CERTAMEN 1 FIS-120 2do SEM.2008, UTFSM, 26 de septiembre de 2008, 19:00hrs

NOMBRE, APELLIDO:

ROL:

Hay 20+2=22 preguntas. 20 respuestas correctas y justificadas representan 100 puntos (nota de 100). 22 respuestas correctas representan 110 puntos (nota de 110), es decir, dos preguntas son un bono.
Respuesta correcta y no justificada: -4 puntos
Respuesta correcta y justificada: 100/20 = 5 puntos
Respuesta omitida: 0.8 punto.
Respuesta incorrecta: 0 punto .
Duración: 135 minutos
REVISE PRIMERO TODOS LOS PROBLEMAS Y RESUELVE PRIMERO LOS QUE LE PARECEN MAS FÁCILES.

PROBLEMAS 1-6 SE REFIEREN A LA FIGURA 1
Cargas eléctricas "fuentes" $q_1 = -1\ C$, $q_2 = +2\ C$, están situadas en los puntos T_1, T_2 señalados en la Figura 1 (T_1 es el punto de origen del sistema de coordenadas); $a = 2\sqrt{2}\ m$.
Use: $k \equiv 1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9 Nm^2/C^2$.

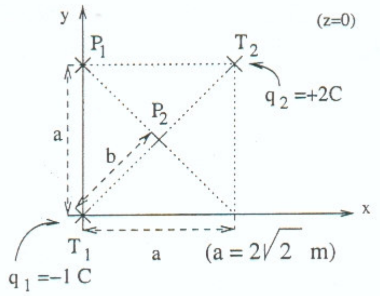


Fig.1

$(\Longrightarrow a^2 = 4 \cdot 2 m^2 = 8 m^2)$

1.) El campo eléctrico $\vec{E}(P_1)$ en el punto P_1 [donde: $\vec{OP_1} = (0, a, 0)$], en unidades de N/C, es

(a) $(-1, -1/2, 0) \cdot (9/\sqrt{2}) \cdot 10^9$
(b) $(-1, 1/2, 0) \cdot (9/\sqrt{2}) \cdot 10^9$
(c) $(1/4, 1/2, -1/8) \cdot (9/\sqrt{2}) \cdot 10^9$
(d) $(1/4, -1/8, 0) \cdot 9 \cdot 10^9$
(e) $(-1/4, -1/8, 0) \cdot 9 \cdot 10^9$

$E_x(P_1) = -k \cdot \frac{q_2}{a^2} = -9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2}{8} \frac{N}{C} = -\frac{9}{4} \cdot 10^9 \frac{N}{C}$

$E_y(P_1) = k \cdot \frac{q_1}{a^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(-1)}{8} \frac{N}{C} = -\frac{9}{8} \cdot 10^9 \frac{N}{C}$

$E_z(P_1) = 0$

$\Longrightarrow \vec{E}(P_1) = (-\frac{9}{4}, -\frac{9}{8}, 0) \cdot 10^9 \frac{N}{C} = \underline{\underline{(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, 0) \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{N}{C}}}$

2.) El campo eléctrico $\vec{E}(P_2)$ en el punto P_2 [donde: $\vec{OP_2} = (a/2, a/2, 0)$], en unidades de N/C, es

(a) $\left(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0\right) \cdot (9/4) \cdot 10^9$
(b) $\left(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0\right) \cdot (27/4) \cdot 10^9$
(c) $\left(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0\right) \cdot (27/2) \cdot 10^9$
(d) $\left(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right) \cdot 9 \cdot 10^9$
(e) $\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0\right) \cdot (27/2) \cdot 10^9$

$b = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2}\ m = \sqrt{4}\ m = 2\ m$

Por geometría, el vector unitario de la dirección de $\vec{E}(P_2)$ es: $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$.

$|\vec{E}(P_2)| = k \cdot \left(\frac{q_2}{b^2} + \frac{|q_1|}{b^2}\right) = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(2+1)}{2^2} \frac{N}{C} = \underline{\frac{27}{4} \cdot 10^9 \frac{N}{C}}$

$\Longrightarrow \vec{E}(P_2) = \underline{\underline{(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \cdot \frac{27}{4} \cdot 10^9 N/C}}$

3.) El potencial eléctrico $V(P_2)$ en el punto P_2, en unidades de $Nm/C \equiv V$, es [use la convención $V(\infty) = 0$]

(a) $1,35 \cdot 10^{10}$
(b) $4,5 \cdot 10^{9}$
(c) $2,25 \cdot 10^{9}$
(d) $6,75 \cdot 10^{9}$
(e) $-6,75 \cdot 10^{9}$

$$V(P_2) = k\cdot\left(\frac{q_1}{b} + \frac{q_2}{b}\right) = k\cdot\frac{(q_1+q_2)}{b} = 9\cdot10^9\cdot\frac{(-1+2)}{2}V = \frac{9}{2}10^9 V = \underline{\underline{4{,}5\cdot10^9 V}}$$

4.) La energía potencial $U_{\text{pot.}}$ del sistema de estas dos cargas, en unidades de $Nm \equiv J$, es (use la convencón de que esta energía es cero cuando las dos cargas están muy alejadas una de otra)

(a) $2,25 \cdot 10^{9}$
(b) $-2,25 \cdot 10^{9}$
(c) $-4,5 \cdot 10^{9}$
(d) $4,5 \cdot 10^{9}$
(e) $9 \cdot 10^{9}$

$$U_{pot.}^{(q_1 q_2)} = k\cdot\frac{q_1\cdot q_2}{(2b)} = 9\cdot10^9\cdot\frac{(-1)\cdot2}{2\cdot2}J = -\frac{9}{2}\cdot10^9 J = \underline{\underline{-4{,}5\cdot10^9 J}}$$

5.) Una partícula de prueba tiene carga $q = 4\ nC$ $(= 4 \cdot 10^{-9}\ C)$ y masa $M = 2\ kg$. Las cargas "fuentes" q_1 y q_2 de la Figura 1 se consideran fijas (clavadas). Un agente externo lleva la partícula aludida desde el infinito, donde la partícula se encontraba en reposo, hasta el punto P_2 de tal manera que la rapidez final de la partícula en el punto P_2 es $v_{\text{fin.}} = 3\ m/s$. ¿Cuál es el valor del trabajo $W_{\text{a.e.}}$ que el agente externo hizo durante el traslado mencionado?

