Tarea 1 Algoritmos y Complejidad

Juan Pablo León, 201473047-0

September 2016

Problema 1

Primero escribimos una expresión para la n+1 derivada de la función dada:

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(ln\left(\frac{x}{2}\right)\right) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

Luego, sea $[a,b] = [\frac{1}{2}, 2]$ y utilizando los puntos de Chebyshev podemos acotar la productoria al valor:

$$\left|\prod_{1\leq i\leq n}(x-x_i)\right| \leq \frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^n}{2^{n-1}} = \frac{3^n}{2^{3n-1}}$$

Reemplazando en el error tenemos que:

$$\begin{aligned}|f(x)-Q_n(x)| &= \left|\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\prod_{1\leq i\leq n}(x-x_i)\right| \\ &\leq \left|\frac{(-1)^n}{(n+1)!}\frac{n!}{\xi^{n+1}}\frac{3^n}{2^{3n-1}}\right| \\ &= \frac{1}{(n+1)}\frac{1}{\xi^{n+1}}\frac{3^n}{2^{3n-1}} \leq K\end{aligned}$$

Luego, evaluamos para $\xi \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$:

1. $\xi = \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{(n+1)(\frac{1}{2})^{n+1}}\frac{3^n}{2^{3n-1}} = \frac{2^{n+1}}{n+1}\frac{3^n}{2^{3n-1}} = \frac{3^n}{(n+1)2^{2n-2}}$$

2. $\xi = 2$:

$$\frac{1}{(n+1)(2)^{n+1}}\frac{3^n}{2^{3n-1}} = \frac{3^n}{(n+1)2^{4n}}$$

Notamos que el valor es más grande para $\xi = \frac{1}{2}$, por lo que tenemos:

$$\frac{3^n}{(n+1)2^{4n}} \leq \frac{1}{(n+1)}\frac{1}{\xi^{n+1}}\frac{3^n}{2^{3n-1}} \leq \frac{3^n}{(n+1)2^{2n-2}}$$

Pero:

$$\frac{1}{(n+1)}\frac{1}{\xi^{n+1}}\frac{3^n}{2^{3n-1}} \leq K$$

Por lo que finalmente tenemos:

$$\frac{3^n}{(n+1)2^{4n}} \leq \frac{1}{(n+1)}\frac{1}{\xi^{n+1}}\frac{3^n}{2^{3n-1}} \leq K$$

Problema 2

¿Cómo podría utilizar su programa para calcular aproximaciones a la integral de $f(x)$ y no a la integral de error de interpolación $f(x) - Q_n(x)$?

Respuesta: con una función parecida a ”error_Rectangulos”, solo que tomamos un largo h muy cercano a cero (positivo) y no le restamos el área producida por el polinomio interpolador.

Problema 3

1. Calculamos los puntos de Chebyshev con la formula que nos entregaron, estos son: 2.92, 2.38, 1.61, 1.07. Luego, con el método de Lagrange y con Wolfram obtenemos nuestro polinomio interpolador, luego calculamos la integral de $|f(x) - q_4(x)|$ en el intervalo $[1, 3]$.

2. Nota: los puntos dados son los valores de los puntos de Chebysehv calculados.

```
Python 2.7.6 (default, Nov 10 2013, 19:24:18) [MSC v.1500 32 bit (Intel)] on win
32
Type "copyright", "credits" or "license()" for more information.
>>> ================================ RESTART ================================
>>>
Bienvenido
ingrese su funcion f(x)= x**5+x**4+x**3+x**2+x+1
igrese puntos: 1.07 1.61 2.38 2.92
Construyendo polinomio interpolador
Polinomio p(x) construido
>>> error_Rectangulos(1,3,0.5)
5.690478854000048
>>> error_Cuadratura(1,3)
-0.16924975680004195
>>>
```

3. Según lo visto en clases, el error es:

$$f(x) - Q_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{0 \leq j \leq n} (x - x_j)$$

Notamos que, para $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $f^{(4+1)}(x) = 5!$, por lo que el error solo depende de la productoria:

$$f(x) - Q_n(x) = \prod_{0 \leq j \leq 4} (x - x_j)$$

Pero, por los puntos de Chebyshev, nosotros sabemos que el valor de la productoria está acotado de la forma:

$$\left| \prod_{1 \leq i \leq n} (x - x_i) \right| \leq \frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^n}{2^{n-1}}$$

Remplazando obtenemos:

$$\left| \prod_{1 \leq i \leq 4} (x - x_i) \right| \leq \frac{\left(\frac{3-1}{2}\right)^4}{2^3} = \frac{1}{8} = 0.125$$

Como podemos ver, el error obtenido por el método de los rectángulos supera a la aproximación del error visto en clases. Posiblemente esto se debe a que el largo de los intervalos es muy largo, se debería tomar un h más pequeño.

4. En el caso de la Cuadratura Gausseana, el error si nos dió acorde a la teoría.