1. (20 PUNTOS) Obtenga el valor de

$$\int_0^1 \int_{x/2}^{x} y \sin\left(y^3\right) \mathrm{d}y \mathrm{d}x + \int_1^2 \int_{x/2}^{1} y \sin\left(y^3\right) \mathrm{d}y \mathrm{d}x$$

Desarrollo: La región de integración en la primera integral es

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 1 \\ \frac{x}{2} &\leq y \leq x \end{aligned}$$

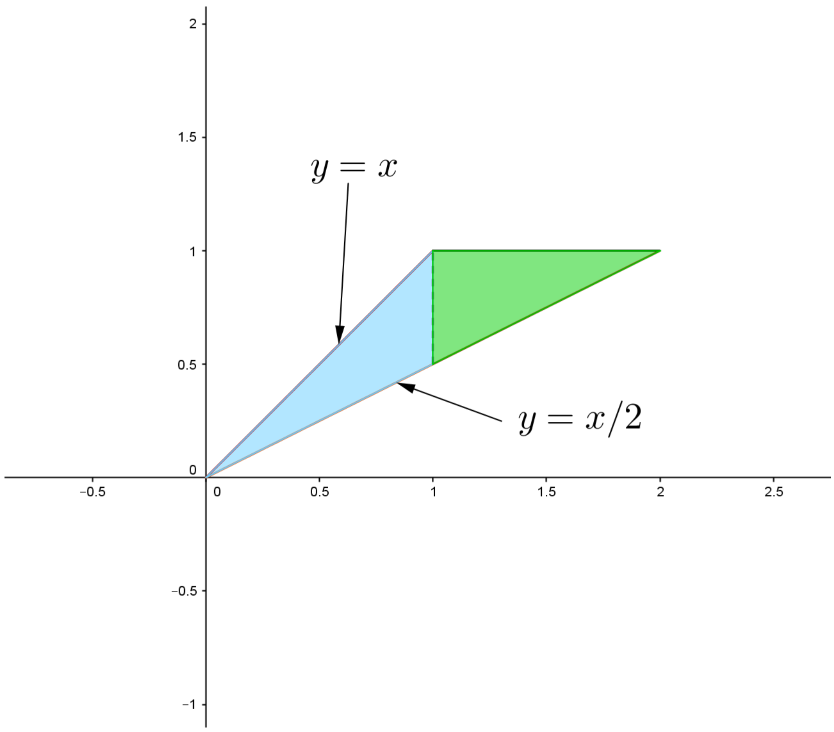
en la segunda

$$\begin{aligned} 1 &\leq x \leq 2 \\ \frac{x}{2} &\leq y \leq 1 \end{aligned}$$

podemos describir la unión de estas dos regiones como

$$\begin{aligned} 0 &\leq y \leq 1 \\ y &\leq x \leq 2y \end{aligned}$$

ver figura



luego, intercambiamos orden de integración:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_{x/2}^{x} y \sin\left(y^3\right) \mathrm{d}y \mathrm{d}x + \int_1^2 \int_{x/2}^{1} y \sin\left(y^3\right) \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\ = & \int_0^1 \int_{y}^{2y} y \sin\left(y^3\right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\ = & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cos 1 \end{aligned}$$

2. (30 PUNTOS) Sea la región E en el plano XY acotada por las rectas

$$y = x,\ y = 3x,\ x + y = 2,\ x + y = 4$$

a) Graficar la región E y haga también un bosquejo de la región D tal que $E = T(D)$, donde T^{-1} es la transformación definida por

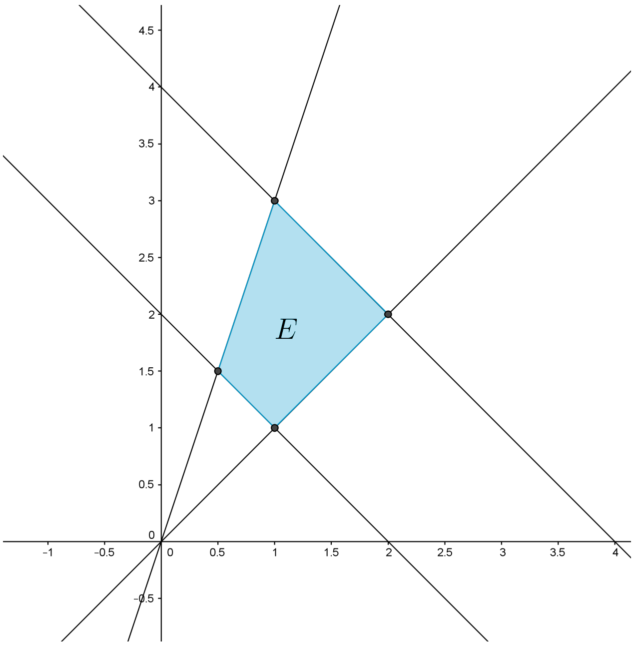
$$\begin{cases} u &= x + y - 2, \\ v &= y - x. \end{cases}$$

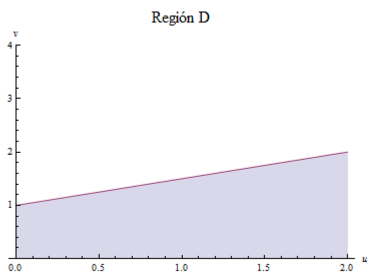
b) Si E es la placa de densidad $\rho(x, y) = y - x$, encuentre la masa de la placa.

