Departamento de Informática
Universidad Técnica Federico Santa María

Análisis de Sensibilidad

v. 1.0.1

Renata Mella
renata.mella.12@sansano.usm.cl

September 4, 2016

Contenido

- Un modelo matemático es una representación aproximada de la realidad, por lo que los parámetros tienen cierto grado de incertidumbre.

- Un modelo matemático es una representación aproximada de la realidad, por lo que los parámetros tienen cierto grado de incertidumbre.
- Las variaciones pueden corresponder a cambios en el proceso o puede aparecer información nueva. Es conveniente cuantificar las incidencias de estas variaciones en los parámetros.

- Un modelo matemático es una representación aproximada de la realidad, por lo que los parámetros tienen cierto grado de incertidumbre.
- Las variaciones pueden corresponder a cambios en el proceso o puede aparecer información nueva. Es conveniente cuantificar las incidencias de estas variaciones en los parámetros.
- La idea del análisis de sensibilidad es determinar los rangos en los que pueden variar los parámetros para que se mantenga la misma solución óptima (base y valor similar en la función objetivo).

- Un modelo matemático es una representación aproximada de la realidad, por lo que los parámetros tienen cierto grado de incertidumbre.
- Las variaciones pueden corresponder a cambios en el proceso o puede aparecer información nueva. Es conveniente cuantificar las incidencias de estas variaciones en los parámetros.
- La idea del análisis de sensibilidad es determinar los rangos en los que pueden variar los parámetros para que se mantenga la misma solución óptima (base y valor similar en la función objetivo).
- Debido a la dificultad de analizar cambios simultáneos en parámetros es usual reducir este anáilisis a variaciones individuales de los parámetros.

Dentro del análisis de sensibilidad observaremos cuatro eventos posibles dentro de un modelo:

- Cambio en el coeficiente de algunas de las variables en la función objetivo.
- Cambio en el coeficiente del lado derecho de algunas restricciones.
- Adición de nuevas restricciones a un modelo.
- Adición de nuevas variables a un modelo.

Dentro del análisis de sensibilidad observaremos cuatro eventos posibles dentro de un modelo:

- Cambio en el coeficiente de algunas de las variables en la función objetivo.
- Cambio en el coeficiente del lado derecho de algunas restricciones.
- Adición de nuevas restricciones a un modelo.
- Adición de nuevas variables a un modelo.

Dentro de los 4 eventos anteriores analizaremos lo que sucede con:

- Región factible.
- Naturaleza de una restricción.
- Factibilidad de la solución obtenida.
- Optimalidad de la solución.

Condiciones

La idea es analizar los precios sombra $(c_j - z_j)$

- No pueden afectar la forma de la región factible.

Condiciones

La idea es analizar los precios sombra $(c_j - z_j)$

- No pueden afectar la forma de la región factible.
- Puede cambiar la naturaleza de una restricción (limitante o no limitante).

Condiciones

La idea es analizar los precios sombra $(c_j - z_j)$

- No pueden afectar la forma de la región factible.
- Puede cambiar la naturaleza de una restricción (limitante o no limitante).
- No pueden afectar la factibilidad de la solución obtenida.

Condiciones

La idea es analizar los precios sombra $(c_j - z_j)$

- No pueden afectar la forma de la región factible.
- Puede cambiar la naturaleza de una restricción (limitante o no limitante).
- No pueden afectar la factibilidad de la solución obtenida.
- Puede verse afectada la optimalidad de la solución.

Condiciones

La idea es analizar los precios sombra $(c_j - z_j)$

- No pueden afectar la forma de la región factible.
- Puede cambiar la naturaleza de una restricción (limitante o no limitante).
- No pueden afectar la factibilidad de la solución obtenida.
- Puede verse afectada la optimalidad de la solución.

Si la variable es NO BÁSICA

- El coeficiente de las variables no-basales NO TIENE INFLUENCIA en ell valor de la solución óptima dado que la variable tiene valor cero.
- La solución óptima se ve afectada cuando la variable pasa de ser no-basal a basal (es decir, pasa a tener valor >0).

Maximización

- Una variable va a ingresar a la base cuando $c'_j - z_j > 0$, donde c'_j es el nuevo coeficiente de la variable.
- Si $c'_j - z_j < 0$, no afecta a la solución óptima.

Ejemplo: $c_j - z_j = -5$
Para mantener la solución óptima, se tiene que cumplir que:
$c'_j - z_j = -5 + \delta < 0 \rightarrow \delta < 5$

- Cualquier número menor a 5 mantiene la base y, por ende, la solución óptima.
- Exactamente 5, genera un óptimo alternativo.
- Mayor a 5, cambia el óptimo y debemos realizar más iteraciones.

