Contenidos

- Transformaciones Lineales.

1. Problemas Propuestos

1. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal definida por
$$T(ax^2 + bx + c) \;=\; (a+b, a+c, b-c)$$
   (a) Demuestre que T es lineal.
   (b) Determine una base para $\text{Ker}(T)$ y una base para $\text{Im}(T)$.
   (c) Determine la matriz asociada a T respecto a las bases canónicas.

2. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por
$$T(a, b, c, d) = (a, a+b, a+b+c, a+b+c+d)$$
Considere
$$\mathcal{B}_1 = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$$
y
$$\mathcal{B}_2 = \{(1,1,1,1),(0,2,2,2),(0,0,3,3),(0,0,0,4)\}$$
dos bases de $\mathbb{R}^4$. Encuentre $[T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ y $[T^{-1}]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$ en caso de que exista la inversa.

3. Sea $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Sean $T, L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que $T(1,1,1) = (1,-3,3)$, $T(1,1,0) = (2,-3,2)$, $T(1,0,0) = (-1,-1,2)$ y
$$[L]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$
   (a) Determine T explícitamente.
   (b) Determine $[T \circ L]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$
   (c) ¿Qué relación existe entre T y L?
   (d) Determinar $\text{Ker}(T)$ e $\text{Im}(L)$.

4. Sea $A : \mathbb{P}_2[x] \to \mathbb{P}_2[x]$ una aplicación lineal definida por:
$$A(p(x)) = p(x) - \frac{p(x) - p(0)}{x}.$$
   (a) Calcule la matriz de esta aplicación lineal , desde la base $V = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ a la base $W = \{1, 1-x, 1+2x+x^2\}$.
   (b) Calcule la matriz de la aplicación A, desde la base W a la base V.

5. Sean $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ y $T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ tal que $T(A) = BA$. Determine $\dim \text{Im}(T)$. Obtenga $T \circ T$.

6. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por
$$T(x, y, z) = (x+z, y+3z, x+y+\alpha z)$$
con $\alpha \in \mathbb{R}$:
   (a) Determine el valor de la constante α para que $\dim \text{Ker}(T) = 1$ y en este caso Calcule $\text{Ker}(T)$.
   (b) Para el valor anterior de α calcule $\text{Im}(T)$.

7. En los siguientes problemas, determine la matriz de la aplicación lineal dada con respecto a la base canónica $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ correspondiente.
   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que gira puntos en $\pi/4$ radianes en sentido horario.
   (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que proyecta cada punto (x, y, z) en el plano $x = 0$.
   (c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una reflexión en la recta $y = x$, seguida de una reflexión en el eje x.
   (d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ refleja puntos respecto al eje y para luego girar puntos en $\pi/2$ radianes en el sentido antihorario.

8. Sea $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por:

$$T\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \big(x + y + z + w, x - y + w, z + w\big)$$

   (a) Calcule núcleo e imagen de T. Indique, además, la nulidad y rango de T.
   (b) ¿$(1, -2, -1) \in \operatorname{Im} T$? Justifique.

9. Considere $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ la transformación lineal definida por:

$$T\big(p(x)\big) = p''(x) + p'(x)$$

   Si las bases de $\mathbb{R}_3[x]$ y $\mathbb{R}_2[x]$ son, respectivamente,

$$\mathcal{B} = \big\{1, 1 + 2x, 3x + x^2, x^3\big\}$$

   y:

$$\mathcal{D} = \big\{1, x, x + x^2\big\}$$

   Calcule la matriz asociada $\big[T\big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}$ a la transformación T.

10. Sean V y W los espacios generados por:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{R})$$

   y:

$$\mathcal{D} = \big\{1 + x - x^3,\ x^2 + x^3, 1 - x^2\big\} \subseteq \mathbb{R}_3[x]$$

   respectivamente. Considere $T : V \to W$ la transformación lineal tal que:

$$\big[T\big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   Calcule el núcleo, la imagen de T y sus bases respectivas. ¿Es T un isomorfismo? Justifique.

2. Problemas Resueltos

1. Sean $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ tal que $T(A) = BA - AB$.

   i) ¿Es T una transformación lineal?

   ii) Si (i) es verdadero. ¿Cuál es la dimensión de $\mathrm{Im}(T)$?

