

INF221 – Algoritmos y Complejidad

Clase 19 Método Simbólico

Aldo Berrios Valenzuela

Miércoles 12 de octubre de 2016

1. Método Simbólico

Idea: Describir cómo se construyen objetos, obtener funciones generatrices *directamente*.

Definición 1.1 (Clase Combinatoria). Una *clase* (combinatoria) es un conjunto \mathcal{A} , de *objetos* $\alpha \in \mathcal{A}$. Un objeto tiene un *tamaño* $|\alpha| \in \mathbb{N}_0$. Por ejemplo, \mathcal{A} pueden ser todas las permutaciones de un arreglo $a[n]$, donde $\alpha \in \mathcal{A}$ es una permutación.

Al conjunto de objetos de tamaño n lo llamaremos \mathcal{A}_n , el número de objetos de tamaño n es $|\mathcal{A}_n| = a_n$. Exigimos a_n finito para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Las funciones generatrices asociadas son:

- Ordinaria:

$$A(z) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} z^{|\alpha|} = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \quad (1.1)$$

- Exponencial:

$$\hat{A}(z) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \frac{z^{|\alpha|}}{|\alpha|!} = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{z^n}{n!} \quad (1.2)$$

Clases básicas:

- \emptyset : Vacía. Funciones generatrices 0.
- \mathcal{E} : Contiene un único objeto de tamaño 0, llamado ϵ (¡sorpresa!); La función generatriz correspondiente es:

$$A(z) = 1$$

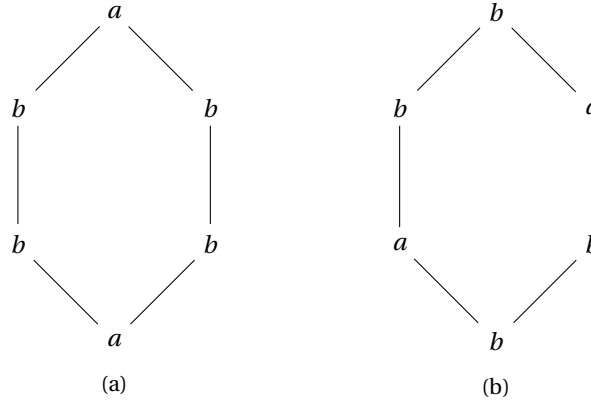
- \mathcal{Z} : Contiene un único objeto de tamaño 1, llamado ζ (zeta); La función generatriz asociada a esta clase es:

$$A(z) = z$$

Operaciones:

- $\mathcal{A} + \mathcal{B}$: Unión combinatoria; se permiten repetidas (objetos se “decoran” con su origen)
- $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$: Objetos (α, β) con $\alpha \in \mathcal{A}$, $\beta \in \mathcal{B}$; $|(\alpha, \beta)| = |\alpha| + |\beta|$
- $\text{SEQ}(\mathcal{A})$: Secuencia de \mathcal{A} , o sea:

$$\{\epsilon, \alpha, (\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \dots\}$$

Figura 1: Ejemplo de ciclos para el arreglo $[a, b, b, b, b, a]$.

- $\text{SET}(\mathcal{A})$: Subconjuntos de \mathcal{A} . Esto es como el conjunto de potencia.
- $\text{MSET}(\mathcal{A})$: Multisubconjuntos de \mathcal{A}
- $\text{CYC}(\mathcal{A})$: Consiste en ordenar elementos de \mathcal{A} en un círculo (una secuencia de inicio y fin). Consideremos el arreglo $[a, b, b, b, b, a]$, dos ciclos para este arreglo se pueden apreciar en la figura 1.

Note que para las cuatro últimas operaciones se tiene que \mathcal{A} *no* contiene objetos de tamaño 0.

1.1. Objetos no rotulados

Definición 1.2 (Objetos no rotulados). Formados por *átomos* (tamaño de α es el número de átomos) indistinguibles / intercambiables.

Teorema 1.1. Sean \mathcal{A}, \mathcal{B} calses, con funciones generatrices ordinarias $A(z), B(z)$. La función generatriz de:

1. Para enumerar $\mathcal{A} + \mathcal{B}$:

$$A(z) + B(z)$$

2. Para enumerar $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$:

$$A(z) \cdot B(z)$$

3. Para enumerar $\text{SEQ}(\mathcal{A})$:

$$\frac{1}{1 - A(z)}$$

4. Para enumerar $\text{SET}(\mathcal{A})$:

$$\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} (1 + z^{|\alpha|}) = \prod_{n \geq 1} (1 + z^n)^{a_n} = \exp \left(\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} A(z^k) \right)$$

5. Para enumerar $\text{MSET}(\mathcal{A})$:

$$\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} \frac{1}{1 - z^{|\alpha|}} = \prod_{n \geq 1} \frac{1}{(1 - z^n)^{a_n}} = \exp \left(\sum_{k \geq 1} \frac{A(z^k)}{k} \right)$$

6. Para enumerar $\text{CYC}(\mathcal{A})$:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\phi(n)}{n} \ln \left(\frac{1}{1 - A(z^n)} \right)$$

Demostración. Usamos funciones generatrices para demostrar cada una de las propiedades del teorema 1.1.

