Integrales Triples: Problemas Resueltos

1. Evaluar la integral $\iiint_W x^2\cos(z)dV$, donde W es la región acotado por los planos $z=0$, $z=\pi$, $y=0$, $x=0$ y $x+y=1$

   Solución: Deseamos calcular

$$\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{\pi} x^2\cos(z)\ dzdydx = \int_0^1\int_0^{1-x} x^2\sin(z)\Big|_{z=0}^{z=\pi} dydx = 0$$

2. Resuelva los siguientes problemas:

   (a) Considere D la región encerrada por los planos $y=x$, $z=y$, $x=1$ y $z=0$. Encuentre $\iiint_D f(x,y,z)\ dV$ en el orden $dydzdx$.

   (b) Calcule la siguiente integral $\displaystyle\int_0^1\int_0^x\int_y^{x+y} e^{x+y+z}dzdydx$.

   (c) Calcule el valor de $\displaystyle\int_0^1\int_z^1\int_{\sqrt{x}}^1 \cos(\pi y^5)\ dydxdz$

   Solución:

   (a) La región encerrada por los planos viene determinada mediante las relaciones $0\le x\le 1$, $0\le y\le x$ y $0\le z\le y$. De este modo se tiene que

$$\iiint_D f(x,y,z)\ dV = \int_0^1\int_0^x\int_0^y f(x,y,z)\ dzdydx,$$

   luego de las relaciones anteriores, se obtiene que $0\le x\le 1$, $0\le z\le x$ y $z\le y\le x$. De este modo

$$\iiint_D f(x,y,z)\ dV = \int_0^1\int_0^x\int_z^x f(x,y,z)\ dydzdx,$$

   (b)

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^x\int_y^{x+y} e^{x+y+z}dzdydx &= \int_0^1\int_0^x e^{x+y}\left(e^{x+y}-e^{y}\right)dydx\\
&= \int_0^1\int_0^x \left(e^{2x+2y}-e^{x+2y}\right)dydx\\
&= \int_0^1\left(\frac{e^{4x}-e^{2x}}{2}\right)dx - \int_0^1\left(\frac{e^{3x}-e^{x}}{2}\right)dx\\
&= \left(\frac{e^4}{8}-\frac{e^2}{4}\right)-\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{e^3}{6}-\frac{e}{2}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{e^4}{8}-\frac{e^2}{4}-\frac{e^3}{6}+\frac{e}{2}-\frac{5}{24}
\end{aligned}$$

   (c) Para $0\le z\le 1$ tenemos que $\sqrt{x}\le y\le 1$ y $z\le x\le 1$ luego procedemos cambiando el orden de integración, así se observa que $\sqrt{z}\le y\le 1$ y además $z\le x\le y^2$, de esta forma

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1\int_{\sqrt{z}}^1\int_z^{y^2}\cos(\pi y^5)dxdydz\\
&= \int_0^1\int_{\sqrt{z}}^1 (y^2-z)\cos(\pi y^5)dydz
\end{aligned}$$

nuevamente se procede cambiando el orden de integración, así se tiene que intercambiando el orden de los limites de integración $0 \leq z \leq 1$ y $\sqrt{z} \leq y \leq 1$, se puede concluir que

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^{y^2} (y^2 - z)\cos(\pi y^5) dz dy \\ &= \int_0^1 \frac{y^4}{2}\cos(\pi y^5) dy = \frac{\sin(\pi y^5)}{10\pi}\Bigg|_{y=0}^{y=1} = 0 \end{aligned}$$

3. Evaluar la integral $\iiint_S \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dxdydz$, donde S es el sólido acotado por las dos esferas $x^2+y^2+z^2 = a^2$ y $x^2+y^2+z^2 = b^2$, donde $0 < b < a$.

   Solución: Mediante el uso de coordenadas esféricas, notamos que

$$\iiint_S \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_b^a \frac{\sin\phi}{\rho} d\rho d\phi d\theta = 2\pi \int_0^{\pi} \sin\phi d\phi \int_b^a \frac{d\rho}{rho} = 4\pi \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

4. Considere la región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ descrita como: $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1-y\}$. Determine el valor de la integral triple

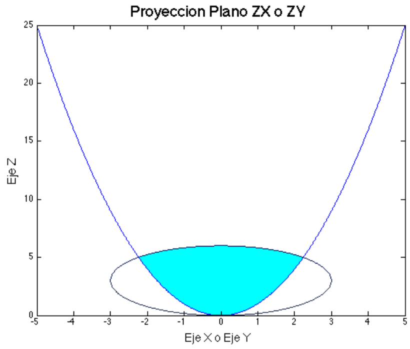
$$\iiint_\Omega y \ dV$$

   Solución:

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega y \ dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \int_0^{1-r\sin\theta} r^2 \sin\theta \ dzdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\sin\theta(1-r\sin\theta) \ drd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2\sin\theta - r^3\sin^2\theta) \ drd\theta \\ &= \frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{1}{4}\cdot\pi = -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

5. Determine el volumen de la región encerrada por la parte interior de $x^2+y^2+(z-3)^2 = 9$ y la parte superior de $z = x^2+y^2$.

   Solución:



Un grafico de la proyección de la región solicitada en el plano zx o zy es el mostrado en la figura. Posteriormente procedemos interceptando las superficies indicadas esto para obtener el nivel de corte entre ambas, así tenemos que $z^2 - 5z = 0$ cuya ecuación tiene como solución $z = 0$ y $z = 5$. Posteriormente mediante el uso de coordenadas cilíndricas, se obtiene que:

$$\begin{aligned} &x^2+y^2+(z-3)^2 = 9 &\longrightarrow\quad & r^2+z^2 = 6z \\ &z = x^2+y^2 &\longrightarrow\quad & z = r^2 \end{aligned}$$

luego la integral para obtener el volumen de la región solicitada es

$$\begin{aligned}
\text{Volumen} &= \int_0^{2\pi}\int_0^5\int_0^{\sqrt{z}} r dr dz d\theta + \int_0^{2\pi}\int_5^6\int_0^{\sqrt{6z-z^2}} r dr dz d\theta \\
&= 2\pi\left(\int_0^5\int_0^{\sqrt{z}} r dr dz + \int_5^6\int_0^{\sqrt{6z-z^2}} r dr dz\right) \\
&= \pi\left(\int_0^5 z dz + \int_5^6 (6z-z^2) dz\right) \\
&= \pi\left(\frac{25}{2}+\frac{8}{3}\right) = \frac{91\pi}{6}
\end{aligned}$$

6. Para $a \geq 0$ considere el sólido Ω definido como

$$\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ |y| \leq 1+z^2, \quad 0 \leq 7z \leq y+9, \quad -a \leq x \leq 1\right\}.$$

Verifique que la función $f(a)$ definida como $f(a) = \iiint_\Omega 4x dV$ tiene un máximo y encuéntrelo.

