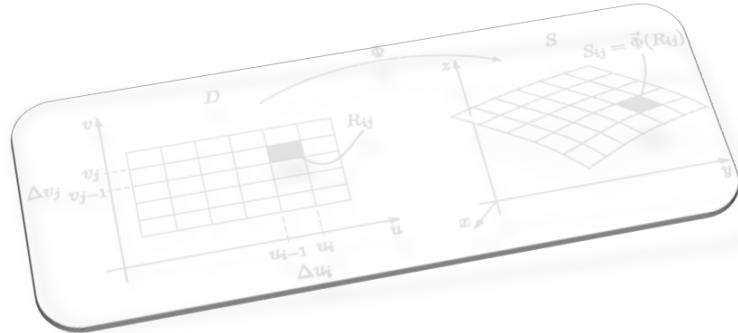


Salomón Alarcón Araneda

APUNTES

MAT 024 | CÁLCULO INTEGRAL EN VARIAS VARIABLES

CÁLCULO VECTORIAL



Esta versión contiene:

Más de 100 ejemplos desarrollados, más de 90 ilustraciones y más de 100 ejercicios propuestos con su respuesta.

Versión actualizada el 08 de Marzo de 2017

Prefacio

Estimados alumnos, en el contexto de la asignatura MAT 024 que se dicta en nuestra Universidad, me es grato presentar esta versión actualizada de mis apuntes que contienen tópicos de Cálculo Integral en varias variables y Cálculo Vectorial, la cual incluye correcciones de la versión anterior. El principal objetivo de estas notas es ofrecer un material de consulta acorde a los contenidos tratados en clases.

Es importante señalar que estos apuntes no reemplazan a los libros de la Bibliografía del programa de la asignatura, ni tampoco a los que cito en la Bibliografía al finalizar estos apuntes. Por esta razón, recomiendo revisar aquellos libros con la finalidad que puedan profundizar en el estudio de los contenidos aquí tratados y, de esta forma, puedan conocer puntos de vista diferentes a los expuestos aquí.

Agradezco desde ya los comentarios y sugerencias que ustedes puedan hacerme llegar para mejorar estas notas y corregir erratas que puedan existir. Para ello, pueden contactarme por correo e-mail a:

salomon.alarcon@usm.cl.

Espero que este material les sea de utilidad.

Atte.

Salomón Alarcón Araneda.

Valparaíso, 1 de Marzo de 2017

Índice general

<i>Prefacio</i>	I
Índice general	III
I Cálculo integral en varias variables	1
1. Funciones definidas por una integral	3
1.1. Funciones definidas por una integral definida	3
1.2. Funciones definidas por una integral impropia	10
2. La integral de Riemann en \mathbb{R}^N	13
2.1. Definición y existencia de la integral múltiple	13
2.1.1. Conjuntos de medida cero, conjuntos compactos e integrabilidad en \mathbb{R}^N	16
2.1.2. Propiedades de la integración múltiple	19
2.1.3. La integral de Riemann en \mathbb{R}^2	20
2.2. Evaluación de integrales múltiples de Riemann	24
2.2.1. Evaluación de integrales dobles sobre rectángulos	24
2.2.2. Evaluación de integrales dobles sobre dominios más generales	27
2.2.3. Evaluación de integrales múltiples de Riemann	36
2.2.4. Evaluación de integrales múltiples de Riemann sobre dominios más generales	39
2.3. Cambio de variable en integrales múltiples	51
2.3.1. Difeomorfismos	51
2.3.2. El teorema del cambio de variable	56
2.3.3. Integración doble en coordenadas polares	67
2.3.4. Integración triple en coordenadas cilíndricas	71
2.3.5. Integración triple en coordenadas esféricas	75
2.3.6. Integración triple en coordenadas toroidales	78
2.4. Integración múltiple impropia	79
2.5. Aplicaciones de la integración múltiple	90

2.5.1. Masa, centro de masa y momentos en \mathbb{R}^2	90
2.5.2. Masa, centro de masa y momentos en \mathbb{R}^3	97
II Cálculo vectorial	103
3. Curvas en \mathbb{R}^2 y en \mathbb{R}^3	105
3.1. Funciones vectoriales	105
3.2. Curvas en \mathbb{R}^2 y en \mathbb{R}^3	109
3.2.1. Extensión de una curva	121
3.2.2. Preservación de la orientación de una curva	122
3.2.3. Curvas paramétricamente equivalentes	123
3.2.4. Longitud de arco. Parametrización natural	125
3.3. Geometría de curvas	132
3.3.1. Preliminares	133
3.3.2. Vector tangente	137
3.3.3. Vector normal y curvatura	138
3.3.4. Torsión y vector Binormal	142
3.3.5. Diedro móvil, triedro móvil y fórmulas de Frenet-Serret	144
3.4. Integral de línea de un campo escalar	150
3.5. Aplicaciones de la integral de línea de un campo escalar	153
3.5.1. Masa	153
3.5.2. Centro de masa y momentos en \mathbb{R}^2	154
3.5.3. Centro de masa y momentos en \mathbb{R}^3	157
3.6. Integral de línea de un campo vectorial	164
3.7. Aplicaciones de la integral de línea de un campo vectorial	166
3.7.1. Trabajo	166
3.7.2. Flujo y circulación	170
3.8. Campos conservativos e independencia de la trayectoria	171
3.8.1. El gradiente y sus propiedades	172
3.8.2. Función potencial. Campos conservativos	176
3.8.3. Conjuntos conexos y convexos	179
3.8.4. El rotor y sus propiedades	181
3.8.5. Integral de línea de un campo vectorial independiente de la trayectoria	184
3.9. El Teorema de Green	191
4. Superficies en \mathbb{R}^3	197
4.1. Superficies en \mathbb{R}^3	197
4.1.1. Área de una superficie	211

4.2. Integrales de superficie de campos escalares	215
4.3. Aplicaciones de la integral de superficie de un campo escalar	217
4.3.1. Masa, centro de masa y momentos de una superficie	217
4.4. Integrales de superficie sobre campos vectoriales	221
4.5. Aplicaciones de la integral de superficie sobre un campo vectorial	223
4.5.1. Flujo	223
4.6. Teorema de Stokes	227
4.7. El Teorema de Gauss	233
4.7.1. La divergencia y sus propiedades	233
4.7.2. El Teorema de Gauss	234
A. Soluciones de los Ejercicios	241
Bibliografía	251

Parte I

Cálculo integral en varias variables

Capítulo 1

Funciones definidas por una integral

En el presente capítulo estudiamos las propiedades de continuidad, derivabilidad e integrabilidad de funciones de la forma

$$F(x) = \int_J f(x, y) dy,$$

donde $f : I \times J \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función e I, J son intervalos en \mathbb{R} .

1.1. Funciones definidas por una integral definida

Si $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua sobre $[a, b] \times [c, d]$, entonces para cada x fijo en $[a, b]$, la función $f(x, \cdot)$ resulta continua y acotada en $[c, d]$, entendiendo la continuidad en los extremos c y d como continuidad por derecha y por izquierda respectivamente, por lo que f resulta ser Riemann-integrable sobre el intervalo $[c, d]$, obteniéndose el número real

$$\int_c^d f(x, y) dy,$$

que depende del parámetro x .

TEOREMA 1.1.1 (Continuidad de una función definida por una integral) Sea $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua sobre $[a, b] \times [c, d]$. Entonces la función $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$x \mapsto F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

es continua sobre $[a, b]$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ dado y sea $x_0 \in [a, b]$ fijo, pero escogido arbitrariamente. Queremos probar que

$$(\exists \delta > 0) \text{ tal que } (\forall x \in [a, b]) (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon).$$

Por continuidad de f sobre $[a, b] \times [c, d]$, para cada $y \in [c, d]$ tenemos que existe $\delta_y = \delta(x_0, y) > 0$

tal que

$$(\forall(x, \eta) \in [a, b] \times [c, d]) \left(\max\{|x - x_0|, |\eta - y|\} < \delta_y \Rightarrow |f(x, \eta) - f(x_0, y)| < \frac{\varepsilon}{d - c} \right). \quad (1.1)$$

Notemos ahora que como $[c, d]$ es un conjunto cerrado y acotado en \mathbb{R} , entonces existen puntos y_1, y_2, \dots, y_n en $[c, d]$ y respectivos valores positivos $\delta_{y_1}, \delta_{y_2}, \dots, \delta_{y_n}$ tales que

$$[c, d] \subset \bigcup_{i=1}^n]y_i - \delta_{y_i}, y_i + \delta_{y_i}[.$$

De esta forma, para cada $y \in [c, d]$, existe algún $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $y \in]y_i - \delta_{y_i}, y_i + \delta_{y_i}[$, y escogiendo ahora $\delta = \min\{\delta_{y_1}, \delta_{y_2}, \dots, \delta_{y_n}\}$ y la δ -vecindad de x_0 ,

$$\begin{aligned} V(x_0) &= \{x \in [a, b] : |x - x_0| < \delta\} \\ &=]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, \end{aligned}$$

obtenemos que

$$(\forall(x, \eta) \in [a, b] \times [c, d]) ((x, \eta) \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\times]y_i - \delta_{y_i}, y_i + \delta_{y_i}[\Rightarrow \max\{|x - x_0|, |\eta - y_i|\} < \delta_{y_i}).$$

Luego, dado $\eta \in [c, d]$ podemos poner $\eta = y$ en (1.1) y obtener

$$(\forall x \in [a, b]) \left(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y)| < \frac{\varepsilon}{d - c} \right),$$

de donde se sigue que si $x \in [a, b]$ y $|x - x_0| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0)| &= \left| \int_c^d (f(x, y) - f(x_0, y)) dy \right| \\ &\leq \int_c^d |f(x, y) - f(x_0, y)| dy \\ &< \int_c^d \frac{\varepsilon}{d - c} dy \\ &= \varepsilon. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 1.1.1 El Teorema 1.1.1 de la continuidad de una función definida por una integral, también es conocido por el nombre de **Teorema del paso del límite bajo el signo integral**, pues por la continuidad de la función F definida en el enunciado del Teorema 1.1.1, para cada $x_0 \in [a, b]$ se verifica que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_c^d f(x, y) dy = \lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0) = \int_c^d f(x_0, y) dy = \int_c^d \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) dy.$$

Antes de estudiar condiciones para la derivabilidad de una función definida por una integral, probaremos el siguiente lema el cual será de utilidad en nuestro estudio, y en el que consideramos una función $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en $[\alpha, \beta]$, entendiendo las derivadas en los extremos α y β como derivadas por derecha y por izquierda respectivamente.

LEMA 1.1.1 Sea $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable sobre $[\alpha, \beta]$. Entonces, para cada $x_0 \in [\alpha, \beta]$ se verifica que

$$|g(\beta) - g(\alpha) - g'(x_0)(\beta - \alpha)| \leq (\beta - \alpha) \sup_{x \in [\alpha, \beta]} |g'(x) - g'(x_0)|.$$

Demostración. Sea $x_0 \in [\alpha, \beta]$. Como g es derivable sobre $[\alpha, \beta]$, entonces existe $g'(x_0)$ y g resulta ser continua sobre $[\alpha, \beta]$. Luego, desde el Teorema del valor medio se sigue que existe $\xi \in]\alpha, \beta[$ tal que

$$\begin{aligned} g(\beta) - g(\alpha) = g'(\xi)(\beta - \alpha) &\Leftrightarrow g(\beta) - g(\alpha) - g'(x_0)(\beta - \alpha) = g'(\xi)(\beta - \alpha) - g'(x_0)(\beta - \alpha) \\ &\Leftrightarrow g(\beta) - g(\alpha) - g'(x_0)(\beta - \alpha) = (g'(\xi) - g'(x_0))(\beta - \alpha), \end{aligned}$$

y como

$$|g'(\xi) - g'(x_0)| \leq \sup_{x \in [\alpha, \beta]} |g'(x) - g'(x_0)|,$$

la conclusión es inmediata. ■

TEOREMA 1.1.2 (Derivabilidad de una función definida por una integral) Sea $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua sobre $[a, b] \times [c, d]$. Si $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe y es continua sobre $[a, b] \times [c, d]$, entonces la función $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$x \mapsto F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

es derivable sobre $[a, b]$. Más aún, se verifica que

$$F'(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ dado y sea $x_0 \in [a, b]$ fijo, pero arbitrario. Gracias a la continuidad de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $[a, b] \times [c, d]$, para cada $y \in [c, d]$ tenemos que existe $\delta_y = \delta(x_0, y) > 0$ tal que

$$(\forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d]) \left(|x - x_0| < \delta_y \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) \right| < \frac{\varepsilon}{d - c} \right).$$

Por otro lado, para $0 < h < \delta_y$, desde el Lema 1.1.1 obtenemos

$$\begin{aligned} \left| f(x_0 + h, y) - f(x_0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) h \right| &\leq h \sup_{x \in [x_0, x_0 + h]} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) \right| \\ &\leq h \frac{\varepsilon}{d - c}. \end{aligned}$$

Un resultado análogo es obtenido si $x_0 \in]a, b]$ y $-\delta_y < h < 0$. De esta forma, independientemente del signo de h , tenemos que si $x_0 \in]a, b[$, entonces

$$0 < |h| < \delta_y \Rightarrow \left| f(x_0 + h, y) - f(x_0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) h \right| \leq |h| \frac{\varepsilon}{d - c},$$

teniendo en cuenta que lo anterior vale por la derecha si $x_0 = a$ y por la izquierda si $x_0 = b$. Luego, para $0 < |h| < \delta_y$ se sigue que

$$\begin{aligned} \left| F(x_0 + h) - F(x_0) - \left(\int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) dy \right) h \right| &\leq \int_c^d \left| f(x_0 + h, y) - f(x_0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) h \right| dy \\ &\leq \int_c^d |h| \frac{\varepsilon}{d - c} dy \\ &= \varepsilon |h|, \end{aligned}$$

de donde deducimos que F es derivable en x_0 y que su derivada es

$$F'(x_0) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) dy. \quad \blacksquare$$

OBSERVACIÓN 1.1.2 El Teorema 1.1.2 de derivabilidad de una función definida por una integral, también es conocido por el nombre de **regla de Leibniz** o bien **Teorema de derivación bajo el signo integral**, pues desde la derivabilidad de la función F definida en el enunciado del Teorema 1.1.2, se verifica que

$$\frac{d}{dx} \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) = F'(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy.$$

TEOREMA 1.1.3 (Integrabilidad de una función definida por una integral) Sea $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua sobre $[a, b] \times [c, d]$. Entonces la función $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$x \mapsto F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

es integrable sobre $[a, b]$. Más aún, se verifica que

$$\int_a^b F(x) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Demostración. Sea $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$\phi(\xi) = \int_c^d \left(\int_a^\xi f(x, y) dx \right) dy.$$

Entonces, desde el Teorema 1.1.2 de la Regla de Leibniz se sigue que

$$\begin{aligned}\phi'(\xi) &= \int_c^d \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\int_a^\xi f(x, y) dx \right) dy \\ &= \int_c^d f(\xi, y) dy \\ &= F(\xi),\end{aligned}$$

para cada $\xi \in [a, b]$, de donde obtenemos que

$$\begin{aligned}\phi(\xi) &= \int_a^\xi F(x) dx + C \\ &= \int_a^\xi \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx + C,\end{aligned}$$

para cada $\xi \in [a, b]$, para alguna constante C .

Ahora, como $\phi(a) = 0$, tenemos que $C = 0$. Por lo tanto, hemos probado que para cada $\xi \in [a, b]$ se verifica que

$$\int_c^d \left(\int_a^\xi f(x, y) dx \right) dy = \phi(\xi) = \int_a^\xi \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx,$$

y considerando $\xi = b$, obtenemos el resultado deseado. ■

OBSERVACIÓN 1.1.3 El Teorema 1.1.3 de integrabilidad de una función definida por una integral, también es conocido por el nombre **Teorema de Fubini (o Teorema de Fubini-Tonelli)** para funciones continuas sobre un rectángulo del plano o **Teorema de integración bajo el signo integral**, pues desde la integrabilidad de la función F definida en el enunciado del Teorema 1.1.3, se verifica que

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b F(x) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

DEFINICIÓN 1.1.1 Sea $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ una función.

- i) Si la función $F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ es integrable en $[a, b]$, entonces la integral $\int_a^b F(x) dx$ se puede escribir en la forma

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx. \quad (1.2)$$

- ii) Si la función $G(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ es integrable en $[c, d]$, entonces la integral $\int_c^d G(y) dy$ se puede escribir en la forma

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy. \quad (1.3)$$

Las integrales (1.2) y (1.3) reciben cada una el nombre de *integral iterada*.

NOTACIÓN 1.1.1 Por simplicidad notacional, es usual escribir

- $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$
- $\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$

EJEMPLO 1.1.1 Evalúa la siguiente integral iterada

$$\int_0^3 \int_{-1}^1 (x^2 y^2 - 2y) dx dy.$$

Solución. Notemos que la función $f(x, y) = x^2 y^2 - 2y$ es continua en $[-1, 1] \times [0, 3] \subset \mathbb{R}^2$. Luego, desde el Teorema 1.1.3 de integrabilidad de una función definida por una integral, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^3 \int_{-1}^1 (x^2 y^2 - 2y) dx dy &= \int_0^3 \left(\int_{-1}^1 (x^2 y^2 - 2y) dx \right) dy \\ &= \int_0^3 \left(\frac{1}{3} x^3 y^2 - 2xy \right) \Big|_{x=-1}^{x=1} dy \\ &= \int_0^3 \left(\frac{2}{3} y^2 - 4y \right) dy \\ &= \left(\frac{2}{9} y^3 - 2y^2 \right) \Big|_{y=0}^{y=3} \\ &= -12. \quad \square \end{aligned}$$

EJEMPLO 1.1.2 Evalúa la siguiente integral iterada

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 y \cos(xy) dx dy.$$

Solución. Notemos que la función $f(x, y) = y \cos(xy)$ es continua en $[0, 1] \times [-\pi, \pi] \subset \mathbb{R}^2$. Luego, desde el Teorema 1.1.3 de integrabilidad de una función definida por una integral, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 y \cos(xy) dx dy &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^1 y \cos(xy) dx \right) dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(xy) \Big|_{x=0}^{x=1} dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin y dy \\ &= -\cos y \Big|_{y=-\pi}^{y=\pi} \\ &= 0. \quad \square \end{aligned}$$

EJERCICIOS 1.1.1 Calcula, si es posible, el valor de cada una de las siguientes integrales

a) $\int_0^2 \int_0^1 y e^{xy} dy dx$

b) $\int_{-1}^1 \int_0^1 (x^4 y + y^2) dy dx$

c) $\int_0^\pi \int_0^1 x \operatorname{sen}(xy) dx dy.$

Para ver las Soluciones de los Ejercicios 1.1.1 presiona aquí **A**

TEOREMA 1.1.4 (Regla de Leibniz generalizada) Sea $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua sobre $[a, b] \times [c, d]$. Si $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe y es continua sobre $[a, b] \times [c, d]$, y si $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones derivables sobre $[a, b]$ con derivadas continuas sobre $[a, b]$, verificando

$$c \leq u(x) \leq v(x) \leq d \quad \forall x \in [a, b],$$

entonces la función $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$x \mapsto F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy$$

es derivable sobre $[a, b]$. Más aún, se verifica que

$$F'(x) = f(x, v(x)) v'(x) - f(x, u(x)) u'(x) + \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy \quad \forall x \in [a, b].$$

EJERCICIOS 1.1.2

1. Calcula F' si

a) $F(x) = \int_0^{2\pi} y \cos(xy) dy \quad x \in [0, 1]$

b) $F(x) = \int_{\operatorname{sen} x}^x \ln(1 + xy) dy \quad x \in [0, 2\pi].$

2. Prueba que si $b > a > 1$, entonces

$$\int_0^\pi \ln \left(\frac{b - \cos x}{a - \cos x} \right) dx = \pi \ln \left(\frac{b + \sqrt{b^2 - 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}} \right).$$

Sugerencia: Usa la relación, válida para $a > 1$: $\int_0^\pi \frac{dx}{a - \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$.

Para ver las Soluciones de los Ejercicios 1.1.2 presiona aquí **A**

1.2. Funciones definidas por una integral impropia

DEFINICIÓN 1.2.1 Sea $f : [a, b] \times [c, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una función continua sobre su dominio. Decimos que la integral

$$\int_c^\infty f(x, y) dy$$

converge uniformemente a una función F definida sobre $[a, b]$ si

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n = n(\varepsilon)) \text{ tal que } (\forall x \in [a, b]) \left(\eta > n \Rightarrow \left| F(x) - \int_c^\eta f(x, y) dy \right| < \varepsilon \right).$$

TEOREMA 1.2.1 (Continuidad de una función definida por una integral impropia) Sea $f : [a, b] \times [c, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una función continua sobre $[a, b] \times [c, \infty[$ tal que $\int_c^\infty f(x, y) dy$ converge uniformemente en $[a, b]$. Entonces, la función $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$x \mapsto F(x) = \int_c^\infty f(x, y) dy$$

es continua sobre $[a, b]$.

OBSERVACIÓN 1.2.1 El Teorema 1.2.1 de continuidad de una función definida por una integral impropia también es conocido por el nombre de **Teorema del paso del límite bajo el signo integral**, pues por la continuidad de la función F definida en el enunciado del Teorema 1.2.1, para cada $x_0 \in [a, b]$ se verifica que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_c^\infty f(x, y) dy = \lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0) = \int_c^\infty f(x_0, y) dy = \int_c^\infty \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) dy.$$

TEOREMA 1.2.2 (Derivabilidad de una función definida por una integral impropia) Sea $f : [a, b] \times [c, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe y es continua sobre $[a, b] \times [c, \infty[$, que la integral $\int_c^\infty f(x, y) dy$ es convergente y que la integral $\int_c^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy$ converge uniformemente en $[a, b]$. Entonces la función $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$x \mapsto F(x) = \int_c^\infty f(x, y) dy$$

es derivable sobre $[a, b]$. Más aún, se verifica que

$$F'(x) = \int_c^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy.$$

OBSERVACIÓN 1.2.2 El Teorema 1.2.2 de derivabilidad de una función definida por una integral impropia, también es conocido por el nombre de **Regla de Leibniz** o bien **Teorema de derivación bajo el signo integral**, pues desde la derivabilidad de la función F definida en el enunciado del Teorema 1.2.2, se verifica que

$$\frac{d}{dx} \left(\int_c^\infty f(x, y) dy \right) = F'(x) = \int_c^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy.$$

TEOREMA 1.2.3 (Integrabilidad de una función definida por una integral impropia) Sea $f : [a, \infty[\times [c, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una función continua sobre $[a, \infty[\times [c, \infty[$ y asumamos que las integrales $\int_c^\infty f(x, y) dy$ y $\int_a^\infty f(x, y) dx$ convergen uniformemente en cada intervalo $[a, b]$ la primera y en cada intervalo $[c, d]$ la segunda, y que al menos una de las integrales iteradas $\int_a^\infty \int_c^\infty |f(x, y)| dy dx$ o $\int_c^\infty \int_a^\infty |f(x, y)| dx dy$ es convergente. Entonces la función $F : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$x \mapsto F(x) = \int_c^\infty f(x, y) dy$$

es F integrable sobre $[a, \infty[$. Más aún, se verifica que

$$\int_a^\infty F(x) dx = \int_c^\infty \int_a^\infty f(x, y) dx dy.$$

OBSERVACIÓN 1.2.3 El Teorema 1.2.3 de la integrabilidad de una función definida por una integral impropia también es conocido como la versión impropia del Teorema de Fubini o Teorema de Fubini-Tonelli o Teorema de integración impropia bajo el signo integral, pues desde la integrabilidad de la función F definida en el enunciado del Teorema 1.2.3, se verifica que

$$\int_a^\infty \int_c^\infty f(x, y) dy dx = \int_a^\infty F(x) dx = \int_c^\infty \int_a^\infty f(x, y) dx dy.$$

EJERCICIOS 1.2.1

1. Sea $y \in [-1, 1]$. Prueba que

$$\int_0^\pi \ln(1 + y \cos x) dx = \pi \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{2}\right).$$

Sugerencia: Considera sobre $[-1, 1]$, las funciones reales $F(y) = \int_0^\pi \ln(1 + y \cos x) dx$ y $G(y) = \pi \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{2}\right)$ y prueba que $F' = G'$ en $[-1, 1]$ y que $F(0) = G(0)$ para concluir.

2. Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ una función de clase $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R} \setminus \{0\})$ y sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} g(x) \frac{\sin y}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ g(x) & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Para la función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$x \mapsto F(x) = \int_0^1 f(x, y) dy,$$

encuentra, si es posible, F' .

Para ver las Soluciones de los Ejercicios 1.2.1 presiona aquí **A**

La integral de Riemann en \mathbb{R}^N

La integral de Riemann en \mathbb{R}^N es una extensión de la integral de Riemann en \mathbb{R} . Por esta razón, es necesario generalizar algunos conceptos, definiciones y teoremas para obtener otros similares a los ya conocidos en el contexto de la integral de Riemann para funciones de una variable real.

2.1. Definición y existencia de la integral múltiple de Riemann

DEFINICIÓN 2.1.1 (Rectángulo en \mathbb{R}^N) Sean $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, N$, tales que $a_i \leq b_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, N$. Llamamos *rectángulo en \mathbb{R}^N* a cualquier conjunto R de la forma

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_N, b_N].$$

NOTACIÓN 2.1.1 Un rectángulo $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_N, b_N]$, suele denominarse por

$$R = [\vec{a}, \vec{b}] = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : a_i \leq x_i \leq b_i : i = 1, 2, \dots, N\},$$

donde $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_N)$. Es usual referirse a los vectores \vec{a} y \vec{b} como los *extremos del rectángulo*.

DEFINICIÓN 2.1.2 (Medida de un rectángulo en \mathbb{R}^N) Sean $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, N$, tales que $a_i \leq b_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, N$. Llamamos *medida o volumen del rectángulo* $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_N, b_N]$ al valor

$$m(R) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_N - a_N).$$

DEFINICIÓN 2.1.3 (Partición de un rectángulo en \mathbb{R}^N) Sean $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, N$, tales que $a_i \leq b_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, N$. Una *partición rectangular* $\vec{\mathcal{P}}$ del rectángulo $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_N, b_N]$ es un conjunto de la forma $\vec{\mathcal{P}} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 \times \dots \times \mathcal{P}_N$, donde

$$\mathcal{P}_i = \{a_i = x_{i0}, x_{i1}, \dots, x_{i(n_i-1)}, x_{in_i} = b_i\}$$

es una partición de $[a_i, b_i]$, para algún $n_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \dots, N$.

OBSERVACIÓN 2.1.1 Notemos que toda partición rectangular $\vec{\mathcal{P}}$ de un rectángulo R determina

$$n_0 = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_N$$

rectángulos R_j , $j = 1, 2, \dots, n_0$, tales que

$$R = \bigcup_{j=1}^{n_0} R_j \quad \text{e} \quad \text{int}(R_j) \cap \text{int}(R_k) = \emptyset \quad \forall j \neq k,$$

donde $\text{int}(R_j)$ corresponde al producto cartesiano de los intervalos abiertos cuyos extremos son los mismos que aquellos de los intervalos cerrados que definen al producto cartesiano R_j , para cada $j = 1, 2, \dots, n_0$.

DEFINICIÓN 2.1.4 (Norma de una partición rectangular de un rectángulo en \mathbb{R}^N) Sean $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, N$, tales que $a_i \leq b_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, N$. La norma de la partición rectangular $\vec{\mathcal{P}}$ del rectángulo $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_N, b_N]$ corresponde al valor

$$\|\vec{\mathcal{P}}\| = \max\{\|\mathcal{P}_1\|_\infty, \|\mathcal{P}_2\|_\infty, \dots, \|\mathcal{P}_N\|_\infty\},$$

donde $\|\mathcal{P}_i\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n_i} \{x_{ij} - x_{i(j-1)}\}$, $i = 1, 2, \dots, N$.

DEFINICIÓN 2.1.5 (Sumas de Riemann) Sea R un rectángulo en \mathbb{R}^N , sea $\vec{\mathcal{P}}$ una partición rectangular de R , y sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Si $\{R_i\}_{i=1}^{n_0}$ es la descomposición de R determinada por $\vec{\mathcal{P}}$. Llamamos:

- i) *Suma de Riemann* para la función f respecto de la partición rectangular $\vec{\mathcal{P}}$ del rectángulo R , a una suma de la forma

$$\sigma(f, \vec{\mathcal{P}}, T_{\vec{\mathcal{P}}}) = \sum_{i=1}^{n_0} f(c_i) m(R_i),$$

donde $T_{\vec{\mathcal{P}}} = \{c_1, c_2, \dots, c_{n_0}\}$, con $c_i \in R_i$, $i = 1, 2, \dots, n_0$.

- ii) *Suma superior de Riemann* para la función f respecto de la partición rectangular $\vec{\mathcal{P}}$ del rectángulo R , al valor

$$S(f, \vec{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^{n_0} f(x_i^{**}) m(R_i),$$

donde $f(x_i^{**}) = \max_{x \in R_i} \{f(x)\}$.

- iii) *Suma inferior de Riemann* para la función f respecto de la partición rectangular $\vec{\mathcal{P}}$ del rectángulo R , al valor

$$s(f, \vec{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^{n_0} f(x_i^*) m(R_i),$$

donde $f(x_i^*) = \min_{x \in R_i} \{f(x)\}$.

DEFINICIÓN 2.1.6 (Integral superior e inferior de Riemann) Sea R un rectángulo en \mathbb{R}^N y sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Llamamos:

- i) *Integral superior de Riemann* de la función f al valor real

$$\overline{\int_R f} = \inf_{\vec{\mathcal{P}} \in \mathbf{P}(R)} \{S(f, \vec{\mathcal{P}})\},$$

- ii) *Integral inferior de Riemann* de la función f al valor real

$$\underline{\int_R f} = \sup_{\vec{\mathcal{P}} \in \mathbf{P}(R)} \{s(f, \vec{\mathcal{P}})\},$$

donde $\mathbf{P}(R) = \{\vec{\mathcal{P}} : \vec{\mathcal{P}}$ es una partición rectangular de $R\}$.

DEFINICIÓN 2.1.7 (Integral de Riemann) Sea R un rectángulo en \mathbb{R}^N y sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Decimos que f es *Riemann-integrable* en R si

$$\overline{\int_R f} = \underline{\int_R f}.$$

Este último valor se denomina *integral de Riemann de f en el rectángulo R* y se denota simplemente por

$$\int_R f.$$

TEOREMA 2.1.1 Sea R un rectángulo en \mathbb{R}^N y sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Las siguientes propiedades son equivalentes:

- i) f es Riemann-integrable sobre R
 ii) f satisface la condición de Riemann en R ; es decir

$$(\forall \varepsilon > 0) \left(\exists \vec{\mathcal{P}} \in \mathbf{P}(R) \right) \text{ tal que } \left(S(f, \vec{\mathcal{P}}) - s(f, \vec{\mathcal{P}}) < \varepsilon \right).$$

TEOREMA 2.1.2 (Integrabilidad de funciones continuas sobre rectángulos) Sea R un rectángulo en \mathbb{R}^N y sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua sobre su dominio. Entonces f es integrable sobre R .

Hasta el momento hemos introducido el concepto de integral de Riemann sobre rectángulos en \mathbb{R}^N . Sin embargo, nuestro interés es más ambicioso pues deseamos integrar sobre conjuntos de \mathbb{R}^N más generales. El resto de este capítulo se enfoca en esa dirección.

2.1.1. Conjuntos de medida cero, conjuntos compactos e integrabilidad en \mathbb{R}^N

Conjuntos de medida cero en \mathbb{R}^N

DEFINICIÓN 2.1.8 (Conjuntos de medida cero) Sea $E \subset \mathbb{R}^N$. Decimos que E tiene *medida cero* o *medida nula* en \mathbb{R}^N si para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión de rectángulos $\{R_i\}_{i=1}^{\infty}$ tales que

$$i) \quad E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$$

$$ii) \quad \sum_{i=1}^{\infty} m(R_i) < \varepsilon.$$

EJEMPLO 2.1.1 Los siguientes conjuntos tienen medida cero en \mathbb{R}^N :

- El conjunto vacío
- Todo subconjunto de un conjunto de medida cero en \mathbb{R}^N
- La unión finita de conjuntos de medida cero en \mathbb{R}^N
- Toda recta paralela a uno de los ejes coordinados en \mathbb{R}^N , $N \geq 2$.

Antes de enunciar un teorema que muestra algunos ejemplos de conjuntos de medida cero, conviene introducir algunas definiciones.

DEFINICIÓN 2.1.9 (Conjuntos numerables) Sea $A \subset \mathbb{R}^N$. Decimos que A es *numerable* si existe una biyección $\varphi : A \rightarrow \mathbb{N}$.

EJEMPLO 2.1.2 Cualquier subconjunto de \mathbb{Q}^N es numerable en \mathbb{R}^N . \square

DEFINICIÓN 2.1.10 (Unión numerable) Sea $A \subset \mathbb{R}^N$. Decimos que A es una *unión numerable* de conjuntos en \mathbb{R}^N si existe una familia $\{A_i\}_{i \in I}$ de conjuntos en \mathbb{R}^N , donde I es algún conjunto numerable, tal que

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i.$$

TEOREMA 2.1.3 Todo conjunto numerable en \mathbb{R}^N tiene medida cero.

Demostración. Sea $A \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto numerable. Entonces, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $A = \{\vec{a}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, con $\vec{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iN}) \in \mathbb{R}^N$. Sea ahora $\varepsilon > 0$ dado, y para cada $n \in \mathbb{N}$

definamos los rectángulos

$$R_i = \left[a_{i1} - \frac{1}{4} \sqrt[N]{\frac{\varepsilon}{2^i}}, a_{i1} + \frac{1}{4} \sqrt[N]{\frac{\varepsilon}{2^i}} \right] \times \left[a_{n2} - \frac{1}{4} \sqrt[N]{\frac{\varepsilon}{2^i}}, a_{n2} + \frac{1}{4} \sqrt[N]{\frac{\varepsilon}{2^i}} \right] \times \dots \times \left[a_{iN} - \frac{1}{4} \sqrt[N]{\frac{\varepsilon}{2^i}}, a_{iN} + \frac{1}{4} \sqrt[N]{\frac{\varepsilon}{2^i}} \right].$$

Entonces

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$$

y

$$m(R_i) = \frac{1}{2} \sqrt[N]{\frac{\varepsilon}{2^i}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt[N]{\frac{\varepsilon}{2^i}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \sqrt[N]{\frac{\varepsilon}{2^i}} = \frac{\varepsilon}{2^{i+N}}$$

Notando ahora que

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(R_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+N}} = \frac{\varepsilon}{2^N} < \varepsilon,$$

concluimos que A tiene medida cero. ■

TEOREMA 2.1.4 La unión numerable de conjuntos de medida cero en \mathbb{R}^N tiene medida cero.

Demostración. Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia numerable de conjuntos de medida cero en \mathbb{R}^N , y sea

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Sea ahora $\varepsilon > 0$ dado. Como cada A_n tiene medida cero, podemos considerar para cada $n \in \mathbb{N}$ una correspondiente sucesión de rectángulos $\{R_{in}\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que

$$A_n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_{in}$$

y

$$\sum_{i=1}^n m(R_{in}) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Luego, como

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} R_{in}$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} m(R_{in}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

concluimos que A tiene medida cero. ■

A continuación introducimos a los conjuntos de contenido cero, que son útiles para tener más ejemplos de conjuntos de medida cero.

DEFINICIÓN 2.1.11 (Conjuntos de contenido cero) Sea $E^* \subset \mathbb{R}^N$. Decimos que E^* tiene *contenido cero* en \mathbb{R}^N si para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito de rectángulos $\{R_i\}_{i=1}^n$ tales que:

$$i) E^* \subset \bigcup_{i=1}^n R_i$$

$$ii) \sum_{i=1}^n m(R_i) < \varepsilon.$$

TEOREMA 2.1.5 Todo conjunto de contenido cero en \mathbb{R}^N es acotado.

EJEMPLO 2.1.3 Los siguientes conjuntos tienen contenido cero en \mathbb{R}^N :

- El conjunto vacío.
- Todo subconjunto de un conjunto de contenido cero.
- La unión finita de conjuntos de contenido cero en \mathbb{R}^N .
- Cualquier conjunto acotado de dimensión menor o igual a $N - 1$. Algunos conjuntos en \mathbb{R} que tienen contenido cero son aquellos que contienen una cantidad finita de puntos. Algunos conjuntos en \mathbb{R}^2 que tienen contenido cero son: los conjuntos que contienen una cantidad finita de puntos; los segmentos de recta de longitud finita; y las líneas curvas continuas y suaves de longitud finita. Algunos conjuntos en \mathbb{R}^3 que tienen contenido cero son: los conjuntos que contienen una cantidad finita de puntos; los segmentos de recta de longitud finita; las líneas curvas continuas y suaves de longitud finita; y las superficies suaves y acotadas de cuerpos con volumen. □

OBSERVACIÓN 2.1.2 Todo conjunto de contenido cero en \mathbb{R}^N tiene medida cero en \mathbb{R}^N , pero el recíproco no es cierto, tal como lo muestra el siguiente **contraejemplo**: \mathbb{Q}^N tiene medida cero en \mathbb{R}^N , pero \mathbb{Q}^N no es acotado, de manera que \mathbb{Q}^N no puede tener contenido cero.

TEOREMA 2.1.6 Todo conjunto de medida cero o de contenido cero en \mathbb{R}^N tiene interior vacío.

OBSERVACIÓN 2.1.3 El recíproco del Teorema previo no es cierto, tal como lo muestran los siguientes **contraejemplos**: $A = [0, 1]^N \cap \mathbb{Q}^N$ tiene interior vacío y no tiene contenido cero (aunque sí tiene medida cero), mientras que $B = [0, 1]^N \setminus \mathbb{Q}^N$ tiene interior vacío y no tiene medida cero.

Conjuntos compactos en \mathbb{R}^N e integrabilidad en dominios más generales

DEFINICIÓN 2.1.12 (Conjuntos compactos en \mathbb{R}^N) Sea $K \subset \mathbb{R}^N$. Decimos que K es compacto en \mathbb{R}^N si K es un conjunto cerrado y acotado en \mathbb{R}^N .

El siguiente teorema establece una equivalencia entre conjuntos de medida cero y conjuntos de

contenido cero en el contexto de conjuntos compactos.

TEOREMA 2.1.7 Sea K un conjunto compacto en \mathbb{R}^N . Entonces, K tiene medida cero si y solo si K tiene contenido cero.

A continuación enunciamos un teorema que extiende al Teorema 2.1.2 de integrabilidad de funciones continuas sobre rectángulos.

TEOREMA 2.1.8 Sea R un rectángulo en \mathbb{R}^N , sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada sobre R y sea

$$E = \{x \in R : f \text{ no es continua en } x\}.$$

Entonces, f es integrable sobre R si y solo si E es un conjunto de medida cero.

EJERCICIOS 2.1.1

1. Sea $R = [0, 1] \times [0, 1]$ y sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) \in R \setminus (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \\ 1 & \text{si } (x, y) \in R \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}). \end{cases}$$

¿Es f integrable sobre R ? Justifica tu respuesta.

2. Sea $R = [-\pi, \pi] \times [-1, 1]$ y sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \operatorname{sen}(xy) & \text{si } (x, y) \in R \setminus \{(u, w) \in \mathbb{R}^2 : u = w\} \\ 0 & \text{si } (x, y) \in R \cap \{(u, w) \in \mathbb{R}^2 : u = w\}. \end{cases}$$

¿Es f integrable sobre su dominio? Justifica tu respuesta.

Para ver las Soluciones de los Ejercicios 2.1.1 presiona aquí A

2.1.2. Propiedades de la integración múltiple

DEFINICIÓN 2.1.13 Sea D un conjunto en \mathbb{R}^N . Decimos que D es *medible Jordan* en \mathbb{R}^N si D es acotado y su frontera $\operatorname{Fr}(D)$ tiene contenido cero.

DEFINICIÓN 2.1.14 Sea D un conjunto *medible Jordan* en \mathbb{R}^N , sea R un rectángulo en \mathbb{R}^N que contiene a D , sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función y sea

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \\ 0 & \text{si } x \notin D. \end{cases}$$

Si \tilde{f} es integrable sobre R , entonces decimos que f es *integrable* sobre D . En tal caso, definimos la integral de f sobre D por

$$\int_D f = \int_R \tilde{f}.$$

TEOREMA 2.1.9 Sea D un conjunto medible Jordan en \mathbb{R}^N , y sean f, g dos funciones integrables sobre D y sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces las funciones

$$f + g, \quad f - g, \quad cf, \quad fg \quad \text{y} \quad |f|$$

también son integrables sobre D . Además se cumple que:

$$i) \int_D (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_D f + \beta \int_D g \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$ii) f \leq g \Rightarrow \int_D f \leq \int_D g$$

$$iii) \left| \int_D f \right| \leq \int_D |f|.$$

TEOREMA 2.1.10 (Teorema del valor medio integral generalizado) Sea K un conjunto compacto cuyo interior no puede ser descrito como la unión de dos conjuntos abiertos en \mathbb{R}^N , sea $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y sea $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ una función no negativa e integrable sobre su dominio. Entonces existe $\bar{x} \in K$ tal que

$$\int_K fg = f(\bar{x}) \int_K g.$$

TEOREMA 2.1.11 Sean D_1 y D_2 dos conjuntos medibles Jordan en \mathbb{R}^N tales que $\overline{D_1} \cap \overline{D_2}$ es de medida cero, y sea f una función integrable sobre $D_1 \cup D_2$. Entonces

$$\int_{D_1 \cup D_2} f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f.$$

2.1.3. La integral de Riemann en \mathbb{R}^2

Consideremos en \mathbb{R}^2 el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Consideremos también la partición \mathcal{P}_1 de $[a, b]$ y la partición \mathcal{P}_2 de $[c, d]$ dadas respectivamente por

$$\mathcal{P}_1 = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_m = b\}$$

y

$$\mathcal{P}_2 = \{c = y_0, y_1, y_2, \dots, y_n = d\}.$$

Pongamos

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

y

$$\Delta y_j = y_j - y_{j-1} \quad \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

Entonces, se determinan $m n$ rectángulos contenidos en R , los que denotamos por R_{ij} , donde

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \quad \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

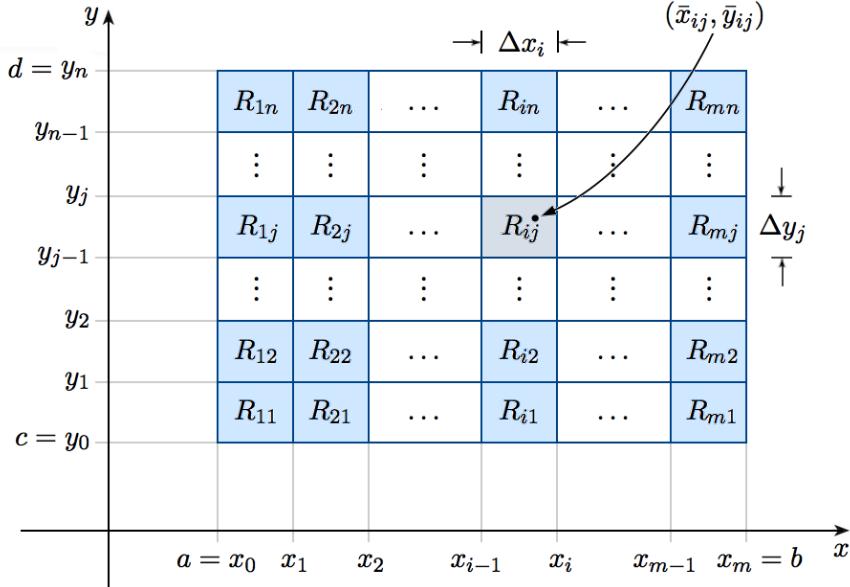


Figura 2.1. Partición rectangular $\vec{\mathcal{P}} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ del rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$, donde $\mathcal{P}_1 = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_m = b\}$ y $\mathcal{P}_2 = \{c = y_0, y_1, y_2, \dots, y_n = d\}$.