1. Usando funciones generatrices:

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{A} + \mathcal{B}} z^{|\gamma|} = \sum_{\gamma \in \mathcal{A}} z^{|\gamma|} + \sum_{\gamma \in \mathcal{B}} z^{|\gamma|} = A(z) + B(z)$$

2. De la misma forma que el anterior, usamos propiedades de funciones generatrices:

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}} z^{|\gamma|} = \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{A} \\ \beta \in \mathcal{B}}} z^{|\alpha, \beta|} = \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{A} \\ \beta \in \mathcal{B}}} z^{|\alpha| + |\beta|} = \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} z^{|\alpha|} \right) \cdot \left(\sum_{\beta \in \mathcal{B}} z^{|\beta|} \right) = A(z) \cdot B(z)$$

3. Sea $\text{SEQ}(A) = S$. Por lo tanto, podemos describir la clase $\text{SEQ}(A)$ como sigue:

$$S = \epsilon + S \times A$$

Pasamos lo anterior a funciones generatrices, con lo que se tiene:

$$S(z) = 1 + S(z) A(z)$$

$$S(z) = \frac{1}{1 - A(z)}$$

4. La clase de los subconjuntos finitos de \mathcal{A} queda representada por el producto simbólico:

$$\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} (\mathcal{E} + \{\alpha\})$$

ya que al distribuir los productos de todas las formas posibles aparecen todos los subconjuntos de \mathcal{A} . Directamente obtenemos entonces:

$$\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} (1 + z^{|\alpha|}) = \prod_{n \geq 0} (1 + z^n)^{a_n}$$

Otra forma de verlo es que cada objeto de tamaño n aporta un factor $1 + z^n$, si hay a_n de estos el aporte total es $(1 + z^n)^{a_n}$. Esta es la primera parte de lo aseverado. Aplicando logaritmo:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \ln(1 + z^{|\alpha|}) &= - \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k z^{|\alpha|k}}{k} \\ &= - \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} z^{|\alpha|k} \\ &= \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1} A(z^k)}{k} \end{aligned}$$

Exponenciando lo último resulta equivalente a la segunda parte.

5. Podemos considerar un multiconjunto finito como la combinación de una secuencia para cada tipo de elemento:

$$\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} \text{SEQ}(\{\alpha\})$$

La función generatriz buscada es:

$$\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} \frac{1}{1 - z^{|\alpha|}} = \prod_{n \geq 0} \frac{1}{(1 - z^n)^{a_n}}$$

Esto provee la primera parte. Nuevamente aplicamos logaritmo para simplificar:

$$\begin{aligned}
 \ln \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} \frac{1}{1 - z^{|\alpha|}} &= - \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \ln(1 - z^{|\alpha|}) \\
 &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \sum_{k \geq 1} \frac{z^{k|\alpha|}}{k} \\
 &= \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} z^{k|\alpha|} \\
 &= \sum_{k \geq 1} \frac{A(z^k)}{k}
 \end{aligned}$$

□

1.2. Algunas Aplicaciones

Ejemplo 1.1 (Árbol binario). Un árbol binario está conformado de:

- Vacío
- Raíz y árbol binario derecho y árbol binario izquierdo.

Sea \mathcal{B} la clase árbol binario:

$$\mathcal{B} = \mathcal{E} + \mathcal{Z} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B}$$

Entonces:

$$B(z) = 1 + zB^2(z) \quad (1.3)$$

y en consecuencia:

$$b_n = C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad (1.4)$$

Entonces:

$$B(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2z} \quad (1.5)$$

Condición adicional: b_0 es *finito*. Una vez que estamos en eso, aplicamos la receta de nuestro amigo Vicente, el teorema del binomio:

$$B(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z} \quad (1.6)$$

■

Ejemplo 1.2 (Números Naturales). Podemos representar un natural como $|||| = 4$ (palito, palito, palito, palito). Entonces, podemos representar los números naturales como una secuencia de palitos, es decir:

$$\mathbb{N}_0 = \text{SEQ}(Z)$$

Por otro lado, si queremos representar números naturales partiendo de 1 tenemos:

$$\mathbb{N} = Z \times \text{SEQ}(z)$$

donde Z es la secuencia de al menos 1 palito.

Una *combinación* de n es escribirlo como una suma de naturales:

$$\begin{aligned}
 4 &= 1 + 1 + 1 + 1 \\
 &= 1 + 1 + 2 \\
 &= 1 + 2 + 1 \\
 &= 2 + 1 + 1 \\
 &= 2 + 2 \\
 &= 3 + 1 \\
 &= 1 + 3 \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

Combinación: Secuencia de \mathbb{N} , por lo tanto:

$$C = \text{SEQ}(Z \times \text{SEQ}(Z))$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 C_n(z) &= \frac{1}{1 - \frac{z}{1 - z}} \\
 &= \frac{1 - z}{1 - (L\pi] - 1)z} \\
 &= (1 - z) \sum_{k \geq 0} \left[\sqrt{2} \right]^k z^k \\
 &= \frac{1 - z}{1 - 2z} \\
 [z^n] C(z) &= [z^n] \frac{1}{1 - 2z} - [z^n] \frac{z}{1 - 2z} \\
 &= 2^n - [n \geq 1] [z^{n-1}] \frac{1}{1 - 2z} \\
 &= 2^n - [n \geq 1] 2^{n-1} \\
 &= \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 2^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

■