(a) $27\ Nm$
(b) $-36\ Nm$
(c) *cero*
(d) $18\ Nm$
(e) $-18\ Nm$

$$W_{a.e.} = (Em)_{fin.} - (Em)_{in.} = \left(\frac{1}{2}Mv_{fin.}^2 + q\cdot\underbrace{V(P_2)}_{=\frac{9}{2}\cdot10^9 V \text{ por problema 3.}}\right) - \left(\frac{1}{2}M\underbrace{v_{in.}^2}_{=0} + q\cdot\underbrace{V(r=\infty)}_{=0}\right)$$

$$\Rightarrow W_{a.e.} = \left(\frac{1}{2}\cdot2\cdot3^2 + 4\cdot10^{-9}\cdot\frac{9}{2}\cdot10^9\right)Nm = (9+18)Nm = \underline{\underline{27 Nm}}$$

6.) El trabajo $W_{\text{el.}}$ que el campo eléctrico hizo sobre el traslado descrito en el problema anterior es

(a) $27\ Nm$
(b) $-36\ Nm$
(c) *cero*
(d) $18\ Nm$
(e) $-18\ Nm$

$$W_{el.} = -\Delta U_{pot.}^{(q)} = -\left(U_{pot.fin.}^{(q)} - U_{pot.in.}^{(q)}\right) = -\left(q\cdot V(P_2) - q\cdot\underbrace{V(r=\infty)}_{=0}\right)$$

$$= -q\cdot V(P_2) = -4\cdot10^{-9}\cdot\frac{9}{2}\cdot10^9 Nm = \underline{\underline{-18 Nm}}$$

(por problema 3.)

[fin del bloque 1-6]

7.) Desde el punto A al punto B se traslada una carga negativa a través de la trayectoria recta en la Fig. 2. Se observa que el trabajo $W_{\text{el.}}$ realizado por el campo eléctrico sobre una carga negativa es positivo durante esta trayectoria. De esta información, puede afirmarse que la diferencia de potencial $\triangle V = V_B - V_A$ entre los puntos es:

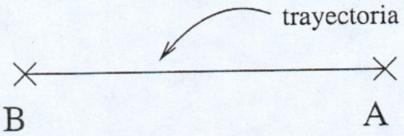


Fig.2

(a) Es **positiva**, ya que la diferencia de potencial siempre tiene el mismo signo que el trabajo eléctrico sobre la carga.
(b) Es **negativa**, ya que la diferencia de potencial es el trabajo eléctrico sobre la carga dividido por la carga.
(c) Es **positiva**, ya que la diferencia de potencial es menos el trabajo eléctrico sobre la carga dividido por la carga, y como la carga es negativa y el trabajo positivo, el resultado es positivo.
(d) Es **negativa**, ya que la diferencia de potencial es menos el trabajo eléctrico sobre la carga.
(e) Es **imposible** obtener el signo del valor de $V_B - V_A$ porque desconocemos el campo eléctrico; ya que como la fórmula lo dice $V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$, necesitamos conocer el campo eléctrico.

$$W_{el.}^{(A\to B)} = -\Delta U_{pot.}^{(A\to B)} = -\left(U_{pot.}^{(B)} - U_{pot.}^{(A)}\right) = -\left(q\cdot V_B - q\cdot V_A\right) = -q\cdot\left(V_B - V_A\right) \Rightarrow \boxed{V_B - V_A = -\frac{W_{el.}^{(A\to B)}}{q}}$$

8.) En la Figura 3, los puntos B y C están a una distancia r_0 de una carga positiva de magnitud q_0 (positiva). Esta carga está fija en su lugar. El punto A está a la distancia $2r_0$ de la misma carga. Se traslada una carga positiva lentamente, por lo que se desprecia la rapidez de la carga. Primero se mueve desde A hasta B, a lo largo de una trayectoria no especificada; el trabajo del agente externo durante la trayectoria es $W_{A\to B}$. Luego, se traslada de B a C (a lo largo de una trayectoria no especificada); el trabajo del agente externo en esa trayectoria es $W_{B\to C}$.

Si comparamos el trabajo del agente externo $W_{A\to B}$ con el trabajo del agente externo $W_{A\to C}$ para ir desde A a C, podemos afirmar:

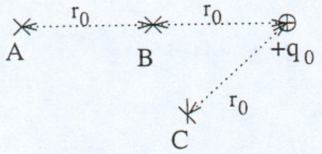


Fig.3

(a) El trabajo es la suma de los trabajos en cada sección de trayectoria. Dado a que el trabajo $W_{A\to B}$ es positivo (la fuerza del agente externo se opone a la fuerza eléctrica y va en el mismo sentido que desplazamiento), debemos ahora sumarle el trabajo $W_{B\to C}$, que también es positivo. Luego $W_{A\to C} = W_{A\to B} + W_{B\to C}$ y , entonces $W_{A\to C} > W_{A\to B}$.
(b) El trabajo $W_{B\to C}$ es cero ya que los puntos B y C están a la misma distancia de $+q_0$. Luego, como $W_{A\to C} = W_{A\to B} + W_{B\to C}$, y $W_{B\to C} = 0$, entonces $W_{A\to C} = W_{A\to B}$.
(c) Sólo sabemos que la carga fue movida desde los puntos en discusión, pero desconocemos la trayectoria para llegar de un punto a otro. Por lo tanto, es imposible conocer cuál es el valor del trabajo, y por ende, no podemos compararlos.
(d) Ninguna de las anteriores.

