DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Coordinación MAT024 - 1er semestre 2017

GUÍA #3 – APLICACIONES INTEGRALES, INTEGRALES IMPROPIAS Y FUNCIONES VECTORIALES

Aplicaciones Integrales, Integrales Impropias y Funciones Vectoriales

1. Considere el sólido D definido por

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \quad x^2 + y^2 + z^2 \geq 1, \quad z \geq x^2 + y^2 - 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}$$

y sea $f : D \to \mathbb{R}$ la función densidad de masa del sólido, definida por $f(x, y, z) = z(x^2 + y^2)$. Encuentre la masa del sólido D.

Solución: Utilizando coordenadas cilíndricas, tenemos que

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 = 4 &\implies r^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 &\implies r^2 + z^2 = 1 \\ z = x^2 + y^2 - 1 &\implies z = r^2 - 1 \end{aligned}$$

además el intercepto entre $r^2 + z^2 = 4$ y $z = r^2 - 1$ viene dada por $r = u = \sqrt{\frac{1+\sqrt{13}}{2}}$, de esta forma la masa viene dada por

$$\text{Masa}(D) = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_{\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} zr^3 dz dr d\theta + \int_0^{\pi/2} \int_1^u \int_{r^2-1}^{\sqrt{4-r^2}} zr^3 dz dr d\theta,$$

integrando se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Masa}(D) &= \frac{\pi}{4} \left(\int_0^1 r^3(4 - r^2 - 1 + r^2) dr + \int_1^u r^3(4 - r^2 - (r^2 - 1)^2) dr \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \left(\int_0^1 3r^3 dr + \int_1^u r^3(4 - r^2 - r^4 + 2r^2 - 1) dr \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \left(\int_0^1 3r^3 dr + \int_1^u r^3(3 + r^2 - r^4) dr \right) = \frac{\pi}{4} \left(\frac{71}{48} + \frac{13\sqrt{13}}{48} \right) \end{aligned}$$

2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ una lámina delimitada por las curvas

$$y = x^3, \quad y = x^3 + 2, \quad y + x = 0, \quad y + x - 3 = 0,$$

si la densidad en cada punto de la lámina viene determinada por la función $\rho(x, y) = 1 + 3x^2$ y si para $k \in [0, 3]$ se define la recta $\ell : \; x + y = k$

(a) Calcule el momento de inercia de la lámina respecto a la recta ℓ, el cual sera denotado por $I(k)$.

(b) Determine k de modo que $I(k)$ sea mínimo.

Solución:

(a) El momento de inercia respecto a la recta ℓ viene definido como

$$I(k) = \iint_{\Omega} r_\ell^2 dm,$$

donde r_ℓ^2 es la distancia al cuadrado de cualquier punto del dominio a la recta ℓ, la cual viene descrita por

$$r_\ell^2 = \frac{(x+y-k)^2}{2},$$

de esta forma tenemos que aplicando el teorema del cambio de variables con

$$\begin{array}{rcl} u &=& y - x^3 \\ v &=& y + x \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = -1 - 3x^2$$

Luego,

$$\begin{aligned} I(k) &= \iint_{\Omega} r_\ell^2 dm = \iint_{\Omega} r_\ell^2 \rho(x,y) dA \\ &= \iint_{\Omega} \frac{(1+3x^2)(x+y-k)^2}{2} dA = \int_0^2 \int_0^3 \frac{(1+3x^2)(v-k)^2}{2} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dvdu \\ &= \int_0^2 \int_0^3 \frac{(v-k)^2}{2} dvdu = \frac{(v-k)^3}{3}\Big|_0^3 = 3k^2 - 9k + 9 \end{aligned}$$

(b) Notamos que $I(k) = 3k^2 - 9k + 9$ es una parábola la cual no tiene raíces reales y además su mínimo en el intervalo $[0,3]$ se alcanza en su vértice, el cual es $k = \frac{3}{2}$.