Minimización

- Una variable va a ingresar a la base cuando $c'_j - z_j < 0$, donde c'_j es el nuevo coeficiente de la variable.
- Si $c'_j - z_j > 0$, no afecta a la solución óptima.

Ejemplo: $c_j - z_j = 5$
Para mantener la solución óptima, se tiene que cumplir que:
$c'_j - z_j = 5 + \delta > 0 \rightarrow \delta > -5$

- Cualquier número mayor a -5 mantiene la base y, por ende, la solución óptima.
- Exactamente -5, genera un óptimo alternativo.
- Menor a -5, cambia el óptimo y debemos realizar más iteraciones.

Si la variable es BÁSICA

Los cambios en estos coeficientes tienen un efecto directo en el óptimo puesto que las variables son parte de la solución.
Existen los siguientes casos:

- La base óptima se mantiene pero el valor de la solución cambia.
- Se genera un desplazamiento a otro vértice, donde la variable permanece aumentando su valor a costa de la disminución del valor de alguna otra variable.
- Se genera un desplazamiento a otro vértice; la variable sale de la base permitiendo el ingreso de una nueva variable.

Maximización

Se mantiene la base de la solución si $c_j - z_j < 0$ (óptimo aumenta su valor).

Maximización

Se mantiene la base de la solución si $c_j - z_j < 0$ (óptimo aumenta su valor).

Minimización

Se mantiene la base de la solución si $c_j - z_j > 0$ (óptimo disminuye su valor).

Ejemplo:
Tableau Final (Maximización)

		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
Base	c_j	$60+\delta$	30	20	0	0	0	b_j
s_1	0	0	-2	0	1	2	-8	24
x_3	20	0	-2	1	0	2	-4	8
x_1	$60+\delta$	1	1,25	0	0	-0,5	1,5	2
	z_j	$60+\delta$	$35+1,25\delta$	20	0	$10-0,5\delta$	$10+1,5\delta$	280
	c_j-z_j	0	$-5-1,25\delta$	0	0	$-10+0,5\delta$	$-10-1,5\delta$	

Revisamos que cada uno de los precios sombra sean menor o igual a cero (para mantener el óptimo).

$$-5 - 1,25\delta \leq 0 \rightarrow \delta \geq -\frac{5}{1,25} = -4$$

$$-10 + 0,5\delta \leq 0 \rightarrow \delta \leq \frac{10}{0,5} = 20$$

$$-10 - 1,5\delta \leq 0 \rightarrow \delta \geq -\frac{10}{1,5} = -\frac{30}{3}$$

Por lo tanto, el rango de optimabilidad es: $-4 \leq \delta \leq 20$
El nuevo valor de la función objetivo es: $z_{nueva} = z_{actual} + x_1 \cdot \delta$

Posibles Eventos

Ocurren cambios en el valor de alguno de los elementos de la columna b_j

- Pueden afectar la forma de la región factible.

Posibles Eventos

Ocurren cambios en el valor de alguno de los elementos de la columna b_j

- Pueden afectar la forma de la región factible.
- Puede cambiar la naturaleza de una restricción (limitante, no limitante o redundante).

Posibles Eventos

Ocurren cambios en el valor de alguno de los elementos de la columna b_j

- Pueden afectar la forma de la región factible.
- Puede cambiar la naturaleza de una restricción (limitante, no limitante o redundante).
- Pueden afectar la factibilidad de la solución obtenida.

Posibles Eventos

Ocurren cambios en el valor de alguno de los elementos de la columna b_j

- Pueden afectar la forma de la región factible.
- Puede cambiar la naturaleza de una restricción (limitante, no limitante o redundante).
- Pueden afectar la factibilidad de la solución obtenida.
- Puede verse afectada la optimalidad de la solución.

La restricción está activa

- Si el lado izquierdo y derecho de la desigualdad son iguales cuando el valor óptimo de las variables es substituido en las expresiones NO ESTANDARIZADAS.
- Si en una restricción del tipo $\leq$ o $\geq$, su variable de holgura o exceso respectivamente son iguales a 0 en la base de la solución óptima.

La restricción no está activa

- Si el lado izquierdo y derecho de la desigualdad NO son iguales cuando el valor óptimo de las variables es substituido en las expresiones NO ESTANDARIZADAS.
- Si en una restricción del tipo $\leq$ o $\geq$, su variable de holgura o exceso respectivamente se encuentran presentes (diferentes de 0) en la base de la solución óptima.

