Universidad Técnica
Federico Santa María
Departamento de Matemática
Coordinación MAT024 2017-1

Matemática IV
Ayudantía #4
10 de Abril 2017

1. Resuelva la siguiente integral impropia:

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dV, \text{ donde } \Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2 \geq 1, z \geq 0, y \geq 0\right\}$$

Solución:
Usando coordenadas esféricas:

$$\iiint_{\Omega} \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dV = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_1^{\infty} \frac{e^{-\rho^2}\rho^2 \sin\phi}{\rho} d\rho d\phi d\theta = \frac{\pi}{2e}$$

2. Parametrice las siguientes curvas en $\mathbb{R}^2$, en sentido antihorario, en caso de ser cerradas:

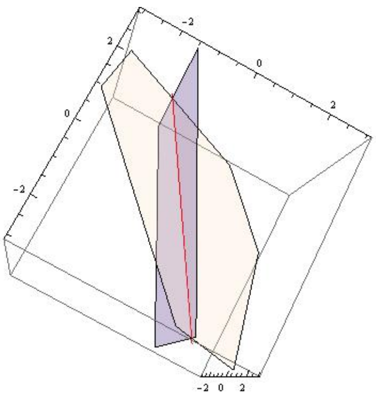
   a) $ax^2 + by^2 = 1,\ x, y \in \mathbb{R},\ a, b > 0$
   Solución:
   $(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{b}}\sin t\right),\ t \in [0, 2\pi]$

   b) $x^{2/3} + y^{2/3} = a,\ x \geq 0,\ y \geq 0, a > 0$
   Solución:
   $(x,y) = \left(a^{3/2}\cos^3 t, a^{3/2}\sin^3 t\right),\ t \in [0, \pi]$

   c) $x^2 - y^2 = 1,\ x > 0,\ y \in \mathbb{R}$
   Solución:
   $(x,y) = (\cosh t, \sinh t),\ t \in \mathbb{R}$

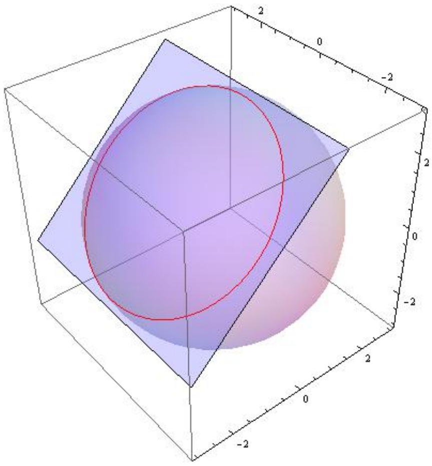
3. Parametrice las siguientes curvas en $\mathbb{R}^3$, en sentido antihorario, mirado desde el origen, en caso de ser cerradas:

   a) La intersección de $x + y + z = 1$ con $2x + y = 0$.
   Solución:



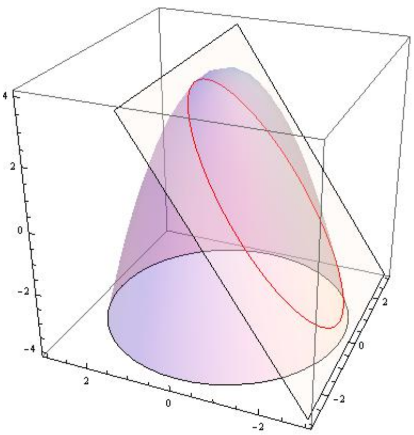
$(x,y,z) = (t, -2t, t+1),\ t \in \mathbb{R}$

b) La intersección de $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ con $x + y - z = 0$
Solución:



$$(x, y, z) = \left(\sqrt{\frac{7}{2}}\cos t - 1, \sqrt{7}\sin t, \sqrt{\frac{7}{2}}\cos t + 1\right), \, t \in \mathbb{R}$$

c) La intersección de $4 - (x^2 + y^2) = z$ con $2y - z + 2 = 0$
Solución:



$$(x, y, z) = \left(\sqrt{\frac{7}{2}}\cos t - 1, \sqrt{7}\sin t, \sqrt{\frac{7}{2}}\cos t + 1\right), \, t \in \mathbb{R}$$

4. Determine la longitud de arco de la siguiente curva (impropia):

$$(x, y) = e^{-kt}(\cos at, \sin at), \; t > 0, \; a, k > 0$$

Solución:

$$L = \int_0^\infty \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{2}\sqrt{k^2 + a^2} \int_0^\infty e^{-kt} dt = \frac{\sqrt{2}\sqrt{k^2 + a^2}}{k}$$

5. Se tiene un campo escalar $C(x,y) = x^2 + y^2 - xy$ que representa la concentración de un sustrato en un fluido. Una partícula recorre el plano absorbiendo el sustrato, la trayectoria de la partícula viene dada por: $y = x^2$ desde $(0,0)$ hasta $(1,1)$, $y = \sqrt{2x - x^2}$ desde $(1,1)$ hasta $(2,0)$, $y = x - 2$, desde $(2,0)$ hasta $(0,-2)$ y $x = 0$ desde $(0,-2)$ hasta $(0,0)$. Escriba las integrales que permiten calcular la cantidad de sustrato absorbido por la partícula.
Solución:

Parametrizando la curva:
$L_1 : x = t, y = t^2, t \in [0,1], dl = \sqrt{1+4t^2}dt, C(t) = t^2 - t^3 + t^4$
$L_2 : x = \cos t + 1, y = \sin t, t \in [\pi/2, 0], dl = dt, C(t) = (1 + \cos t)(2 - \sin t)$
$L_3 : x = t, y = t - 2, t \in [2,0], dl = \sqrt{2}dt, C(t) = t^2 - 2t + 4$
$L_4 : x = 0, y = t, t \in [-2,0], dl = dt, C(t) = t^2$
$S = \int_L C_i(t)dl = \sum_i \int_{L_i} C_i(t)dl_i$
$S = \int_0^1 (t^2 - t^3 + t^4)\sqrt{1+4t^2}dt + \int_{\pi/2}^0 (1+\cos t)(2 - \sin t)dt + \int_2^0 \sqrt{2}(t^2 - 2t + 4)dt + \int_{-2}^0 t^2 dt$