Solución: Notamos que la función definida anteriormente se puede escribir en termino de integrales iteradas como

$$f(a) = \iiint_\Omega 4x dV = \int_{-a}^1\int_0^1\int_{-1-z^2}^{1+z^2} 4x dy dz dx + \int_{-a}^1\int_1^2\int_{7z-9}^{1+z^2} 4x dy dz dx,$$

posteriormente se procede integrando, lo que permite obtener

$$\begin{aligned}
f(a) &= \int_{-a}^1\int_0^1 4x(2+2z^2) dz dx + \int_{-a}^1\int_1^2 4x(10+z^2-7z) dz dx \\
&= \left(2-2a^2\right)\left(2+\frac{2}{3}\right) + (2-2a^2)\left(10+\frac{7}{3}-\frac{21}{2}\right) \\
&= 9(1-a^2)
\end{aligned}$$

observamos que $f(a)$ es una parábola con vértice en $a=0$ la cual se abre hacia abajo, es decir, tiene un máximo en $a=0$.

7. Considere la función f definida como

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ x\in\mathbb{Q}, \\ \\ 2 & \text{si } \ x \not\in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

¿Es la función f integrable sobre el conjunto R definido como $R = [0,1]\times[0,2]\times[0,3]$?.

Solución: Procedemos por definición, para esto construimos una partición sobre el conjunto R de la forma

$$R = \bigcup_{i,j,k=0}^{n} R_{i,j,k},$$

los elementos de la partición tiene como volumen $\Delta V_{i,j,k} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$. Además tomaremos un punto arbitrario en cada elemento el cual será denotada por $c_{i,j,k} = (\alpha_i, \beta_j, \gamma_k)$. Así

$$\iiint_R f(x,y,z) dV = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ \text{máx}\{\text{diag}_{i,j,k}\}\to 0}} \sum_{i,j,k=0}^{n} f(\alpha_i,\beta_j,\gamma_k)\Delta V_{i,j,k}.$$

Donde $\text{diag}_{i,j,k}^2 = (\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2 + (\Delta z_k)^2$, luego si $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ tenemos que

$$\sum_{i,j,k=0}^{n} f(\alpha_i,\beta_j,\gamma_k)\Delta V_{i,j,k} = \sum_{i,j,k=0}^{n} \Delta V_{i,j,k} = 6,$$

mientras que en el caso que $\alpha_i \notin \mathbb{Q}$ se tiene

$$\sum_{i,j,k=0}^{n} f(\alpha_i, \beta_j, \gamma_k)\Delta V_{i,j,k} = \sum_{i,j,k=0}^{n} 2\Delta V_{i,j,k} = 12,$$

lo anterior nos permite concluir que el límite de la sumas de Riemann no existe, de este modo la función indicada no es integrable.

8. Considere la región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ definida como

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 + (z-3)^2 \leq 9\right\},$$

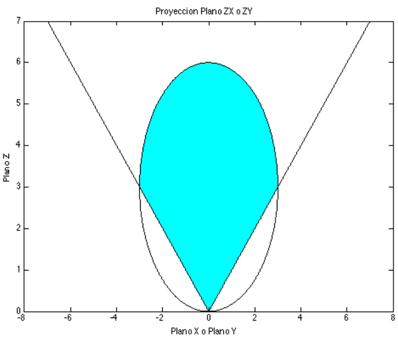
además de la integral:

$$I = \iiint_{\Omega} e^{x^2+y^2+z^2} dV$$

(a) Exprese las integrales iteradas que permiten calcular la integral I en coordenadas cilíndricas en el orden de integración $dzdrd\theta$ y $drdzd\theta$.

(a) Exprese las integrales iteradas que permiten calcular la integral I en coordenadas esféricas en el orden de integración $d\rho d\phi d\theta$ y $d\phi d\rho d\theta$.

Solución:



Un grafico de la proyección de la región solicitada en el plano zx o zy es el mostrado en la figura. Procedemos transformando las gráficas a las coordenadas cilíndricas, así:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 9 &\quad\longrightarrow\quad r^2 + z^2 = 6z \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} &\quad\longrightarrow\quad z = r \end{aligned}$$

denotando por z_0 y r_0 el punto intersección del cono con la esfera, es decir, el cual se obtiene como solución del sistema $r_0^2 + z_0^2 = 6z_0$ con $z_0 = r_0$, así: $z_0 = r_0 = 3$. Luego las integrales que permiten calcular el volumen son:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_r^{3+\sqrt{9-r^2}} re^{r^2+z^2} dzdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^z re^{r^2+z^2} drdzd\theta + \int_0^{2\pi}\int_3^6\int_0^{\sqrt{6z-z^2}} re^{r^2+z^2} drdzd\theta \end{aligned}$$

posteriormente transformando a coordenadas esféricas las superficies, tenemos que:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 9 &\quad\longrightarrow\quad \rho = 6\cos\phi \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} &\quad\longrightarrow\quad \phi = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{6\cos\phi} \rho^2 \sin\phi e^{\rho^2} d\rho d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{3\sqrt{2}}\int_0^{\pi/4} \rho^2 \sin\phi e^{\rho^2} d\phi d\rho d\theta + \int_0^{2\pi}\int_{3\sqrt{2}}^{6}\int_0^{\arccos(\rho/6)} \rho^2 \sin\phi e^{\rho^2} d\phi d\rho d\theta \end{aligned}$$

9. Encuentre la masa del sólido encerrado por las superficies $z + 2x + 2y = 1$ y $z = 3 - x^2 - y^2$. Si la densidad en cada punto de la región es $f(x, y, z) = 1 + x^2 + y^2$.

Solución: Obtenemos el dominio maximal del sólido, el cual viene determinado por la región encerrada por la curva

$$3 - x^2 - y^2 = 1 - 2x - 2y,$$

de esta forma se tiene que la región buscada es $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 4\right\}$, luego si utilizamos el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2r\cos\theta \\ y &= 1 + 2r\sin\theta, \end{aligned}$$

cuyo jacobiano viene determinado por $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = 4r$, tenemos que la masa del sólido viene dada por

$$\begin{aligned} \text{Masa} &= \iint_D (1+x^2+y^2)\left|(3-x^2-y^2)-(1-2x-2y)\right| dA \\ &= \iint_D (1+x^2+y^2)\left|4-(x-1)^2-(y-1)^2\right| dA \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \Big(1+(1+2r\cos\theta)^2+(1+2r\sin\theta)^2\Big)4r|4-4r^2\cos^2\theta-4r^2\sin^2\theta|drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \Big(3+4r\sin\theta+4r\cos\theta+4r^2\Big)4r|4-4r^2|drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \Big(3+4r^2\Big)4r|4-4r^2|drd\theta = 32\pi\int_0^1 (3+4r^2)r|1-r^2|dr \\ &= 32\pi\int_0^1 (3+4r^2)r(1-r^2)dr = \frac{104\pi}{3} \end{aligned}$$

10. Plantear en algún sistema de coordenadas las integrales iteradas que permiten calcular el volumen del sólido $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ descrito mediante:

$$\Omega = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2 \leq 4z, \quad z \geq 4-x\Big\}$$

Solución: Procedemos detectando la curva intersección entre la esfera y el plano, tal curva viene descrita mediante:

$$x^2+y^2+(4-x)^2 = 4(x-x), \quad \to \quad 2(x-1)^2+y^2 = 2$$

luego las integrales que permiten calcular el volumen del sólido Ω vienen descritas a partir de:

$$\iint_D \int_{4-x}^{2+\sqrt{4-x^2-y^2}} dzdA = \iint_D \Big(2+\sqrt{4-x^2-y^2}-4+x\Big)dA$$

donde D es la región descrita mediante $2(x-1)^2+y^2 \leq 2$.

