Departamento de Informática
Universidad Técnica Federico Santa María

Modelamiento y programación Lineal

v. 1.0.0

Renata Mella
renata.mella.12@sansano.usm.cl

August 11, 2016

Contenido

- Un modelo matemático es una representación idealizada de la realidad, es decir, es una abstracción de ésta.

- Un modelo matemático es una representación idealizada de la realidad, es decir, es una abstracción de ésta.
- Sus elementos característicos son:
  - Datos
  - Variables
  - Restricciones
  - Objetivo

Definición 1: Sea $x_1, x_2, \cdots, x_n$ una serie de variables de decisión. Una función $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ es una función lineal sí y sólo sí para un conjunto de constantes $c_1, c_2, \cdots, c_n$ se tiene que:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c_1\, x_1 + c_2\, x_2 + \cdots + c_n\, x_n$$

Además, toda variable de decisión existe dentro de los valores reales positivos.

Definición 1: Sea $x_1, x_2, \cdots, x_n$ una serie de variables de decisión. Una función $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ es una función lineal sí y sólo sí para un conjunto de constantes $c_1, c_2, \cdots, c_n$ se tiene que:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c_1\, x_1 + c_2\, x_2 + \cdots + c_n\, x_n$$

Además, toda variable de decisión existe dentro de los valores reales positivos.

Definición 2: Para cualquier función $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ y cualquier número b las desigualdades:

- $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq b$
- $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geq b$

son desigualdades lineales.

Porblema de programación lineal (LP)

Es un problema de optimización para el cual debemos tener presente los siguientes elementos:

1. Se definen **variables de decisión** a las cuales asignaremos un valor según las condiciones del problema.
2. Luego se determina una **función objetivo** como una función lineal de las variables de decisión que se desea optimizar, ya sea maximizando o minimizando.
3. Los valores de las variables de decisión deben satisfacer un conjunto de **restricciones**. Éstas deben ser lineales, pudiendo ser una ecuación o desigualdad.
4. Existe una restricción de signo asociada a cada variable, la cual llamaremos **naturaleza de las variables**.
5. Existen también **parámetros** preestablecidos que se pueden utilizar para armar las restricciones.

Existen 4 supuestos respecto a la programación lineal:

- Supuesto de *Proporción:* La contribución de cada variable a la función objetivo es **proporcional** al valor de la variable de decisión.

Existen 4 supuestos respecto a la programación lineal:

- Supuesto de *Proporción:* La contribución de cada variable a la función objetivo es **proporcional** al valor de la variable de decisión.
- Supuesto de *Adición:* La contribución de cada variable a la función objetivo es **independiente** de los valores de otras variables de decisión.

Existen 4 supuestos respecto a la programación lineal:

- Supuesto de *Proporción:* La contribución de cada variable a la función objetivo es **proporcional** al valor de la variable de decisión.
- Supuesto de *Adición:* La contribución de cada variable a la función objetivo es **independiente** de los valores de otras variables de decisión.
- Supuesto de *Divisibilidad:* Cada variable de decisión puede tomar **valores fraccionarios**.

Existen 4 supuestos respecto a la programación lineal:

- Supuesto de *Proporción:* La contribución de cada variable a la función objetivo es **proporcional** al valor de la variable de decisión.
- Supuesto de *Adición:* La contribución de cada variable a la función objetivo es **independiente** de los valores de otras variables de decisión.
- Supuesto de *Divisibilidad:* Cada variable de decisión puede tomar **valores fraccionarios**.
- Supuesto de *Certeza:* Cada parámetro del problema debe ser conocido con **certeza**.

La ciudad 1 produce 500 toneladas de basura por día y la ciudad 2 produce 400 toneladas por día. La basura debe ser incinerada en los incineradores 1 ó 2, y cada incinerador puede procesar hasta 500 toneladas de basura por día. El costo de incinerar la basura es US $40/ton en el incinerador 1 y US $30/ton en el incinerador 2. La incineración reduce cada tonelada de basura a 0.2 toneladas de cenizas, las cuales deben ser llevadas a uno de dos depósitos. Cada depósito puede recibir a lo más 200 toneladas de cenizas por día. El costo es de US $3/milla para transportar una tonelada de material (ya sea ceniza o basura). Las distancias en millas se muestran en la tabla. Formule el problema de programación lineal que se puede usar para minimizar los costos.