$v \approx v_{fin} \approx v_{in} \approx 0$ (independiente de la forma de la trayectoria)

$$W_{a.e.}^{(in.\to fin.)} = (En)_{fin} - (En)_{in} = U_{pot.fin.} - U_{pot.in} = q\cdot V_{fin} - q\cdot V_{in} = \underline{\underline{q\cdot\left(V_{fin} - V_{in}\right)}} \Rightarrow$$

$$W_{a.e.}^{(B\to C)} = q\cdot\left(V_B - V_C\right) = 0 \text{ (porque: } V_B = V_C = k\cdot\frac{q_0}{r_0}\text{)} \Rightarrow W_{a.e.}(A\to C) = W_{a.e.}(A\to B) + \underbrace{W_{a.e.}(B\to C)}_{=0}$$

$$\text{[Note: } W_{a.e.}(A\to C) = q\cdot\left(V_C - V_A\right) = q\left(\left(V_C - V_B\right) + \left(V_B - V_A\right)\right) = W_{a.e.}(B\to C) + W_{a.e.}(A\to B)\text{]} \Rightarrow \underline{\underline{W_{a.e.}(A\to C) = W_{a.e.}(A\to B)}}$$

9.) Se tiene en la Figura 4 un volumen Ω cerrado; su superficie (borde) $\partial\Omega$ encierra a las cargas de valores $-3q_0$ (negativa) y q_0 (positiva). Además fuera de éstas hay una carga positiva de valor $3q_0$. Mediante la Ley de Gauss puede afirmarse:

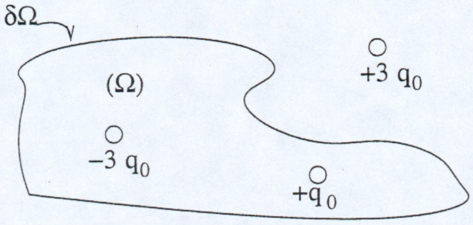


Fig.4

(a) El Flujo Eléctrico Neto $\Phi_{\text{el.}}^{(\partial\Omega)}$ a través de la superficie cerrada $\partial\Omega$ es negativo, ya que la carga neta encerrada es negativa.

(b) El Flujo Eléctrico Neto $\Phi_{\text{el.}}^{(\partial\Omega)}$ es positivo, ya que el Flujo depende de la integral $\Phi_{\text{el.}}^{(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega} E_\perp dA$, y dado a que estamos en la presencia de una mayor cantidad de cargas con campo eléctrico positivo (la que está fuera del volumen y la que está dentro del volumen), esa integral debiera ser positiva.

(c) La Ley de Gauss nos permite calcular el Campo Eléctrico en situaciones en donde hay simetrías. En este caso el volumen cerrado Ω es irregular por lo que la Ley de Gauss no aporta ninguna información.

(d) Ninguna de las anteriores.

Por la ley de Gauss: $\left(\Phi_{el.}^{(\partial\Omega)} \equiv\right) \oint_{\partial\Omega} E_\perp dA \underset{(Gauss)}{=} \frac{1}{\epsilon_0} q_{enc.}^{(\Omega)} = \frac{1}{\epsilon_0}(-3q_0+q_0) = -2\cdot\frac{q_0}{\epsilon_0} < 0$

PROBLEMAS 10-11 SE REFIEREN A LA SIGUIENTE SITUACIÓN (simetría cilíndrica):

Un cable (cilíndro) largo, de largo L y radio R ($L \gg R$), de material aislante (no conductor), está cargado de manera cilíndricamente simétrica, es decir: $dq(\vec{r})/dV = \rho(r_\perp)$, donde $r_\perp = |\vec{r}_\perp|$ y el vector $\vec{r}_\perp$ es el vector que va desde el eje de simetría del cable, perpendiculr al eje, hasta el punto considerado ($\vec{r} = \vec{r}_\perp + \vec{r}_\parallel$). Por ejemplo, si el eje de simetría es $\hat{z}$, en tal caso $\vec{r} = (x, y, z)$ y $\vec{r}_\perp = (x, y, 0)$ y $\vec{r}_\parallel = (0, 0, z)$. El cable tiene la siguiente densidad de carga $dq/dV = \rho(r_\perp)$:

$\rho(r_\perp) = +\rho_0$ para $r_\perp \leq R/2$;

$\rho(r_\perp) = -\rho_0$ para $R/2 < r_\perp \leq R$ $\quad$ [$\rho(r_\perp) = 0$ para $r_\perp > R$.]

Aquí, ρ_0 es una cantidad positiva fija (con unidades: C/m^3). Como siempre, derive y/o explique las respuestas.

