Programación Dinámica

Alvaro Luzzi

Departamento de Informática
Universidad Técnica Federico Santa María

Fundamentos de la programación dinámica

La programación dinámica es una técnica de programación matemática que proporciona un procedimiento sistemático para determinar la combinación óptima de una serie de decisiones interrelacionadas.

Fundamentos de la programación dinámica

La programación dinámica es una técnica de programación matemática que proporciona un procedimiento sistemático para determinar la combinación óptima de una serie de decisiones interrelacionadas.

Un problema complejo es desagregado en problemas simples que se resuelven etapa por etapa.

Fundamentos de la programación dinámica

En contraste con la programación lineal, no se cuenta con una formulación matemática estándar para el problema de programación dinámica.

Fundamentos de la programación dinámica

En contraste con la programación lineal, no se cuenta con una formulación matemática estándar para el problema de programación dinámica.

Se trata de un enfoque de tipo general para la solución de problemas y las ecuaciones específicas que se usan se deben desarrollar para que representen cada situación individual.

Fundamentos de la programación dinámica

En contraste con la programación lineal, no se cuenta con una formulación matemática estándar para el problema de programación dinámica.

Se trata de un enfoque de tipo general para la solución de problemas y las ecuaciones específicas que se usan se deben desarrollar para que representen cada situación individual.

Se necesita un cierto grado de creatividad y un buen conocimiento de la estructura general de los problemas de programación dinámica para reconocer cuándo y cómo se puede resolver un problema por medio de estos procedimientos

Fundamentos de la programación dinámica

Tipos de programación dinámica

Fundamentos de la programación dinámica

Tipos de programación dinámica

- Programación dinámica determinística: el estado en la siguiente etapa está completamente determinado por el estado y la política de decisión de la etapa actual.

Fundamentos de la programación dinámica

Tipos de programación dinámica

- Programación dinámica determinística: el estado en la siguiente etapa está completamente determinado por el estado y la política de decisión de la etapa actual.
- Programación dinámica probabilística: el estado en la siguiente etapa no está completamente determinado por el estado y la política de decisión de la etapa actual, existiendo en su lugar una distribución de probabilidad para determinar cuál será el siguiente estado.

Fundamentos de la programación dinámica I

Características de la programación dinámica

1. Etapas: el problema se puede dividir en etapas que requieren una política de decisión en cada una de ellas.
2. Estados asociados: cada etapa tiene cierto número de estados asociados con su inicio.

Fundamentos de la programación dinámica II

Características de la programación dinámica

3. Política de decisión: el efecto de la política de decisión en cada etapa es transformar el estado actual en un estado asociado con el inicio de la siguiente etapa.
4. Diseño de solución: el procedimiento de solución está diseñado para encontrar una política óptima para el problema completo, es decir, una receta para la política de decisión óptima en cada etapa para cada uno de los estados posibles.

Fundamentos de la programación dinámica III

Características de la programación dinámica

5. Principio de optimalidad:
   1. Dado el estado actual, una política óptima para las etapas restantes es independiente de la política adoptada en etapas anteriores.
   2. La decisión inmediata óptima depende sólo del estado actual y no de cómo se llegó ahí.
6. Inicio de solución: el procedimiento de solución se inicia al encontrar una política óptima para la última etapa.

Fundamentos de la programación dinámica IV

Características de la programación dinámica

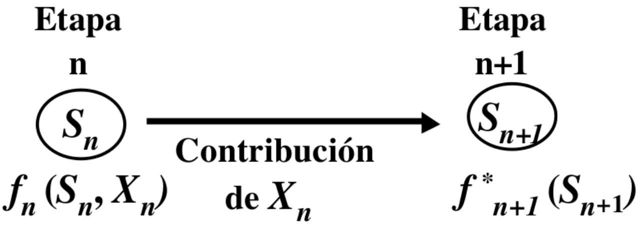
7. Relación recursiva: se dispone de una relación recursiva que identifica la política óptima para la etapa n, dada la política óptima para la etapa $n+1$.
8. Retroceso: cuando se tiene una relación recursiva como la de la función, el procedimiento de solución *hacia atrás* inicia en la última etapa y se mueve hacia la primera, etapa por etapa.

Programación dinámica determinista

En la programación dinámica determinística, el **estado** en la siguiente **etapa** está completamente determinado por el **estado** y la **política de decisión** de la **etapa actual**.

Programación dinámica determinista

En la programación dinámica determinística, el **estado** en la siguiente **etapa** está completamente determinado por el **estado** y la **política de decisión** de la **etapa actual**.



Programación dinámica determinista

7. Relación recursiva: se dispone de una relación recursiva que identifica la política óptima para la etapa n, dada la política óptima para la etapa $n+1$.

