Pauta de Corrección

Primer Certamen
Introducción a la Informática Teórica

11 de mayo de 2013

1. Tenemos:

   (a) No es de contexto libre, y por tanto tampoco regular. La demostración es por contradicción. Supongamos $\mathscr{L}_a$ regular, sea N la constante respectiva del lema de bombeo para lenguajes de contexto libre. Sabemos que $n!$ es monótona creciente, con lo que lo es el largo de su representación binaria:

   $$|\mathrm{bin}(n!)| = \lceil \log_2 n! \rceil$$

   Como $\log_2 (n+1)! = \log_2 n! + \log_2 (n+1)$, por tanto podemos acotar:

   $$|\mathrm{bin}((n+1)!)| \leq |\mathrm{bin}(n!)| + |\log_2 (n+1)| + 1$$

   Elegimos n tal que $\log_2 (n+1) > 2N$, por ejemplo $n = 4^N$, y $\sigma = \mathrm{bin}(n!)$. Entonces $|\sigma| > N$, y podemos escribir:

   $$\sigma = uvwxy$$

   con $|vwx \leq N$ y $vx \neq \epsilon$. En particular, $1 \leq |vx| \leq N$, con lo que:

   $$|\mathrm{bin}(n!)| < |uv^2wx^2y| = |\mathrm{bin}(n!)| + |vx| < |\mathrm{bin}(n!)| + N \leq |\mathrm{bin}((n+1)!)|$$

   por lo que $uv^2wx^2y \notin \mathscr{L}_a$. Esto contradice al lema de bombeo, y $\mathscr{L}_a$ no es de contexto libre ni regular..

   (b) Podemos representar $\mathscr{L}_b = \mathscr{L}_{b1} \cap \overline{\mathscr{L}_{b2}} \cap \overline{\mathscr{L}_{b3}}$ donde $\mathscr{L}_{b1}$ da la condición de los inicios; mientras $\mathscr{L}_{b2}$ contiene al menos una vez aa, con lo que su complemento no lo contiene; similarmente $\mathscr{L}_{b3}$ con abc:

   $$\begin{aligned}
   \mathscr{L}_{b1} &= \mathscr{L}((ab \mid ac)(a \mid b \mid c)^*) \\
   \mathscr{L}_{b2} &= \mathscr{L}((a \mid b \mid c)^* aa (a \mid b \mid c)^*) \\
   \mathscr{L}_{b3} &= \mathscr{L}((a \mid b \mid c)^* abc (a \mid b \mid c)^*)
   \end{aligned}$$

   Alternativamente, es simple representar $\mathscr{L}_{b2}$ y $\mathscr{L}_{b3}$ mediante DFAs.

   Claramente $\mathscr{L}_{b1}$, $\mathscr{L}_{b2}$, y $\mathscr{L}_{b3}$ son regulares (están dados por expresiones regulares o DFAs), y los lenguajes regulares son cerrados respecto de las operaciones que construyen $\mathscr{L}_b$ (intersección y complemento). Como $\mathscr{L}_b$ es regular, es de contexto libre.

   (c) No es regular. Supongamos $\mathscr{L}_c$ regular, sea N la contante del lema de bombeo para lenguajes regulares. Elegimos $\sigma = a^N bc^{N+1}$, con lo que $|\sigma| = 2n+2 > N$. Hay entonces una división $\sigma = \alpha\beta\gamma$ tal que $|\alpha\beta| \leq N$ con $\beta \neq \epsilon$ y para todo $k \in \mathbb{N}$ es $\alpha\beta^k\gamma \in \mathscr{L}_c$. Pero β son sólo a, con $k = 0$ tenemos menos a y b que c, y $\alpha\gamma \notin \mathscr{L}_c$.

   Es un lenguaje de contexto libre. Un PDA que acepta $\mathscr{L}_c$ por stack vacío queda descrito en forma abreviada por la tabla 1. Hay un único estado q_0, el stack inicial es Z_0. La idea es que si hay más a y b que c, esto queda representado por el número de A en el stack; si hay más c queda representado por el número de C en el stack. Si al final de la entrada las a y b se balancean con las c, queda expuesto Z_0 en el stack, y con una movida con ϵ puede aceptar.