11. Suponga que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función continua y $b>0$ una constante conocida. Para la siguiente integral iterada, redúzcala a una integral unidimensional:

$$\int_0^b\int_0^x\int_0^y f(z)dzdydx$$

Solución: Observamos que los limites de integración entregados nos producen las desigualdades $0 \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq x$ y $0 \leq z \leq y$, cambiando el orden de integración se tiene que $0 \leq x \leq b$, $0 \leq z \leq x$ y $z \leq y \leq x$. De este modo

$$\int_0^b\int_0^x\int_0^y f(z)dzdydx = \int_0^b\int_0^x\int_z^x f(z)dydzdx = \int_0^b\int_0^x (x-z)f(z)dzdx,$$

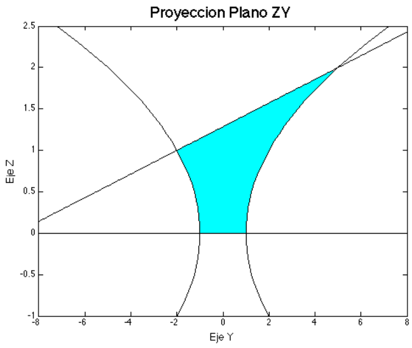
esta ultima es una integral doble a la cual le podemos cambiar el orden de integración a $0 \leq z \leq b$ y $z \leq x \leq b$, así

$$\int_0^b\int_0^x (x-z)f(z)dzdx = \int_0^b\int_z^b (x-z)f(z)dxdz = \frac{1}{2}\int_0^b (b-z)^2 f(z)dz$$

12. Encuentre el volumen del sólido Ω definido como

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ |y| \leq 1+z^2, \ 0 \leq 7z \leq y+9, \ -1 \leq x \leq 1\right\}.$$

Solución:



Procedemos interceptando $y = 1+z^2$ con $7z = y+9$, esto lleva a resolver la ecuación $z^2 - 7z + 10 = 0$ cuyas soluciones son $z = 5$ y $z = 2$, de este modo los puntos de cortes en el plano zy son $(5,2)$ y $(26,5)$. Posteriormente interceptamos $y = -1 - z^2$ con $7z = y+9$, la cual lleva a resolver la ecuación $z^2+7z-8 = 0$ cuyas soluciones son $z = 1$ y $z = -8$, de este modo los puntos de cortes en el plano zy son $(-2,1)$ y $(-65,-8)$. De este modo una proyección de la región en el plano zy es

Luego el volumen viene determinado por la siguiente integral

$$\begin{aligned}
\text{Volumen} &= \iiint_\Omega dV = \int_{-1}^{1}\int_0^1\int_{-1-z^2}^{1+z^2} dydzdx + \int_{-1}^{1}\int_1^2\int_{7z-9}^{1+z^2} dydzdx \\
&= \int_{-1}^{1}\int_0^1 2(1+z^2)dzdx + \int_{-1}^{1}\int_1^2 (z^2-7z+10)dzdx \\
&= 4\int_0^1 (1+z^2)dz + 2\int_1^2 (z^2-7z+10)dz \\
&= 4\left(1+\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{z^3}{3} - \frac{7z^2}{2} + 10z\right)\Big|_1^2 = \frac{16}{3} + \frac{22}{6} = 9
\end{aligned}$$

13. Calcule $\displaystyle\iiint_R \frac{1}{x^2+y^2}dV$ si R es la región definida como $R = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 1 \leq x^2+y^2 \leq 9, \ \ 0 \leq z \leq x^2+y^2\right\}$

Solución:

Utilizando coordenadas cilíndricas tenemos que

$$\iiint_R \frac{1}{x^2+y^2}dV = \int_0^{2\pi}\int_1^3\int_0^{r^2} \frac{1}{r}dzdrd\theta = 2\pi\int_1^3 rdr = 8\pi$$

14. Evaluar la integral $\displaystyle\iiint_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dV$, donde D es la bola unitaria de $\mathbb{R}^3$.

Solución: Aplicando las coordenadas esféricas

$$\begin{aligned}
x &= r\,\mathrm{sen}(\phi)\cos(\theta) \\
y &= r\,\mathrm{sen}(\phi)\,\mathrm{sen}(\theta) \\
z &= r\cos(\phi)
\end{aligned}$$

donde $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq \phi \leq \pi$, cuyo jacobiano es $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = r^2\,\mathrm{sen}(\phi)$. Luego

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} e^{r^3}r^2\,\mathrm{sen}(\phi)d\theta d\phi dr &= 2\pi\int_0^1\int_0^\pi e^{r^3}r^2\,\mathrm{sen}(\phi)d\phi dr \\
&= -2\pi\int_0^1 e^{r^3}r^2[\cos(\phi)-\cos(0)]dr = \frac{4\pi}{3}e^{r^3}\Big|_0^1 = \frac{4\pi}{3}(e-1)
\end{aligned}$$

15. Considere el sólido D definido como

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x^2+y^2 \leq z, \ \ x^2+y^2+z^2 \leq 4, \ \ x^2+y^2 \leq 1\}$$

(a) Obtenga en *coordenadas cartesianas* las integrales que permiten calcular el volumen de D.

(b) Obtenga en *coordenadas cilíndricas* las integrales que permiten calcular el volumen de D.

(c) Obtenga en *coordenadas esféricas* las integrales que permiten calcular el volumen de D.

(d) Calcule el volumen de D.

Solución:

(a) *Coordenadas Cartesianas*: El desarrollo lo hacemos para el orden $dzdydx$, luego

$$\text{Vol}(D) = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dzdydx$$

(b) *Coordenadas Cilíndricas*: en este caso se tiene que el volumen es

$$\text{Vol}(D) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^{\sqrt{4-r^2}} rdzdrd\theta$$

(c) *Coordenadas Esféricas*:

$$\text{Vol}(D) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^2 \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/4} \int_0^{\frac{1}{\sin\phi}} \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\frac{\cos\phi}{\sin^2\phi}} \rho^2 \sin\phi d\rho d\theta d\phi$$

(d) Para calcular el volumen usamos coordenadas cilíndricas, luego

$$\begin{aligned}
\text{Vol}(D) &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^{\sqrt{4-r^2}} rdzdrd\theta = 2\pi \int_0^1 r\left(\sqrt{4-r^2} - r^2\right) dr = 2\pi \int_0^1 \left(r\sqrt{4-r^2} - r^3\right) dr \\
&= 2\pi \left(-\frac{(4-r^2)^{3/2}}{3} - \frac{r^4}{4} \right)\Bigg|_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{3}(4^{3/2} - 3^{3/2}) - \frac{1}{4} \right)
\end{aligned}$$