Si la restricción NO está activa

- Existe un costo de oportunidad nulo, es decir, no hay costo por no contar con una unidad adicional
- Si se trata de una variable de HOLGURA $\leq$ se puede DISMINUIR el coeficiente que acompaña a la restricción hasta llevarla a su límite sin alterar la solución óptima, porque se quitan recursos que no se están ocupando.
- Si se trata de una variable de EXCESO $\geq$ se puede AUMENTAR el coeficiente que acompaña a la restricción hasta llevarla a su límite sin alterar la solución óptima.

$$\text{Max } z = 25x_1 + 25x_2 + 16x_3$$
$$(1)\ 4x_2 + 8x_3 + s_1 = 1600$$
$$(2)\ 10x_1 + 2x_2 + a_2 = 2100$$
$$(3)\ x_3 + s_3 = 300$$
$$(4)\ x_2 + s_4 = 250$$

Solución óptima:

$$x_3 = 75$$
$$x_1 = 160$$
$$s_3 = 225$$
$$x_2 = 250$$
$$s_1, a_2, s_4 = 0$$

Las restricciones 1, 2 y 4 están activas, mientras que la restricción 3 no es activa.

En el ejemplo anterior:

- Si s_3 se disminuye hasta en <225, no se altera el óptimo.

En el ejemplo anterior:

- Si s_3 se disminuye hasta en <225, no se altera el óptimo.
- Si s_3 en 225, el tableau se degenera.

Análisis de Sensibilidad
Cambios en el coeficiente del lado derecho de una restricción

En el ejemplo anterior:

- Si s_3 se disminuye hasta en <225, no se altera el óptimo.
- Si s_3 en 225, el tableau se degenera.
- Si s_3 disminuye más de 225, el óptimo cambia.

Si la restricción está activa

- Existe un costo de oportunidad no nulo.
- Si se trata de una variable de HOLGURA $\leq$, el precio sombra representa lo que se deja de ganar por no contar con una unidad adicional a la derecha de la restricción.
- **Holgura:** Nueva Solución = Solución Actual + $\triangle b_j\ a_{ij}$, donde a_{ij} es el coeficiente de la variable de holgura s_j en cada restricción.
- **Exceso:** Nueva Solución Solución Actual - $\triangle b_j\ a_{ij}$, donde a_{ij} es el coeficiente de la variable de exceso e_j en cada restricción.
- **Artificial:** Nueva Solución = Solución Actual + $\triangle b_j\ a_{ij}$, donde a_{ij} es el coeficiente de la variable de artificial a_j en cada restricción.
- El valor de las variables de la nueva solución debe ser positivo por la naturaleza de las variables. De ésta manera encontramos el rango.

Posibles Eventos

- Pueden afectar la forma de la región factible.

Posibles Eventos

- Pueden afectar la forma de la región factible.
- Puede cambiar la naturaleza de una restricción (limitante, no limitante o redundante).

Posibles Eventos

- Pueden afectar la forma de la región factible.
- Puede cambiar la naturaleza de una restricción (limitante, no limitante o redundante).
- Pueden afectar la factibilidad de la solución obtenida.

Posibles Eventos

- Pueden afectar la forma de la región factible.
- Puede cambiar la naturaleza de una restricción (limitante, no limitante o redundante).
- Pueden afectar la factibilidad de la solución obtenida.
- Puede verse afectada la optimalidad de la solución.

Pueden ocurrir dos casos:

- **La solución óptima actual satisface la nueva restricción** La restricción no modifica la región factible o al menos no excluye al punto extremo óptimo actual. Hay que tener claro que la incorporación de una nueva restricción no puede generar una mejora de la función objetivo, en el mejor de los casos solo mantiene el óptimo. Se calcula el valor de las nuevas variables artificiales.
- **La solución óptima actual NO satisface la nueva restricción** Si la restricción no satisface la solución óptima, se debe buscar un Tableau cuyas bases si acepten la nueva restricción y continuar las iteraciones desde allí. En el peor de los casos se debe comenzar desde el Tableau inicial.

Posibles Eventos

- Pueden afectar la forma de la región factible.

Posibles Eventos

- Pueden afectar la forma de la región factible.
- Puede cambiar la naturaleza de una restricción (limitante, no limitante).

Posibles Eventos

- Pueden afectar la forma de la región factible.
- Puede cambiar la naturaleza de una restricción (limitante, no limitante).
- Pueden afectar la factibilidad de la solución obtenida.

