt \end{aligned}$$

observamos que la integral anterior al evaluar en la respectiva parametrización es

$$\int_0^{2\pi} \big(9\cos^2 t + 3\sin t - 9, 6 + 6\cos t + 9\sin^2 t, -6\cos t\big) \cdot (-3\sin t, 3\cos t, 3\sin t)\, dt,$$

luego aplicando argumentos de simetrias se llega a que solo es necesario integrar

$$\int_0^{2\pi} (18\cos^2 t - 9\sin^2 t) dt,$$

de este modo

$$\iint_{S_1} \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n}_1 d\sigma = 9\pi$$

• En la superficie S_2 aplicamos el Teorema de Stokes, así que sea ∂S_2 la curva cerrada simple borde de S_2, tal curva esta parametrizada mediante $\vec{r}(t) = (3 + 3\sin t, 3\cos t, 0)$ con $t \in [0, 2\pi]$, de este modo se tiene que

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n}_2 d\sigma &= \oint_{\partial S_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_0^{2\pi} \vec{F}\,(3 + 3\sin t, 3\cos t, 0) \cdot (3\cos t, -3\sin t, 0)\, dt \end{aligned}$$

observamos que la integral anterior al evaluar en la respectiva parametrización es

$$\int_0^{2\pi} \left(9\sin^2 t + 3\cos t - 9, 6 + 6\sin t + 9\cos^2 t, -3 - 3\sin t\right) \cdot (3\cos t, -3\sin t, 0)\, dt,$$

luego aplicando argumentos de simetrias se llega a que solo es necesario integrar

$$\int_0^{2\pi} (9\cos^2 t - 18\sin^2 t) dt,$$

de este modo

$$\iint_{S_2} \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n}_2 d\sigma = -9\pi,$$

luego

$$\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n} d\sigma = 0$$

Alternativa de Solución 3: Utilizando la definición de integrales de superficie, para esto se parametriza la superficie S como

$$\Phi(z,\theta) = (3 + 3\cos\theta, 3\sin\theta, z)\,,$$

con $(z,\theta) \in D = \{(z,\theta) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le z \le 3 - 3\cos\theta\}$, además el vector normal a la superficie viene dado por

$$\vec{n}_S = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial z} = (-3\sin\theta, 3\cos\theta, 0) \times (0,0,1) = (3\cos\theta, 3\sin\theta, 0)\,.$$

Luego la integral de flujo se obtiene como

$$\begin{aligned}
\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n} d\sigma &= \iint_D \nabla \times \vec{F}\left(\Phi(z,\theta)\right) \cdot \hat{n}_S d\sigma \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{3-3\cos\theta} (0,1,1) \cdot (3\cos\theta, 3\sin\theta, 0)\, dz d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{3-3\cos\theta} 3\sin\theta dz d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (3 - 3\cos\theta) 3\sin\theta dz d\theta \\
&= 0
\end{aligned}$$

3. **Teorema de Stokes:** Sea $\vec{F}(x,y,z) = \Big(f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)\Big)$ un campo vectorial diferenciable en todo $\mathbb{R}^3$ tal que $\nabla \cdot \vec{F} = 0$.
   (a) Verifique que el campo vectorial $\vec{G}(x,y,z) = \Big(M(x,y,z), N(x,y,z), P(x,y,z)\Big)$ donde
   - $M(x,y,z) = \displaystyle\int_{z_0}^{z} f_2(x,y,u) du$
   - $N(x,y,z) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f_3(u,y,z_0) du - \int_{z_0}^{z} f_1(x,y,u) du$
   - $P(x,y,z) = 0$

   para x_0 y z_0 arbitrarios cumple que
   $$\nabla \times \vec{G} = \vec{F}$$

(b) Sea S una superficie regular orientada según la normal unitaria $\hat{n}$ cuyo borde es un curva cerrada simple C parametrizada por $\vec{r}(t) = \big(\cos^2 t, \sin^2 t + \cos t, \sin t\big)$ con $t \in [0, 2\pi]$. Determine el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (y, y + x, y - z)$ a través de la superficie S.

Importante: Recuerde que $d\sigma$ representa el diferencial de área de superficie que también es denotado como dA o bien, como dS.

Solución:

(a) Procederemos calculando el rotacional del campo

$$\vec{G}(x, y, z) = \Big(M(x, y, z), N(x, y, z), P(x, y, z)\Big),$$

así:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{G} &= \Big(\partial_y P - \partial_z N, -\partial_x P + \partial_z M, \partial_x N - \partial_y M\Big) \\ &= \Big(f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), \partial_x N - \partial_y M\Big) \end{aligned}$$

pero $\partial_x N = f_3(x, y, z_0) - \displaystyle\int_{z_0}^{z} \partial_x f_1(x, y, u)du$ y $\partial_y M = \displaystyle\int_{z_0}^{z} \partial_y f_2(x, y, u)du$ y como $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ se tiene que $\partial_x f_1(x, y, z) + \partial_2 f_2(x, y, z) + \partial_z f_3(x, y, z) = 0$, así se tiene que:

$$\begin{aligned} \partial_x N - \partial_y M &= f_3(x, y, z_0) - \int_{z_0}^{z} \partial_x f_1(x, y, u)du - \int_{z_0}^{z} \partial_y f_2(x, y, u)du \\ &= f_3(x, y, z_0) + \int_{z_0}^{z} \partial_u f_3(x, y, u)du = f_3(x, y, z) \end{aligned}$$

lo cual permite concluir que

$$\nabla \times \vec{G} = \Big(f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)\Big) = \vec{F}$$