16. Determine el volumen del cuerpo sólido W encerrado por las superficies $z = x^2 + 9y^2$ y $z = 4 + x^2 + 9y^2$, si además se tiene que $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, el cual está definido como

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x^2 + 9y^2 + 3y \leq 2\sqrt{x^2 + 9y^2}, \;\; 3y + \sqrt{x^2 + 9y^2} \geq x^2 + 9y^2, \;\; x \leq 0 \right\}.$$

Solución: Usamos coordenadas cilíndricas, es decir, tomamos

$$T : \begin{cases} x = & r\cos\theta \\ y = & \dfrac{r}{3}\sin\theta \\ z = & z \end{cases}$$

asociada a esta transformación el jacobiano es $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \dfrac{r}{3}$, luego procedemos transformando las superficies.

$$\begin{aligned}
z = x^2 + 9y^2 &\implies z = r^2 \\
z = 4 + x^2 + 9y^2 &\implies z = 4 + r^2
\end{aligned}$$

ademas se tiene que

$$\begin{aligned}
x^2 + 9y^2 + 3y \leq 2\sqrt{x^2 + 9y^2} &\implies r \leq 2 - \sin\theta \\
3y + \sqrt{x^2 + y^2} \leq x^2 + 9y^2 &\implies r \leq 1 + \sin\theta
\end{aligned}$$

y como $x \leq 0$ se tiene que la cota para el ángulo es $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. De lo anterior se tiene que el volumen del cuerpo sólido es

$$\begin{aligned}
\text{Volumen} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^{\text{mín}\{2-\sin\theta, 1+\sin\theta\}} \int_{r^2}^{4+r^2} \frac{r}{3} dz dr d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_0^{2-\sin\theta} \int_{r^2}^{4+r^2} \frac{r}{3} dz dr d\theta + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^{1+\sin\theta} \int_{r^2}^{4+r^2} \frac{r}{3} dz dr d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_0^{2-\sin\theta} \frac{4r}{3} dr d\theta + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^{1+\sin\theta} \frac{4r}{3} dr d\theta \\
&= \frac{2}{3}\left(\int_{\frac{2\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (2-\sin\theta)^2 d\theta + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{3\pi}{2}} (1+\sin\theta)^2 d\theta\right) = \frac{27\pi}{4} - 4
\end{aligned}$$

17. Determine el volumen mínimo y el volumen máximo encerrado por la región en el primer octante, limitada por los planos $x + y = 2$, $2y + x = 6$ y el plano tangente a la superficie $x^2 + y^2 = z - 3$.

Solución: Sea (x_0, y_0, z_0) un punto cualquiera en la superficie $x^2 + y^2 = z - 3$, luego la ecuación del plano tangente es

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (2x_0, 2y_0, -1) = 0,$$

es decir $z = 6 - z_0 + 2x_0x + 2y_0y = f(x, y)$. Luego el volumen viene dado por

$$\begin{aligned}
\text{Volumen} &= \int_0^2 \int_{2-x}^{1/2(6-x)} \int_0^{f(x,y)} dz dy dx + \int_2^6 \int_0^{1/2(6-x)} \int_0^{f(x,y)} dz dy dx \\
&= \int_0^2 \int_{2-x}^{1/2(6-x)} f(x,y) dy dx + \int_2^6 \int_0^{1/2(6-x)} f(x,y) dy dx \\
&= \int_0^2 \int_{2-x}^{1/2(6-x)} (6 - z_0 + 2x_0x + 2y_0y) dy dx + \int_2^6 \int_0^{1/2(6-x)} (6 - z_0 + 2x_0x + 2y_0y) dy dx \\
&= 42 + 100x_0/3 + 46y_0/3 - 7z_0 \\
&= 42 + 100x_0/3 + 46y_0/3 - 7(x_0^2 + y_0^2 + 3)
\end{aligned}$$

luego la función de volumen es

$$v(x_0, y_0) = 42 + 100x_0/3 + 46y_0/3 - 7(x_0^2 + y_0^2 + 3),$$

con puntos críticos dados por $\frac{\partial v}{\partial x_0} = 0$ y $\frac{\partial v}{\partial y_0} = 0$, así el punto crítico es

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{50}{21}, \frac{23}{21}\right),$$

el cual es un máximo pues la segunda derivada en el punto es negativa. De esta forma el volumen máximo es

$$v\left(\frac{50}{21}, \frac{23}{21}\right) = \frac{4352}{63},$$

luego el volumen mínimo se obtiene en el punto $x_0 = y_0 = 0$ y $z_0 = 3$, así

$$v(0, 0) = 21$$

18. Considere la región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ definida como

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \text{máx}\left\{\sqrt{4 - x^2 - y^2}, 1 + \sqrt{x^2 + y^2}\right\} \leq z \leq 5 + \sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 6z, \quad x \geq 0\right\}$$

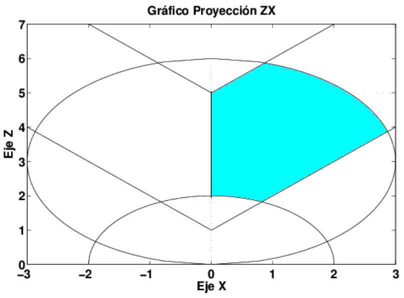
para la función $f(x, y, z) = |z - 5|$ considere la integral:

$$I = \iiint_\Omega f(x, y, z) dV$$

(a) Exprese las integrales iteradas que permiten calcular I en coordenadas cilíndricas.

(b) Exprese las integrales iteradas que permiten calcular I en coordenadas esféricas.

Solución:



La Figura adjunta presenta una proyección de Ω en el plano zx, luego notamos que la función f cumple que $f(x,y,z) = z-5$ si $z \geq 5$ y $f(x,y,z) = 5-z$ si $z < 5$, posteriormente analizamos los interceptos de las superficies presentes. Del cono $z = 5+\sqrt{x^2+y^2}$ con la esfera $x^2+y^2+z^2 = 6z$ se obtiene que el nivel de corte es $z_2 = 4+\frac{\sqrt{14}}{2}$, mientras que del cono $z = 1+\sqrt{x^2+y^2}$ con la esfera $x^2+y^2+z^2 = 6z$ se tiene $z_1 = 2+\frac{\sqrt{14}}{2}$ y del cono $z = 1+\sqrt{x^2+y^2}$ con la esfera de radio 2 centrada en el origen se obtiene $z_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Luego los ángulos de inclinación respecto al eje z de los rayos que pasan por los interceptos anteriores los denotaremos por ϕ_0, ϕ_1 y ϕ_2, respectivamente, y estos cumplen que $\tan\phi_0 = \dfrac{z_0-1}{z_0}$, $\tan\phi_1 = \dfrac{z_1-1}{z_1}$ y $\tan\phi_2 = \dfrac{z_2-5}{z_2}$. Además denotaremos por ϕ_4 el angulo que forma el rayo que une el origen con el punto de intersección del plano $z=5$ con la esfera $x^2+y^2+z^2 = 6z$, tal ángulo cumple que $\tan\phi_4 = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

