Diferenciabilidad, Regla de la Cadena y Aplicaciones

Problemas Propuestos

1. Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|xy|^a}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   Donde $a > 3$ es un parámetro.

   (a) ¿Es $f(x,y)$ continua en (0,0)?

   (b) ¿Es $f(x,y)$ diferenciable en (0,0)?

2. Se define la función $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por la fórmula

$$f(x,y) = \begin{cases} y\,x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   Analizar la continuidad en $\mathbb{R}^2$ de las funciones derivadas parciales de f.

3. Definamos la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y+1)^2}{(x-1)^3+(y+1)^2} & \text{si} \quad (x-1)^3+(y+1)^2 \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad (x-1)^3+(y+1)^2 = 0 \end{cases}$$

   Determine los puntos en el plano cartesiano donde f es diferenciable.

4. Sea $H(x,y) = (\operatorname{sen}(\pi x^2 + y^3 + xy), f(x,y))$. ¿Es $H(x,y)$ diferenciable en $\mathbb{R}^2$? (Justifique), donde :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy-2y}{y+\sqrt{y^2+(x-2)^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (2,0) \wedge y > 0, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (2,0) \wedge y \leq 0 \end{cases}$$

   Si f es diferenciable en $(2,0)$, encuentre el plano tangente en el punto $(2,0,f(2,0))$ a la gráfica de la superficie $z = f(x,y)$.

5. Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por la siguiente expresión :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4-y^4}{x^2+xy+y^2}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) ¿Admite f derivada direccional en $(0,0)$ según cualquier vector unitario $\vec{u} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$? (Sugerencia: Utilice la definición.)

   (b) ¿Es f diferenciable en $(0,0)$?

6. Sea f una función diferenciable $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, tal que $f_x(0,0,0) = 2$; $f_y(0,0,0) = f_z(0,0,0) = 5$. Sea $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(u,v) = f(u-v, u^2-11, 3v-3)$.

   (a) Hallar $g_u(1,1)$ y $g_v(1,1)$.

   (b) Si $f(0,0,0) = 0$, hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función g en el punto $(1,1,0)$.

7. Verifique o refute si

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(x-ct) + \operatorname{sen}(x+ct)\right]$$

es una solución de la ecuación diferencial parcial de onda unidimensional:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

donde c es una constante positiva.

8. Sean $x = e^s \cos t$, $y = e^s \operatorname{sen} t$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Pruebe que si $g(s,t) = f(x,y)$ entonces

$$\frac{1}{e^{2s}} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

9. Para $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = z + (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2$ considere la superficie de nivel $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 1\}$.
   (a) Determine las ecuaciones de los planos tangentes a S en los puntos $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$, $(0,1,0)$.
   (b) Determine las curvas de intersección de S con los planos $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$.
   (c) ¿Es posible esbozar una representación de S con la información obtenida de (b)?

10. Considere $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable y las funciones

$$f(x,y) = (x^2+1, y^2), \qquad g(u,v) = (u+v, h(u^2+2v), v^2).$$

Calcular la derivada de $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ en el punto $(1,2)$ si $h(12) = h'(12) = 1$.

11. Sea g una función de clase C^2 (segundas derivadas continuas) y $a \in \mathbb{R}$, se define $F(x,y)$ mediante

$$F(x,y) = x^a g\left(\frac{y}{x}\right), \text{ con } (x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}.$$

Determine para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ se verifica

$$x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0.$$

12. Hallar los valores de las constantes a, b y c tales que la derivada direccional de $f(x,y,z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ en el punto $(1,2,-1)$ tenga el valor máximo 64 en la dirección paralela al eje z.

13. Considere la función f diferenciable en $A \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que la derivada direccional de f en el punto $P = (-1,2) \in A$ es $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ en la dirección del vector $\overrightarrow{u} = (1,-1)$ y $\frac{\sqrt{2}}{2}$ en la dirección del vector $\overrightarrow{v} = (-2,-2)$.
   (a) Hallar la derivada direccional de f en el punto P en la dirección del vector $\overrightarrow{w} = (-3,4)$.
   (b) Determine la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $B = (-1,2,4)$.

