Estructuras Discretas
Tarea 1

Juan Pablo León

25 de Marzo de 2015

Preguntas

1. Nos piden demostrar que las propiedades de las relaciones son independientes unas de otras mediante ejemplos. Específicamente nos piden mostrar que hay relaciones que son:

   a) Transitivas y reflexivas.

   Sea la relacion R "igual a" y a, b y c números reales. Diremos que

   $$aRb \iff a = b$$

   Fácilmente podemos comprobar la transitividad de esta relación pues

   $$aRb \wedge bRc \iff a = b \wedge b = c$$

   por lo que

   $$a = c \implies aRc$$

   Es sencillo observar que la reflexividad se cumple pues cualquier número es igual a sí mismo:

   $$a = a \implies aRa, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

   Otro ejemplo sería una relación R "viven en la misma ciudad" que relaciona a distintas personas a, b y c. Si la persona a vive en la misma ciudad que la persona b, entonces aRb, si la persona b vive en la misma ciudad que la persona c, entonces bRc. Como ya sabemos que a y b comparten la misma ciudad, entonces a y c tambien viven en la misma ciudad, por lo que aRc y se prueba la transitividad. La reflexividad se cumple fácilmente pues uno vive en la misma ciudad que uno mismo, aRa.

b) Transitivas y no reflexivas.

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Un ejemplo clásico de este tipo de relaciones es la relación R "menor que", donde

$$aRb \Longleftrightarrow a < b$$

Si tenemos que

$$a < b \wedge b < c \Longrightarrow aRb \wedge bRc$$

donde

$$a < b < c \Longrightarrow a < c \Longrightarrow aRc$$

y se cumple la transitividad. En el caso de la no reflexividad esta se cumple puesto que ningún numero es menor que sí mismo, o sea

$$\nexists a \in \mathbb{R}, \quad a < a$$

por ende aRa nunca se cumple.

Un ejemplo similar al anterior es la relación R "más alto que" con a, b y c personas distintas. Si decimos que a es más alto que b (tiene mayor altura) entonces aRb, pero si tambien b es más alto que c entonces bRc. De esto concluimos que si a es más alto que b y b a su vez es más alto que c entonces logicamente a es más alto que c, por ende aRc y se cumple la transitividad. Al igual que en el ejemplo anterior no hay persona que sea más alta que si misma por ende aRa nunca se cumple y se prueba que la relacion es no reflexiva.

c) No transitivas y reflexivas.

Sean $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$ conjuntos con al menos un elemento no nulo. Diremos que dos conjuntos estan relacionados si la intersección entre ellos es no nula, o sea que

$$R = \{(\mathscr{A}, \mathscr{B}), \exists x : x \in \mathscr{A} \wedge x \in \mathscr{B}, x \neq \varnothing\}$$

Supongamos que $\mathscr{A} = \{a, b, c\}$, $\mathscr{B} = \{a, 2, c\}$ y $\mathscr{C} = \{1, 2, 3\}$, facilmente se puede observar que $\mathscr{A}R\mathscr{B}$ ya que

$$\mathscr{A} \cap \mathscr{B} = \{a, c\} \neq \varnothing$$

y además que $\mathscr{B}R\mathscr{C}$, puesto que

$$\mathscr{B} \cap \mathscr{C} = \{2\} \neq \varnothing$$

Pero podemos ver que $\mathscr{A}$ no está relacionado con $\mathscr{C}$ ya que

$$\mathscr{A} \cap \mathscr{C} = \varnothing$$

por lo que la relación no es transitiva. A pesar de esto podemos observar que la relación es reflexiva puesto que para cualquier conjunto no vacío, la intersección con sigo mismo es el mismo conjunto, o sea

$$\forall \mathscr{A} \neq \varnothing, \quad \mathscr{A} \cap \mathscr{A} = \mathscr{A} \neq \varnothing$$

por ende siempre se cumple que $\mathscr{A} R \mathscr{A}$.

El ejemplo anterior aplicado a un caso "más real" es si consideramos una relación R "comparte al menos un ramo" que relaciona a estudiantes con distintos ramos a estudiar en un semestre. Digamos que $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$ son estudiantes distintos con $\mathscr{A}$ ={Mate021, física120}, $\mathscr{B}$ ={física120, estructuras discretas} y $\mathscr{C}$ = {estructuras discretas} los ramos de cada uno. Podemos ver que $\mathscr{A} R \mathscr{B}$ pues ambos estudiantes estan cursando física120 y que además $\mathscr{B} R \mathscr{C}$ ya que ambos comparten el ramo estructuras discretas pero podemos observar que la relación no es transitiva pues $\mathscr{A}$ no está relacionado con $\mathscr{C}$ ya que no comparten ningun ramo. Es fácil ver que a pesar de su no transitividad la relacion igual es reflexiva ya que cualquier estudiante comparte sus ramos con sigo mismo, pues tiene los mismos ramos, por lo que siempre se cumple que $\mathscr{A} R \mathscr{A}$.

d) No transitivas y no reflexivas.

Finalmente, una relación que no es transitiva ni reflexiva es la relación R "distinto de" ($\neq$). Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, si tenemos que

$$a \neq b \wedge b \neq c \Longrightarrow aRb \wedge bRc$$

Pero a puede no estar relacionado con c puesto que podemos elegir un a y c tales que $a = c$ por lo que a no está relacionado con c y R no es transitiva. En el caso de la no reflexividad, como ya se mencionó en ejemplos anteriores, si se toma un número real a cualquiera, este no puede ser distinto de sí mismo, ya que

$$a = a, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

por lo que la relación es no reflexiva.