3. El centro de un círculo de radio a se ubica a una distancia $b > a$ del eje y. El círculo y el eje están en el mismo plano. Cuando el círculo gira alrededor del eje y se genera una superficie S cuya ecuación es

$$x^2 + z^2 = (b + \sqrt{a^2 - y^2})^2.$$

Usando integrales múltiples determine la masa del sólido Ω el cual está encerrado por la superficie S, considere que la densidad en cada punto de Ω es

$$\rho(x,y,z) = 2|y|\sqrt{x^2+z^2}.$$

Además determine la coordenada x del centro de masa.

Solución: Un corte en el nivel $y = 0$ nos permite notar que Ω_{xz} correspondiente al anillo descrito por $(b-a)^2 \le x^2 + z^2 \le (b+a)^2$ ubicado en el plano xz es el dominio de la superficie. Luego si utilizamos coordenadas cilíndricas, se tiene que el sólido se describe como

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ z = r\sin\theta \\ y = \sqrt{a^2 - (r-b)^2} \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} 0 \le \theta \le 2\pi \\ b - a \le r \le b + a \\ -\sqrt{a^2-(r-b)^2} \le y \le \sqrt{a^2-(r-b)^2} \end{array}$$

Así la masa del solido viene determinada por

$$\begin{aligned} \text{Masa}(\Omega) &= \int\int\int_{\Omega} \rho(x,y,z) dV \\ &= 2\int_0^{2\pi}\int_{b-a}^{b+a}\int_{-\sqrt{a^2-(r-b)^2}}^{\sqrt{a^2-(r-b)^2}} r^2|y| dydrd\theta = 4\int_0^{2\pi}\int_{b-a}^{b+a}\int_0^{\sqrt{a^2-(r-b)^2}} yr^2 dydrd\theta \\ &= 2\int_0^{2\pi}\int_{b-a}^{b+a}\left(a^2-(r-b)^2\right) r^2 drd\theta = 4\pi\int_{b-a}^{b+a}\left(a^2-(r-b)^2\right) r^2 dr = 16\pi\left(\frac{a^5}{15} + \frac{a^3b^2}{3}\right) \end{aligned}$$

4. Considere el sólido Ω definido como

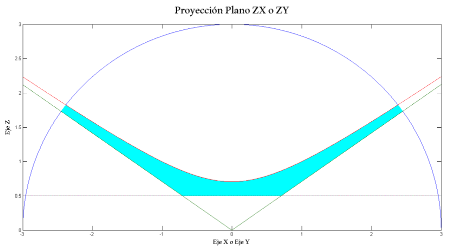
$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \, 2z^2 \ge x^2+y^2, \;\; x^2+y^2+z^2 \le 9, \;\; x^2+y^2+1 \ge 2z^2, \;\; 2z \ge 1\right\},$$

si la densidad en cada punto del sólido es $\rho(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$.

(a) Exprese las integrales iteradas que permiten calcular en coordenadas esféricas la masa del sólido Ω.

(b) Exprese las integrales iteradas que permiten calcular en coordenadas cilíndricas el momento de inercia respecto al origen del sólido Ω.

Solución:



Notamos que al graficar una proyección en el plano zx o zy nos permite observar la siguiente región. Dentro de la región de interés, se tiene que el cono y la esfera se cortan en el punto $z = \sqrt{3}$ mientras que la esfera y el hiperboloide se cortan en el punto $z = \sqrt{10/3}$, así:

(a) Las ecuaciones en coordenadas esféricas son

$$\begin{array}{lcl} 2z^2 \geq x^2 + y^2 & \longrightarrow & \phi = \arctan \sqrt{2}/2 \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 & \longrightarrow & \rho = 3 \\ x^2 + y^2 + 1 \geq 2z^2 & \longrightarrow & \rho = (2\cos^2\phi - \sin^2\phi)^{-1/2} \\ 2z \geq 1 & \longrightarrow & \rho = (2\cos\phi)^{-1} \end{array}$$

$$\text{Masa} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\phi_0}\int_{(2\cos\phi)^{-1}}^{(2\cos^2\phi - \sin^2\phi)^{-1/2}} \rho^4 \sin\phi \, d\rho d\phi d\theta + \int_0^{2\pi}\int_{\phi_0}^{\phi_1}\int_{(2\cos\phi)^{-1}}^{3} \rho^4 \sin\phi \, d\rho d\phi d\theta$$

donde $\tan\phi_0 = \sqrt{17/10}$ y $\tan\phi_1 = \sqrt{2}$

(b) Las ecuaciones en coordenadas cilíndricas son

$$\begin{array}{lcl} 2z^2 \geq x^2 + y^2 & \longrightarrow & 2z^2 = r^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 & \longrightarrow & r^2 + z^2 = 9 \\ x^2 + y^2 + 1 \geq 2z^2 & \longrightarrow & r^2 + 1 = 2z^2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Inercia} \quad = \quad & \int_0^{2\pi}\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2}\int_0^{\sqrt{2}z} (r^2+z^2)^2 r\,dr dz d\theta + \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}}\int_{\sqrt{2z^2-1}}^{\sqrt{2}z} (r^2+z^2)^2 r\,dr dz d\theta \\ & + \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{10/3}}\int_{\sqrt{2z^2-1}}^{\sqrt{9-z^2}} (r^2+z^2)^2 r\,dr dz d\theta \end{aligned}$$

5. Sea Ω la región descrita mediante $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ |x| + |y| + |z| \leq 1\right\}$, determine para que valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$ la integral

$$\iiint_\Omega \frac{1 + \sin^2(x^2+y^2)}{(4x^2+y^2+9z^2)^{m/2}} \, dV,$$

es convergente

Solución: Para acotar la integral buscaremos un conjunto Ω_1 tal que $\Omega \subset \Omega_1$, con lo anterior procedemos de la siguiente forma:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)g(x,y,z)dV \leq \max_{(x,y,z)\in\Omega} f(x,y,z) \iiint_\Omega g(x,y,z)dV \leq \max_{(x,y,z)\in\Omega} f(x,y,z) \iiint_{\Omega_1} g(x,y,z)dV$$

luego

$$I \leq \iiint_\Omega \frac{2}{(4x^2+y^2+9z^2)^{m/2}} dV,$$

definimos $\Omega_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ 4x^2 + y^2 + 9z^2 \leq 36\right\}$ y esta región cumple que $\Omega \subset \Omega_1$, asi tenemos que

$$I \leq \iiint_\Omega \frac{2}{(4x^2+y^2+9z^2)^{m/2}} dV \leq \iiint_{\Omega_1} \frac{2}{(4x^2+y^2+9z^2)^{m/2}} dV,$$

en la cual se utiliza coordenadas esféricas,

$$\begin{array}{rcl} x &=& \frac{\rho}{2}\sin\phi\cos\theta, \\ y &=& \rho\sin\phi\sin\theta, \\ z &=& \frac{\rho}{3}\cos\phi, \end{array}$$

cuyo jacobiano es $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = \dfrac{\rho^2\sin\phi}{6}$, lo que permite obtener que

$$I \le \iiint_{\Omega_2} \frac{1}{(4x^2+y^2+9z^2)^{m/2}} dV = \lim_{a\to 0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^6 \frac{\rho^2\sin\phi}{6\rho^m} d\rho d\phi d\theta = 2\pi \lim_{a\to 0}\int_a^6 \rho^{2-m} d\rho,$$

es decir

$$I \le 2\pi \lim_{a\to 0}\left\{\frac{6^{3-m}}{3-m} - \frac{a^{3-m}}{3-m}\right\},$$

