INF221 – Algoritmos y Complejidad

Clase #6
Cuadratura Gaussiana

Aldo Berrios Valenzuela

Miércoles 17 de Agosto de 2016

1. Cuadratura Gaussiana

Estamos interesados en investigar la posibilidad de escribir cuadraturas (cálculo de la integral definida) más precisas sin incrementar el número de *puntos de cuadratura* (aka $x_0, x_1, \ldots, x_n$). Esto puede ser posible si nos tomamos la libertad de escoger estos puntos. Por lo tanto, el problema de cuadratura se transforma en un problema de escoger los puntos de cuadratura en adición a determinar los respectivos coeficientes tal que la cuadratura es exacta para los polinomios de grado máximo. Las cuadraturas que son obtenidas con este método se conocen como *cuadratura Gaussiana*[1].

Escabrosos detalles del caso general puede encontrarlos en "Introduction to Numerical Analysis" by Doron Levy (`na.pdf` en el moodle).

Ejemplo 1.1 (Cuadratura Gaussiana con $n = 2$)**.** Supongamos que queremos encontrar dos puntos de cuadratura de la ecuación[2]:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) \tag{1.1}$$

Como queremos encontrar los valores de a_0, a_1, x_0 y x_1, esperamos que la ecuación (1.1) sea exacta para polinomios de grado $\leq 2 \cdot 2 - 1 = 3$. Osea, es exacta para $1, x, x^2, x^3$ (puede reemplazar $f(x)$ por cualquier otra cosa, claro, si es que busca complicarse la existencia…). Entonces, reemplazamos $f(x) = x^k$ con $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ para la k-ésima ecuación, y con ello, formamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\int_{-1}^{1} x^k\,dx = a_0 x_0^k + a_1 x_1^k \qquad ; k \in \{0,1,2,3\} \tag{1.2}$$

Resolvemos la integral:

$$\int_{-1}^{1} x^k\,dx = \left.\frac{x^{k+1}}{k+1}\right|_{-1}^{1} = \begin{cases} 0, & \text{si } k \text{ es impar} \\ \dfrac{2}{k+1}, & \text{si } k \text{ es par} \end{cases}$$

y reemplazamos en el sistema de ecuaciones (1.2)::

$$2 = a_0 + a_1 \tag{1.3}$$
$$0 = a_0 x_2 + a_1 x_1 \tag{1.4}$$
$$\frac{2}{3} = a_0 x_2^2 + a_1 x_1^2 \tag{1.5}$$
$$0 = a_0 x_0^3 + a_1 x_1^3 \tag{1.6}$$

[1] Introduction to Numerical Analysis by Doron Levy, sección 6.6.1

[2] Se obtiene con análisis numérico, así que no se preocupe.

Finalmente, al resolver el sistema de ecuaciones de (1.3), (1.4), (1.5) y (1.6) se obtiene:

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = 1, \qquad x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

■

Una observación es que los coeficientes de los valores extremos a_0 y a_1 son iguales:

$$a_0 = a_1$$

y que los puntos de cuadratura extremos x_0 y x_1 son opuestos, vale decir:

$$x_0 = x_1$$

Lo anterior es extendible para n puntos de cuadratura, donde:

$$a_0 = a_{n-1}, \qquad x_0 = x_{n-1} \tag{1.7}$$

Importante: No lo demostraremos...

Ejemplo 1.2 (Cuadratura Gaussiana con $n = 3$)**.** Supongamos que queremos encontrar tres puntos de cuadratura, entonces usamos la ecuación:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2)$$

Sospechamos que:

$$\begin{aligned} x_0 &= -x_2 \\ x_1 &= 0 \\ a_0 &= a_2 \end{aligned}$$

Siguiendo los pasos del ejemplo 1.1, podemos resumir el sistema de ecuaciones generado a través del Cuadro 1.

k	$\int_{-1}^{1} x^k\,dx$	$=$	$a_0 x_0^k + a_1 x_1^k + a_2 x_2^k$
0	2	$=$	$a_0 + a_1 + a_2$
1	0	$=$	$a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$
2	$\frac{2}{3}$	$=$	$a_0 x_0^2 + a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2$
3	0	$=$	$a_0 x_0^3 + a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3$
4	$\frac{2}{5}$	$=$	$a_0 x_0^4 + a_1 x_1^4 + a_2 x_2^4$
5	0	$=$	$a_0 x_0^5 + a_1 x_1^5 + a_2 x_2^5$

Cuadro 1: Usamos los valores de $a_0 x_0^k + a_1 x_1^k + a_2 x_2^k = 0$ sólo para comprobar nuestras sospechas propuestas en el comienzo. Las demás ecuaciones las usamos para encontrar los valores restantes: a_0, a_1, a_2, x_0, x_2

Comenzamos con la ecuación que tiene $k = 2$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &= 2a_0 x_2^2 \\ x_2^2 &= \frac{1}{3a_0} \end{aligned} \tag{1.8}$$

Continuamos con $k = 4$:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{5} &= 2a_0 x_2^4 \\
\frac{2}{5} &= 2a_0 \left(\frac{1}{3a_0}\right)^2 \\
\frac{1}{5} &= a_0 \cdot \frac{1}{9a_0^2} \\
\frac{1}{5} &= \frac{1}{9a_0} \\
9a_0 &= 5 \\
\therefore a_0 &= \frac{5}{9}
\end{aligned}$$

Luego, reemplazamos a_0 en (1.8):

$$\begin{aligned}
x_2^2 &= \frac{1}{3 \cdot \frac{5}{9}} \\
&= \frac{3}{5} \\
\therefore x_2 &= \sqrt{\frac{3}{5}}
\end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2 - 2a_0 \\
&= 2 - \frac{5}{9} \\
&= \frac{13}{9}
\end{aligned}$$

Luego, sólo basta con reemplazar en el sistema de ecuaciones para comprobar que esto se cumpla. Pero no lo haremos nosotros ... ■

Los casos interesantes de cuadratura son:

$$\int_a^b \omega(x) f(x)\, dx \tag{1.9}$$

Existen un par de fórmulas que permiten resolverlas. Si quiere más detalles vea el libro “Introduction to Numerical Analysis” by Doron Levy (`na.pdf` en el moodle).