1. Considere el campo vectorial $F(x,y) = \left(\dfrac{\ln(xy)}{x}, \dfrac{\ln(xy)}{y}\right)$ definido para $x > 0,\ y > 0$. Sea $a > 0$ una constante. Calcular
$$\int_\alpha F d\alpha$$
donde α es el arco de hipérbola $xy = a$ con $0 < x_1 \leq x \leq x_2$.

Desarrollo. Note que el campo F es conservativo, pues:
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\ln(xy)}{x}\right) = \frac{1}{xy} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\ln(xy)}{y}\right) = \frac{1}{xy}.$$
Existe f tal que $F = \nabla f$, es decir:
$$f_x(x,y) = \frac{\ln(xy)}{x} \Longrightarrow f(x,y) = \int \frac{\ln(xy)}{x} dx = \frac{1}{2}(\ln(xy))^2 + c(y)$$
Además,
$$f_y(x,y) = \frac{\ln(xy)}{y} \Longrightarrow \frac{\ln(xy)}{y} + c'(y) = \frac{\ln(xy)}{y} \Longrightarrow c(y) = k$$
donde k es una constante.
Por lo tanto, $f(x,y) = \frac{1}{2}(\ln(xy))^2 + k$.

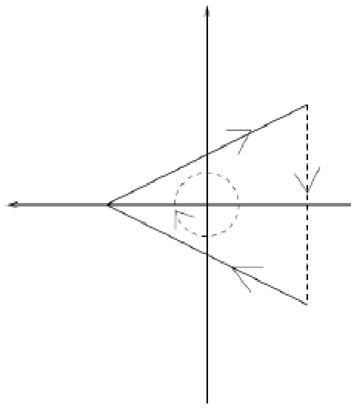
Si $\alpha(x) = \left(x, \frac{a}{x}\right)$ con $x \in [x_1, x_2]$ es una parametrización de la hipérbola, entonces
$$\int_\alpha F d\alpha = f(\alpha(x_2)) - f(\alpha(x_1)) = \frac{1}{2}(\ln(a))^2 + k - \frac{1}{2}(\ln(a))^2 - k = 0.$$

2. Sea L_1 el segmento lineal que va desde el punto $(1,-2)$ hasta el punto $(-1,0)$ y sea L_2 segmento lineal que va desde el punto $(-1,0)$ hasta el punto $(1,2)$. Use el teorema de Green para calcular

$$\int_C \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy, \text{ donde } C = L_1 \cup L_2.$$

Desarrollo. Para usar el teorema de Green debemos cerrar la curva, para ello usaremos un segmento lineal L_3 que une el punto $(1,2)$ con el punto $(1,-2)$.

Ahora la curva está cerrada, pero el campo F no está definido en $(0,0)$ que pertenece a la región R cuya frontera es la curva cerrada $L_1 \cup L_2 \cup L_3$. Así que agreguemos una circunferencia C_ε con un radio pequeño de tal forma que no toque los segmentos lineales, como muestra la figura.



Orientando el borde la región positivamente, tenemos:

$$\int_{-L_1\cup -L_2 \cup -L_3 \cup C_\varepsilon} F d\gamma = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right] dxdy = 0$$

Es decir,

$$\int_{L_1\cup L_2} F d\gamma = \int_{-L_3} F d\alpha + \int_{C_\varepsilon} F d\beta.$$

Calculemos $\int_{-L_3} F d\alpha$. Si $\alpha(t) = (1, 4t-2)$ con $t \in [0,1]$ una parametrización de $-L_3$, entonces

$$\int_{-L_3} F d\alpha = \int_0^1 \left(\frac{4t-1}{1+(4t-2)^2}, \frac{-1}{1+(4t-2)^2}\right)\cdot(0,4)dt = \int_0^1 \frac{-4}{1+(4t-2)^2}dt = -2\arctan(2).$$

Calculemos $\int_{C_\varepsilon} F d\beta$. Si $\beta(t) = (\varepsilon \operatorname{sen}(t), \varepsilon\cos(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$ es una parametrización de C_ε, entonces

$$\int_{C_\varepsilon} F d\beta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{\varepsilon\cos(t)}{\varepsilon^2}, \frac{-\varepsilon\operatorname{sen}(t)}{\varepsilon^2}\right)\cdot(\varepsilon\cos(t), -\varepsilon\operatorname{sen}(t))dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Luego,

$$\int_{L_1\cup L_2} F d\gamma = -2\arctan(2) + 2\pi.$$

3. Encuentre en el plano la curva regular, simple, con orientación positiva sobre la cual el trabajo realizado por el campo $F(x,y) = \left(\frac{x^2y}{4} + \frac{y^3}{3}, x\right)$ sea máximo. ¿Cuál es ese valor máximo?

Desarrollo. Si usamos el teorema de Green, con $P(x,y) = \frac{x^2y}{4} + \frac{y^3}{3}$ y $Q(x,y) = x$:

$$\int_C F \cdot d\alpha = \iint_D (Q_x - P_y)\, dA = \iint_D \left(1 - \frac{x^2}{4} - y^2\right).$$

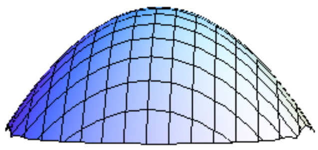
El problema es equivalente a encontrar una región D donde la integral doble tome el máximo valor. Como la integral doble representa el volumen encerrado por la superficie $z = f(x,y)$ cuando $z \geq 0$. El máximo valor de la integral doble se alcanzará en una región D donde z no tome valores negativos.

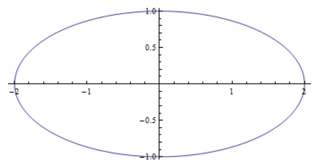
La curva que cumpla estas condiciones debe ser la intersección de la superficie $z = f(x,y) = 1 - \frac{x^2}{4} - y^2$ (paraboloide) con el plano XY. Es decir,

$$1 - \frac{x^2}{4} - y^2 = 0 \Longleftrightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \quad \text{(elipse)}.$$

Parametrizando esta curva, obtenemos: $\alpha(\theta) = (2\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta))$, $t \in [0, 2\pi]$. Entonces, usando coordenadas polares

$$\iint_D \left(1 - \frac{x^2}{4} - y^2\right) = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (1 - r^2\cos^2(\theta) - r^2\operatorname{sen}^2(\theta))2r\, drd\theta = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (1 - r^2)2r\, drd\theta = \pi.$$





4. Hallar el área de la superficie $x^2 + z^2 = a^2$ que está cortada por la superficie $x^2 + y^2 = a^2$

Desarrollo. Calcularemos el área de la superficie S_1 se se encuentra en el primer octante. Consideremos la siguiente parametrización de S_1:

$$r(x,y) = (x, y, \sqrt{a^2 - x^2}) \quad \text{definida en el dominio} \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}\}$$

Note que:

$$r_x = \left(1, 0, \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right) \text{ y } r_y = (0,1,0) \Longrightarrow r_x \times r_y = \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, 0, 1\right) \Longrightarrow ||r_x \times r_y|| = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Por lo tanto, el área de S_1 es:

$$A(S_1) = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dydx = \int_0^a adx = a^2.$$

Luego, por la simetría, el área total es : $8a^2$.