Posibles Eventos

- Pueden afectar la forma de la región factible.
- Puede cambiar la naturaleza de una restricción (limitante, no limitante).
- Pueden afectar la factibilidad de la solución obtenida.
- Puede verse afectada la optimalidad de la solución.

- Cuando se agrega una nueva variable x_k, esta incluye un coeficiente c_j en la función objetivo y coeficientes a_{ij} para toda restricción i del problema.
- Como toda variable, incluye una ganancia o aporte a la función objetivo y un costo de agregarla.
- Se estudia la diferencia entre el beneficio entregado y el costo por los recursos empleados (por cada restricción):

$$\triangle z = c_k - \sum_{j=1} a_{ik} \cdot (c_j - z_j)$$

Considere el siguiente modelo de programación lineal:

$$\text{Max } z = x_1 + \frac{5}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 10 \\ x_3 + x_4 &\geq 30 \\ x_4 + 4x_5 - x_2 &\leq 10 \\ x_4 - x_3 + x_5 &\leq 60 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\leq 100 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

y el tableau final:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	e_2	a_2	s_3	s_4	s_5	
Base	c_j	1	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$-M$	0	0	0	b_j
x_2	$\frac{5}{3}$	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	10
x_3	$-\frac{1}{3}$	-1	0	1	0	-4	-1	-1	1	-1	0	0	10
x_4	$\frac{2}{3}$	1	0	0	1	4	1	0	0	1	0	0	20
s_4	0	-2	0	0	0	-7	-2	-1	1	-2	1	0	50
s_5	0	0	0	0	0	1	-1	1	-1	0	0	1	60
	z_j	$\frac{8}{3}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	4	$\frac{8}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	0	$\frac{80}{3}$
	$c_j - z_j$	$-\frac{5}{3}$	0	0	0	$-\frac{11}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-M+\frac{1}{3}$	-1	0	0	

- Considere que el coeficiente de x_1 aumenta en $\frac{1}{2}$, ¿Cambia esto la base?

- Considere que el coeficiente de x_1 aumenta en $\frac{1}{2}$, ¿Cambia esto la base?
- ¿Qué valores debería tomar el coeficiente de x_4 para que salga de la base?

Ejercicios
Ejemplo

- Considere que el coeficiente de x_1 aumenta en $\frac{1}{2}$, ¿Cambia esto la base?
- ¿Qué valores debería tomar el coeficiente de x_4 para que salga de la base?
- El valor de la tercera restricción pasa a ser 15, ¿Cómo cambia esto la solución óptima?

- Considere que el coeficiente de x_1 aumenta en $\frac{1}{2}$, ¿Cambia esto la base?
- ¿Qué valores debería tomar el coeficiente de x_4 para que salga de la base?
- El valor de la tercera restricción pasa a ser 15, ¿Cómo cambia esto la solución óptima?
- ¿Como varían la base si $b_4' = \frac{b_4}{2}$? ¿Cuáles son los nuevos valores?

- Considere que el coeficiente de x_1 aumenta en $\frac{1}{2}$, ¿Cambia esto la base?
- ¿Qué valores debería tomar el coeficiente de x_4 para que salga de la base?
- El valor de la tercera restricción pasa a ser 15, ¿Cómo cambia esto la solución óptima?
- ¿Como varían la base si $b_4' = \frac{b_4}{2}$? ¿Cuáles son los nuevos valores?
- Se define una resricción $x_1 + x_4 + 4x_5 \leq 20$ y otra $x_3 - x_5 + x_4 \geq \frac{67}{2}$. Determine qué efecto tiene cada una en la base del problema.

- Considere que el coeficiente de x_1 aumenta en $\frac{1}{2}$, ¿Cambia esto la base?
- ¿Qué valores debería tomar el coeficiente de x_4 para que salga de la base?
- El valor de la tercera restricción pasa a ser 15, ¿Cómo cambia esto la solución óptima?
- ¿Como varían la base si $b_4' = \frac{b_4}{2}$? ¿Cuáles son los nuevos valores?
- Se define una resricción $x_1 + x_4 + 4x_5 \leq 20$ y otra $x_3 - x_5 + x_4 \geq \frac{67}{2}$. Determine qué efecto tiene cada una en la base del problema.
- Sea y una nueva variable tal que $c_y = \frac{1}{3}$, $a_{1y} = -1$, $a_{4y} = 1$ y $a_{5y} = -2$. Determine si esta variable puede ser parte de la solución óptima.

