INF221 – Algoritmos y Complejidad

Clase #4
Interpolación

Aldo Berrios Valenzuela

Miércoles 10 de Agosto de 2016

1. Interpolación

Idea: Nos dan los valores exactos de una función desconocida en $n+1$ puntos $f(x_0), \ldots, f(x_n)$, queremos hallar una función que tome esos valores (para calcular valores intermedios). El caso más común es utilizar *polinomios*. Para esta ocasión sabemos que hay exactamente un polinomio de grado $\leq n$ que pasa por $n+1$ puntos.

Supongamos que hay dos polinomios distintos, $p(x)$ y $q(x)$, de grado $\leq n$ que pasan los $n+1$ puntos (véase la Figura 1). Entonces $p(x) - q(x)$ es un polinomio de grado $\leq n$ que tiene $n+1$ ceros $x_0, \ldots, x_n$, implicando que

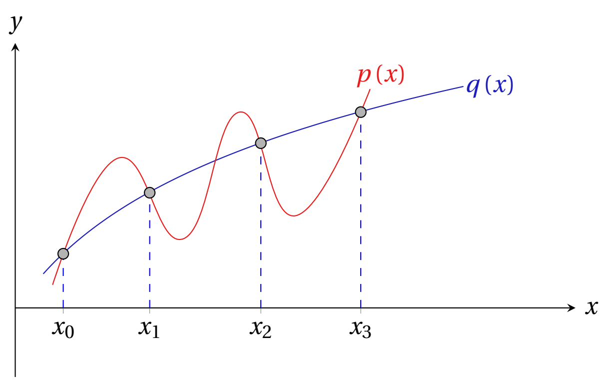

Figura 1: Sabemos que $p(x)$ y $q(x)$ se interceptan en los puntos x_0, x_1, x_2 y x_3. Las formas que tengan estos polinomios no importa.

$p(x) - q(x)$ es exactamente igual a cero.

Entre las cosas que podemos hacer para hallar la interpolación de $f(x)$ tenemos:

- De forma implícita.
- Con un sistema de ecuaciones.

1.1. De forma implícita

Para encontrar la interpolación de f de manera implícita simplemente inventamos un polinomio que pase por los puntos. Para ello podemos usar dos métodos:

- Lagrange.
- Newton.

1.1.1. Por Lagrange

Consiste en usar el polinomio:

$$
\begin{aligned}
p(x) =& f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} + \dots + \\
& f(x_n)\frac{(x-x_0)\dots(x-x_{n+1})}{(x_n-x_0)\dots(x_n-x_{n+1})} && (1.1) \\
=& \sum_{k\le n} f(x_k)\prod_{\substack{j\le n\\ j\ne k}}\frac{x-x_j}{x_k-x_j} && (1.2)
\end{aligned}
$$

como interpolación de f. Es claro que si evalúa p en alguno de los x_k con $k \in \{1,2,\dots,n\}$ que nos entregan, se tiene que $p(x_k) = f(x_k)$.

Si los puntos están casi igualmente espaciados, las ecuaciones (1.1) y (1.2) resultan bastante agradables.

1.1.2. Por Newton

Podemos escribir:

$$
\begin{aligned}
Q_0(x) &= f(x_0) = a_0 \\
Q_1(x) &= f(x_0) + (x_1-x_0)\underbrace{\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}_{Q_0(x_1)} \\
Q_2(x) &= f(x_0) + (x-x_0)\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} + (x-x_0)(x-x_1)\frac{f(x_2)-Q_1(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\
&\vdots \\
a_k &= \frac{f(x_k)-Q_{k-1}(x_k)}{\prod\limits_{0\le i\le k-1}(x_k-x_i)}, \qquad Q_k(x) = Q_{k-1}(x) + (x-x_0)\dots(x-x_{k-1})\,a_k
\end{aligned}
$$

donde Q_k corresponde a la interpolación de grado k.

Como comentario al margen, la fórmula prohibida que vimos en la primera clase (ecuación (1.3)) que asegura VTR 2 hace que la precisión se vaya a las pailas.

$$
x_2 = \frac{f(x_1)\cdot x_0 - f(x_0)\cdot x_1}{f(x_1)-f(x_0)} \tag{1.3}
$$

1.2. Por sistema de ecuaciones

Suponiendo $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, creamos un sistema de ecuaciones de la forma:

$$
\begin{cases}
p(x_0) = f(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots a_n x_0^n \\
p(x_1) = f(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots a_n x_1^n \\
\qquad\vdots \\
p(x_n) = f(x_n) = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots a_n x_n^n
\end{cases}
$$

que matricialmente puede ser escrito como:

$$
\begin{pmatrix}
1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\
1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}
\tag{1.4}
$$

Con igual cantidad de ecuaciones e incógnitas, el sistema de ecuaciones (1.4) tiene solución si el determinante es distinto de cero 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1.5}$$

La determinante que se muestra en la ecuación (1.5) resulta ser la *determinante de Vandermonde*, la que resulta ser:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i>j} \left(x_i - x_j\right) \tag{1.6}$$

donde $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$. Por lo tanto, si reemplazamos (1.6) en (1.5), observamos que el sistema de ecuaciones (1.4) tiene solución si:

$$\prod_{i>j} \left(x_i - x_j\right) \neq 0 \tag{1.7}$$

Para demostrar la igualdad (1.6) podemos usar inducción.