Sergio Yansen Núñez

Determine , si existen , los siguientes límites

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(3x^2+y^2)}{x^2-y^2}$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^3+y^3}$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(x-1)(y-2)}{(x-1)^2+(y-2)^2}$

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{(x+1)(y-1)^3}{(x+1)^2+(y-1)^6}$

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6y}{x^{12}+y^2}$

Solución

1. Aproximación mediante la familia de rectas: $y = mx$; $m \neq 1$, $m \neq -1$

Sean $\varphi(t) = (t, mt)$; $m \neq 1$, $m \neq -1$; $f(x,y) = \frac{sen(3x^2+y^2)}{x^2-y^2}$

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to0} f(\varphi(t)) &= \lim_{t\to0} \frac{sen(3t^2+m^2t^2)}{t^2-m^2t^2} \\
&= \lim_{t\to0} \frac{sen((3+m^2)t^2)}{(1-m^2)t^2} \\
&= \frac{(3+m^2)}{(1-m^2)} \lim_{t\to0} \frac{sen((3+m^2)t^2)}{(3+m^2)t^2} \\
&= \frac{(3+m^2)}{(1-m^2)} \text{ (depende de } m\text{)}
\end{aligned}$$

Por tanto, el límite no existe.

2. Aproximación mediante la familia de rectas: $y = mx$; $m \neq -1$

Sean $\varphi(t) = (t, mt)$; $m \neq -1$; $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^3+y^3}$

$$\lim_{t\to 0} f(\varphi(t)) = \lim_{t\to 0}\frac{tm^2t^2}{t^3+m^3t^3}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{m^2t^3}{(1+m^3)t^3}$$

$$= \frac{m^2}{1+m^3} \text{ (depende de } m\text{)}$$

Por tanto, el límite no existe.

3. Consideremos un cambio de variables:

Sean $u = x - 1$, $v = y - 2$

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{(x-1)(y-2)}{(x-1)^2+(y-2)^2} = \lim_{(u,v)\to(0,0)}\frac{uv}{u^2+v^2}$$

Aproximación mediante la familia de rectas: $v = mu$

Sean $\varphi(t) = (t, mt)$; $f(u,v) = \frac{uv}{u^2+v^2}$

$$\lim_{t\to 0} f(\varphi(t)) = \lim_{t\to 0}\frac{mt^2}{t^2+m^2t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{mt^2}{(1+m^2)t^2}$$

$$= \frac{m}{1+m^2} \text{ (depende de } m\text{)}$$

Por tanto, el límite no existe.

4. Aproximación mediante la familia: $y = mx^2$

Sean $\varphi(t) = (t, mt^2)$; $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

$$\lim_{t\to 0} f(\varphi(t)) = \lim_{t\to 0}\frac{t^2mt^2}{t^4+m^2t^4}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{mt^4}{(1+m^2)t^4}$$

$$= \frac{m}{1+m^2} \text{ (depende de } m\text{)}$$

Por tanto, el límite no existe.

5. Consideremos un cambio de variables:

Sean $u = x + 1$, $v = y - 1$

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{(x+1)(y-1)^3}{(x+1)^2+(y-1)^6} = \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{uv^3}{u^2+v^6}$$

Aproximación mediante la familia: $v = mu^{\frac{1}{3}}$

Sean $\varphi(t) = (t, mt^{\frac{1}{3}})$; $f(u,v) = \frac{uv^3}{u^2+v^6}$

$$\begin{aligned} \lim_{t\to0} f(\varphi(t)) &= \lim_{t\to0} \frac{tm^3t}{t^2+m^6t^2} \\ &= \lim_{t\to0} \frac{m^3t^2}{(1+m^6)t^2} \\ &= \frac{m^3}{1+m^6} \quad \text{(depende de } m\text{)} \end{aligned}$$

Por tanto, el límite no existe.

6. Aproximación mediante la familia: $y = mx^6$

Sean $\varphi(t) = (t, mt^6)$; $f(x,y) = \frac{x^6y}{x^{12}+y^2}$

$$\begin{aligned} \lim_{t\to0} f(\varphi(t)) &= \lim_{t\to0} \frac{t^6mt^6}{t^{12}+m^2t^{12}} \\ &= \lim_{t\to0} \frac{mt^{12}}{(1+m^2)t^{12}} \\ &= \frac{m}{1+m^2} \quad \text{(depende de } m\text{)} \end{aligned}$$

Por tanto, el límite no existe.