la cual va a ser convergente si $3-m>0$, o bien $m<3$. Para analizar para que valores del parámetros m la integral diverge construiremos un conjunto Ω_2 tal que $\Omega_2 \subset \Omega$, asi

$$\min_{(x,y,z)\in\Omega_2} f(x,y,z)\iiint_{\Omega_2} g(x,y,z)dV \le \iiint_{\Omega_2} f(x,y,z)g(x,y,z)dV \le \iiint_{\Omega} f(x,y,z)g(x,y,z)dV$$

así definiremos $\Omega_2 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 /\ 4x^2+y^2+9z^2 \le 1\right\}$ el cual cumple que $\Omega_2 \subset \Omega$, de esta forma

$$\iiint_{\Omega_2} \frac{1}{(4x^2+y^2+9z^2)^{m/2}} dV \le \iiint_{\Omega} \frac{1+\sin^2(x^2+y^2)}{(4x^2+y^2+9z^2)^{m/2}}\, dV,$$

usando nuevamente coordenadas esféricas se tiene que

$$I \ge \lim_{a\to 0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^1 \frac{\rho^2\sin\phi}{6\rho^m} d\rho d\phi d\theta = 2\pi \lim_{a\to 0}\int_a^1 \rho^{2-m} d\rho$$

es decir

$$I \ge 2\pi \lim_{a\to 0}\left\{\frac{1}{3-m} - \frac{a^{3-m}}{3-m}\right\},$$

asi la integral diverge si $m>3$. Para el caso $m=3$ la integral diverge pues $\displaystyle\lim_{a\to 0}\int_a^1 \rho^{-1}d\rho = +\infty$

6. Determine la componente y del centroide del solido definido por

$$\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 /\quad \frac{x^2}{9} + (y-1)^2 + z^2 \le 16, \quad z^2 + \frac{x^2}{9} \ge 4|z|\right\}$$

Solución: Consideramos la transformación en coordenadas cilíndricas

$$\begin{array}{rcl} x &=& 3r\cos\theta \\ z &=& r\sin\theta \\ y &=& y \end{array}$$

donde $0 \le \theta \le 2\pi$ y el jacobiano de la transformación es $3r$, luego reemplazando en las ecuaciones se tiene

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{x^2}{9} + (y-1)^2 + z^2 \le 16 &\Longrightarrow& r^2 + (y-1)^2 \le 16 \\ z^2 + \dfrac{x^2}{9} \ge 4|z| &\Longrightarrow& r^2 \ge 4r|\sin\theta| \end{array}$$

de las desigualdades anteriores se tiene $4|\sin\theta| \le r \le \sqrt{16-(y-1)^2}$, de esta forma es necesario que

$$\begin{array}{rcl} (y-1)^2 \le 16 &\Longrightarrow& 3 \le y \le 5 \\ 16-(y-1)^2 \ge 16|\sin\theta|^2 &\Longrightarrow& -4|\cos\theta| + 1 \le y \le 1 + 4|\cos\theta| \end{array}$$

luego $1-4|\cos\theta| = \text{máx}\{-3, 1-4|\cos\theta|\} \leq y \leq \text{mín}\{5, 1+4|\cos\theta|\} = 1+4\cos\theta$. Así la coordenada y del centroide es

$$\overline{y} = \frac{\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_{1-4|\cos\theta|}^{1+4|\cos\theta|}\int_{4|\sin\theta|}^{\sqrt{16-(y-1)^2}} 3yrdrdyd\theta}{\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_{1-4|\cos\theta|}^{1+4|\cos\theta|}\int_{4|\sin\theta|}^{\sqrt{16-(y-1)^2}} 3rdrdyd\theta}$$

7. Determine la parametrización en sentido antihorario de las siguientes curvas C.

   a) $C:$ El segmento de recta que une $(0,0,0)$ con $(1,1,1)$.
   b) $C:\ x+4y=1$ con $1\leq x\leq 2$
   c) $C:\ x^2+4y^2=1$
   d) $C:\ 4x^2+y^2=1$
   e) $C:\ x^{2/3}+y^{2/3}=1$

