Base	c_j	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	b_i
		0	1	11	19	$\frac{3}{2}$	-1	0	200
		1	0	-12	-22	-2	2	0	400
		0	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{-2}{5}$	1	20
z_j									
$c_j - z_j$									

1. Si un estudio indica que la cantidad de horas disponibles en la segunda etapa es de 1,200 en lugar de 1,000, ¿cuánto se estaría dejando de ganar al usar el programa de producción óptimo actual?
2. Considerando un aumento de 100 horas-hombre en una de las etapas del proceso productivo, ¿a qué etapa deberían asignarse para maximizar las ganancias? ¿Cuál sería el nuevo programa de producción óptimo? ¿Cuánto se debería pagar como máximo por estos recursos adicionales?
3. Considerando un aumento de un 30 % en la utilidad de uno de los artículos, ¿en cuál se debería realizar para maximizar las utilidades? ¿Cuál sería el nuevo programa de producción óptimo?

3. Una empresa de construcción propone a su gabinete de análisis financiero un estudio sobre posibles inversiones cuyos costos y rentabilidades, en millones de unidades monetarias, así como sus condicionantes, se describen en la siguiente tabla:

Inversión	Costo	Renta	Condicionante
1	6	18	-
2	5	13	sólo si 1
3	9	25	sólo si 2
4	10	22	obligada si 2
5	8	26	no si 1 ó 3
6	12	31	no si 2 y 4
7	7	10	sólo si 2 y no 3

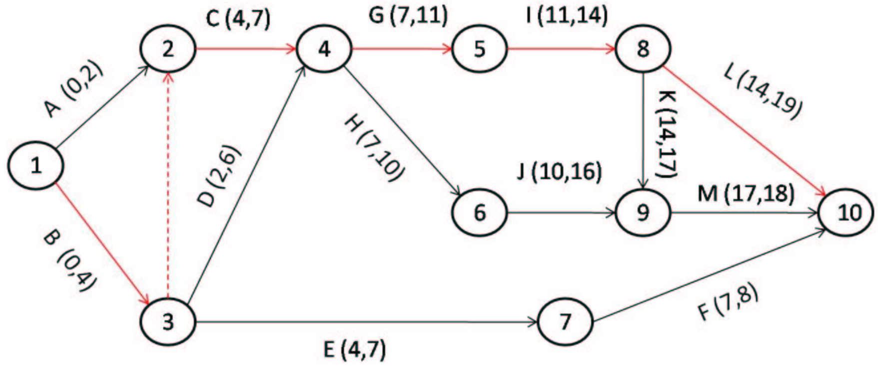
La empresa pretende maximizar la renta total de sus inversiones, con un límite en el costo total de 40 millones de unidades monetarias. Formule un modelo de programación entera que permita resolver este problema. Defina claramente variables, función objetivo y restricciones.

4. Un proyecto está compuesto por actividades cuyas características se presentan en la siguiente tabla:

		Normal	Acelerado	
Actividad	Predecesor	Duración [día]	Duración [día]	Costo [$]
A	-	2	1	120
B	-	4	2	250
C	A, B	3	1	150
D	B	2	1	30
E	B	3	1	90
F	E	1	1	-
G	C, D	4	1	200
H	C, D	3	2	80
I	G	3	2	300
J	H	6	3	400
K	I	3	2	150
L	I	5	3	100
M	J, K	1	1	-

1. ($\frac{1}{3}$) Dibuje la malla del proyecto, la ruta crítica y la duración del proyecto.
2. ($\frac{1}{3}$) Considerando la posibilidad de acelerar las actividades, formule un modelo de programación lineal que permita determinar qué actividades deban ser aceleradas y en cuánto de manera tal de terminar el proyecto dentro de 15 días.
3. ($\frac{1}{3}$) Se quiere acelerar el proyecto en tres días a costo mínimo. ¿Cuáles actividades conviene acelerar y en cuánto? ¿A qué costo? Dibuje como quedaría la nueva malla.

