Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Programa ICIPEV

Matemáticas III

Ayudantía N°4

1$^{\text{er}}$ Trimestre de 2015

1. Sea g una función de clase C^2 y $a \in \mathbb{R}$, se define $F(x,y)$ como

$$F(x,y) = x^a g\left(\frac{y}{x}\right), \quad \text{con} \quad (x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \neq 0\}.$$

   Determine para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ se verifica

$$x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0.$$

2. Considere el sistema de ecuaciones definido como

$$\begin{aligned} x^3 + \sin(y) + \cos(uv) - v^3 - 1 &= 0 \\ y^3 + \cos(xy) - e^{v-1} - uv^2 &= 0 \end{aligned}$$

   (a) Demuestre que el sistema define en forma implícita a u y v en función de x e y en una vecindad del punto $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1,0,0,1)$.

   (b) Determine el polinomio de Taylor de segundo orden para $u = u(x,y)$ en torno a $(1,0)$ sabiendo que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1,0) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(1,0) = 2, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(1,0) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(1,0) = 1.$$

3. Encuentre los extremos de la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ sujeto a las condiciones

$$x + y + z = 1, \qquad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$$

4. Sean α_1, α_2 escalares positivos que cumplen $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Resuelva el siguiente problema

$$\begin{aligned} &\min \ \alpha_1 x + \alpha_2 y \\ &\text{s.a. } x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} = 1 \\ &\qquad x, y > 0 \end{aligned}$$

   Luego concluir que

$$x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} \leq \alpha_1 x + \alpha_2 y$$

   Sugerencia: Utilizar el cambio de variables $z = \ln x, \ w = \ln y$

Ejercicios Propuestos

1. Considere la región D definida como

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\},$$

determine los extremos globales de la función $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$ sobre D. Concluya que si $a, b, c > 0$, entonces se verifica que

$$3(abc)^{\frac{1}{3}} \leq a + b + c.$$

2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y considere el sistema de ecuaciones definido como:

$$\begin{aligned} x^3 + \sin(y) + \cos(uv) - av^3 - b &= 0 \\ x^2(1 - y) + \sin(xy) - e^{v-1} - uv^2 &= 0 \end{aligned}$$

(a) Demuestre que existen valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tal que el sistema define en forma implícita a u y v en función de x e y en una vecindad del punto $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 0, 0, 1)$.

(b) Justifique si existe un entorno del punto $(1, 0)$ tal que la función definida como $P(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = (u, v)$ es de clase C^1.

(c) Muestre que en un entorno del punto $(1, 0)$ la función P es una biyección. Obtenga la derivada de la función inversa en $(1, 0)$.