Muy similar al primer ejemplo uno puede hablar de una relación R "vive en una ciudad distinta que" la cual relaciona a personas dependiendo de donde vivan. Sean a, b y c personas distintas, podemos tener que aRb y bRc, ya que por ejemplo a puede vivir en Viña y b en Valparaiso, pero c también puede vivir en Viña y se sigue cumpliendo que bRc puesto que viven en ciudades distintas, pero a no está relacionado con c puesto que ambos viven en la ciudad de Viña, por lo que la relación no es transitiva. Pero ¿es no reflexiva? si, puesto que todas las personas viven en la misma ciudad que ellas mismas, por lo que aRa nunca se cumple.

2. Se nos pide demostrar que la relación "divide" en los números naturales es una relación de orden. Recordar que $a \mid b$ para $a, b \in \mathbb{N}$ si hay $c \in \mathbb{N}$ tal que $b = c \cdot a$.

   Sea $aRb = a \mid b$. Para que R sea una relación de orden tiene que cumplir con ser reflexiva, transitiva y antrisimétrica. La propiedad más sencilla de probar es la reflexividad, ya que

   $$\forall a \in \mathbb{N}, \quad a = a \cdot c, \quad c = 1 \Longrightarrow aRa$$

   y se prueba la reflexividad. Para la transitivdad, sean $a, b, c, m, n \in \mathbb{N}$, se tiene que

   $$aRb \Longrightarrow a \cdot m = b \quad \wedge \quad bRc \Longrightarrow b \cdot n = c$$

   pero además esto nos dice que

   $$\begin{aligned} &(a \cdot m) \cdot n = c \\ &a \cdot (m \cdot n) = c \\ &a \cdot t = c, \quad t = (m \cdot n) \end{aligned}$$

   Entonces aRc y se cumple la transitividad.

   Para la antisimetría, sea aRb y bRa entonces

   $$\exists m, n \in \mathbb{N}, \quad a \cdot m = b \quad \wedge \quad b \cdot n = a$$

   Pero esto implica que

   $$\begin{aligned} &b = (b \cdot n) \cdot m \\ &b = b \cdot (n \cdot m) \\ &1 = (n \cdot m) \end{aligned}$$

   que implica que $m = n = 1$ puesto que $m, n \in \mathbb{N}$. Volviendo atrás, se tiene que

   $$a \cdot m = a \cdot 1 = a = b$$

   por lo que se cumple la antisimetría.

3. Se nos dice que una relación entre $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ no es más que un subconjunto de $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ y que en consecuencia tiene sentido hablar de la unión o intersección entre dos relaciones. Nos preguntan si R_1 y R_2 son relaciones transitivas, ¿es transitiva la relación $R_1 \cap R_2$?

   Sean $a, b, c \in \mathscr{A}, \mathscr{B}$. Sea $R_3 = R_1 \cap R_2$, debemos probar que si

   $$aR_3b \wedge bR_3c \Longrightarrow aR_3c$$

   O en otras palabras, si consideramos a R_3 como un conjunto de pares (x, y) entonces debemos probar que si

   $$(a, b) \in R_3 \wedge (b, c) \in R_3 \Longrightarrow (a, c) \in R_3$$

Si R_1 es transitiva, tenemos que si

$$aR_1b \wedge bR_1c \Longrightarrow aR_1c$$

igualmente para R_2, si

$$aR_2b \wedge bR_2c \Longrightarrow aR_2c$$

Con esto podemos ver que los pares (a, b) y (b, c) pertenecen a R_1 y R_2 y que su existencia implica que (a, c) también pertenesca a ambos conjuntos pues las relaciones son transitivas. Sabemos que en una intersección se mantienen los elementos que dos conjuntos tienen en común por lo que (a, b) y (b, c) pertenecen a R_3, pero como ya habíamos dicho, la existencia de estos dos elementos implicaba la existencia de (a, c) también en ambos conjuntos, por lo que (a, c) también pertenece a R_3, y por ende R_3 también es transitiva.

4. Nos dan las relaciones $R \subseteq \mathscr{A} \times \mathscr{B}$ y $S \subseteq \mathscr{B} \times \mathscr{C}$, se define su composición $S \circ R =${(a,c): hay $b \in \mathscr{B}$ tal que aRb y bSc}. Si R y S son relaciones transitivas, ¿lo es $S \circ R$?

   Para responder esta pregunta utilizaremos un contraejemplo. Supongamos que $S \circ R$ es transitiva, sean $R = \{(a, b), (b, c), (a, c), (e, d)\}$ y $S = \{(d, b), (b, e), (d, e)\}$ los conjuntos con los elementos que cumplen con cada relación respectivamente (notar que cumplen con la transitividad). Por definición tenemos que los elementos de $S \circ R$ serían entonces $S \circ R = \{(a, e), (e, b), (e, e)\}$ pero podemos apreciar que esta relación no obedece la transitividad pues no está presente el elemento (a, b) por ende

$$(a, e) \wedge (e, b) \Longrightarrow (a, b)$$

   no se cumple en $S \circ R$ y la relación entonces no es transitiva.