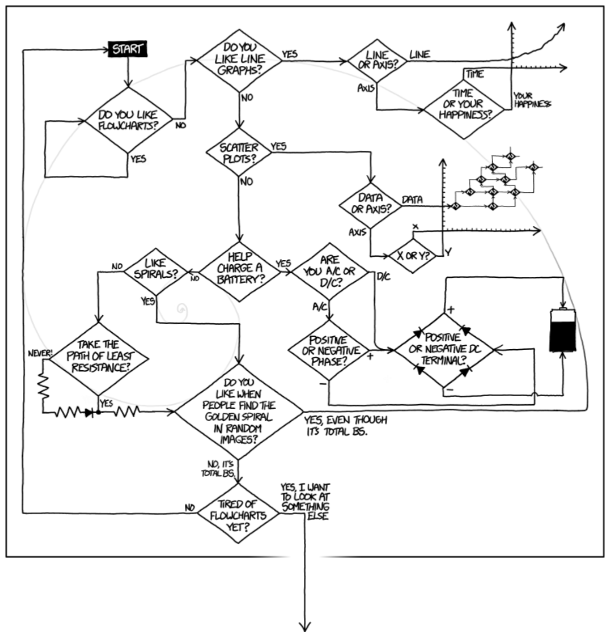
Primer Certamen
Algoritmos y Complejidad

14 de noviembre de 2015



1. Hay F_{n+2} palabras formadas de a, b que no contienen aa (las describe la expresión regular $(ab \mid b)^* (a \mid \epsilon)$). Explique cómo obtener el número promedio de a en estas palabras de largo n usando funciones generatrices multivariadas.
(30 puntos)

2. El número promedio de inversiones en permutaciones de largo n es $n(n-1)/4$. Explique porqué métodos de ordenamiento que solo consideran elementos vecinos tienen tiempo promedio $\Omega(n^2)$.
(20 puntos)

3. El método tradicional para multiplicar dos matrices de $N \times N$ demanda $O(N^3)$ operaciones. Descomponiendo las matrices de $N \times N$ en 4 matrices de $N/2 \times N/2$, y usando una fórmula que permite evaluar el producto de dos matrices de 2×2 en 7 multiplicaciones y 4 sumas, Strassen obtuvo un algoritmo aplicando esta idea recursivamente. Analícelo en forma aproximada. ¿Es mejor que el método tradicional?
(20 puntos)

4. Los números de Fibonacci se definen por la recurrencia:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad F_0 = 0, F_1 = 1$$

¿Cuántas llamadas recursivas hace una función basada directamente en esta recurrencia para calcular F_n?
(25 puntos)

5. Esboce el algoritmo enseñado en el colegio para multiplicar. Considerando operaciones entre dígitos individuales como medida de tiempo, derive la complejidad para multiplicar dos números de n dígitos mediante esta técnica.
(25 puntos)

Torpedo oficial

Algunas series notables

En lo que sigue, $m, n, k \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\frac{1}{1-az} = \sum_{k\geq 0} a^k z^k \qquad \frac{1-z^{m+1}}{1-z} = \sum_{0\leq k\leq m} z^k \qquad (1+z)^\alpha = \sum_{k\geq 0} \binom{\alpha}{k} z^k \qquad \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n\geq 0} n z^n \qquad \frac{z+z^2}{(1-z)^3} = \sum_{n\geq 0} n^2 z^n$$

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha^{\underline{k}}}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{n-1} \qquad \binom{1/2}{k} = \frac{(-1)^{k-1}}{k 2^{2k-1}} \binom{2n-2}{k-1} \quad (k \geq 1) \qquad \binom{-1/2}{k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \binom{2k}{k}$$

Secuencias notables

Sumas de potencias:

$$\sum_{0\leq k\leq n} n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{0\leq k\leq n} n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{0\leq k\leq n} n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Números de Fibonacci:

$$F_0 = 0 \quad F_1 = 1 \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad F_n = \frac{\tau^n - (1-\tau)^n}{\sqrt{5}} \quad \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803$$

$$\sum_{n\geq 0} F_n z^n = \frac{z}{1-z-z^2} \qquad \sum_{n\geq 0} F_{n+1} z^n = \frac{1}{1-z-z^2} \qquad \sum_{n\geq 0} F_{n+2} z^n = \frac{1+z}{1-z-z^2}$$

Conjuntos: Cuentan número de conjuntos de k elementos elegidos entre n

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{0}{k} = [k=0] \qquad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\sum_{k,n} \binom{n}{k} x^k y^n = \frac{1}{1-(1+x)y} \qquad \sum_n \binom{n}{k} z^n = \frac{z^k}{(1-z)^{k+1}} \qquad \sum_n \binom{n+k}{k} z^n = \frac{1}{(1-z)^{k+1}}$$

Método simbólico

Teorema (Método simbólico, OGF; objetos no rotulados)**.** *Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ clases de objetos, con funciones generatrices ordinarias respectivamente $A(z)$ y $B(z)$. Entonces funciones generatrices ordinarias enumeran:*

1. $\mathscr{A} + \mathscr{B}$: $A(z) + B(z)$ *2.* $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$: $A(z) \cdot B(z)$ *3.* $\mathscr{A}^\bullet$: $zA'(z)$ *4.* $\mathscr{A} \circ \mathscr{B}$: $A(B(z))$ *5.* $\textsc{Seq}(\mathscr{A})$: $1/(1-A(z))$
6. $\textsc{Set}(\mathscr{A})$: $\prod_{n\geq 0}(1+z^n)^{a_n} = \exp\left(\sum_{k\geq 1}(-1)^{k+1}A(z^k)/k\right)$ *7.* $\textsc{MSet}(\mathscr{A})$: $\prod_{n\geq 1}(1-z^n)^{-a_n} = \exp\left(\sum_{k\geq 1} A(z^k)/k\right)$
8. $\textsc{Cyc}(\mathscr{A})$: $\sum_{n\geq 1} \frac{\phi(n)}{n} \ln \frac{1}{1-A(z^n)}$

Teorema (Método simbólico, EGF; objetos rotulados)**.** *Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ clases de objetos, con funciones generatrices exponenciales $\widehat{A}(z)$ y $\widehat{B}(z)$, respectivamente. Entonces funciones generatrices exponenciales enumeran:*

1. $\mathscr{A} + \mathscr{B}$: $\widehat{A}(z) + \widehat{B}(z)$ *2.* $\mathscr{A} \star \mathscr{B}$: $\widehat{A}(z) \cdot \widehat{B}(z)$ *3.* $\mathscr{A}^\bullet$: $z\widehat{A}'(z)$ *4.* $\mathscr{A} \circ \mathscr{B}$: $\widehat{A}(\widehat{B}(z))$ *5.* $\textsc{Seq}(\mathscr{A})$: $1/(1-\widehat{A}(z))$
6. $\textsc{MSet}(\mathscr{A})$: $\exp(\widehat{A}(z))$ *7.* $\textsc{Cyc}(\mathscr{A})$: $-\ln(1-\widehat{A}(z))$ *8.* $\mathscr{A}^\square \star \mathscr{B}$: $\int_0^z \widehat{A}'(u) \cdot \widehat{B}(u)\,\mathrm{d}u$

Dividir y Conquistar

La recurrencia $T(n) = aT(n/b) + cn^e$ tiene solución:

$$T(n) = \begin{cases} O(n^e) & a < b^e \\ O(n^e \log n) & a = b^e \\ O(n^{\log_b a}) & a > b^e \end{cases}$$