	Incinerador 1	Incinerador 2
Ciudad 1	30	5
Ciudad 2	36	42
Botadero 1	5	9
Botadero 2	8	6

Pasos a seguir

1. Graficar las restricciones
2. Identicar la region factible. Entiéndase por región factible como el *área* donde las variables cumplen con las restricciones y con sus propios dominios.
3. Determinar el valor de la función objetivo en los vértices de la región factible e identicar la solucion óptima.
4. Determinar qué restricciones están activas.

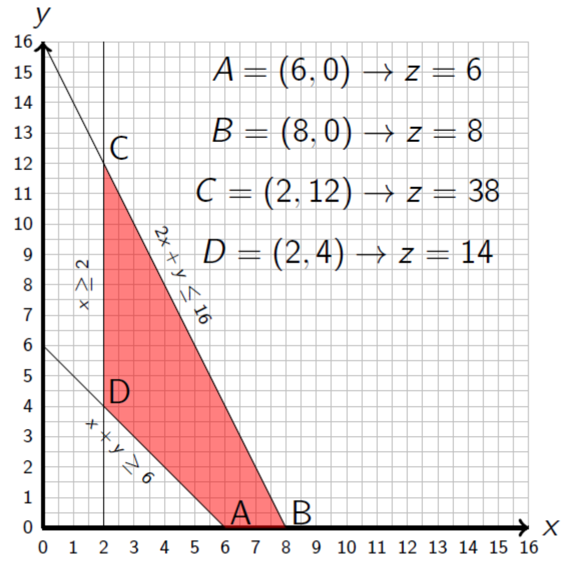
Considere el siguiente modelo de programación lineal:

$$\text{Min } z = x + 3y$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} 2x + y &\leq 16 \\ x &\geq 2 \\ x + y &\geq 6 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Métodos de Resolución
Método Gráfico



Modelo con óptimos Alternativos/Múltiples

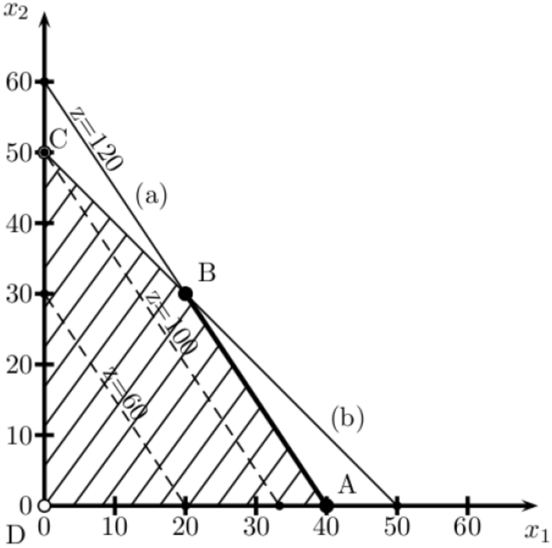
$$\text{Max } z = 3x + 2y$$

Sujeto a:

$$\frac{x}{40} + \frac{y}{60} \leq 1$$

$$\frac{x}{50} + \frac{y}{50} \leq 1$$

$$x, y \geq 0$$



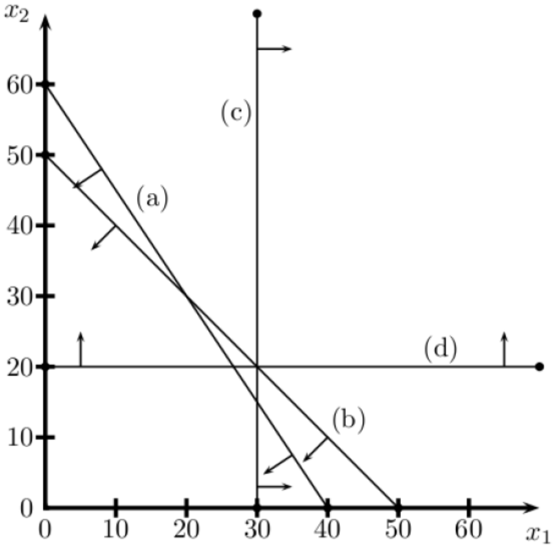
x_2
60
50
40
30
20
10
0
C
z=120
(a)
B
z=100
z=60
(b)
A
D
0
10
20
30
40
50
60
x_1

Modelo No Factible

$$\text{Max } z = 3x + 2y$$

Sujeto a:

$$\frac{x}{40} + \frac{y}{60} \leq 1$$
$$\frac{x}{50} + \frac{y}{50} \leq 1$$
$$x \geq 30$$
$$y \geq 20$$
$$x, y \geq 0$$



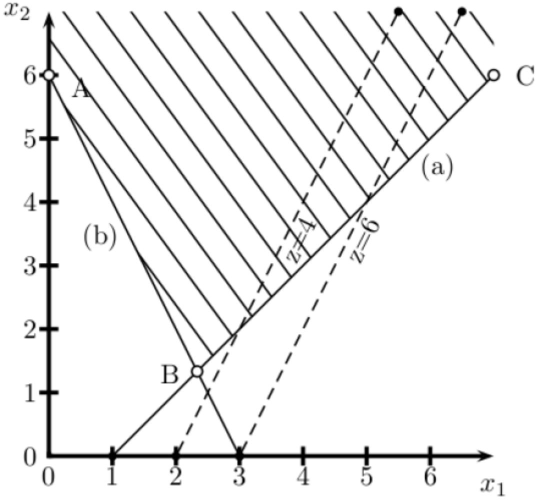
x_2
60
50
40
30
20
10
0
(c)
(a)
(d)
(b)
0
10
20
30
40
50
60
x_1

Modelo No Acotado

$$\text{Max } z = 2x - y$$

Sujeto a:

$$x - y \leq 1$$
$$2x + y \geq 6$$
$$x, y \geq 0$$



x_2
6
5
4
3
2
1
0
A
(b)
B
C
(a)
z=4
z=6
0
1
2
3
4
5
6
x_1

Paso 1: Estandarización

- Restricción $\leq$: Se agrega variable artificial de holgura s_i, que representa la cantidad de recurso no empleado de esa restricción.
- Restricción $=$: Se agrega variable artificial a_i.
- Restricción $\geq$: Se agrega restando una variable de exceso e_i, que representa la cantidad de sobresatisfacción de la restricción. También se agrega una variable artificial a_i.

Valores que adquieren estas variables artificiales:

- s_i, $e_i = 0$
- $a_i = M$ (minimización)
- $a_i = -M$ (maximización)

NOTA IMPORTANTE

El método simplex está hecho para realizar minimización. Si se desea maximizar, se pueden seguir 2 caminos:

- Multiplicar la función objetivo por -1 y mantener todo como antes (incluyendo $a_i = M$).
- Se pueden realizar modificaciones a las reglas del simplex, como por ejemplo: se incorpora a la base las variables que poseen precio sombra o costo de oportunidad más positivo. El óptimo se alcanza cuando todos los precios sombra son negativos (a diferencia de cuando minimizábamos). En este caso, debemos asignar $a_i = -M$.

Ejemplo

Considere el siguiente modelo lineal:

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= x_1 + 3x_2 \\ \text{Sujeto a:} & \\ 2x_1 + x_2 &\leq 16 \\ x_1 &\geq 2 \\ x_1 + x_2 &\geq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Utilice el método simplex para encontrar la solución.

Ejercicio Propuesto

Considere el siguiente modelo lineal:

$$\text{Max } z = x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 35 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &\leq 20 \\ x_1 + 3x_2 &\geq 4 \\ x_4 - x_2 &\geq 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Utilice el método simplex para encontrar la solución.