Por lo tanto, obtenemos la partición rectangular $\vec{\mathcal{P}}$ de R , dada por

$$\vec{\mathcal{P}} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2,$$

la cual determina una división de la región R en rectángulos más pequeños, de manera que

$$R = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m R_{ij} \quad \text{con } \text{int}(R_{ij}) \cap \text{int}(R_{lk}) = \emptyset \quad \text{si } ij \neq lk.$$

Ahora, sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y positiva, y sea S el sólido limitado superiormente por la superficie correspondiente a la gráfica de f e inferiormente por el rectángulo R en el plano xy . Entonces la partición $\vec{\mathcal{P}}$ antes mencionada divide al sólido S en $m n$ sólidos, los cuales denotamos por

$$S_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \quad \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

En particular, el sólido S_{ij} tiene por “base” al rectángulo R_{ij} en el plano xy , y por “techo” a la superficie correspondiente a la gráfica de f asociada al rectángulo R_{ij} , siendo sus caras laterales regiones planas perpendiculares al plano xy .

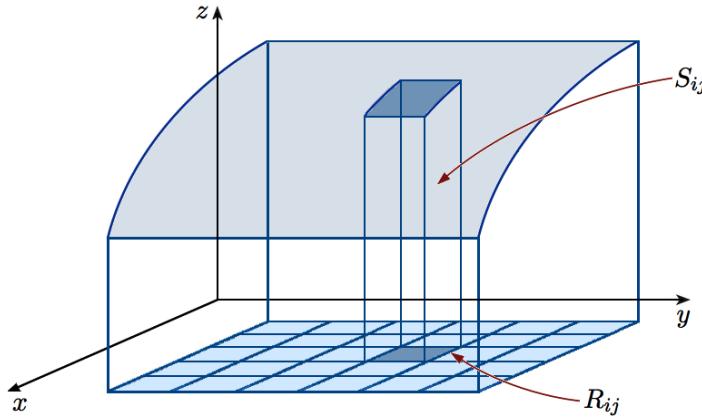


Figura 2.2. El sólido S se divide en mn sólidos, denominados S_{ij} , asociados a los rectángulos R_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$.

A continuación, para cada $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$, consideramos un punto $(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}) \in R_{ij}$ (y por lo tanto $\bar{x}_{ij} \in [x_{i-1}, x_i], \forall j$, y $\bar{y}_{ij} \in [y_{j-1}, y_j], \forall i$), y ponemos

$$T_{\vec{\mathcal{P}}} = \{(\bar{x}_{11}, \bar{y}_{11}), (\bar{x}_{12}, \bar{y}_{12}), \dots, (\bar{x}_{mn}, \bar{y}_{mn})\}.$$

Por otro lado, recordemos que $\vec{\mathcal{P}}$ tiene norma dada por el valor

$$\|\vec{\mathcal{P}}\| = \max\{\|\mathcal{P}_1\|_\infty, \|\mathcal{P}_2\|_\infty\},$$

donde $\|\mathcal{P}_1\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m}\{\Delta x_i\}$ y $\|\mathcal{P}_2\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n}\{\Delta y_j\}$. Luego, es claro que si $\|\vec{\mathcal{P}}\|$ es muy pequeña, entonces el paralelepípedo rectangular recto de base R_{ij} y altura $f(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij})$ posee un volumen Λ_{ij} que se aproxima al volumen V_{ij} del sólido S_{ij} . Es decir, $\Lambda_{ij} \sim V_{ij}$, o bien

$$V_{ij} \sim f(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij})\Delta x_i \Delta y_j \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \quad \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

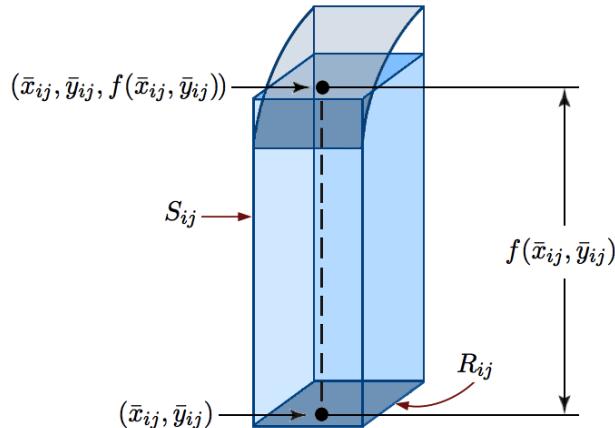


Figura 2.3. El volumen del sólido S_{ij} es aproximado por el volumen de un paralelepípedo de base R_{ij} y que posee altura $f(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij})$.

De esta forma, el volumen total V del sólido S es aproximado por la suma de todos los volúmenes V_{ij} de los sólidos S_{ij} , a saber

$$V \sim \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j = \sigma(f, \vec{\mathcal{P}}, T_{\vec{\mathcal{P}}}),$$

donde $\sigma(f, \vec{\mathcal{P}}, T_{\vec{\mathcal{P}}})$ es precisamente la suma de Riemann para la función f respecto de la partición rectangular $\vec{\mathcal{P}}$ del rectángulo R , para la elección de puntos $T_{\vec{\mathcal{P}}}$. Aquí, la medida de los rectángulos R_{ij} está dada por $m(R_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j$. Es claro que mientras menor es la norma de la partición $\vec{\mathcal{P}}$, mejor será la aproximación del volumen V del sólido S mediante sumas de Riemann.

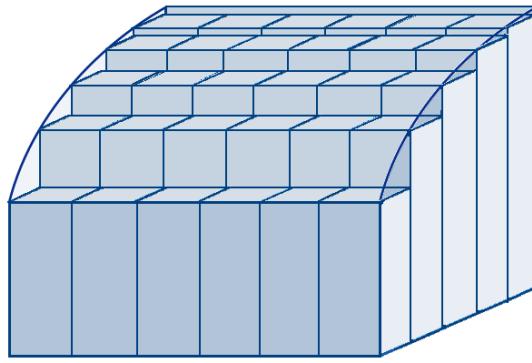


Figura 2.4. Mientras menor es la norma de la partición $\vec{\mathcal{P}}$, mejor será la aproximación del volumen V mediante sumas de Riemann. En este caso, observamos una suma inferior de Riemann.

Para \mathbb{R}^2 , damos una definición del valor de una integral definida (integral de Riemann).

DEFINICIÓN 2.1.15 (Valor de la integral de una función sobre un rectángulo) Sea $R = [a, b] \times [c, d]$ y para $n, m \in \mathbb{N}$ dados, consideremos $\mathcal{P}_{1,m} = \{a = x_0, x_1, \dots, x_m = b\}$ una partición de $[a, b]$ y $\mathcal{P}_{2,n} = \{c = y_0, y_1, \dots, y_n = d\}$ una partición de $[c, d]$, tales que $\|\mathcal{P}_{1,m}\|_\infty \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$ y $\|\mathcal{P}_{2,n}\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Luego, la partición $\vec{\mathcal{P}}$ de R , definida por

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{P}}(m, n) = \mathcal{P}_{1,m} \times \mathcal{P}_{2,n},$$

verifica que $\|\vec{\mathcal{P}}\| \xrightarrow[m, n \rightarrow \infty]{} 0$, pues $\|\vec{\mathcal{P}}\| = \max\{\|\mathcal{P}_{1,m}\|_\infty, \|\mathcal{P}_{2,n}\|_\infty\}$. Escojamos ahora arbitrariamente puntos $(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}) \in R_{ij}$ donde $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, para $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, y consideremos una función $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ que sea acotada e integrable sobre R . Entonces, la *integral de f sobre R* es el número real

$$\int_R f = \iint_R f(x, y) dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j.$$

OBSERVACIÓN 2.1.4 En integrales dobles es usual usar la notación dA en vez de la notación $dy dx$ ($dx dy$), en alusión a que estamos integrando sobre una región que posee área.

2.2. Evaluación de integrales múltiples de Riemann

En general, no parece práctico tratar de obtener el valor de la integral de una función usando la definición. Esto ya sucedía para la integración de funciones de una sola variable, donde fuimos capaces de evaluar integrales de forma sencilla solo cuando probamos el Teorema fundamental del cálculo y la regla de Barrows (segundo Teorema fundamental del cálculo), los cuales relacionaban el valor de una integral definida (la integral de Riemann), con la antiderivada de la función que estábamos integrando.

2.2.1. Evaluación de integrales dobles sobre rectángulos

A continuación, vamos a enunciar un resultado que establece una forma simple y directa de evaluar integrales de ciertas funciones integrables sobre rectángulos. Este método consiste en expresar la integral como una integral iterada (vea la Definición 1.1.1). El método se puede extender a dimensiones mayores que 2 como veremos más adelante.

TEOREMA 2.2.1 (Teorema de Fubini, Primera forma) Sea $R = [a, b] \times [c, d]$ y sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que para cada $x \in [a, b]$, existe $\int_c^d f(x, y) dy$. Entonces la función $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$(x, y) \mapsto F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

es integrable sobre $[a, b]$. Más aún, se verifica que

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b F(x) dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

OBSERVACIÓN 2.2.1 El Teorema 2.2.1 extiende al Teorema 1.1.3 en el sentido que ahora no necesitamos hipótesis de continuidad sobre la función f .

COROLARIO 2.2.1 Sea $R = [a, b] \times [c, d]$ y sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que para cada $x \in [a, b]$ existe $\int_c^d f(x, y) dy$, y para cada $y \in [c, d]$ existe $\int_a^b f(x, y) dx$. Entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

COROLARIO 2.2.2 Sea $R = [a, b] \times [c, d]$ y sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Si f es continua sobre R , excepto tal vez en un conjunto de medida cero, entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

EJEMPLO 2.2.1 Sea $R = [0, 1] \times [0, 1]$ y sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{si } x \neq \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Calcula

$$\iint_R f(x, y) dA.$$

Solución. Notemos que f es acotada en \mathbb{R} , pues

$$-1 \leq f(x, y) \leq 1^2 + 1^2 = 2 \quad \forall (x, y) \in R,$$

y que f es continua sobre R , excepto en el conjunto de medida cero

$$E = \left\{ (x, y) \in R : x = \frac{1}{2} \right\}.$$

Luego, f es integrable sobre R y obtenemos

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA &= \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2) dy dx \\ &= \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3} x \right) \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{2}{3}. \quad \square \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 2.2.2 Notemos que si $R = [a, b] \times [c, d]$, entonces:

- El área de la región rectangular R viene dada por

$$A(R) = \int_a^b \int_c^d 1 dy dx = (d - c)(b - a) = m(R).$$

- Sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua sobre R . El volumen del sólido S limitado por la superficie $z = f(x, y)$, con $(x, y) \in R$, y el plano xy , el cual corresponde al volumen limitado superiormente por la superficie $z = |f(x, y)| \geq 0$, con $(x, y) \in R$, sobre el plano xy , y limitado lateralmente por una superficie perpendicular al plano xy , viene dado por

$$V(S) = \int_a^b \int_c^d |f(x, y)| dy dx.$$

En particular, si $z = h$, con $h > 0$, entonces el sólido S' con base R y altura h tiene volumen

$$V(S') = \int_a^b \int_c^d h dy dx = h A(R).$$

EJEMPLO 2.2.2 Calcula el volumen del sólido limitado por la superficie $z = 4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2$, los planos $x = 3$, $y = 2$ y los planos coordenados.

Solución. En primer lugar, notemos que la región R sobre la cual vamos a integrar corresponde al rectángulo

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq y \leq 2\} = [0, 3] \times [0, 2].$$

Consideremos ahora la función $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = 4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2.$$

Entonces, f resulta ser positiva y acotada sobre R , pues

$$0 < 4 - \frac{1}{9}(3^2) - \frac{1}{16}(2^2) \leq f(x, y) \leq 4 \quad \forall (x, y) \in R,$$

y continua sobre R . Luego, $z = |f(x, y)| = f(x, y) \geq 0$ en R , así que el volumen del sólido limitado por la superficie $z = 4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2$, los planos $x = 3$, $y = 2$ y los planos coordinados está dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_0^3 \int_0^2 \left(4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2 \right) dy dx = \int_0^3 \left(4y - \frac{1}{9}x^2y - \frac{1}{48}y^3 \right) \Big|_0^2 dx \\ &= \int_0^3 \left(8 - \frac{2}{9}x^2 - \frac{1}{6} \right) dx \\ &= 8x - \frac{2}{27}x^3 - \frac{1}{6}x \Big|_{x=0}^{x=3} \\ &= 24 - 2 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{43}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

2.2.2. Evaluación de integrales dobles sobre dominios más generales

PROPOSICIÓN 2.2.1 Sean $u, v \in C([a, b])$ tales que

$$c \leq u(x) \leq v(x) \leq d \quad \forall x \in [a, b],$$

sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge u(x) \leq y \leq v(x)\}$ y sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada, que además es continua sobre D salvo tal vez en un conjunto de medida cero. Entonces f es integrable sobre D y se verifica que

$$\iint_D f(x, y) \, dA = \int_a^b \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) \, dy \, dx.$$

EJEMPLO 2.2.3 Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \wedge x \leq y \leq 2x\}$ y sea f una función integrable sobre la región D . Cambia el orden de integración para la siguiente integral

$$\int_0^2 \int_x^{2x} f(x, y) \, dy \, dx.$$

Solución.

(1º) Trazamos la gráfica de la región D en el plano xy , señalando claramente las curvas que la limitan.

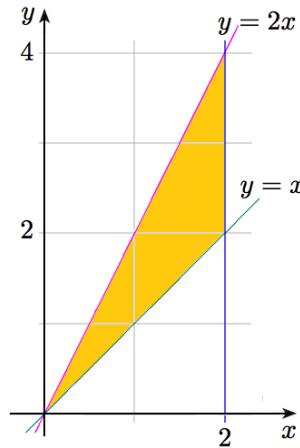


Figura 2.5. Gráfica de la región $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \wedge x \leq y \leq 2x\}$.

(2º) Ahora intercambiamos los ejes y volvemos a trazar la gráfica de la región D , dividiéndola, de ser necesario, en apropiadas subregiones. El eje horizontal será el eje y , y x será la variable dependiente. Señalamos claramente las curvas que limitan las subregiones.

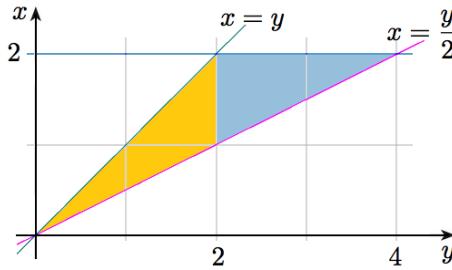


Figura 2.6. Gráfica de la región D , donde se han intercambiado los ejes x e y .

(3º) Desde la figura previa, podemos poner

$$D_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2 \wedge \frac{y}{2} \leq x \leq y \right\}$$

y

$$D_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq y \leq 4 \wedge \frac{y}{2} \leq x \leq 2 \right\},$$

entonces $D = D_1 \cup D_2$, donde D_1 y D_2 son regiones acotadas tales que $m(\overline{D_1} \cap \overline{D_2}) = 0$.

(4º) Finalmente, obtenemos

$$\int_0^2 \int_x^{2x} f(x, y) dy dx = \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^y f(x, y) dx dy + \int_2^4 \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x, y) dx dy. \quad \square$$

EJEMPLO 2.2.4 Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 4 \wedge \sqrt{4x - x^2} \leq y \leq 2\sqrt{x}\}$ y sea f una función integrable sobre la región D . Cambia el orden de integración y reescribe la integral

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x, y) dy dx.$$

Solución.

(1º) Trazamos la gráfica de la región D en el plano xy , señalando claramente las curvas que la limitan.

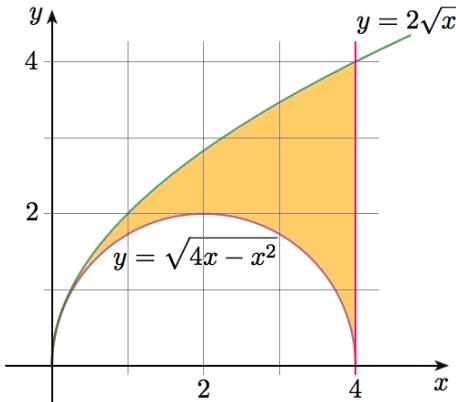


Figura 2.7. Gráfica de la región $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 4 \wedge \sqrt{4x - x^2} \leq y \leq 2\sqrt{x}\}$.

- (2º) Ahora intercambiamos los ejes y volvemos a trazar la gráfica de la región D , dividiéndola, de ser necesario, en apropiadas subregiones. El eje horizontal será el eje y , y x será la variable dependiente. Señalamos claramente las curvas que limitan las subregiones.

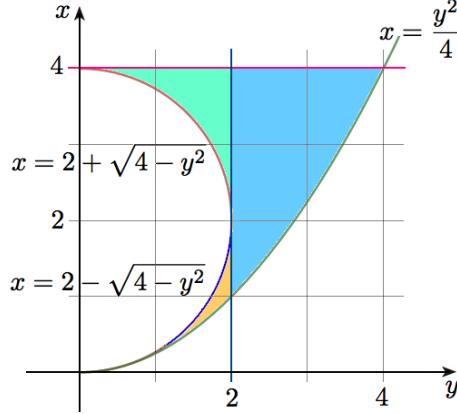


Figura 2.8. Gráfica de la región D , donde se han intercambiado los ejes x e y .

- (3º) Desde la figura previa, podemos identificar las regiones

$$D_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2 \wedge \frac{y^2}{4} \leq x \leq 2 - \sqrt{4 - y^2} \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2 \wedge 2 + \sqrt{4 - y^2} \leq x \leq 4 \right\}$$

y

$$D_3 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq y \leq 4 \wedge \frac{y^2}{4} \leq x \leq 4 \right\},$$

entonces $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, donde D_1 , D_2 y D_3 son regiones acotadas y tales que

$$m(\overline{D_i} \cap \overline{D_j}) = 0,$$

para cada $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$.

- (4º) Finalmente, obtenemos

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x, y) dy dx = \int_0^2 \int_{\frac{y^2}{4}}^{2-\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx dy + \int_0^2 \int_{2+\sqrt{4-y^2}}^4 f(x, y) dx dy + \int_2^4 \int_{\frac{y^2}{4}}^4 f(x, y) dx dy. \quad \square$$

EJEMPLO 2.2.5 Calcula, si es posible, el valor de

$$\int_1^2 \int_0^{\ln x} (x-1)\sqrt{1+e^{2y}} dy dx.$$

Solución. La función $f(x, y) = (x - 1)\sqrt{1 + e^{2y}}$ es continua sobre \mathbb{R}^2 , y en particular lo es sobre la región acotada

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq \ln x\}.$$

Luego, podemos integrar. Teniendo en cuenta los límites de integración y la estructura de la función f , parece razonable cambiar el orden de integración pues no es directo integrar

$$\int \sqrt{1 + e^{2y}} \, dy.$$

Entonces, trazamos la gráfica de la región D sobre el plano xy .

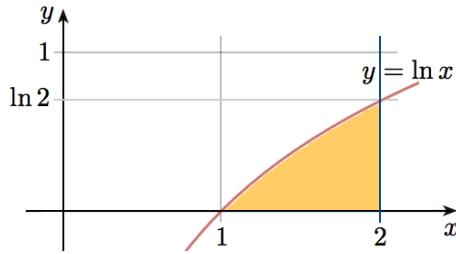


Figura 2.9. Gráfica de la región $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq \ln x\}$.

Ahora intercambiamos los ejes y volvemos a trazar la gráfica de la región D .

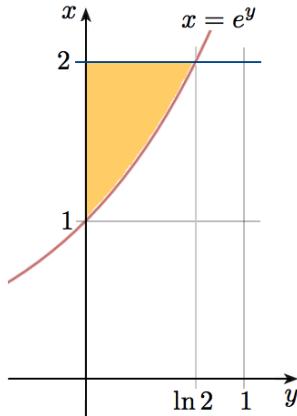


Figura 2.10. Gráfico de la región D , donde se han intercambiado los ejes x e y .

Notemos que la región D puede describirse de la siguiente forma,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \ln 2 \wedge e^y \leq x \leq 2\}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 \int_1^2 \int_0^{\ln x} (x-1)\sqrt{1+e^{2y}} dy dx &= \int_1^2 \left(\int_0^{\ln x} (x-1)\sqrt{1+e^{2y}} dy \right) dx \\
 &= \int_0^{\ln 2} \left(\int_{e^y}^2 (x-1)\sqrt{1+e^{2y}} dx \right) dy \quad \text{por Fubini} \\
 &= \int_0^{\ln 2} \left(\left(\frac{x^2}{2} - x \right) \sqrt{1+e^{2y}} \right) \Big|_{x=e^y}^{x=2} dy \\
 &= - \int_0^{\ln 2} \left(\frac{e^{2y}}{2} - e^y \right) \sqrt{1+e^{2y}} dy \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^{\ln 2} e^{2y} \sqrt{1+e^{2y}} dy + \int_0^{\ln 2} e^y \sqrt{1+(e^y)^2} dy \\
 &= -\frac{1}{4} \int_2^5 \sqrt{v} dv + \int_1^2 \sqrt{1+u^2} du \quad \text{donde } v = 1+e^{2y} \text{ y } u = e^y.
 \end{aligned}$$

Para el cálculo de la segunda integral, introducimos el cambio de variable

$$\begin{cases} u = \tan \theta \\ du = \sec^2 \theta d\theta. \end{cases}$$

Luego,

$$\sqrt{1+u^2} = \sqrt{1+\tan^2 \theta} = \sec \theta$$

y obtenemos,

$$\int \sqrt{1+u^2} du = \int \sec^3 \theta d\theta.$$

Esta última integral se puede resolver integrando por partes, si consideramos

$$\begin{cases} \bar{u} = \sec \theta & d\bar{v} = \sec^2 \theta d\theta \\ d\bar{u} = \sec \theta \tan \theta d\theta & \bar{v} = \tan \theta. \end{cases}$$

Siguiendo con algunos cálculos directos y teniendo en cuenta que $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$, obtenemos

$$\begin{aligned}
 \int \sec^3 \theta d\theta &= \tan \theta \sec \theta - \int \sec \theta \tan^2 \theta d\theta \\
 &= \tan \theta \sec \theta - \int \sec^3 \theta d\theta + \int \sec \theta d\theta,
 \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$2 \int \sec^3 \theta d\theta = \tan \theta \sec \theta + \ln |\sec \theta + \tan \theta| + c.$$

Ahora, para retornar a las variables originales, consideramos el triángulo rectángulo asociado a la relación $u = \tan \theta$, y procedemos a calcular todas aquellas razones trigonométricas involucradas en la expresión previa. Obtenemos,

$$\int \sec^3 \theta \, d\theta = \frac{1}{2} \left(u \sqrt{1+u^2} + \ln \left| \sqrt{1+u^2} + u \right| \right) + c.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_1^2 \int_0^{\ln x} (x-1) \sqrt{1+e^{2y}} \, dy \, dx &= -\frac{1}{6} v^{\frac{3}{2}} \Big|_{v=2}^{v=5} + \left(u \sqrt{1+u^2} + \ln \left| \sqrt{1+u^2} + u \right| \right) \Big|_{u=e}^{u=2} \\ &= \frac{1}{6} \left(2^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}} \right) + \left(2\sqrt{5} + \ln \left| \sqrt{5} + 2 \right| \right) - \left(\sqrt{2} + \ln \left| \sqrt{2} + 1 \right| \right). \quad \square \end{aligned}$$

EJEMPLO 2.2.6 Calcula, si es posible, el valor de

$$\int_{-1}^1 \int_0^{y^2} (x^2 + y) \, dx \, dy.$$

Solución. La función $f(x, y) = x^2 + y$ es continua sobre \mathbb{R}^2 , y en particular lo es sobre la región acotada

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1 \wedge 0 \leq x \leq y^2\}.$$

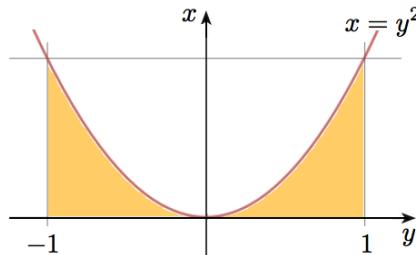


Figura 2.11. Gráfica de la región $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1 \wedge 0 \leq x \leq y^2\}$.

Luego, podemos integrar,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_0^{y^2} (x^2 + y) \, dx \, dy &= \int_{-1}^1 \left(\int_0^{y^2} (x^2 + y) \, dx \right) \, dy \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{x^3}{3} + yx \right) \Big|_{x=0}^{x=y^2} \, dy \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{y^6}{3} + y^3 \right) \, dy \\ &= \left(\frac{y^7}{21} + \frac{y^4}{4} \right) \Big|_{y=-1}^{y=1} \\ &= \frac{2}{21}. \quad \square \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 2.2.3 Sean $u, v \in C([a, b])$ tales que

$$c \leq u(x) \leq v(x) \leq d \quad \forall x \in [a, b].$$

Sea $R = [a, b] \times [c, d]$ y sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge u(x) \leq y \leq v(x)\}$. Entonces:

- El área de la región D viene dada por

$$A(D) = \int_a^b \int_{u(x)}^{v(x)} 1 \, dy \, dx.$$

- El volumen del sólido S limitado por la superficie $z = f(x, y)$, con $(x, y) \in D$, y el plano xy , el cual corresponde al volumen limitado superiormente por la superficie $z = |f(x, y)| \geq 0$, con $(x, y) \in D$, sobre el plano xy , y limitado lateralmente por una superficie perpendicular al plano xy , viene dado por

$$V(S) = \int_a^b \int_{u(x)}^{v(x)} |f(x, y)| \, dy \, dx.$$

En particular, si $z = h$, con $h > 0$, entonces el sólido S' con base D y altura h tiene volumen

$$V(S') = \int_a^b \int_{u(x)}^{v(x)} h \, dy \, dx = h A(D).$$

EJEMPLO 2.2.7 Mediante el uso de una integral doble, calcula el volumen de un cilindro circular recto de radio r y altura h .

Solución. En primer lugar, definimos la región D sobre la cual vamos a integrar. Para ello, vamos a considerar un cilindro circular recto tal que su base circular esté centrada en el origen, y contenida en el plano xy . Entonces, el círculo centrado en el origen y radio r será el dominio D de integración de la función constante $f(x, y) = h$. Para escribir correctamente los límites de integración, notemos que

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -r \leq x \leq r \wedge -\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2} \right\}. \end{aligned}$$

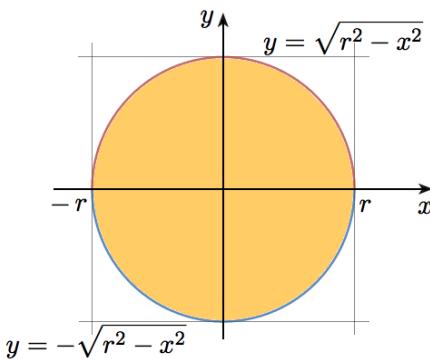


Figura 2.12. Gráfica de la región $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$.

Luego, el volumen V del cilindro circular recto de radio r y altura h está dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} h \, dy \, dx = 2h \int_{-r}^r \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} h \, dy \, dx \\ &= 2h \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx \\ &= 2h \left(\frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2} \arcsen \left(\frac{x}{r} \right) \right) \Big|_{x=-r}^{x=r} \\ &= 2h (r^2 \arcsen 1) \\ &= \pi r^2 h. \quad \square \end{aligned}$$

EJEMPLO 2.2.8 Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 2\}$ y sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } (x, y) \in D_1 = \{(x, y) \in D : x > 2y\} \\ -1 - y & \text{si } (x, y) \in D_2 = \{(x, y) \in D : x \leq 2y\}. \end{cases}$$

Halla el volumen del sólido limitado por la superficie $z = f(x, y)$, con $(x, y) \in D$, y el plano xy .

Solución. Notemos que $D = D_1 \cup D_2 = [0, 1] \times [0, 2]$ es un conjunto acotado y que podemos reescribir las regiones D_1 y D_2 como:

$$D_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y < \frac{x}{2} \right\}$$

y

$$D_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge \frac{x}{2} \leq y \leq 2 \right\}.$$

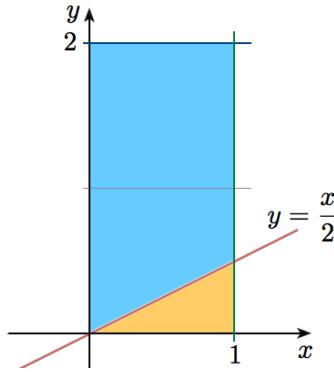


Figura 2.13. Gráfica de la región $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 2\}$ sub-dividida en las regiones $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y < \frac{x}{2}\}$ y $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge \frac{x}{2} \leq y \leq 2\}$.

Notemos también que $\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2$ tiene medida cero pues se trata de un segmento de recta de longitud finita. Luego, podemos integrar separadamente sobre D_1 y sobre D_2 , para finalmente

sumar estas integrales y obtener la integral sobre D . Como $f(x, y) = 1 + x > 0$ en D_1 , entonces el volumen bajo la superficie $z = |f(x, y)|$ en D_1 , sobre el plano xy , está dado por

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^1 \int_0^{\frac{x}{2}} |f(x, y)| \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{\frac{x}{2}} (1 + x) \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 (1 + x) \Big|_{y=0}^{y=\frac{x}{2}} \, dx \\ &= \int_0^1 \frac{x}{2}(1 + x) \, dx \\ &= \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

Por otro lado, como $f(x, y) \leq 0$ en D_2 , el volumen bajo la superficie $z = |f(x, y)|$ en D_2 , sobre el plano xy , está dado por

$$\begin{aligned} V_2 &= \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^2 |f(x, y)| \, dy \, dx = \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^2 (1 + y) \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \left(y + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=\frac{x}{2}}^{y=2} \, dx \\ &= \int_0^1 \left(4 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \right) \, dx \\ &= \left(4x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{24} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{89}{24}. \end{aligned}$$

Luego, el volumen del sólido es

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 \\ &= \frac{5}{12} + \frac{89}{24} \\ &= \frac{99}{24}. \quad \square \end{aligned}$$

EJERCICIOS 2.2.1

1. Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq e \wedge 0 < y < \ln x\}$ y sea f una función integrable sobre D . Cambia el orden de integración y obtén una integral equivalente a

$$\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x, y) \, dy \, dx.$$

2. Reescribe la integral doble

$$\iint_D f(x, y) dA,$$

utilizando límites de integración adecuados sobre las regiones D dadas.

- a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
 - b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$
 - c) D es el triángulo de vértices $(0, 0), (2, 1), (-2, 2)$.
3. Encuentra el área de la región encerrada por las curvas $y = x^2$ y $y = 4x - x^2$.
4. Expresa el volumen del sólido encerrado por los paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $2z = 12 - x^2 - y^2$ mediante una integral doble con adecuados límites de integración.
5. Evalúa, si es posible, el valor de

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \sin(\pi y^3) dy dx.$$

Para ver las Soluciones de los Ejercicios 2.2.1 presiona aquí A

2.2.3. Evaluación de integrales múltiples de Riemann

TEOREMA 2.2.2 (Teorema de Fubini, segunda forma) Sea $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_N, b_N]$, sea $i_0 \in \{1, 2, \dots, N\}$ fijo, y sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable sobre R tal que para cada $z \in [a_{i_0}, b_{i_0}]$ existe

$$\int_{\tilde{R}_{i_0}} f(x_1, x_2, \dots, x_{i_0-1}, z, x_{i_0+1}, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_{i_0-1} dx_{i_0+1} \dots dx_N,$$

donde $\tilde{R}_{i_0} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_{i_0-1}, b_{i_0-1}] \times [a_{i_0+1}, b_{i_0+1}] \times \dots \times [a_N, b_N]$. Entonces la función $F : \tilde{R}_{i_0} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(z) = \int_{\tilde{R}} f(x_1, x_2, \dots, x_{i_0-1}, z, x_{i_0+1}, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_{i_0-1} dx_{i_0+1} \dots dx_N$$

es integrable sobre $[a_{i_0}, b_{i_0}]$. Más aún, se verifica que

$$\int_{a_{i_0}}^{b_{i_0}} F(z) dz = \int_{a_{i_0}}^{b_{i_0}} \int_{\tilde{R}} f(x_1, x_2, \dots, x_{i_0-1}, z, x_{i_0+1}, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_{i_0-1} dx_{i_0+1} \dots dx_N dz.$$

El Teorema 2.2.3 de Fubini, segunda forma, no solo nos da un criterio para evaluar integrales múltiples, sino que también nos habilita para realizar cambios arbitrarios en el de orden de integración tal como lo establece el siguiente corolario.

COROLARIO 2.2.3 Sea $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_N, b_N]$ y sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable sobre R tal que para cada $i_0 \in \{1, 2, \dots, N\}$ y para cada $z \in [a_{i_0}, b_{i_0}]$ existe

$$\int_{\tilde{R}_{i_0}} f(x_1, x_2, \dots, x_{i_0-1}, z, x_{i_0+1}, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_{i_0-1} dx_{i_0+1} \dots dx_N,$$

donde $\tilde{R}_{i_0} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_{i_0-1}, b_{i_0-1}] \times [a_{i_0+1}, b_{i_0+1}] \times \dots \times [a_N, b_N]$. Entonces

$$\int_R f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N = \int_R f(x_1, x_2, \dots, x_N) d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_N,$$

donde la N -upla $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ es una permutación arbitraria en el orden de aparición de las componentes de la N -upla (x_1, x_2, \dots, x_N) .

EJEMPLO 2.2.9 Calcula la integral múltiple

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x^2 + y^2)(ze^w) dx dy dz dw.$$

Solución. Claramente, la función f definida por $f(x, y, z, w) = (x^2 + y^2)(ze^w)$ es una función continua en \mathbb{R}^4 , y por lo tanto también lo es sobre el rectángulo $R = [0, 1] \times [0, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$, que es cerrado y acotado en \mathbb{R}^4 . Luego, f es integrable en R , y obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^2 \int_{-1}^1 (x^2 + y^2)(ze^w) dx dy dz dw &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^2 \left(\int_{-1}^1 (x^2 + y^2)(ze^w) dx \right) dy dz dw \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^2 \left(\frac{1}{3}x^3 + xy^2 \right) (ze^w) \Big|_{x=-1}^{x=1} dy dz dw \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\frac{2}{3} + 2y^2 \right) (ze^w) dy \right) dz dw \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{2}{3}y + \frac{2}{3}y^3 \right) (ze^w) \Big|_{y=0}^{y=2} dz dw \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\frac{4}{3} + \frac{16}{3} \right) (ze^w) dz \right) dw \\ &= \frac{10}{3} \int_0^1 (z^2 e^w) \Big|_{z=0}^{z=1} dw \\ &= \frac{10}{3} \int_0^1 e^w dw \\ &= \frac{10}{3}(e - 1). \quad \square \end{aligned}$$

El Teorema a continuación nos permitirá reducir nuestro trabajo para calcular el valor de una integral cuando la función a integrar puede reescribirse en variables separables en ciertas

subregiones rectangulares de la región rectangular original.

TEOREMA 2.2.3 (Integración sobre un producto de rectángulos) Sea R_1 un rectángulo en \mathbb{R}^{N_1} , sea R_2 un rectángulo en \mathbb{R}^{N_2} y sea $f : R_1 \times R_2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable sobre $R_1 \times R_2$. Si $E \subset \mathbb{R}^{N_1}$ es un conjunto de medida cero y si para todo $x \in R_1 \setminus E$ existe $\int_{R_2} f(x, y) dy$, entonces la función $F_1 : R_1 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\vec{x} \mapsto F_1(\vec{x}) = \int_{R_2} f(\vec{x}, \vec{y}) dy_1 dy_2 \dots dy_{N_2}$$

es integrable sobre R_1 . Más aún, se verifica que

$$\int_{R_1} F_1 = \int_{R_1} \left(\int_{R_2} f(\vec{x}, \vec{y}) dy_1 dy_2 \dots dy_{N_2} \right) dx_1 dx_2 \dots dx_{N_1} = \int_{R_1 \times R_2} f.$$

COROLARIO 2.2.4 Sean $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que $N_1 + N_2 = N$, sean R_1 y R_2 rectángulos en \mathbb{R}^{N_1} y \mathbb{R}^{N_2} respectivamente, y sean $g : R_1 \rightarrow \mathbb{R}$ y $h : R_2 \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones integrables sobre sus respectivos dominios. Entonces, la función $f : R_1 \times R_2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\vec{x} \mapsto f(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{x})h(\vec{y}) \quad \forall (\vec{x}, \vec{y}) \in R_1 \times R_2$$

es integrable sobre $R_1 \times R_2$ y además se cumple que

$$\int_{R_1 \times R_2} f = \left(\int_{R_1} g(\vec{x}) dx_1 dx_2 \dots dx_{N_1} \right) \left(\int_{R_2} h(\vec{y}) dy_1 dy_2 \dots dy_{N_2} \right).$$

EJEMPLO 2.2.10 Calcula la siguiente integral múltiple usando el Corolario 2.2.4:

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x^2 + y^2)(ze^w) dx dy dz dw.$$

Solución. Procedemos de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^2 \int_{-1}^1 (x^2 + y^2)(ze^w) dx dy dz dw &= \left(\int_0^2 \int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dx dy \right) \left(\int_0^1 z dz \right) \left(\int_0^1 e^w dw \right) \\ &= \left(\int_0^2 \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 \right) \Big|_{x=-1}^{x=1} dy \right) \left(\frac{z^2}{2} \Big|_{z=0}^{z=1} \right) \left(e^w \Big|_{w=0}^{w=1} \right) \\ &= \left(\int_0^2 \left(\frac{2}{3} + 2y^2 \right) dy \right) \left(\frac{1}{2} \right) (e - 1) \\ &= \left(\left(\frac{1}{3}y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^2 \right) (e - 1) \\ &= \frac{10}{3}(e - 1). \quad \square \end{aligned}$$

2.2.4. Evaluación de integrales múltiples de Riemann sobre dominios más generales

El siguiente resultado extiende al caso $N = 3$ la Proposición 2.2.1 que fue dada para el caso $N = 2$.

PROPOSICIÓN 2.2.2 Sean $u, v : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas sobre $[a_1, b_1]$ tales que

$$a_2 \leq u(x) \leq v(x) \leq b_2 \quad \forall x \in [a_1, b_1].$$

Sea $D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \leq x \leq b_1 \wedge u(x) \leq y \leq v(x)\}$ y sean $\phi, \psi : D' \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas sobre D' tales que

$$a_3 \leq \phi(x, y) \leq \psi(x, y) \leq b_3 \quad \forall (x, y) \in D'.$$

Sea $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a_1 \leq x \leq b_2 \wedge u(x) \leq y \leq v(x) \wedge \phi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$ y sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada, que además es continua sobre D salvo tal vez en un conjunto de medida cero. Entonces f es integrable sobre D y verifica que

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \int_{a_1}^{b_1} \int_{u(x)}^{v(x)} \int_{\phi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx.$$

OBSERVACIÓN 2.2.4 En integrales triples es usual usar la notación dV en vez de la notación $dz dy dx$ (o $dx dy dz$ o ...), en alusión a que estamos integrando sobre una región que posee volumen.

EJEMPLO 2.2.11 Sea D la región acotada por los cilindros parabólicos $z = -y^2$ y $z = x^2$, y los planos $x = 1$, $y = 0$ e $y = x$. Calcula

$$\iiint_D (x + 1) dx dy dz.$$

Solución.

(1º) Partimos buscando los límites de integración de una variable que dependa de las otras. De acuerdo a la información disponible, nos conviene partir identificando los límites de la variable z . Como $-y^2 \leq 0 \leq x^2$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$, si ponemos

$$\phi(x, y) = -y^2 \quad y \quad \psi(x, y) = x^2, \tag{2.1}$$

obtenemos que la variable z queda limitada de la siguiente forma

$$\phi(x, y) = -y^2 \leq z \leq x^2 = \psi(x, y).$$

(2º) Ahora buscamos los límites de integración de las restantes variables, en este caso x e y , los cuales deducimos a partir de la proyección de la región D sobre el plano xy (o equivalentemente, el plano $z = 0$). Notemos que las proyecciones de los planos $x = 1$, $y = 0$ e $y = x$

sobre el plano xy son, respectivamente, las rectas $x = 1$, $y = 0$ e $y = x$. Notemos también que las rectas $x = 1$ e $y = x$ se intersecan en el punto $(1, 1)$, las rectas $x = 1$ e $y = 0$ se intersecan en el punto $(1, 0)$, y las rectas $y = 0$ e $y = x$ se intersecan en el punto $(0, 0)$. Así que ahora podemos determinar los límites asociados a x e y sobre esta región.

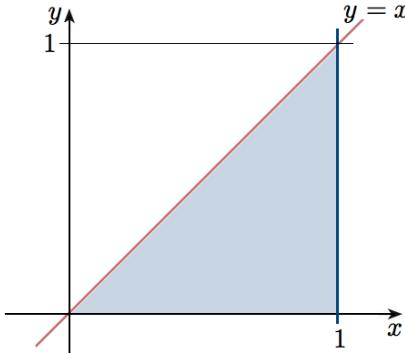


Figura 2.14. Gráfico de las rectas $x = 1$, $y = 0$ e $y = x$ en el plano xy . Se observa que $0 \leq y \leq x$ y $0 \leq x \leq 1$.