10.) ¿El campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r})$ en $r_\perp = R/2$

(a) tiene la dirección $(-\hat{r}_\perp)$ hacia el eje

(b) es cero

(c) tiene la dirección $(+\hat{r}_\perp)$ hacia fuera

11.) ¿El campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r})$ en $r = R$

(a) tiene la dirección $(-\hat{r}_\perp)$ hacia el eje

(b) es cero

(c) tiene la dirección $(+\hat{r}_\perp)$ hacia fuera

Por la simetría cilíndrica:

$\vec{E}(\vec{r}) = E_\perp(r_\perp)\hat{r}_\perp$

Por la ley de Gauss: $E_\perp(r_\perp) = 2k\cdot\frac{q_{enc.}^{(\Omega(L,r_\perp))}}{L}\frac{1}{r_\perp}$,

donde $q_{enc.}^{(\Omega(L,r_\perp))}$ es la carga encerrada en un cilindro de radio $r_\perp$.

Si $\underline{r_\perp = \frac{R}{2}} \Rightarrow q_{enc.}^{(\Omega(L,r_\perp=\frac{R}{2}))} = (+\rho_0)\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot L > 0$

$\Rightarrow E_\perp(r_\perp) > 0 \Rightarrow \vec{E}(\vec{r})$ tiene dirección $(+\hat{r}_\perp)$.

Si $\underline{r_\perp = R} \Rightarrow q_{enc.}^{(\Omega(L,r_\perp=R))} = (+\rho_0)\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot L + (-\rho_0)\cdot\pi\left(R^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2\right)\cdot L$

$= \rho_0\pi\cdot R^2\cdot L\cdot\left(+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{2}\rho_0\pi R^2 L < 0$

$\Rightarrow E_\perp(r_\perp) < 0 \Rightarrow \vec{E}(\vec{r})$ tiene dirección $(-\hat{r}_\perp)$.

[fin del bloque 12-13]

PROBLEMAS 12-14 SE REFIEREN A LA SIGUIENTE SITUACIÓN (simetría cilíndrica):
Un cable (cilíndro) largo, de largo L y radio R ($L \gg R$), de material aislante (como en los dos problemas anteriores), está cargado esta vez con la siguiente densidad de carga cilíndricamente simétrica:

$$\rho(r_\perp) \equiv \frac{dq(r)}{dV} = \rho_0 \left[3\left(\frac{r_\perp}{R}\right)^2 - 2\left(\frac{r_\perp}{R}\right) \right] \qquad (r_\perp \le R) \; . \tag{1}$$

Aquí, ρ_0 es una cantidad positiva fija (con unidades: C/m^3).

12.) La carga total Q del cable es

(a) $\frac{2\pi}{5}\ \rho_0 R^3$
(b) $\frac{\pi}{5}\ \rho_0 R^3$
(c) $\frac{\pi}{3}\ \rho_0 R^2 L$
(d) $\frac{\pi}{6}\ \rho_0 R^2 L$
(e) ninguna de las anteriores

$$Q = \int_{r_\perp \le R} \rho(r_\perp)\, dV \underset{dV = L\cdot 2\pi r_\perp dr_\perp}{=} 2\pi L \cdot \int_0^R dr_\perp \cdot r_\perp \cdot \rho(r_\perp) =$$

$$= 2\pi L \cdot \rho_0 \int_0^R dr_\perp \cdot r_\perp \cdot \left[\frac{3}{R^2} r_\perp^2 - \frac{2}{R}\cdot r_\perp\right] = 2\pi L \rho_0 \cdot \left[\frac{3}{R^2}\cdot\frac{R^4}{4} - \frac{2}{R}\frac{R^3}{3}\right]$$

$$= 2\pi \rho_0 R^2 L \left[\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right] = 2\pi \rho_0 R^2 L \cdot \frac{(9-8)}{12} = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}\rho_0 R^2 L}}$$

13.) El campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r})$ tiene, por la simetría cilíndrica, la forma $\vec{E}(\vec{r}) = E_\perp(r_\perp)\hat{r}_\perp$ (donde $\hat{r}_\perp = \vec{r}_\perp / r_\perp$). La expresión para $E_\perp(r_\perp)$ fuera del cable ($r_\perp > R$) es
[como siempre, derive el resultado o explique de dónde se obtiene la expresión; note: $k \equiv 1/(4\pi\epsilon_0)$]

(a) $k\ \frac{2\pi}{5}\ \rho_0 R^3 / r_\perp^2$
(b) $k\ \frac{\pi}{5}\ \rho_0 R^3 / r_\perp^2$
(c) $k\ \frac{2\pi}{3}\ \rho_0 R^2 / r_\perp$
(d) $k\ \frac{\pi}{3}\ \rho_0 R^2 / r_\perp$
(e) ninguna de las anteriores

Por la ley de Gauss: $\oint\!\!\oint E_\perp\, dA = \frac{1}{\epsilon_0} q_{enc.}$

$$\Rightarrow E_\perp(r_\perp)\cdot 2\pi r_\perp \cdot L = \frac{1}{\epsilon_0}\cdot Q \Rightarrow$$

$$E_\perp(r_\perp) = \underbrace{\frac{1}{2\pi\epsilon_0}}_{= 2k} \cdot \left(\frac{Q}{L}\right)\cdot\frac{1}{r_\perp} \underset{\text{(usando } Q \text{ del problema 12.)}}{=} 2k\cdot\left(\frac{\pi}{6}\frac{\rho_0 R^2 \cancel{L}}{\cancel{L}}\right)\frac{1}{r_\perp} = \underline{\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\rho_0 R^2\right)\frac{1}{r_\perp}}$$

14.) El potencial eléctrico $V = V(r_\perp)$ fuera del cable ($r_\perp > R$) es [con la convención $V(r_\perp\!=\!R) = 0$]
[Sugerencia: la relación $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ implica en el caso de la simetría cilíndrica la relación: $V'(r_\perp) = -E_\perp(r_\perp)$]

