1. $\boxed{\textbf{30ptos.}}$ Use el método de separación de variables para resolver

$$(t+1)[u_t(x,t)-u_{xx}(x,t)]+u(x,t)=0, \quad 0<x<2, \ \ t>0$$

donde $u(0,t)=u(2,t)=0$ para $t\geq 0$ y

$$u(x,0)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0\leq x\leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1<x\leq 2 \end{cases}$$

Desarrollo. Buscamos una solución de la forma $u(x,t)=M(x)N(t)$. Reemplazando obtenemos

$$M''(x)+\lambda M(x)=0 \quad \text{y} \quad N'(t)+\left(\frac{1}{1+t}+\lambda\right)N(t)=0.$$

Usando las condiciones de frontera planteamos el problema de autovalores

$$M''(x)+\lambda M(x)=0 \quad \text{con} \quad M(0)=M(2)=0.$$

Los autovalores son $\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{4}$ y las autofunciones son $M_n(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$, para $n\geq 1$.
Ahora resolvemos $N'(t)+\left(\frac{1}{1+t}+\frac{n^2\pi^2}{4}\right)N(t)=0$. Las soluciones son

$$N_n(t)=a_n\left(\frac{1}{1+t}\right)e^{-\frac{n^2\pi^2}{4}t}.$$

Por lo tanto, la solución es

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\frac{1}{1+t}\right)e^{-\frac{n^2\pi^2}{4}t}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right),$$

donde

$$a_n=\int_0^2 f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx=\int_0^1\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx=\frac{2}{n\pi}\left[1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

Luego,

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left[1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]\left(\frac{1}{1+t}\right)e^{-\frac{n^2\pi^2}{4}t}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

2. **35ptos.** Considere el problema de determinar $u(x,t)$ que cumpla

$$u_t - 2u_{xx} + 4x = 0, \quad 0 < x < 1,\ t > 0$$

junto a las condiciones $u_x(0,t) = 1, \quad u(1,t) = 1$ para $t > 0$ y $u(x,0) = \frac{x^3}{3} + x + \frac{2}{3}$ para $x \in [0,1]$.

a) **15ptos.** Demostrar que usando una función $p(x)$ adecuada (la cual debe determinar) y el cambio de función $u(x,t) = w(x,t) + p(x)$ el problema se transforma en determinar $w(x,t)$ que cumpla

$$w_t = 2w_{xx} \text{ para } 0 < x < 1,\ t > 0$$

con $w_x(0,t) = w(1,t) = 0$ para $t > 0$ y $w(x,0) = 1$ para $x \in [0,1]$.

b) **20ptos.** Usando la parte anterior, determine $u(x,t)$.

Desarrollo. *a*) Derivando el cambio de variables, se tiene

$$u_x = w_x + p'(x),\ u_{xx} = w_{xx} + p''(x),\ u_t = w_t$$

Reemplazando obtenemos

$$w_t - 2(w_{xx} + p''(x)) + 4x = 0 \Longleftrightarrow w_t - 2w_{xx} - 2p''(x) + 4x = 0$$

Para que la ecuación sea homogénea se debe cumplir que $-2p''(x) + 4x = 0 \Longrightarrow p''(x) = 2x$.
Integramos 2 veces y obtenemos que $p(x) = \frac{x^3}{3} + ax + b$ donde a y b son constantes.
Como las condiciones de frontera no son homogéneas, debemos determinar valores de a y b para que la ecuación en la nueva variable w tenga condiciones de frontera homogéneas.

$$u_x(0,t) = 1 \Longrightarrow w_x(0,t) + p'(0) = 1 \Longrightarrow p'(0) = 1 \Longrightarrow a = 1.$$
$$u(1,t) = 1 \Longrightarrow w(1,t) + p(1) = 1 \Longrightarrow p(1) = 1 \Longrightarrow b = -\frac{1}{3}.$$

Si usamos la función $p(x) = \frac{x^3}{3} + x - \frac{1}{3}$, tenemos que resolver la ecuación

$$w_t = 2w_{xx} \quad 0 < x < 1,\ t > 0$$
$$w_x(0,t) = w(1,t) = 0$$
$$w(x,0) = 1.$$

b) Usando el método de separación de variables, en la ecuación en la variable w del item *a*), buscamos una solución de la forma $w(x,t) = M(x)N(t)$. Reemplazando obtenemos

$$M''(x) + \lambda M(x) = 0 \quad \text{y} \quad N'(t) + 2\lambda N(t) = 0.$$

Usando las condiciones $M'(0) = M(1) = 0$ obtenemos

los autovalores $\lambda_n = \dfrac{(2n+1)^2\pi^2}{4}$ y las autofunciones $M_n(x) = \cos\left(\dfrac{(2n+1)\pi}{2}x\right), \quad \forall n \geq 0.$

Ahora resolvemos $N'(t) + 2\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4}N(t) = 0$. Las soluciones son $N_n(t) = c_n e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{2}t}$.
Por lo tanto, la solución es:

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{2}t} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right).$$

Para calcular las constantes c_n usamos la condición inicial

$$w(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right) = 1 \Longrightarrow c_n = 2\int_0^1 \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right)dx = \frac{4(-1)^n}{(2n+1)\pi}.$$

La solución es

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{(2n+1)\pi} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{2}t} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right).$$

Luego, la solución del problema inicial es

$$u(x,t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{(2n+1)\pi} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{2}t} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right)\right) + \frac{x^3}{3} + x - \frac{1}{3}.$$

3. $\boxed{\textbf{35ptos.}}$ Encuentre una solución acotada para la ecuación de Laplace

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$$

en la región $R = \left\{(r,\theta) : 0 < r < 2,\ \ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right\}$ sujeta a las condiciones $u_\theta(r,0) = u_\theta\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 0$ para $0 \le r \le 2$ y $u_r(2,\theta) + u(2,\theta) = 8\cos(2\theta)$ para $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ usando separación de variables.

Desarrollo. Usando el método de separación de variables, buscamos soluciones de la forma $u(r,\theta) = M(r)N(\theta)$. Reemplazando, obtenemos

$$r^2M''(r) + rM'(r) + \lambda M(r) = 0, \quad N''(\theta) - \lambda N(\theta) = 0.$$

Con las condiciones de frontera, planteamos el problema de autovalores

$$N''(\theta) - \lambda N(\theta) = 0 \quad \text{con} \quad N'(0) = N'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Los autovalores son $\lambda_n = -4n^2$ y las autofunciones son $N_n(\theta) = \cos(2n\theta),\ \forall n \ge 0.$

Ahora resolvemos la ecuación $r^2M''(r) + rM'(r) - 4n^2M(r) = 0$. Esta es una ecuación de Euler y sus soluciones son

$$M_n(r) = a_n r^{2n} + b_n r^{-2n}.$$

Como la solución debe ser acotada en la región, es decir

$$\lim_{r\to 0} u(r,\theta) < \infty \quad \text{se tiene que} \quad b_n = 0,\ \ \forall n.$$

Por lo tanto, la solución es

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{2n}\cos(2n\theta).$$

Para determinar a_n usamos las condición $u_r(2,\theta) + u(2,\theta) = 8\cos(2\theta)$

$$u_r(2,\theta) + u(2,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(2^{2n} + 2n2^{2n-1})\cos(2n\theta) = 8\cos(2\theta).$$

Igualando coeficientes, se tiene

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1 \quad \text{y} \quad a_n = 0,\ \forall n \ge 2.$$

Luego, la solución es

$$u(r,\theta) = r^2\cos(2\theta).$$