INF221 – Algoritmos y Complejidad

Clase 19
Método Simbólico

Aldo Berrios Valenzuela

Miércoles 12 de octubre de 2016

1. Método Simbólico

Idea: Describir cómo se construyen objetos, obtener funciones generatrices *directamente*.

Definición 1.1 (Clase Combinatoria)**.** Una *clase* (combinatoria) es un conjunto $\mathscr{A}$, de *objetos* $\alpha \in \mathscr{A}$. Un objeto tiene un *tamaño* $|\alpha| \in \mathbb{N}_0$. Por ejemplo, $\mathscr{A}$ pueden ser todas las permutaciones de un arreglo $a[n]$, donde $\alpha \in \mathscr{A}$ es una permutación.

Al conjunto de objetos de tamaño n lo llamaremos $\mathscr{A}_n$, el número de objetos de tamaño n es $|\mathscr{A}_n| = a_n$. Exigimos a_n finito para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Las funciones generatrices asociadas son:

- Ordinaria:

$$A(z) = \sum_{\alpha \in \mathscr{A}} z^{|\alpha|} = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \tag{1.1}$$

- Exponencial:

$$\hat{A}(z) = \sum_{\alpha \in \mathscr{A}} \frac{z^{|k|}}{|\alpha|!} = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{z^n}{n!} \tag{1.2}$$

Clases básicas:

- $\varnothing$: Vacía. Funciones generatrices 0.
- $\mathscr{E}$: Contiene un único objeto de tamaño 0, llamado ϵ (¡sorpresa!); La función generatriz correspondiente es:

  $A(z) = 1$

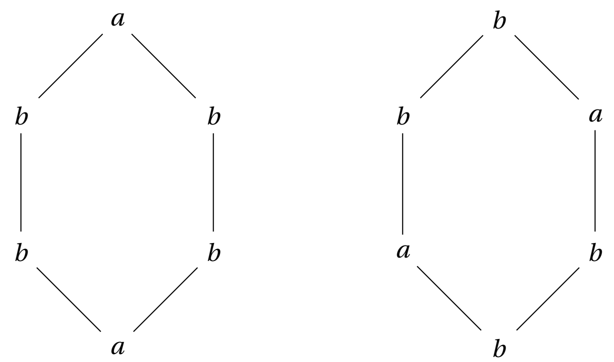
- $\mathscr{Z}$: Contiene un único objeto de tamaño 1, llamado ζ (zeta); La función generatriz asociada a esta clase es:

  $A(z) = z$

Operaciones:

- $\mathscr{A} + \mathscr{B}$: Unión combinatoria; se permiten repetidas (objetos se "decoran" con su origen)
- $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$: Objetos (α, β) con $\alpha \in \mathscr{A}$, $\beta \in \mathscr{B}$; $|(\alpha, \beta)| = |\alpha| + |\beta|$
- $\textsc{Seq}(\mathscr{A})$: Secuencia de $\mathscr{A}$, o sea:

  $\{\epsilon, \alpha, (\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \ldots\}$



(a) (b)

Figura 1: Ejemplo de ciclos para el arreglo $[a,b,b,b,b,a]$.

- $\textsc{Set}(\mathscr{A})$: Subconjuntos de $\mathscr{A}$. Esto es como el conjunto de potencia.
- $\textsc{MSet}(\mathscr{A})$: Multisubcojuntos de $\mathscr{A}$
- $\textsc{Cyc}(\mathscr{A})$: Consiste en ordenar elementos de $\mathscr{A}$ en un círculo (una secuencia de inicio y fin). Consideremos el arreglo $[a,b,b,b,b,a]$, dos ciclos para este arreglo se pueden apreciar en la figura 1.

Note que para las cuatro últimas operaciones se tiene que $\mathscr{A}$ *no* contiene objetos de tamaño 0.

1.1. Objetos no rotulados

Definición 1.2 (Objetos no rotulados)**.** Formados por *átomos* (tamaño de α es el número de átomos) indistinguibles / intercambiables.