4. **a)** La malla del proyecto es



La ruta crítica es: B - Dummy - C - G - I - L

La duración mínima es de: 19 días.

b) El modelo queda determinado de la siguiente manera:

Variables:

X_i: Tiempo acumulado hasta el instante i. (i = 1..,10)

Y_j: Cantidad de días a disminuir la actividad j. ($j = A...M$)

Función Objetivo:

$$Min \;\; z = 120y_a + 250y_b + 150y_c + 30y_d + 90y_e + 0y_f + 200y_g + 80y_h + 300y_i + 400y_j + 150y_k + 100y_l + 0y_m$$

Restricciones:

$$\begin{aligned}
X_1 &= 0 \\
X_2 &\geq X_1 + 2 - Y_A \\
X_3 &\geq X_1 + 4 - Y_B \\
X_4 &\geq X_2 + 3 - Y_C \\
X_4 &\geq X_3 + 2 - Y_D \\
X_5 &\geq X_4 + 4 - Y_G \\
X_6 &\geq X_4 + 3 - Y_H \\
X_7 &\geq X_3 + 3 - Y_E \\
X_8 &\geq X_5 + 3 - Y_I \\
X_9 &\geq X_6 + 6 - Y_J \\
X_9 &\geq X_8 + 3 - Y_K \\
X_{10} &\geq X_8 + 5 - Y_L \\
X_{10} &\geq X_9 + 1 - Y_M \\
X_{10} &\geq X_7 + 1 - Y_F \\
X_{10} &= 15 \\
Y_A &\leq 1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Y_B &\leq 2\\
Y_C &\leq 2\\
Y_D &\leq 1\\
Y_E &\leq 2\\
Y_F &\leq 0\\
Y_G &\leq 3\\
Y_H &\leq 1\\
Y_I &\leq 1\\
Y_J &\leq 3\\
Y_K &\leq 1\\
Y_L &\leq 2\\
Y_M &\leq 0\\
X_i, Y_j &\geq 0; \forall i, j
\end{aligned}
$$

c) Las opciones a disminuir son las siguientes:

B en 2 días a un costo de 250

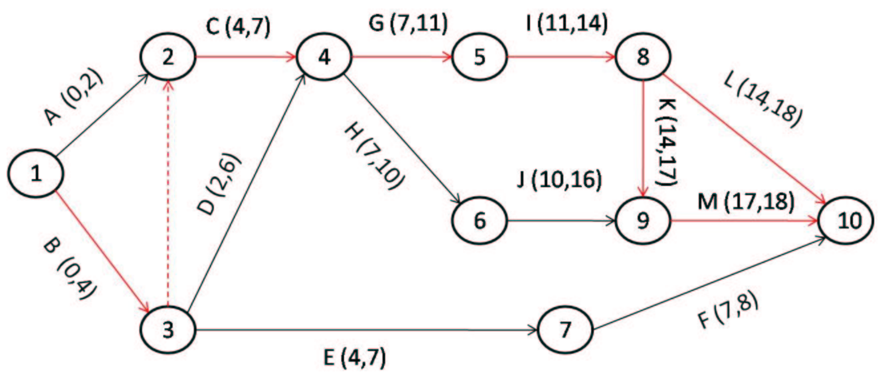
C en 2 día a un costo de 150

G en 3 días a un costo de 200

I en 1 día a un costo de 300

L en 2 días a un costo de 100

Se elige disminuir L en 1 día.



Quedan dos rutas críticas, por lo cual las opciones a disminuir son:

B en 2 días a un costo de 250

C en 2 día a un costo de 150

G en 3 días a un costo de 200

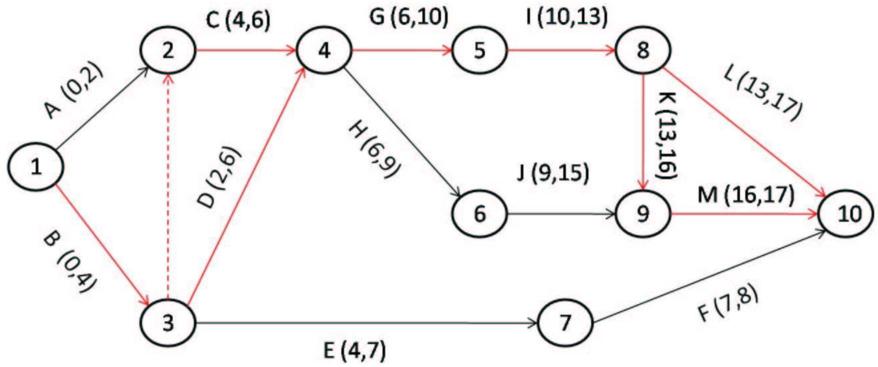
I en 1 día a un costo de 300

L y K en 1 días a un costo de 250

Se elige disminuir C en 1 día:

Quedan 4 rutas críticas, por lo cuales las opciones a disminuir son:

B en 2 días a un costo de 250



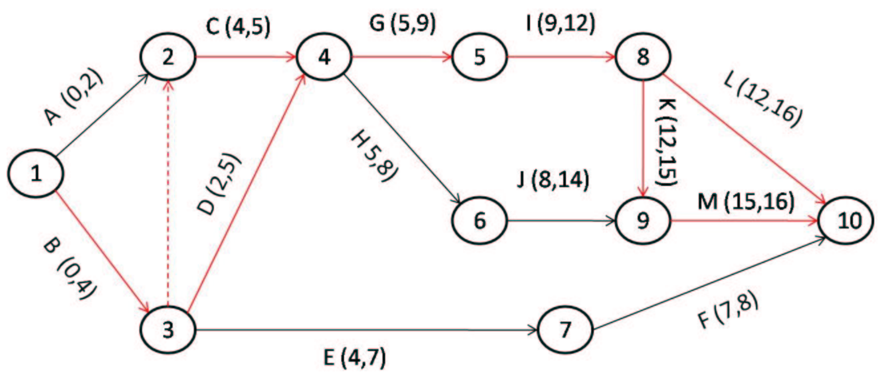
C y D en 1 día a un costo de 180

G en 3 días a un costo de 200

I en 1 día a un costo de 300

L y K en 1 días a un costo de 250

Se elige disminuir C y D en 1 día:



Finalmente el costo total de reducir el proyecto a 16 días es: 100+150+180 = 430

3. En cierta localidad del norte de Chile, existen 5 pueblos en los cuales habitan p_i $(i = 1, \ldots, 5)$ pacientes de alto riesgo. El gobierno de Chile está pensando en la instalación de 3 consultorios para que atiendan a este grupo de alto riesgo, pero cada consultorio sólo puede atender una cantidad máxima de c_j pacientes. Debido a la gravedad de las enfermedades que afectan a estas personas, se realizó un estudio para determinar cuál es la posibilidad de que los pacientes puedan fallecer camino a los consultorios, esta posibilidad tiene un valor de $e1_{ij}$ para los pacientes trasladados desde el pueblo i al consultorio j. Debido a la infraestructura de los consultorios y a que ciertos pacientes necesitan de equipos y médicos especializados, es necesario además construir un hospital a donde puedan ser trasladados los pacientes más graves desde los consultorios. Se ha estimado que un a_j % de los pacientes del consultorio j deban ser trasladados al hospital, y la posibilidad de que dichos pacientes fallezcan en el traslado es $e2_j$ desde el consultorio j al hospital. Por razones de seguridad, la distancia total que une los consultorios con el hospital, no debe ser mayor que la distancia total que une los pueblos con los consultorios. Se le pide a usted que formule un modelo de progamación no lineal que permita ddeterminar la ubicación de cada consultorio y del hospital, además de determinar la cantidad de pacientes que cada consultorio atenderá de manera de minimizar la cantidad de pacientes fallecidos. Defina claramente variables, función objetivo y restricciones.

   Observaciones:

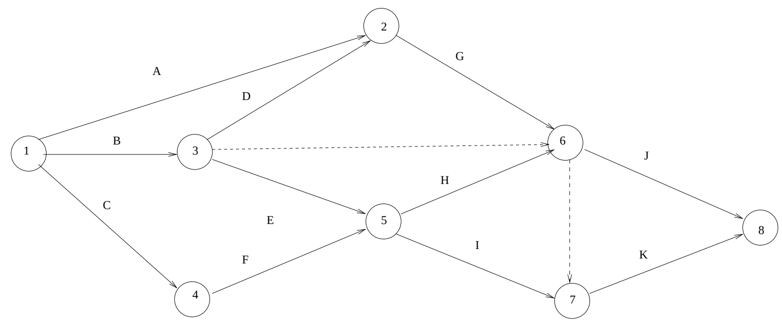
   - Suponga que cada pueblo i puede ser identificado en el plano por sus coordenadas (x_i, y_i).
   - Los pacientes no pueden ser enviados directamente al hospital.
   - Los valores $e1_{ij}$ y $e2_j$ dependen de la distancia.