c) Determine el signo del número $\text{Área}(D) - \text{Área}(T(D))$

Desarrollo:

a) La región D y la región $T(D)$ vienen dadas por:





b) Se tiene que las funciones son de clase C^1 y que $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \dfrac{1}{2} \neq 0$ entonces

$$\begin{aligned} M &= \iint_E (y - x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \iint_D (y - x)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}v\mathrm{d}u \\ &= \int_0^2 \int_0^{\frac{u}{2}+1} v\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\int_0^2 \left(\frac{u}{2}+1\right)^2 \mathrm{d}u \\ &= \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

c) Se tiene que $\text{Área}(D) = 3$ y además

$$\text{Área}(T(D)) = \text{Área}(E) = \iint_E dydx = \int_0^2 \int_0^{\frac{u}{2}+1} \frac{1}{2}\mathrm{d}v\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(\frac{u}{2}+1\right)du = \frac{3}{2},$$

entonces

$$\text{Área}(D) - \text{Área}(T(D))$$

tiene signo positivo.

3. (25 PUNTOS)

   a) Encuentre el volumen de la región sobre el plano $z = 0$, bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, donde $a > 0$ es constante.

   b) Determine el momento de inercia alrededor del eje z, asumiendo que la densidad es constante e igual a ρ.

Desarrollo.

a) Usando coordenadas cilíndricas $x = r\cos\theta,\ y = r\text{sen}\theta,\ z = z$, obtenemos que las ecuaciones del paraboloide y del cilindro son, respectivamente

$$z = r^2, \qquad r = a.$$

Así, la nueva región de integración esta dada por

$$\{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 |\ 0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le z \le r^2\}.$$

Usando la simetría de la región obtenemos que el volumen V pedido es

$$V = 4\int_0^a \int_0^{\pi/2} \int_0^{r^2} r\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = 4\int_0^a \int_0^{\pi/2} r^3\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = 2\pi \int_0^a r^3\mathrm{d}r = \frac{\pi a^4}{2}.$$

Nota: también se puede calcular el volumen mediante

$$V = 4\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^a (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

integral que se puede calcular usando coordenadas polares.

b) Usando la región de la parte a), tenemos que

$$I_z = 4\int_0^a \int_0^{\pi/2} \int_0^{r^2} r^2\rho r\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = 4\rho\int_0^a \int_0^{\pi/2} r^5\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = 2\pi\rho \int_0^a r^5\mathrm{d}r = \frac{\pi\rho a^6}{3}.$$

4. (25 PUNTOS) Determine el volumen de la región del espacio definida por

$$\begin{aligned} x+y+z &\geq 0 \\ x-z &\geq 0 \\ -x+2y-z &\geq 0 \\ x^2+y^2+z^2 &\leq 4 \end{aligned}$$

Desarrollo: Llamaremos Ω a la región. Sean

$$\begin{aligned} u &= x+y+z \\ v &= x-z \\ w &= -x+2y-z \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3}u+\frac{1}{2}v-\frac{1}{6}w \\ y &= \frac{1}{3}u+\frac{1}{3}w \\ z &= \frac{1}{3}u-\frac{1}{2}v-\frac{1}{6}w \end{aligned}$$

entonces $u,v,w \geq 0$ y $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ corresponde a

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{3}u+\frac{1}{2}v-\frac{1}{6}w\right)^2+\left(\frac{1}{3}u+\frac{1}{3}w\right)^2+\left(\frac{1}{3}u-\frac{1}{2}v-\frac{1}{6}w\right)^2 \\ = & \frac{1}{3}u^2+\frac{1}{2}v^2+\frac{1}{6}w^2 \leq 4 \end{aligned}$$

se sigue que

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} 1d\,(x,y,z) \\ &= \iiint_{\Omega^*} \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| \mathrm{d}\,(u,v,w) \end{aligned}$$

donde Ω^* corresponde a $u,v,w \geq 0$, $\frac{1}{12}u^2+\frac{1}{8}v^2+\frac{1}{24}w^2 \leq 1$. Calculamos el jacobiano

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{vmatrix} = \frac{1}{6}$$

así

$$V = \frac{1}{6}\iiint_{\Omega^*} \mathrm{d}\,(u,v,w)$$

usaremos otro cambio $u=\sqrt{12}p$, $v=\sqrt{8}q$, $w=\sqrt{24}r$ entonces la nueva región es Ω^{**} dada por $p,q,r \geq 0$ y $p^2+q^2+r^2 \leq 1$ y

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6}\iiint_{\Omega^*} \mathrm{d}\,(u,v,w) \\ &= \frac{1}{6}\iiint_{\Omega^{**}} \sqrt{12}\sqrt{8}\sqrt{24}\mathrm{d}\,(p,q,r) \\ &= 8\iiint_{\Omega^{**}} \mathrm{d}\,(p,q,r) \end{aligned}$$

finalemente usamos esféricas

$$
\begin{aligned}
V &= 8\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \rho^2\sin\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta \\
&= 8\left(\int_0^{\pi/2}\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\right)\left(\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^1\rho^2\,\mathrm{d}\rho\right) \\
&= 8\left(\frac{1}{2}\pi\right)\left(\frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{4}{3}\pi
\end{aligned}
$$