- Considere que el coeficiente de x_1 aumenta en $\frac{1}{2}$, ¿Cambia esto la base?
- ¿Qué valores debería tomar el coeficiente de x_4 para que salga de la base?
- El valor de la tercera restricción pasa a ser 15, ¿Cómo cambia esto la solución óptima?
- ¿Como varían la base si $b_4' = \frac{b_4}{2}$? ¿Cuáles son los nuevos valores?
- Se define una resricción $x_1 + x_4 + 4x_5 \leq 20$ y otra $x_3 - x_5 + x_4 \geq \frac{67}{2}$. Determine qué efecto tiene cada una en la base del problema.
- Sea y una nueva variable tal que $c_y = \frac{1}{3}$, $a_{1y} = -1$, $a_{4y} = 1$ y $a_{5y} = -2$. Determine si esta variable puede ser parte de la solución óptima.
- ¿Cómo afecta la modificación de un coeficiente a_{ij} la naturaleza de alguna restricción?

- Considere que el coeficiente de x_1 aumenta en $\frac{1}{2}$, ¿Cambia esto la base?

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	e_2	a_2	s_3	s_4	s_5	
Base	c_j	$1+\delta$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$-M$	0	0	0	b_j
x_2	$\frac{5}{3}$	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	10
x_3	$-\frac{1}{3}$	-1	0	1	0	-4	-1	-1	1	-1	0	0	10
x_4	$\frac{2}{3}$	1	0	0	1	4	1	0	0	1	0	0	20
s_4	0	-2	0	0	0	-7	-2	-1	1	-2	1	0	50
s_5	0	0	0	0	0	1	-1	1	-1	0	0	1	60
	z_j	$\frac{8}{3}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	4	$\frac{8}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	0	$\frac{80}{3}$
	$c_j - z_j$	$\delta - \frac{5}{3}$	0	0	0	$-\frac{11}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-M+\frac{1}{3}$	-1	0	0	

Para que la base se mantenga, debe ocurrir que $c_1 - z_1 = \delta - \frac{5}{3} \leq 0$. Para que eso ocurra, $\delta \leq \frac{5}{3}$. Como $\delta = \frac{1}{2} \leq \frac{5}{3}$, el aumento no afecta la base.

- ¿Qué valores debería tomar el coeficiente de x_4 para que salga de la base?

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	e_2	a_2	s_3	s_4	s_5	
Base	c_j	1	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}+\delta$	$\frac{1}{3}$	0	0	$-M$	0	0	0	b_j
x_2	$\frac{5}{3}$	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	10
x_3	$-\frac{1}{3}$	-1	0	1	0	-4	-1	-1	1	-1	0	0	10
x_4	$\frac{2}{3}+\delta$	1	0	0	1	4	1	0	0	1	0	0	20
s_4	0	-2	0	0	0	-7	-2	-1	1	-2	1	0	50
s_5	0	0	0	0	0	1	-1	1	-1	0	0	1	60
	z_j	$\frac{8}{3}+\delta$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$4+\delta$	$\frac{8}{3}+\delta$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$1+\delta$	0	0	$\frac{80}{3}$
	$c_j - z_j$	$-\frac{5}{3}-\delta$	0	0	0	$-\frac{11}{3}-4\delta$	$-\frac{8}{3}-\delta$	$-\frac{1}{3}$	$-M+\frac{1}{3}$	$-1-\delta$	0	0	

Tenemos que asegurarnos que los precios sombra sigan siendo negativos.

$$-\frac{5}{3}-\delta \leq 0 \rightarrow \delta \geq -\frac{5}{3}$$
$$-\frac{11}{3}-4\delta \leq 0 \rightarrow \delta \geq -\frac{11}{12}$$
$$-\frac{8}{3}-\delta \leq 0 \rightarrow \delta \geq -\frac{8}{3}$$
$$-1-\delta \leq 0 \rightarrow \delta \geq -1$$

Por lo tanto, $-\frac{11}{12} \leq \delta \infty$; como el coeficiente de x_4 es $\frac{2}{3}$, si disminuímos el coeficiente por debajo de $-\frac{1}{4}$, la variable saldría de la base.
nota: Este ejercicio está en revisión por las dudas surgidas en la ayudantía.