Considerando

$$u(x) = 0 \quad \text{y} \quad v(x) = x,$$

obtenemos que la variable y queda limitada de la siguiente forma

$$u(x) = 0 \leq y \leq x = v(x), \quad (2.2)$$

mientras que la variable x queda limitada de la siguiente forma

$$0 \leq x \leq 1. \quad (2.3)$$

- (3º) Desde (2.1), (2.2) y (2.3) podemos identificar la región D sobre la que vamos a integrar, como el conjunto de puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$\begin{cases} -y^2 \leq z \leq x^2 \\ 0 \leq y \leq x \\ 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

- (4º) Finalmente, obtenemos

$$\begin{aligned} \iiint_D (x + 1) dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^x \int_{-y^2}^{x^2} (x + 1) dz dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^x z(x + 1) \Big|_{z=-y^2}^{z=x^2} dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^x (x^3 + x^2 + y^2 x + y^2) dy dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 \left(x^3y + x^2y + \frac{y^3x}{3} + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=0}^{y=x} dx \\
 &= \int_0^1 \left(x^4 + x^3 + \frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{3} \right) dx \\
 &= \frac{4}{3} \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} \\
 &= \frac{3}{5}. \quad \square
 \end{aligned}$$

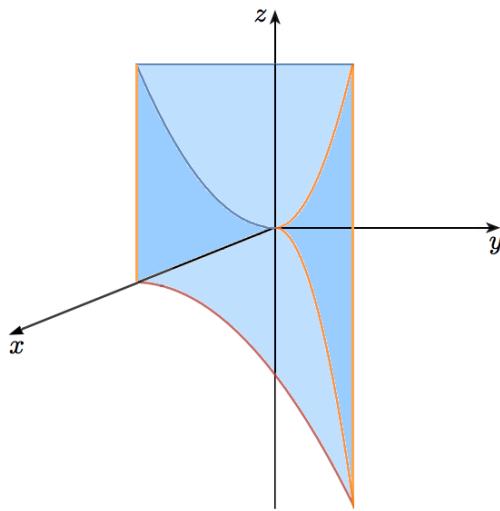


Figura 2.15. Gráfico de la región D acotada por los cilindros parabólicos $z = -y^2$ y $z = x^2$, y los planos $x = 1$, $y = 0$ e $y = x$.

EJEMPLO 2.2.12 Sea D la región acotada por los paraboloides circulares $z = 3 - x^2 - y^2$ y $z = x^2 + y^2 - 5$, y la región donde $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Calcula

$$\iiint_D y \, dx \, dy \, dz.$$

Solución.

(1º) Partimos buscando los límites de integración de una variable que dependa de las otras. De acuerdo a la información disponible, nos conviene partir identificando los límites de la variable z . Sin embargo, a diferencia del ejemplo anterior, no parece tan directo determinar los límites superior e inferior de z . Una forma de proceder en estos casos consiste en estudiar un corte transversal de la región D en \mathbb{R}^3 que contenga al eje z . Por ejemplo, podemos considerar el corte asociado al plano $y = 0$ (o equivalentemente, al plano xz).

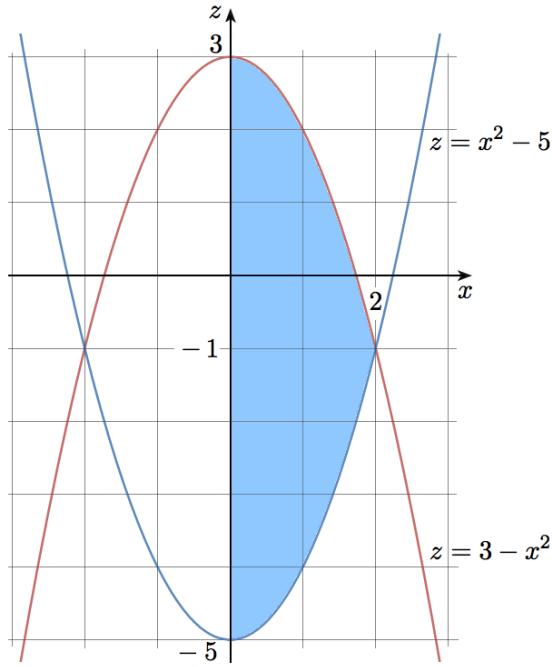


Figura 2.16. Gráfico del corte transversal de la región D cuando $y = 0$. Es decir, en el plano xz consideramos la región entre las gráficas de las funciones $z = 3 - x^2$ y $z = x^2 - 5$. Este gráfico nos permitirá establecer adecuadamente los límites de integración de la variable z .

El gráfico previo nos muestra qué función acota a z por abajo y qué función acota a z por arriba. Considerando

$$\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 5 \quad \text{y} \quad \psi(x, y) = 3 - x^2 - y^2,$$

obtenemos que la variable z queda limitada de la siguiente forma

$$\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 5 \leq z \leq 3 - x^2 - y^2 = \psi(x, y). \quad (2.4)$$

- (2º) Ahora buscamos los límites de integración de las restantes variables, en este caso x e y , los cuales deducimos a partir de la proyección de la región D sobre el plano xy (o equivalentemente, el plano $z = 0$). La proyección deseada corresponde a la *sombra directa* sobre el plano xy de aquel corte transversal de la región D , que sea paralelo al plano xy , y que posea mayor área. Observemos que este corte debe producirse justo donde se intersecan los paraboloides circulares

$$z = x^2 + y^2 - 5 \quad \text{y} \quad z = 3 - x^2 - y^2.$$

Como

$$x^2 + y^2 - 5 = 3 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$$

y

$$(x^2 + y^2) - 5 \leq 3 - (x^2 + y^2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4,$$

al proyectar sobre el plano xy tal corte transversal, y considerando solo la zona donde $x \geq 0$ e $y \geq 0$, obtenemos el cuarto del círculo

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

que está ubicado en el primer cuadrante del plano xy , pudiendo ahora determinar los límites asociados a x e y sobre esta región.

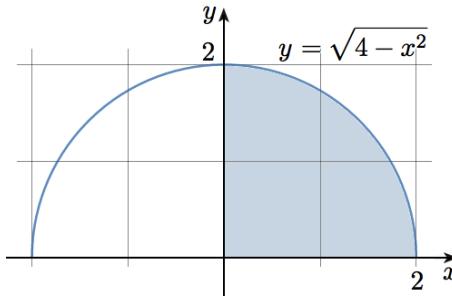


Figura 2.17. Gráfico de la proyección de la región D sobre el plano xy . Es decir, en el plano xy consideramos la región entre las gráficas de las funciones $y = 0$ y $y = \sqrt{4 - x^2}$, obteniéndose los límites para y , y finalmente para x , aquí $0 \leq x \leq 2$.

Considerando

$$u(x) = 0 \quad \text{y} \quad v(x) = \sqrt{4 - x^2},$$

obtenemos que la variable y queda limitada de la siguiente forma

$$u(x) = 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2} = v(x), \tag{2.5}$$

mientras que la variable x queda limitada de la siguiente forma

$$0 \leq x \leq 2. \tag{2.6}$$

(3º) Desde (2.4), (2.5) y (2.6) podemos identificar la región D sobre la que vamos a integrar, como el conjunto de puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 5 \leq z \leq 3 - x^2 - y^2 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2} \\ 0 \leq x \leq 2. \end{array} \right.$$

(4º) Finalmente, obtenemos

$$\iiint_D y \, dx \, dy \, dz = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2-5}^{3-x^2-y^2} y \, dz \, dy \, dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} yz \Big|_{z=x^2+y^2-5}^{z=3-x^2-y^2} dy dx \\
&= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (8y - 2x^2y - 2y^3) dy dx \\
&= \int_0^2 \left(4y^2 - x^2y^2 - \frac{y^4}{2} \right) \Big|_{y=0}^{y=\sqrt{4-x^2}} dx \\
&= \int_0^2 \left(8 - 4x^2 + \frac{x^4}{2} \right) dx \\
&= \left(8x - 4\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} \right) \Big|_{x=0}^{x=2} \\
&= \frac{128}{15}. \quad \square
\end{aligned}$$

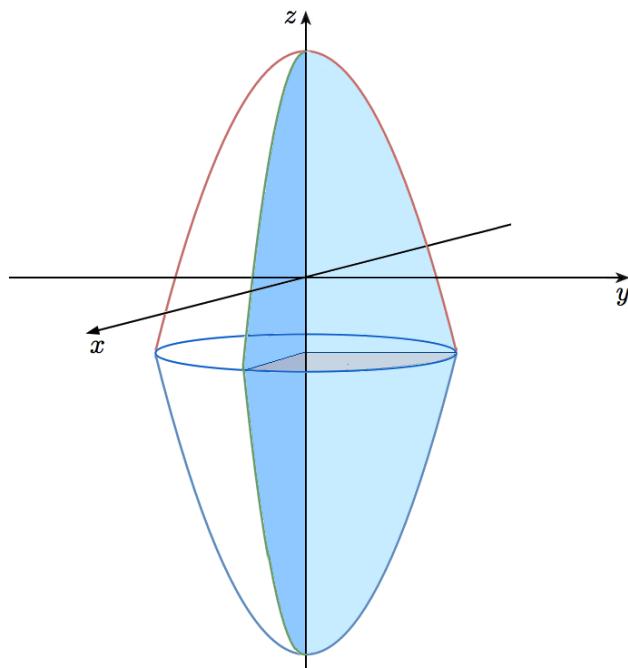


Figura 2.18. Gráfico de la región D acotada por los paraboloides circulares $z = 3 - x^2 - y^2$ y $z = x^2 + y^2 - 5$, y las regiones donde $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

EJEMPLO 2.2.13 Sea D la región acotada por el cono circular recto $z^2 = x^2 + y^2$, el cilindro circular recto $x^2 + z^2 = 1$, y la región donde $z \geq 0$. Calcula

$$\iiint_D xy \, dx \, dy \, dz.$$

Solución.

(1º) Partimos buscando los límites de integración de una variable que dependa de las otras. De acuerdo a la información disponible, podemos partir identificando los límites de la variable z . Nuevamente, como en el ejemplo anterior, no parece tan directo determinar los límites superior e inferior de z , así que estudiamos un corte transversal de la región D en \mathbb{R}^3 que contenga al eje z . Por ejemplo, podemos considerar el corte asociado al plano $y = 0$ (o equivalentemente, al plano xz).

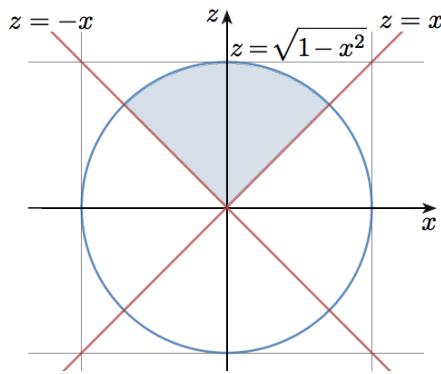


Figura 2.19. Gráfico del corte transversal de la región D cuando $y = 0$. Es decir, en el plano xz consideramos la región entre las gráficas de las funciones $z = \sqrt{x^2} = |x|$ y $z = \sqrt{1 - x^2}$. Este gráfico nos permitirá establecer adecuadamente los límites de integración de la variable z .

El gráfico previo nos muestra qué función acota a z por abajo y qué función acota a z por arriba. Considerando

$$\phi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \psi(x, y) = \sqrt{1 - x^2},$$

obtenemos que la variable z queda limitada de la siguiente forma

$$\phi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2} = \psi(x, y). \quad (2.7)$$

(2º) Ahora buscamos los límites de integración de las restantes variables, en este caso x e y , los cuales deducimos a partir de la proyección de la región D sobre el plano xy (o equivalentemente, el plano $z = 0$). La proyección deseada corresponde a la *sombra directa* sobre el plano xy de aquel corte transversal de la región D , que sea paralelo al plano xy , y que posea mayor área. Observemos que este corte debe producirse justo donde se intersecan el cono

$$z^2 = x^2 + y^2$$

y el cilindro circular recto

$$x^2 + z^2 = 1.$$

Como

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow 2x^2 + y^2 = 1$$

y

$$x^2 + y^2 \leq 1 - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 + y^2 \leq 1,$$

al proyectar sobre el plano xy tal corte transversal, obtenemos la región elíptica

$$2x^2 + y^2 \leq 1$$

del plano xy , pudiendo ahora determinar los límites de integración asociados a x e y sobre esta región.

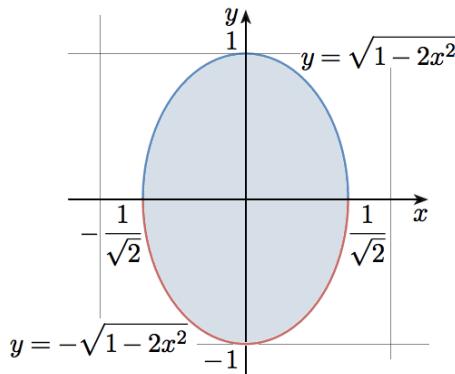


Figura 2.20. Gráfico de la proyección de la región D sobre el plano xy . Es decir, en el plano xy estamos considerando la región entre las gráficas de las funciones $y = -\sqrt{1 - 2x^2}$ y $y = \sqrt{1 - 2x^2}$, de donde se deducen los límites para y , y finalmente para x , aquí $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Considerando

$$u(x) = -\sqrt{1 - 2x^2} \quad \text{y} \quad v(x) = \sqrt{1 - 2x^2},$$

obtenemos que la variable y queda limitada de la siguiente forma

$$u(x) = -\sqrt{1 - 2x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - 2x^2} = v(x), \quad (2.8)$$

mientras que la variable x queda limitada de la siguiente forma

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (2.9)$$

- (3º) Desde (2.7), (2.8) y (2.9) podemos identificar la región D sobre la que vamos a integrar, como el conjunto de puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2} \\ -\sqrt{1 - 2x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - 2x^2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

(4º) Finalmente, obtenemos

$$\begin{aligned}
 \iiint_D xy \, dx \, dy \, dz &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{-\sqrt{1-2x^2}}^{\sqrt{1-2x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2}} xy \, dz \, dy \, dx \\
 &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{-\sqrt{1-2x^2}}^{\sqrt{1-2x^2}} xyz \Big|_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=\sqrt{1-x^2}} \, dy \, dx \\
 &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{-\sqrt{1-2x^2}}^{\sqrt{1-2x^2}} xy \left(\sqrt{1-x^2} - \sqrt{x^2+y^2} \right) \, dy \, dx \\
 &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x \left(\frac{y^2}{2} \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_{y=-\sqrt{1-2x^2}}^{y=\sqrt{1-2x^2}} \, dx \\
 &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 0 \, dx \\
 &= 0. \quad \square
 \end{aligned}$$

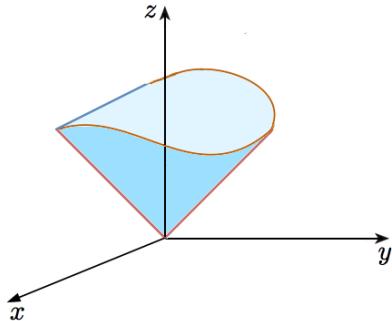


Figura 2.21. Gráfico de la región D acotada por el cono circular recto $z^2 = x^2 + y^2$, el cilindro circular recto $x^2 + z^2 = 1$, y la región donde $z \geq 0$.

EJEMPLO 2.2.14 Sea D la región del primer octante acotada por el plano $3x + y + z = 2$. Calcula

$$\iiint_D x \, dx \, dy \, dz.$$

Solución.

- (1º) Partimos buscando los límites de integración de una variable que dependa de las otras. De acuerdo a la información disponible, podemos partir identificando los límites de la variable z . Lo haremos estudiando un corte transversal de la región D en \mathbb{R}^3 que contenga al eje z . Por ejemplo, podemos considerar el corte asociado al plano $y = 0$ (o equivalentemente, al plano xz).

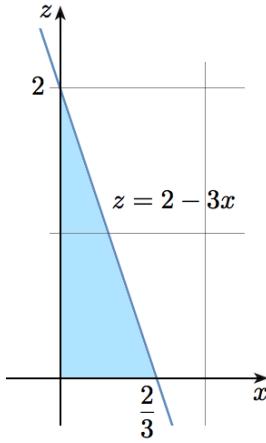


Figura 2.22. Gráfico del corte transversal de la región D cuando $y = 0$. Es decir, en el plano xz consideramos la región del primer cuadrante acotada por la recta $z = 2 - 3x$. Este gráfico nos permitirá establecer adecuadamente los límites de integración de la variable z .

El gráfico previo nos muestra qué función acota a z por abajo y qué función acota a z por arriba. Es claro que al considerar

$$\phi(x, y) = 0 \quad \text{y} \quad \psi(x, y) = 2 - (3x + y),$$

obtenemos que la variable z queda limitada de la siguiente forma

$$\phi(x, y) = 0 \leq z \leq 2 - (3x + y) = \psi(x, y). \quad (2.10)$$

(2º) Ahora buscamos los límites de integración de las restantes variables, en este caso x e y , los cuales deducimos a partir de la proyección de la región D sobre el plano xy (o equivalentemente, el plano $z = 0$). La proyección deseada corresponde a la *sombra directa* sobre el plano xy de aquel corte transversal de la región D , que sea paralelo al plano xy , y que posea mayor área. Observemos que este corte debe producirse justo cuando $z = 0$, obteniéndose una región triangular ubicada en el primer cuadrante del plano xy acotada por el eje x , el eje y y la recta

$$3x + y = 2,$$

que es el resultado de intersecar los planos

$$z = 0 \quad \text{y} \quad z = 2 - (3x + y).$$

Ahora podemos determinar los límites asociados a x e y sobre esta región.

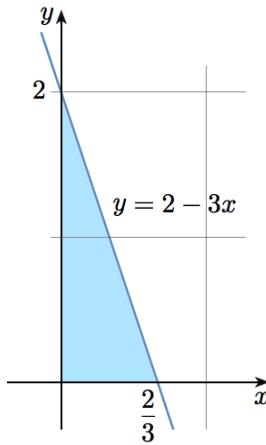


Figura 2.23. Gráfico de la proyección de la región D sobre el plano xy . Es decir, en el plano xy consideramos la región entre las gráficas de las funciones $y = 0$ y $y = 2 - 3x$, obteniéndose los límites para y , y finalmente para x , aquí $0 \leq x \leq \frac{2}{3}$.

Considerando

$$u(x) = 0 \quad \text{y} \quad v(x) = 2 - 3x,$$

obtenemos que la variable y queda limitada de la siguiente forma

$$u(x) = 0 \leq y \leq 2 - 3x = v(x),$$

mientras que la variable x queda limitada de la siguiente forma

$$0 \leq x \leq \frac{2}{3}.$$

(3º) Desde (2.7), (2.8) y (2.9) podemos identificar la región D sobre la que vamos a integrar, como el conjunto de puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$\begin{cases} 0 \leq z \leq 2 - (3x + y) \\ 0 \leq y \leq 2 - 3x \\ 0 \leq x \leq \frac{2}{3}. \end{cases}$$

(4º) Luego,

$$\begin{aligned} \iiint_D x \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{\frac{2}{3}} \int_0^{2-3x} \int_0^{2-3x-y} x \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^{\frac{2}{3}} \int_0^{2-3x} xz \Big|_{z=0}^{z=2-3x-y} \, dy \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{2}{3}} \int_0^{2-3x} x(2-3x-y) dy dx \\
&= \int_0^{\frac{2}{3}} \left(2xy - 3x^2y - x\frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{y=2-3x} dx \\
&= \int_0^{\frac{2}{3}} \left(2x - 6x^2 + \frac{9}{2}x^3 \right) dx \\
&= x^2 - 2x^3 + \frac{9}{8}x^4 \Big|_{x=0}^{x=\frac{2}{3}} \\
&= \frac{2}{27}. \quad \square
\end{aligned}$$

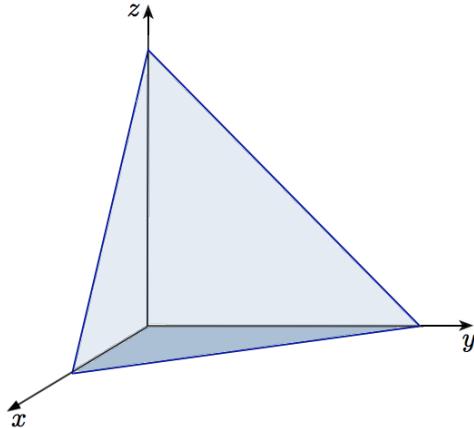


Figura 2.24. Gráfico de la región D ubicada en primer octante y acotada por el plano $3x + y + z = 2$.

OBSERVACIÓN 2.2.5 Sean $u, v \in C([a_1, b_1])$ tales que

$$a_2 \leq u(x) \leq v(x) \leq b_2 \quad \forall x \in [a_1, b_1],$$

sea $D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \leq x \leq b_1 \wedge u(x) \leq y \leq v(x)\}$, sean $\phi, \psi \in C(\overline{D'})$ tales que

$$a_3 \leq \phi(x, y) \leq \psi(x, y) \leq b_3 \quad \forall (x, y) \in D',$$

y sea $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a_1 \leq x \leq b_2 \wedge u(x) \leq y \leq v(x) \wedge \phi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$. Entonces, el volumen de D viene dado por

$$V(D) = \int_a^b \int_{u(x)}^{v(x)} \int_{\phi(x,y)}^{\psi(x,y)} 1 dz dy dx.$$

EJERCICIOS 2.2.2

1. Sea D la región acotada por el plano xy , el cono $9x^2 + z^2 = y^2$ y el plano $y = 9$, con $z \geq 0$. Calcula la integral

$$\iiint_D z \, dx \, dy \, dz.$$

2. Calcula la integral triple

$$\iiint_D z \, dx \, dy \, dz,$$

donde

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}.$$

3. Expresa el volumen del sólido acotado por el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ y el plano $z = 1 - y$ como una integral triple, y calcula su volumen.
4. Sea D la región acotada por el plano $z = x$, el plano $x = 1$, el plano xz y la superficie de ecuación $y = xz$. Calcula la integral

$$\iiint_D xy^3 z^2 \, dV.$$

5. Sea f una función continua y acotada en \mathbb{R}^3 . Para cada una de las siguientes integrales I , encuentra todas las posibilidades para representar I mediante cambios en el orden de integración.

a) $I = \int_0^1 \int_0^x \int_0^y f(x, y, z) \, dz \, dy \, dz,$

b) $I = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx.$

Para ver las Soluciones de los Ejercicios 2.2.2 presiona aquí **A**

2.3. Cambio de variable en integrales múltiples

2.3.1. Difeomorfismos

Aquí consideramos aplicaciones de la forma $\vec{T} : D^* \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ cuya imagen es una región D contenida en \mathbb{R}^N . Es decir, $\vec{T}(D^*) = D$. Sobre esta clase de aplicaciones, algunas propiedades adicionales serán consideradas posteriormente.

EJEMPLO 2.3.1 Sea $D^* \subset \mathbb{R}^2$ el rectángulo definido por

$$D^* = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq 1 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

y sea $\vec{T} : D^* \rightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \vec{T} \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Encuentra $D = \vec{T}(D^*)$.

Solución. En la búsqueda de la región D , estudiamos los bordes del rectángulo D^* , interpretando cómo se transforma cada uno de ellos mediante \vec{T} .

- Lado I:

$$\theta = 0 \wedge 0 \leq r \leq 1 \text{ (} r \text{ creciendo)} \Rightarrow \vec{T} \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el Lado I se transforma en el segmento de recta ubicado en el eje x (en la recta $y = 0$) con $0 \leq x \leq 1$, x creciendo.

- Lado II:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ (\} \theta \text{ creciendo)} \wedge r = 1 \Rightarrow \vec{T} \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el Lado II se transforma en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ (recorrida en sentido antihorario).

- Lado III:

$$\theta = 2\pi \wedge 0 \leq r \leq 1 \text{ (\} r \text{ decreciendo)} \Rightarrow \vec{T} \begin{pmatrix} r \\ 2\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el Lado III se transforma en el segmento de recta ubicado en el eje x (en la recta $y = 0$) con $0 \leq x \leq 1$, x decreciendo.

- Lado IV:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ (\} \theta \text{ decreciendo)} \wedge r = 0 \Rightarrow \vec{T} \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el Lado IV se transforma en el origen, es decir en el punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

En conclusión, se observa que

$$D = \vec{T}(D^*) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}. \quad \square$$

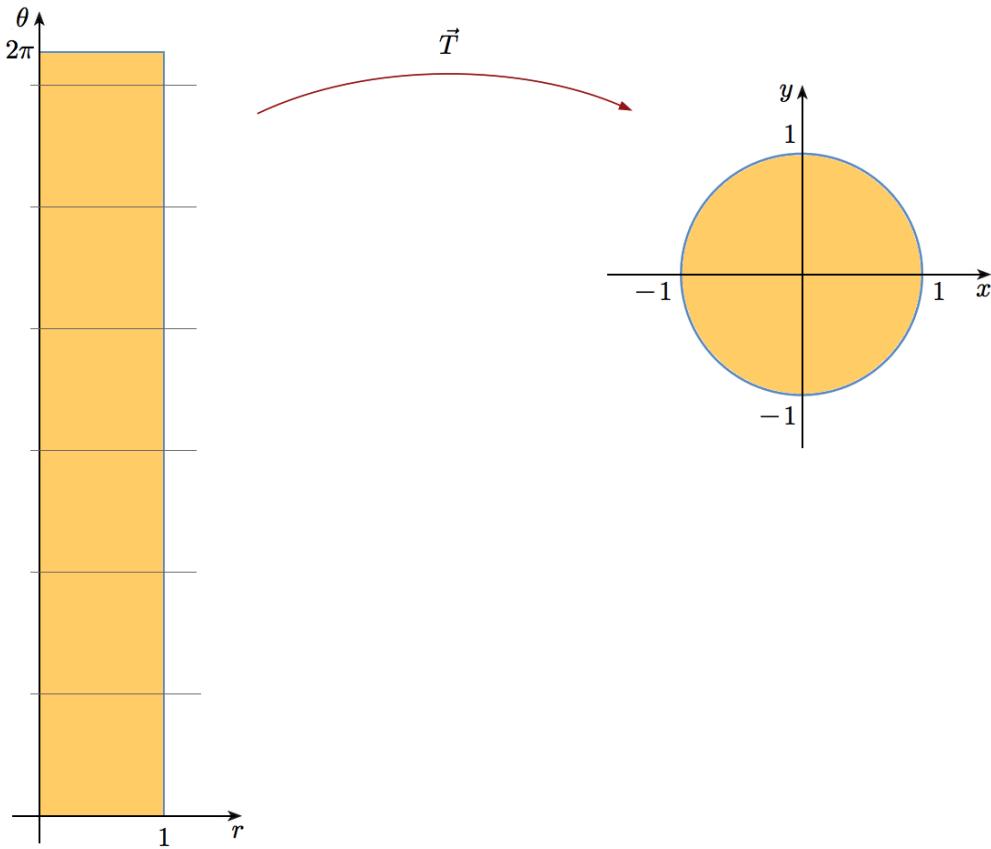


Figura 2.25. La aplicación $\vec{T}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sen \theta) = (x, y)$ transforma el rectángulo $D^* = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq 1 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ en el círculo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

OBSERVACIÓN 2.3.1 *Observemos que la transformación \vec{T} del ejemplo previo no conserva el área. Es decir, $A(D) \neq A(D^*)$.*

DEFINICIÓN 2.3.1 Una función $\vec{T} : D^* \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ es inyectiva en G si

$$(\forall \vec{u}, \vec{v} \in D^*) (\vec{u} \neq \vec{v} \Rightarrow \vec{T}(\vec{u}) \neq \vec{T}(\vec{v}))$$

o, equivalentemente

$$(\forall \vec{u}, \vec{v} \in D^*) (\vec{T}(\vec{u}) = \vec{T}(\vec{v}) \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}),$$

donde $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_N)$.

EJEMPLO 2.3.2 Muestra que la aplicación $\vec{T} : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \vec{T} \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sen \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

no es inyectiva, pero sí lo es su restricción a $[0, 1] \times [0, 2\pi]$.

Solución.

- Ya vimos que

$$\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 2\pi \end{pmatrix} \quad \forall r \in [0, 1].$$

Por lo tanto, \vec{T} no es inyectiva.

- Ahora, veamos qué sucede en $]0, 1] \times]0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned} \vec{T} \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \vec{T} \begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{pmatrix} r_1 \cos \theta_1 \\ r_1 \sin \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_2 \cos \theta_2 \\ r_2 \sin \theta_2 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} r_1 \cos \theta_1 = r_2 \cos \theta_2 \\ r_1 \sin \theta_1 = r_2 \sin \theta_2 \end{cases} \\ &\Rightarrow r_1^2(\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1) = r_2^2(\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2) \\ &\Rightarrow r_1^2 = r_2^2 \\ &\Rightarrow r_1 = r_2 \quad \text{pues } r \in (0, 1] \\ &\Rightarrow \theta_1 = \theta_2 \quad \text{pues } \vec{F}(\theta) := (\sin \theta, \cos \theta) \text{ es inyectiva en } (0, 2\pi] \\ &\qquad \text{(representa un único punto de la circunferencia unitaria).} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, \vec{T} es inyectiva. \square

DEFINICIÓN 2.3.2 Sea U un conjunto abierto en \mathbb{R}^N y sea $\vec{T} : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ una aplicación de clase C^1 definida por $\vec{T}(\vec{u}) = \vec{x}$.

- i) Llamamos *matriz jacobiana* de la aplicación \vec{T} , a la matriz $D\vec{T}(\vec{u})$ dada por

$$D\vec{T}(\vec{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_N} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial u_N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_N}{\partial u_1} & \frac{\partial x_N}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_N}{\partial u_N} \end{bmatrix}.$$

- ii) Llamamos *jacobiano* de la aplicación \vec{T} en \vec{u} , al valor $J_{\vec{T}}(\vec{u})$, que corresponde al determinante de la matriz $D\vec{T}(\vec{u})$, esto es:

$$J_{\vec{T}}(\vec{u}) = \det(D\vec{T}(\vec{u})).$$

NOTACIÓN 2.3.1 Las notaciones más usadas para referirse al jacobiano de una aplicación \vec{T} tal que $\vec{T}(\vec{u}) = \vec{x}$, cuando éste existe, son

$$J_{\vec{T}}(\vec{u}) = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_N)} = J \left(\frac{x_1, x_2, \dots, x_N}{u_1, u_2, \dots, u_N} \right).$$

Por otro lado, cuando no resulta confuso, es usual escribir solo $J_{\vec{T}}$.

DEFINICIÓN 2.3.3 Sean U y V dos conjuntos abiertos en \mathbb{R}^N . Una aplicación $\vec{T} : U \rightarrow V$ es un *difeomorfismo de clase C^1* si \vec{T} es biyectiva y tanto \vec{T} como \vec{T}^{-1} son aplicaciones de clase C^1 .

TEOREMA 2.3.1 Sea U un conjunto abierto en \mathbb{R}^N y sea $\vec{T} : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ una aplicación de clase C^1 . Entonces, $\vec{T} : U \rightarrow \vec{T}(U)$ es un difeomorfismo de clase C^1 si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

- i) \vec{T} es inyectiva
- ii) $J_{\vec{T}}(\vec{u}) \neq 0 \quad \forall \vec{u} \in U$.

EJEMPLO 2.3.3 Sea $\vec{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \vec{T} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - v \\ u + v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Prueba que \vec{T} es un difeomorfismo de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 .

Solución.

- Notemos que $p(u, v) = u - v$ y $q(u, v) = u + v$ son polinomios de primer grado en \mathbb{R}^2 , luego $\vec{T} \in C^1(\mathbb{R}^2)$.
- Por otro lado,

$$\begin{aligned} \vec{T} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \vec{T} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_1 + v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 - v_2 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} u_1 - v_1 = u_2 - v_2 \\ u_1 + v_1 = u_2 + v_2 \end{cases} \\ &\Rightarrow 2u_1 = 2u_2 \wedge 2v_1 = 2v_2 \\ &\Rightarrow u_1 = u_2 \wedge v_1 = v_2 \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, \vec{T} es inyectiva.

- Notemos también que dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, el sistema

$$\begin{cases} u - v = x \\ u + v = y \end{cases}$$

siempre tiene solución $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, pues el determinante asociado al sistema es distinto de 0, lo cual indica que \vec{T} es sobreyectiva. Por lo tanto, $\vec{T}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.

- Finalmente, obtenemos

$$J_{\vec{T}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad \forall \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

En consecuencia, desde el Teorema 2.3.1 concluimos que \vec{T} es un difeomorfismo de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 . \square

EJEMPLO 2.3.4 Sea $\vec{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por

$$\vec{T} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^u \cos v \\ e^u \sin v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Prueba que \vec{T} no es un difeomorfismo de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 .

Solución. Notemos que

$$\vec{T} \begin{pmatrix} u \\ v + 2k\pi \end{pmatrix} = \vec{T} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto, \vec{T} no es inyectiva.

En consecuencia, desde el Teorema 2.3.1 concluimos que \vec{T} no es un difeomorfismo de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 . \square

2.3.2. El teorema del cambio de variable

Comenzamos esta subsección recordando una versión del Teorema del cambio de variable para integrales de funciones de una variable: *Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable sobre $[a, b]$, y sea $g : [c, d] \rightarrow [a, b]$ una función estrictamente creciente, que es continua en $[c, d]$ y derivable en (c, d) , con derivada continua (en particular se tiene que g es biyectiva y que $g' > 0$). Entonces*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(g(u))g'(u) du,$$

donde $g(c) = a$ y $g(d) = b$.

OBSERVACIÓN 2.3.2 El diagrama a continuación representa la composición $f \circ g$, con las hipótesis señaladas previamente:

$$\begin{array}{ccc} [a, b] & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ g \uparrow & \nearrow f \circ g & \\ [c, d] & & \end{array}$$

En particular, notemos que g transforma $[c, d]$ en $[a, b]$.

Apuntando a la obtención de una fórmula de cambio de variable para integrales múltiples, enumeramos algunos resultados técnico recopilados en el siguiente lemma.

LEMA 2.3.1 Sean U y V dos conjuntos abiertos en \mathbb{R}^N y sea $\vec{T} : U \rightarrow V$ un difeomorfismo.

- i) $U' \subset U$ es abierto si y solo si el conjunto $\vec{T}(U') \subset V$ es abierto.
- ii) $K \subset U$ es compacto si y solo si el conjunto $\vec{T}(K) \subset V$ es compacto.
- iii) Sea K un conjunto compacto contenido en U . Entonces, K es medible si y solo si el conjunto $\vec{T}(K)$ es medible.
- iv) $E \subset U$ tiene medida cero si y solo si el conjunto $\vec{T}(E) \subset V$ tiene medida cero.

OBSERVACIÓN 2.3.3 Sean U y V dos conjuntos abiertos de \mathbb{R}^N y sea $\vec{T} : U \rightarrow V$ un difeomorfismo. El Lema 2.3.1 anterior indica que si $K \subset U$ es un conjunto compacto medible en \mathbb{R}^N , entonces se verifica que

$$\text{Fr}(\vec{T}(K)) = \vec{T}(\text{Fr}(K)).$$

Este hecho es de mucha utilidad. Por ejemplo, si una región abierta y acotada en \mathbb{R}^2 , está limitada por ciertas curvas suaves $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, entonces las imágenes $\vec{T}(\gamma_1), \vec{T}(\gamma_2), \dots, \vec{T}(\gamma_n)$ conformarán la frontera de la región $\vec{T}(K)$. Aquí y en el resto de este apuntes, $\text{Fr}(A)$ denota la frontera topológica de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$.

TEOREMA 2.3.2 (Teorema del cambio de variable) Sean U y V dos conjuntos abiertos de \mathbb{R}^N , sea $\vec{T} : U \rightarrow V$ un difeomorfismo de clase C^1 , sea D un conjunto abierto contenido en V o un conjunto compacto y medible Jordan contenido en V , y pongamos $D^* = \vec{T}^{-1}(D)$ (o equivalentemente $\vec{T}(D^*) = D$). Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable sobre D , entonces existe

$$\int_{D^*} f(\vec{T}(\vec{u})) |J_{\vec{T}}(\vec{u})| du_1 du_2 \dots du_N$$

y se verifica que

$$\int_{\vec{T}(D^*)} f(\vec{x}) dx_1 dx_2 \dots dx_N = \int_{D^*} f(\vec{T}(\vec{u})) |J_{\vec{T}}(\vec{u})| du_1 du_2 \dots du_N,$$

donde $\vec{T}(\vec{u}) = \vec{x}$, con $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ y $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$.

EJEMPLO 2.3.5 Usa el cambio de variable

$$x = u - \frac{(u+v)^2}{4} \quad \wedge \quad y = \frac{u+v}{2},$$

para calcular $\iint_D x \, dx \, dy$ donde D es la región limitada por las curvas

$$i) \quad x = 2 - y^2 - 2y$$

$$ii) \quad x = -y^2$$

$$iii) \quad x = 2y - y^2.$$

Adicionalmente, grafica la transformación de la región D originada por el cambio de variable.

Solución.

(1°) Un primer asunto de interés es determinar el difeomorfismo \vec{T} que usaremos aquí con la finalidad de establecer el cambio de variable en cuestión. De acuerdo a la información que tenemos, debemos considerar la aplicación $\vec{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \vec{T} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - \frac{(u+v)^2}{4} \\ \frac{u+v}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- Claramente \vec{T} es de clase C^1 . En efecto, cada componente de la imagen es un polinomio, los cuales son funciones de clase C^1 .
- Claramente \vec{T} es inyectiva. En efecto,

$$\begin{aligned} \vec{T} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \vec{T} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{pmatrix} u_1 - \frac{(u_1+v_1)^2}{4} \\ \frac{u_1+v_1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 - \frac{(u_2+v_2)^2}{4} \\ \frac{u_2+v_2}{2} \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- Calculemos ahora el jacobiano de la aplicación \vec{T} en $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Tenemos

$$J_{\vec{T}}(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - \frac{u+v}{2} & -\frac{u+v}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0 \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

- Veamos ahora si \vec{T} es sobreyectiva. Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ dado. Si ponemos

$$u = x + y^2 \quad y \quad v = -x - y^2 + 2y,$$

obtenemos

$$x = u - \frac{(u+v)^2}{4} \quad \text{e} \quad y = \frac{u+v}{2}.$$

Por lo tanto, se verifica que

$$\left(\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right) \left(\exists \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \vec{T} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right).$$

De acuerdo a los puntos anteriores, tenemos que \vec{T} es un difeomorfismo de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 .

- (2°) Ahora vamos a determinar con precisión la región D^* en términos de las variables u y v con la finalidad de aplicar el Teorema 2.3.2 del cambio de variable de forma apropiada. De paso, aprovechamos esta instancia para trazar la gráfica solicitada.

- Con el fin de buscar puntos de referencia para el trazado de la región D , comenzamos intersecando las ecuaciones originales.

Tenemos,

$$\bullet \quad \begin{cases} i) \ x = 2 - y^2 - 2y \\ ii) \ x = -y^2 \end{cases} \Rightarrow 2 - 2y = 0 \Rightarrow x = -1 \wedge y = 1.$$

Por lo tanto, $(-1, 1)$ satisface *i*) y *ii*).

$$\bullet \quad \begin{cases} i) \ x = 2 - y^2 - 2y \\ iii) \ x = 2y - y^2 \end{cases} \Rightarrow 2 - 4y = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4} \wedge y = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, $(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$ satisface *i*) y *iii*).

$$\bullet \quad \begin{cases} ii) \ x = -y^2 \\ iii) \ x = 2y - y^2 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \wedge y = 0.$$

Por lo tanto, $(0, 0)$ satisface *ii*) y *iii*).

- Ahora transformamos las ecuaciones originales, que están escritas en términos de las variables x e y , a ecuaciones escritas en términos de las variables u y v , con la finalidad de determinar la región D^* .

Tenemos,

$$\begin{aligned} \bullet \quad i) & \Rightarrow u - \frac{(u+v)^2}{4} = 2 - \frac{(u+v)^2}{4} - \frac{2(u+v)}{2} \Rightarrow u = 2 - u - v \Rightarrow 2u + v = 2. \\ \bullet \quad ii) & \Rightarrow u - \frac{(u+v)^2}{4} = -\frac{(u+v)^2}{4} \Rightarrow u = 0 \quad \forall v. \\ \bullet \quad iii) & \Rightarrow u - \frac{(u+v)^2}{4} = 2 \frac{(u+v)}{2} - \frac{(u+v)^2}{4} \Rightarrow u = u + v \Rightarrow v = 0 \quad \forall u. \end{aligned}$$

La gráfica a continuación representa a la aplicación \vec{T} de D^* en D .

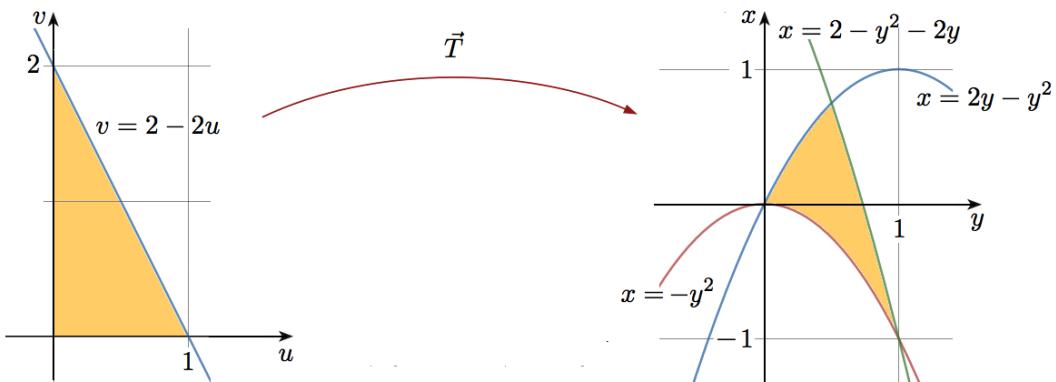


Figura 2.26. Gráfica de la aplicación $\vec{T}(u, v) = \left(u - \frac{(u+v)^2}{4}, \frac{u+v}{2}\right) = (x, y)$ sobre la región $D^* = \vec{T}^{-1}(D)$, donde D es la región limitada por las curvas $x = 2 - y^2 - 2y$, $x = -y^2$ y $x = 2y - y^2$. De esta forma, la región D^* queda limitada de la siguiente forma: $0 \leq v \leq 2 - 2u$ y $0 \leq u \leq 1$.

(3º) Ahora estamos en condiciones de evaluar la integral. Ponemos $D^* = \vec{T}^{-1}(D)$ y obtenemos

$$\begin{aligned} \iint_D x \, dx \, dy &= \iint_{D^*} \left(u - \frac{(u+v)^2}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} \, du \, dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2-2u} \left(u - \frac{(u+v)^2}{4}\right) \, dv \, du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(uv - \frac{(u+v)^3}{12}\right) \Big|_{v=0}^{v=2-2u} \, du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(2u - 2u^2 - \frac{(2-u)^3}{12} + \frac{u^3}{12}\right) \, du \\ &= \frac{1}{2} \left(u^2 - \frac{2}{3}u^3 + \frac{(2-u)^4}{48} + \frac{u^4}{48}\right) \Big|_{u=0}^{u=1} \\ &= \frac{1}{48}. \quad \square \end{aligned}$$

EJEMPLO 2.3.6 Sea $D^* = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 1 \wedge 0 \leq v \leq 1\}$ y sea $\vec{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \vec{T} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+v \\ v-u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- a) Prueba que \vec{T} es un difeomorfismo de clase C^1 de $\text{int}(D^*)$ en $\vec{T}(\text{int}(D))$.
- b) Mediante un análisis adecuado, realiza un bosquejo de la aplicación \vec{T} de D^* en $D = \vec{T}(D^*)$.
- c) ¿Es $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \frac{1}{y-x-1}$ integrable sobre D ? Justifica tu respuesta.
- d) Calcula $\iint_D \frac{1}{y-x-1} \, dx \, dy$.