Programación dinámica determinista

7. Relación recursiva: se dispone de una relación recursiva que identifica la política óptima para la etapa n, dada la política óptima para la etapa $n+1$.

$$f_n^*(S_n) \; = Max_{x_n}\{f_n(S_n, X_n)\}$$

$$f_n^*(S_n) \; = Min_{x_n}\{f_n(S_n, X_n)\}$$

Programación dinámica determinista

8. Retroceso: cuando se tiene una relación recursiva como la de la función, el procedimiento de solución *hacia atrás* inicia en la última etapa y se mueve hacia la primera, etapa por etapa.

Programación dinámica determinista

8. Retroceso: cuando se tiene una relación recursiva como la de la función, el procedimiento de solución *hacia atrás* inicia en la última etapa y se mueve hacia la primera, etapa por etapa.

$$f_n^*(S_n, X_n) = C_{S,X_n} \text{ ``}+\text{''} \ f_{n+1}^*(X_n)$$

Programación dinámica determinista

Ejemplo: El problema de la diligencia

Un caza-fortunas desea ir de Missouri a California en una diligencia y quiere viajar de la forma más segura posible.

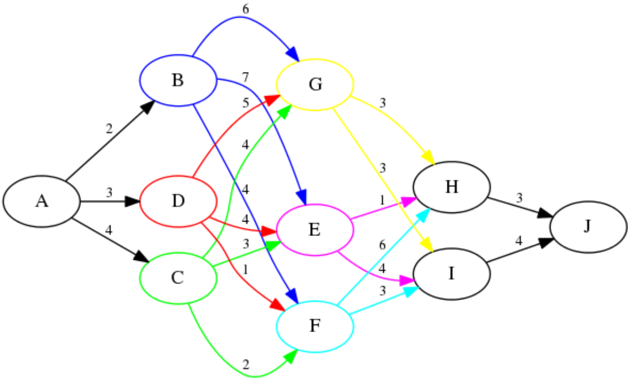
Tiene los puntos de salida y destino conocidos, pero tiene múltiples opciones para viajar a través del territorio.

Se entera de la posibilidad de adquirir un seguro de vida como pasajero de la diligencia.

Programación dinámica determinista

Ejemplo: El problema de la diligencia

El costo de la póliza estándar (C_{ij}) y la secuencia de los puntos de salida y destino son:



Programación dinámica determinista

Ejemplo: El problema de la diligencia

¿Cual es la ruta que minimiza el costo total de la póliza de seguro?

Programación dinámica determinista
Ejemplo: El problema de la diligencia

Estrategias de solución:

Programación dinámica determinista

Ejemplo: El problema de la diligencia

Estrategias de solución:

1. Enumerar todas las rutas posibles, calcular su costo y elegir la de menor valor. En total son 18 rutas.

Programación dinámica determinista

Ejemplo: El problema de la diligencia

Estrategias de solución:

1. Enumerar todas las rutas posibles, calcular su costo y elegir la de menor valor. En total son 18 rutas.
2. Elegir la ruta más barata en cada etapa. Esta solución no conduce al óptimo global. Un pequeño sacrificio en una etapa puede permitir mayores ahorros más adelante.

Programación dinámica determinista
Ejemplo: El problema de la diligencia

Estrategias de solución:

1. Enumerar todas las rutas posibles, calcular su costo y elegir la de menor valor. En total son 18 rutas.
2. Elegir la ruta más barata en cada etapa. Esta solución no conduce al óptimo global. Un pequeño sacrificio en una etapa puede permitir mayores ahorros más adelante.

   $A \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow I \rightarrow J$. Con un costo de 13 unidades monetarias.

Programación dinámica determinista

Ejemplo: El problema de la diligencia

Estrategias de solución:

3. Desagregar el problema general en problemas simples que se resuelven etapa por etapa.

Programación dinámica determinista

Ejemplo: El problema de la diligencia

Estrategias de solución:

3. Desagregar el problema general en problemas simples que se resuelven etapa por etapa. En el caso de la diligencia un problema simple sería pensar qué pasaría si al viajero sólo le faltara una jornada de viaje.

Programación dinámica determinista

Ejemplo: El problema de la diligencia

Por programación dinámica la solución sería entonces ir desde el estado actual (cualquiera que este sea) y llegar a el destino final (estado J) al costo C_{ij}.

Programación dinámica determinista

Ejemplo: El problema de la diligencia

Por programación dinámica la solución sería entonces ir desde el estado actual (cualquiera que este sea) y llegar a el destino final (estado J) al costo C_{ij}.

