Matemática III
Ejercicios Primera Ayudantía
Segundo Semestre 2015

Contenidos

- Transformaciones Lineales.

1. Considere la aplicación $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ definida por

$$T(p(x)) = p(x-1) + kp'(1)\,x^3 - \frac{1}{2}p''(1)\,x^2$$

Determine $\ker(T)$ para $k \in \mathbb{R}$.

2. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal, $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ base de V y $C = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ base de W. Si se cumple que

$$T(v_1 - v_3) = w_1 + w_2, \quad T(v_1 - v_2 - v_3) = w_1 + w_3, \quad T(v_1 - v_2 - 2v_3) = w_1 + w_4$$

¿T es inyectiva?, ¿ T es epiyectiva?. Justifique.

3. Sea $T : \mathbb{R}_3[x] \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que

$$T(1) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad T(x+3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T(x^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } T(x^3 - x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Encontrar bases para $\mathrm{Im}(T)$ y $\ker(T)$.
   (b) ¿Es la aplicación T inyectiva?

4. Considere las aplicaciones $T, S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas por

$$T(x,y) = (y-x, x+y) \quad \text{y} \quad S(x,y) = (xy, x - xy)$$

   (a) Determine si son transformaciones lineales.
   (b) Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un triángulo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$ y $(0,2)$. Dibuje $T(D)$. (Es decir, la imagen del triángulo D por la transformación T.)
   (c) Sea R la región del plano limitada por las siguientes curvas:

$$xy = 1, \quad xy = 3, \quad x - xy = 1, \quad x - xy = 3.$$

   Dibuje $S(R)$.