Solución.

a) ■ Tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{T} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \vec{T} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ v_1 - u_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 + v_2 \\ v_2 - u_2^2 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} u_1 - u_2 = v_2 - v_1 \\ u_2^2 - u_1^2 = v_2 - v_1 \end{cases} \\ &\Rightarrow u_1 - u_2 = u_2^2 - u_1^2 \\ &\Rightarrow u_1 = u_2 \\ &\Rightarrow v_1 = v_2 \quad (\text{pues } u_1 - u_2 = v_2 - v_1). \end{aligned}$$

Por lo tanto, \vec{T} es inyectiva en $\text{int}(D^*)$.

- Claramente \vec{T} es de clase C^1 sobre $\text{int}(D^*)$, pues los polinomios son de clase C^1 .
- Calculemos ahora el jacobiano de la aplicación \vec{T} en $(u, v) \in \text{int}(D^*)$. Tenemos,

$$J_{\vec{T}}(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2u & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2u \neq 0 \quad \forall (u, v) \in \text{int}(D^*).$$

Desde el Teorema 2.3.3 y los puntos anteriores, concluimos que \vec{T} es un difeomorfismo de clase C^1 de $\text{int}(D^*)$ en $\vec{T}(\text{int}(D^*))$.

b) Ahora transformaremos, mediante \vec{T} , cada vértice y lado del cuadrado D^* en el plano uv en su correspondiente puntos y lados ubicados en el plano xy .

- Partimos estudiando los vértices de D^* y su imagen asociada por \vec{T} . Tenemos:

$$(u, v) = (0, 0) \text{ que se corresponde con } (x, y) = (u + v, v - u^2)|_{(u,v)=(0,0)} = (0, 0)$$

$$(u, v) = (1, 0) \text{ que se corresponde con } (x, y) = (u + v, v - u^2)|_{(u,v)=(1,0)} = (1, -1)$$

$$(u, v) = (1, 1) \text{ que se corresponde con } (x, y) = (u + v, v - u^2)|_{(u,v)=(1,1)} = (2, 0)$$

$$(u, v) = (0, 1) \text{ que se corresponde con } (x, y) = (u + v, v - u^2)|_{(u,v)=(0,1)} = (1, 1).$$

- El lado del cuadrado D^* que une el punto $(u, v) = (0, 0)$ con el punto $(u, v) = (1, 0)$, está contenido en la recta $v = 0$. Luego,

$$\begin{aligned} (x, y) = (u + v, v - u^2)|_{v=0} &= (u, -u^2) \Rightarrow x^2 = u^2 = -y \\ &\Rightarrow y = -x^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la curva que une los puntos $(0, 0)$ y $(1, 0)$ en el plano uv , se transforma mediante \vec{T} en una curva del plano xy contenida en la parábola de ecuación $y = -x^2$.

- El lado del cuadrado D^* que une el punto $(u, v) = (1, 0)$ con el punto $(u, v) = (1, 1)$, está contenido en la recta $u = 1$. Luego,

$$(x, y) = (u + v, v - u^2)|_{u=1} = (1 + v, v - 1) \Rightarrow x - 1 = v \wedge y + 1 = v \\ \Rightarrow y - x + 2 = 0.$$

Por lo tanto, la curva que une los puntos $(1, 0)$ y $(1, 1)$ en el plano uv , se transforma mediante \vec{T} en una curva del plano xy contenida en la recta de ecuación $y - x + 2 = 0$.

- El lado del cuadrado D^* que une el punto $(u, v) = (1, 1)$ con el punto $(u, v) = (0, 1)$, está contenido en la recta $v = 1$. Luego,

$$(x, y) = (u + v, v - u^2)|_{v=1} = (u + 1, 1 - u^2) \Rightarrow x - 1 = u \wedge 1 - y = u^2 \\ \Rightarrow y = 1 - (x - 1)^2.$$

Por lo tanto, la curva que une los puntos $(1, 1)$ y $(0, 1)$ en el plano uv , se transforma mediante \vec{T} en una curva del plano xy contenida en la parábola de ecuación $y = 1 - (x - 1)^2$.

- El lado del cuadrado D^* que une el punto $(u, v) = (0, 1)$ con el punto $(u, v) = (0, 0)$, está contenido en la recta $v = 0$. Luego,

$$(x, y) = (u + v, v - u^2)|_{u=0} = (v, v) \Rightarrow x = v = y \\ \Rightarrow y - x = 0.$$

Por lo tanto, la curva que une los puntos $(0, 1)$ y $(0, 0)$ en el plano uv , se transforma mediante \vec{T} en una curva del plano xy contenida en la recta de ecuación $y - x = 0$.

La gráfica de \vec{T} de D en D^* se muestra en la Figura 2.27.

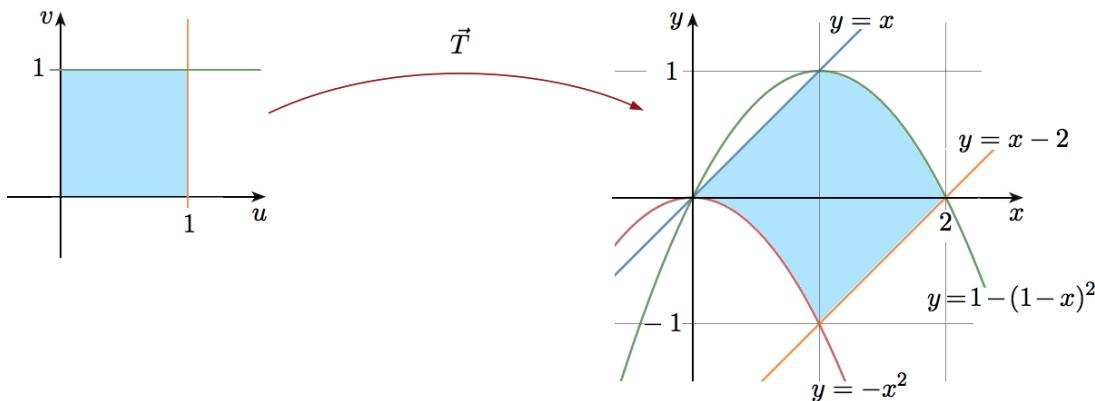


Figura 2.27. Gráfica de la aplicación $\vec{T}(u, v) = (u + v, v - u^2) = (x, y)$ de D^* a $\vec{T}(D^*) = D$, donde D es la región limitada por las curvas $y = x$, $y = 1 - (x - 1)^2$, $y = x - 2$ y $y = -x^2$.

c) Si $f(x, y) = \frac{1}{y-x-1}$ con $(x, y) \in D$, con $D = \vec{T}(D^*)$, entonces para cada $(u, v) \in D^*$ obtenemos

$$\begin{aligned} f(x(u, v), y(u, v)) &= \frac{1}{v - u^2 - u - v - 1} \\ &= -\frac{1}{u^2 + u + 1}, \end{aligned}$$

que es una función continua y acotada en D^* , pues es un cuociente entre funciones continuas (la función constante y los polinomios son funciones continuas) que no se anula en el denominador, y que está evaluada sobre una región acotada (D^* es compacto en \mathbb{R}^2 ; es decir D^* es un conjunto cerrado y acotado en \mathbb{R}^2).

$$\begin{aligned} d) \iint_D \frac{1}{y-x-1} dx dy &= - \iint_{D^*} \frac{1}{u^2 + u + 1} (1 + 2u) dv du \\ &= - \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{u^2 + u + 1} (1 + 2u) dv du \\ &= - \int_0^1 \frac{1}{u^2 + u + 1} (v + 2uv) \Big|_{v=0}^{v=1} du \\ &= - \int_0^1 \frac{1}{u^2 + u + 1} (1 + 2u) du \\ &= - \ln(u^2 + u + 1) \Big|_{u=0}^{u=1} \\ &= - \ln(3). \quad \square \end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 2.3.1 Sea \vec{T} un difeomorfismo de clase C^1 tal que

$$J_{\vec{T}}(\vec{u}) = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_N)} \neq 0.$$

Entonces

$$J_{\vec{T}}^{-1}(\vec{u}) = \frac{1}{\frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_N)}} = \frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_N)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_N)} = J_{\vec{T}^{-1}}(\vec{x}).$$

OBSERVACIÓN 2.3.4 La importancia de la Proposición 2.3.1 radica en el hecho que a veces conviene calcular

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad \text{en vez de calcular} \quad \frac{\partial x_i}{\partial u_i} \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

EJEMPLO 2.3.7 Calcula $\iint_D \frac{(2x+y)(x+y)}{\sqrt{2x}} dA$ donde D es el conjunto limitado por las curvas $y^2 = 2x$, $x + y = 4$ y $x + y = 12$.

Solución.

(1°) Partimos buscando una aplicación \vec{S} que transforme nuestra región (en el plano xy) en otra región (en el plano uv) que nos permita facilitar el cálculo de nuestra integral.

Sean $(x, y) \in D$.

- Si ponemos $u = x + y$, entonces

$$x + y = 4 \quad \vee \quad x + y = 12 \quad \Leftrightarrow \quad u = 4 \quad \vee \quad u = 12.$$

- Observemos ahora que la curva $y^2 = 2x$ está compuesta de dos ramas:

$$y = \sqrt{2x} \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{2x},$$

entonces parece útil buscar una variable v que considere esta situación. Notemos que el único punto de la forma $(0, y_0) \notin D$ entre las curvas $y = -\sqrt{2x}$ e $y = \sqrt{2x}$ es el punto $(0, 0)$, el cual no pertenece a la región contenida entre las rectas

$$x + y = 4 \quad \text{y} \quad x + y = 12.$$

Luego, para puntos (x, y) entre las rectas $x + y = 4$ y $x + y = 12$, tenemos que

$$y = \sqrt{2x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{\sqrt{2x}} = 1 \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{2x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{\sqrt{2x}} = -1.$$

Luego, si ponemos $v = \frac{y}{\sqrt{2x}}$, entonces

$$\frac{y}{\sqrt{2x}} = -1 \quad \vee \quad \frac{y}{\sqrt{2x}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad v = -1 \quad \vee \quad v = 1.$$

De esta forma, parece razonable considerar la aplicación $\vec{S} : V \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \vec{S} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ \frac{y}{\sqrt{2x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

(2°) A continuación vamos a probar que \vec{S} es un difeomorfismo de clase C^1 de V en $\vec{S}(V)$, con V un conjunto abierto en \mathbb{R}^2 a determinar.

- Claramente \vec{S} es de clase C^1 , pues tanto $u(x, y) = x + y$ como $v(x, y) = \frac{y}{\sqrt{2x}}$ son funciones de clase C^1 en $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.
- Ahora estudiamos la inyectividad de \vec{S} . Tenemos,

$$\begin{aligned} \vec{S} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \vec{S} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \frac{y_1}{\sqrt{2x_1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + y_2 \\ \frac{y_2}{\sqrt{2x_2}} \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow x_1 + y_2 \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} = x_2 + y_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow x_1 - x_2 &= \frac{y_2}{\sqrt{x_2}} (\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}) \\ \Rightarrow (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}) \left(\frac{y_2}{\sqrt{x_2}} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_1} \right) &= 0 \\ \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \vee \quad x_2 + y_2 &= -\sqrt{x_1 x_2}.\end{aligned}$$

Notemos que la segunda igualdad no se tiene si nos restringimos al conjunto abierto V dado por

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge x + y > 0\}.$$

Por lo tanto, \vec{S} es inyectiva en V .

- Calculemos ahora el jacobiano de \vec{S} . Para cada $(x, y) \in V$ se tiene

$$J_{\vec{S}}(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{y}{2\sqrt{2}} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} & \frac{1}{\sqrt{2x}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2x}} \left(\frac{y}{2x} + 1 \right) = \frac{(2x+y)}{(2x)^{\frac{3}{2}}},$$

y como

$$x > 0 \wedge x + y > 0 \Rightarrow 2x + y > 0,$$

entonces

$$J_{\vec{S}}(x, y) \neq 0 \quad \forall (x, y) \in V.$$

Desde los puntos previos concluimos que $\vec{S} : V \rightarrow \vec{S}(V)$ es un difeomorfismo de clase C^1 .

- (3°) Ahora debemos chequear que $D \subset V$. Con este fin, estudiamos los puntos de intersección que se generan por las curvas que limitan a la región D , tenemos,

$$\begin{aligned}■ y^2 = 2x \wedge x + y = 4 &\Rightarrow (4-x)^2 = 2x \\ &\Rightarrow x^2 - 10x + 16 = (x-8)(x-2) = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, los puntos de intersección entre las curvas $y^2 = 2x$ y $x + y = 4$ son los puntos $(2, 2)$ y $(8, -4)$.

$$\begin{aligned}■ y^2 = 2x \wedge x + y = 12 &\Rightarrow (12-x)^2 = 2x \\ &\Rightarrow x^2 - 26x + 144 = (x-18)(x-8) = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, los puntos de intersección entre las curvas $y^2 = 2x$ y $x + y = 12$ son los puntos $(8, 4)$ y $(18, -6)$.

Notemos que todos los puntos quedan contenidos en la región V , así que $D \subset V$.

- (4°) Ahora, para comprender la situación que tenemos, vamos a relacionar la frontera de D con la frontera de su imagen por \vec{S} .

- El trozo del borde de D que une los puntos $(8, -4)$ y $(18, -6)$ en el plano xy , está contenido en la curva $y = -\sqrt{2x}$, que en el plano uv se transforma mediante \vec{S} en la recta $v = -1$.
- El trozo del borde de D que une los puntos $(18, -6)$ y $(8, 4)$ en el plano xy , está contenido en la recta $y + x = 12$, que en el plano uv se transforma mediante \vec{S} en la recta $u = 12$.
- El trozo del borde de D que une los puntos $(8, 4)$ y $(2, 2)$ en el plano xy , está contenido en la curva $y = \sqrt{2x}$, que en el plano uv se transforma mediante \vec{S} en la recta $v = 1$.
- El trozo del borde en D que une el punto $(2, 2)$ y $(8, -4)$ en el plano xy , está contenido en la recta $y + x = 4$, que en el plano uv se transforma mediante \vec{S} en la recta $u = 4$.

De esta forma, estamos en condiciones de trazar la gráfica de \vec{S} de D en $D^* = \vec{S}(D)$.

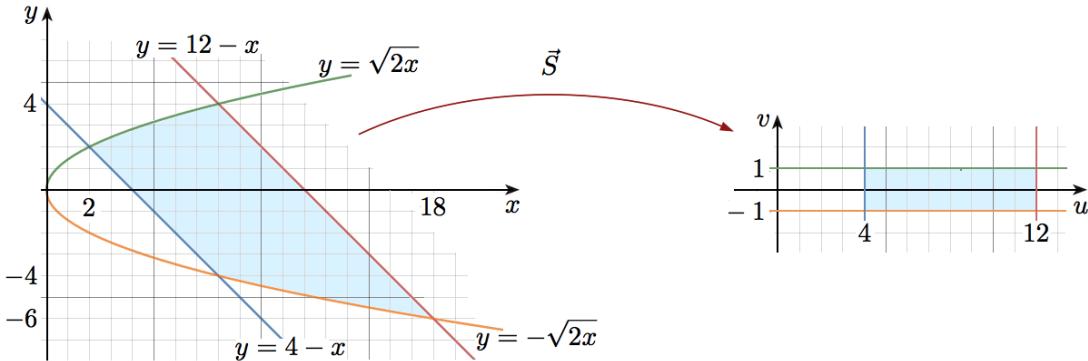


Figura 2.28. Gráfica de la aplicación $\vec{S}(x, y) = \left(x + y, \frac{y}{\sqrt{2x}}\right) = (u, v)$ de D en $\vec{S}(D)$, donde D es la región limitada por las curvas $y + x = 4$, $y + x = 12$ e $y^2 = 2x$.

(5°) Observemos finalmente que estamos frente a una situación inversa a la deseada. Es decir, hemos encontrado un difeomorfismo que corresponde al difeomorfismo inverso que necesitamos según el Teorema 2.3.2 del cambio de variable. Esto es, $\vec{S} = \vec{T}^{-1}$ (o bien $\vec{T} = \vec{S}^{-1}$). Así que para aplicar el Teorema 2.3.2, y en vista de la Proposición 2.3.1, debemos calcular

$$J_{\vec{T}}(u, v) = J_{\vec{S}^{-1}}(u, v).$$

Tenemos,

$$J_{\vec{S}^{-1}}(u, v) = (2x)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{(2x+y)} \neq 0 \quad \forall (x, y) \in D.$$

Finalmente, obtenemos

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{(2x+y)(x+y)}{\sqrt{2x}^3} dA &= \iint_{D^*} \frac{(2x+y)(x+y)}{\sqrt{2x}^3} (2x)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{(2x+y)} du dv \quad \text{con } x = x(u, v); y = y(u, v) \\ &= \int_{-1}^1 \int_4^{12} u du dv \quad \text{por definición de } u \text{ y } v \\ &= 128. \quad \square \end{aligned}$$

EJERCICIOS 2.3.1

1. Calcula $\iint_D x \, dA$ donde D es la región limitada por las curvas $x(1-y) = 1$, $x(1-y) = 2$, $xy = 1$ y $xy = 3$.
2. Sea $a > 0$. Calcula el valor de la integral $\iint_D f$, donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq a^{\frac{2}{3}}\}$ y $f(x, y) = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^2$.
- Sugerencia:** Si lo estimas conveniente, usa el cambio de variable $x = u \cos^3 v$ e $y = u \sin^3 v$.
3. Calcula $\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}} \, dA$ donde D es la región limitada por los ejes coordenados y la recta $y + x - 2 = 0$.
4. Calcula $\iint_D (x^2 + y^2) \, dA$ donde D es la región acotada por la curva $x^4 + y^4 = 1$.
5. Sean $a > 0$ y $b > 0$. Mediante el cambio de variable

$$u = \frac{y^2}{x}, \quad v = \sqrt{xy},$$

el cuadrado $D = \{a < x < a+h : b < y < b+h\}$ del plano xy , se transforma en una región D' del plano uv .

- a) Calcula el jacobiano de \vec{T} .
- b) Encuentra la razón entre el área de la región D' y el área de la región D .
- c) Calcula el límite de la razón encontrada en a) cuando $h \rightarrow 0$.

Para ver las Soluciones de los Ejercicios 2.3.1 presiona aquí **A**

2.3.3. Integración doble en coordenadas polares

El difeomorfismo

$$\begin{aligned} \vec{T}:]0, \infty[\times]0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} &\rightarrow \vec{T} \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

transforma *coordenadas polares a coordenadas rectangulares*.

Un punto (x, y) del plano cartesiano puede ser representado en coordenadas polares por el par ordenado (r, θ) cuya primera coordenada es igual a la distancia del punto al origen, esto es,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2};$$

y cuya segunda coordenada es igual al ángulo formado entre el eje horizontal y el trazo que une el

origen con el punto dado, por lo tanto se verifica que

$$\tan \theta = \frac{y}{x}.$$

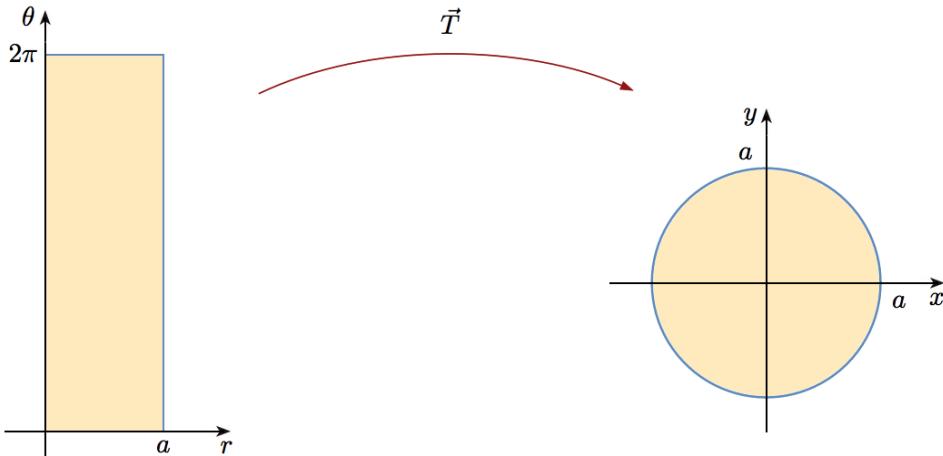


Figura 2.29. El difeomorfismo $\vec{T}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = (x, y)$ transforma el rectángulo en coordenadas polares dado por $D^* = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < r \leq a \wedge 0 < \theta \leq 2\pi\}$, en el círculo en coordenadas rectangulares dado por $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a\}$.

Como estamos interesados en calcular integrales usando este cambio de variable, necesitamos calcular el jacobiano asociado a \vec{T} :

$$J_{\vec{T}}(r, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r.$$

Luego, por el Teorema 2.3.2 del cambio de variable, para toda función continua e integrable $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, donde $D = \vec{T}(D^*)$, se tiene que

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

EJEMPLO 2.3.8 Sea D una corona circular de radio menor a_1 y radio mayor a_2 , ubicada entre los ángulos $0 < \alpha_1 < \frac{\pi}{2} < \alpha_2 < \pi$, y sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua sobre su dominio. Establece una fórmula para la integral $\iint_D f(x, y) dA$, usando el cambio de variable de coordenadas polares a rectangulares.

Solución. Se tiene que

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_{a_1}^{a_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr. \quad \square$$

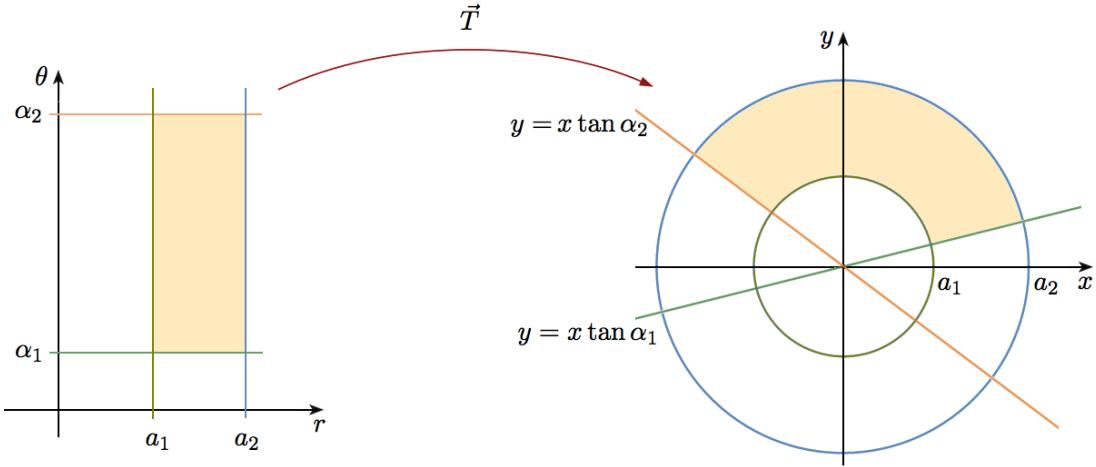


Figura 2.30. El difeomorfismo $\vec{T}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = (x, y)$ transforma el conjunto $D^* = \{(r, \theta) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi] : a_1 \leq r \leq a_2 \wedge \alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2\}$, $0 < \alpha_1 < \frac{\pi}{2} < \alpha_2 < \pi$, en el conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq a_2^2 \wedge y \geq x \tan \alpha_1 \wedge y \geq x \tan \alpha_2\}$.

EJEMPLO 2.3.9 Sea D el círculo de radio a y centro en (x_0, y_0) , y sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en su dominio. Establece una fórmula para la integral $\iint_D f(x, y) dA$, usando el cambio de variable de coordenadas polares a rectangulares.

Solución. Como cada punto (x, y) del círculo de radio a y centro en (x_0, y_0) satisface la inecuación

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq a^2,$$

podemos poner $x - x_0 = r \cos \theta$ e $y - y_0 = r \sin \theta$ con $0 < r \leq a$, y $0 < \theta \leq 2\pi$, y considerar el difeomorfismo $\vec{T} :]0, a] \rightarrow]0, 2\pi]$, definido por

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \vec{T} \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + r \cos \theta \\ y_0 + r \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Es fácil chequear que $J_{\vec{T}} = r \neq 0$, pues $r > 0$, de manera que

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_0^a \int_0^{2\pi} f(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) r d\theta dr. \quad \square$$

EJEMPLO 2.3.10 Sea D es el círculo de radio a y centro en el origen. Calcula $\iint_D (x^2 + y^2) dA$

Solución. Se tiene que

$$\iint_D (x^2 + y^2) dA = \int_0^a \int_0^{2\pi} r^3 d\theta dr = \frac{\pi a^4}{2}. \quad \square$$

EJEMPLO 2.3.11 Calcula el área encerrada por la cardioide $r = 1 + \cos \theta$.

Solución. Sea A el área de la cardioide, y sea $\vec{T}(D^*) = D$ la región encerrada por la cardioide, donde \vec{T} es el difeomorfismo de coordenadas polares a rectangulares. Entonces

$$\begin{aligned} A &= \iint_D dA = \iint_{D^*} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\theta} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} \Big|_{r=0}^{r=1+\cos\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos\theta + \frac{1}{2} + \frac{\cos(2\theta)}{2} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{\sin(2\theta)}{4} \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \\ &= \frac{3}{2}\pi. \quad \square \end{aligned}$$

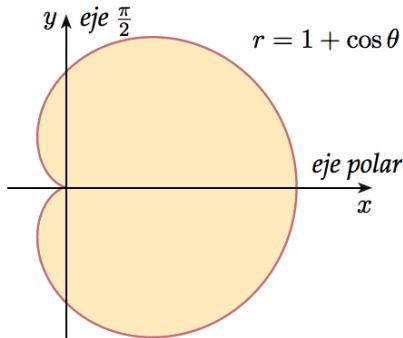


Figura 2.31. Gráfica de la cardioide $r = 1 + \cos \theta$.

EJERCICIOS 2.3.2

1. Mediante el uso de una integral doble, calcula el volumen del sólido en el primer octante limitado por el cono $z = r$ y el cilindro $r = 3 \sin \theta$.
2. Sea $a > 0$ y sea D la región del primer cuadrante acotada por la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ y los ejes coordinados. Calcula el valor de $\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy$.
3. Calcula el valor de la integral $\iint_D (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} dA$, donde D es el anillo determinado por la inecuación $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.

4. Calcula el área del interior de una hoja de la rosa $r = \cos(3\theta)$.

Para ver las Soluciones de los Ejercicios 2.3.2 presiona aquí **A**

2.3.4. Integración triple en coordenadas cilíndricas

El difeomorfismo

$$\vec{T} : [0, \infty[\times]0, 2\pi[\times]-\infty, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \vec{T} \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

transforma *coordenadas cilíndricas* en *rectangulares*.

Un punto (x, y, z) del espacio en coordenadas rectangulares puede ser representado en coordenadas cilíndricas por el trío (r, θ, z) cuya primera coordenada es igual a la distancia entre la proyección del punto en el plano xy y el origen, esto es,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2};$$

cuya segunda coordenada θ es igual al ángulo formado entre el eje x y el trazo que une la proyección del punto sobre el plano xy con el origen, por lo tanto se verifica que

$$\tan \theta = \frac{y}{x};$$

y cuya tercera coordenada es igual a la tercera coordenada rectangular, esto es,

$$z = z.$$

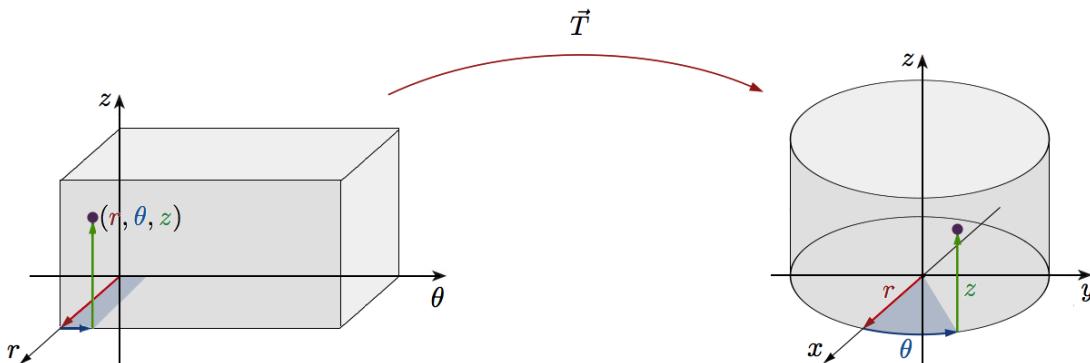


Figura 2.32. El difeomorfismo $\vec{T}(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z) = (x, y, z)$ transforma el rectángulo en coordenadas cilíndricas dado por $D^* = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < r \leq r_0 \wedge 0 < \theta \leq 2\pi \wedge 0 \leq z \leq z_0\}$, en el cilindro en coordenadas rectangulares dado por $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq a^2 : 0 \leq z \leq b\}$.

Como estamos interesados en calcular integrales usando este cambio de variable, necesitamos calcular el jacobiano asociado a \vec{T} :

$$J_{\vec{T}}(r, \theta, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r.$$

Luego, por el Teorema 2.3.2 del cambio de variable, para toda función continua e integrable $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, donde D es la imagen por \vec{T} de D^* , se tiene que

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{D^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz.$$

EJEMPLO 2.3.12 Calcula el volumen del sólido encerrado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y el cilindro $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.

Solución. Sea $\vec{T}(D^*) = D$ la región encerrada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y el cilindro $(x - 2)^2 + y^2 = 4$, donde \vec{T} es el difeomorfismo de coordenadas cilíndricas a rectangulares.

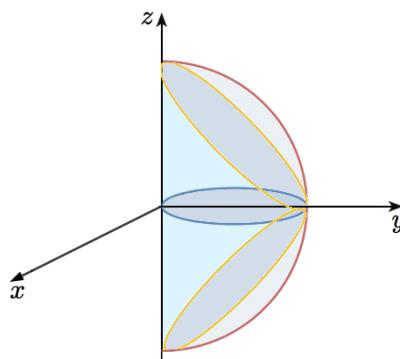


Figura 2.33. Gráfica de la región D acotada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y el cilindro $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.

(1º) Partimos transformando las ecuaciones que encierran la región. Primero transformamos la ecuación de la esfera. Tenemos,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16 \Rightarrow r^2 + z^2 = 16.$$

Transformamos ahora la ecuación del cilindro. Tenemos

$$\begin{aligned} (x - 2)^2 + y^2 = 4 &\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x = 0 \\ &\Rightarrow r^2 = 4r \cos \theta \\ &\Rightarrow r = 4 \cos \theta. \end{aligned}$$

(2º) A continuación buscamos límites de integración adecuados para la región D^* , que es la región que está dada en coordenadas cilíndricas.

- Tomando en cuenta los cálculos previos, obtenemos para z :

$$\begin{aligned} r^2 + z^2 = 16 &\Rightarrow z^2 = 16 - r^2 \\ &\Rightarrow z = \pm\sqrt{16 - r^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, obtenemos que la variable z queda limitada de la siguiente forma

$$\phi(r, \theta) = -\sqrt{16 - r^2} \leq z \leq \sqrt{16 - r^2} = \psi(r, \theta). \quad (2.11)$$

- Determinemos ahora el rango de variación de las variables r y θ . Para esto, estudiamos la proyección del cuerpo D sobre el plano xy (o bien plano $z = 0$). Es fácil chequear que esta proyección corresponde al círculo

$$(x - 2)^2 + y^2 \leq 4.$$

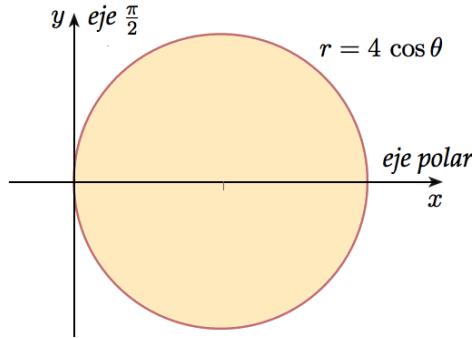


Figura 2.34. Gráfica de $r = 4 \cos \theta$.

Según podemos apreciar en la figura 2.34, la variable r queda limitada de la siguiente forma

$$u(\theta) = 0 < r \leq r \cos \theta = v(\theta), \quad (2.12)$$

mientras que la variable θ queda limitada de la siguiente forma

$$-\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (2.13)$$

En resumen, la región D^* sobre la cual vamos a integrar está limitada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 < r \leq 4 \cos \theta \\ -\sqrt{16 - r^2} \leq z \leq \sqrt{16 - r^2}. \end{array} \right.$$

Por lo tanto, si V es el volumen de la región $\vec{T}(D^*) = D$, donde \vec{T} es el difeomorfismo que transforma coordenadas cilíndricas a rectangulares, obtenemos

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D dx dy dz = \iiint_{D^*} r dr d\theta dz \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4 \cos \theta} \int_{-\sqrt{16-r^2}}^{\sqrt{16-r^2}} r dz dr d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4 \cos \theta} \int_0^{\sqrt{16-r^2}} r dz dr d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4 \cos \theta} r z \Big|_{z=0}^{\sqrt{16-r^2}} dr d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4 \cos \theta} r \sqrt{16 - r^2} dr d\theta \\ &= -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3} (16 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{r=0}^{r=4 \cos \theta} d\theta \\ &= -\frac{4 \cdot 64}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((1 - \cos^2 \theta) \sin \theta - 1) d\theta \\ &= -\frac{4 \cdot 64}{3} \left(-\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} - \theta \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{128}{9} (3\pi - 4). \quad \square \end{aligned}$$

EJERCICIOS 2.3.3

1. Sea D la bola unitaria en \mathbb{R}^3 . Calcula el valor de $\iiint_D z e^{x^2+y^2+z^2} dx dy dz$.
2. Sea D el sólido acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano xy . Calcula $\iiint_D z dx dy dz$.
3. Sea $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 : 0 \leq z \leq 1\}$. Calcula el valor de $\iiint_D z e^{-x^2-y^2} dx dy dz$.

4. Sea D el volumen exterior a la hoja superior del cono $z^2 = x^2 + y^2$ e interior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$, con $z \geq 0$.

Para ver las Soluciones de los Ejercicios 2.3.3 presiona aquí **A**

2.3.5. Integración triple en coordenadas esféricas

El difeomorfismo

$$\vec{T} :]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times]0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} \rightarrow \vec{T} \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \theta \sin \phi \\ \rho \sin \theta \sin \phi \\ \rho \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

transforma *coordenadas esféricas en rectangulares*.

Un punto (x, y, z) del espacio en coordenadas rectangulares puede ser representado en coordenadas esféricas por el trío (ρ, θ, ϕ) cuya primera coordenada es igual a la distancia entre el punto y el origen, esto es,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

cuya segunda coordenada θ es igual al ángulo formado entre el eje x y el trazo que une la proyección del punto sobre el plano xy con el origen, por lo tanto se verifica que

$$\tan \theta = \frac{y}{x};$$

y cuya tercera coordenada es igual al ángulo entre el eje z y el trazo que une el punto con el origen, por lo tanto se verifica que

$$\cos \phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

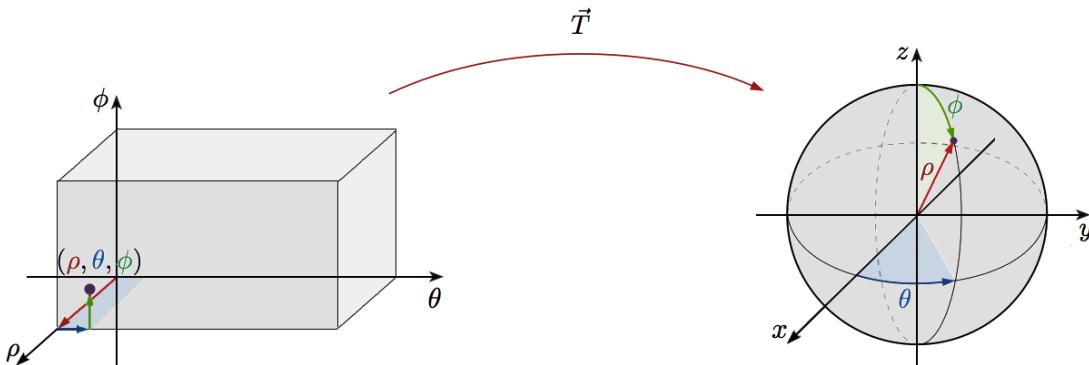


Figura 2.35. El difeomorfismo $\vec{T}(\rho, \theta, \phi) = (\rho \cos \theta \sin \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \phi) = (x, y, z)$ transforma el rectángulo en coordenadas esféricas dado por $D^* = \{(\rho, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 : 0 < \rho \leq r_0 \wedge 0 < \theta \leq 2\pi \wedge 0 < \phi \leq \pi\}$, en la bola en coordenadas rectangulares dada por $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$.

Como estamos interesados en calcular integrales usando este cambio de variable, necesitamos calcular el jacobiano asociado a \vec{T} :

$$J_{\vec{T}}(\rho, \theta, \phi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta \sin \phi & -\rho \sin \theta \sin \phi & \rho \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \rho \cos \theta \sin \phi & \rho \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & -\rho \sin \phi \end{vmatrix} = -\rho^2 \sin \phi.$$

Luego, por el Teorema 2.3.2 del cambio de variable, para toda función continua e integrable $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, donde D es la imagen por \vec{T} de D^* , y dado que $\sin \phi \geq 0$ si $\phi \in]0, \pi]$, se tiene que

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{D^*} f(\rho \cos \theta \sin \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi.$$

EJEMPLO 2.3.13 Calcula el volumen del sólido encerrado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ y el cono $x^2 + y^2 = z^2$, contenido en la región $z \geq 0$.

Solución. Observemos que la región de integración es un cono invertido cuya tapa superior es una semiesfera. Usando coordenadas esféricas obtenemos

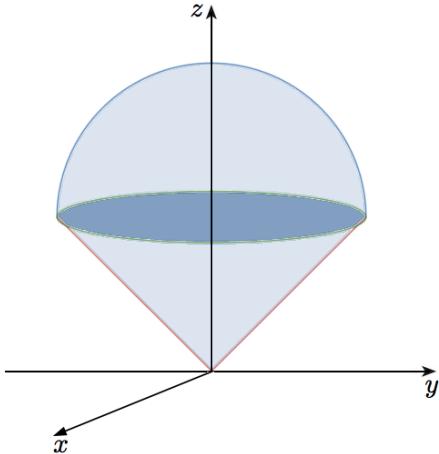


Figura 2.36. Sólido encerrado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ y el cono $x^2 + y^2 = z^2$, contenido en la región $z \geq 0$.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = z^2 \wedge z \geq 0 &\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 2z^2 \\ &\Rightarrow \rho^2 = 2\rho^2 \cos^2 \phi \\ &\Rightarrow \cos^2 \phi = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 = 4z &\Rightarrow \rho^2 = 4\rho \cos \phi \\ &\Rightarrow \rho = 4 \cos \phi. \end{aligned}$$

Luego, la región D^* sobre la cual vamos a integrar está limitada por

$$\begin{cases} 0 < \rho \leq 4 \cos \theta \\ 0 < \theta \leq 2\pi \\ 0 < \phi \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Por lo tanto, si V es el volumen de la región $\vec{T}(D^*) = D$, donde \vec{T} es el difeomorfismo que transforma coordenadas esféricas a rectangulares, obtenemos

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D dx dy dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \int_0^{4 \cos \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \left. \frac{\rho^3}{3} \sin \phi \right|_{\rho=0}^{\rho=4 \cos \phi} d\theta d\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \frac{64 \cos^3 \phi}{3} \sin \phi d\theta d\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{64 \cos^3 \phi}{3} \sin \phi \right) \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\phi \\ &= \frac{2\pi \cdot 64}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 \phi \sin \phi d\phi \\ &= -\frac{2\pi \cdot 64}{3} \left. \left(\frac{\cos^4 \phi}{4} \right) \right|_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{4}} \\ &= 8\pi. \quad \square \end{aligned}$$

EJERCICIOS 2.3.4

1. Sea D la bola unitaria en \mathbb{R}^3 . Calcula el valor de $\iiint_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$.
2. Sea D la bola de \mathbb{R}^3 de radio a y centro en el origen. Encuentra su volumen.
3. Sea D la bola unitaria en \mathbb{R}^3 . Calcula el valor de $\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$.
4. Sea D el octavo de esfera ubicado en el primer octante. Calcula el valor de $\iiint_D xyz dx dy dz$.

Para ver las Soluciones de los Ejercicios 2.3.4 presiona aquí A

2.3.6. Integración triple en coordenadas toroidales

El difeomorfismo

$$\vec{T}: [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} \rightarrow \vec{T} \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ((R + r \sen \phi) \cos \theta) \\ ((R + r \sen \phi) \sen \theta) \\ r \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

transforma *coordenadas esféricas en rectangulares*.

Un punto (x, y, z) del espacio en coordenadas rectangulares puede ser representado en coordenadas esféricas por el trío (r, θ, ϕ) cuya primera coordenada está determinada por la siguiente relación

$$r^2 = (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2$$

cuya segunda coordenada θ es igual al ángulo formado entre el eje x y el trazo que une la proyección del punto sobre el plano xy con el origen, por lo tanto se verifica que

$$\tan \theta = \frac{y}{x};$$

y cuya tercera coordenada está determinada por la relación

$$\cos \phi = \frac{z}{\sqrt{(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2}}.$$

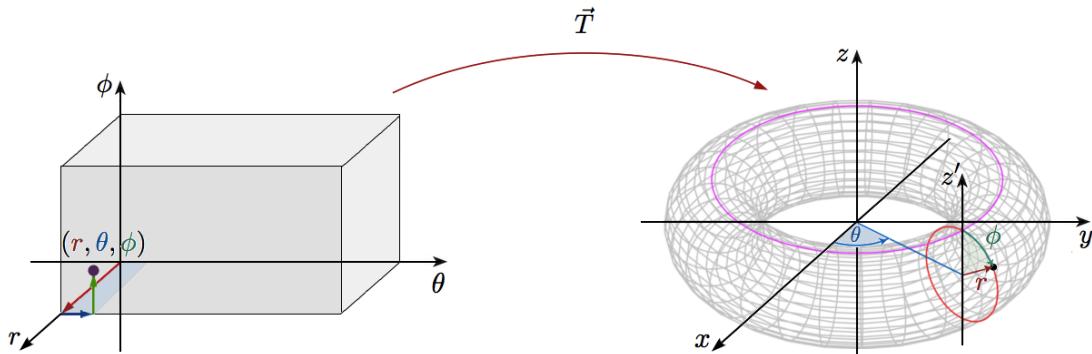


Figura 2.37. El difeomorfismo $\vec{T}(r, \theta, \phi) = ((R + r \sen \phi) \cos \theta, (R + r \sen \phi) \sen \theta, r \cos \phi) = (x, y, z)$ transforma el rectángulo en coordenadas toroidales dado por $D^* = \{(r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 : 0 < r \leq r_0 < R \wedge 0 < \theta \leq 2\pi \wedge 0 < \phi \leq 2\pi\}$, en el toro de radio mayor R y radio menor a en coordenadas rectangulares dada por $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq (R + \sqrt{a^2 - z^2})^2\}$.