14. Dadas las superficies

$$xyz = 1, \qquad axy + byz + x = 3.$$

   (a) Determine todos los valores reales de a y b, si existen, tales que las superficies se corten ortogonalmente en el punto $(1,1,1)$.
   (b) Si $a = 0$ y $b = 1$. Determine todos los puntos sobre las superficies donde se corten ortogonalmente.

15. Calcule la derivada direccional de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ en $(3,4,5)$ a lo largo de la curva intersección de las superficies $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 25$ y $x^2 + y^2 = z^2$.

16. Hallar una constante c tal que en todo punto de la intersección de las dos esferas:

$$(x-c)^2 + y^2 + z^2 = 3 \qquad x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$$

los planos tangentes correspondientes sean perpendiculares el uno al otro.

Problemas Resueltos

1. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2(y+2)^2}{\left((x-1)^2+(y+2)^2\right)^{\alpha}} & \text{si } \ (x,y) \neq (1,-2) \\ 0 & \text{si } \ (x,y) = (1,-2) \end{cases}$$

(a) Determine los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales $f(x,y)$ es continua en $(1,-2)$.

(b) Determine los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales $f_x(x,y)$ es continua en $(1,-2)$. ¿Es diferenciable f para estos valores? Justifique.

Solución.

(a) Considerando el cambio de variables $u = x-1, \ v = y+2$, la función $f(x,y)$ se puede escribir como sigue:

$$F(u,v) = \begin{cases} \dfrac{u^2v^2}{\left(u^2+v^2\right)^{\alpha}} & \text{si } \ (u,v) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } \ (u,v) = (0,0) \end{cases}$$

Si consideramos las trayectorias $v = mu$, $m \in \mathbb{R}$, tenemos que,

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{u^2v^2}{\left(u^2+v^2\right)^{\alpha}} = \lim_{(u,mu)\to(0,0)} \frac{m^2u^4}{\left(\left(1+m^2\right)u^2\right)^{\alpha}} = \frac{m^2}{\left(1+m^2\right)^{\alpha}} \lim_{u\to 0} u^{4-2\alpha}$$

Este límite existe si y sólo si $4-2\alpha > 0$, es decir, si $\alpha < 2$. Si $\alpha = 2$ el límite depende de la trayectoria, luego no existe. Finalmente si $\alpha > 2$ el límite no existe. **En conclusión la función $F(u,v)$ no es continua para $\alpha \geq 2$ en el punto $(0,0)$.**

Si $\alpha < 2$, se tiene:

$$\left|\frac{u^2v^2}{\left(u^2+v^2\right)^{\alpha}} - 0\right| \leq \frac{(u^2+v^2)(u^2+v^2)}{\left(u^2+v^2\right)^{\alpha}} = (u^2+v^2)^{2-\alpha}.$$

Luego, dado $\epsilon > 0$, basta tomar $\delta = \epsilon^{\frac{1}{2(2-2\delta)}}$. De esta forma, para $\alpha < 2$ se tiene que

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{u^2v^2}{\left(u^2+v^2\right)^{\alpha}} = 0 = F(0,0),$$

o equivalentemente

$$\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{(x-1)^2(y+2)^2}{\left((x-1)^2+(y+2)^2\right)^{\alpha}} = 0 = f(1,-2),$$

y en conclusión **la función $f(x,y)$ es continua para** $\alpha < 2$ en el punto $(1,-2)$.