• *Coordenadas Cilíndricas:* Procedemos transformando las gráficas presentes

$$\begin{aligned}
z = 1+\sqrt{x^2+y^2} &\longrightarrow z = 1+r \\
z = 5+\sqrt{x^2+y^2} &\longrightarrow z = 5+r \\
x^2+y^2+z^2 = 6z &\longrightarrow r^2+z^2 = 6z \\
x^2+y^2+z^2 = 4 &\longrightarrow r^2+z^2 = 4
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{z_0}^{2}\int_{\sqrt{4-z^2}}^{z-1}(5-z)r\,dr\,dz\,d\theta + \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{2}^{z_1}\int_{0}^{z-1}(5-z)r\,dr\,dz\,d\theta + \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{z_1}^{5}\int_{0}^{\sqrt{6z-z^2}}(5-z)r\,dr\,dz\,d\theta \\
&+ \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{5}^{z_2}\int_{z-5}^{\sqrt{6z-z^2}}(z-5)r\,dr\,dz\,d\theta
\end{aligned}$$

• *Coordenadas Esféricas:* Procedemos transformando las gráficas presentes

$$\begin{aligned}
z = 1+\sqrt{x^2+y^2} &\longrightarrow \rho_1 = \frac{1}{\cos\phi - \sin\phi} \\
z = 5+\sqrt{x^2+y^2} &\longrightarrow \rho_2 = \frac{5}{\cos\phi - \sin\phi} \\
x^2+y^2+z^2 = 6z &\longrightarrow \rho_3 = 6\cos\phi \\
x^2+y^2+z^2 = 4 &\longrightarrow \rho_4 = 2 \\
z = 5 &\longrightarrow \rho_5 = \frac{5}{\cos\phi}
\end{aligned}$$

luego si definimos $g(\rho,\phi,\theta) = (5-\rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi$ se tiene que

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{\phi_0}\int_{\rho_4}^{\rho_5} g(\rho,\phi,\theta)\,d\rho\,d\phi\,d\theta + \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{\phi_0}^{\phi_4}\int_{\rho_1}^{\rho_5} g(\rho,\phi,\theta)\,d\rho\,d\phi\,d\theta + \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{\phi_4}^{\phi_1}\int_{\rho_1}^{\rho_3} g(\rho,\phi,\theta)\,d\rho\,d\phi\,d\theta \\
&- \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{\phi_2}\int_{\rho_5}^{\rho_2} g(\rho,\phi,\theta)\,d\rho\,d\phi\,d\theta - \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{\phi_2}^{\phi_4}\int_{\rho_5}^{\rho_3} g(\rho,\phi,\theta)\,d\rho\,d\phi\,d\theta
\end{aligned}$$

19. Considere el sólido D definido por

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 4, \quad x^2+y^2+z^2 \geq 1, \quad z \geq x^2+y^2-1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}$$

y sea $f : D \to \mathbb{R}$ la función densidad de masa del sólido, definida por $f(x,y,z) = z(x^2+y^2)$. Encuentre la masa del sólido D.

Solución: Utilizando coordenadas cilíndricas, tenemos que

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 = 4 &\implies r^2+z^2 = 4 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 &\implies r^2+z^2 = 1 \\ z = x^2+y^2-1 &\implies z = r^2-1 \end{aligned}$$

además el intercepto entre $r^2+z^2=4$ y $z = r^2-1$ viene dada por $r = u = \sqrt{\frac{1+\sqrt{13}}{2}}$, de esta forma la masa viene dada por

$$\text{Masa}(D) = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_{\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} zr^3 dzdrd\theta + \int_0^{\pi/2}\int_1^u\int_{r^2-1}^{\sqrt{4-r^2}} zr^3 dzdrd\theta,$$

integrando se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Masa}(D) &= \frac{\pi}{4}\left(\int_0^1 r^3(4-r^2-1+r^2)dr + \int_1^u r^3(4-r^2-(r^2-1)^2)dr\right) \\ &= \frac{\pi}{4}\left(\int_0^1 3r^3dr + \int_1^u r^3(4-r^2-r^4+2r^2-1)dr\right) \\ &= \frac{\pi}{4}\left(\int_0^1 3r^3dr + \int_1^u r^3(3+r^2-r^4)dr\right) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{71}{48}+\frac{13\sqrt{13}}{48}\right) \end{aligned}$$

20. Sea $\alpha > \beta > 0$. Encuentre el valor del volumen de la region comprendida entre

$$\begin{aligned} x &= \alpha + z^2 + y^2 \\ x &= \beta + 5z^2 + 10y^2 \end{aligned}$$

además obtener las componentes de los centros de masa, considere que la densidad es constante.

Solución: Sea Ω la región limitada por los paraboloides

$$\begin{aligned} \alpha + z^2 + y^2 &= \beta + 5z^2 + 10y^2 \\ 4z^2 + 9y^2 &= \alpha - \beta \end{aligned}$$

Utilizando coordenadas cilíndricas se tiene que

$$\begin{cases} z = \dfrac{r\cos\theta}{2} \\ \\ y = \dfrac{r\sin\theta}{3} \end{cases} \implies \begin{array}{c} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq \sqrt{\alpha-\beta} \\ \beta + \dfrac{5r^2}{4}\cos^2\theta + \dfrac{10r^2}{9}\sin^2\theta \leq x \leq \alpha + \dfrac{r^2}{4}\cos^2\theta + \dfrac{r^2}{9}\sin^2\theta \end{array}$$

El jacobiano de la transformación corresponde a $\dfrac{r}{6}$, así el volumen de Ω se puede obtener como

$$\begin{aligned} Vol(\Omega) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\alpha-\beta}}\int_{\beta+\frac{5r^2}{4}\cos^2\theta+\frac{10r^2}{9}\sin^2\theta}^{\alpha+\frac{r^2}{4}\cos^2\theta+\frac{r^2}{9}\sin^2\theta} \frac{r}{6}dxdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\alpha-\beta}} \frac{r(\alpha-\beta-r^2)}{6}drd\theta = \frac{\pi}{3}\int_0^{\sqrt{\alpha-\beta}} r(\alpha-\beta-r^2)dr \\ &= -\frac{\pi}{12}(\alpha-\beta-r^2)^2\Big|_0^{\sqrt{\alpha-\beta}} = \frac{\pi}{12}(\alpha-\beta)^2 \end{aligned}$$

21. El centro de un círculo de radio a se ubica a una distancia $b > a$ del eje y. El círculo y el eje están en el mismo plano. Cuando el círculo gira alrededor del eje y se genera una superficie S cuya ecuación es

$$x^2 + z^2 = (b + \sqrt{a^2 - y^2})^2.$$

Usando integrales múltiples determine la masa del sólido Ω el cual está encerrado por la superficie S, considere que la densidad en cada punto de Ω es

$$\rho(x, y, z) = 2|y|\sqrt{x^2 + z^2}.$$

Además determine la coordenada x del centro de masa.

