Departamento de Informática
Universidad Técnica Federico Santa María

Programación Dinámica y Resolución de modelos Enteros

v. 1.0.0

Renata Mella
renata.mella.12@sansano.usm.cl

October 16, 2016

Contenido

Resolución de modelos enteros
- Enumeración
- Branch & Bound

Programación no lineal
- Modelos de programación no lineal
- Técnicas de resolución de problemas de programación no lineal

Fundamentos de la programación dinámica
- Introducción
- Tipos de Programación Dinámica
- Características de la programación dinámica

Programación Dinámica Determinista
- Definición

Ejercicios
- Ejemplo
- Propuesto

Resolución de modelos enteros
Enumeración

Un método de resolución para problemas con variables enteras es realizar una enumeración de variables.

Una enumeración es la identicación de los valores posibles de conjuntos de variables respecto a un área o región donde los dominios de las variables existan.

Básicamente, consiste en listar todas las soluciones posibles para las variables y encontrar la óptima. Si el problema es mixto (con variables reales), entonces se listan todas las combinaciones posibles para las variables binarias y a partir de dichos conjuntos se busca la solución para cada uno como si fuese un problema de programación lineal. Es similar al Branch & Bound pero en este caso se resuelven todos los subproblemas.

Resolución de modelos enteros

Branch & Bound

La tecnica de ramificación y acotamiento se suele interpretar como un arbol de soluciones, donde cada rama nos lleva a una posible solucion posterior a la actual.

La idea es generar “ramas” o sub-problemas de un problema original a partir de acotamientos a los valores posibles de las variables.

Básicamente se van generando nuevas restricciones que van redefiniendo la región factible.

Resolución de modelos enteros

Branch & Bound

- La idea central es dividir el problema general en sub-problemas cada vez mas pequeños.
- Antes de cualquier ramificación y acotamiento hay que considerar que debemos relajar el problema para que sea de programación lineal y pueda ser resuelto por distintos métodos conocidos.
- La ramificacion se hace mediante la partición del conjunto de valores posibles de las variables del problema.
- La idea es ir descartando subconjuntos cuya cota indique que no es posible que contenga una solución óptima.

Ejemplo *Considere un problema de programación lineal entera mixta cuyo objetivo es la maximización de una función* z *involucrando las variables binarias* x_1, x_2 *y* x_3 *y la variable continua* $x_4 \geq 0$. *El Cuadro 3.1 presenta la solución óptima para todos los problemas relajados posibles de obtener (un guión en la columna correspondiente a las variables* x_1, x_2 *y* x_3 *significa que la variable está libre en el problema relajado).*

x_1	x_2	x_3	x	z	x_1	x_2	x_3	x	z	x_1	x_2	x_3	x	z
-	-	-	(0.2,1,0,0)	82.80	0	-	-	(0,1,0.67,0)	80.67	1	-	-	(1,0,0,0)	74.00
-	-	0	(0.2,1,0,0)	82.80	0	-	0	(0,1,0,2)	28.00	1	-	0	(1,0,0,0)	74.00
-	-	1	(0,0.8,1,0)	79.40	0	-	1	(0,0.8,1,0)	79.40	1	-	1	(1,0,1,0)	63.00
-	0	-	(0.7,0,0,0)	81.80	0	0	-	Imposible	-	1	0	-	(1,0,0,0)	74.00
-	0	0	(0.7,0,0,0)	81.80	0	0	0	Imposible	-	1	0	0	(1,0,0,0)	74.00
-	0	1	(0.4,0,1,0)	78.60	0	0	1	Imposible	-	1	0	1	(1,0,1,0)	63.00
-	1	-	(0.2,1,0,0)	82.80	0	1	-	(0,1,0.67,0)	80.67	1	1	-	(1,1,0,0)	62.00
-	1	0	(0.2,1,0,0)	82.80	0	1	0	(0,1,0,2)	28.00	1	1	0	(1,1,0,0)	62.00
-	1	1	(0,1,1,0.5)	77.00	0	1	1	(0,1,1,0.5)	77.00	1	1	1	(1,1,1,0)	51.00

Un modelo de programación no lineal se define generalmente como:

$$\begin{aligned} \text{min o max} \quad & f((x) \\ \text{Sujeto a} \quad & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0 \\ & x \in X \end{aligned}$$

donde:

- $X \subset \mathbb{R}^{n_x}$
- $x = (x_1, x_2, \cdots, x_{n_x})$
- $f : X \to \mathbb{R}$
- $g : X \to \mathbb{R}^{n_g}$
- $h : X \to \mathbb{R}^{n_h}$

y f, g y h están definidas en X

Respecto a las posibles soluciones tenemos tres casos:

- Factibles: para una solución óptima x sujeta a limitaciones, la función objetivo f es maximizada o minimizada.
- No acotada: para algunos x sujetas a limitaciones, la función objetivo f es ya sea ∞ o $-\infty$.
- Infactible: no existe una solución x que está sujeta a limitaciones.

No existe un método para resolver todos los problemas no lineales; depende de cómo se comporten las restricciones y la función objetivo.

Por lo mismo existen múltiples enfoques y métodos para resolver modelos de programación no lineal. En el curso nos enfocaremos en la programación dinámica.

Ejemplo

Se desea construir un hospital entre dos ciudades que distan D entre sí. El lugar elegido debe corresponder al menos contaminado en la línea que une las dos ciudades. La contaminación en el lugar es proporcional a los residuos de las industrias presentes en cada ciudad y al inverso de su distancia más 1. Además, la segunda ciudad genera 3 veces más actividad industrial que la primera. Formular el problema de programación no lineal, que permita determinar el lugar óptimo para construir el hospital.

