Pauta de Corrección

Primer Certamen
Introducción a la Informática Teórica

2 de junio de 2012

1. Tenemos:

   (a) Podemos representar $\mathscr{L}_a = \mathscr{L}_{a1} \cdot \mathscr{L}_{a2}$, donde $\mathscr{L}_{a1} = \{a^i b^j c^{i+j+2} \colon 1 \leq i, j \leq 10\}$ (finito, y por lo tanto regular) y $\mathscr{L}_{a2}$ es el lenguaje representado por la expresión regular c^*. Como ambos son regulares, su concatenación es regular.

   (b) Podemos representar $\mathscr{L}_b = (\mathscr{L}_{b1} \cup \mathscr{L}_{b2}) \cap \overline{\mathscr{L}_{b3}}$, donde:

   $\mathscr{L}_{b1}$: Strings que contienen abc, representados por la expresión regular $(a \mid b \mid c)^* abc(a \mid b \mid c)^*$

   $\mathscr{L}_{b2}$: Strings que contienen cba, representados por la expresión regular $(a \mid b \mid c)^* cba(a \mid b \mid c)^*$

   $\mathscr{L}_{b3}$: Strings con $aabbcc$, representados por la expresión regular $(a \mid b \mid c)^* aabbcc(a \mid b \mid c)^*$

   Como los lenguajes regulares son cerrados respecto de unión, intersección y complemento, $\mathscr{L}_b$ es regular.

   (c) No es regular, lo que demostramos por contradicción. Supongamos que $\mathscr{L}_c$ es regular, entonces es aplicable el lema de bombeo. Sea N la constante del lema, elegimos $\sigma = a^{p^2}$ tal que $p^2 \geq N$, donde p es primo. Con esto $\sigma \in \mathscr{L}_c$. Por el lema, podemos escribir $\sigma = \alpha\beta\gamma$, con $\beta \neq \epsilon$ tal que $\alpha\beta^k\gamma \in \mathscr{L}_c$ para todo $k \geq 0$. Como

   $$|\alpha\beta^k\gamma| = p^2 + (k-1)|\beta|$$

   si elegimos $k = p^2 + 1$ esto es

   $$\begin{aligned} |\alpha\beta^{p^2+1}\gamma| &= p^2 + p^2|\beta| \\ &= p^2(1 + |\beta|) \end{aligned}$$

   Como $|\beta| \geq 1$ esta última expresión tiene al menos tres factores primos, y el string no pertenece al lenguaje $\mathscr{L}_c$.

Puntajes

Total		30
a)	8	
Descomposición en partes regulares	6	
Conclusión	2	
b)	10	
Descomposición en partes regulares	8	
Conclusión	2	
c)	14	
Planteo de contradicción	4	
Elección de σ	3	
Bombear	3	
Contradicción	4	

2. Por turno:

   (a) Un NFA para este lenguaje es el de la figura 1. Un DFA es un poco más complejo, véase la figura 2.

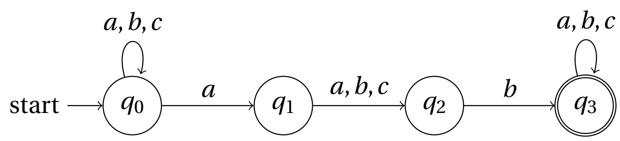

Figure 1: Un NFA para el lenguaje de la pregunta 2

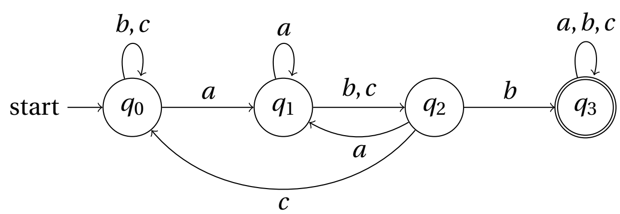

Figure 2: Un DFA para el lenguaje de la pregunta 2

   (b) Una expresión regular es:

$$(a \mid b \mid c)^* \, a \, (a \mid b \mid c) \, b \, (a \mid b \mid c)^*$$

Puntajes

Total	20
a) Autómata	10
b) Expresión regular	10

3. Dados DFAs M_1 para $\mathscr{L}_1$ y M_2 para $\mathscr{L}_2$, construimos un DFA que escencialmente da un paso en M_1 y en M_2 alternadamente.

   Formalmente, sean $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ tal que $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}(M_1)$ y $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ tal que $\mathscr{L}_2 = \mathscr{L}(M_2)$. Definimos $M = (Q, \Sigma, \delta, q, F)$ donde:

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 \times Q_2 \times \{1, 2\} \qquad \text{(el tercer componente indica de quién es el turno)} \\ q &= (q_1, q_2, 1) \\ F &= F_1 \times F_2 \times \{1\} \end{aligned}$$

   Definimos la función δ para todo $a \in \Sigma$, $q' \in Q_1$, $q'' \in Q_2$, $t \in \{1, 2\}$ mediante:

$$\delta((q', q'', t), a) = \begin{cases} (\delta_1(q', a), q'', 2) & \text{si } t = 1 \\ (q', \delta_2(q'', a), 1) & \text{si } t = 2 \end{cases}$$

   El autómata M parte en el turno de M_1, da alternadamente pasos de M_1 y M_2, y acepta sólo si M_1 aceptó en su última movida, M_2 aceptó y el turno es de M_1 (la movida final fue de M_2).