   Solución:

   a) $x=t$, $y=t$, $z=t$ con $0\leq t\leq 1$
   b) $x=t$, $y=\frac{1-t}{4}$ con $1\leq t\leq 2$
   c) $x=\cos t$, $y=\frac{1}{2}\sin t$ con $0\leq t\leq 2\pi$.
   d) $x=\frac{1}{2}\cos t$, $y=\sin t$ con $0\leq t\leq 2\pi$.
   e) $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$ con $0\leq t\leq 2\pi$.

8. Sea Γ la curva intersección de las superficies $x+y+z=3$ y $x^2+y^2=1$, determine el vector posición y el vector velocidad.

   Solución: Parametrizamos el circulo de radio 1 usando coordenadas polares y posteriormente lo inclinamos hacia el plano con la ecuación $z=3-x-y$, así la parametrización de la curva Γ viene dada por
   $$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 3-\cos t-\sin t)\,, \quad 0\leq t\leq 2\pi,$$
   mientras que
   $$\vec{v}(t) = (-\sin t, \cos t, \sin t-\cos t)\,, \quad 0\leq t\leq 2\pi,$$

9. Parametrice la curva C obtenida de la intersección de las superficies
   $$S_1:\ z=2x,\quad y\geq 0 \qquad \text{y} \qquad S_2:\ z=x^2+y^2,$$

   Solución:

   Notamos que de la intersección de las superficies, se observa: $x^2+y^2=2x,\ \ y\geq 0$ con $z=2x$, luego completando cuadrados tenemos que: $(x-1)^2+y^2=1$ así la parametrización de esta curva es:
   $$\vec{r}(t) = (1+\cos t, \sin t, 2+2\cos t), \quad 0\leq t\leq \pi$$

10. Calcular la longitud de la curva $\vec{r}(t)=(t^2,t^2,t^2)$ entre los puntos $\vec{r}(0)$ y $\vec{r}(2)$ de la curva

    Solución:
    $$L=\int_0^2 \|\vec{v}(t)\|dt = \int_0^2 \sqrt{12t^2}dt = 4\sqrt{3}$$

11. Hallar la curvatura y la torsión para la hélice $x(t)=a\cos t$, $y(t)=a\sin t$, $z(t)=bt$ con $0\leq t\leq 2\pi$ y $a,b>0$.

    Solución: Notamos que $\vec{r}(t)=(a\cos t, a\sin t, bt)$, luego la longitud de la curva para cualquier instante de tiempo t es
    $$s=\int_0^t \sqrt{a^2+b^2}d\tau = t\sqrt{a^2+b^2}tc$$

con $c := \sqrt{a^2+b^2}$, luego la reparametrización por longitud de arco es

$$\vec{r}(s) = \left(a\cos\left(\frac{s}{c}\right), a\sin\left(\frac{s}{c}\right), \frac{bs}{c}\right),$$

luego

$$\kappa = \frac{a}{c},$$

mientras que el vector normal es:

$$N(s) = \left(-\cos\left(\frac{s}{c}\right), -\sin\left(\frac{s}{c}\right), 0\right),$$

y el binormal es:

$$B(s) = \left(\frac{b}{c}\sin\left(\frac{s}{c}\right), -\frac{b}{c}\cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{a}{c}\right),$$

luego la torsión es $\tau = -B'(s)\cdot N(s) = \dfrac{b}{c^2}$

12. Encuentre la longitud de la curva C dada por $r = 1+\sin\theta$, con $0 \le \theta \le 2\pi$.

    Solución:

    En general para cualquier curva descrita en coordenadas polares de la forma $r = f(\theta)$, esta se puede parametrizar mediante $x = f(\theta)\cos\theta$ e $y = f(\theta)\sin\theta$ con $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, luego

$$\begin{aligned}\int_C ds &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta)^2 + (f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta)^2}d\theta \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + \left[\frac{dr}{d\theta}\right]^2}d\theta.\end{aligned}$$