(a) $k\ \frac{2\pi}{5}\ \rho_0 R^3 / r_\perp$
(b) $k\ \frac{\pi}{5}\ \rho_0 R^3 / r_\perp$
(c) $-k\ \frac{2\pi}{3}\ \rho_0 R^2 \ln(r_\perp/R)$
(d) $-k\ \frac{\pi}{3}\ \rho_0 R^2 \ln(r_\perp/R)$
(e) ninguna de las anteriores

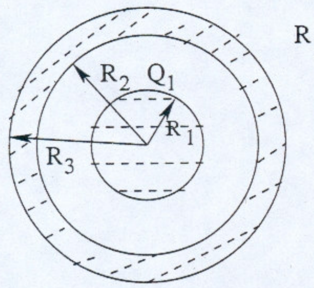
$$V'(r_\perp) = -E_\perp(r_\perp) \underset{\text{(por problema 13.)}}{=} -\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\rho_0 R^2\right)\frac{1}{r_\perp}$$

$$\Rightarrow V(r_\perp) = -\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\rho_0 R^2\right)\ln\left(\frac{r_\perp}{R}\right) + C$$

Pero: $V(r_\perp = R) = 0 \Rightarrow \quad 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow V(r_\perp) = \underline{-k\cdot\frac{\pi}{3}\rho_0 R^2 \ln\left(\frac{r_\perp}{R}\right)}$

[fin del bloque 12-14]

PROBLEMAS 15-16 SE REFIEREN A LA SIGUIENTE SITUACIÓN (simetría esférica):
Una esfera llena (bola), de material conductor y de radio $R_1 = 2\ m$ está cargada con una carga negativa $Q_1 = +6\ C$. Alrededor del la esfera hay un cascarón conductor, de radio interno $R_2 = 4\ m$ y de radio externo $R_3 = 6\ m$ (ver la figura). El cascarón tiene la carga total $Q_{\text{casc.}} = +6\ C$. El origen del sistema de coordenadas está en el centro de la esfera. Ambos, la bola y el cascarón, son conductores. Ver la Figura 5.



R_1=2m; R_2=4m; R_3=6m

Q_1 =+6C; $Q_{\text{casc.}}$=+6C

FIG.5

15.) La carga Q_3 en la superficie externa del cascarón es (como en todas las otras preguntas, se requiere una explicación)

(a) +12 C
(b) +3 C
(c) +6 C
(d) cero
(e) ninguna de la anteriores

$Q(r=R_2) \equiv Q_2 = -Q_1 = -6C$

por la ley de Gauss para $R_2 < r < R_3$ donde $\vec{E}(r)=0$ (dentro del cascarón: $\vec{E}=0$)

$Q_2 + Q_3 = Q_{casc.} \Rightarrow Q_3 = Q_{casc.} - Q_2 = (+6-(-6))C = \underline{12C}$

16.) Ahora se conecta el cascarón a la tierra con un alambre conductor. La carga $\triangle q$ que va desde el cascarón a la tierra es (como siempre, derive o explique claramente la respuesta)
[Sugerencia: ¿cuál es la carga en la superficie interior del cascarón? ¿Esta carga se cambia cuando se hace conexión a tierra? La conexión del cascarón a tierra significa que ahora $V_{\text{casc.}} = V(\infty)$ $(= 0)$.]

(a) +12 C
(b) +3 C
(c) +6 C
(d) cero
(e) ninguna de la anteriores

Después de la conexión del cascarón a tierra:

$Q_1' = Q_1 = +6C$; $Q_2' = -Q_1' = -6C$ por Gauss, como en el problema 15.

Por Gauss: $E_{(r>R_3)}(r) = k\cdot\frac{(Q_1'+Q_2'+Q_3')}{r^2} = k\cdot\frac{Q_3'}{r^2} \Rightarrow V(r) = k\cdot\frac{Q_3'}{r}$ $(r \geq R_3)$.

$V(r=R_3) = k\cdot\frac{Q_3'}{R_3} = 0 \Rightarrow Q_3' = 0 \Rightarrow \Delta q = Q_3 - Q_3' = (12-0)C = \underline{12C}$

conexión a tierra

[fin del bloque 15-16]

PROBLEMAS 17-18 SE REFIEREN A LA SIGUIENTE SITUACIÓN (simetría esférica):
Una esfera llena (bola), de material aislante, tiene el radio a y la siguiente densidad (esféricamente simétrica) de carga $\rho(r)$:

$$\rho(r) \equiv \frac{dq(r)}{dV} = \rho_0 \left[\frac{r}{a} - 2\left(\frac{r}{a}\right)^3\right] \qquad (r \leq a)\ . \tag{2}$$

Aquí, ρ_0 es una cantidad positiva fija. El origen del sistema de coordenadas está en el centro de la bola.