Fundamentos de la progamación dinámica

Introducción

La programación dinámica es una técnica de programación matemática que proporciona un procedimiento sistemático para determinar la combinación óptima de una serie de decisiones interrelacionadas.

Un problema complejo es desagregado en problemas simples que se resuelven etapa por etapa.

En contraste con la programación lineal, no se cuenta con una formulación matemática estándar para el problema de programación dinámica.

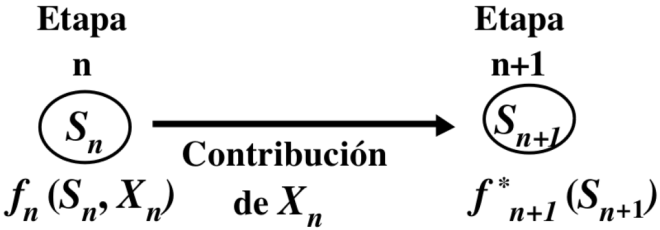
Se trata de un enfoque de tipo general para la solución de problemas y las ecuaciones específicas que se usan se deben desarrollar para que representen cada situación individual.

- Programación dinámica determinística: el estado en la siguiente etapa está completamente determinado por el estado y la política de decisión de la etapa actual.
- Programación dinámica probabilística: el estado en la siguiente etapa no está completamente determinado por el estado y la política de decisión de la etapa actual, existiendo en su lugar una distribución de probabilidad para determinar cuál será el siguiente estado.

- Etapas: El problema se puede dividir en etapas que requieren una política de decisión en cada una de ellas.
- Estados asociados: Cada etapa tiene cierto número de estados asociados con su inicio.
- Política de decisión: El efecto de la política de decisión en cada etapa es transformar el estado actual en un estado asociado con el inicio de la siguiente etapa.
- Diseño de solución: el procedimiento de solución está diseñado para encontrar una política óptima para el problema completo, es decir, una receta para la política de decisión óptima en cada etapa para cada uno de los estados posibles.

- Principio de optimalidad:
  - Dado el estado actual, una política óptima para las etapas restantes es independiente de la política adoptada en etapas anteriores.
  - La decisión inmediata óptima depende sólo del estado actual y no de cómo se llegó ahí.
- Inicio de solución: El procedimiento de solución se inicia al encontrar una política óptima para la última etapa.
- Relación recursiva: Se dispone de una relación recursiva que identifica la política óptima para la etapa n, dada la política óptima para la etapa $n+1$.
- Retroceso: Cuando se tiene una relación recursiva como la de la función, el procedimiento de solución hacia atrás inicia en la última etapa y se mueve hacia la primera, etapa por etapa.

En la programación dinámica determinística, el estado en la siguiente etapa esta completamente determinado por el estado y la poltica de decisión de la etapa actual.



Relación recursiva: se dispone de una relación recursiva que identifica la política óptima para la etapa n, dada la política óptima para la etapa $n+1$.

$$f_n^*(S_n) = Max_{x_n}\{f_n(S_n, X_n)\}$$

$$f_n^*(S_n) = Min_{x_n}\{f_n(S_n, X_n)\}$$

Retroceso: cuando se tiene una relacion recursiva como la de la función, el procedimiento de solución hacia atras inicia en la última etapa y se mueve hacia la primera, etapa por etapa.

$$f_n^*(S_n, X_n) = C_{S,X_n} \text{ “}+\text{” } f_{n+1}^*(X_n)$$

2. Una empresa de alquiler de automóviles se propone planificar su política de reemplazamientos para los próximos 3 años. La adquisición de un coche nuevo le cuesta a la empresa 9.000 euros. Durante su vida útil, los coches incurren costos de mantenimiento que aumentan con su antigüedad, mientras que su valor de venta como coches usados disminuye con su edad. Un coche nuevo no incurre costos de mantenimiento. Para cada coche, la empresa toma decisiones el día 1 de enero de cada año: vender el coche por su valor como coche usado y adquirir uno nuevo, o continuar utilizándolo durante un año más, incurriendo los costos de mantenimiento correspondientes. Los gastos de mantenimiento y el valor de venta de un coche usado, en función de su antigüedad en años, se muestran en la siguiente tabla:

Antigüedad (años)	Costo de mantenimiento	Valor de venta
1	1800	6000
2	2100	4000
3	2400	3000
4	2700	2250

1. Formule como un problema de programación dinámica la planificación para los próximos 3 años y las relaciones de recurrencia.
2. Resuelva el problema y describa la solución óptima obtenida.
3. ¿Debe la empresa reemplazar un coche que tiene inicialmene 4 años?. ¿Y uno que tiene 3 años?

Ejercicios
Propuesto

Una compañía sabe que la demanda de su producto durante cada uno de los próximos cuatro meses es como se indica: mes 1, 1 unidad; mes 2, 3 unidades; mes 3, 2 unidades; y mes 4, 4 unidades. La compañía debe determinar cuántas unidades tiene que fabricar en el mes corriente. Durante un mes en el cual se producen algunas unidades, se incurre en un costo preliminar de 3 dólares. Además, hay un costo variable de 1 dólar por cada unidad que se fabrica. Al final de cada mes, se genera un costo de almacenamiento de 50 centavos (0,5 dólar) por cada unidad disponible. Las limitaciones en la capacidad permiten producir durante cada mes un máximo de 5 unidades. Las dimensiones de la bodega de la compañía restringen el inventario final de cada mes a 4 unidades, cuanto mucho. La empresa desea determinar un plan de producción que cumpla con toda la demanda a tiempo y minimice la suma del costo de producción y del costo por almacenamiento durante los cuatro meses. Suponga que se dispone de 0 unidades al comienzo del primer mes.