(b) Si $(u,v) \neq (0,0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u}(u,v) &= \frac{2uv^2(u^2+v^2)^{\alpha} - 2\alpha u^3v^2(u^2+v^2)^{\alpha-1}}{(u^2+v^2)^{2\alpha}} \\ &= \frac{2uv^2(u^2+v^2)^{\alpha-1}\left(u^2+v^2-\alpha u^2\right)}{(u^2+v^2)^{2\alpha}}. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\frac{\partial F}{\partial u}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

Consideremos las trayectorias $v = mu$, $m \in \mathbb{R}$, luego,

$$\begin{aligned} &\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{2uv^2(u^2+v^2)^{\alpha-1}\left(u^2+v^2-\alpha u^2\right)}{(u^2+v^2)^{2\alpha}} \\ =& \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{2m^2u^{3+2\alpha}(1+m^2)^{\alpha-1}\left(1+m^2-\alpha\right)}{(1+m^2)^{2\alpha}u^{4\alpha}} \\ =& \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{2m^2u^{3-2\alpha}(1+m^2)^{\alpha-1}\left(1+m^2-\alpha\right)}{(1+m^2)^{2\alpha}}. \end{aligned}$$

Así, si $3-2\alpha<0$, es decir $\alpha>3/2$ el límite no existe. Si $\alpha=3/2$ el límite depende de la trayectoria, en conclusión no existe. **Luego, la función $\frac{\partial F}{\partial u}$ no es continua si $\alpha \geq 3/2$.**
Si $\alpha<3/2$, se tiene que,

$$\begin{aligned}\left|\frac{2uv^2(u^2+v^2)^{\alpha-1}\left((1-\alpha)u^2+v^2\right)}{(u^2+v^2)^{2\alpha}}\right| &= 2|u|v^2(u^2+v^2)^{-\alpha-1}\left|(1-\alpha)u^2+v^2\right| \\ &\leq 2\max\{|1-\alpha|,1\}(u^2+v^2)^{-\alpha+3/2}\end{aligned}$$

Luego, dado $\epsilon>0$, basta tomar $\delta=\left(\frac{\epsilon}{2\max\{1,|1-\alpha|\}}\right)^{\frac{1}{2(-\alpha+3/2)}}$.

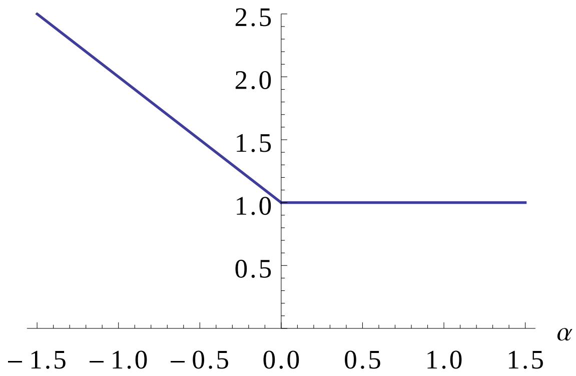

Figura 1: Gráfico de $\max\{1,|1-\alpha|\}$. Se grafica hasta $\alpha=3/2$ pues para valores mayores se pierde continuidad de la derivada parcial.

En conclusión se tiene que

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{2uv^2(u^2+v^2)^{\alpha-1}\left(u^2+v^2-\alpha u^2\right)}{(u^2+v^2)^{2\alpha}} = 0 = \frac{\partial F}{\partial u}(0,0),$$

o equivalentemente,

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,-2)} &\frac{2(x-1)(y+2)^2((x-1)^2+(y+2)^2)^{\alpha-1}\left((x-1)^2+(y+2)^2-\alpha(x-1)^2\right)}{((x-1)^2+(y+2)^2)^{2\alpha}} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(1,-2),\end{aligned}$$

luego, **la función $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ es continua en $(1,-2)$ si y sólo si $\alpha<3/2$.** Como una derivada parcial es continua, entonces la función es diferenciable para los valores obtenidos en $(1,-2)$.

2. Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función derivable tal que $g(0)=-1$, $g'(0)=2$ Se define a $z=f(x,y)$, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mediante

$$f(x,y)=xy\,g\!\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right).$$

(a) Determine el plano tangente a la superficie $z=f(x,y)$ en el punto $(1,1)$.