(b) En este punto se solicita $\displaystyle\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} d\sigma$. Pues es difícil obtener la superficie S cuyo borde es la curva entregada ocuparemos el Teorema de Stokes, para esto verificamos que el campo $\vec{F}$ cumple las hipótesis del apartado (a) de modo de lograr construir un campo $\vec{G}$ tal que $\nabla \times \vec{G} = \vec{F}$. Observamos que la divergencia del campo $\vec{F}(x, y, z) = (y, y+x, y-z)$ es nula y además tal campo es diferenciable, luego es aplicable el resultado obtenido en (a). Para esto tomamos x_0 y z_0 arbitrarios (los más sencillos), es decir, $x_0 = z_0 = 0$, así:

- $M(x, y, z) = \displaystyle\int_0^z (x + y)du = zx + zy$
- $N(x, y, z) = \displaystyle\int_0^x y du - \int_0^z y du = xy - zy$
- $P(x, y, z) = 0$

así tenemos el campo $\vec{G}(x, y, z) = \Big(zx + zy, xy - zy, 0\Big)$, luego

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} d\sigma &= \iint_S \nabla \times \vec{G} \cdot \hat{n} d\sigma = \oint_C \vec{G} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{G}\left(\vec{r}(t)\right) \cdot \vec{v}(t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} \vec{G}\left(\cos^2 t, \sin^2 t + \cos t, \sin t\right) \cdot \Big(-2\cos t \sin t, 2\sin t \cos t - \sin t, \cos t\Big)dt \end{aligned}$$

simplificando al máximo el argumento de la integral solo es necesario calcular:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} d\sigma = \int_0^{2\pi} (\sin^4 t - 4\sin^2 t \cos^2 t)dt = -\frac{\pi}{4}$$

4. Determine el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = \left(e^y, -\frac{zx}{4x^2+y^2+z^2}, \frac{xy}{4x^2+y^2+z^2}\right)$ a través de la superficie S descrita por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ con $a, b, c > 0$; la cual esta orientada respecto a la normal unitaria exterior.

Solución: Es necesario determinar $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}_S \, d\sigma$ donde $\hat{n}_S$ es la normal unitaria exterior a S, para esto procedemos aplicando el teorema de la divergencia. Observamos en primera instancia que el campo no es de clase $\mathcal{C}^1$ en el origen así que para esto definimos mediante S_ϵ la superficie $4x^2 + y^2 + z^2 = \epsilon^2$ orientada respecto a la normal unitaria exterior $\hat{n}_{S_\epsilon}$ en la cual $\epsilon > 0$ se selecciona de modo que la superficie S_ϵ este contenida en el sólido limitado por S. Además $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ representara al sólido limitado por el interior de S y exterior de S_ϵ.

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}_S \, d\sigma - \iint_{S_\epsilon} \vec{F} \cdot \hat{n}_{S_\epsilon} \, d\sigma = \iiint_\Omega \nabla \cdot \vec{F} \, dV,$$

luego

$$\nabla \cdot \vec{F} = \partial_x (e^y) + \partial_y \left(-\frac{zx}{4x^2+y^2+z^2}\right) + \partial_z \left(\frac{xy}{4x^2+y^2+z^2}\right) = 0 + \frac{2xyz}{(4x^2+y^2+z^2)^2} - \frac{2xyz}{(4x^2+y^2+z^2)^2} = 0,$$

de esta forma

$$\iiint_\Omega \nabla \cdot \vec{F} \, dV = 0$$

así solo resta calcular $\iint_{S_\epsilon} \vec{F} \cdot \hat{n}_{S_\epsilon} \, d\sigma$, para esto parametrizamos la superficie como

$$\Phi(\theta, \varphi) = \left(\frac{\epsilon}{2} \cos\theta \sin\varphi, \epsilon \sin\theta \sin\varphi, \epsilon \cos\varphi\right)$$

con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq \varphi \leq \pi$, donde el vector normal exterior esta determinado por

$$\vec{n}_{S_\epsilon} = \left(\epsilon^2 \cos\theta \sin^2\varphi, \frac{\epsilon^2}{2} \sin\theta \sin^2\varphi, \frac{\epsilon^2}{2} \cos\varphi \sin\varphi\right),$$

de esta forma

$$\iint_{S_\epsilon} \vec{F} \cdot \hat{n}_{S_\epsilon} \, d\sigma = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(e^{\epsilon \sin\theta \sin\varphi}, -\frac{1}{2} \cos\theta \sin\varphi \cos\varphi, \frac{1}{2} \sin\theta \cos\theta \sin^2\varphi\right) \cdot \vec{n}_{S_\epsilon} d\theta d\varphi,$$

reemplazando el vector normal y observando que por simetría muchos términos integran cero, se tiene que

$$\begin{aligned}
\iint_{S_\epsilon} \vec{F} \cdot \hat{n}_{S_\epsilon} \, d\sigma &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(e^{\epsilon \sin\theta \sin\varphi}, -\frac{1}{2} \cos\theta \sin\varphi \cos\varphi, \frac{1}{2} \sin\theta \cos\theta \sin^2\varphi\right) \cdot \vec{n}_{S_\epsilon} d\theta d\varphi \\
&= \epsilon^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{\epsilon \sin\theta \sin\varphi} \cos\theta \sin^2\varphi d\theta d\varphi \\
&= \epsilon \int_0^\pi e^{\epsilon \sin\theta \sin\varphi} \sin\varphi \Big|_0^{2\pi} d\varphi \\
&= 0
\end{aligned}$$

luego

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}_S \, d\sigma = 0$$