Solución: Un corte en el nivel $y = 0$ nos permite notar que Ω_{xz} correspondiente al anillo descrito por $(b-a)^2 \leq x^2 + z^2 \leq (b+a)^2$ ubicado en el plano xz es el dominio de la superficie. Luego si utilizamos coordenadas cilíndricas, se tiene que el sólido se describe como

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ z = r\sin\theta \\ y = \sqrt{a^2 - (r-b)^2} \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ b - a \leq r \leq b + a \\ -\sqrt{a^2 - (r-b)^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - (r-b)^2} \end{array}$$

Así la masa del solido viene determinada por

$$\begin{aligned} \text{Masa}(\Omega) &= \int\int\int_{\Omega} \rho(x, y, z) dV \\ &= 2\int_0^{2\pi}\int_{b-a}^{b+a}\int_{-\sqrt{a^2-(r-b)^2}}^{\sqrt{a^2-(r-b)^2}} r^2|y| dydrd\theta = 4\int_0^{2\pi}\int_{b-a}^{b+a}\int_0^{\sqrt{a^2-(r-b)^2}} yr^2 dydrd\theta \\ &= 2\int_0^{2\pi}\int_{b-a}^{b+a} \left(a^2 - (r-b)^2\right) r^2 drd\theta = 4\pi\int_{b-a}^{b+a} \left(a^2 - (r-b)^2\right) r^2 dr = 16\pi\left(\frac{a^5}{15} + \frac{a^3b^2}{3}\right) \end{aligned}$$

22. Considere el sólido Ω definido como

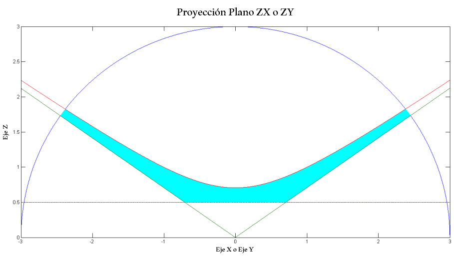
$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ 2z^2 \geq x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \quad x^2 + y^2 + 1 \geq 2z^2, \quad 2z \geq 1\right\},$$

si la densidad en cada punto del sólido es $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

(a) Exprese las integrales iteradas que permiten calcular en coordenadas esféricas la masa del sólido Ω.

(b) Exprese las integrales iteradas que permiten calcular en coordenadas cilíndricas el momento de inercia respecto al origen del sólido Ω.

Solución:



Notamos que al graficar una proyección en el plano zx o zy nos permite observar la siguiente región. Dentro de la región de interés, se tiene que el cono y la esfera se cortan en el punto $z = \sqrt{3}$ mientras que la esfera y el hiperboloide se cortan en el punto $z = \sqrt{10/3}$, así:

(a) Las ecuaciones en coordenadas esféricas son

$$\begin{array}{lll} 2z^2 \geq x^2 + y^2 & \longrightarrow & \phi = \arctan\sqrt{2}/2 \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 & \longrightarrow & \rho = 3 \\ x^2 + y^2 + 1 \geq 2z^2 & \longrightarrow & \rho = (2\cos^2\phi - \sin^2\phi)^{-1/2} \\ 2z \geq 1 & \longrightarrow & \rho = (2\cos\phi)^{-1} \end{array}$$

$$\text{Masa} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\phi_0}\int_{(2\cos\phi)^{-1}}^{(2\cos^2\phi - \sin^2\phi)^{-1/2}} \rho^4 \sin\phi d\rho d\phi d\theta + \int_0^{2\pi}\int_{\phi_0}^{\phi_1}\int_{(2\cos\phi)^{-1}}^{3} \rho^4 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$$

donde $\tan\phi_0 = \sqrt{17/10}$ y $\tan\phi_1 = \sqrt{2}$

(b) Las ecuaciones en coordenadas cilíndricas son

$$\begin{array}{lcl} 2z^2 \geq x^2+y^2 & \longrightarrow & 2z^2 = r^2 \\ x^2+y^2+z^2 \leq 9 & \longrightarrow & r^2+z^2 = 9 \\ x^2+y^2+1 \geq 2z^2 & \longrightarrow & r^2+1 = 2z^2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Inercia} &= \int_0^{2\pi}\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2}\int_0^{\sqrt{2}z}(r^2+z^2)^2 r\,dr\,dz\,d\theta + \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}}\int_{\sqrt{2z^2-1}}^{\sqrt{2}z}(r^2+z^2)^2 r\,dr\,dz\,d\theta \\ &+ \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{10/3}}\int_{\sqrt{2z^2-1}}^{\sqrt{9-z^2}}(r^2+z^2)^2 r\,dr\,dz\,d\theta \end{aligned}$$

23. Sea Ω la región descrita mediante $\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ |x|+|y|+|z|\leq 1\right\}$, determine para que valores del parámetro $m\in\mathbb{R}$ la integral

$$\iiint_\Omega \frac{1+\sin^2(x^2+y^2)}{(4x^2+y^2+9z^2)^{m/2}}\ dV,$$

es convergente

Solución: Para acotar la integral buscaremos un conjunto Ω_1 tal que $\Omega\subset\Omega_1$, con lo anterior procedemos de la siguiente forma:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)g(x,y,z)dV \leq \max_{(x,y,z)\in\Omega} f(x,y,z)\iiint_\Omega g(x,y,z)dV \leq \max_{(x,y,z)\in\Omega} f(x,y,z)\iiint_{\Omega_1} g(x,y,z)dV$$

luego

$$I \leq \iiint_\Omega \frac{2}{(4x^2+y^2+9z^2)^{m/2}}dV,$$

definimos $\Omega_1 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ 4x^2+y^2+9z^2\leq 36\right\}$ y esta región cumple que $\Omega\subset\Omega_1$, asi tenemos que

$$I \leq \iiint_\Omega \frac{2}{(4x^2+y^2+9z^2)^{m/2}}dV \leq \iiint_{\Omega_1} \frac{2}{(4x^2+y^2+9z^2)^{m/2}}dV,$$

en la cual se utiliza coordenadas esféricas,

$$\begin{array}{rcl} x &=& \frac{\rho}{2}\sin\phi\cos\theta, \\ y &=& \rho\sin\phi\sin\theta, \\ z &=& \frac{\rho}{3}\cos\phi, \end{array}$$

cuyo jacobiano es $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = \dfrac{\rho^2\sin\phi}{6}$, lo que permite obtener que

$$I \leq \iiint_{\Omega_2} \frac{1}{(4x^2+y^2+9z^2)^{m/2}}dV = \lim_{a\to 0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^6 \frac{\rho^2\sin\phi}{6\rho^m}d\rho d\phi d\theta = 2\pi\lim_{a\to 0}\int_a^6 \rho^{2-m}d\rho,$$

es decir

$$I \leq 2\pi\lim_{a\to 0}\left\{\frac{6^{3-m}}{3-m}-\frac{a^{3-m}}{3-m}\right\},$$

la cual va a ser convergente si $3-m>0$, o bien $m<3$. Para analizar para que valores del parámetros m la integral diverge construiremos un conjunto Ω_2 tal que $\Omega_2\subset\Omega$, asi

$$\min_{(x,y,z)\in\Omega_2} f(x,y,z)\iiint_{\Omega_2} g(x,y,z)dV \leq \iiint_{\Omega_2} f(x,y,z)g(x,y,z)dV \leq \iiint_\Omega f(x,y,z)g(x,y,z)dV$$