Como estamos interesados en calcular integrales usando este cambio de variable, necesitamos calcular el jacobiano asociado a \vec{T} :

$$J_{\vec{T}}(r, \theta, \phi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta \sin \phi & -(R + r \sin \phi) \sin \theta & r \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & (R + r \sin \phi) \cos \theta & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & -r \sin \phi \end{vmatrix} = -rR - r^2 \sin \phi.$$

Luego, por el Teorema 2.3.2 del cambio de variable, para toda función continua e integrable $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, donde D es la imagen por \vec{T} de D^* , y dado que $\sin \phi \geq 0$ si $\phi \in]0, \pi]$, se tiene que

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{D^*} f((R + r \sin \phi) \cos \theta, (R + r \sin \phi) \sin \theta, r \cos \phi) (rR + r^2 \sin \phi) dr d\theta d\phi.$$

2.4. Integración múltiple impropia

Hasta el momento hemos estudiado

$$\int_D f$$

bajo el supuesto que f es acotada sobre D y el supuesto que D es acotado. En esta sección nos interesa extender la definición de integral múltiple al caso en que uno de los supuestos anteriores no se cumple, en cuyo caso hablamos de *integral múltiple impropia*.

EJEMPLO 2.4.1 Sea $D = [1, \infty) \times [1, \infty)$, sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2},$$

y considera para cada $n \in \mathbb{N}$, $R_n = [1, n] \times [1, n]$. Es claro que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n = D \quad \wedge \quad R_n \subset R_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad \iint_{R_n} f(x, y) dx dy \leq \iint_{R_{n+1}} f(x, y) dx dy.$$

¿Es posible definir $\iint_D f(x, y) dx dy$?

Solución. Parece razonable esperar que, si existiese el valor $\iint_D f(x, y) dx dy$, entonces se debiese verificar

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{R_n} f(x, y) dx dy.$$

Sin embargo,

¿Cómo garantizamos que tal límite existe?

Como

$$f(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

es fácil chequear que la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, cuyos términos se definen por

$$a_n = \iint_{R_n} f \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

es una sucesión creciente de números positivos. Recordemos ahora el siguiente resultado:

Toda sucesión de números reales $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que es creciente y acotada superiormente, posee límite cuando $n \rightarrow \infty$. Más aún, su límite es igual a su supremo.

Luego, si nuestra sucesión fuese acotada superiormente, entonces su límite cuando $n \rightarrow \infty$, debiese ser igual a su supremo.

Veamos que efectivamente existe $M > 0$ tal que

$$0 < \iint_{R_n} \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx dy \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Notemos que $R_n \subset D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2n^2\}$; y pasando a coordenadas polares, obtenemos

$$0 \leq \iint_{R_n} \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx dy \leq \int_1^{\sqrt{2}n} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^4} r dr d\theta \leq 2\pi \left(\int_1^\infty \frac{1}{r^3} dr \right) = \pi < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto,

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{R_n} \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx dy.$$

Sin embargo, el resultado obtenido aún no es suficiente para garantizar la existencia de

$$\int_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx dy.$$

Debemos preguntarnos por aquello que sucede al cambiar la familia de conjuntos $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. En concreto,

¿Qué sucede si cambiamos la familia de conjuntos $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ por otra familia de conjuntos acotados $\{R'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ verificando $\bigcup_{n=1}^{\infty} R'_n = D$ y $R'_n \subset R'_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$?

Esta pregunta es crucial, pues de existir

$$\int_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx dy,$$

su valor no puede depender de la elección particular de la familia $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que cumpla las condiciones antes mencionadas.

En nuestro caso, notemos que cualquier familia de conjuntos acotados $\{R'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} R'_n = D \quad \wedge \quad R'_n \subset R'_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

verifica lo siguiente:

$$(\forall k \in \mathbb{N}) (\exists n_k \in \mathbb{N}) \text{ tal que } (\forall n \in \mathbb{N}) (n \geq n_k \Rightarrow R'_k \subset R_n).$$

La veracidad de la afirmación previa se debe al principio de Arquímedes, que señala lo siguiente:

Dado un número real r , existe un número natural n_r tal que $r < n_r$.

De esta forma, la sucesión $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de las integrales correspondientes a la familia de conjuntos $\{R'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, es decir,

$$b_n = \iint_{R'_n} \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx dy \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

que es una sucesión creciente de números positivos, queda acotada superiormente por el supremo de la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de las integrales correspondientes a la familia de conjuntos $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$; y por lo tanto la sucesión $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ será convergente.

Por otro lado, como $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{R'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son, ambas, sucesiones de conjuntos crecientes en el sentido de la inclusión, y tales que convergen a D , entonces

$$(\forall p \in \mathbb{N}) (\exists k_p \in \mathbb{N}) \text{ tal que } (\forall k \in \mathbb{N}) \left(k \geq k_p \Rightarrow m(R_p \setminus R'_k) < \frac{1}{p} \right),$$

donde

$$m(R_p \setminus R'_k) = \iint_{R_p \setminus R'_k} dx dy.$$

Se sigue que, dado $p \in \mathbb{N}$, existen $k_p, n_{k_p} \in \mathbb{N}$ tales que

$$\iint_{R_p} \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx dy - C_p \leq \iint_{R'_{k_p}} \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx dy \leq \iint_{R_{n_{k_p}}} \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx dy,$$

donde

$$0 \leq C_p = \iint_{R_p \setminus R'_{k_p}} \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx dy \rightarrow 0 \quad \text{cuando } p \rightarrow \infty.$$

Recordemos ahora que:

*Toda subsucesión de una sucesión convergente es convergente,
y converge al mismo límite de la sucesión.*

De esta forma, la subsucesión de números reales $\{a_{n_k p}\}_{p \in \mathbb{N}}$, donde

$$a_{n_k p} = \iint_{R_{n_k p}} \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx dy,$$

es convergente, y converge al mismo límite de la sucesión $\{a_p\}_{p \in \mathbb{N}}$. Luego, por una simple aplicación del Teorema del Sandwich, concluimos que la subsucesión $\{b_{k_p}\}_{p \in \mathbb{N}}$, donde

$$b_{k_p} = \iint_{R'_{k_p}} \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx dy,$$

es convergente, y converge al mismo límite que la sucesión $\{a_p\}_{p \in \mathbb{N}}$.

Finalmente, recordemos que

Si una sucesión creciente de números reales posee una subsucesión convergente, entonces la sucesión completa resulta convergente, y converge al mismo límite que la subsucesión.

Entonces, por construcción, concluimos que el límite de la sucesión de números

$$\iint_{R'_k} \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$$

debe ser el mismo límite que el de la sucesión de números

$$\iint_{R_p} \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx dy,$$

lo cual nos conduce a pensar que es posible definir

$$\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx dy. \quad \square$$

Sea f una función continua que es integrable en cada subconjunto compacto de \mathbb{R}^N , sea D un conjunto no acotado de \mathbb{R}^N , y consideremos una familia de conjuntos $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en \mathbb{R}^N , tal que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D, \quad D_n \subset D_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y

$$\iint_{D_n} f(x, y) dx dy \leq \iint_{D_{n+1}} f(x, y) dx dy.$$

Es evidente que la condición de acotamiento:

$$\exists M > 0 \quad \text{tal que} \quad \left| \iint_{D_n} f(x, y) dx dy \right| < M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

por sí misma, no es suficiente para garantizar convergencia de la integral

$$\iint_{D_n} f(x, y) dx dy,$$

en particular cuando la función f cambia de signo.

En efecto, sabemos que

Toda sucesión acotada de números reales posee al menos una subsucesión convergente.

Entonces, podría darse el caso en que la sucesión de números

$$\left\{ \iint_{D_n} f(x, y) \, dx \, dy \right\}$$

en realidad tuviese más de una subsucesión convergente, y que no necesariamente ambas converjan al mismo límite, como por ejemplo ocurre con la sucesión de números reales

$$\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

que posee una subsucesión que converge a 1 (la subsucesión de los subíndices pares) y otra a -1 (la subsucesión de los subíndices impares). De esta forma, para estudiar integrabilidad en situaciones *improperas* más generales, es conveniente introducir las siguientes funciones.

DEFINICIÓN 2.4.1 Sea D un conjunto en \mathbb{R}^N , y sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Llamamos

- *Función parte positiva de f* a la función $f^+ : D \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

- *Función parte negativa de f* a la función $f^- : D \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) > 0. \end{cases}$$

OBSERVACIÓN 2.4.1 Sea D un conjunto en \mathbb{R}^N , y sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Es fácil chequear que f^+ y f^- son mayores o iguales que 0, que verifican lo siguiente

$$f = f^+ - f^-$$

y

$$|f| = f^+ + f^-.$$

Además, introducimos una clase de conjuntos que consideraremos en nuestras definiciones formales a continuación.

DEFINICIÓN 2.4.2 Sea D un conjunto en \mathbb{R}^N tal que $\text{int}(D) \neq \emptyset$ y tal que todo subconjunto acotado de su frontera $\text{Fr}(D)$ tiene contenido cero. Sea

$$J(D) = \left\{ B \subset \mathbb{R}^N : B \subset \text{int}(D) : B \text{ es medible Jordan} \right\}.$$

y sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $\int_B f$ existe para cada $B \in J(D)$. Si los números

$$a^* = \sup \left\{ \int_B f^+ : B \in J(D) \right\}$$

y

$$b^* = \sup \left\{ \int_B f^- : B \in J(D) \right\}$$

no son ambos infinitos, entonces definimos

$$\int_D f = a^* - b^*.$$

Sea D un conjunto en \mathbb{R}^N tal que $\text{int}(D) \neq \emptyset$ y tal que todo subconjunto acotado de su frontera $\text{Fr}(D)$ tiene contenido cero. Se tiene que:

- Si D es cerrado y acotado y f es integrable sobre D , entonces a^* y b^* son ambos finitos y se cumple que

$$\int_D f = a^* - b^*,$$

por lo cual la definición de integral dada aquí es consistente con la noción de integral (de Riemann) que ya conocíamos.

- Si D no es acotado o si f no es acotada sobre D o ambas situaciones a la vez, decimos que

$$\int_D f$$

es una *integral impropia*, la cual converge al valor $a^* - b^*$ si ambos valores son finitos, o bien diverge en otro caso.

TEOREMA 2.4.1 Sea D un conjunto en \mathbb{R}^N tal que $\text{int}(D) \neq \emptyset$ y tal que todo subconjunto acotado de su frontera $\text{Fr}(D)$ tiene contenido cero, y sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Asumamos que D no es acotado o que f no es acotada sobre D o ambas situaciones a la vez. Si la integral impropia $\int_D f$ converge a un valor finito o diverge a $\pm\infty$, y si $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos en $J(D)$ tal que

$$\text{int}(D) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{int}(B_n) \quad \text{y} \quad B_n \subset B_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

entonces

$$\int_D f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_n} f.$$

TEOREMA 2.4.2 Sea D un conjunto en \mathbb{R}^N tal que $\text{int}(D) \neq \emptyset$ y tal que todo subconjunto acotado de su frontera $\text{Fr}(D)$ tiene contenido cero, y sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Si D no es acotado o si f no es acotada sobre D o ambas situaciones a la vez, entonces: la integral impropia $\int_D f$ converge si y solo si la integral $\int_D |f|$ converge.

OBSERVACIÓN 2.4.2 Bajo las hipótesis del Teorema 2.4.2 anterior, si f es una función no negativa en D , entonces $\int_D f$ converge a un número real no negativo, o bien diverge a $+\infty$.

Frecuentemente resultan de utilidad los siguientes resultados.

COROLARIO 2.4.1 Sea D un conjunto en \mathbb{R}^N tal que $\text{int}(D) \neq \emptyset$ y tal que todo subconjunto acotado de su frontera $\text{Fr}(D)$ tiene contenido cero, y sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función.

- Si $\int_D f$ converge o diverge a $\pm\infty$ y $\{B_\rho : a < \rho < b\}$ es una familia de conjuntos en $J(D)$ tal que

$$D = \bigcup_{a < \rho < b} \text{int}(B_\rho) \quad \text{y} \quad B_{\rho_1} \subset B_{\rho_2} \quad \forall \rho_1, \rho_2 \in (a, b) \text{ tales que } \rho_1 < \rho_2,$$

entonces

$$\int_D f = \lim_{\rho \rightarrow b^-} \int_{B_\rho} f.$$

- Si $\int_D f$ converge o diverge a $\pm\infty$ y $\{B_\rho : a < \rho < b\}$ es una familia de conjuntos en $J(D)$ tal que

$$D = \bigcup_{a < \rho < b} \text{int}(B_\rho) \quad \text{y} \quad B_{\rho_2} \subset B_{\rho_1} \quad \forall \rho_1, \rho_2 \in (a, b) \text{ tales que } \rho_1 < \rho_2,$$

entonces

$$\int_D f = \lim_{\rho \rightarrow a^+} \int_{B_\rho} f.$$

TEOREMA 2.4.3 (Criterio de comparación) Sea D un conjunto en \mathbb{R}^N tal que $\text{int}(D) \neq \emptyset$ y tal que todo subconjunto acotado de su frontera $\text{Fr}(D)$ tiene contenido cero, y sean $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones integrables sobre cualquier conjunto que pertenezca a $J(D)$. Si

$$|f(x)| \leq |g(x)| \quad \forall x \in D,$$

entonces

$$i) \quad \int_D f \text{ converge si } \int_D g \text{ converge}$$

$$ii) \quad \int_D g \text{ diverge si } \int_D f \text{ diverge.}$$

EJEMPLO 2.4.2 Estudia la convergencia de

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^p} dA.$$

Solución. Sea $p \in \mathbb{R}$ y pongamos

$$f(x, y) = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^p} > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Como f es continua y positiva sobre \mathbb{R}^2 , tenemos que I o bien converge o bien diverge a $+\infty$. Consideremos los conjuntos

$$B_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq n^2\} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

los cuales verifican

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{int}(B_n) \quad \wedge \quad B_n \subset B_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Luego, usando el difeomorfismo \vec{T} que transforma coordenadas polares a rectangulares, para

$$B_n^* = \{(r, \theta) : 0 < \theta \leq 2\pi \quad \wedge \quad 0 < r \leq n\} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

obtenemos que $\vec{T}(B_n^*) = B_n$. Se sigue que

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{B_n} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^p} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^n \frac{r}{(1+r^2)^p} dr d\theta \\ &= \begin{cases} \frac{\pi}{p-1} \left(1 - \frac{1}{(1+n^2)^{p-1}} \right) & \text{si } p \neq 1 \\ \pi \ln(1+n^2) & \text{si } p = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Luego, aplicando el Teorema 2.4.1 obtenemos

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \begin{cases} \frac{\pi}{p-1} & \text{si } p > 1 \\ \infty & \text{si } p \leq 1. \end{cases} \quad \square$$

EJEMPLO 2.4.3 Evalúa, si es posible, $\iint_R \frac{1}{\sqrt[3]{(x-y)^2}} dx dy$, donde $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

Solución. Notemos que la integral $\iint_R \frac{1}{\sqrt[3]{(x-y)^2}} dx dy$ es impropia, pues la función

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-y)^2}}$$

se indetermina sobre la recta $x = y$ en R , y de hecho se tiene que

$$\lim_{|x-y|\rightarrow 0} f(x, y) = +\infty,$$

por lo que la función f no es acotada en

$$R \setminus \{(x, y) \in R : x = y\},$$

siendo $\{(x, y) \in R : x = y\}$ un conjunto de contenido cero en \mathbb{R}^2 .

Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$ conviene considerar las regiones

$$R_{1,n} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + \frac{1}{n} \leq y \leq 1 \quad \wedge \quad 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \right\}$$

y

$$R_{2,n} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x - \frac{1}{n} < 1 \quad \wedge \quad \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \right\}.$$

Notemos que

$$(R_{1,n} \cup R_{2,n}) \subset (R_{1,n+1} \cup R_{2,n+1}) \subset R \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (R_{1,n} \cup R_{2,n}) = R \setminus \{(x, y) \in R : x = y\}.$$

De esta forma, cualquier punto de la unión de las regiones $R_{1,n} \cup R_{2,n}$ está “lejos” de los puntos de la recta $x = y$ en la región R .

Ahora integramos sobre cada una de estas regiones, y a su vez pasamos al límite

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{R_{1,n}} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-y)^2}} dA = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{1-\frac{1}{n}} \int_{x+\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-y)^2}} dy dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 \int_0^{1-\frac{1}{n}} (x-y)^{\frac{1}{3}} \Big|_{y=x+\frac{1}{n}}^{y=1} dx \right) \\ &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{1-\frac{1}{n}} \left((x-1)^{\frac{1}{3}} - \left(-\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}} \right) dx \\ &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4} (x-1)^{\frac{4}{3}} + \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}} x \right) \Big|_{x=0}^{x=1-\frac{1}{n}} \\ &= \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{R_{2,n}} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-y)^2}} dA = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 \int_0^{x-\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-y)^2}} dy dx \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 \int_{\frac{1}{n}}^1 (x-y)^{\frac{1}{3}} \Big|_{y=0}^{y=x-\frac{1}{n}} dx \right) \\
&= -3 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} \right) dx \\
&= -3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}} x - \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \right) \Big|_{x=\frac{1}{n}}^{x=1} \\
&= \frac{9}{4}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$I = I_1 + I_2 = \frac{9}{2}. \quad \square$$

OBSERVACIÓN 2.4.3 Debemos ser cuidadosos al emplear el Teorema 2.4.1. En efecto, si $f \geq 0$ sobre D , basta escoger cualquier sucesión conveniente (en el sentido de la inclusión) $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $J(D)$ que satisfaga $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ y $B_n \subset B_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, con el fin de obtener

$$\int_B f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_n} f.$$

Sin embargo, cuando f cambia de signo sobre D , una elección particular de la familia de los $\{B_n\}$ puede producir un límite finito en $J(D)$, lo que nos puede llevar a concluir que $\int_D f$ converge, aún cuando esto pueda no ser cierto, como veremos en el siguiente **ejemplo**.

EJEMPLO 2.4.4 Sea $D = [0, \infty) \times [0, \infty)$. Estudia la convergencia de

$$\iint_D y \cos x dx dy.$$

Solución. Consideremos la familia de conjuntos

$$B_n = [0, n\pi] \times [0, n\pi].$$

Claramente,

$$\text{int}(D) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{int}(B_n) \quad \wedge \quad B_n \subset B_{n+1} \quad n \in \mathbb{N},$$

y se verifica que

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{B_n} y \cos x dx dy &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} ((n\pi)^2 \sin(n\pi)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Notemos que esto no es suficiente para concluir que la integral $\iint_D y \cos x \, dx \, dy$ converge. De hecho, esta integral no converge. En efecto, consideremos ahora la familia de conjuntos

$$B'_n = \left[0, (4n-1)\frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, (4n-1)\frac{\pi}{2}\right] \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Claramente,

$$\text{int}(D) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{int}(B'_n) \quad \wedge \quad B'_n \subset B'_{n+1} \quad n \in \mathbb{N},$$

y se verifica que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{B'_n} y \cos x \, dx \, dy &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left((4n-1)\frac{\pi}{2} \right)^2 \sin \left((4n-1)\frac{\pi}{2} \right) \right) \\ &= -\infty. \end{aligned}$$

Esto muestra que la integral impropia $\iint_D y \cos x \, dx \, dy$ no converge. \square

Para no cometer el tipo de error que se ha señalado en la Observación 2.4.3, y que fue ilustrado en el Ejemplo 2.4.4, cuando f sea una función que cambia de signo procederemos de la siguiente forma

(1º) Aplicamos el Teorema 2.4.1 a la función

$$|f| = f^+ + f^-,$$

con $f^+ \geq 0$ y $f^- \geq 0$. Consideramos una familia cualquiera de conjuntos $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que verifique las condiciones del Teorema 2.4.1, de manera que podremos determinar si

$$\int_D |f|$$

converge o diverge.

(2º) Si $\int_D |f|$ converge; es decir, si

$$\int_D |f| < \infty,$$

aplicamos nuevamente el Teorema 2.4.1. Como

$$f = f^+ - f^-,$$

consideramos una familia cualquiera de conjuntos $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que verifique las condiciones del Teorema 2.4.1, de manera que podremos determinar el valor de $\int_D f^+$ y $\int_D f^-$

$$\int_D f.$$

EJERCICIOS 2.4.1

1. Estudia la convergencia de la integral doble $I_p = \iint_R \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)^p}} dA$, $p > 0$, donde

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \geq 1 \wedge |y| \geq 1\}.$$

Sugerencia: Nota que $\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)^p}} > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$, y que $D_1 \subset R \subset D_2$, donde $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq \sqrt{2}\}$ y $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}\}$. Luego, puedes usar coordenadas polares y comparar.

2. Estudia la convergencia de la integral triple $I_q = \iiint_D \frac{1}{(x^2+2y^2+z^2)^q} dV$, $q > 0$, donde

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

En particular, evalúa I_q para $q = \frac{1}{2}$ y para $q = 1$.

Sugerencia: Nota que si $q > 0$ entonces $\frac{1}{2^q(x^2+y^2+z^2)^q} \leq \frac{1}{(x^2+2y^2+z^2)^q} \leq \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^q}$ $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Luego, puedes usar coordenadas esféricas y el criterio de comparación para estudiar la convergencia.

Para ver las Soluciones de los Ejercicios 2.4.1 presiona aquí A

2.5. Aplicaciones de la integración múltiple

2.5.1. Masa, centro de masa y momentos en \mathbb{R}^2

Para fijar ideas, en esta sección partimos considerando una lámina (o placa) rectangular delgada R contenida en el plano xy . Más específicamente, aquí consideramos $R = [a, b] \times [c, d]$, y denotamos por:

- $\rho(x, y)$ a la función densidad de área de la lámina en el punto $(x, y) \in R$, en $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right]$, la cual asumimos continua sobre R .
- $\mathcal{P}_{1,m} = \{a = x_0, x_1, \dots, x_m = b\}$ a una partición de $[a, b]$
- $\mathcal{P}_{2,n} = \{c = y_0, y_1, \dots, y_n = d\}$ a una partición de $[c, d]$
- $\vec{\mathcal{P}} = \mathcal{P}_{1,m} \times \mathcal{P}_{2,n}$ a la partición rectangular de R generada por $\mathcal{P}_{1,m}$ y $\mathcal{P}_{2,n}$, la cual consta de $m n$ rectángulos aquí denotados por R_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Masa

Para encontrar la medida de la masa total de la lámina procedemos de la siguiente forma: Sea $(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}) \in R$ un punto cualquiera del rectángulo R_{ij} ; cuya área es $m(R_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j$; entonces una

aproximación de la medida de la masa del rectángulo R_{ij} es

$$\rho(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij})\Delta x_i \Delta y_j,$$

y sumando la medida de la masa de cada región R_{ij} , obtenemos una aproximación de la medida de la masa del rectángulo R , la cual está dada por

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \rho(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij})\Delta x_i \Delta y_j.$$

Por lo tanto, pasando al límite cuando $\|\vec{\mathcal{P}}\| \xrightarrow[m,n \rightarrow \infty]{} 0$ (recordar que $\|\vec{\mathcal{P}}\| = \max\{\|\mathcal{P}_{1,m}\|_\infty, \|\mathcal{P}_{2,n}\|_\infty\}$), obtenemos que la medida M de la *masa de la lámina completa* está dada por

$$M = \lim_{\|\vec{\mathcal{P}}\| \xrightarrow[m,n \rightarrow \infty]{} 0} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \rho(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij})\Delta x_i \Delta y_j = \iint_R \rho(x, y) dA$$

Momentos estáticos (primeros momentos)

DEFINICIÓN 2.5.1 Llamamos *momento estático* de una partícula de masa m [kg] en torno a un eje, al valor $r m$ [kg][m], donde r es la distancia desde la partícula al eje.

La medida del *primer momento* en torno a un eje de una partícula que posee masa, corresponde al producto entre la masa de la partícula y su distancia – que considera el signo – a tal eje. De esta forma, la medida del momento de masa del rectángulo R_{ij} con respecto al eje x se calcula en forma aproximada por la cantidad

$$\bar{y}_{ij} \rho(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j,$$

y sumando la medida del momento de masa de cada región, obtenemos una aproximación de la medida del momento de masa del rectángulo R con respecto al eje x , la cual está dada por

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \bar{y}_{ij} \rho(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j.$$

Por lo tanto, pasando al límite cuando $\|\vec{\mathcal{P}}\| \xrightarrow[m,n \rightarrow \infty]{} 0$, obtenemos que la medida M_x del *momento de masa con respecto al eje x* de la lámina completa corresponde a

$$M_x = \lim_{\|\vec{\mathcal{P}}\| \xrightarrow[m,n \rightarrow \infty]{} 0} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \bar{y}_{ij} \rho(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j = \iint_R y \rho(x, y) dA$$

Análogamente, la medida del momento de masa del rectángulo R_{ij} con respecto al eje y se calcula

en forma aproximada por

$$\bar{x}_{ij} \rho(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j,$$

y sumando la medida del momento de masa de cada región, obtenemos una aproximación de la medida del momento de masa del rectángulo R , la cual está dada por

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \bar{x}_{ij} \rho(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j.$$

Por lo tanto, pasando al límite cuando $\|\vec{\mathcal{P}}\| \xrightarrow[m,n \rightarrow \infty]{} 0$, obtenemos que la medida M_y del *momento de masa con respecto al eje y* de la lámina completa corresponde a

$$M_y = \lim_{\|\vec{\mathcal{P}}\| \xrightarrow[m,n \rightarrow \infty]{} 0} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \bar{x}_{ij} \rho(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j = \iint_R x \rho(x, y) dA$$

Centro de masa

El centro de masa de una lámina se representa geométricamente por el punto (\bar{x}, \bar{y}) , que en términos dinámicos se comporta como el punto donde el balanceo de la lámina permanece en equilibrio. Entonces,

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$$

Momentos de inercia (segundos momentos)

DEFINICIÓN 2.5.2 Llamamos *momento de inercia* de una partícula de masa m [kg] en torno a un eje, al valor $r^2 m$ [kg][m²], donde r es la distancia desde la partícula al eje.

Desde la definición anterior es razonable pensar que si tenemos n partículas, entonces el momento de inercia total debe ser la suma de los momentos de inercia de cada una de las partículas. Siguiendo esta idea, tenemos que el momento de inercia total debe ser

$$I = \sum_{i=1}^n r_i^2 m_i.$$

A continuación extendemos este concepto a una distribución continua de masa en una región del plano xy . Procedemos como sigue: Sea $(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}) \in R$ un punto cualquiera del rectángulo R_{ij} ; cuya área es $m(R_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j$; entonces una aproximación de la medida del momento de inercia respecto del eje x en el rectángulo R_{ij} será

$$\bar{y}_{ij}^2 \rho(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

Luego, sumando los momentos de inercia de cada rectángulo R_{ij} y pasando al límite cuando

$\|\vec{\mathcal{P}}\| \xrightarrow[m,n \rightarrow \infty]{} 0$, obtenemos que la medida I_x del *momento de inercia respecto al eje x de la lámina completa* es

$$I_x = \lim_{\|\vec{\mathcal{P}}\| \xrightarrow[m,n \rightarrow \infty]{} 0} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \bar{y}_{ij}^2 \rho(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j = \iint_R y^2 \rho(x, y) dA$$

Análogamente, la medida I_y del *momento de inercia respecto al eje y de la lámina completa* es

$$I_y = \lim_{\|\vec{\mathcal{P}}\| \xrightarrow[m,n \rightarrow \infty]{} 0} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \bar{x}_{ij}^2 \rho(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j = \iint_R x^2 \rho(x, y) dA$$

Ahora, tomando en cuenta que la distancia de un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ al origen está dada $\sqrt{x^2 + y^2}$, también podemos calcular la medida I_0 del *momento de inercia respecto al origen de la lámina completa*, la que corresponde a

$$I_0 = \lim_{\|\vec{\mathcal{P}}\| \xrightarrow[m,n \rightarrow \infty]{} 0} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (\bar{x}_{ij}^2 + \bar{y}_{ij}^2) \rho(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j = \iint_R (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA$$

Finalmente, dada una recta L , y considerando la distancia de un punto (x, y) en la lámina, a la recta, distancia que aquí denotamos por $r(x, y)$; podemos calcular la medida I_L del *momento de inercia respecto de la recta L de la lámina completa*, la que corresponde a

$$I_L = \lim_{\|\vec{\mathcal{P}}\| \xrightarrow[m,n \rightarrow \infty]{} 0} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (r(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}))^2 \rho(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j = \iint_R (r(x, y))^2 \rho(x, y) dA$$

OBSERVACIÓN 2.5.1 *Las fórmulas obtenidas son válidas en dominios generales donde la función densidad resulte integrable. Más aún, las fórmulas incluso se pueden validar para integrales impropias cuando éstas convergen.*

Fórmulas para la masa y momentos de láminas delgadas en el plano xy

■ **Masa:**

$$M = \iint_R \rho(x, y) dA$$

■ **Momentos estáticos (primeros momentos) con respecto a los ejes coordinados:**

$$M_x = \iint_R y \rho(x, y) dA \quad y \quad M_y = \iint_R x \rho(x, y) dA.$$

■ **Centro de masa:** (\bar{x}, \bar{y})

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}.$$

OBSERVACIÓN: Si la densidad es constante, el **centro de masa** se denomina **centroide**.

■ **Momentos de inercia (segundos momentos) con respecto a los ejes coordenados:**

$$I_x = \iint_R y^2 \rho(x, y) dA \quad \text{e} \quad I_y = \iint_R x^2 \rho(x, y) dA.$$

■ **Momento de inercia con respecto a una recta L :**

$$I_L = \iint_R (r(x, y))^2 \rho(x, y) dA,$$

donde $r(x, y)$ es la distancia del punto (x, y) a la recta L .

■ **Momento de inercia con respecto al origen (momento polar):**

$$I_0 = \iint_R (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA = I_x + I_y.$$

■ **Radios de giro:**

$$\text{respecto del eje } x: R_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}},$$

$$\text{respecto del eje } y: R_y = \sqrt{\frac{I_y}{M}},$$

$$\text{respecto del origen: } R_0 = \sqrt{\frac{I_0}{M}}.$$

EJEMPLO 2.5.1 Determina la masa de una lámina que tiene la forma de una región limitada por la curva $y = \sqrt{1 - x^2}$ en el semiplano $y \geq 0$ y cuya densidad está dada por la fórmula $\rho(x, y) = e^{x^2+y^2}$.

Solución. Se nos pide calcular

$$M = \iint_D e^{x^2+y^2} dx dy,$$

cuya región de integración está dada por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \quad \wedge \quad 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}.$$

Para realizar el cálculo de la integral requerida, transformamos la región D mediante el uso de coordenadas polares. Ponemos $\vec{T}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = (x, y)$, y obtenemos $\vec{T}(D^*) = D$, donde

$$D^* = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1 \quad \wedge \quad 0 < \theta \leq \pi\}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} M &= \iint_D e^{x^2+y^2} dx dy = \int_0^\pi \int_0^1 r e^{r^2} dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{2} e^{r^2} \Big|_{r=0}^{r=1} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (e - 1) d\theta \\ &= \frac{\pi}{2}(e - 1). \quad \square \end{aligned}$$

EJEMPLO 2.5.2 Calcula el centro de masa de una lámina que tiene la forma de una región limitada por la semicircunferencia de ecuación $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = (\frac{a}{2})^2$ y el eje x , en la zona donde $y \geq 0$, y cuya densidad superficial en un punto cualquiera es proporcional a su distancia al origen.

Solución. Sea

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4} \quad \wedge \quad y \geq 0 \right\}$$

y sea k la constante de proporcionalidad entre la densidad superficial en un punto de la lámina y la medida de la distancia de este punto al origen. Notemos que la ecuación de la semicircunferencia se puede reescribir en la forma $x^2 + y^2 = ax$, y que la distancia de un punto (x, y) al origen es $\sqrt{x^2 + y^2}$. Luego, pasando a coordenadas polares $\vec{T}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = (x, y)$, la ecuación de la semicircunferencia equivale a

$$r^2 = a r \cos \theta \quad \Leftrightarrow \quad r = a \cos \theta \quad \text{pues } r > 0,$$

mientras que la distancia de un punto (x, y) al origen equivale a r . Además, $\vec{T}(D^*) = D$, donde

$$D^* = \left\{ (r, \theta) : 0 < r \leq a \cos \theta \quad \wedge \quad 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Luego, la masa de la lámina es

$$\begin{aligned} M &= \iint_D k \sqrt{x^2 + y^2} dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \theta} k r^2 dr d\theta \\ &= k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{3} \Big|_0^{a \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{k}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta \\ &= \frac{k}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta (1 - \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{k}{3} a^3 \left(\sin \theta - \frac{1}{3} \sin^3 \theta \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2}{9} k a^3. \end{aligned}$$

Ahora calculamos los momentos de inercia respecto a los ejes coordenados,

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_R y k \sqrt{x^2 + y^2} dA = k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \theta} r^3 \sin \theta dr d\theta \\ &= k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^4}{4} \sin \theta \Big|_0^{a \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{k}{4} a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \sin \theta d\theta \\ &= \frac{k}{4} a^4 \left(\frac{\cos^5 \theta}{5} \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{20} k a^4 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} M_y &= \iint_R x k \sqrt{x^2 + y^2} dA = k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \theta} r^3 \cos \theta dr d\theta \\ &= k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^4}{4} \cos \theta \Big|_0^{a \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{k}{4} a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta d\theta \\ &= \frac{k}{4} a^4 \left(\sin \theta - \frac{2}{3} \sin^3 \theta + \frac{\sin^5 \theta}{5} \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2}{15} k a^4. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el centro de masa está ubicado en el punto

$$\begin{aligned} (\bar{x}, \bar{y}) &= \left(\frac{M_y}{M}, \frac{M_x}{M} \right) \\ &= \left(\frac{\frac{2}{15} k a^4}{\frac{2}{9} k a^3}, \frac{\frac{1}{20} k a^4}{\frac{2}{9} k a^3} \right) \\ &= \left(\frac{3}{5} a, \frac{9}{40} a \right). \quad \square \end{aligned}$$

EJEMPLO 2.5.3 Determina el centroide de la región infinita ubicada en el segundo cuadrante y comprendida entre los ejes coordenados y la curva $y = e^x$.

Solución. Sabemos que un centroide la densidad es constante, así que en este ejemplo asumimos que la densidad es fija e igual a ρ . Además, es claro que la región D donde vamos a integrar está dada por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0 \quad \wedge \quad 0 \leq y \leq e^x\}.$$

Luego, la masa de la lámina es

$$\begin{aligned} M &= \int_{-\infty}^0 \int_0^{e^x} \rho \, dy \, dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^0 \int_0^{e^x} \rho \, dy \, dx \\ &= \rho \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^0 e^x \, dx \\ &= \rho \lim_{b \rightarrow \infty} (1 - e^{-b}) \\ &= \rho. \end{aligned}$$

Ahora calculamos los momentos de inercia respecto a los ejes coordenados,

$$\begin{aligned} M_y &= \int_{-\infty}^0 \int_0^{e^x} x \rho \, dy \, dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^0 \int_0^{e^x} x \rho \, dy \, dx \\ &= \rho \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^0 x e^x \, dx \\ &= \rho \lim_{b \rightarrow \infty} (be^{-b} - 1 + e^{-b}) \\ &= -\rho \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-\infty}^0 \int_0^{e^x} y \rho \, dy \, dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^0 \int_0^{e^x} y \rho \, dy \, dx \\ &= \frac{1}{2} \rho \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^0 e^{2x} \, dx \\ &= \frac{1}{4} \rho \lim_{b \rightarrow \infty} (1 - e^{-2b}) \\ &= \frac{1}{4} \rho. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el centro de masa está ubicado en el punto

$$\begin{aligned} (\bar{x}, \bar{y}) &= \left(\frac{M_y}{M}, \frac{M_x}{M} \right) \\ &= \left(\frac{-\rho}{\rho}, \frac{\frac{1}{4}\rho}{\rho} \right) \\ &= \left(-1, \frac{1}{4} \right). \quad \square \end{aligned}$$

2.5.2. Masa, centro de masa y momentos en \mathbb{R}^3

En dimensión $N = 3$, a diferencia de lo realizado en dimensión $N = 2$, solo daremos las fórmulas.

Fórmulas para la masa y momentos de objetos sólidos en el espacio xyz

■ Masa:

$$M = \iiint_D \rho(x, y, z) dV.$$

■ Primeros momentos con respecto a los planos coordenados:

$$M_{yz} = \iiint_D x \rho(x, y, z) dV, \quad M_{xz} = \iiint_D y \rho(x, y, z) dV \quad \text{y} \quad M_{xy} = \iiint_D z \rho(x, y, z) dV.$$

■ Centro de masa: $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} \quad \text{y} \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}.$$

OBSERVACIÓN: Si la densidad es constante, el **centro de masa** se denomina **centroide**.

■ Momentos de inercia (segundos momentos) con respecto a los ejes coordinados:

$$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV, \quad I_y = \iiint_D (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV$$

e

$$I_z = \iiint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dV.$$

■ Momento de inercia con respecto a una recta L :

$$I_L = \iiint_D (r(x, y, z))^2 \rho(x, y, z) dV,$$

donde $r(x, y, z)$ es la distancia del punto (x, y, z) a la recta L .

■ Radio de giro con respecto a una recta L :

$$R_L = \sqrt{\frac{I_L}{M}}.$$

■ Momentos de inercia (segundos momentos) con respecto a los planos coordinados:

$$I_{yz} = \iiint_D x^2 \rho(x, y, z) dV, \quad I_{xz} = \iiint_D y^2 \rho(x, y, z) dV$$

e

$$I_{xy} = \iiint_D z^2 \rho(x, y, z) dV.$$

■ Momento de inercia con respecto al origen:

$$I_0 = \iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV.$$

EJEMPLO 2.5.4 Sea $a > 0$. Calcula la masa del sólido encerrado por la semiesfera de radio a metros, con base centrada en el origen del plano xy , si la densidad de volumen en cualquier punto del sólido es proporcional a la distancia desde el punto al eje z , medida en kilogramos por metro cúbico.

Solución. Notemos que la distancia desde un punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ al eje z está dada por

$$d((x, y, 0), (0, 0, 0)) = d((x, y), (0, 0)) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Notemos también que la semiesfera con base centrada en el origen y radio a tiene por ecuación a

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

De esta forma, si denotamos por D a la semibola $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ con $z \geq 0$, cuya proyección en el plano xy es el círculo $x^2 + y^2 = a^2$, nos resulta conveniente introducir el difeomorfismo $\vec{T}(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sen \theta, z) = (x, y, z)$ que transforma coordenadas cilíndricas a rectangulares, de manera que $\vec{T}(D^*) = D$, donde D^* es la región limitada por

$$\begin{cases} 0 < r \leq a \\ 0 < \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - r^2}. \end{cases}$$

Luego, si k es la constante de proporcionalidad, la masa solicitada es:

$$\begin{aligned} M &= \iiint_D k\sqrt{x^2 + y^2} \, dV = k \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - r^2}} r^2 \, dz \, dr \, d\theta \\ &= k \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 \sqrt{a^2 - r^2} \, dr \, d\theta \\ &= k \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{4}r(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}a^2r\sqrt{a^2 - r^2} + \frac{1}{8}a^4 \arcsen \frac{r}{a} \right) \Big|_{r=0}^{r=a} \, d\theta \\ &= \frac{1}{16}ka^2\pi \int_0^{2\pi} \, d\theta \\ &= \frac{1}{8}ka^4\pi^2 \left[\frac{kg}{m^3} \right]. \quad \square \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 2.5.2 Otra forma de resolver el Ejercicio 2.5.4 es usando el difeomorfismo $\vec{T}(\rho, \theta, \phi) = (\rho \cos \theta \sen \phi, \rho \sen \theta \cos \phi, \rho \cos \phi) = (x, y, z)$ que transforma coordenadas esféricas en rectangulares, de manera que $\vec{T}(D^*) = D$, donde D^* es la región limitada por

$$\begin{cases} 0 < \rho \leq a \\ 0 < \theta \leq 2\pi \\ 0 < \phi \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Luego, si k es la constante de proporcionalidad, la masa solicitada será:

$$\begin{aligned}
 M &= \iiint_D k\sqrt{x^2 + y^2} dV = k \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 \sin^2 \phi d\phi d\rho d\theta \\
 &= k \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 \left(\frac{1 - \cos(2\phi)}{2} \right) d\phi d\rho d\theta \\
 &= \frac{k}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho^3 \left(\phi - \frac{\sin(2\phi)}{2} \right) \Big|_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{2}} d\rho d\theta \\
 &= \frac{k}{4} \pi \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho^3 d\rho d\theta \\
 &= \frac{k}{4} \pi \int_0^{2\pi} \frac{\rho^4}{4} \Big|_{\rho=0}^{\rho=a} d\theta \\
 &= \frac{1}{8} k a^4 \pi^2 \left[\frac{kg}{m^3} \right]. \quad \square
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 2.5.5 Un sólido homogéneo está limitado superiormente por la superficie $\rho = a$, e inferiormente por el cono $\phi = \alpha$, donde $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Calcula el momento de inercia del sólido con respecto al eje z , si la densidad de volumen del sólido en cualquier punto del sólido es k kilogramos por metro cúbico.

Solución. De acuerdo a la información del enunciado, la región de integración, que aquí denotamos por D , conviene que sea expresada en coordenadas esféricas. En estas coordenadas, los límites de la región D son:

$$\begin{cases} 0 < \phi \leq \alpha \\ 0 < \theta \leq 2\pi \\ 0 < \rho \leq a. \end{cases}$$

Luego, el momento de inercia del sólido con respecto al eje z es

$$\begin{aligned}
 I_z &= \iiint_D k(\rho \sin \phi)^2 dV = k \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho^4 \sin^3 \phi d\rho d\theta d\phi \\
 &= \frac{1}{5} k a^5 \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} \sin^3 \phi d\theta d\phi \\
 &= \frac{2}{5} k a^5 \pi \int_0^\alpha \sin^3 \phi d\phi \\
 &= \frac{2}{5} k a^5 \pi \left(-\cos \phi + \frac{1}{3} \cos^3 \phi \right) \Big|_{\phi=0}^{\phi=\alpha} \\
 &= \frac{2}{15} k a^5 \pi (\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha + 2) \left[\frac{kg}{m^3} \right]. \quad \square
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 2.5.6 Calcula el centro de masa de un sólido con densidad constante k acotado por abajo por el plano xy (o bien plano $z = 0$) y por arriba por el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$.