17.) La carga total Q de la bola es

(a) $-(1/3)\pi\rho_0 a^3$
(b) $(1/6)\pi\rho_0 a^3$
(c) $(4/15)\pi\rho_0 a^3$
(d) $-(2/15)\pi\rho_0 a^3$
(e) ninguna de las anteriores

$Q = \int_{r\leq a} dV\cdot\rho(r) = 4\pi\cdot\int_0^a dr\, r^2 \rho(r)$

$dV = 4\pi r^2 dr$

$= 4\pi\rho_0 \int_0^a dr\, r^2 \left[\frac{1}{a} r - \frac{2}{a^3} r^3\right] = 4\pi\rho_0 \left[\frac{1}{a}\cdot\frac{a^4}{4} - \frac{2}{a^3}\cdot\frac{a^6}{6}\right]$

$= 4\pi\rho_0 a^3 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = 4\pi\rho_0 a^3 \frac{(3-4)}{12} = \underline{-\frac{\pi}{3}\rho_0 a^3}$

18.) El campo eléctrico dentro de la bola es cero en puntos cuya distancia $r = r_0$ del centro de la bola es

(a) $a/2$
(b) $a\sqrt{3}/2$
(c) $a\sqrt{5/6}$
(d) $a\sqrt{1/2}$
(e) $2a/3$

Por Gauss: $E_\perp(r_0) = k \cdot \frac{q_{enc.}(\Omega(r_0))}{r_0^2} = 0 \Rightarrow q_{enc.}(\Omega(r_0)) = 0$;

$$\underset{(r_0<a)}{q_{enc.}(\Omega(r_0))} = \int_{r\le r_0} dV\,\rho(r) = 4\pi\rho_0 \int_0^{r_0} dr\, r^2 \left[\frac{1}{a} r - \frac{2}{a^3} r^3\right] = 4\pi\rho_0 \left[\frac{1}{a}\cdot\frac{r_0^4}{4} - \frac{2}{a^3}\cdot\frac{r_0^6}{6}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} r_0^4 = \frac{1}{3}\frac{r_0^6}{a^2} \;\Big/ \cdot \frac{3a^2}{r_0^4} \Rightarrow \frac{3}{4}a^2 = r_0^2 \Rightarrow r_0 = a\cdot\sqrt{\frac{3}{4}} = a\frac{\sqrt{3}}{2}$$

[fin del bloque 17-18]

19.) Se tienen dos placas paralelas conductoras, separadas por una distancia d pequeña comparada con el tamaño de las placas. Las placas tienen un área A (de cada lado) y tienen carga $+Q$ (positiva) y $-Q$ (negativa) respectivamente (ver la Figura 6). Hay un agujero pequeño en el centro de la placa positiva. Desde allí se lanza una partícula con carga negativa $-q$ ($q \ll Q$) y masa M. ¿Cuál es la rapidez mínima v_0 que debe tener la carga negativa $-q$ para alcanzar la placa negativa ($-Q$)?
[Sugerencia: ¿cuál es la capacitancia de un condensador con placas planas? ¿O el campo eléctrico entre las placas conductoras?]

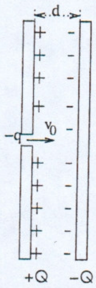


Fig.6

(a) No puede determinarse puesto que para calcular el campo de una placa necesitamos la densidad superficial de carga.
(b) No existe velocidad para llegar hasta esa placa, ya que como la carga es negativa y la placa es negativa apenas sea soltada, sin importar su velocidad inicial, será repelida por una fuerza muy grande ya que la distancia es muy pequeña y la fuerza depende de la distancia.
(c) Si calculamos el trabajo eléctrico y utilizamos la conservación de la energía, $v_0 = \sqrt{(2qQd)/(MA\epsilon_0)}$.
(d) Si utilizamos el potencial eléctrico de una carga puntual y lo igualamos a la energía cinética, $v_0 = \sqrt{(qQ)/(2\pi\epsilon_0 dM)}$
(e) Ninguna de las anteriores.

$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A}\frac{1}{\epsilon_0}$. $|\Delta V| = E\cdot d = \frac{Q\cdot d}{A\epsilon_0}$ (o, de manera equivalente: $C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \Rightarrow |\Delta V| = \frac{Q}{C} = \frac{Qd}{A\epsilon_0}$)

($\sigma = Q/A$)

$$W_{a.e.} = 0 \Rightarrow (E_m)_{in} = (E_m)_{fin} \Rightarrow \frac{1}{2}Mv_0^2 + (-q)V_{in} = \frac{1}{2}M\underbrace{v_{fin}^2}_{=0} + (-q)V_{fin}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}Mv_0^2 = (-q)(V_{fin} - V_{in}) = \underset{\wedge 0}{(-q)}\,\underset{\wedge 0}{\Delta V} = q\cdot\underbrace{|\Delta V|}_{=\frac{Qd}{A\epsilon_0}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{q\cdot Q\cdot d}{A\epsilon_0} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2qQd}{MA\epsilon_0}}$$

20.) Una partícula de prueba, con carga $q = -0,9\ nC$ y masa $M = 0,4\ kg$, tiene inicialmente rapidez $v_{\text{in.}} = 30\ m/s$ y está a una distancia $x_{\text{in.}} = 0,8\ m$ de una superficie conductora larga (y aproximadamente plana). Esta superficie tiene densidad superficial de carga $\sigma_0 = 4\ C/m^2$. Si la partícula se mueve desde el punto inicial mencionado (ver la Figura 7), y no actúa agente externo sobre ella, la rapidez $v_{\text{fin.}}$ al impactar la superficie es aproximadamente
[Se considera que la densidad superficial σ_0 no se cambia cuando la partícula se mueve.]
Datos: $q = -0,9\ nC$ $(= -9 \cdot 10^{-10}\ C)$; $M = 0.4\ kg$; $v_{\text{in.}} = 30\ m/s$; $x_{\text{in.}} = 0,8\ m$;
$\sigma_0 = 4\ C/m^2$; $\epsilon_0 \approx 9 \cdot 10^{-12} C^2/(Nm^2)$.