    Restringiendonos al ejemplo tenemos que $r = f(\theta) = 1+\sin\theta$, luego la longitud de la curva viene dada por la integral

$$\text{Longitud} = \int_C ds = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\sin\theta}d\theta = 8$$

13. Un alambre C se enrolla sobre el manto del cilindro $x^2+y^2 = 1$ de forma tal que la altura $z = z(\theta)$ satisface la ecuación diferencial $z'' = z$ con condiciones iniciales $z(0) = 1$ y $z'(0) = 0$, donde (r,θ,z) son las respectivas coordenadas cilíndricas del punto. Calcule la longitud del alambre C si $\theta \in [0, 2\pi]$.

    Solución: Primero es necesario obtener la parametrización de la curva C, para esto se resuelve la ecuación diferencial $z'' = z$ la cual tiene como solución

$$z(\theta) = C_1 e^{\theta} + C_2 e^{-\theta},$$

    al imponer la condición $z(0) = 1$ se obtiene que $C_1 + C_2 = 1$. Y al imponer $z'(0) = 0$ se obtiene que $C_1 - C_2 = 0$, lo cual se traduce en que $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$, así

$$z(\theta) = \cosh\theta,$$

    lo cual permite concluir que la parametrización de la curva C que describe al alambre es

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \cos\theta, \\ y(\theta) &= \sin\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi] \\ z(\theta) &= \cosh\theta, \end{aligned}$$

    Con lo anterior la longitud del alambre es

$$\begin{aligned}\text{Longitud}_C &= \int_C ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2 + (z'(\theta))^2}d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta + \sinh^2\theta}d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\sinh^2\theta}d\theta = \int_0^{2\pi} \cosh\theta d\theta = \sinh 2\pi\end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos

1. Determine el centro de masa del sólido $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ descrito mediante:
$$\Omega = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2 \leq 10, \quad |x| \leq 1\Big\},$$
considere que la densidad es constante en todo punto de la figura.

2. Plantear en algún sistema de coordenadas las integrales iteradas que permiten calcular el momento de inercia respecto al origen sólido $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ descrito mediante:
$$\Omega = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2 \leq 4z, \quad 1 \leq z \leq 4-x\Big\},$$
considere que la densidad es $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}$

3. Considere una lámina delgada cuya función de densidad de masa es
$$f(x,y) = k\frac{x}{y},$$
tal lámina está delimitada por la región encerrada por las curvas
$$y = \sqrt{8x} \quad , \quad y = x^2 \ , \ 1 \leq x \leq 4$$
   a) Calcule la constante k de tal forma que la masa total de la lámina sea igual a 1.
   b) Calcule las coordenadas del centro de masa de la lámina.

4. Considere el sólido Ω definido como
$$\Omega = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z \geq \sqrt{x^2+y^2}, \ \ x^2+y^2+z^2 \leq 9, \ \ x^2+y^2+1 \geq z^2, \ \ z \geq 1, \ \ x \geq 0, \ \ y \geq 0\Big\},$$
   a) Exprese las integrales iteradas que permiten calcular el momento de inercia respecto al origen del solido Ω
   b) Exprese las integrales iteradas que permiten calcular las coordenadas del centro de masa del solido Ω

5. Considere el sólido $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x^{2/5}+y^{2/5} \leq a^{2/5}, \ \ -a \leq z \leq a\}$, con $a > 0$. Si la densidad es $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^{2/5}+y^{2/5}}$, encuentre el centro de masa de Ω.