así definiremos $\Omega_2 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ 4x^2+y^2+9z^2\leq 1\right\}$ el cual cumple que $\Omega_2\subset\Omega$, de esta forma

$$\iiint_{\Omega_2} \frac{1}{(4x^2+y^2+9z^2)^{m/2}}dV \leq \iiint_\Omega \frac{1+\sin^2(x^2+y^2)}{(4x^2+y^2+9z^2)^{m/2}}\ dV,$$

usando nuevamente coordenadas esféricas se tiene que

$$I \geq \lim_{a\to 0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_a^1 \frac{\rho^2 \sin\phi}{6\rho^m} d\rho d\phi d\theta = 2\pi \lim_{a\to 0} \int_a^1 \rho^{2-m} d\rho$$

es decir

$$I \geq 2\pi \lim_{a\to 0} \left\{ \frac{1}{3-m} - \frac{a^{3-m}}{3-m} \right\},$$

asi la integral diverge si $m > 3$. Para el caso $m = 3$ la integral diverge pues $\lim_{a\to 0} \int_a^1 \rho^{-1} d\rho = +\infty$

24. Determine la componente y del centroide del solido definido por

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \quad \frac{x^2}{9} + (y-1)^2 + z^2 \leq 16, \quad z^2 + \frac{x^2}{9} \geq 4|z| \right\}$$

Solución: Consideramos la transformación en coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned} x &= 3r\cos\theta \\ z &= r\sin\theta \\ y &= y \end{aligned}$$

donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y el jacobiano de la transformación es $3r$, luego reemplazando en las ecuaciones se tiene

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{9} + (y-1)^2 + z^2 \leq 16 &\implies r^2 + (y-1)^2 \leq 16 \\ z^2 + \frac{x^2}{9} \geq 4|z| &\implies r^2 \geq 4r|\sin\theta| \end{aligned}$$

de las desigualdades anteriores se tiene $4|\sin\theta| \leq r \leq \sqrt{16-(y-1)^2}$, de esta forma es necesario que

$$\begin{aligned} (y-1)^2 \leq 16 &\implies 3 \leq y \leq 5 \\ 16 - (y-1)^2 \geq 16|\sin\theta|^2 &\implies -4|\cos\theta| + 1 \leq y \leq 1 + 4|\cos\theta| \end{aligned}$$

luego $1 - 4|\cos\theta| = \text{máx}\{-3, 1-4|\cos\theta|\} \leq y \leq \text{mín}\{5, 1+4|\cos\theta|\} = 1 + 4\cos\theta$. Así la coordenada y del centroide es

$$\overline{y} = \frac{\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_{1-4|\cos\theta|}^{1+4|\cos\theta|} \int_{4|\sin\theta|}^{\sqrt{16-(y-1)^2}} 3yr\,dr\,dy\,d\theta}{\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_{1-4|\cos\theta|}^{1+4|\cos\theta|} \int_{4|\sin\theta|}^{\sqrt{16-(y-1)^2}} 3r\,dr\,dy\,d\theta}$$

25. Para $0 < t < 1$ se define la función

$$I(t) = \iiint_{\Omega_t} xyz \sin^2(x^4 + y^4 + z^4) dV,$$

en la cual el dominio Ω_t está definido como $\Omega_t = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^4 + y^4 + z^4 \leq t^4, \ \ 0 \leq x \leq y, \ \ z \geq 0\}$. Determine una cota superior para $I'(t)$.

Solución: Consideramos el cambio de variables $u = x^2$, $v = y^2$, $w = z^2$, luego la imagen de Ω_t bajo la transformación propuesta es

$$\Omega_{uvw} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ u^2 + v^2 + w^2 \leq t^4, \ \ 0 \leq u \leq v, \ \ w \geq 0\},$$

El jacobiano de la transformación es

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x.y,z)} = \begin{vmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 2z \end{vmatrix} = 8xyz,$$

así se tiene que

$$
\begin{aligned}
I(t) &= \frac{1}{8}\iiint_{\Omega_{uvw}} \sin^2\left(u^2+v^2+w^2\right) dudvdw \\
&= \frac{1}{8}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{t^2} \sin^2\left(\rho^2\right)\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta = \frac{\pi}{32}\int_0^{t^2}\sin^2\left(\rho^2\right)\rho^2 d\rho
\end{aligned}
$$

aplicando el teorema fundamental del cálculo se tiene

$$
I'(t) = \frac{\pi}{32}\sin^2\left(t^4\right)\cdot t^4\cdot 2t,
$$

y como $\sin^2\left(t^4\right) \leq 1$ y $t<1$, se obtiene que

$$
I'(t) \leq \frac{\pi}{16}
$$

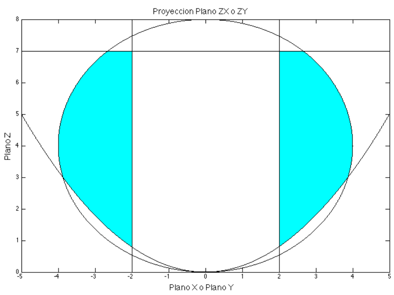
26. Considere el sólido $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ descrito mediante

$$
\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2\leq 8z, \ \ 2z\geq x^2+y^2, \ \ x^2+y^2\geq 4, \ \ z\leq 7\right\}.
$$

(a) Exprese las integrales iteradas que permiten calcular el volumen del sólido Ω mediante coordenadas cilíndricas en los órdenes $dzdrd\theta$ y $drdzd\theta$, respectivamente.

(b) Calcule el volumen de Ω usando alguno de los resultados obtenidos en (a).

Solución:



Un grafico de la proyección de la región solicitada en el plano zx o zy es el mostrado en la figura. Posteriormente procedemos interceptando las superficies $x^2+y^2+z^2=8z$ con $2z=x^2+y^2$ esto para obtener el nivel de corte entre ambas, así tenemos que $z^2-6z=0$ cuya ecuación tiene como solución $z=0$ y $z=6$. La intersección entre el paraboloide y el cilindro se obtiene en el nivel $z=2$, posteriormente mediante el uso de coordenadas cilíndricas, se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2+z^2 = 8z &\longrightarrow r^2+z^2=8z \\
2z = x^2+y^2 &\longrightarrow 2z=r^2
\end{aligned}
$$

luego las integrales para obtener el volumen de la región solicitada en los ordenes pedidos son:

$$
\begin{aligned}
\text{Volumen} &= \int_0^{2\pi}\int_2^6\int_2^{\sqrt{2z}} rdrdzd\theta + \int_0^{2\pi}\int_6^7\int_2^{\sqrt{8z-z^2}} rdrdzd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_2^{\sqrt{7}}\int_{r^2/2}^7 rdzdrd\theta + \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{7}}^{\sqrt{12}}\int_{r^2/2}^{4+\sqrt{16-r^2}} rdzdrd\theta
\end{aligned}
$$