El valor de la tercera restricción pasa a ser 15, ¿Cómo cambia esto la solución óptima?
Como la variable de holgura es cero, la restricción está activa y es necesario hacer el análisis sobre la solución completa:

$$\begin{pmatrix} x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \\ s_4^* \\ s_5^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 20 \\ 50 \\ 60 \end{pmatrix} + \delta b_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \text{-1} \\ 1 \\ \text{-2} \\ 0 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

$$\begin{aligned} 10 - \delta b_3 \geq 0 &\rightarrow \delta b_3 \leq 10 \\ 20 + \delta b_3 \geq 0 &\rightarrow \delta b_3 \geq -20 \\ 50 - 2\delta b_3 \geq 0 &\rightarrow \delta b_3 \leq 25 \end{aligned}$$

$$-20 \leq \delta b_3 \leq 10$$

Por lo tanto, como $\delta b_3 = 5$ la base no cambia, solo afecta los valores de la solución. Considerando este δ, la nueva solución es:

$$\begin{pmatrix} x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \\ s_4^* \\ s_5^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 20 \\ 50 \\ 60 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ \text{-1} \\ 1 \\ \text{-2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 25 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$

¿Como varían la base si $b_4' = \frac{b_4}{2}$? ¿Cuáles son los nuevos valores?
El valor de la variable de holgura de esta restricción es distinto de cero, por lo que la restricción no está activa. Como $s_4 = 50$, se puede disminuir el lado derecho de la ecuación hasta en 50 unidades sin que cambie la base. Como $b_4' = 30$ y $\delta = 60 - 30 = 30 < 50$, la base no se modifica, sino que solamente cambia el valor de s_4.

Se define una resricción $x_1 + x_4 + 4x_5 \leq 20$ y otra $x_3 - x_5 + x_4 \geq \frac{67}{2}$. Determine qué efecto tiene cada una en la base del problema.
$x_1 + x_4 + 4x_5 \leq 20 \rightarrow 0 + 20 + 4 \cdot 0 = 20 \leq 20$
Dado que la solución actual cumple con la restricción, no es necesario modificar la base.
$x_3 - x_5 + x_4 \geq \frac{67}{2} \rightarrow 10 - 0 + 20 = 30 < \frac{67}{2}$
La solución actual no satisface esta restricción, por lo que debemos buscar entre las bases previas hasta encontrar una que cumpla con esta restricción (en el peor de los casos, comenzaremos del principio).

Sea y una nueva variable tal que $c_y = \frac{1}{3}$, $a_{1y} = -1$, $a_{4y} = 1$ y $a_{5y} = -2$. Determine si esta variable puede ser parte de la solución óptima.
El aporte de esta variable es de $\frac{1}{3}$.
El costo de incluir esta variable es de:

$$\sum_i a_{iy} \cdot (c_j - z_j)_{e_i, s_i} = -1 \cdot \frac{8}{3} + 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 0 = \frac{8}{3}$$

Como el costo de incluir la variable es mayor que su aporte, no conviene incluirla en la base. En otras palabras, $y = 0$.

¿Cómo afecta la modificación de un coeficiente a_{ij} la naturaleza de alguna restricción?
Puede suceder que alguna restricción que no está activa, pase a estarlo (y viceversa). También podría pasar que una restricción se vuelva lineal respecto a otras o que cambie su forma.

Considere el siguiente modelo de programación lineal:

$$\text{Min } z = 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeto a:} & \\ x_1 + x_2 &\leq 10 \\ x_3 &\geq 3 \\ x_4 + 4x_5 - x_1 - x_2 &\geq 10 \\ x_4 - x_3 + x_5 &\geq 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\geq 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

y el tableau final:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	e_2	a_2	e_3	a_3	e_4	a_4	e_5	a_5	
Base	c_j	3	5	-1	2	1	0	0	M	0	M	0	M	0	M	b_j
s_1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	10
e_5	0	-1	-1	0	0	0	0	-2	2	0	0	-1	1	1	-1	2
x_5	1	0	0	0	1	1	0	-1	1	0	0	-1	1	0	0	9
e_3	0	1	1	0	3	0	0	-4	4	1	-1	-4	4	0	0	26
x_3	-1	0	0	1	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	3
	z_j	0	0	-1	1	1	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	6
	$c_j - z_j$	3	5	0	1	0	0	0	M	0	M	1	$M-1$	0	M	

- Considere que el coeficiente de x_1 se reduce en 2, ¿Cambia esto la base?

Ejercicios
Propuesto

- Considere que el coeficiente de x_1 se reduce en 2, ¿Cambia esto la base?
- ¿Qué valores debería tomar el coeficiente de x_5 para que salga de la base?

Ejercicios
Propuesto

- Considere que el coeficiente de x_1 se reduce en 2, ¿Cambia esto la base?
- ¿Qué valores debería tomar el coeficiente de x_5 para que salga de la base?
- El valor de la tercera restricción pasa a ser 16, ¿Cómo cambia esto la solución óptima?