Se hace lo mismo para cada jornada (etapa), ensanchando el problema.

Programación dinámica determinista

Ejemplo: El problema de la diligencia

Por programación dinámica la solución sería entonces ir desde el estado actual (cualquiera que este sea) y llegar a el destino final (estado J) al costo C_{ij}.

Se hace lo mismo para cada jornada (etapa), ensanchando el problema.

Así encontraremos la solución óptima del lugar al que debe dirigirse teniendo en cuenta la información de la iteración anterior.

Programación dinámica determinista

Ejemplo: El problema de la diligencia

Sea $X_n (n = 1, 2, 3, 4)$ las variables que representan el destino inmediato en la etapa n.

Programación dinámica determinista

Ejemplo: El problema de la diligencia

Sea $X_n (n = 1, 2, 3, 4)$ las variables que representan el destino inmediato en la etapa n.

La ruta seleccionada será:

$$A \to X_1 \to X_2 \to X_3 \to X_4$$

Donde $X_4 = J$

Programación dinámica determinista

Ejemplo: El problema de la diligencia

Sea $f_n(S, X_n)$ el costo total de la mejor política global para las etapas restantes, dado que el caza-fortunas se encuentra en el estado S, listo para iniciar la etapa n y se dirige a X_n como destino inmediato.

Programación dinámica determinista

Ejemplo: El problema de la diligencia

Sea $f_n(S, X_n)$ el costo total de la mejor política global para las etapas restantes, dado que el caza-fortunas se encuentra en el estado S, listo para iniciar la etapa n y se dirige a X_n como destino inmediato.

Dados S y n, sea X_n^* el valor de X_n (no necesariamente único) que minimiza $f_n(S, X_n)$, y sea $f_n^*(S)$ el valor mínimo correspondiente de $f_n(S, X_n)$.

Programación dinámica determinista

Ejemplo: El problema de la diligencia

$$f_n^*(S) = Min_{x_n}\{f_n(S_n, X_n)\} = f_n(S_n, X_n^*)$$

Programación dinámica determinista
Ejemplo: El problema de la diligencia

$$f_n^*(S) = Min_{x_n}\{f_n(S_n, X_n)\} = f_n(S_n, X_n^*)$$

$$\begin{array}{rcccc} f_n(S_n, X_n) & = & \text{costo inmediato} & + & \text{mínimo costo futuro} \\ & & C_{S,X_n} & + & f_{n+1}^*(X_n) \end{array}$$

Programación dinámica determinista

Ejemplo: El problema de la diligencia

Etapa $n = 4$

Como el destino final se alcanza al terminar la etapa 4, entonces

$$f_5^*(J) = 0$$

Programación dinámica determinista

Ejemplo: El problema de la diligencia

Etapa $n = 4$

Como el destino final se alcanza al terminar la etapa 4, entonces

$$f_5^*(J) = 0$$

El objetivo es hallar $f_1^*(A)$ y su ruta correspondiente.

Programación dinámica determinista

Ejemplo: El problema de la diligencia

Etapa $n = 4$

Como el destino final se alcanza al terminar la etapa 4, entonces

$$f_5^*(J) = 0$$

El objetivo es hallar $f_1^*(A)$ y su ruta correspondiente.

Cuando se tiene sólo una etapa por recorre, la ruta de ahí en adelante estará determinada por el estado actual H o I y su destino final $X_4 = J$

Programación dinámica determinista

Ejemplo: El problema de la diligencia

Etapa $n = 4$

Luego

$$f_4^*(S) = C_{S,J} + \cancel{f_5^*(J)} = C_{S,J}$$

Programación dinámica determinista

Ejemplo: El problema de la diligencia

Etapa $n = 4$

Luego

$$f_4^*(S) = C_{S,J} + \cancel{f_5^*(J)} = C_{S,J}$$

$$f_4^*(H) = C_{H,J} = 3$$

$$f_4^*(I) = C_{I,J} = 4$$

Programación dinámica determinista
Ejemplo: El problema de la diligencia
Etapa $n = 4$

Luego

$$f_4^*(S) = C_{S,J} + \cancel{f_5^*(J)} = C_{S,J}$$

$$f_4^*(H) = C_{H,J} = 3$$

$$f_4^*(I) = C_{I,J} = 4$$

S	$f_4^*(S)$	X_4^*
H	3	J
I	4	J

Programación dinámica determinista

Ejemplo: El problema de la diligencia

Etapa $n = 3$

En el caso de la etapa $n = 3$ existen dos destinos posibles, H e I.

Programación dinámica determinista

Ejemplo: El problema de la diligencia

Etapa $n = 3$

En el caso de la etapa $n = 3$ existen dos destinos posibles, H e I. Además existen tres orígenes posibles, E, F y G.