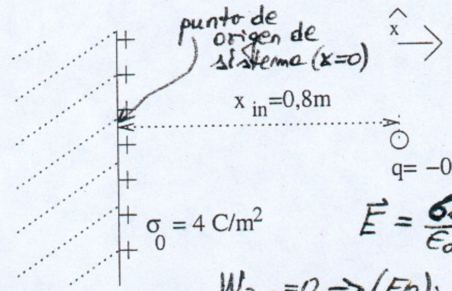


Fig.7

$\vec{E} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}\hat{x} \Rightarrow V(x) = -\frac{\sigma_0}{\epsilon_0}\cdot x + \varphi = -\frac{\sigma_0}{\epsilon_0} x$ ($\varphi = 0$ ← (convención))

$W_{a.e.} = 0 \Rightarrow (En)_{in} = (En)_{fin} \Rightarrow \frac{1}{2} M v_{in}^2 + q \cdot V(x_{in}) = \frac{1}{2} M v_{fin}^2 + q V(0)$ ($x_{fin} = 0$)

(a) $100\ m/s$
(b) $50\ m/s$
(c) $40\ m/s$
(d) $30\ m/s$
(e) no se puede determinar porque la dirección de la velocidad inicial no se especificó

$\Rightarrow \frac{1}{2} M v_{fin}^2 = \frac{1}{2} M v_{in}^2 + q(\underbrace{V(x_{in}) - V(0)}_{= -\frac{\sigma_0 x_{in}}{\epsilon_0}}) \Big| \cdot \frac{2}{M} \Rightarrow \boxed{v_{fin}^2 = v_{in}^2 + \frac{2q(-1)\sigma_0 x_{in}}{M\epsilon_0}}$

$\Rightarrow v_{fin}^2 = \left[30^2 + \frac{2\cdot(-1)\cdot 9\cdot 10^{-10}\cdot(-1)\cdot 4\cdot 8\cdot 10^{-1}}{4\cdot 10^{-1}\cdot 9\cdot 10^{-12}}\right]\frac{m^2}{s^2} = (30^2 + 16\cdot 10^2)\frac{m^2}{s^2} = (900+1600)\frac{m^2}{s^2} = 2500\ \frac{m^2}{s^2}$

$\Rightarrow v_{fin} = \sqrt{2500}\ \frac{m}{s} = \underline{50\ m/s}$

PROBLEMAS 21-22 SE REFIEREN A LA SIGUIENTE SITUACIÓN:
Inicialmente tres capacitores ($C_1 = 1\ mF$, $C_2 = 2\ mF$, $C_3 = 3\ mF$) están desconectados y cargados cada uno con la carga $q_0 = 12\ mC$ (ver la Figura 8a). En un instante ($t = 0$), se conectan los tres capacitores al cerrar los interruptores entre ellos, y las cargas se redistribuyen (ver la Figura 8b).
Datos: $C_1 = 1\ mF$, $C_2 = 2\ mF$, $C_3 = 3\ mF$; $q_0 = 12\ mC$.

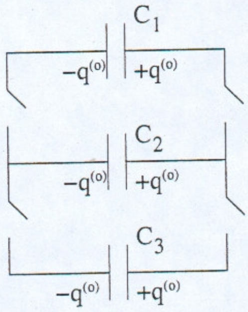


Fig.8a

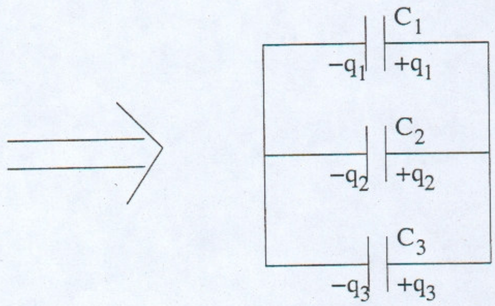


Fig.8b

21.) Después de cerrar los interruptores, los tres capacitores C_1, C_2 y C_3 están cargados con las cargas q_1, q_2, q_3 respectivamente, cuyos valores respectivos, en unidades de mC, son (Figura 8b)

(a) 12, 12, 12
(b) 12, 24, 36
(c) 6, 12, 18
(d) 12, 6, 4
(e) ninguna de las anteriores

$|\Delta V_{C_1}| = |\Delta V_{C_2}| = |\Delta V_{C_3}|\ (\equiv |\Delta V|) \Rightarrow \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} = \frac{q_3}{C_3} \Rightarrow \frac{q_1}{1} = \frac{q_2}{2} = \frac{q_3}{3} \Rightarrow$

$q_2 = 2q_1;\ q_3 = 3q_1;$ Conservación de carga: $q_1 + q_2 + q_3 = 3q^{(0)} = 36\ mC \Rightarrow$

$\Rightarrow 6q_1 = 36\ mC \Rightarrow q_1 = 6\ mC;\ q_2 = 2q_1 = \underline{12\ mC};\ q_3 = 3q_1 = \underline{18\ mC}$

22.) La energía $Q_{em.}$ emitida en forma de calor y/o radiación durante la redistribución de las cargas entre los tres capacitores es [transición desde la situación inicial (Figura 8a) a la situación final (Figura 8b)] es

(a) cero
(b) 534 J
(c) 1,54 J
(d) 82 mJ
(e) 24 mJ

$$Q_{em} = (U_c)_{in} - (U_c)_{fin}.$$

$$(U_c)_{in} = \frac{1}{2}\frac{q^{(0)2}}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{q^{(0)2}}{C_2} + \frac{1}{2}\frac{q^{(0)2}}{C_3} = \frac{1}{2} q^{(0)2}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 12^2\cdot 10^{-6}\left(\frac{1}{1\cdot 10^{-3}}+\frac{1}{2\cdot 10^{-3}}+\frac{1}{3\cdot 10^{-3}}\right) J = \frac{1}{2}\cdot 12^2\cdot 10^{-6}\cdot 10^{3}\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}_{\frac{11}{6}} J$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{12}\cdot 12\cdot 11}{\cancel{6}}\cdot 10^{-3} J = 132\cdot 10^{-3} J = 132\ mJ$$

$$(U_c)_{fin} = \frac{1}{2} C_1|\Delta V|^2 + \frac{1}{2} C_2|\Delta V|^2 + \frac{1}{2} C_3|\Delta V|^2 = \frac{1}{2}(C_1+C_2+C_3)|\Delta V|^2;$$