4. Un proyecto está compuesto por actividades cuyas características se presentan en la siguiente tabla:

Actividad	Predecesor inmediato	Normal		Acelerado	
		Duración [día]	Costo [$]	Duración [día]	Costo [$]
A	–	4	200	4	200
B	–	7	500	6	650
C	–	3	400	2	450
D	B	5	400	3	600
E	B	4	200	4	200
F	C	6	300	4	700
G	A, D	8	600	5	900
H	E, F	9	700	8	900
I	E, F	3	300	3	300
J	B, G, H	6	500	6	500
K	B, G, H, I	8	650	7	750

   1. $(\frac{1}{3})$ Dibuje una red para representar el proyecto y, considerando la duración normal de las actividades, determine la ruta crítica, la duración mínima y el costo total del proyecto.
   2. $(\frac{1}{3})$ Considerando la posibilidad de acelerar las actividades, formule un modelo de programación lineal que permita determinar qué actividades deben ser aceleradas y en cuánto de manera tal de terminar el proyecto dentro de 26 días minimizando el costo total del proyecto.
   3. $(\frac{1}{3})$ Considerando la posibilidad de acelerar las actividades, determine la duración mínima del proyecto y el costo total mínimo asociado. ¿Cuál sería la ruta nueva crítica?

4. 1. ($\frac{1}{3}$):



2. ($\frac{1}{3}$):

- Variables:
  - x_i: instante de ocurrencia del evento i; $\forall i = 1, \ldots, 8$ (10 %)
  - y_j: cantidad de tiempo a disminuir en la actividad j; $\forall j = A, \ldots, K$ (10 %)
- Función objetivo (20 %):

$$Min \quad z = 150y_B + 50y_C + 100y_D + 200y_F + 100y_G + 200y_H + 100y_K$$

- Restricciones
  - Tiempo de inicio del proyecto (10 %):

$$x_1 = 0$$

  - Relaciones de precedencia entre las actividades (25 %):

$$\begin{aligned}
x_2 &\geq x_1 + 4 - y_A \\
x_2 &\geq x_3 + 5 - y_D \\
x_3 &\geq x_1 + 7 - y_B \\
x_4 &\geq x_1 + 3 - y_C \\
x_5 &\geq x_3 + 4 - y_E \\
x_5 &\geq x_4 + 6 - y_F \\
x_6 &\geq x_2 + 8 - y_G \\
x_6 &\geq x_3 \\
x_6 &\geq x_5 + 9 - y_H \\
x_7 &\geq x_5 + 3 - y_I \\
x_7 &\geq x_6 \\
x_8 &\geq x_6 + 6 - y_J \\
x_8 &\geq x_7 + 8 - y_K
\end{aligned}$$

  - Cantidades máximas a disminuir (15 %):

$$\begin{aligned}
y_A &\leq 0 \\
y_B &\leq 1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y_C &\leq 1 \\
y_D &\leq 2 \\
y_E &\leq 0 \\
y_F &\leq 2 \\
y_G &\leq 3 \\
y_H &\leq 1 \\
y_I &\leq 0 \\
y_J &\leq 0 \\
y_K &\leq 1
\end{aligned}
$$

- Duración máxima (10 %):

$$x_8 \leq 26$$

- Valores posibles para las variables:

$$
\begin{aligned}
x_i &\geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, 8 \\
y_j &\geq 0 \quad \forall j = A, \ldots, K
\end{aligned}
$$

3. $(\frac{1}{3})$:

4. Se tiene la siguiente programación de un proyecto:

Actividad	Predecesoras	Duración [días]	Varianza
A	-	3	0,2
B	A	2	0,15
C	-	4	0,3
D	B, C	2	0,15
E	A, D	3	0,2
F	B, C	4	0,3
G	B, C	3	0,25
H	E, F	2	0,1
I	E, F, G	3	0,2
J	E, F, G	2	0,15
K	H, I	1	0,05
L	H, I, J	2	0,1

1. (40 %) Grafique la malla del proyecto e identifique la ruta crítica. Obtenga la duración esperada y la varianza del proyecto.
2. (20 %) Determine la probabilidad de terminar el proyecto antes de 14 días, en exactamente 15 días y después de 16 días.
3. (40 %) Suponga que han pasado 7 días de desarrollo del proyecto en las condiciones esperadas, pero debido a algunos requerimientos no detectados desde un comienzo se requiere agregar las siguientes actividades al proyecto:

Actividad	Predecesoras	Duración [días]
M	K, L	2
N	L	3

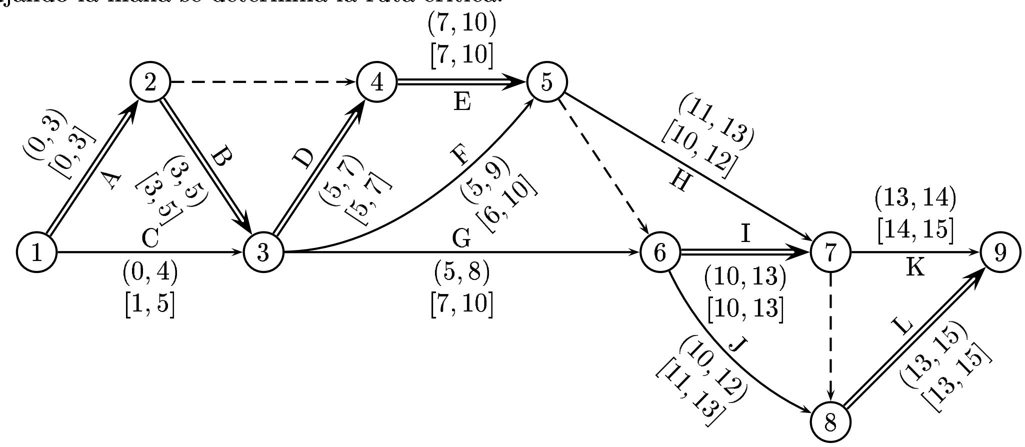
A pesar de haber agregado actividades al proyecto, se desea terminar lo que queda del proyecto en el plazo restante de acuerdo a lo calculado en 1 (descontando los 7 días que ya han transcurrido).

Para cumplir el objetivo de terminar el proyecto a tiempo se han establecido las actividades susceptibles de acelerar, su costo por día de aceleración y el máximo número de días a disminuir para cada una de ellas:

Actividad	Costo unitario acel. [$/día]	Disminución máxima [días]
E, M	40	3
G, H, J	10	2
F, I	15	2
K, L	10	1

Determine la forma de terminar el proyecto a tiempo a costo mínimo.

4. 1. Dibujando la malla se determina la ruta crítica:



Luego, la duración esperada del proyecto es de $\mu_T = 15$ días. La ruta crítica es:

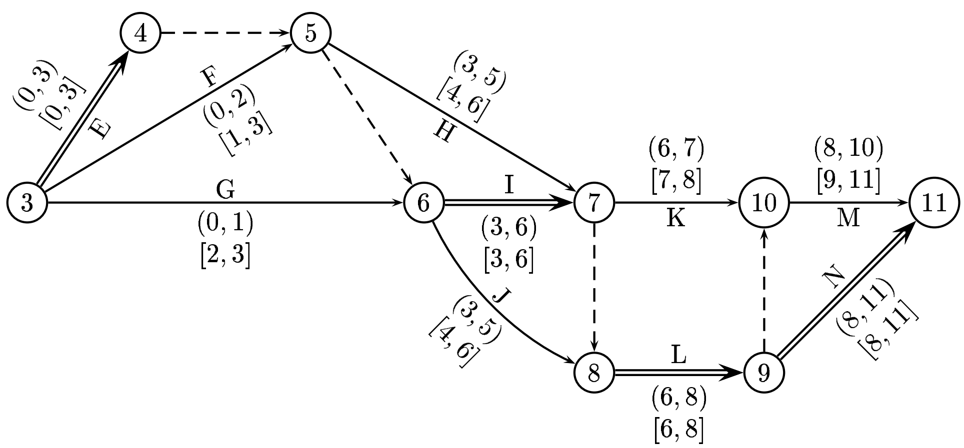
$$A - B - D - E - I - L \quad \rightarrow \quad V_T = V_A + V_B + V_D + V_E + V_I + V_L = 1$$

Por lo tanto, la varianza del proyecto es: $\sigma_T^2 = 1$ [día^2].