Solución. Como la proyección del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ sobre el plano xy es el círculo $x^2 + y^2 \leq 4$, nos conviene describir la región de integración, aquí denotada por D , en coordenadas cilíndricas. En estas coordenadas, los límites de la región D son:

$$\begin{cases} 0 < \theta \leq 2\pi \\ 0 < r \leq 2 \\ 0 \leq z \leq 4 - r^2. \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{aligned} M &= \iiint_D k \, dV = k \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{4-r^2} r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= k \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r \, dr \, d\theta \\ &= -\frac{1}{4} k \int_0^{2\pi} (4 - r^2)^2 \Big|_{r=0}^{r=2} \, d\theta \\ &= \frac{16}{4} k \int_0^{2\pi} \, d\theta \\ &= 8k\pi \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iint_D kz \, dV = k \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{4-r^2} zr \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} k \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2)^2 r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} k \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{6}(4 - r^2)^3 \right) \Big|_{r=0}^{r=2} \, d\theta \\ &= \frac{16}{3} k \int_0^{2\pi} \, d\theta \\ &= \frac{32}{3} k\pi. \end{aligned}$$

Por lo tanto, dado que por simetría se debe tener $\bar{x} = 0$ y $\bar{y} = 0$, y por otro lado, sabemos que

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M},$$

concluimos que el centro de masa solicitado es

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, 0, \frac{4}{3} \right). \quad \square$$

Parte II

Cálculo vectorial

Una forma de describir la trayectoria de una partícula en el plano \mathbb{R}^2 es mediante ecuaciones paramétricas de la forma $x = x(t)$ e $y = y(t)$, que representan a las coordenadas de posición de la partícula en el plano en el tiempo t . Similarmente, podemos describir la trayectoria de una partícula en el espacio \mathbb{R}^3 mediante ecuaciones paramétricas de la forma $x = x(t)$, $y = y(t)$ y $z = z(t)$. La trayectoria completa de la partícula representa una curva orientada en el plano o el espacio, según corresponda.

En el presente capítulo, vamos a estudiar curvas en el plano y el espacio que dependen de un parámetro, vamos a calcular su longitud de arco y a introducir el concepto de integral de línea, para finalmente establecer el Teorema de Green, que relaciona una integral doble sobre una región del plano con una integral de línea respecto a una curva cerrada que recorre la frontera de tal región.

3.1. Funciones vectoriales

DEFINICIÓN 3.1.1 (Funciones vectoriales) Sea I un intervalo en \mathbb{R} y para cada $i = 1, 2, \dots, N$, sea $\psi_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función real. La función

$$\begin{aligned}\vec{r} : I &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ t &\rightarrow \vec{r}(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_N(t))\end{aligned}$$

se denomina *función vectorial* de parámetro t , respecto de las funciones ψ_i , $i = 1, 2, \dots, N$.

OBSERVACIÓN 3.1.1

- En el caso $N = 2$, es usual escribir

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} = (x(t), y(t)).$$

- En el caso $N = 3$, es usual escribir

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} = (x(t), y(t), z(t)).$$

DEFINICIÓN 3.1.2 (Límite de una función vectorial) Sea I un intervalo abierto en \mathbb{R} , sea $\vec{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ una función vectorial y sea $\vec{L} \in \mathbb{R}^N$ un vector. Decimos que \vec{L} es el *límite* de $\vec{r}(t)$ cuando t tiende a t_0 , lo cual escribimos como

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{L},$$

si se cumple que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \text{ tal que } (\forall t \in I)(0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow \|\vec{r}(t) - \vec{L}\| < \varepsilon).$$

OBSERVACIÓN 3.1.2 Si en la definición anterior consideramos $N = 3$, $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ y $\vec{L} = L_1\hat{i} + L_2\hat{j} + L_3\hat{k}$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{L}$$

si y solo si

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = L_1, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = L_2 \quad y \quad \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = L_3.$$

DEFINICIÓN 3.1.3 (Continuidad de una función vectorial) Sea I un intervalo abierto en \mathbb{R} , sea $\vec{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ una función vectorial y sea $t_0 \in I$. Decimos que \vec{r} es *continua* en el punto t_0 si

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0).$$

Más aún, decimos que la función \vec{r} es continua en I si lo es en cada punto de I .

DEFINICIÓN 3.1.4 (Derivabilidad de una función vectorial) Sea I un intervalo abierto en \mathbb{R} , sea $\vec{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ una función vectorial y sea $t_0 \in I$. Decimos que \vec{r} es *derivable* en el punto t_0 si el siguiente límite existe

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0 + h) - \vec{r}(t_0)}{h},$$

y en cuyo caso escribimos

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0 + h) - \vec{r}(t_0)}{h}.$$

Más aún, decimos que la función \vec{r} es derivable si lo es en cada punto de su dominio.

OBSERVACIÓN 3.1.3 Si en la definición anterior consideramos $N = 3$ y $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$, entonces $\vec{r}(t)$ es derivable en t_0 si y solo si $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son funciones derivables en t_0 , en cuyo caso se verifica que

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) = x'(t_0)\hat{i} + y'(t_0)\hat{j} + z'(t_0)\hat{k}.$$

DEFINICIÓN 3.1.5 Sea $N = 2$ o $N = 3$, sea I un intervalo abierto en \mathbb{R} y sea $\vec{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ una función vectorial que representa la posición de una partícula que se mueve a lo largo de una curva de clase C^1 en el plano si $N = 2$ o en el espacio si $N = 3$, entonces:

- El *vector velocidad de la partícula*, en cualquier instante t , es el vector tangente a la curva, esto es,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

- La *dirección del movimiento de la partícula*, en cualquier instante t , es la dirección de \vec{v} , esto es

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}.$$

- La *rapidez de la partícula* es la magnitud del vector \vec{v} , esto es,

$$v = \|\vec{v}\|.$$

- El *vector de aceleración de la partícula* es, cuando existe, la derivada de \vec{v} , esto es,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

OBSERVACIÓN 3.1.4 Notemos que la velocidad de una partícula en movimiento se puede expresar como el producto de su rapidez y dirección, esto es,

$$\vec{v} = \|\vec{v}\| \hat{v}.$$

TEOREMA 3.1.1 (Reglas de derivación para funciones vectoriales) Sea I un intervalo abierto en \mathbb{R} , sean $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ y $v : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ dos funciones vectoriales derivables en I , sea $\vec{C} \in \mathbb{R}^N$ un vector constante, sea $c \in \mathbb{R}$ un escalar y sea $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función real derivable en I . Entonces se verifican las siguientes propiedades:

i) **Derivada de una función vectorial constante**

$$\frac{d}{dt} \vec{C} = \vec{0}.$$

ii) **Derivada de un escalar por una función vectorial**

$$\frac{d}{dt} (c \vec{u}(t)) = c \frac{d\vec{u}}{dt}(t) \quad \forall t \in I.$$

iii) **Derivada de una función escalar por una función vectorial**

$$\frac{d}{dt} (\psi(t) \vec{v}(t)) = \psi'(t) \vec{u}(t) + \psi(t) \frac{d\vec{v}}{dt}(t) \quad \forall t \in I.$$

iv) Derivada de la adición (sustracción) de funciones vectoriales

$$\frac{d}{dt}(\vec{u}(t) \pm \vec{v}(t)) = \frac{d\vec{u}}{dt}(t) \pm \frac{d\vec{v}}{dt}(t) \quad \forall t \in I.$$

v) Derivada del producto punto de funciones vectoriales

$$\frac{d}{dt}(\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t)) = \frac{d\vec{u}}{dt}(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}(t) \quad \forall t \in I.$$

vi) Derivada del producto cruz de funciones vectoriales

$$\frac{d}{dt}(\vec{u}(t) \times \vec{v}(t)) = \frac{d\vec{u}}{dt}(t) \times \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \times \frac{d\vec{v}}{dt}(t) \quad \forall t \in I.$$

vii) Regla de la cadena (Derivada de la compuesta entre una función vectorial y una función real)

$$\frac{d}{dt}(\vec{u}(\psi(t))) = \frac{d\vec{u}}{dt}(\psi(t)) \psi'(t) \quad \forall t \in I.$$

TEOREMA 3.1.2 (Funciones vectoriales de longitud constante) Sea I un intervalo abierto en \mathbb{R} y sea $\vec{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^N$ una función vectorial derivable con longitud constante, entonces

$$\vec{r}(t) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = 0 \quad \forall t \in I.$$

OBSERVACIÓN 3.1.5 Notemos que si $\vec{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ representa el movimiento de una partícula que se mueve sobre la superficie de una esfera con centro en el origen, entonces el vector posición de cualquier partícula en un instante t posee longitud constante igual al radio de la esfera. Es claro que el vector velocidad $\frac{d\vec{r}}{dt}$ resulta ser tangente a la trayectoria \vec{r} del movimiento, por lo que,

$$\vec{r}(t) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = 0 \quad \forall t \in I.$$

DEFINICIÓN 3.1.6 (Integral indefinida de una función vectorial) Sea I un intervalo en \mathbb{R} y sea $\vec{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^N$ una función vectorial tal que $\vec{r}(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_N(t))$, para cada $t \in I$, donde $\psi_i: I \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, N$, representa una función real de primitiva Ψ_i . Llamamos *antiderivada* de \vec{r} con respecto a t a la N -upla $(\Psi_1(t), \Psi_2(t), \dots, \Psi_N(t))$, y llamamos *integral indefinida* de \vec{r} con respecto a t a la expresión

$$\int \vec{r}(t) dt := (\Psi_1(t), \Psi_2(t), \dots, \Psi_N(t)) + \vec{C} \quad \text{donde } \vec{C} \in \mathbb{R}^N \text{ es arbitrario.}$$

Como era esperable, si $\vec{\Psi}$ es una antiderivada de \vec{r} , entonces

$$\int \vec{r}(t) dt = \vec{\Psi}(t) + \vec{C},$$

donde \vec{C} es un vector constante arbitrario.

Por ejemplo, si $N = 3$ y

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k},$$

y

$$X, \quad Y \quad \text{y} \quad Z$$

son, respectivamente, antiderivadas de x, y y z , entonces

$$\begin{aligned}\int \vec{r}(t) dt &= \int (x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}) dt \\ &= \left(\int x(t) dt \right) \hat{i} + \left(\int y(t) dt \right) \hat{j} + \left(\int z(t) dt \right) \hat{k} \\ &= X(t)\hat{i} + Y(t)\hat{j} + Z(t)\hat{k} + \vec{C}.\end{aligned}$$

Es decir, se verifica que

$$\begin{aligned}\vec{\Psi}(t) &= X(t)\hat{i} + Y(t)\hat{j} + Z(t)\hat{k} \\ &= (X(t), Y(t), Z(t)).\end{aligned}$$

DEFINICIÓN 3.1.7 (Integral definida de una función vectorial) Sea $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ una función vectorial tal que $\vec{r}(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_N(t))$, para cada $t \in [a, b]$, donde $\psi_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$, $i = 1, 2, \dots, N$, representa una función real integrable en $[a, b]$. Entonces, \vec{r} es *integrable* en $[a, b]$ y la *integral definida* de \vec{r} en $[a, b]$ está dada por

$$\begin{aligned}\int_a^b \vec{r}(t) dt &= \int_a^b (\psi_1(t)\hat{i}_1 + \psi_2(t)\hat{i}_2 + \dots + \psi_N(t)\hat{i}_N) dt \\ &= \left(\int_a^b \psi_1(t) dt \right) \hat{i}_1 + \left(\int_a^b \psi_2(t) dt \right) \hat{i}_2 + \dots + \left(\int_a^b \psi_N(t) dt \right) \hat{i}_N.\end{aligned}$$

3.2. Curvas en \mathbb{R}^2 y en \mathbb{R}^3

En esta sección reduciremos nuestro estudio a dimensiones 2 y 3

DEFINICIÓN 3.2.1 (Representación paramétrica de una curva) Sea $N = 2$ o $N = 3$. Una curva γ en \mathbb{R}^N es un conjunto dirigido de puntos de \mathbb{R}^N para los cuales existe una función continua $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ tal que $\vec{r}([a, b]) = \gamma$. La función continua \vec{r} se denomina *parametrización* o *trayectoria* de la curva γ . El conjunto es dirigido en el sentido que \vec{r} establece un orden en el cual aparecen los puntos $\vec{r}(t) \in \gamma$ cuando t varía desde a hasta b . El punto $\vec{r}(a)$ se denomina *punto inicial* de la curva, mientras que el punto $\vec{r}(b)$ se denomina *punto terminal*.

DEFINICIÓN 3.2.2 Sea $N = 2$ o $N = 3$, sea γ una curva en \mathbb{R}^N y sea $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ una parametrización de γ . Decimos que

- $\vec{P}_0 \in \mathbb{R}^N$ pertenece a la curva γ si $\exists t_0 \in [a, b]$ tal que $\vec{P}_0 = \vec{r}(t_0)$.
 - El conjunto $\{\vec{P} \in \mathbb{R}^N : \exists t \in [a, b] \text{ tal que } \vec{P} = \vec{r}(t)\}$ es la *traza de la curva* γ .
 - γ es una curva cerrada si $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.
 - $\vec{P} \in \gamma$ es un punto múltiple si existe más de un valor $t \in]a, b[$ tal que $\vec{P} = \vec{r}(t)$.
 - γ es una curva simple si no tiene puntos múltiples. Es decir, γ es simple si \vec{r} es inyectiva en $]a, b[$.
 - γ es una curva suave si posee una parametrización $\vec{r} \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^N)$, en cuyo caso también decimos que \vec{r} es suave.
 - $t_0 \in [a, b]$ es un punto singular de $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ si
- $$\left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) \right\| = 0.$$
- $t_0 \in [a, b]$ es un punto regular de $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ si
- $$\left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) \right\| \neq 0.$$
- γ es una curva regular si admite una parametrización \vec{r} tal que cada $t \in [a, b]$ es un punto regular de \vec{r} , en cuyo caso también decimos que la parametrización \vec{r} es regular.
 - γ es seccionalmente regular o regular a trozos si admite una parametrización regular, salvo un número finito de puntos singulares.

OBSERVACIÓN 3.2.1 Sea $N = 2$ o $N = 3$.

- Si γ es una curva de trayectoria $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$, tal que

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) \neq \vec{0},$$

entonces la recta tangente a la curva γ en el punto $\vec{r}(t_0)$, es la recta que pasa por $\vec{r}(t_0)$, que es paralela al vector

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0).$$

- Con el fin de garantizar que una curva regular γ tenga rectas tangentes que varíen continuamente

sobre cada punto de su trayectoria asociada $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$, es necesario que

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t) \neq \vec{0} \quad \forall t \in [a, b].$$

En otras palabras, una curva regular no posee "puntas" (esquinas o cúspides).

- Una curva seccionalmente regular (regular a trozos) está formada por un número finito de curvas regulares que se han unido una tras otra por sus extremos (el punto terminal de una es el punto inicial de la otra).
- Las definiciones presentadas son las que se usan en estos apuntes y no siempre coinciden con las definiciones dadas en otros textos. La principal diferencia es acerca del significado de curva regular. En algunos textos, y en nuestro lenguaje, ésta se define como una curva que admite una parametrización regular y suave; mientras que en otros se define como una curva que admite una parametrización simple, regular y suave. De esta forma, al comparar los resultados aquí expuestos, se deben tener en cuenta estas diferencias.

EJEMPLO 3.2.1 Muestra que la recta γ en \mathbb{R}^3 que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) en la dirección del vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, con $\vec{v} \neq \vec{0}$, es una curva simple, suave y no cerrada. ¿Bajo qué condiciones la parametrización encontrada es regular?

Solución. Notemos que la recta γ puede ser parametrizada mediante la función vectorial

$$\begin{aligned}\vec{r}: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow \vec{r}(t) = (x_0, y_0, z_0) + t\vec{v}.\end{aligned}$$

- γ es simple. En efecto, \vec{r} es inyectiva, pues

$$\begin{aligned}\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2) &\Rightarrow (x_0, y_0, z_0) + t_1\vec{v} = (x_0, y_0, z_0) + t_2\vec{v} \\ &\Rightarrow t_1 = t_2.\end{aligned}$$

- γ es suave. En efecto, \vec{r} es $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^3)$ pues

$$x(t) = x_0 + t v_1, \quad y(t) = y_0 + t v_2 \quad \text{y} \quad z(t) = z_0 + t v_3$$

representan funciones afines de una variable real, que son cada una de clase C^1 en \mathbb{R} y

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

- γ no es cerrada pues no tiene punto de inicio ni de término. En efecto, \vec{r} es inyectiva en \mathbb{R} , así que $\vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_2)$ para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tales que $t_1 \neq t_2$, y

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \vec{r}(t) \neq \lim_{t \rightarrow +\infty} \vec{r}(t) \quad \text{con} \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|\vec{r}(t)\| = +\infty.$$

- La parametrización \vec{r} de la recta γ es regular, pues

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v} \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad \square$$

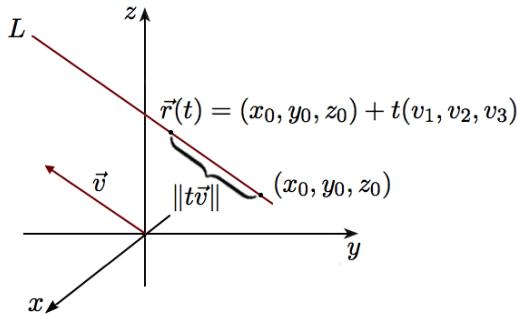


Figura 3.1. Parametrización de una recta γ en \mathbb{R}^3 que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) en la dirección del vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

EJEMPLO 3.2.2 Muestra que la *circunferencia* γ de radio a y centro en el origen contenida en el plano xy es simple, suave y cerrada. ¿Bajo qué condiciones la parametrización encontrada es regular?

Solución. Notemos que la circunferencia γ puede ser parametrizada mediante la función vectorial

$$\begin{aligned} \vec{r}: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t). \end{aligned}$$

- γ es simple. En efecto, \vec{r} es inyectiva en $[0, 2\pi]$, pues para $t_1, t_2 \in [0, 2\pi]$, uno tiene que

$$\begin{aligned} \vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2) &\Rightarrow \cos t_1 = \cos t_2 \wedge \sin t_1 = \sin t_2 \\ &\Rightarrow \sin t_1 \cos t_2 = \sin t_2 \cos t_1 \wedge \sin t_1 = \sin t_2 \\ &\Rightarrow \sin(t_1 - t_2) = 0 \wedge \sin t_1 = \sin t_2 \\ &\Rightarrow t_1 = t_2. \end{aligned}$$

- γ es suave. En efecto, \vec{r} es $C^1([0, 2\pi]; \mathbb{R}^2)$ pues

$$x(t) = \cos t \quad \text{e} \quad y(t) = \sin t$$

representan funciones de una variable real, que son cada una de clase C^1 en $[0, 2\pi]$ y

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) \quad \forall t \in [0, 2\pi].$$

- γ es cerrada. En efecto,

$$\vec{r}(0) = \vec{r}(2\pi) = (a, 0).$$

- La parametrización \vec{r} de la circunferencia γ es regular pues $a > 0$ implica que

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = (-a \sin t, a \cos t) \neq \vec{0} \quad \forall t \in [0, 2\pi]. \quad \square$$

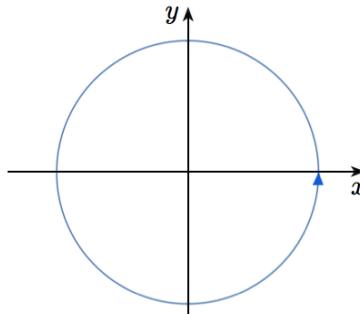


Figura 3.2. Parametrización de una circunferencia de radio a y centro en el origen en el plano xy .

DEFINICIÓN 3.2.3 Una *cicloide* en el plano xy describe la trayectoria que sigue un punto P fijo respecto a un círculo de radio R y a distancia a de su centro, cuando tal círculo rueda sobre una línea recta. En particular, la curva de trayectoria

$$\begin{aligned}\vec{r}: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \vec{r}(t) = (Rt - a \sin t, R - a \cos t)\end{aligned}$$

representa una *cicloide normal* o simplemente *cicloide* si $R = a$, representa una *cicloide acortada* si $R > a$, y representa una *cicloide alargada* si $R < a$.

EJEMPLO 3.2.3 Muestra que la *cicloide* es simple y suave, y que no es cerrada. ¿Para qué valores de t es regular?

Solución. Consideremos la cicloide γ cuya parametrización está dada por la función vectorial

$$\begin{aligned}\vec{r}: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \vec{r}(t) = (at - a \sin t, a - a \cos t).\end{aligned}$$

- γ es simple. En efecto, \vec{r} es inyectiva, pues para $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, uno tiene que

$$\begin{aligned}a - a \cos t_1 &= a - a \cos t_2 \quad \Rightarrow \quad 0 = \cos t_1 - \cos t_2 \\ &\Rightarrow \quad 0 = -2 \sin \left(\frac{t_1 + t_2}{2} \right) \sin \left(\frac{t_1 - t_2}{2} \right) \\ &\Rightarrow \quad t_1 + t_2 = 2k\pi \vee t_1 - t_2 = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 at_1 - a \sen t_1 = at_2 - a \sen t_2 &\Rightarrow (t_1 - t_2) = \sen t_1 - \sen t_2 \\
 &\Rightarrow t_1 - t_2 = 2 \cos\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) \sen\left(\frac{t_1 - t_2}{2}\right) \\
 &\Rightarrow \begin{cases} 2k\pi = 0 & \text{si } t_1 - t_2 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{t_1 - t_2}{2} = \sen\left(\frac{t_1 - t_2}{2}\right) & \text{si } \frac{t_1 + t_2}{2} = k\pi, k \in \mathbb{Z}, k \text{ impar,} \\ \frac{t_2 - t_1}{2} = \sen\left(\frac{t_1 - t_2}{2}\right) & \text{si } \frac{t_1 + t_2}{2} = k\pi, k \in \mathbb{Z}, k \text{ par.} \end{cases} \\
 &\Rightarrow t_1 = t_2.
 \end{aligned}$$

Luego, para $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2.$$

- γ es suave. En efecto, \vec{r} es $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ pues

$$x(t) = at - a \sen t \quad \text{e} \quad y(t) = a - a \cos t$$

representan funciones de una variable real, que son cada una de clase C^1 en \mathbb{R} y

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

- γ no es cerrada pues no tiene punto de inicio ni de término. En efecto, al ser \vec{r} inyectiva en todo \mathbb{R} , entonces $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$ para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tales que $t_1 \neq t_2$ y

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -\infty \neq +\infty = \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t).$$

- Veamos ahora para qué valores de t la parametrización \vec{r} de la cicloide γ es regular. Tenemos,

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| = 0 &\Leftrightarrow (a - a \cos t)^2 + (a \sen t)^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow a = a \cos t \wedge a \sen t = 0 \\
 &\Leftrightarrow \cos t = 1 \wedge \sen t = 0 \\
 &\Leftrightarrow t = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la parametrización \vec{r} de la cicloide es regular para cada $t \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. \square

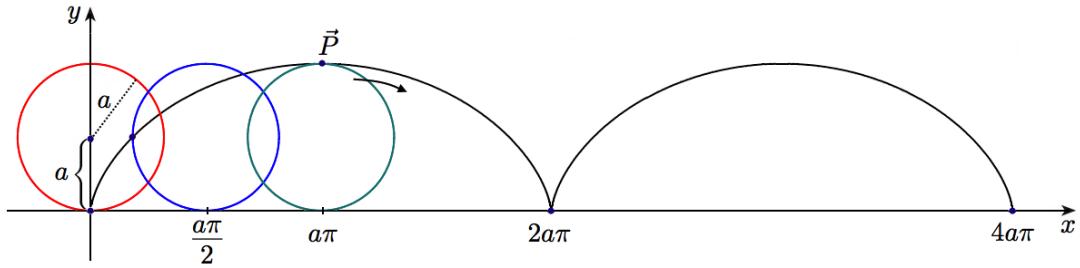


Figura 3.3. Cicloide normal.

EJEMPLO 3.2.4 Muestra que la *cicloide acortada* es simple y suave, y que no es cerrada. ¿Para qué valores de t es regular?

Solución. Consideremos la cicloide acortada γ cuya parametrización está dada por la función vectorial

$$\begin{aligned}\vec{r}: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \vec{r}(t) = (Rt - a \sin t, R - a \cos t),\end{aligned}$$

con $0 < a < R$.

- γ es simple. En efecto, \vec{r} es inyectiva, pues para $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, uno tiene que

$$\begin{aligned}R - a \cos t_1 = R - a \cos t_2 &\Rightarrow 0 = \cos t_1 - \cos t_2 \\ &\Rightarrow 0 = -2 \sin\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) \sin\left(\frac{t_1 - t_2}{2}\right) \\ &\Rightarrow t_1 + t_2 = 2k\pi \vee t_1 - t_2 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}Rt_1 - a \sin t_1 = Rt_2 - a \sin t_2 &\Rightarrow R(t_1 - t_2) = a \sin t_1 - a \sin t_2 \\ &\Rightarrow \frac{R}{a}(t_1 - t_2) = 2 \cos\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) \sin\left(\frac{t_1 - t_2}{2}\right) \\ &\Rightarrow \begin{cases} 2k\pi = 0 & \text{si } t_1 - t_2 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{R}{a} \frac{t_1 - t_2}{2} = \sin\left(\frac{t_1 - t_2}{2}\right) & \text{si } \frac{t_1 + t_2}{2} = k\pi, k \in \mathbb{Z}, k \text{ impar,} \\ \frac{R}{a} \frac{t_2 - t_1}{2} = \sin\left(\frac{t_1 - t_2}{2}\right) & \text{si } \frac{t_1 + t_2}{2} = k\pi, k \in \mathbb{Z}, k \text{ par.} \end{cases} \\ &\Rightarrow t_1 = t_2,\end{aligned}$$

pues $\frac{R}{a} > 1$. Luego, para $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2.$$

- γ es suave. En efecto, \vec{r} es $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ pues

$$x(t) = Rt - a \sin t \quad \text{e} \quad y(t) = R - a \cos t$$

representan funciones de una variable real, que son cada una de clase C^1 en \mathbb{R} y

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

- γ no es cerrada pues no tiene punto de inicio ni de término. En efecto, al ser \vec{r} inyectiva en todo \mathbb{R} , entonces $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$ para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tales que $t_1 \neq t_2$ y

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -\infty \neq +\infty = \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t).$$

- Veamos ahora para qué valores de t la parametrización \vec{r} de la cicloide acortada γ es regular. Tenemos,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| = 0 &\Leftrightarrow R - a \cos t = 0 \wedge a \sin t = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos t = \frac{R}{a} > 1 \wedge a \sin t = 0. \end{aligned}$$

Esto último es imposible, pues $\cos t \leq 1$, para toda $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto la parametrización \vec{r} de la cicloide acortada es regular en \mathbb{R} . \square

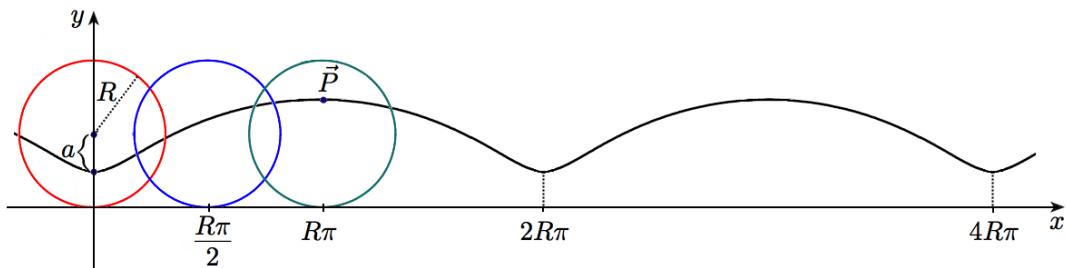


Figura 3.4. Cicloide acortada.

EJEMPLO 3.2.5 Muestra que la *cicloide alargada* es suave, y que no es simple ni cerrada. ¿Para qué valores de t es regular?

Solución. Consideremos la cicloide alargada γ cuya parametrización está dada por la función vectorial

$$\begin{aligned} \vec{r}: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \vec{r}(t) = (Rt - a \sin t, R - a \cos t), \end{aligned}$$

con $0 < a < R$.

- γ no es simple. En efecto, \vec{r} no es inyectiva, pues para $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, uno tiene que

$$\begin{aligned} R - a \cos t_1 &= R - a \cos t_2 \quad \Rightarrow \quad 0 = \cos t_1 - \cos t_2 \\ &\Rightarrow \quad 0 = -2 \sin\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) \sin\left(\frac{t_1 - t_2}{2}\right) \\ &\Rightarrow \quad t_1 + t_2 = 2k\pi \vee t_1 - t_2 = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Rt_1 - a \sin t_1 &= Rt_2 - a \sin t_2 \quad \Rightarrow \quad R(t_1 - t_2) = a \sin t_1 - a \sin t_2 \\ &\Rightarrow \quad \frac{R}{a}(t_1 - t_2) = 2 \cos\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) \sin\left(\frac{t_1 - t_2}{2}\right) \\ &\Rightarrow \quad \begin{cases} 2k\pi = 0 & \text{si } \frac{t_1 - t_2}{2} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{R}{a} \frac{t_1 - t_2}{2} = \sin\left(\frac{t_1 - t_2}{2}\right) & \text{si } \frac{t_1 + t_2}{2} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ } k \text{ impar,} \\ \frac{R}{a} \frac{t_2 - t_1}{2} = \sin\left(\frac{t_1 - t_2}{2}\right) & \text{si } \frac{t_1 + t_2}{2} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ } k \text{ par.} \end{cases} \\ &\Rightarrow \quad \begin{cases} (\exists t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \text{ con } t_2 = 2k\pi - t_1, \quad k \in \mathbb{Z}, \wedge \quad 0 < |t_1 - t_2| < \pi) \\ \text{tales que } \vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2), \end{cases} \end{aligned}$$

pues $\frac{R}{a} < 1$. Luego, \vec{r} no es inyectiva en \mathbb{R} .

- γ es suave. En efecto, \vec{r} es $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ pues

$$x(t) = Rt - a \sin t \quad \text{e} \quad y(t) = R - a \cos t$$

representan funciones de una variable real, que son cada una de clase C^1 en \mathbb{R} y

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

- γ no es cerrada pues no tiene punto de inicio ni de término. En efecto, al ser \vec{r} inyectiva en todo \mathbb{R} , entonces $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$ para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tales que $t_1 \neq t_2$ y

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -\infty \neq +\infty = \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t).$$

- Veamos ahora para qué valores de t la parametrización \vec{r} de la cicloide alargada γ es regular. Tenemos,

$$\left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| = 0 \Leftrightarrow 0 < \cos t = \frac{R}{a} < 1 \wedge \sin t = 0,$$

lo que es imposible, pues $\sin t = 0$ solo si $t = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, y $\cos(k\pi) = 1$ o $\cos(k\pi) = -1$. Por lo tanto la parametrización \vec{r} de la cicloide alargada es regular en \mathbb{R} . \square

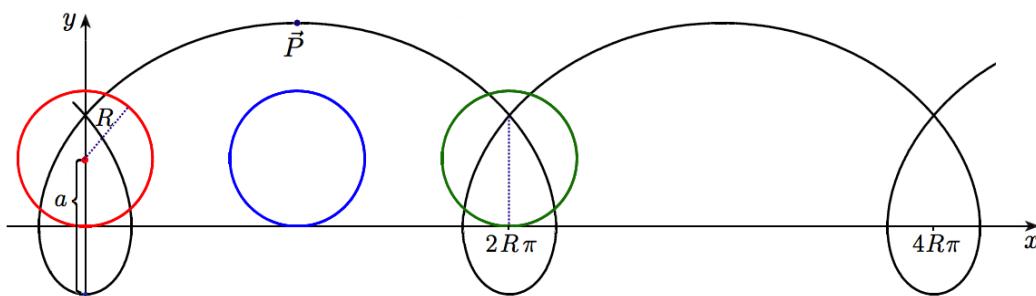


Figura 3.5. Cicloide alargada

DEFINICIÓN 3.2.4 Una *hélice circular recta* en el espacio xyz describe la trayectoria que sigue un punto que asciende (o desciende) a través de la superficie de un cilindro de radio R , con ángulo de elevación (o de depresión) constante, y cuya distancia que sube (o baja) el punto al dar una vuelta completa alrededor del cilindro es h . El valor R usualmente es denominado como el *radio de la hélice*, mientras que el valor h usualmente es denominado como la *altura de paso de la hélice*. En particular, la curva de trayectoria

$$\begin{aligned}\vec{r}: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow \vec{r}(t) = \left(R \cos t, R \sin t, \frac{h}{2\pi} t \right).\end{aligned}$$

representa una hélice circular recta de radio R , altura de paso h y que pasa por el punto $(R, 0, 0)$.

EJEMPLO 3.2.6 Considera la *hélice circular recta* en el espacio xyz de radio R y altura de paso h , que pasa por el punto $(R, 0, 0)$. Prueba que esta curva es simple y suave, y que no es cerrada. ¿Para qué valores de t es regular?

Solución. Denotemos por $H_{R,h}$ a la hélice circular recta en el espacio xyz de radio R y altura de paso h , que pasa por el punto $(R, 0, 0)$.

- $H_{R,h}$ es simple. En efecto, \vec{r} es inyectiva, pues para $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, uno tiene que $z(t) = \frac{h}{2\pi}t$, para $t \in \mathbb{R}$, es inyectiva.
- $H_{R,h}$ es suave. En efecto, \vec{r} es $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ pues

$$x(t) = R \cos t, \quad y(t) = R \sin t \quad y \quad z(t) = \frac{h}{2\pi}t \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

representan funciones de una variable real, que son cada una de clase C^1 en \mathbb{R} y

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

- γ no es cerrada pues no tiene punto de inicio ni de término. En efecto, al ser \vec{r} inyectiva en todo \mathbb{R} , entonces $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$ para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tales que $t_1 \neq t_2$ y

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = -\infty \neq +\infty = \lim_{t \rightarrow -\infty} z(t).$$

- Veamos ahora para qué valores de t la parametrización \vec{r} de la hélice circular recta $H_{R,h}$ es regular. Tenemos,

$$\left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2\pi} \right)^2} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto la hélice circular recta $H_{R,h}$ es regular en \mathbb{R} . \square

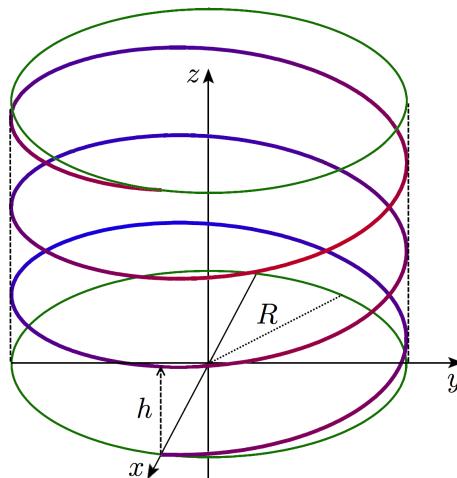


Figura 3.6. Hélice circular recta en el espacio xyz de radio R y altura de paso h , que pasa por el punto $(R, 0, 0)$.

EJERCICIOS 3.2.1

- Sean $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sea γ la curva de ecuación $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ recorrida en sentido antihorario. Encuentra una C^1 -parametrización simple y regular para γ .
- Encuentra una C^1 -parametrización para la curva simple, cerrada y regular que se obtiene al intersectar la esfera centrada en el origen y radio 4, con el plano $x + y - z = 0$.
- Encuentra una C^1 -parametrización simple y regular para la curva que se obtiene al intersectar las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y $x^2 + y^2 - 2x = 0$.
- Sea γ la curva de trayectoria $\vec{r}(t) = (e^{-t} \cos(t), e^{-t} \sin(t))$, $t \in \mathbb{R}$.
 - Prueba que γ es simple, regular y suave.
 - Prueba que γ cruza infinitas veces a los ejes coordenados.

Para ver las Soluciones de los Ejercicios 3.2.1 presiona aquí A

EJEMPLO 3.2.7 Encuentra tres parametrizaciones diferentes para la *semicircunferencia* en el plano xy que tiene centro en el origen, radio $a > 0$ y se ubica en el primer cuadrante.

Solución. Consideremos la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ para $x, y \geq 0$.

- Poniendo $x = t$ e $y = \sqrt{a^2 - t^2}$ obtenemos que una parametrización de la semicircunferencia es

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 : [0, a] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \vec{r}_1(t) = (t, \sqrt{a^2 - t^2}).\end{aligned}$$

- Poniendo $x = -t$ e $y = \sqrt{a^2 - t^2}$ obtenemos que una parametrización de la semicircunferencia es

$$\begin{aligned}\vec{r}_2 : [-a, 0] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \vec{r}_2(t) = (-t, \sqrt{a^2 - t^2}).\end{aligned}$$

- Usando coordenadas polares $x = a \cos t$ e $y = a \sen t$ obtenemos otra parametrización de la semicircunferencia

$$\begin{aligned}\vec{r}_3 : [0, \frac{\pi}{2}] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \vec{r}_3(t) = (a \cos t, a \sen t). \quad \square\end{aligned}$$

El ejemplo previo trae a colación varias interrogantes. En efecto, notemos que a partir de las parametrizaciones dadas para el cuarto de circunferencia, podríamos intentar completar la circunferencia completa o continuar el trazado de una curva a partir de donde termina el cuarto de circunferencia. Por lo tanto, cabe preguntarse lo siguiente,

¿Podemos extender una curva?

Otro asunto que surge es el de la orientación de la curva. Claramente las parametrizaciones \vec{r}_1 y \vec{r}_2 tienen orientación invertida (el punto inicial de una es el punto terminal de la otra), mientras que \vec{r}_2 y \vec{r}_3 tienen la misma orientación (coinciden sus puntos inicial y terminal). Por lo tanto, cabe preguntarse

¿Tiene alguna importancia la orientación de una curva?

Notemos también \vec{r}_2 y \vec{r}_3 tienen la misma orientación y sus trazas son iguales, sin embargo cuando nos acercamos al punto inicial $(a, 0)$, sucede lo siguiente:

$$\lim_{t \rightarrow a^-} \left\| \frac{d\vec{r}_2}{dt}(t) \right\| = \lim_{t \rightarrow a^-} \left\| \left(-1, -\frac{t}{\sqrt{a^2 - t^2}} \right) \right\| = \infty,$$

mientras que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{d\vec{r}_3}{dt}(t) \right\| = \lim_{t \rightarrow 0} \|(-a \sen t, a \cos t)\| = a.$$

Luego, parece razonable preguntarse

¿En qué sentido podemos decir que dos curvas son equivalentes?

Finalmente, nos preguntamos

¿Existe alguna parametrización que podamos considerar como natural para una curva?

Trataremos estas preguntas en las siguientes subsecciones.

3.2.1. Extensión de una curva

Dado un conjunto de curvas $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ tales que el punto terminal de γ_i coincide con el punto inicial γ_{i+1} , $i = 1, \dots, k-1$ escribimos

$$\gamma = \sum_{i=1}^k \gamma_i$$

para representar a la curva que resulta de la unión por los extremos correspondientes de las γ_i , $i = 1, \dots, k$. Claramente γ extiende a cada una de las curvas γ_i , $i = 1, \dots, k$ y representa la curva obtenida al recorrer en forma correlativa a las curvas $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$.

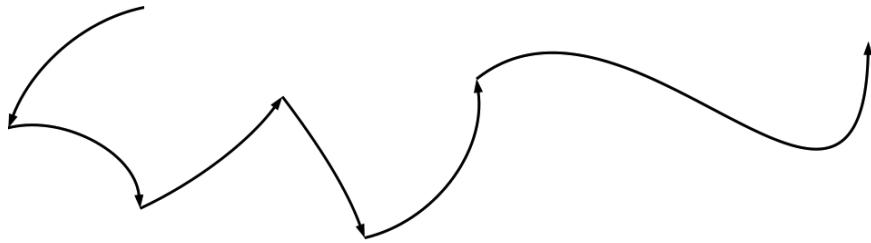


Figura 3.7. Curva formada por la unión de k curvas unidas por sus puntos terminales e iniciales

DEFINICIÓN 3.2.5 (Extensión de una curva) Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $c < d$. Sean $\vec{r}_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ una C^1 -parametrización de una curva γ_1 simple y regular y sea $\vec{r}_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^N$ una C^1 -parametrización de una curva γ_2 simple y regular, tales que verifican $\vec{r}_1(b) = \vec{r}_2(c)$. Llamaremos *extensión* de las curvas γ_1 y γ_2 a la curva $\gamma_1 + \gamma_2$ cuya trayectoria viene dada por la función vectorial $\vec{r}_1 + \vec{r}_2 : [a, b + (c - d)] \rightarrow \mathbb{R}^N$ definida por

$$t \mapsto (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)(t) = \begin{cases} \vec{r}_1(t) & \text{si } t \in [a, b] \\ \vec{r}_2(t - (b - c)) & \text{si } t \in [b, b + (d - c)]. \end{cases}$$

EJEMPLO 3.2.8 Considera las curvas γ_1 y γ_2 de trayectorias dadas por

$$\begin{array}{ll} \vec{r}_1 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 & \vec{r}_2 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \rightarrow \vec{r}_1(t) = (-t, \sqrt{1 - t^2}) & t \rightarrow \vec{r}_2(t) = (t, -\sqrt{1 - t^2}) \end{array}$$

respectivamente. Determina una fórmula para la extensión $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, de γ_1 y γ_2 .

Solución. Notemos que γ_1 y γ_2 representan dos semicircunferencias tales que el punto terminal de la primera es el punto inicial de la segunda. Así, $\gamma_1 + \gamma_2$ resulta ser la circunferencia de trayectoria

$$\vec{r}_1 : [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow \vec{r}_1(t) = \begin{cases} (-t, \sqrt{1-t^2}) & \text{si } t \in [-1, 1] \\ (t-2, -\sqrt{1-(t-2)^2}) & \text{si } t \in [1, 3]. \end{cases} \quad \square$$

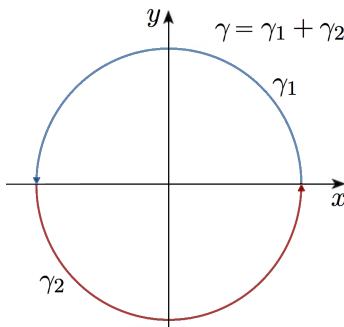


Figura 3.8. Circunferencia γ obtenida al *unir* por el extremo común las curvas γ_1 y γ_2 que poseen forma de semicircunferencia.

3.2.2. Preservación de la orientación de una curva

DEFINICIÓN 3.2.6 (Reparametrización) Sea $N = 2$ o $N = 3$, sea $\vec{r}_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ una parametrización de una curva γ simple y regular, y sea $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ una función biyectiva de clase C^1 . Llamamos *reparametrización* de \vec{r}_1 a la función compuesta $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 \circ \varphi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^N$. Si φ es estrictamente creciente ($\varphi' > 0$), entonces decimos que la reparametrización *preserva la orientación*; en cambio si φ es estrictamente decreciente ($\varphi' < 0$), decimos que la reparametrización *invierte la orientación*.