6. Sea $\mathcal{D}$ un cuerpo sólido que ocupa la región del espacio comprendida sobre el plano $z = 2$ y dentro de la esfera centrada en el origen de radio 4. Suponga que la densidad puntual de $\mathcal{D}$ está dada por la función
$$\sigma(x,y,z) = \frac{1}{d(x,y,z)}$$
donde $d(x,y,z)$ representa la distancia entre el punto (x,y,z) y el origen. Encuentre la masa total del sólido $\mathcal{D}$.

7. Sea $\alpha > \beta > 0$. Encuentre el valor del volumen de la region comprendida entre
$$\begin{aligned} x &= \alpha + z^2 + y^2 \\ x &= \beta + 5z^2 + 10y^2 \end{aligned}$$
además obtener las componentes de los centros de masa, considere que la densidad es constante.

8. En los siguientes ejercicios encontrar la masa y el centro de masa de la lámina dada si la densidad de área es como se indica.
   a) Una lámina tiene la forma de la región rectangular acotada por las rectas $x = 3$, $y = 2$ y los ejes coordenados. La densidad de área en cualquier punto es xy^2.

b) Una lámina está acotada en el primer cuadrante por el círculo $x^2 + y^2 = a^2$ y los ejes coordenados. La densidad de área es constante.

9. Considere el cuerpo Ω en $\mathbb{R}^3$ que ocupa la región limitada por la superficie de revolución $(x^2+y^2+z^2)^2 = x^2+y^2$ con $z \geq 0$. Sea $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_0^+$ la función definida por $\rho(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}$, la densidad del cuerpo en el punto (x,y,z). Hallar las coordenadas del centro de masa.

10. Sea $\mathbb{D}$ un sólido delimitado por: $x^2-y^2=1$, $x^2-y^2=5$, $xy=1$, $xy=4$, $x+y+3z=2$ y $x+y+3z=m$, $x>0$ con densidad $\rho(x,y,z) = g(x^2-y^2)$, $g(u)>0$, $\forall u$. Además, considere un segundo sólido $\mathbb{E}$ delimitado por: $0 \leq z \leq g(x)$, $-x \leq y \leq 5-x$, $1 \leq x \leq 5$, cuya densidad en cada punto es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al eje z. Determine bajo qué condiciones del parámetro m, el momento de inercia del sólido $\mathbb{D}$ es mayor que el momento de inercia del sólido $\mathbb{E}$, donde ambos momentos se calculan con respecto al eje z.

11. Analizar la convergencia o divergencia de las siguientes integrales impropias

   a)
$$\iint_D \frac{\sin^2(x-y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dA,$$
   donde D es el disco unitario $x^2+y^2 \leq 1$.
   Respuesta: La integral es convergente.

   b)
$$\iint_D \frac{e^{x^2+y^2}}{x-y}dA,$$
   donde D es el conjunto de puntos tal que $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq x$.
   Respuesta: La integral es divergente.

12. Sea Ω la región descrita mediante $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; 4x^2+y^2+9z^2 \leq 36\right\}$, determine para que valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$ la integral
$$\iiint_\Omega \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^m}\, dV,$$
   es convergente

13. Considere la curva intersección de las superficies $S_1: \;\; x^2+y^2+z^2=4x$ y $S_2: \;\; x^2+y^2=2x$. Calcule la curvatura y la torsión de esta curva en $(2,0,2)$.

14. Considere la curva parametriza por $\vec{r}(t) = (e^t\cos t, e^t \sin t, 0)$. Pruebe que el ángulo entre $\vec{r}(t)$ y $\vec{v}(t)$ es constante para todo t.

15. Considere la curva parametriza por $\vec{r}(t) = (1+t, 1-t, 1-t^2)$ con $t \in [-1,1]$.

   (a) ¿En qué punto de la curva se obtiene la curvatura máxima?.
   (b) Determine la torsión.
   (c) Muestre que la curva es plana.

16. Considere la curva intersección de las superficies $S_1: \;\; y=x^2$ y $S_2: \;\; z=x^2+y^2$. Calcule la curvatura y la torsión de esta curva en $(0,0,0)$.