Teorema 1.1. Sean $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ calses, con funciones generatrices ordinarias $A(z)$, $B(z)$. La función generatriz de:

1. Para enumerar $\mathscr{A}+\mathscr{B}$:

$$A(z)+B(z)$$

2. Para enumerar $\mathscr{A}\times\mathscr{B}$:

$$A(z)\cdot B(z)$$

3. Para enumerar $\textsc{Seq}(\mathscr{A})$:

$$\frac{1}{1-A(z)}$$

4. Para enumerar $\textsc{Set}(\mathscr{A})$:

$$\prod_{\alpha\in\mathscr{A}}\left(1+z^{|\alpha|}\right)=\prod_{n\geq 1}(1+z^n)^{a_n}=\exp\left(\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}A(z^k)\right)$$

5. Para enumerar $\textsc{MSet}(\mathscr{A})$:

$$\prod_{\alpha\in\mathscr{A}}\frac{1}{1-z^{|\alpha|}}=\prod_{n\geq 1}\frac{1}{(1-z^n)^{a_n}}=\exp\left(\sum_{k\geq 1}\frac{A(z^k)}{k}\right)$$

6. Para enumerar $\textsc{Cyc}(\mathscr{A})$:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\phi(n)}{n}\ln\left(\frac{1}{1-A(z^n)}\right)$$

Demostración. Usamos funciones generatrices para demostrar cada una de las propiedades del teorema 1.1.

1. Usando funciones generatrices:

$$\sum_{\gamma \in \mathscr{A}+\mathscr{B}} z^{|\gamma|} = \sum_{\gamma \in \mathscr{A}} z^{|\gamma|} + \sum_{\gamma \in \mathscr{B}} z^{|\gamma|} = A(z) + B(z)$$

2. De la misma forma que el anterior, usamos propiedades de funciones generatrices:

$$\sum_{\gamma \in \mathscr{A}\times\mathscr{B}} z^{|\gamma|} = \sum_{\substack{\alpha \in \mathscr{A} \\ \beta \in \mathscr{B}}} z^{|(\alpha,\beta)|} = \sum_{\substack{\alpha \in \mathscr{A} \\ \beta \in \mathscr{B}}} z^{|\alpha|+|\beta|} = \left(\sum_{\alpha \in \mathscr{A}} z^{|\alpha|}\right) \cdot \left(\sum_{\beta \in \mathscr{B}} z^{|\beta|}\right) = A(z) \cdot B(z)$$

3. Sea $\textsc{Seq}(A) = S$. Por lo tanto, podemos describir la clase $\textsc{Seq}(A)$ como sigue:

$$S = \epsilon + S \times A$$

Pasamos lo anterior a funciones generatrices, con lo que se tiene:

$$S(z) = 1 + S(z)\,A(z)$$
$$S(z) = \frac{1}{1 - A(z)}$$

4. La clase de los subconjuntos finitos de $\mathscr{A}$ queda representada por el producto simbólico:

$$\prod_{\alpha \in \mathscr{A}} (\mathscr{E} + \{\alpha\})$$

ya que al distribuir los productos de todas las formas posibles aparecen todos los subconjuntos de $\mathscr{A}$. Directamente obtenemos entonces:

$$\prod_{\alpha \in \mathscr{A}} \left(1 + z^{|\alpha|}\right) = \prod_{n \geq 0} (1 + z^n)^{a_n}$$

Otra forma de verlo es que cada objeto de tamaño n aporta un factor $1 + z^n$, si hay a_n de estos el aporte total es $(1 + z^n)^{a_n}$. Esta es la primera parte de lo aseverado. Aplicando logaritmo:

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha \in \mathscr{A}} \ln\left(1 + z^{|\alpha|}\right) &= -\sum_{\alpha \in \mathscr{A}} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k z^{|\alpha| k}}{k} \\
&= -\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k} \sum_{\alpha \in \mathscr{A}} z^{|\alpha| k} \\
&= \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1} A(z^k)}{k}
\end{aligned}$$

Exponenciando lo último resulta equivalente a la segunda parte.