(b) Obtenga una función $h(x,y)$ tal que

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z\,h(x,y).$$

Solución.

(a) Definimos a $u=u(x,y)=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$. Puesto que u es diferenciable en $(1,1)$ y $g(\cdot)$ es derivable, entonces z es diferenciable en $(1,1)$. Se tiene entonces que

$$z(1,1)=1\cdot 1\cdot g(u(1,1))=g(0)=-1.$$

Además, por la regla de la cadena

$$\begin{aligned} z_x &= y \cdot g(u) + xy \cdot g'(u) u_x \\ &= yg(u) - \frac{y}{x} g'(u) \\ \Rightarrow z_x(1,1) &= -3. \end{aligned}$$

Y, de forma análoga,

$$\begin{aligned} z_y &= x \cdot g(u) + xy \cdot g'(u) u_y \\ &= xg(u) + \frac{x}{y} g'(u) \\ \Rightarrow z_y(1,1) &= 1. \end{aligned}$$

Con esto, la ecuación del plano tangente es

$$\begin{aligned} -3(x-1) + (y-1) - (z+1) &= 0 \\ -3x + y - z &= -1. \end{aligned}$$

(b) Hacemos

$$\begin{aligned} x^2 z_x &= x^2 y g(u) - xyg'(u) \\ y^2 z_y &= xy^2 g(u) + xyg'(u). \end{aligned}$$

Basta sumar y obtenemos

$$x^2 z_x + y^2 z_y = (x+y) xyg(u).$$

Pero $z = xyg(u)$, de modo que

$$x^2 z_x + y^2 z_y = (x+y) z \Rightarrow f(x,y) = x + y.$$

3. Considere la función f diferenciable en $A \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que la derivada direccional de f en el punto $P = (-1, 2) \in A$ es $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ en la dirección del vector $\overrightarrow{u} = (1, -1)$ y $\frac{\sqrt{2}}{2}$ en la dirección del vector $\overrightarrow{v} = (-2, -2)$.
   (a) Hallar la derivada direccional de f en el punto P en la dirección del vector $\overrightarrow{w} = (-3, 4)$.
   (b) Determine la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $B = (-1, 2, 4)$.

Solución.
Puesto que f es diferenciable en A entonces existen derivadas parciales en P y luego existe el gradiente de f, ∇f, en P. Entonces:

(a) $D_{\vec{u}} f(-1, 2) = \frac{\vec{u}}{||\vec{u}||} \cdot \nabla f(-1, 2)$. Así

$$\begin{aligned} \frac{5\sqrt{2}}{2} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(f_x(-1,2) - f_y(-1,2) \right) \\ 5 &= f_x(-1,2) - f_y(-1,2), \end{aligned} \tag{2}$$

donde $f_x(-1, 2)$ y $f_y(-1, 2)$ denotan a las derivadas parciales de f con respecto a x e y en P. Análogamente para $\vec{v}$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(f_x(-1,2) + f_y(-1,2) \right) \\ -1 &= f_x(-1,2) + f_y(-1,2). \end{aligned} \tag{3}$$

Resolviendo el sistema (2–3), se obtiene

$$f_x(-1,2) = 2, \qquad f_y(-1,2) = -3.$$

Por lo tanto

$$D_{\vec{w}} f(-1,2) = \frac{1}{5}(-3,4) \cdot (2,-3) = -\frac{18}{5}.$$

(b) Sea $g(x, y, z) = f(x, y) - z$. Su plano tangente en B viene dado por

$$\nabla g(-1,2,4) \cdot (x+1, y-2, z-4) = 0.$$

Reemplazando

$$\begin{aligned} (2,-3,-1) \cdot (x+1, y-2, z-4) &= 0 \\ 2x - 3y - z &= -12. \end{aligned}$$