   Otra opción es construir un lenguaje a partir de $\mathscr{L}_1$ compuesto por los símbolos de los string de $\mathscr{L}_1$ en las posiciones impares y símbolos arbitrarios en las pares, y otro a partir de $\mathscr{L}_2$ con símbolos de strings de $\mathscr{L}_2$ en las posiciones pares y símbolos arbitrarios en las impares. La intersección entre ambos elige símbolos de un string $\sigma_1 \in \mathscr{L}_1$ para las posiciones impares y símbolos de un string $\sigma_2 \in \mathscr{L}_2$ para las posiciones impares, además que fuerza que σ_1 y σ_2 tengan el mismo largo.

   Para ello definimos substituciones para todo $a \in \Sigma$, identificando Σ con el respectivo lenguaje de strings de largo uno:

$$\begin{aligned} s_1(a) &= a\Sigma \\ s_2(a) &= \Sigma a \end{aligned}$$

   Entonces SHUFFLE$(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2) = s_1(\mathscr{L}_1) \cap s_2(\mathscr{L}_2)$; como todos los lenguajes de partida son regulares y las operaciones involucradas preservan regularidad, SHUFFLE$(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2)$ es regular.

Puntajes

Total		25
Idea de la construcción	10	
Construcción formal	15	

4. Por la forma de las producciones, vemos que:

$$
\begin{aligned}
S &\Rightarrow ab \\
S &\Rightarrow aSb \\
&\Rightarrow aaSbb \\
&\vdots \\
&\Rightarrow a^{n-1}Sb^{n-1} \\
&\Rightarrow a^n b^n
\end{aligned}
$$

Formalmente, es una demostración por inducción. Primero demostramos que $S \Rightarrow^* a^n S b^n$ para $n \in \mathbb{N}$.

Base: Como $S \rightarrow aSb$, es $S \Rightarrow aSb$, el caso $n = 1$.

Inducción: Suponiendo que $S \Rightarrow^* a^n S b^n$, aplicando la producción $S \rightarrow aSb$ obtenemos $S \Rightarrow^* a^{n+1} S b^{n+1}$.

Por inducción vale lo aseverado.

Con ésto, demostramos que $S \Rightarrow^* a^n b^n$: Si $n = 1$, tenemos la producción $S \rightarrow ab$; para $n > 1$ tenemos que $S \Rightarrow a^{n-1} S b^{n-1} \Rightarrow a^n b^n$. No hay caminos de producción alternativos, es exactamente $\mathscr{L}(G) = \{a^n b^n : n \geq 1\}$.

Puntajes

Total		15
Producción $S \rightarrow aSb$ genera $a^{n-1}Sb^{n-1}$	8	
Producción $S \rightarrow ab$ da ab ó remata $a^n b^n$	7	

5. El primer símbolo de lo que nos va quedando por generar dirige la construcción de la derivación de extrema izquierda; dada ésta está determinado el árbol de derivación, y de él se extrae la derivación de extrema derecha sin dificultad.

   (a) La derivación de extrema izquierda, indicando la producción empleada en cada paso, es:

$$
\begin{aligned}
S &\Rightarrow aB & \qquad & S \to aB \\
&\Rightarrow aaBB & & B \to aBB \\
&\Rightarrow aaaBBB & & B \to aBB \\
&\Rightarrow aaabBB & & B \to b \\
&\Rightarrow aaabbB & & B \to aBB \\
&\Rightarrow aaabbaBB & & B \to b \\
&\Rightarrow aaabbabB & & B \to b \\
&\Rightarrow aaabbabb & &
\end{aligned}
$$

   (b) La derivación de extrema derecha resulta del árbol de derivación:

$$
\begin{aligned}
S &\Rightarrow aB & \qquad & S \to aB \\
&\Rightarrow aaBB & & B \to aBB \\
&\Rightarrow aaBaBB & & B \to b \\
&\Rightarrow aaBaBb & & B \to b \\
&\Rightarrow aaBabb & & B \to aBB \\
&\Rightarrow aaaBBabb & & B \to b \\
&\Rightarrow aaaBbabb & & B \to b \\
&\Rightarrow aaabbabb & &
\end{aligned}
$$

   (c) El árbol de derivación es el indicado en la figura 3.

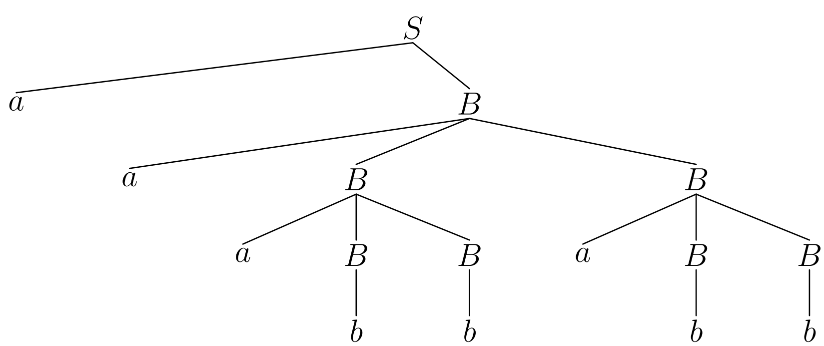

Figure 3: Árbol de derivación para la pregunta 5

Puntajes

Total	20
a) Derivación de extrema izquierda	6
b) Derivación de extrema derecha	6
c) Árbol de derivación	8