EJEMPLO 3.2.9 Sean γ_1, γ_2 y γ_3 las curvas cuyas respectivas trayectorias están dadas por

$$\vec{r}_1 : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \vec{r}_2 : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow \vec{r}_1(t) = (-t, \sqrt{1-t^2}) \quad \theta \rightarrow \vec{r}_2(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$$

y

$$\vec{r}_3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$0 \rightarrow \vec{r}_3(t) = (t, \sqrt{1-t^2}).$$

Escribe:

i) \vec{r}_2 como una reparametrización de \vec{r}_1 . ¿Preserva la orientación?

ii) \vec{r}_3 como una reparametrización de \vec{r}_1 . ¿Preserva la orientación?

Solución. Tenemos

- i) $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 \circ \varphi$, donde $\varphi(\theta) = -\cos \theta \in C^1([0, \frac{\pi}{2}])$, que es creciente y biyectiva en $[0, \frac{\pi}{2}]$; pues $(\varphi'(\theta) = \sin \theta > 0)$ en $[0, \frac{\pi}{2}]$. Por lo tanto,

\vec{r}_2 es una reparametrización de \vec{r}_1 que preserva orientación.

- ii) $\vec{r}_3 = \vec{r}_1 \circ \varphi$, donde $\varphi(t) = -t \in C^1([0, 1])$, que es decreciente y biyectiva, pues $\varphi'(t) = -1 < 0$. Por lo tanto,

\vec{r}_3 es una reparametrización de \vec{r}_1 que invierte la orientación. \square

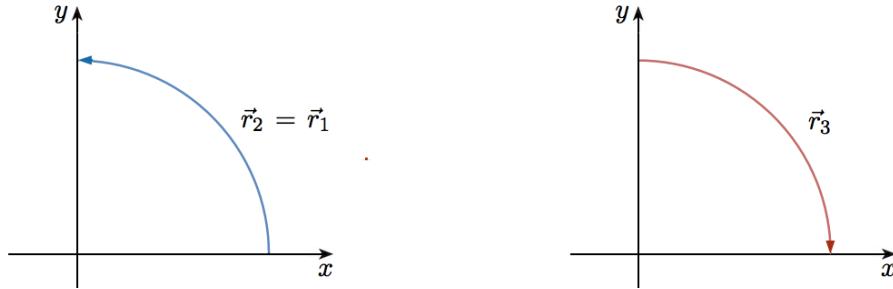


Figura 3.9. Trayectorias opuestas de un cuarto de circunferencia.

OBSERVACIÓN 3.2.2 Sea $N = 2$ o $N = 3$. Si $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ es una parametrización de la curva γ , y la función

$$\begin{aligned}\varphi : [-b, -a] &\rightarrow [a, b] \\ t &\rightarrow \varphi(t) = -\tau\end{aligned}$$

es biyectiva, decreciente y de clase C^1 , entonces

$$\begin{aligned}\vec{r}_* : [-b, -a] &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ t &\rightarrow \vec{r}_*(t) = (\vec{r} \circ \varphi)(t) = \vec{r}(-\tau)\end{aligned}$$

es una parametrización de γ que invierte la orientación.

3.2.3. Curvas paramétricamente equivalentes

DEFINICIÓN 3.2.7 (Curvas paramétricamente equivalentes) Sea $N = 2$ o $N = 3$, y sean γ_1 y γ_2 dos curvas simples y regulares de trayectorias $\vec{r}_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ y $\vec{r}_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^N$ respectivamente. Decimos que \vec{r}_1 y \vec{r}_2 son *paramétricamente equivalentes* si \vec{r}_2 es una reparametrización de \vec{r}_1 que preserva la orientación; y decimos que γ_2 es la *negativa* de γ_1 si \vec{r}_2 es una reparametrización de \vec{r}_1 que invierte la orientación, en este caso escribimos $\gamma_2 = \gamma_1^-$.

OBSERVACIÓN 3.2.3 Recordemos que

- γ es seccionalmente regular si admite una parametrización seccionalmente regular.
- Una parametrización suave de una curva γ es una C^1 -parametrización de γ .

Un resultado interesante que podemos destacar aquí es el siguiente:

TEOREMA 3.2.1 Sea γ una curva simple, regular y suave. Entonces todas las parametrizaciones simples, regulares y suaves de γ son equivalentes.

OBSERVACIÓN 3.2.4 Si γ es una curva seccionalmente simple, regular y suave, entonces todas las parametrizaciones simples, regulares y suaves de γ resultan equivalentes seccionalmente. En efecto, basta aplicar el teorema a cada sección simple, regular y suave de γ que posea una C^1 -parametrización.

DEFINICIÓN 3.2.8 Sea $n \in \mathbb{N}$ dado. Una *hipocicloide* de n puntas en el plano xy describe la trayectoria que sigue un punto fijo \vec{P} sobre una circunferencia generatriz de radio R que rueda sin deslizarse por el interior de otra circunferencia directriz de radio nR , que permanece fija. En particular, la curva de trayectoria

$$\begin{aligned}\vec{r} : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \vec{r}(t) = ((n-1)R \cos t + R \cos((n-1)t), (n-1)R \sin t - R \sin((n-1)t))\end{aligned}$$

representa una *hipocicloide* de n puntas, cuyo punto de inicio y término es el punto $(nR, 0)$.

EJEMPLO 3.2.10 Muestra que todas las parametrizaciones seccionalmente simples, regulares y suaves de una hipocicloide de cuatro puntas son equivalentes seccionalmente.

Solución. Sin pérdida de generalidad podemos considerar la hipocicloide de cuatro puntas cuyo punto inicial y terminal es el punto $(1, 0)$. Esta hipocicloide es la curva de trayectoria

$$\begin{aligned}\vec{r} : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \vec{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t).\end{aligned}$$

Notemos que

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) = 0,$$

donde

$$t_0 \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$$

representa la preimagen de cada una de las puntas de la hipocicloide. En las puntas, la recta tangente no está bien definida y la rapidez en esos puntos es 0. Notemos también que $\vec{r} \in C^1([0, 2\pi])$

y que la curva γ es seccionalmente simple, regular y suave, así que de acuerdo al Teorema 3.3.2, todas las parametrizaciones simples, regulares y suaves de γ son equivalentes seccionalmente. \square

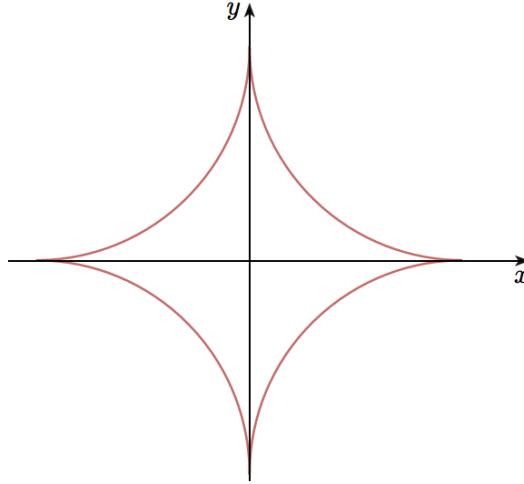


Figura 3.10. Hipocicloide de cuatro puntos cuyo punto de inicio y término es el punto $(1, 0)$.

3.2.4. Longitud de arco. Parametrización natural

Hasta el momento hemos visto que dadas dos curvas cuyas parametrizaciones coinciden en el punto terminal de una e inicial de la otra, es posible definir una nueva curva que las extiende, respondiendo así a una de las preguntas que nos habíamos formulado. También hemos definido lo que entendemos por curvas que preservan la orientación y por curvas paramétricamente equivalentes, respondiendo así a las siguientes dos preguntas que nos habíamos planteado. A continuación nos vamos a centrar en nuestra cuarta pregunta, en orden a encontrar una parametrización que sea, en algún sentido a definir, natural para una curva. Para ello, introducimos previamente el concepto de *longitud de arco de una curva*.

Longitud de arco

Sea $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$, con $N = 2$ o $N = 3$, una C^1 -parametrización de una curva γ seccionalmente simple, regular y suave. Consideremos la partición \mathcal{P} de $[a, b]$ dada por $\mathcal{P} = \{a = t_0, t_1, t_2, \dots, t_n = b\}$ (recordemos que esto implica que $a = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n = b$), y pongamos

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

y sea

$$\delta = \delta(\mathcal{P}) = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1}).$$

Si $P_{n(\delta)}$ es la poligonal que se obtiene al unir los puntos $\vec{r}(t_i)$ con $\vec{r}(t_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, entonces mientras más pequeño es δ , mejor aproximamos la longitud de la curva γ mediante la longitud de

la poligonal $P_{n(\delta)}$

$$\begin{aligned}\ell(P_{n(\delta)}) &= \sum_{i=1}^n \|\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})\| \\ &= \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right\| (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right\| \Delta t_i.\end{aligned}$$

Luego, tomando $\delta \rightarrow 0$ obtenemos que la longitud de la curva γ está dada por

$$\ell(P_{n(\delta)}) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \ell(\gamma) = \int_a^b \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| dt.$$

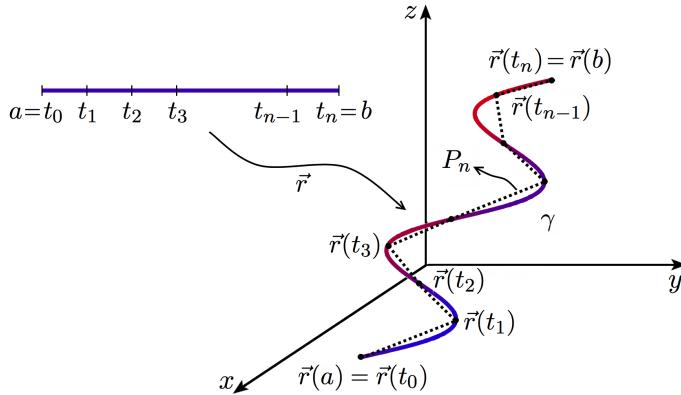


Figura 3.11. Aproximación del arco de una curva en \mathbb{R}^3 mediante una poligonal.

DEFINICIÓN 3.2.9 (Longitud de arco de una curva) Sea $N = 2$ o $N = 3$ y sea $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ una C^1 -parametrización de una curva γ seccionalmente simple, suave y regular. Entonces la *longitud de arco* $\ell(\gamma)$ de la curva γ esta dada por la fórmula

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| dt.$$

OBSERVACIÓN 3.2.5 Sea $N = 2$ o $N = 3$. La definición de longitud de arco de una curva es correcta pues ella no depende de la C^1 -parametrización seccionalmente simple y regular escogida. En efecto, sean $\vec{r}_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ y $\vec{r}_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^N$, dos C^1 -parametrizaciones de una curva γ seccionalmente simple y regular, entonces por el Teorema 3.3.2 \vec{r}_1 y \vec{r}_2 son paramétricamente equivalentes. Luego, existe $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$, una C^1 -biyección creciente, tal que: $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 \circ \varphi$.

$$\begin{aligned}
 \int_c^d \left\| \frac{d\vec{r}_2}{dt}(t) \right\| dt &= \int_c^d \left\| \frac{d}{dt}(\vec{r}_1 \circ \varphi)(t) \right\| dt \\
 &= \int_c^d \left\| \frac{d\vec{r}_1}{d\varphi}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \right\| dt \\
 &= \int_c^d \left\| \frac{d\vec{r}_1}{d\varphi}(\varphi(t)) \right\| |\varphi'(t)| dt & \varphi(c) = a \quad \varphi(d) = b \\
 &= \int_a^b \left\| \frac{d\vec{r}_1}{d\xi}(\xi) \right\| d\xi & \xi = \varphi(t) \Rightarrow d\xi = \varphi'(t) dt \\
 & & \varphi'(t) = |\varphi'(t)| \text{ pues } \varphi' > 0.
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.2.11 Calcula la longitud de arco de la curva γ de trayectoria $\vec{r}(t) = (t, 2t^2, 3t - 4)$, $0 \leq t \leq 1$.

Solución. Tenemos,

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = (1, 4t, 3) \Rightarrow \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| &= \sqrt{16t^2 + 10} \\
 &= 4\sqrt{t^2 + \frac{5}{8}}.
 \end{aligned}$$

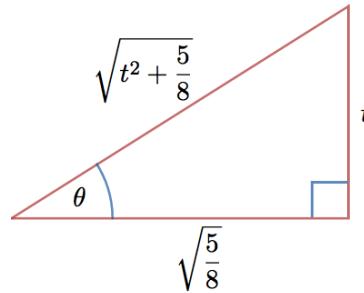


Figura 3.12. Sustitución trigonométrica para la expresión $\sqrt{t^2 + \frac{5}{8}}$.

Así que conviene realizar una sustitución trigonométrica. Ponemos,

$$\tan \theta = \frac{t}{\sqrt{\frac{5}{8}}}$$

y obtenemos

$$dt = \sqrt{\frac{5}{8}} \sec^2 \theta d\theta$$

y

$$\sqrt{t^2 + \frac{5}{8}} = \sqrt{\frac{5}{8}} \sec \theta.$$

Como,

$$\begin{aligned}
 4 \int \sqrt{t^2 + \frac{5}{8}} dt &= 4 \int \frac{5}{8} \sec^3 \theta d\theta \\
 &= \frac{5}{2} \left(\sec \theta \tan \theta - \int \sec \theta \tan^2 \theta d\theta \right) \\
 &= \frac{5}{2} \left(\sec \theta \tan \theta - \int \sec^3 \theta d\theta + \int \sec \theta d\theta \right), \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \sec \theta \\ du = \sec \theta \tan \theta d\theta \\ dv = \sec^2 \theta d\theta \\ v = \tan \theta \\ \tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

se sigue que

$$\begin{aligned}
 \int \sec^3 \theta d\theta &= \frac{1}{2} \left(\sec \theta \tan \theta + \int \sec \theta d\theta \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sec \theta \tan \theta + \ln |\sec \theta + \tan \theta| \right).
 \end{aligned}$$

Retornando a la variable t , se sigue que

$$4 \int \sqrt{t^2 + \frac{5}{8}} dt = \frac{5}{4} \left(\frac{\sqrt{t^2 + \frac{5}{8}}}{\sqrt{\frac{5}{8}}} \cdot \frac{t}{\sqrt{\frac{5}{8}}} + \ln \left| \frac{\sqrt{t^2 + \frac{5}{8}} + t}{\sqrt{\frac{5}{8}}} \right| \right).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 \ell(\gamma) &= 4 \int_0^1 \sqrt{t^2 + \frac{5}{8}} dt = \frac{5}{4} \left(\frac{\sqrt{t^2 + \frac{5}{8}}}{\sqrt{\frac{5}{8}}} \cdot \frac{t}{\sqrt{\frac{5}{8}}} + \ln \left| \frac{\sqrt{t^2 + \frac{5}{8}} + t}{\sqrt{\frac{5}{8}}} \right| \right) \Big|_0^1 \\
 &= \frac{5}{4} \left(\frac{\sqrt{26} \cdot 2}{5} + \ln \left| \frac{\sqrt{26} + 4}{\sqrt{10}} \right| \right). \quad \square
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.2.12 Calcula la longitud de arco de la espiral de la hélice $H_{a,h}$ determinada por la trayectoria $\vec{r}(t) = \left(a \cos t, a \sen t, \frac{h}{2\pi} t \right)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Solución. Tenemos,

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \left(-a \sen t, a \cos t, \frac{h}{2\pi} \right) \Rightarrow \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{h}{2\pi} \right)^2}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 \ell(H_{a,h}) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + \left(\frac{h}{2\pi} \right)^2} d\theta \\
 &= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{(2a\pi)^2 + h^2}{(2\pi)^2}} \\
 &= \sqrt{(2a\pi)^2 + h^2}. \quad \square
 \end{aligned}$$

La respuesta del Ejemplo 3.2.12 se puede chequear geométricamente tal como se observa en la figura a continuación.

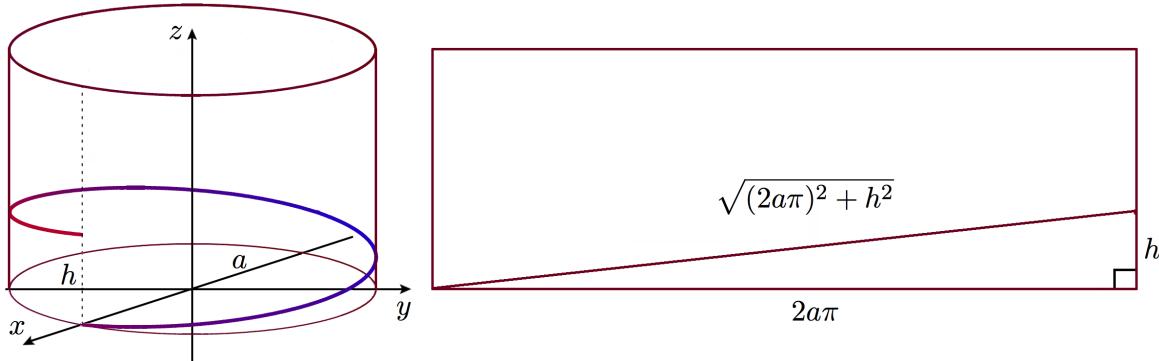


Figura 3.13. La longitud de arco del segmento de Hélice de radio a que completa un giro hasta el paso de altura h es $\sqrt{(2a\pi)^2 + h^2}$.

EJEMPLO 3.2.13 Calcula la longitud de arco de la cicloide γ determinada por la trayectoria $\vec{r}(t) = (Rt - R \operatorname{sen} t, R - R \operatorname{cos} t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Solución. Tenemos,

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{r}}{dt}(t) &= (R - R \operatorname{cos} t, R \operatorname{sen} t) \Rightarrow \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| = R\sqrt{(1 - \operatorname{cos} t)^2 + \operatorname{sen}^2 t} \\ &= R\sqrt{2(1 - \operatorname{cos} t)}.\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\ell(\gamma) &= \sqrt{2} R \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \operatorname{cos} t} dt \\ &= 2 R \int_0^{2\pi} \left| \operatorname{sen} \left(\frac{t}{2} \right) \right| dt \\ &= 2 R \left(-2 \operatorname{cos} \left(\frac{t}{2} \right) \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= 8 R. \quad \square\end{aligned}$$

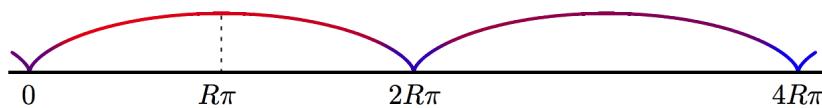


Figura 3.14. La longitud de arco de la cicloide de trayectoria $\vec{r}(t) = (Rt - R \operatorname{sen} t, R - R \operatorname{cos} t)$, $t \in [0, 2\pi]$ es $8R$.

Parametrización natural o en longitud de arco

Sea γ una curva seccionalmente simple, regular y suave, y sea $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$, para $N = 2$ o $N = 3$, una C^1 -parametrización de γ . Definamos la función:

$$\begin{aligned}s &: [a, b] \rightarrow [0, \ell(\gamma)] \\ t &\rightarrow s(t) = \int_a^t \left\| \frac{d\vec{r}}{d\xi}(\xi) \right\| d\xi.\end{aligned}$$

Entonces $s(t)$ es la longitud de la curva de trayectoria $\vec{r}(\xi)$, $\xi \in [a, t]$. Como s es una C^1 -biyección creciente, por el teorema de la función inversa existe $s^{-1} : [0, \ell(\gamma)] \rightarrow [a, b]$, que además es una C^1 -biyección creciente.

DEFINICIÓN 3.2.10 (Parametrización natural) Sea $N = 2$ o $N = 3$. Con la notación previa se define la trayectoria

$$\begin{aligned}\vec{r}_0 &: [0, \ell(\gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^N \\ s &\rightarrow \vec{r}_0(s) = \vec{r}(s^{-1}(s))\end{aligned}$$

El valor $\vec{r}_0(s)$ representa un punto sobre la curva γ a una distancia s del extremo $\vec{r}_0(a)$ inicial. \vec{r}_0 recibe el nombre de *parametrización natural* (o *parametrización en longitud de arco*) de la curva γ .

OBSERVACIÓN 3.2.6 Notemos que \vec{r}_0 no depende de la C^1 -parametrización \vec{r} considerada. En efecto, supongamos que γ es seccionalmente simple, regular y suave, y que $\vec{r}_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ y $\vec{r}_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^N$, para $N = 2$ o $N = 3$, son dos C^1 -parametrizaciones de γ , entonces $\exists \varphi : [a_2, b_2] \rightarrow [a_1, b_1]$ C^1 -biyección creciente tal que $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 \circ \varphi$. Por otra parte, $\exists s_1 : [a_1, b_1] \rightarrow [0, \ell(\gamma)]$ y $s_2 : [a_2, b_2] \rightarrow [0, \ell(\gamma)]$ donde $s_i(t)$ corresponde a la longitud de la trayectoria $\vec{r} : (\xi)$, $\xi \in [a_i, t]$; $i = 1, 2$ (por lo que existen s_1^{-1} y s_2^{-1} que son C^1 -biyecciones crecientes). Si definimos

$$\begin{aligned}\vec{r}_0 &: [0, \ell(\gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^N & \vec{r}_0 &: [0, \ell(\gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^N \\ s &\rightarrow \vec{r}_0(s) = \vec{r}_1(s_1^{-1}(s)) & s &\rightarrow \vec{r}_0(s) = \vec{r}_2(s_2^{-1}(s))\end{aligned}$$

observamos que $\vec{r}_0(s) = \vec{r}_1(\varphi(s_2^{-1}(s))) = \vec{r}_1(s_1^{-1}(s))$. Además, notemos que \vec{r}_1 y \vec{r}_2 son biyectivas y como $\vec{r}_2(s_2^{-1}(s))$ es equivalente a $\vec{r}_1(s_1^{-1}(s))$; en ambos casos $s \in [0, \ell(\gamma)]$. Entonces dado $\vec{X} \in \gamma$ existe un único $s_0 \in [0, \ell(\gamma)]$ tal que la curva hasta \vec{X} ; $\gamma_{\vec{X}}$ tiene longitud

$$\begin{aligned}s(s_0) &= \ell(\gamma_{\vec{X}}) = \int_0^{s_0} \left\| \frac{d}{d\xi} (\vec{r}_2 \circ s_2^{-1})(\xi) \right\| d\xi & T.F.C \text{ y } \frac{d}{d\xi} \text{ lineal, continua} \\ &= \int_0^{s_0} \left\| \frac{d}{d\xi} (\vec{r}_1 \circ \varphi \circ s_2^{-1})(\xi) \right\| d\xi & \Rightarrow \vec{r}_1 \circ \varphi \circ s_2^{-1}(s_0) = s_1^{-1}(s_0) \\ &= \int_0^{s_0} \left\| \frac{d}{d\xi} (\vec{r}_1 \circ s_1^{-1})(\xi) \right\| d\xi.\end{aligned}$$

EJEMPLO 3.2.14 Considera la cicloide γ dada por la trayectoria $\vec{r}(t) = R(t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Determina su parametrización natural.

Solución. Con la notación previa se define la trayectoria

$$\begin{aligned} s : [0, 2\pi] &\rightarrow [0, \ell(\gamma)] \\ t &\rightarrow s(t) = \int_0^t \left\| \frac{d\vec{r}}{d\xi}(\xi) \right\| d\xi = 4R \left(1 - \cos \left(\frac{t}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Luego, despejando t en términos de $s = s(t)$, obtenemos

$$1 - \frac{s}{4R} = \cos \left(\frac{t}{2} \right) \Rightarrow 2 \arccos \left(1 - \frac{s}{4R} \right) = t = s^{-1}(s)$$

y como

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \wedge \quad 1 - \cos(2\alpha) = 2 \sin^2 \alpha,$$

se sigue que

$$\begin{aligned} \vec{r}_0(s) &= \vec{r}(s^{-1}(s)) \\ &= R \left(2 \arccos \left(1 - \frac{s}{4R} \right) - \sin \left(2 \arccos \left(1 - \frac{s}{4R} \right) \right), 1 - \cos \left(2 \arccos \left(1 - \frac{s}{4R} \right) \right) \right) \\ &= R \left(2 \arccos \left(1 - \frac{s}{4R} \right) - 2 \sqrt{1 - \left(1 - \frac{s}{4R} \right)^2} \left(1 - \frac{s}{4R} \right), 1 - \left(1 - \frac{s}{4R} \right)^2 \right) \quad \forall s \in [0, 8R]. \quad \square \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.2.15 Determina la parametrización natural de la hélice $H_{a,h}$.

Solución. Tenemos

$$\begin{aligned} s : [0, 2\pi] &\rightarrow [0, \ell(H_{a,h})] \\ t &\rightarrow s(t) = \int_0^t \left\| \frac{d\vec{r}}{d\xi}(\xi) \right\| d\xi \\ &= \int_0^t \sqrt{a^2 + \left(\frac{h}{2\pi} \right)^2} d\xi \\ &= \frac{t}{2\pi} \sqrt{(2\pi a)^2 + h^2}, \end{aligned}$$

donde

$$\vec{r}(t) = \left(a \cos t, a \sin t, \frac{h \theta}{2\pi} \right) \quad \forall t \in [0, 2\pi].$$

Luego, despejando t en términos de $s = s(t)$, obtenemos

$$\frac{2\pi s}{\sqrt{(2\pi a)^2 + h^2}} = t = s^{-1}(s)$$

y así,

$$\vec{r}_0(s) = \vec{r}(s^{-1}(s)) \\ = \left(a \cos\left(\frac{2\pi s}{\sqrt{(2\pi a)^2 + h^2}}\right), a \sin\left(\frac{2\pi s}{\sqrt{(2\pi a)^2 + h^2}}\right), \frac{h s}{\sqrt{(2\pi a)^2 + h^2}} \right) \quad \forall s \in [0, \ell(H_{a,h})]. \quad \square$$

EJERCICIOS 3.2.2

1. Sean f, g funciones reales de clase C^1 en el intervalo $[a, b]$, y sea γ la curva parametrizada por $\vec{r}(t) = (f(t), g(t)) \in \mathbb{R}^2$, con $t \in [a, b]$.
 - a) Encuentra la longitud de arco de γ
 - b) Determina una fórmula para el caso en que $x = x$ e $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$.
 - c) Calcula la longitud de la curva de ecuación $(y + 10)^3 = 27x^2$, $8 \leq x \leq 27$.
2. Sea f una función de clase C^1 , y sea γ la curva de ecuación polar $r = f(\theta)$, con $\alpha \leq \theta \leq \beta$. Usando el hecho que en coordenadas cartesianas un punto $(x, y) \in \gamma$ se representa en forma polar como $(r \cos \theta, r \sin \theta)$.
 - a) Determina una fórmula para la longitud de arco de γ
 - b) Calcula la longitud de la cardiode $r = 3(1 + \sin \theta)$.
3. Calcula la longitud de arco de la curva de trayectoria $\vec{r}(t) = \sqrt{2}t\hat{i} + \sqrt{2}t\hat{j} + (1 - t^2)\hat{k}$ desde el punto $(0, 0, 1)$ hasta el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$.
4. Calcula la longitud de arco de las siguientes curvas:
 - a) $x = 3t, y = 3t^2, z = 2t^3$, desde $(0, 0, 0)$ hasta $(3, 3, 2)$
 - b) $x = e^{-t} \cos t, y = e^{-t} \sin t, z = e^{-t}$, para $t \in (0, \infty)$
 - c) $(x - y)^2 - \lambda(x + y) = 0, x^2 - y^2 = \frac{9}{8}z^2, \lambda > 0$, desde $(0, 0, 0)$ hasta (a, b, c) .
5. Sea γ la curva de trayectoria $\vec{r}(t) = (e^{-t} \cos(t), e^{-t} \sin(t))$, $t \in [0, \infty)$. Calcula la longitud de arco de γ .

Para ver las Soluciones de los Ejercicios 3.2.2 presiona aquí A

3.3. Geometría de curvas

Con la finalidad de simplificar escritura y notación, en esta sección restringiremos nuestro estudio a curvas simples, regulares y suaves en vez de curvas seccionalmente simples, regulares y suaves.

Recordemos también que una curva γ simple, regular y suave admite una C^1 -parametrización $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$, con $N = 2$ o $N = 3$, que representa la trayectoria que describe el movimiento de una partícula a lo largo de la curva γ y $[a, b]$ representa el intervalo de tiempo en que se mueve la partícula. Evidentemente, la posición de la partícula en cualquier instante t es $\vec{r}(t)$.

3.3.1. Preliminares

Antes de iniciar el estudio de la geometría de curvas en \mathbb{R}^N , con $N = 2$ o $N = 3$, conviene estudiar algunas propiedades del producto escalar, el producto cruz y las aplicaciones bilineales.

Producto escalar

DEFINICIÓN 3.3.1 (Definición geométrica del producto escalar) Sean \vec{u} y \vec{v} dos vectores en \mathbb{R}^N . Se define el *producto escalar* entre \vec{u} y \vec{v} al valor real $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ dado por

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle := \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta,$$

donde θ representa el ángulo formado entre los dos vectores.

DEFINICIÓN 3.3.2 (Definición analítica del producto escalar) Sean \vec{u} y \vec{v} dos vectores en \mathbb{R}^N . Se define el *producto escalar* entre \vec{u} y \vec{v} al valor real $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dado por

$$\vec{u} \cdot \vec{v} := \sum_{i=1}^N u_i v_i,$$

donde $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_N)$.

OBSERVACIÓN 3.3.1

- Las expresiones $\vec{u} \cdot \vec{v}$ y $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ coinciden, es decir

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

- A partir del producto escalar, se puede obtener la norma euclíadiana del vector. En efecto,

$$\|\vec{u}\| = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle^{\frac{1}{2}} = (\vec{u} \cdot \vec{u})^{\frac{1}{2}}.$$

- El producto escalar también es denominado producto punto o producto interno.

Recordemos que dos vectores \vec{u} y \vec{v} son ortogonales en \mathbb{R}^N , si se forma un ángulo recto entre ellos, y es usual escribir en este caso que $\vec{u} \perp \vec{v}$. En particular, el siguiente resultado es válido

TEOREMA 3.3.1 Sean \vec{u} y \vec{v} dos vectores en \mathbb{R}^N . Entonces

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \vee \vec{v} = \vec{0} \vee \vec{u} \perp \vec{v}.$$

A continuación algunas propiedades del producto escalar.

Propiedad	
Comutativa	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
Distributiva	$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
Asociativa por escalar	$\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v})$

Producto cruz

DEFINICIÓN 3.3.3 (Definición geométrica del producto cruz) Sean \vec{u} y \vec{v} dos vectores en \mathbb{R}^3 . Se define el *producto cruz* entre \vec{u} y \vec{v} al vector $\vec{u} \times \vec{v}$ dado por

$$\vec{u} \times \vec{v} := \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \hat{n} \operatorname{sen} \theta,$$

donde θ representa el ángulo formado entre los dos vectores, donde \hat{n} es el vector unitario y ortogonal a los vectores \vec{u} y \vec{v} cuya dirección está dada por la regla de la mano derecha.

DEFINICIÓN 3.3.4 (Definición analítica del producto cruz) Sean \vec{u} y \vec{v} dos vectores en \mathbb{R}^N . Se define el *producto cruz* entre \vec{u} y \vec{v} al vector $\vec{u} \times \vec{v}$ dado por

$$\vec{u} \times \vec{v} := (u_2 v_3 - u_3 v_2) \hat{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \hat{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \hat{k},$$

donde $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

OBSERVACIÓN 3.3.2

- La definición geométrica y analítica del producto cruz coinciden.
- El producto cruz suele ser identificado con el uso de la siguiente notación

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \hat{k},$$

donde $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

- $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = (\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2)^{\frac{1}{2}}$

- *El vector normal unitario \hat{n} al plano que contiene a los vectores \vec{u} y \vec{v} está dado por*

$$\hat{n} = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}.$$

Recordemos que dos vectores \vec{u} y \vec{v} son paralelos en \mathbb{R}^3 , si ambos pertenecen a un mismo plano y no se intersecan, y es usual escribir en este caso que $\vec{u} \parallel \vec{v}$. En particular, el siguiente resultado es válido

TEOREMA 3.3.2 Sean \vec{u} y \vec{v} dos vectores en \mathbb{R}^N . Entonces

$$\vec{u} \times \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \vee \vec{v} = \vec{0} \vee \vec{u} \parallel \vec{v}.$$

A continuación algunas propiedades del producto escalar.

Propiedad	
Anticonmutativa	$\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$
Distributiva	$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
Asociativa por escalar	$\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha \vec{v})$

El siguiente teorema muestra otras propiedades que verifica el producto cruz

TEOREMA 3.3.3 Sean \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} tres vectores no nulos en \mathbb{R}^3 . Las siguientes propiedades se cumplen:

i) Regla de ortogonalidad, a saber

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u} \quad \wedge \quad (\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v}.$$

ii) Cancelación por ortogonalidad, a saber

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0.$$

iii) Regla de expulsión, a saber

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} + (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}.$$

iv) Identidad de Jacobi, a saber

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) + \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{0}.$$

Aplicaciones bilineales

DEFINICIÓN 3.3.5 Sea $N, M \in \mathbb{N}$. Decimos que una aplicación

$$\begin{aligned}\mathcal{B} : \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\rightarrow \mathcal{B}(\vec{u}, \vec{v})\end{aligned}$$

es *bilineal* si

$$(\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^M)(\mathcal{B}(\vec{u}, \cdot) \text{ es lineal}) \quad \text{y} \quad (\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^M)(\mathcal{B}(\cdot, \vec{v}) \text{ es lineal}).$$

EJEMPLO 3.3.1 Se chequea fácilmente que las siguientes aplicaciones son bilineales

- El producto escalar

$$\begin{aligned}\cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v}.\end{aligned}$$

- El producto cruz

$$\begin{aligned}\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\rightarrow \vec{u} \times \vec{v}. \quad \square\end{aligned}$$

TEOREMA 3.3.4 Sea $N, M \in \mathbb{N}$ y sea $\mathcal{B} : \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^N$ una aplicación bilineal. Entonces, \mathcal{B} es diferenciable y satisface

$$D\mathcal{B}(\vec{u}, \vec{v})(\vec{h}, \vec{k}) = \mathcal{B}(\vec{u}, \vec{k}) + \mathcal{B}(\vec{h}, \vec{v}).$$

COROLARIO 3.3.1 Sean $N, M \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{B} : \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^N$ una aplicación bilineal y sea I un intervalo abierto en \mathbb{R} . Si $\vec{u} : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ y $\vec{v} : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ son funciones vectoriales derivables en I , entonces

$$\frac{d}{ds} \mathcal{B}(\vec{u}(s), \vec{v}(s)) = \mathcal{B}\left(\vec{u}(s), \frac{d\vec{v}}{ds}(s)\right) + \mathcal{B}\left(\frac{d\vec{u}}{ds}(s), \vec{v}(s)\right).$$

OBSERVACIÓN 3.3.3 Si en la Definición 3.3.5 consideramos $M = 3$, y ponemos:

- $\mathcal{B}(\vec{u}, \vec{v}) = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{u} \cdot \vec{v}$ si $N = 1$,

- $\mathcal{B}(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \times \vec{v}$ si $N = 3$;

entonces, desde el Corolario 3.3.1 obtenemos

- $\frac{d}{dt} \langle \vec{u}(t), \vec{v}(t) \rangle = \left\langle \vec{u}(t), \frac{d\vec{v}}{dt}(t) \right\rangle + \left\langle \frac{d\vec{u}}{dt}(t), \vec{v}(t) \right\rangle = \vec{u}(t) \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}(t) + \frac{d\vec{u}}{dt}(t) \cdot \vec{v}(t)$,
- $\frac{d}{dt} (\vec{u}(t) \times \vec{v}(t)) = \vec{u}(t) \times \frac{d\vec{v}}{dt}(t) + \frac{d\vec{u}}{dt}(t) \times \vec{v}(t)$.

3.3.2. Vector tangente

DEFINICIÓN 3.3.6 Sea $N = 2$ o $N = 3$ y sea $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ una C^1 -parametrización de una curva γ simple, regular y suave en \mathbb{R}^N . Si \vec{v} es el vector velocidad asociado a \vec{r} (i.e., $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$) y $v = \|\vec{v}\|$ es su correspondiente rapidez, entonces llamamos *vector tangente* a la curva en $t \in [a, b]$ al vector unitario

$$\hat{T}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{v(t)}.$$

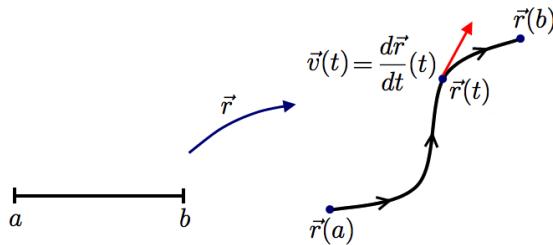


Figura 3.15. El vector velocidad es el vector tangente

OBSERVACIÓN 3.3.4 Sea $N = 2$ o $N = 3$.

- Si consideramos $\vec{r} = \vec{r}_0$, la parametrización en longitud de arco de γ , entonces $\vec{r}_0(s) = \vec{r} \circ s^{-1}(s)$, donde $s(t)$ corresponde a la longitud de la trayectoria $\vec{r}(\xi)$, $\xi \in [0, t]$. Luego,

$$\begin{aligned}\vec{v}(s) &= \frac{d}{ds}(\vec{r} \circ s^{-1}(s)) \\ &= \frac{d\vec{r}}{ds}(s^{-1}(s)) (s^{-1})'(s) \\ &= \frac{d\vec{r}}{ds}(s^{-1}(s)) \frac{1}{s'(s^{-1}(s))} \\ &= \frac{\frac{d\vec{r}}{ds}(s^{-1}(s))}{\left\| \frac{d\vec{r}}{ds}(s^{-1}(s)) \right\|}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$v(s) = \|\vec{v}(s)\| = 1 \quad y \quad \hat{T}(s) = \frac{\vec{v}(s)}{\|\vec{v}(s)\|} = \vec{v}(s).$$

- Notemos que

$$\begin{aligned}L : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ t &\rightarrow L(t) = \vec{r}(t_0) + \frac{d\vec{r}}{dt}(t_0)(t - t_0),\end{aligned}$$

es la recta que mejor aproxima a la curva γ en torno al punto $\vec{r}(t_0)$.

3.3.3. Vector normal y curvatura

Sea $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$, con $N = 2$ o $N = 3$, una C^1 -parametrización de una curva γ simple, regular y suave. Si $\vec{r}(t)$ denota la posición de una partícula, en el plano o en el espacio, en un instante t , entonces $\vec{v}(t)$ representa la velocidad de la partícula en el instante t , $v(t) = \|\vec{v}(t)\|$ su rapidez y $\vec{a}(t)$ su aceleración. Se sigue que:

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t) \\ &= \frac{d\vec{v}}{dt}(t) \\ &= \frac{d}{dt}(v(t) \hat{T}(t)) \\ &= \underbrace{v'(t) \hat{T}(t)}_{\vec{a}_{\hat{T}}(t)} + \underbrace{v(t) \frac{d\hat{T}}{dt}(t)}_{\vec{a}_{\hat{N}}(t)}.\end{aligned}$$

aceleración tangente aceleración normal

OBSERVACIÓN 3.3.5 Sea $N = 2$ o $N = 3$. Si una partícula de masa m se mueve sobre una curva γ en \mathbb{R}^N , la fuerza \vec{F} que actúa sobre ella en el punto $\vec{r}(t) \in \gamma$ se relaciona con la aceleración por medio de la segunda ley de Newton:

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = m \vec{a}(t).$$

En particular, si no actúa fuerza alguna sobre una partícula, entonces $\vec{a}(t) = 0$, $\vec{v}(t)$ es constante y la partícula se mueve sobre una recta. Por otro lado, si usamos la parametrización natural de γ , se sigue que $v(t) = 1$ y $\hat{T}(t) = \vec{v}(t)$, de donde obtenemos

$$\vec{a}_{\hat{T}}(s) = 0 \quad y \quad \vec{a}(t) = \frac{d\hat{T}}{dt}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t).$$

DEFINICIÓN 3.3.7 Sea $N = 2$ o $N = 3$, sea γ una curva simple, regular y suave en \mathbb{R}^N , y sea $\vec{r}_0 : [0, \ell(\gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^N$ su parametrización natural, la cual asumimos suave. Llamamos *curvatura* de γ en el punto $\vec{r}(s)$ al valor $\kappa(s)$ dado por

$$\kappa(s) = \left\| \frac{d\hat{T}}{ds}(s) \right\| \quad s \in [0, \ell(\gamma)].$$

Además, si $\kappa(s) > 0$, llamamos *radio de curvatura* en el punto $\vec{r}(s)$ al valor $R(s)$ dado por

$$R(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \quad s \in [0, \ell(\gamma)],$$

y *vector normal unitario* en el punto $\vec{r}(s)$ al vector \hat{N} dado por

$$\hat{N}(s) = R(s) \frac{d\hat{T}}{ds}(s) \quad s \in [0, \ell(\gamma)].$$

OBSERVACIÓN 3.3.6 En una primera aproximación, la curva γ se parece a una recta que pasa por un punto $\vec{r}(t)$, en la dirección del vector $\hat{T}(t)$, de manera que al estudiar variaciones de la velocidad (es decir, la aceleración) observamos que se produce un cambio de magnitud y/o dirección de la velocidad. Intuitivamente la curvatura aparece por efecto de la variación del vector tangente. Mientras más rápida la variación, más cerrada será la curva. Estos conceptos geométricos están relacionados con medidas en el plano o el espacio. Por ello conviene establecer una relación entre ellas en términos de la distancia recorrida; es decir, con la parametrización en longitud de arco.

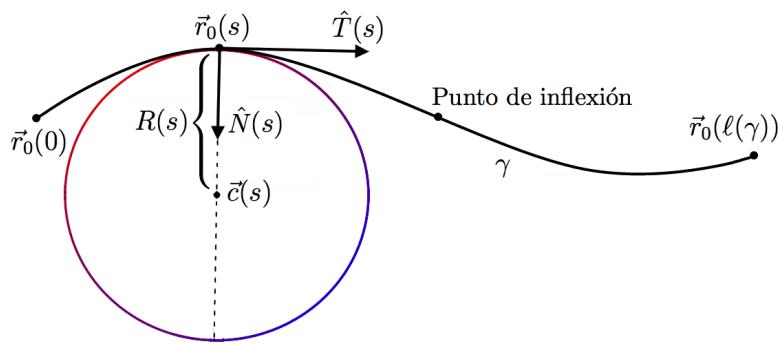


Figura 3.16. La circunferencia que mejor aproxima a la curva γ en \mathbb{R}^2 , en el punto $\vec{r}_0(s)$, es la circunferencia de radio $R(s)$ y centro $\vec{c}(s)$ en el plano definido por $\hat{N}(s)$ y $\hat{T}(s)$. En el punto de inflexión el vector normal no está definido.