Procedemos calculando la integral en el orden $drdzd\theta$, de esta forma

$$
\begin{aligned}
\text{Volumen} &= \int_0^{2\pi}\int_2^6\int_2^{\sqrt{2z}} rdrdzd\theta + \int_0^{2\pi}\int_6^7\int_2^{\sqrt{8z-z^2}} rdrdzd\theta \\
&= 2\pi\int_2^6\int_2^{\sqrt{2z}} rdrdz + 2\pi\int_6^7\int_2^{\sqrt{8z-z^2}} rdrdz \\
&= \pi\left(\int_2^6 (2z-4)dz + \int_6^7 (8z-z^2-4)dz\right) = \frac{65\pi}{3}
\end{aligned}
$$

Integrales Triples: Problemas Propuestos

1. Determine el volumen del sólido $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ descrito mediante:
$$\Omega = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 10, \quad |x| \leq 1\Big\}$$

2. Plantear en algún sistema de coordenadas las integrales iteradas que permiten calcular el volumen del sólido $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ descrito mediante:
$$\Omega = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z, \quad 1 \leq z \leq 4 - x\Big\}$$

3. Considere el cubo $R = [-10, 10] \times [-10, 10] \times [-10, 10]$, además de la función ρ definida mediante
$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} z(x^2 + y^2) & \text{si } \ x^2 + y^2 \leq 9, \\ \\ -1 & \text{si } \ x^2 + y^2 > 9. \end{cases}$$
Encuentre
$$\iiint_R \rho(x, y, z) dV$$

4. Si $h(x, y, z)$ es una función continua en todo $\mathbb{R}^3$. Verifique o refute la siguiente afirmación
$$\int_0^1 \int_0^x \int_z^x h(x, y, z) dydzdx = \int_0^1 \int_0^y \int_y^1 h(x, y, z) dxdzdy$$
Ayuda: Graficar la región.

5. Suponga que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función continua. Bosqueje la región de integración para la siguiente integral y luego cambie el orden de integración a $dxdydz$
$$\int_0^3 \int_0^{\frac{6-2x}{3}} \int_0^{\frac{6-2x-3y}{2}} f(x, y, z) dzdydx$$

6. Verifique que
$$z(x) = \int_0^x \int_0^t \int_u^t \left(\frac{t}{s}\right)^a f(u) dsdudt$$
satisface el siguiente problema
$$\begin{aligned} x^a y''(x) + a x^{a-1} y'(x) &= f(x) \\ z'(x) &= x^a y(x) \\ y(0) = y'(0) = z(0) &= 0 \end{aligned}$$
Ayuda: Derivar la función $z(x)$ y usar la regla de la cadena.

7. Evalué usando coordenadas esféricas:
   (a) $\displaystyle\iiint_S x^2 dV$, donde S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.
   (b) $\displaystyle\iiint_S z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV$, donde S es la región dentro del cono $\phi = \alpha$ y dentro de la esfera $\rho = b$.

8. Determine el valor de la integral triple $\displaystyle\iiint_\Omega z \ dV$. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es la región encerrada por la parte interior de $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 9$ y la parte superior de $z = x^2 + y^2$.

9. Considere la región D definida como

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z \geq \sqrt{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2+z^2 \leq 9, \quad x^2+y^2+1 \geq z^2, \quad z \geq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\right\},$$

y la integral triple

$$I = \iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)^{3/2} dV$$

(a) Exprese las integrales iteradas que permiten calcular I en coordenadas esféricas en el orden $d\rho d\phi d\theta$ y $d\phi d\rho d\theta$.

(b) Exprese las integrales iteradas que permiten calcular I en coordenadas cilíndricas en el orden $drdzd\theta$ y $dzdrd\theta$.

10. Sea el dominio $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x^{2/5} + y^{2/5} \leq a^{2/5}, \ \ -a \leq z \leq a\}$, con $a > 0$. Considere el cambio de coordenadas

$$T : \begin{cases} x = u\cos^5 v \\ y = u\sin^5 v \\ z = w \end{cases}$$

(a) Verifique que T es una transformación de coordenadas válida.

(b) Obtenga la imagen de Ω bajo tal transformación.

(c) Calcule $\displaystyle\iiint_\Omega f(x,y,z)dV$, si $f(x,y,z) = z^2(a^{2/5} - x^{2/5} - y^{2/5})^2$.

(d) Si Ω es un objeto de densidad de masa $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^{2/5}+y^{2/5}}$, encuentre el centro de masa de Ω.

11. Sea $\mathcal{D}$ un cuerpo sólido que ocupa la región del espacio comprendida sobre el plano $z = 2$ y dentro de la esfera centrada en el origen de radio 4. Suponga que la densidad puntual de $\mathcal{D}$ está dada por la función

$$\sigma(x,y,z) = \frac{1}{d(x,y,z)}$$

donde $d(x,y,z)$ representa la distancia entre el punto (x,y,z) y el origen. Encuentre la masa total del sólido $\mathcal{D}$.

12. Considere el cuerpo Ω en $\mathbb{R}^3$ que ocupa la región limitada por la superficie de revolución $(x^2+y^2+z^2)^2 = x^2+y^2$ con $z \geq 0$. Sea $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_0^+$ la función definida por $\rho(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}$, la densidad del cuerpo en el punto (x,y,z). Hallar las coordenadas del centro de masa.

13. Sea $\mathbb{D}$ un sólido delimitado por: $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 5$, $xy = 1$, $xy = 4$, $x + y + 3z = 2$ y $x + y + 3z = m$, $x > 0$ con densidad $\rho(x,y,z) = g(x^2-y^2)$, $g(u) > 0$, $\forall u$. Además, considere un segundo sólido $\mathbb{E}$ delimitado por: $0 \leq z \leq g(x)$, $-x \leq y \leq 5 - x$, $1 \leq x \leq 5$, cuya densidad en cada punto es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al eje z. Determine bajo qué condiciones del parámetro m, el momento de inercia del sólido $\mathbb{D}$ es mayor que el momento de inercia del sólido $\mathbb{E}$, donde ambos momentos se calculan con respecto al eje z.

14. Considere la región Ω definida como

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z \geq x^2+y^2, \quad z \leq \min\{2 + \sqrt{x^2+y^2}, \sqrt{9-x^2-y^2}\}, \quad x^2+y^2+z^2 \geq 4\right\},$$

y la integral triple

$$I = \iiint_\Omega ze^{x^2+y^2} dV$$

(a) Exprese las integrales iteradas que permiten calcular I en coordenadas cilíndricas.

(b) Exprese las integrales iteradas que permiten calcular I en coordenadas esféricas.

15. Sea Ω la región descrita mediante $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 4x^2 + y^2 + 9z^2 \leq 36\right\}$, determine para que valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$ la integral

$$\iiint_\Omega \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^m}\, dV,$$

es convergente

16. Considere $0 \leq a \leq 1$. Luego definamos la región Ω como

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \quad |x| + |y| \leq 1\},$$

además considerar $f(x,y)$ y $g(x,y)$ dadas por

$$f(x,y) = \text{máx}\{y, a+x\} \quad \wedge \quad g(x,y) = \text{mín}\{-a-x, -y\}.$$

Encuentre el valor del parámetro a de modo que

$$\iint_\Omega \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} dz dA = \frac{9}{4}$$