- Considere que el coeficiente de x_1 se reduce en 2, ¿Cambia esto la base?
- ¿Qué valores debería tomar el coeficiente de x_5 para que salga de la base?
- El valor de la tercera restricción pasa a ser 16, ¿Cómo cambia esto la solución óptima?
- ¿Como varían la base si $b_2' = 2b_2 + 1$? ¿Cuáles son los nuevos valores?

- Considere que el coeficiente de x_1 se reduce en 2, ¿Cambia esto la base?
- ¿Qué valores debería tomar el coeficiente de x_5 para que salga de la base?
- El valor de la tercera restricción pasa a ser 16, ¿Cómo cambia esto la solución óptima?
- ¿Como varían la base si $b_2' = 2b_2 + 1$? ¿Cuáles son los nuevos valores?
- Se define una resricción $x_3 + 2x_4 + 5x_5 \geq 20$ y otra $x_3 - x_5 + x_4 \geq \frac{44}{7}$. Determine qué efecto tiene cada una en la base del problema.

- Considere que el coeficiente de x_1 se reduce en 2, ¿Cambia esto la base?
- ¿Qué valores debería tomar el coeficiente de x_5 para que salga de la base?
- El valor de la tercera restricción pasa a ser 16, ¿Cómo cambia esto la solución óptima?
- ¿Como varían la base si $b_2' = 2b_2 + 1$? ¿Cuáles son los nuevos valores?
- Se define una resricción $x_3 + 2x_4 + 5x_5 \geq 20$ y otra $x_3 - x_5 + x_4 \geq \frac{44}{7}$. Determine qué efecto tiene cada una en la base del problema.
- Sea y una nueva variable tal que $c_y = 1$. Por requerimiento se agrega $-3y$ en la segunda restricción y $+y$ en la cuarta. Determine si esta variable puede ser parte de la solución óptima.

- Considere que el coeficiente de x_1 se reduce en 2, ¿Cambia esto la base?
- ¿Qué valores debería tomar el coeficiente de x_5 para que salga de la base?
- El valor de la tercera restricción pasa a ser 16, ¿Cómo cambia esto la solución óptima?
- ¿Como varían la base si $b_2' = 2b_2 + 1$? ¿Cuáles son los nuevos valores?
- Se define una resricción $x_3 + 2x_4 + 5x_5 \geq 20$ y otra $x_3 - x_5 + x_4 \geq \frac{44}{7}$. Determine qué efecto tiene cada una en la base del problema.
- Sea y una nueva variable tal que $c_y = 1$. Por requerimiento se agrega $-3y$ en la segunda restricción y $+y$ en la cuarta. Determine si esta variable puede ser parte de la solución óptima.
- ¿Cómo afecta la modificación de un coeficiente a_{ij} la región factible del modelo?

- Considere que el coeficiente de x_1 se reduce en 2, ¿Cambia esto la base?

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	e_2	a_2	e_3	a_3	e_4	a_4	e_5	a_5	
Base	c_j	$3+\delta$	5	-1	2	1	0	0	M	0	M	0	M	0	M	b_j
s_1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	10
e_5	0	-1	-1	0	0	0	0	-2	2	0	0	-1	1	1	-1	2
x_5	1	0	0	0	1	1	0	-1	1	0	0	-1	1	0	0	9
e_3	0	1	1	0	3	0	0	-4	4	1	-1	-4	4	0	0	26
x_3	-1	0	0	1	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	3
	z_j	0	0	-1	1	1	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	6
	$c_j - z_j$	$3+\delta$	5	0	1	0	0	0	M	0	M	1	$M-1$	0	M	

Para que la base se mantenga, debe ocurrir que $c_1 - z_1 = 3 + \delta \geq 0$. Para que eso ocurra, $\delta \geq -3$. Como $\delta = -2 \geq -3$, la reducción no afecta la base.

Ejercicios

Solución Ejercicio Propuesto

- ¿Qué valores debería tomar el coeficiente de x_5 para que salga de la base?