Programación dinámica determinista

Ejemplo: El problema de la diligencia

Etapa $n = 3$

En el caso de la etapa $n = 3$ existen dos destinos posibles, H e I. Además existen tres orígenes posibles, E, F y G.

S \ X_3	$f_3(S,X_3) = C_{S,X_3} + f_4^*(X_3)$		$f_3^*(S)$	X_3^*
	H	I		
E	$1+3=4$	$4+4=8$	4	H
F	$6+3=9$	$3+4=7$	7	I
G	$3+3=6$	$3+4=7$	6	H

Programación dinámica determinista

Ejemplo: El problema de la diligencia

Etapa $n = 2$

En el caso de la etapa $n = 2$ existen tres destinos posibles, E, F y G.

Programación dinámica determinista

Ejemplo: El problema de la diligencia

Etapa $n = 2$

En el caso de la etapa $n = 2$ existen tres destinos posibles, E, F y G.

Además existen tres orígenes posibles, B, C y D.

Programación dinámica determinista

Ejemplo: El problema de la diligencia

Etapa $n = 2$

En el caso de la etapa $n = 2$ existen tres destinos posibles, E, F y G.
Además existen tres orígenes posibles, B, C y D.

S \ X_2	$f_2(S, X_2) = C_{S,x_2} + f_3^*(X_2)$			$f_2^*(S)$	X_2^*
	E	F	G		
B	$7 + 4 = 11$	$4 + 7 = 11$	$6 + 6 = 12$	11	E o F
C	$3 + 4 = 7$	$2 + 7 = 9$	$4 + 6 = 10$	7	E
D	$4 + 4 = 8$	$1 + 7 = 8$	$5 + 6 = 11$	8	E o F

Programación dinámica determinista

Ejemplo: El problema de la diligencia

Etapa $n = 1$

En el caso de la etapa $n = 1$ existen tres destinos posibles, B, C y D.

Programación dinámica determinista
Ejemplo: El problema de la diligencia
Etapa $n = 1$

En el caso de la etapa $n = 1$ existen tres destinos posibles, B, C y D.
Además existe un solo origen, A.

Programación dinámica determinista

Ejemplo: El problema de la diligencia

Etapa $n = 1$

En el caso de la etapa $n = 1$ existen tres destinos posibles, B, C y D.
Además existe un solo origen, A.

$S \backslash X_1$	$f_1(S, X_1) = C_{S,X_1} + f_2^*(X_1)$			$f_1^*(S)$	X_1^*
	B	C	D		
A	$2 + 11 = 13$	$4 + 7 = 11$	$3 + 8 = 11$	11	C o D

Ejercicios

Una compañía dispone de 5 millones de dólares para financiar eventuales expansiones de sus tres plantas. Cada planta ha enviado diversas solicitudes para invertir el dinero. Cada solicitud entrega el costo de la expansión y el ingreso total esperado, ambos datos se presentan en la siguiente tabla:

Solicitud de capital	Planta 1 costo	Planta 1 ingreso	Planta 2 costo	Planta 2 ingreso	Planta 3 costo	Planta 3 ingreso
1	0	0	0	0	0	0
2	1	5	2	8	1	4
3	2	6	3	9	-	-
4	-	-	4	12	-	-

Cada planta podrá obtener financiamiento para una solicitud. Suponga que el dinero no invertido se pierde. Determine la asignación de capital que maximiza los ingresos.

Ejercicios

Una empresa de arriendo de autos está desarrollando un plan de reemplazo para su flota de vehículos considerando un horizonte de 5 años. Al principio de cada año se debe tomar una decisión acerca de si se debe mantener un vehículo en operación o si se debe reemplazar. Un vehículo debe estar en servicio por lo menos un año pero se debe reemplazar a más tardar al cabo de tres años.

	Costo del reemplazo según años de operación		
Año de adquisición	1	2	3
1	4000	5400	9800
2	4300	6200	8700
3	4800	7100	-
4	490	-	-

Determine la estrategia óptima de reemplazo de vehículos. Muestre todos los resultados parciales e interprete claramente los resultados finales.

Ejercicios

$$
\begin{array}{ll}
\text{Max} & f(x) = x_1 + x_2^2 + x_3^3 \\
\text{Sujeto a} & g(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 10 \\
 & x_1 \geq 1 \\
 & x_2 \geq 1 \\
 & x_3 \geq 1 \\
 & x_i \in \mathbb{Z}\ \forall i
\end{array}
$$

Programación Dinámica

Alvaro Luzzi

Departamento de Informática
Universidad Técnica Federico Santa María