2.

$$\begin{array}{lclclclcl} P(T \leq 14) & = & P\left(\frac{T-\mu_T}{\sigma_T} \leq \frac{14-15}{1}\right) & = & P(z \leq -1) & & & = & 0{,}159 \\ P(T = 15) & = & 0 & & & & & & \\ P(T \geq 16) & = & 1 - P(T \leq 16) & = & 1 - P\left(\frac{T-\mu_T}{\sigma_T} \leq \frac{16-15}{1}\right) & = & 1 - P(z \leq 1) & = & 0{,}159 \end{array}$$

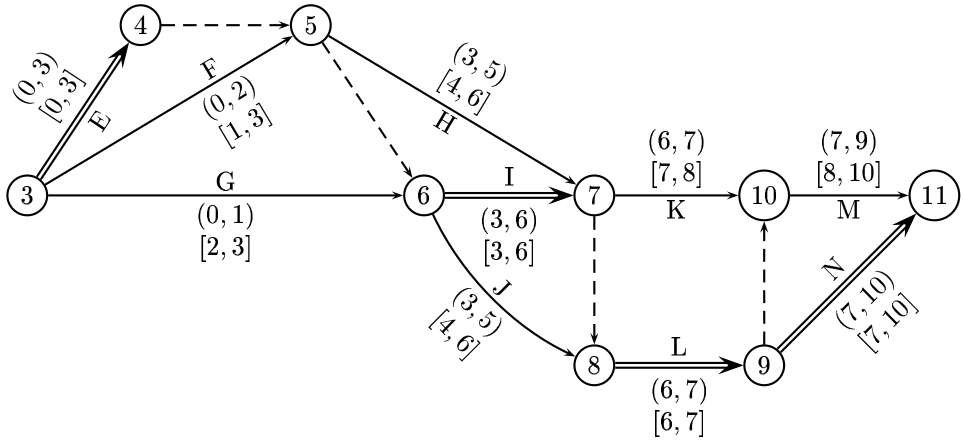
3. La malla de lo que queda del proyecto incorporando las nuevas actividades resulta:



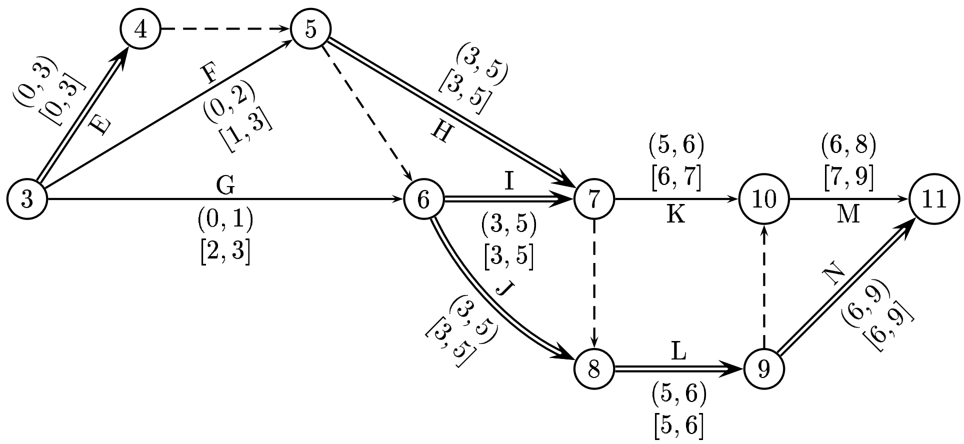
La duración de lo que queda del proyecto es de 11 días, lo que supera a los $15-7 = 8$ días requeridos. La ruta crítica resulta:

$$E - I - L - N \quad \rightarrow \quad \mu_T = 3 + 3 + 2 + 3 = 11$$

Para disminuir la duración del proyecto es preciso acelerar las actividades críticas. Dentro de las actividades críticas, la de menor costo es la L con un costo unitario de \$10 y una aceleración máxima de 1 día. Imponiendo dicha aceleración se obtiene:



La duración de lo queda del proyecto es 10 días. La ruta crítica se mantiene. De las actividades críticas factibles de acelerar, la de menor costo es la actividad I. Si bien dicha actividad puede ser acelerada hasta en 2 días, la holgura de las actividades de H y J es de sólo un día, por lo que acelerar la actividad I en más de un día no sería efectiva ya que las actividades H y J serían críticas. Imponiendo una disminución unitaria de la actividad I se obtiene:



La duración de lo que queda del proyecto es de 9 días y la ruta crítica cambia. Una posibilidad para reducir la duración del proyecto es acelerar la actividad E, lo que tiene un costo unitario de 40. Otra opción es acelerar simultáneamente las actividades H, I y J con un costo unitario de $10 + 15 + 10 = 35$. Esta última opción es la de menor costo y el costo total de la aceleración de lo que qeuda del proyecto resulta de: $10 + 15 + 35 = \$60$.