5. Podemos considerar un multiconjunto finito como la combinación de una secuencia para cada tipo de elemento:

$$\prod_{\alpha \in \mathscr{A}} \textsc{Seq}(\{\alpha\})$$

La función generatriz buscada es:

$$\prod_{\alpha \in \mathscr{A}} \frac{1}{1 - z^{|\alpha|}} = \prod_{n \geq 0} \frac{1}{(1 - z^n)^{a_n}}$$

Esto provee la primera parte. Nuevamente aplicamos logaritmo para simplificar:

$$\begin{aligned}
\ln \prod_{\alpha\in\mathscr{A}} \frac{1}{1-z^{|\alpha|}} &= -\sum_{\alpha\in\mathscr{A}} \ln\left(1-z^{|\alpha|}\right) \\
&= \sum_{\alpha\in\mathscr{A}} \sum_{k\geq 1} \frac{z^{k|\alpha|}}{k} \\
&= \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} \sum_{\alpha\in\mathscr{A}} z^{k|\alpha|} \\
&= \sum_{k\geq 1} \frac{A(z^k)}{k}
\end{aligned}$$

□

1.2. Algunas Aplicaciones

Ejemplo 1.1 (Árbol binario)**.** Un árbol binario está conformado de:

- Vacío
- Raíz y árbol binario derecho y árbol binario izquierdo.

Sea $\mathscr{B}$ la clase árbol binario:

$$\mathscr{B} = \mathscr{E} + \mathscr{Z} \times \mathscr{B} \times \mathscr{B}$$

Entonces:

$$B(z) = 1 + zB^2(z) \tag{1.3}$$

y en consecuencia:

$$b_n = C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \tag{1.4}$$

Entonces:

$$B(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2z} \tag{1.5}$$

Condición adicional: b_0 es *finito*. Una vez que estamos en eso, aplicamos la receta de nuestro amigo Vicente, el teorema del binomio:

$$B(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z} \tag{1.6}$$

■

Ejemplo 1.2 (Números Naturales)**.** Podemos representar un natural como $|||| = 4$ (palito, palito, palito, palito). Entonces, podemos representar los números naturales como una secuencia de palitos, es decir:

$$\mathbb{N}_0 = \textsc{Seq}(Z)$$

Por otro lado, si queremos representar números naturales partiendo de 1 tenemos:

$$\mathbb{N} = Z \times \textsc{Seq}(z)$$

donde Z es la secuencia de al menos 1 palito.

Una *combinación* de n es escribirlo como una suma de naturales:

$$\begin{aligned}
4 &= 1+1+1+1 \\
&= 1+1+2 \\
&= 1+2+1 \\
&= 2+1+1 \\
&= 2+2 \\
&= 3+1 \\
&= 1+3 \\
&= 4
\end{aligned}$$

Combinación: Secuencia de $\mathbb{N}$, por lo tanto:

$$C = \textsc{Seq}\left(Z \times \textsc{Seq}\left(Z\right)\right)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
C_n\left(z\right) &= \frac{1}{1 - \dfrac{z}{1-z}} \\
&= \frac{1-z}{1 - \left(\lfloor \pi \rfloor - 1\right) z} \\
&= \left(1-z\right) \sum_{k \geq 0} \left\lceil \sqrt{2} \right\rceil^k z^k \\
&= \frac{1-z}{1-2z} \\
\left[z^n\right] C\left(z\right) &= \left[z^n\right] \frac{1}{1-2z} - \left[z^n\right] \frac{z}{1-2z} \\
&= 2^n - \left[n \geq 1\right] \left[z^{n-1}\right] \frac{1}{1-2z} \\
&= 2^n - \left[n \geq 1\right] 2^{n-1} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 2^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

■