INF221 – Algorimtos y Complejidad

Clase #22
Métodos de Ordenamiento III

Aldo Berrios Valenzuela

26 de octubre de 2016

1. QuickSort

Idea:

`/* Dibujo */`

Supuestos:

- Elementos distintos.
- Todas las permutaciones igualmente probables.
- Medidas de costos son comparaciones entre elementos.
- Dado lo anterior, particionar compara cada elemento con el pivote. Esto es, $n-1$ comparaciones.
- Partición depende del pivote. Obtener *promedio*.
- Dado el pivote, una vez particionado quedan "en desorden" a cada lado. `/* consideremos los peores casos: no ordenamos casi nada */`

`/* dibujo */`

Sea $C(n)$: el número promedio de comparaciones al ordenar n elementos. Luego, el pivote puede ser cualquiera de los elementos $[1, \ldots, n]$, todos son igualmente probables:

$$C(n) = n - 1 + \frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} (C(k-1) + C(n-k-1)), \qquad C(0) = 0 \tag{1.1}$$

Hacemos un ajuste con los índices `/* el C de la izquierda va en subida y el de la derecha va en bajada (ambos dentro de la sumatoria) */`:

$$\begin{aligned} nC(n) &= n(n-1) + 2 \sum_{0 \leq k \leq n-1} C(k) \\ (n+1)C(n+1) &= (n+1)n + 2 \sum_{0 \leq k \leq n} C(k) \end{aligned}$$

Sea:

$$C(z) = \sum_{n \geq 0} C(n) z^n$$

Por propiedades de funciones generatrices ordinarias:

$$(zD+1)\frac{C(z) - C(0)}{z} = \sum_{n \geq 0} n(n+1) z^n + 2\frac{C(z)}{1-z}$$

Resolvemos la serie de la ecuación anterior:

$$\sum_{n\geq 0} n(n+1)z^n = zD(zD+1)\frac{1}{1-z}$$

Efectuando las operaciones:

$$C'(z) = \frac{2C(z)}{1-z} + \frac{2z}{(1-z)^3}, \qquad C(0) = C'(0) = 0 \tag{1.2}$$

Finalmente, la solución de la función generatriz es:

$$C(z) = -2\cdot\frac{\ln(1-z)}{(1-z)^2} - \frac{2z}{(1-z)^3} \tag{1.3}$$

Coeficientes son, por inspección:

$$C(n) = 2\sum_{1\leq k\leq n} H_n - 2\binom{n}{1}$$

Buceando en el apunte de fundamentos:

$$\sum_{1\leq k\leq n} H_n = (n+1)(H_{n+1}-1)$$

(vía G.F, o sumas por partes / suma de Abel)

Finalmente:

$$C(n) = 2(n+1)H_n - 4n \tag{1.4}$$

Como:

$$H_n = \ln(n) + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$C(n) = 2n\ln(n) + O(n)$$

/* Caso promedio de QuickSort es $n\log n$ */

1.1. Consideraciones prácticas

- Mediana de 3.
- Cortar antes, terminar con inserción $\rightsquigarrow \pm$ 10 a 30.
- Conviene pasar sobre elementos $= p$ (si no, terminamos con el pivote en un extremo si son todos iguales ...)
- "Fat partitioning":

  /* dibujo: juntamos todos los elementos que sean iguales al pivote en lugar de usar un único elemento. */

  Dutch national Hag.