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{\delta(q_0, a, A)}$
a	Z_0	AZ_0
a	A	AA
a	C	ϵ
b	Z_0	AZ_0
b	A	AA
b	C	ϵ
c	Z_0	CZ_0
c	A	ϵ
c	C	CC
ϵ	Z_0	ϵ

Table 1: Tabla de transición (abreviada) para el PDA de la pregunta 1c

Puntajes

Total			30
a)		10	
Condición de largos	5		
Encontrar contradicción	3		
Conclusión	2		
b)		10	
Comienzos	2		
No tienen *aa, abc*	4		
Combinación	2		
Conclusión	2		
c)		10	
No es regular	5		
Es de contexto libre	5		

2. Una gramática es:

$$S \to AB$$
$$A \to aAb \mid ab$$
$$B \to bBc \mid bc$$

La idea es que $A \Rightarrow a^i b^i$ con $i \geq 1$, y $B \Rightarrow b^j c^j$ con $j \geq 1$.

Puntajes

Total	20
Diseño y explicación	20

3. Podemos expresar:

$$\mathscr{L}_3 = (\mathscr{L}_1 \mathscr{L}_2)^+$$

Como $\mathscr{L}_1$ es regular, es de contexto libre. Como los lenguajes de contexto libre son cerrados respecto de las operaciones regulares (en particular concatenación y estrella de Kleene), lo es $\mathscr{L}_3$.

Puntajes

Total		20
Idea de la construcción	10	
Construcción formal	10	

4. Debemos lograr la intercalación, lo que se logra duplicando cada símbolo con un “no importa” (todas las alternativas) antes o después, a ser particularizado mediante una intersección.

   Formalmente, usemos el abuso notacional de identificar:

   $$\Sigma = \bigcup_{a \in \Sigma} \{a\}$$

   Definamos substituciones para todo $a \in \Sigma$:

   $$\begin{aligned} \mathrm{s}_1(a) &= \{a\} \cdot \Sigma \\ \mathrm{s}_2(a) &= \Sigma \cdot \{a\} \end{aligned}$$

   Entonces:

   $$\mathrm{SHUFFLE}(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2) = \mathrm{s}_1(\mathscr{L}_1) \cap \mathrm{s}_2(\mathscr{L}_2)$$

Puntajes

Total		25
Idea de la construcción	10	
Construcción formal	15	

5. Por turno.

   (a) La figura 1 muestra el árbol de derivación solicitado.

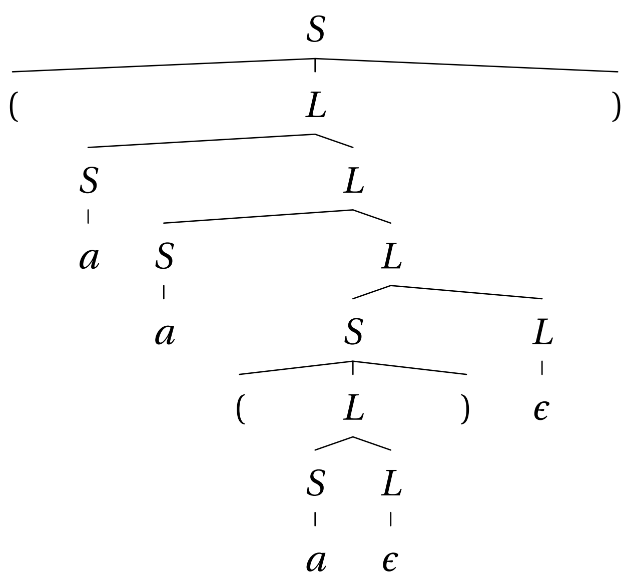

Figure 1: Árbol de derivación para problema 5a

   (b) Los no terminales que dan ϵ son sólo L. Reemplazando en las demás producciones esa opción:

$$S \rightarrow (L) \mid a \mid ()$$
$$L \rightarrow SL \mid S$$

   (c) Construimos un PDA con un único estado que acepta por stack vacío usando la estrategia top-down. No tiene sentido dibujar el autómata, simplemente damos la tabla de transición, 2. Como hay un único estado q_0, simplemente lo omitimos en la descripción. El stack inicial es S.

a	A	$\delta(q_0, a, A)$
ϵ	S	$\{(S), a\}$
ϵ	L	$\{SL, \epsilon\}$
(	(	$\{\epsilon\}$
)	)	$\{\epsilon\}$
a	a	$\{\epsilon\}$

Table 2: Tabla de transición (abreviada) del PDA de la pregunta 5c

Puntajes

Total		25
a)	5	
b)	10	
c)	10	