   Solución.

   i) Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $A, C \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, entonces basta probar que

   $$\begin{aligned} T(\alpha A + \beta C) &= B(\alpha A + \beta C) - (\alpha A + \beta C)B \\ &= \alpha BA + \beta BC - \alpha AB - \beta CB \\ &= \alpha(BA - AB) + \beta(BC - CB) = \alpha T(A) + \beta T(C), \end{aligned}$$

   y luego la transformación es lineal.

   ii) Usamos el teorema de la dimensión y primero determinamos $\ker(T)$. Es decir, buscamos las matrices $A \in M_{2\times 2}$ tales que $T(A) = 0_{M_{2\times 2}}$ o bien, dada la definición, las matrices que conmutan con B. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces

   $$\begin{aligned} AB &= BA \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

   que son iguales si $a = d, b = c$. Por lo tanto

   $$\ker(T) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

   que tiene dimensión 2. Por el teorema de la dimensión sigue que $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}(T) = 2$.

2. Sea $T : \mathbb{P}_2(x) \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(p(x)) = (p'(1), p''(x) - p'(0), p(0) + p''(0))$. Considere bases $\mathcal{B}_1 = \{1, x-1, x^2 + x\}$ y $B_2 = \{(0,0,1), (1,-1,0), (1,1,1)\}$ de $\mathbb{P}_2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente

   (a) Determine la dimensión de $\mathrm{Im}\, T$.

   (b) Si T es invertible. Determine la matriz asociada a la inversa de T desde la base $\mathcal{B}_2$ a la base $\mathcal{B}_1$.

   Solución. Sea $p(x) = ax^2 + bx + c$, entonces $p'(x) = 2ax + b$ y $p''(x) = 2a$. De esta forma se tiene que $T(p(x)) = (2a + b, 2a - b, 2a + c)$.

   (a) Calculamos $\ker T = \{p(x) \in \mathbb{P}_2 | T(p) = (0,0,0)\}$. Es claro que

   $$\begin{aligned} 2a + b &= 0 \\ 2a - b &= 0 \\ 2a + c &= 0. \end{aligned}$$

   De donde $a = b = c = 0$ y luego la dimensión del kernel de T es cero. Por el Teorema de la dimensión entonces se tiene que $\dim \mathrm{Im}\, T = 3$.

   (b) Calculamos $[T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$.

   $$\begin{aligned} T(1) &= (0,0,1) \\ T(x-1) &= T(x) - T(1) = -1(0,0,1) + (1,-1,0) \\ T(x^2 + x) &= T(x^2) + T(x) = 1(1,-1,0) + 2(1,1,1). \end{aligned}$$

Y entonces la matriz asociada es

$$[T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ,$$

que es diagonal superior. Se tiene entonces que $[T^{-1}]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$ posee la estructura

$$[T^{-1}]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & u & v \\ 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad .$$

Puesto que $[T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} \cdot [T^{-1}]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = I$, sigue que $u = 1, v = w = -1/2$.

3. Sean U y V los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ generados, respectivamente, por:

$$\mathcal{B} = \big\{(-1,2,1);\ (1,0,-1)\big\}$$

y:

$$\mathcal{D} = \big\{(1,0,1,0);\ (1,1,0,0)\big\}$$

Considere la transformación lineal $T : U \to V$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Calcule el núcleo y la imagen de T.

Solución.

Se deja como ejercicio probar que tanto $\mathcal{B}$ como $\mathcal{D}$ son conjuntos linealmente independientes y puesto que sus cardinalidades son ambas iguales a 2, se tiene que $\dim U = \dim V = 2$. Este comentario nos permite aplicar el teorema de la dimensión como sigue.

Para determinar $\ker T$ calculamos los vectores coordenadas $\boldsymbol{u} = (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tales que $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$. En efecto

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \alpha = 2\beta,$$

y las soluciones son generadas por $\boldsymbol{u} = (2,1)$. Ahora bien, esto entrega las coordenadas en $\mathcal{B}$ de $\ker T$ y entonces

$$\ker T = \langle 2(-1,2,1) + 1(1,0,-1)\rangle = \langle(-1,4,1)\rangle.$$

Puesto que $\dim\ker T = 1$, por el teorema de la dimensión sigue que $\dim \operatorname{Im} T = 1$. Geométricamente, puesto que V posee dimensión 2, se tiene que es un plano por el origen en $\mathbb{R}^4$ y entonces $\operatorname{Im} T$ es una recta por el origen de $\mathbb{R}^4$. Para determinar explícitamente a $\operatorname{Im} T$, calculamos la imagen de $(-1,2,1)$, que posee como vector de coordenadas a $(1,0)$ y entonces

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

y esto nos entrega las coordenadas en V que son $-1(1,0,1,0) + 2(1,1,0,0) = (1,2,-1,0)$. Luego

$$\operatorname{Im} T = \langle(1,2,1,0)\rangle.$$

Note que si repite lo anterior pero esta vez con el vector $(1,0,-1)$ que posee coordenadas $(0,1)$ obtiene el vector $(-2,-4,2,0) = -2(1,2,-1,0)$, que pertenece al espacio generado por $\operatorname{Im} T$.