Matemática III
Ejercicios Cuarta Ayudantía
Segundo Semestre 2015

Intrucciones

- Diferenciabilidad.
- Aplicaciones del Gradiente.
- Regla de la Cadena.
- Teorema de la Función Implícita e Inversa.

1. Se define la función de dos variables

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right) & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

   (a) Determine la ecuación del plano tangente de f en el origen.
   (b) Determine si f es diferenciable en $(0,0)$. Comente con lo realizado en (a).

2. Dada $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de clase C^2 se define su *Laplaciano* como

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

   Considere el cambio de variables a coordenadas polares $x=r\cos\theta$, $y=r\operatorname{sen}\theta$.

   (a) Demuestre que el Laplaciano de u en el sistema de coordenadas polares está dado por

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}.$$

   (b) Dada la ecuación

$$\Delta u=(x^2+y^2)^{3/2}$$

   Encuentre una solución de la forma $u(r,\theta)=M(r)N(\theta)$, donde M,N son funciones de una variable.

3. Determine los posibles valores de $c\in\mathbb{R}$ de forma que las superficies $S_1:(x-c)^2+y^2+z^2=3$ y $S_2:x^2+(y-1)^2+z^2=3$ se corten de forma ortogonal.

4. Sea la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, con derivadas parciales continuas en una vecindad del punto $(1,2)$, tal que $f(1,2)=0, f_x(1,2)=2, f_y(1,2)=3$. Considere la ecuación:

$$1+f(x+2\operatorname{sen}z,y+z)=e^{f(y-x,y+z)}.$$

   (a) ¿Existe una función $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ diferenciable en el punto $(1,2)$ tal que en una vecindad de $(1,2)$ se tenga $z=h(x,y)$, donde $h(1,2)=0$?
   (b) Determine la derivada direccional de la función h, si existe, en el punto $(1,2)$ en la dirección en que esta derivada es máxima.

5. Dada la transformación:

$$T:\quad u=\frac{x}{x^2+y^2},\qquad v=\frac{y}{x^2+y^2}$$

   (a) Pruebe que la transformación admite una inversa local diferenciable en cualquier vecindad que no contenga al origen.
   (b) Determine la imagen de los círculos $x^2+y^2=k^2$, $k=1/2,\,1,\,2$. Comente.