Desde el problema 21.): $|\Delta V| = \frac{q_1}{C_1} = \frac{6\cdot 10^{-3}}{1\cdot 10^{-3}} V = 6V \Rightarrow$

$$(U_c)_{fin} = \frac{1}{2}\cdot(1+2+3)\cdot 10^{-3}\cdot 6^2 J = 3\cdot 36\cdot 10^{-3} J = 108\cdot 10^{-3} J = 108\ mJ$$

$$\Rightarrow Q_{em} = (U_c)_{in} - (U_c)_{fin} = (132-108)\ mJ = 24\ mJ$$

LISTA DE ALGUNAS FORMULAS
fis-120, 1.sem.2008, C1, UTFSM, 26 de septiembre de 2008

Una carga q situada en $\vec{r}' = 0$ produce:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k\frac{q}{r^2}\hat{r} \quad (\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}) \,, \qquad V(\vec{r}) = k\frac{q}{r} \,; \quad \text{donde} : k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9\times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}, \quad \epsilon_0 = 8.85\times 10^{-12}\frac{C^2}{Nm^2} \,. \quad (1)$$

Una distribución de cargas $dq(\vec{r}')$ produce en el punto $\vec{r}$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k\int \frac{dq(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \,, \qquad V(\vec{r}) = k\int \frac{dq(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \,. \qquad (2)$$

La relación general entre V y $\vec{E}$:

$$V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{r} \,, \qquad \vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) \,. \qquad (3)$$

$V(\vec{r})$ es una función de $\vec{r}$ *sin* discontinuidades.
Si hay simetría esférica: $V(\vec{r}) = V(r)$; y $\vec{E}(r) = E_\perp(r)\hat{r} = -[dV(r)/dr]\hat{r}$, es decir: $V'(r) = -E_\perp(r)$.
Si hay simetría cilíndrica: $V(\vec{r}) = V(r_\perp)$; y $\vec{E}(r_\perp) = E_\perp(r_\perp)\hat{r}_\perp = -[dV(r_\perp)/dr_\perp]\hat{r}_\perp$, es decir: $V'(r_\perp) = -E_\perp(r_\perp)$.
La energía potencial electrostática de una carga q_0 en $\vec{r}$ es: $U(\vec{r}) = q_0 V(\vec{r})$.
La energía potencial de un conjunto de cargas q_j $(j = 1, 2, \ldots n)$ es: $U = k\sum q_i q_j/|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$, donde la suma corre por todos los pares diferentes $q_i q_j$.

Ley de Gauss:

$$\epsilon_0 \oint_{\partial\Omega} E_\perp dA = q_{\text{enc.}}(\Omega) \,, \qquad \text{donde} : \; E_\perp = \vec{E}\cdot\hat{n} \,. \qquad (4)$$

Por Gauss, si hay simetría esférica: $\vec{E}(\vec{r}) = E_\perp(r)\hat{r}$, y $E_\perp(r) = k\; q_{\text{enc.}}(\Omega(r))(1/r^2)$; aquí, $q_{\text{enc.}}(\Omega(r))$ es la carga encerrada en esfera de radio r.
Por Gauss, si hay simetría cilíndrica: $\vec{E}(\vec{r}) = E_\perp(r_\perp)\hat{r}_\perp$, y $E_\perp(r_\perp) = 2k\; [q_{\text{enc.}}(\Omega(\ell, r_\perp))/\ell](1/r_\perp)$; aquí, $q_{\text{enc.}}(\Omega(\ell, r_\perp))$ es la carga encerrada en cilíndro de radio $r_\perp$ y longitud ℓ.
Campo eléctrico cerca de un conductor (fuera): $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n}$, donde: $\sigma = dq/dA$.
Campo eléctrico cerca de una lámina delgada de material aislante: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{n}$, donde: $\sigma = dq/dA$. Condensadores (capacitores):

$$Q = C|\triangle V| \,, \quad U_C = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}C|\triangle V|^2 = \frac{1}{2}Q|\triangle V| \,. \qquad (5)$$

$$C_{\text{eq.}} = \sum_{j=1}^{n} C_j \quad (\text{en paralelo}) \,, \qquad \frac{1}{C_{\text{eq.}}} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{C_j} \quad (\text{en serie}) \,. \qquad (6)$$

Densidad (por volumen) de energía electrostática:

$$u = \frac{dU}{d\text{Vol.}} = \frac{1}{2}\epsilon_0\vec{E}^2 \,. \qquad (7)$$

Condensador de placas paralelas conductoras (A es el área de un lado de la placa, separación de placas D; $\sqrt{A} \gg D$):

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A\epsilon_0} \,, \quad V(\equiv |\triangle V|) = ED \,, \qquad C = \frac{\epsilon_0 A}{D} \,. \qquad (8)$$

Si hay material dieléctrico: $E_0 \mapsto E = E_0/\kappa_e$; $C_0 \mapsto C = \kappa_e C_0$ $(\epsilon_0 \mapsto \kappa_e\epsilon_0)$. Aquí, $\kappa_e > 1$ es constante dieléctrica.