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	e_2	a_2	e_3	a_3	e_4	a_4	e_5	a_5	
Base	c_j	3	5	-1	2	$1+\delta$	0	0	M	0	M	0	M	0	M	b_j
s_1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	10
e_5	0	-1	-1	0	0	0	0	-2	2	0	0	-1	1	1	-1	2
x_5	$1+\delta$	0	0	0	1	1	0	-1	1	0	0	-1	1	0	0	9
e_3	0	1	1	0	3	0	0	-4	4	1	-1	-4	4	0	0	26
x_3	-1	0	0	1	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	3
	z_j	0	0	-1	$1+\delta$	$1+\delta$	0	$-\delta$	δ	0	0	$-1-\delta$	$1+\delta$	0	0	6
	$c_j - z_j$	3	5	0	$1-\delta$	0	0	δ	$M-\delta$	0	M	$1+\delta$	$M-1-\delta$	0	M	

Tenemos que asegurarnos que los precios sombra sigan siendo positivos.

$$
\begin{aligned}
1-\delta \geq 0 &\rightarrow \delta \leq 1 \\
\delta \geq 0 &\rightarrow \delta \geq 0 \\
M-\delta \geq 0 &\rightarrow \delta \leq M \\
1+\delta \geq 0 &\rightarrow \delta \geq -1 \\
M-1-\delta \geq 0 &\rightarrow \delta \leq M-1
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $0 \leq \delta \leq 1$; como el coeficiente de x_5 es 1, si disminuímos el coeficiente por debajo de 1 o encima de 2, la variable saldría de la base.
nota: Este ejercicio está en revisión por las dudas surgidas en la ayudantía.

El valor de la tercera restricción pasa a ser 16, ¿Cómo cambia esto la solución óptima?
El valor de la variable de exceso de esta restricción es distinto de cero, por lo que la restricción no está activa. Como $e_3 = 26$, se puede aumentar el lado derecho de la ecuación hasta en 26 unidades sin que cambie la base. Como $b_3' = 16$ y $\delta = 10 - 16 = -6 > -26$, la base no se modifica, sino que solamente cambia el valor de e_3.

¿Como varían la base si $b_2' = 2b_2 + 1$? ¿Cuáles son los nuevos valores?
Como la variable de exceso es cero, la restricción está activa y es necesario hacer el análisis sobre la solución completa:

$$\begin{pmatrix} s_1^* \\ e_5^* \\ x_5^* \\ e_3^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 9 \\ 26 \\ 3 \end{pmatrix} - \delta b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

$$2 + 2\delta b_2 \geq 0 \rightarrow \delta b_2 \geq -1$$
$$9 + \delta b_2 \geq 0 \rightarrow \delta b_2 \geq -9$$
$$26 + 4\delta b_2 \geq 0 \rightarrow \delta b_2 \geq \frac{26}{4}$$
$$3 + \delta b_2 \geq 0 \rightarrow \delta b_2 \geq -3$$

$$-1 \leq \delta b_2 \leq \infty$$

Por lo tanto, como $\delta b_2 = 4$ la base no cambia, solo afecta los valores de la solución. Considerando este δ, la nueva solución es:

$$\begin{pmatrix} s_1^* \\ e_5^* \\ x_5^* \\ e_3^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 9 \\ 26 \\ 3 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 13 \\ 42 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Se define una resricción $x_3 + 2x_4 + 5x_5 \geq 20$ y otra $x_3 - x_5 + x_4 \geq \frac{44}{7}$. Determine qué efecto tiene cada una en la base del problema.

$x_3 + 2x_4 + 5x_5 \geq 20 \rightarrow 3 + 2 \cdot 0 + 5 \cdot 9 = 48 \geq 20$

Dado que la solución actual cumple con la restricción, no es necesario modificar la base.

$x_3 - x_5 + x_4 \geq \frac{44}{7} \rightarrow 3 - 9 + 0 = -6 < \frac{44}{7}$

La solución actual no satisface esta restricción, por lo que debemos buscar entre las bases previas hasta encontrar una que cumpla con esta restricción (en el peor de los casos, comenzaremos del principio).

Sea y una nueva variable tal que $c_y = 1$. Por requerimiento se agrega $-3y$ en la segunda restricción y $+y$ en la cuarta. Determine si esta variable puede ser parte de la solución óptima.
El aporte de esta variable es de 1.
El costo de incluir esta variable es de:

$$\sum_i a_{iy} \cdot (c_j - z_j)_{e_i, s_i} = -3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$$

Como el costo de incluir la variable es igual que su aporte, en el mejor de los casos se obtiene una solución alternativa.

¿Cómo afecta la modificación de un coeficiente a_{ij} la región factible del modelo?
Cada vez que se genera un cambio en los coeficientes a_{ij} de una restricción, ésta cambia su "gráfico", por lo que la región factible se modifica. Incluso existen casos donde estas modificaciones terminan haciendo dos o más restricciones lineales por lo que se pierde una al determinar la región factible.