DEFINICIÓN 3.3.8 Con la notación previa, llamamos *centro de curvatura* a $\vec{c}(s) = \vec{r}_0(s) + R(s) \hat{N}(s)$.

Ahora surge una pregunta básica:

¿Cómo podemos obtener la definición de curvatura y vector normal evitando calcular la parametrización natural?

Sea $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$, con $N = 2$ o $N = 3$, una C^1 -parametrización de una curva γ simple, regular y suave.

- Sabemos que a cada $t \in [a, b]$ le corresponde único $s \in [0, \ell(\gamma)]$ tal que $t = s^{-1}(s)$ ($s(\cdot)$ es la función longitud de la curva de la trayectoria desde $\vec{r}(a)$ hasta $\vec{r}(t)$).

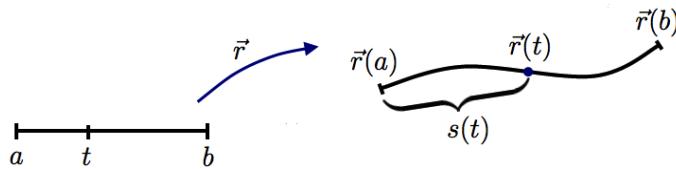


Figura 3.17. Parametrización de una curva

- Notemos que para $\vec{r}_0(s) = \vec{r}(s^{-1}(s))$ la parametrización natural, el vector tangente es

$$\begin{aligned}\hat{T}(s) &= \frac{\vec{v}(s)}{v(s)} \\ &= \frac{\frac{d\vec{r}}{ds}(s^{-1}(s))}{\left\| \frac{d\vec{r}}{ds}(s^{-1}(s)) \right\|} \\ &= \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}(t) \frac{dt}{ds}(s)}{\left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \frac{dt}{ds}(s) \right\|},\end{aligned}$$

donde $t(s) = t = s^{-1}(s)$. Como $\frac{dt}{ds}(s) > 0$ (es un valor real), entonces

$$\begin{aligned}\hat{T}(s) &= \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}(t)}{\left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\|} \\ &= \hat{T}(t) \\ &= \hat{T}(s^{-1}(s)) \quad \forall s \in [0, \ell(\gamma)].\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{T}}{ds}(s) &= \frac{d}{ds} \hat{T}(s^{-1}(s)) \\ &= \frac{d\hat{T}}{dt}(t) \frac{dt}{ds}(s) \\ &= \frac{\frac{d\hat{T}}{dt}(t)}{\frac{ds}{dt}(t)},\end{aligned}$$

y como

$$\begin{aligned}v(t) &= \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| \\ &= \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \frac{dt}{ds}(s) \right\| \frac{ds}{dt}(t) \\ &= \left\| \frac{d\vec{r}}{ds}(s^{-1}(s)) \right\| \frac{ds}{dt}(t) \\ &= v(s) \frac{ds}{dt}(t) \\ &= \frac{ds}{dt}(t),\end{aligned}$$

como se esperaba, pues la rapidez es la variación de la distancia recorrida con respecto al tiempo.

- Se sigue que,

$$\frac{d\hat{T}}{ds}(s) = \frac{1}{v(t)} \frac{d\hat{T}}{dt}(t),$$

de donde

$$\begin{aligned}\kappa(s) &= \kappa(s(t)) \\ &= \left\| \frac{d\hat{T}}{ds}(s) \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{v(t)} \frac{d\hat{T}}{dt}(t) \right\|\end{aligned}$$

y

$$R(s) = \frac{1}{\kappa(s)},$$

y cuando $\kappa(s) > 0$, tenemos

$$\begin{aligned}\hat{N}(s) &= \hat{N}(s(t)) \\ &= \frac{d\hat{T}}{ds}(s) R(s) \\ &= \frac{\frac{1}{v(t)} \frac{d\hat{T}}{dt}(t)}{\frac{1}{v(t)} \left\| \frac{d\hat{T}}{dt}(t) \right\|} \\ &= \frac{\frac{d\hat{T}}{dt}(t)}{\left\| \frac{d\hat{T}}{dt}(t) \right\|}.\end{aligned}$$

Así,

$$\kappa(t) := \frac{1}{v(t)} \left\| \frac{d\hat{T}}{dt}(t) \right\|, \quad R(t) := \frac{1}{\kappa(t)}, \quad \text{y cuando } \kappa(t) > 0, \quad \hat{N}(t) := \frac{\frac{d\hat{T}}{dt}(t)}{\left\| \frac{d\hat{T}}{dt}(t) \right\|}.$$

Ahora nos preguntamos,

¿Por qué \hat{N} se llama vector normal?

Notemos que

$$\frac{d}{ds} \|\hat{T}(s)\|^2 = 2 \left\langle \hat{T}(s), \frac{d\hat{T}}{ds}(s) \right\rangle,$$

y como \hat{T} es un vector unitario,

$$\|\hat{T}(s)\| = 1 \quad \forall s \in [0, \ell(\gamma)],$$

se sigue que

$$\left\langle \hat{T}(s), \frac{d\hat{T}}{ds}(s) \right\rangle = 0 \quad \forall s \in [0, \ell(\gamma)].$$

Luego, si $\kappa(s) > 0$ se sigue que

$$\begin{aligned} \langle \hat{T}(s), \hat{N}(s) \rangle &= \left\langle \hat{T}(s), \frac{1}{\kappa(s)} \frac{d\hat{T}}{ds}(s) \right\rangle \\ &= \frac{1}{\kappa(s)} \left\langle \hat{T}(s), \frac{d\hat{T}}{ds}(s) \right\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\hat{T}(s) \perp \hat{N}(s) \quad \forall s \in [0, \ell(\gamma)] \quad \text{tal que } \kappa(s) > 0.$$

3.3.4. Torsión y vector Binormal

DEFINICIÓN 3.3.9 Sea γ una curva simple y regular en el espacio y sea $\vec{r}_0 : [0, \ell(\gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^3$ su parametrización natural, la cual asumimos suave. Llamamos *vector binormal* al vector

$$\hat{B}(s) = \hat{T}(s) \times \hat{N}(s) \quad s \in [0, \ell(\gamma)].$$

Ahora surge una pregunta básica:

¿Cómo podemos obtener la definición de curvatura y vector normal evitando calcular la parametrización natural?

Sea $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización suave de una curva γ simple y regular. Si queremos evitar el cálculo de $\vec{r}_0(s)$ podemos considerar

$$\begin{aligned} \hat{B}(s) &= \hat{B}(s(t)) \\ &= \hat{T}(s(t)) \times \hat{N}(s(t)) \\ &= \hat{T}(s) \times \hat{N}(s) \\ &= \hat{T}(t) \times \hat{N}(t) \\ &= \hat{B}(t). \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 3.3.10 Sea γ una curva simple y regular, sea $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una C^1 -parametrización de γ y sea $t_0 \in [a, b]$ fijo. Entonces

$$(\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)) \cdot \hat{B}(t_0) = 0, \quad (\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)) \cdot \hat{T}(t_0) = 0 \quad \text{y} \quad (\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)) \cdot \hat{N}(t_0) = 0$$

definen respectivamente los planos *osculador*, *normal* y *rectificante* a γ en $\vec{r}(t_0)$.

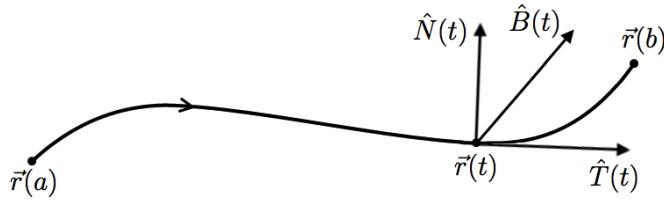


Figura 3.18. Vectores normal, binormal y tangente a una curva.

Ahora nos preguntamos,

¿Por qué \hat{B} se llama vector binormal?

Notemos que

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{B}}{ds}(s) &= \frac{d\hat{T}}{ds}(s) \times \hat{N}(s) + \hat{T}(s) \times \frac{d\hat{N}}{ds}(s) \\ &= R(s) \cdot \hat{N}(s) \times \hat{N}(s) + \hat{T}(s) \times \frac{d\hat{N}}{ds}(s).\end{aligned}$$

Recordemos que

$$(a, b, c) \times (c, d, e) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & b & c \\ c & d & e \end{vmatrix}$$

y que

$$(f, g, h) \cdot ((a, b, c) \times (c, d, e)) = \begin{vmatrix} f & g & h \\ a & b & c \\ c & d & e \end{vmatrix},$$

y que si en un determinante una fila (columna) es múltiplo de otra, entonces el determinante es 0.
Luego,

$$\frac{d\hat{B}}{ds}(s) = \hat{T}(s) \times \frac{d\hat{N}}{ds}(s) \quad \text{y} \quad \frac{d}{ds} \|\hat{B}(s)\|^2 = \left\langle \hat{B}(s), \frac{d\hat{B}}{ds}(s) \right\rangle = 0.$$

Así,

$$\frac{d\hat{B}}{ds}(s) \perp \hat{T}(s) \quad \text{y} \quad \frac{d\hat{B}}{ds}(s) \perp \hat{B}(s).$$

Por lo tanto,

$$\frac{d\hat{B}}{ds}(s) \parallel \hat{N}(s)$$

pues

$$\hat{T}(s) \cdot \frac{d\hat{B}}{ds}(s) = \hat{T}(s) \cdot \left(\hat{T}(s) \times \frac{d\hat{N}}{ds}(s) \right) = 0.$$

DEFINICIÓN 3.3.11 Sea γ una curva simple y regular en el espacio y sea $\vec{r}_0 : [0, \ell(\gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^3$ su parametrización natural, la cual asumimos suave. Se define la *torsión* τ de la curva en el punto $\vec{r}_0(s)$ como

$$\tau(s) = -\left\langle \frac{d\hat{B}}{ds}(s), \hat{N}(s) \right\rangle.$$

OBSERVACIÓN 3.3.7 Se verifica que

$$\frac{d\hat{B}}{ds} = -\tau \hat{N},$$

donde $-\tau$ se interpreta como la tasa natural a la que el vector binormal “persigue” al vector normal.

TEOREMA 3.3.5 La curvatura y la torsión de una curva γ simple y regular en el espacio que admite una parametrización suave, determinan completamente a la curva γ , salvo desplazamientos rígidos.

3.3.5. Diedro móvil, triedro móvil y fórmulas de Frenet-Serret

DEFINICIÓN 3.3.12 (Diedro móvil) Sea γ una curva simple, regular y suave en el plano, y sea \vec{r} una C^1 -parametrización de γ que es de clase C^3 sobre cada uno de los puntos en γ de curvatura no nula. La base ortonormal positiva $\{\hat{T}, \hat{N}\}$ de \mathbb{R}^2 se conoce como *diedro de Frenet-Serret* o *diedro móvil* de la curva.

Las fórmulas de Frenet-Serret para curvas simples y regulares en el plano son:

$$i) \frac{d\hat{T}}{ds}(s) = \kappa(s) \hat{N}(s)$$

$$ii) \frac{d\hat{N}}{ds}(s) = -\kappa(s) \hat{T}(s).$$

DEFINICIÓN 3.3.13 (Triedro móvil) Sea γ una curva simple, regular y suave en el espacio, y sea \vec{r} una C^1 -parametrización de γ que es de clase C^3 sobre cada uno de los puntos en γ de curvatura no nula. La base ortonormal positiva $\{\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}\}$ de \mathbb{R}^3 se conoce como *triedro de Frenet-Serret* o *triedro móvil* de la curva.

Las fórmulas de Frenet-Serret para curvas simples y regulares en el espacio son:

$$i) \frac{d\hat{T}}{ds}(s) = \kappa(s) \hat{N}(s)$$

$$ii) \frac{d\hat{N}}{ds}(s) = \tau(s) \hat{B}(s) - \kappa(s) \hat{T}(s)$$

$$iii) \frac{d\hat{B}}{ds}(s) = -\tau(s) \hat{N}(s).$$

OBSERVACIÓN 3.3.8 Todas las fórmulas de Frenet-Serret pueden ser deducidas fácilmente. Aquí solo mostramos como deducir la fórmula ii) en el caso espacial. Notemos que

$$\begin{aligned}\tau(s) &= \tau(s(t)) \\ &= -\frac{1}{v(t)} \left\langle \frac{d\hat{B}}{dt}(t), \hat{N}(t) \right\rangle \\ &= \tau(t).\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{N}}{ds}(s) &= \frac{d}{ds}(\hat{B}(s) \times \hat{T}(s)) \\ &= \frac{d\hat{B}}{ds}(s) \times \hat{T}(s) + \hat{B}(s) \times \frac{d\hat{T}}{ds}(s) \\ &= (-\tau(s)\hat{N}(s)) \times \hat{T}(s) + \hat{B}(s) \times (\kappa(s)\hat{N}(s)) \\ &= \tau(s)\hat{B}(s) - \kappa(s)\hat{T}(s).\end{aligned}$$

Por otro lado, las fórmulas de Frenet-Serret se pueden representar de forma matricial como

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \hat{T} \\ \hat{N} \\ \hat{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{T} \\ \hat{N} \\ \hat{B} \end{pmatrix}.$$

TEOREMA 3.3.6 Sea γ una curva simple, regular y suave en el espacio, y sea \vec{r} una C^1 -parametrización de γ que es de clase C^3 sobre cada uno de los puntos en γ de curvatura no nula. Entonces, en cada punto $\vec{r}(t) \in \gamma$ se verifica que

- $\kappa(t) = \frac{\left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t) \right\|}{\left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\|^3}$
- $\tau(t) = \frac{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}(t) \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t) \right) \cdot \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}(t)}{\left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t) \right\|^2}$
- Los planos osculador, normal y rectificante a γ en $\vec{r}(t_0)$ están dados respectivamente por

$$(\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)) \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t_0) \right) = 0, \quad (\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) = 0$$

y

$$(\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)) \cdot \left(\left(\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t_0) \right) \times \frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) \right) = 0.$$

EJEMPLO 3.3.2 Considera la hélice circular recta $H_{a,h}$ de radio a y altura del paso h . Encuentra \hat{T} , \hat{N} , \hat{B} , κ , τ , R , \vec{v} , \vec{a} , v .

Solución. La parametrización usual de la Hélice circular recta de radio a y altura del paso h es $\vec{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$t \mapsto \vec{r}(t) = \left(a \cos t, a \sin t, \frac{h}{2\pi} t \right).$$

Luego,

- $\vec{v}(t) = \left(-a \sin t, a \cos t, \frac{h}{2\pi} \right)$
- $v(t) = \|\vec{v}(t)\| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{h}{2\pi} \right)^2} = \frac{\sqrt{(2\pi a)^2 + h^2}}{2\pi}$
- $\hat{T}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{v(t)} = \frac{2\pi}{\sqrt{(2\pi a)^2 + h^2}} \left(-a \sin t, a \cos t, \frac{h}{2\pi} \right)$
- $\kappa(t) = \frac{1}{v(t)} \left\| \frac{d\hat{T}}{dt}(t) \right\| = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{(2\pi a)^2 + h^2}} \right)^2 \left\| (-a \cos t, -a \sin t, 0) \right\| = \frac{(2\pi)^2 a}{(2\pi a)^2 + h^2}$
- $\vec{a}(t) = v'(t) \hat{T}(t) + v(t) \frac{d\hat{T}}{dt}(t) = (-a \cos t, -a \sin t, 0) \quad \text{pues } v'(t) = 0$
- $R(t) = \frac{1}{\kappa(t)} = \frac{(2\pi a)^2 + h^2}{(2\pi)^2 a}$
- $\hat{N}(t) = \frac{\frac{d\hat{T}}{dt}(t)}{\left\| \frac{d\hat{T}}{dt}(t) \right\|} = \frac{(-a \cos t, -a \sin t, 0)}{a} = -(\cos t, \sin t, 0)$
- $\hat{B}(t) = \hat{T}(t) \times \hat{N}(t)$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{(2\pi a)^2 + h^2}} \left(-a \sin t, a \cos t, \frac{h}{2\pi} \right) \times (-\cos t, -\sin t, 0)$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{(2\pi a)^2 + h^2}} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -a \sin t & a \cos t & \frac{h}{2\pi} \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} \\ -a \sin t & a \cos t \\ -\cos t & -\sin t \end{matrix}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{(2\pi a)^2 + h^2}} \left(\frac{h}{2\pi} \sin t \hat{i} - \frac{h}{2\pi} \cos t \hat{j} + a \sin^2 t \hat{k} + a \cos^2 t \hat{k} \right)$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{(2\pi a)^2 + h^2}} \left(\frac{h}{2\pi} \sin t, -\frac{h}{2\pi} \cos t, a \right)$$

$$\begin{aligned}
\blacksquare \quad \tau(t) &= -\frac{1}{v(t)} \left\langle \frac{d\hat{B}}{dt}(t), \hat{N}(t) \right\rangle \\
&= -\frac{2\pi}{\sqrt{(2\pi a)^2 + h^2}} \frac{2\pi}{\sqrt{(2\pi a)^2 + h^2}} \left(\frac{h}{2\pi} \cos t, \frac{h}{2\pi} \sin t, a \right) \cdot (-\cos t, -\sin t, 0) \\
&= \frac{2\pi h}{(2\pi a)^2 + h^2}. \quad \square
\end{aligned}$$

EJEMPLO 3.3.3 Considera en \mathbb{R}^3 la curva γ definida paramétricamente por

$$\vec{r}(t) = (t^2 - 1)\hat{i} + 2t\hat{j} + (t^2 + 1)\hat{k} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Para $t_0 = -1$ determina:

- a) $\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}, \kappa, \tau,$
- b) la ecuación del plano rectificante,
- c) la recta tangente

Solución. Como $\vec{r}(t) = (t^2 - 1, 2t, t^2 + 1)$ para cada $t \in \mathbb{R}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\blacksquare \quad &\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = (2t, 2, 2t) \\
\blacksquare \quad &v(t) = \|\vec{v}(t)\| = 2\sqrt{2t^2 + 1} \\
\blacksquare \quad &\hat{T}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{v(t)} = \frac{1}{\sqrt{2t^2 + 1}} (t, 1, t) \\
\blacksquare \quad &\hat{N}(t) = \frac{\frac{d\hat{T}}{dt}(t)}{\left\| \frac{d\hat{T}}{dt}(t) \right\|} \\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{2t^2 + 1}}(1, 0, 1) - \frac{2t}{(2t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}(t, 1, t)}{\left\| \frac{1}{\sqrt{2t^2 + 1}}(1, 0, 1) - \frac{2t}{(2t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}(t, 1, t) \right\|} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{(2t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-2t}{(2t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{(2t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right)}{\left\| \left(\frac{1}{(2t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-2t}{(2t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{(2t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right) \right\|} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2t^2 + 1}}, \frac{-2t}{\sqrt{2}\sqrt{2t^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2t^2 + 1}} \right)
\end{aligned}$$

■ $\hat{B}(t) = \hat{T}(t) \times \hat{N}(t)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}(2t^2+1)} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ t & 1 & t \\ 1 & -2t & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \color{red}{\hat{i}} & \color{red}{\hat{j}} \\ \color{red}{t} & \color{red}{1} \\ \color{red}{1} & \color{red}{-2t} \end{matrix}$$

$$= \hat{i} + 2t^2\hat{i} + t\hat{j} - t\hat{j} - 2t^2\hat{k} - \hat{k}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}(2t^2+1)} (2t^2+1, 0, -(2t^2+1))$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, -1)$$

■ $\kappa(t) = \frac{1}{v(t)} \left\| \frac{d\hat{T}}{dt}(t) \right\| = \frac{1}{2\sqrt{2t^2+1}} \frac{\sqrt{2}}{(2t^2+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}(2t^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

■ $\tau(t) = -\frac{1}{v(t)} \left\langle \frac{d\hat{B}}{dt}(t), \hat{N}(t) \right\rangle = 0$ pues \hat{B} es un vector constante.

Luego,

a) $\hat{T}(-1) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$, $\hat{N}(-1) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$, $\hat{B}(-1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$,

$$\kappa(-1) = \frac{1}{3\sqrt{6}} \quad \text{y} \quad \tau(-1) = 0.$$

b) El plano rectificante en $t_0 = 1$ es

$$(\vec{r}(t) - \vec{r}(-1)) \cdot \hat{N}(-1) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Como $\vec{r}(-1) = (0, -2, 2)$ y $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ para cada $t \in \mathbb{R}$, el plano rectificante en $t_0 = 1$ viene dado por la ecuación

$$(x - 0, y + 2, z - 2) \cdot (1, 2, 1) = 0,$$

o equivalentemente

$$x + 2y + z + 2 = 0.$$

c) La recta tangente en $t_0 = 1$ es

$$L(t) = \vec{r}(-1) + \frac{d\vec{r}}{dt}(-1)(t+1) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Luego, la recta tangente en $t_0 = 1$ viene dada por

$$L(t) = (0, -2, 2) + (-2, 2, -2)(t+1) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

o equivalentemente

$$L(t) = (-2t - 2, 2t, -2t) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad \square$$

EJEMPLO 3.3.4 Prueba que las únicas curvas con torsión 0 son las curvas contenidas en un plano.

Solución. Sea γ una curva simple y regular y sea \vec{r} una parametrización suave de γ .

(\Rightarrow) Asumamos que $\tau = 0$. Notemos que

$$\begin{aligned}\tau = 0 \Rightarrow \frac{d\hat{B}}{ds} &= 0 \quad \text{por fórmula de Frenet-Serret } ii) \text{ para curvas en el espacio} \\ \Rightarrow \hat{B} &\text{ es un vector unitario y constante.}\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\hat{B} \perp \hat{T} \Rightarrow \hat{B} \cdot \hat{T} &= 0 \\ \Rightarrow \hat{B} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{ds}(\hat{B} \cdot \vec{r}) &= 0 \quad \text{pues } \hat{B} \text{ es un vector constante} \\ \Rightarrow \hat{B} \cdot \vec{r} &\text{ es constante.}\end{aligned}$$

Luego, la curva γ pertenece a un plano normal a \hat{B} .

(\Leftarrow) Asumamos que γ es una curva contenida en un plano. Entonces, \hat{T} y \hat{N} están contenidas en el plano que contiene a la curva. Como $\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N}$ es unitario y perpendicular a dicho plano, entonces su dirección es la misma en cualquier punto de la curva. Es decir,

$$\frac{d\hat{B}}{ds} = 0$$

en todos los puntos en que \hat{N} está definido. Así, desde la fórmula de Frenet-Serret $iii)$ para curvas en el espacio, concluimos que $\tau = 0$. \square

EJERCICIOS 3.3.1

1. Sea γ una curva simple y regular y sea \vec{r} una C^3 -parametrización de γ .

a) Usando las fórmulas de Frenet-Serret, prueba que

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t) \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t) = \left(\frac{ds}{dt}(t) \right)^3 \kappa(s) \hat{B}(s).$$

b) Prueba que si γ tiene curvatura 0, entonces γ es una recta.

c) Prueba que si la torsión de γ es 0 y su curvatura es constante, entonces γ debe ser una circunferencia.

d) Prueba que si la torsión y la curvatura de γ son constantes, entonces γ debe ser una hélice circular recta.

2. Determina la curvatura κ , el radio de curvatura R y la torsión τ de la curva γ de trayectoria $\vec{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\vec{r}(t) = (2 \sin t, 2 \cos t, t)$.
3. Encuentra el radio de curvatura de la curva γ de trayectoria $\vec{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\vec{r}(t) = (\ln(\sin t), \ln(\cos t), \sqrt{2}t)$.
4. Encuentra la ecuación del plano normal a la curva γ de trayectoria $\vec{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\vec{r}(t) = (at^3, bt^2, ct)$ en el punto $(8a, 4b, 2c)$.
5. Una partícula sigue la trayectoria $\vec{r}(t) = (4t^2, -3t^2, 2)$, donde t representa el tiempo.
 - a) La velocidad, la rapidez y la aceleración de la partícula en cualquier instante t .
 - b) La curvatura y la torsión de la partícula en cualquier instante t .
 - c) Determina, si es posible, qué curva representa la trayectoria \vec{r} .

Para ver las Soluciones de los Ejercicios 3.3.1 presiona aquí A

3.4. Integral de línea de un campo escalar

DEFINICIÓN 3.4.1 (Integral de línea de un campo escalar) Sea $N = 2$ o $N = 3$, sea Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^N , sea γ una curva simple, regular y suave en Ω , sea $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ una C^1 -parametrización simple y regular de γ , y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, se define la *integral de línea de f sobre γ* como

$$\int_{\gamma} f \, ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| dt.$$

OBSERVACIÓN 3.4.1 La integral de línea no depende de la C^1 -parametrización simple y regular escogida. En efecto, sean $\vec{r}_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^N$, $i = 1, 2$, dos C^1 -parametrizaciones simples y regulares de γ . Entonces \vec{r}_1 es equivalente a \vec{r}_2 ; es decir

$$\exists \varphi : [a_2, b_2] \rightarrow [a_1, b_1] \quad C^1\text{-biyección creciente, tal que} \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_1 \circ \varphi.$$

Así,

$$\begin{aligned} \int_{a_2}^{b_2} f(\vec{r}_2(t)) \left\| \frac{d\vec{r}_2}{dt}(t) \right\| dt &= \int_{a_2}^{b_2} f(\vec{r}_1(\varphi(t))) \left\| \frac{d(\vec{r}_1 \circ \varphi)}{dt}(t) \right\| dt \\ &= \int_{a_2}^{b_2} f(\vec{r}_1(\varphi(t))) \left\| \frac{d\vec{r}_1}{d\varphi}(\varphi(t)) \varphi'(t) \right\| dt \\ &= \int_{a_2}^{b_2} f(\vec{r}_1(\varphi(t))) \left\| \frac{d\vec{r}_1}{d\varphi}(\varphi(t)) \right\| \varphi'(t) dt \\ &= \int_{a_1}^{b_1} f(\vec{r}_1(\xi)) \left\| \frac{d\vec{r}_1}{d\xi}(\xi) \right\| d\xi. \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 3.4.2 La definición 3.4.1 se puede extender a curvas γ seccionalmente regulares, que es cuando existen curvas γ_i simples, regulares y suaves, para $i = 1, 2, \dots, k$, tales que $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_k$. En este caso, obtenemos

$$\int_{\gamma} f \, ds = \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} f \, ds.$$

NOTACIÓN 3.4.1 Sea Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^N , sea γ una curva simple, regular y suave en Ω , sea $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ una C^1 -parametrización simple y regular de γ , con punto inicial en $\vec{A} = \vec{r}(a)$ y punto terminal en $\vec{B} = \vec{r}(b)$ y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua.

- Una notación alternativa para indicar que queremos calcular la integral de línea de f sobre γ es:

$$\int_{\gamma} f \, ds = \int_{\vec{A}}^{\vec{B}} f \, ds.$$

- Si $\vec{A} = \vec{r}(a) = \vec{B} = \vec{r}(b)$, entonces la curva es cerrada y ponemos

$$\oint_{\gamma} f \, ds \quad \text{en vez de} \quad \int_{\gamma} f \, ds.$$

EJEMPLO 3.4.1 Sea γ la curva en \mathbb{R}^2 de ecuación $x^2 + y^2 - \lambda x = 0$, recorrida en sentido antihorario. Calcula

$$\oint_{\gamma} \sqrt{x^2 + y^2} \, ds.$$

Solución. Observemos que

$$x^2 + y^2 - \lambda x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{\lambda}{2} \right)^2 + y^2 = \lambda^2.$$

Consideremos la parametrización de γ en coordenadas polares

$$\vec{r}(t) = (\lambda \cos t, \lambda \sin t) \quad \forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right].$$

Entonces,

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = (-\lambda \sin t, \lambda \cos t) \quad \forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right],$$

de donde

$$\left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| = \lambda \quad \forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right],$$

y desde la ecuación, $x^2 + y^2 = \lambda x$ obtenemos que $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ equivale a

$$f(\vec{r}(t)) = \lambda \cos t \quad \forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right].$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma} \sqrt{x^2 + y^2} \, ds &= \int_a^b f(\vec{r}(t)) \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| dt \\ &= \lambda^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt \\ &= 2\lambda^2. \quad \square\end{aligned}$$

EJEMPLO 3.4.2 Sea $\lambda > 0$ y sea γ la curva en \mathbb{R}^3 de ecuaciones paramétricas $x = \lambda t$, $y = \frac{\lambda}{2}t^2$ y $z = \frac{\lambda}{3}t^3$ para $t \geq 0$. Determina el valor de

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})} \sqrt{\frac{2y}{\lambda}} \, ds.$$

Solución. Ponemos

$$\vec{r}(t) = \left(\lambda t, \frac{\lambda t^2}{2}, \frac{\lambda t^3}{3} \right) \quad \forall t \geq 0.$$

Luego, $\vec{r}(0) = (0, 0, 0)$, $\vec{r}(1) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$,

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = (\lambda, \lambda t, \lambda t^2) \quad \forall t \in [0, 1]$$

y

$$\left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| = \lambda \sqrt{1 + t^2 + t^4} \quad \forall t \in [0, 1].$$

Por otro lado, si ponemos $f(x, y, z) = \sqrt{\frac{2y}{\lambda}}$, entonces

$$f(\vec{r}(t)) = \sqrt{t^2} = t \quad \forall t \in [0, 1].$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_{(0,0,0)}^{(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})} \sqrt{\frac{2y}{\lambda}} \, ds &= \lambda \int_0^1 t \sqrt{1 + t^2 + t^4} \, dt \\ &= \frac{\lambda}{2} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \sqrt{u^2 + \frac{3}{4}} \, du \quad \text{donde } u = t^2 + \frac{1}{2} \text{ y } du = 2t \, dt \\ &= \frac{\lambda}{4} \left(u \sqrt{u^2 + \frac{3}{4}} + \frac{3}{4} \ln \left(u + \sqrt{u^2 + \frac{3}{4}} \right) \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{\lambda}{8} \left(\left(3\sqrt{3} - 1 \right) + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3} \right) \right). \quad \square\end{aligned}$$

EJERCICIOS 3.4.1

1. Sean γ la curva de trayectoria $\vec{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, con $t \in [0, 2\pi]$. Calcula

$$\int_{\gamma} xyz \, ds.$$

2. Sea $a > 0$. Calcula

$$\int_{\gamma} \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} \right) \, ds,$$

donde γ es el arco de la astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

3. Sea $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$. Calcula la integral de línea

$$\int_{\gamma} (x^2 + y^2 + z^2) \, ds,$$

donde γ es la parte de la hélice circular recta de trayectoria

$$\vec{r}(t) = a \cos t \hat{i} + a \operatorname{sen} t \hat{j} + b t \hat{k} \quad t \in [0, 2\pi].$$

4. Sea $\lambda > 0$. Calcula

$$\int_{\gamma} z \, ds,$$

donde γ es el arco de la curva determinada por $x^2 + y^2 = z^2$ e $y^2 = \lambda x$, desde el punto $(0, 0, 0)$ hasta el punto $(\lambda, \lambda, \lambda\sqrt{2})$.

Para ver las Soluciones de los Ejercicios 3.4.1 presiona aquí **A**

3.5. Aplicaciones de la integral de línea de un campo escalar

3.5.1. Masa

Sea Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^N , sea γ una curva simple, regular y suave en Ω , sea $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$, con $N = 2$ o $N = 3$, una C^1 -parametrización simple y regular de γ , y sea $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si γ representa un alambre, cuerda o varilla (si $N = 2$) o resorte (si $N = 3$) ideal, y ρ la densidad de masa lineal sobre γ , entonces una aproximación de la masa está dada por

$$\begin{aligned} M &\approx \sum_{i=1}^n \rho(\vec{r}(t_i)) \|\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})\| \\ &= \sum_{i=1}^n \rho(\vec{r}(t_i)) \left\| \frac{\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})}{(t_i - t_{i-1})} \right\| (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \rho(\vec{r}(t_i)) \left\| \frac{\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})}{(t_i - t_{i-1})} \right\| \Delta t_i. \end{aligned} \tag{3.1}$$

De manera análoga a la longitud de arco, se puede demostrar que si

$$\delta(\mathcal{P}) = \max_{1 \leq i \leq n} \{t_i - t_{i-1}\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

donde $\mathcal{P} = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\}$, entonces la sumatoria (3.1) converge a la integral de línea de ρ sobre γ , así que

$$M = \int_{\gamma} \rho \, ds = \int_a^b \rho(\vec{r}(t)) \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| dt.$$

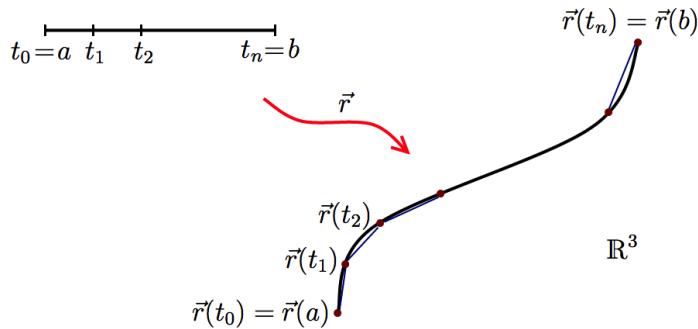


Figura 3.19. Aproximación de una curva mediante trazos poligonales.

DEFINICIÓN 3.5.1 (Masa) Sea $N = 2$ o $N = 3$, sea Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^N , sea γ una curva simple, regular y suave en Ω , sea $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ una C^1 -parametrización simple y regular de γ , y sea $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si γ representa un alambre, cuerda o varilla (si $N = 2$) o resorte (si $N = 3$), y ρ la densidad de masa lineal sobre γ , entonces la *masa total* del alambre, cuerda o varilla (si $N = 2$) o resorte (si $N = 3$), está dada por

$$M = \int_{\gamma} \rho \, ds = \int_a^b \rho(\vec{r}(t)) \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| dt.$$

3.5.2. Centro de masa y momentos en \mathbb{R}^2

A continuación introduciremos algunos conceptos tales como momentos estáticos o primeros momentos, centro de masa y momentos de inercia o segundos momentos, para el caso $N = 2$.

Momentos estáticos en \mathbb{R}^2

El primer momento en torno a un eje de una partícula en el plano cuya masa es m [kg], corresponde al producto entre la masa m de la partícula y su respectiva distancia r – que considera el signo – a tal eje. De esta forma, es razonable pensar que si tenemos n partículas, entonces el primer momento

de masa total debe ser la suma de los primeros momentos de masa de cada una de las partículas. Luego, el primer momento total debe ser

$$M_{\text{eje}} = \sum_{i=1}^n r_i m_i.$$

A partir de este hecho y teniendo en cuenta que la distancia de un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ al eje x considerando el signo es $\text{sgn}(y)\sqrt{y^2} = \text{sgn}(y)|y| = y$, podemos establecer que el *primer momento respecto al eje x* de un trozo de alambre, cuerda o varilla delgada en el plano, representado por una curva simple, regular y suave γ , que posee una densidad de masa lineal igual a $\rho(x, y)$, está dado por

$$M_x = \int_{\gamma} y \rho(x, y) ds$$

Similarmente, podemos establecer que el *primer momento respecto al eje y* es

$$M_y = \int_{\gamma} x \rho(x, y) ds$$

Centro de masa en \mathbb{R}^2

Imaginemos por un instante que colocamos masas m_1, m_2, \dots, m_n sobre respectivos puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ del plano xy , los cuales pertenecen a un alambre delgado ideal. Representamos esta situación por n bolas (de masas $m_i, i = 1, 2, \dots, n$) de plastilina ubicadas en ciertos puntos del alambre (los puntos de coordenadas (x_i, y_i)). Nos interesa conocer el punto en que el alambre se mantiene en equilibrio.

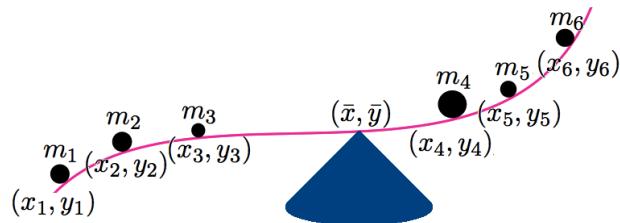


Figura 3.20. Centro de masa en un alambre delgado ideal en el plano.

Claramente, el punto

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n m_i} \sum_{i=1}^n (x_i, y_i) m_i = \frac{1}{\sum_{i=1}^n m_i} \left(\sum_{i=1}^n x_i m_i, \sum_{i=1}^n y_i m_i \right)$$

representa al punto de equilibrio de las masas o *centro de masa* del alambre. Notemos que la formulación anterior conduce a

$$\sum_{i=1}^n m_i((x_i, y_i) - (\bar{x}, \bar{y})) = 0,$$

que – gracias a un principio físico de Newton – implica que no hay tendencia a que el alambre gire. Esta idea se puede extender a densidad continua y obtener que el *centro de masa* de un alambre, cuerda o varilla delgada γ en el plano, que posee una densidad de masa lineal igual a $\rho(x, y)$, es el punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ de coordenadas

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{M}, \frac{M_x}{M} \right)$$

Momentos de inercia en \mathbb{R}^2

Sabemos que el *momento de inercia* en torno a un eje de una partícula en el plano cuya masa es m [kg], corresponde al valor $r^2 m$ [kg][m²], donde r es la distancia desde la partícula al eje. De esta forma, es razonable pensar que si tenemos n partículas, entonces el momento de inercia total debe ser la suma de los momentos de inercia de cada una de las partículas. Luego, el momento de inercia total debe ser

$$I = \sum_{i=1}^n r_i^2 m_i.$$

A partir de este hecho y teniendo en cuenta que la distancia de un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ al eje x , o bien recta $y = 0$, es $\sqrt{y^2} = |y|$, podemos establecer que el *momento de inercia respecto al eje x* de un trozo de alambre, cuerda o varilla delgada en el plano, representado por una curva simple, regular y suave γ , que posee una densidad de masa lineal igual a $\rho(x, y)$, está dado por

$$I_x = \int_{\gamma} y^2 \rho(x, y) ds$$

Similarmente, podemos establecer que el *momento de inercia respecto al eje y* es

$$I_y = \int_{\gamma} x^2 \rho(x, y) ds$$

Ahora, teniendo en cuenta que la distancia de un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ al origen es $\sqrt{x^2 + y^2}$, también podemos obtener el *momento de inercia respecto al origen*, el cual corresponde a

$$I_0 = \int_{\gamma} (x^2 + y^2) \rho(x, y) ds$$

Fórmulas para la masa y momentos de un alambre, cuerda o varilla delgada en el plano xy

■ Masa:

$$M = \int_{\gamma} \rho \, ds = \int_a^b \rho(\vec{r}(t)) \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| dt.$$

■ Momentos estáticos (primeros momentos) con respecto a los ejes coordenados:

$$M_x = \int_{\gamma} y \rho \, ds \quad \text{y} \quad M_y = \int_{\gamma} x \rho \, ds.$$

■ Centro de masa: (\bar{x}, \bar{y})

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}.$$

OBSERVACIÓN: Si la densidad es constante, el **centro de masa** se denomina **centroide**.

■ Momentos de inercia (segundos momentos) con respecto a los ejes coordinados:

$$I_x = \int_{\gamma} y^2 \rho \, ds \quad \text{e} \quad I_y = \int_{\gamma} x^2 \rho \, ds.$$

■ Momento de inercia con respecto al origen (momento polar):

$$I_0 = \int_{\gamma} (x^2 + y^2) \rho \, ds.$$

■ Momento de inercia con respecto a una recta L :

$$I_L = \int_{\gamma} (r(x, y))^2 \rho \, ds,$$

donde $r(x, y)$ es la distancia del punto (x, y) a la recta L .

■ Radio de giro con respecto a una recta L :

$$R_L = \sqrt{\frac{I_L}{M}}$$

3.5.3. Centro de masa y momentos en \mathbb{R}^3

A continuación extendemos los conceptos de momentos estáticos o primeros momentos, centro de masa y momentos de inercia o segundos momentos, al caso $N = 3$.

Momentos estáticos en \mathbb{R}^3

El primer momento de masa con respecto a un plano de una partícula en el espacio cuya masa

es m [kg], corresponde al producto entre la masa m de la partícula y su respectiva distancia r – que considera el signo – a tal plano. De esta forma, es razonable pensar que si tenemos n partículas, entonces el primer momento de masa total debe ser la suma de los primeros momentos de masa de cada una de las partículas. Luego, el primer momento total debe ser

$$M_{\text{plano}} = \sum_{i=1}^n r_i m_i.$$

A partir de este hecho y teniendo en cuenta que la distancia de un punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ al plano $x = 0$, o bien plano yz , considerando el signo es $\text{sgn}(x)\sqrt{x^2} = \text{sgn}(x)|x| = x$, podemos establecer que el *primer momento respecto al plano yz* de un trozo de alambre, cuerda o resorte en el espacio, representado por una curva simple, regular y suave γ , que posee una densidad de masa lineal igual a $\rho(x, y, z)$, está dado por

$$M_{yz} = \int_{\gamma} x \rho(x, y, z) ds$$

Similarmente, podemos establecer que el *primer momento respecto al plano y = 0, o bien plano xz* es

$$M_{xz} = \int_{\gamma} y \rho(x, y, z) ds$$

y que el *primer momento respecto al plano z = 0, o bien plano xy* es

$$M_{xy} = \int_{\gamma} z \rho(x, y, z) ds$$

Centro de masa en \mathbb{R}^3

La situación es análoga al caso $N = 2$, de manera que el *centro de masa* de un alambre, cuerda o resorte delgado γ en el espacio, que posee una densidad de masa lineal igual a $\rho(x, y, z)$, es el punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \mathbb{R}^3$ de coordenadas

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_{yz}}{M}, \frac{M_{xz}}{M}, \frac{M_{xy}}{M} \right)$$

Momentos de inercia en \mathbb{R}^3

Sabemos que el *momento de inercia* en torno a un eje de una partícula en el espacio cuya masa es m [kg], corresponde al valor $r^2 m$ [kg][m²], donde r es la distancia desde la partícula al eje. De esta forma, es razonable pensar que si tenemos n partículas, entonces el momento de inercia total

debe ser la suma de los momentos de inercia de cada una de las partículas. Luego, el momento de inercia total debe ser

$$I = \sum_{i=1}^n r_i^2 m_i.$$

A partir de este hecho y teniendo en cuenta que la distancia de un punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ al eje x es $\sqrt{y^2 + z^2}$, podemos establecer que el *momento de inercia respecto al eje x* de un trozo de alambre, cuerda o resorte en el espacio, representado por una curva simple, regular y suave γ , que posee una densidad de masa lineal igual a $\rho(x, y, z)$, está dado por

$$I_x = \int_{\gamma} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds$$

Similarmente, podemos establecer que el *momento de inercia respecto al eje y* es

$$I_y = \int_{\gamma} (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds$$

y que el *momento de inercia respecto al eje z* es

$$I_z = \int_{\gamma} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) ds$$

Ahora, teniendo en cuenta que la distancia de un punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ al origen es $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, también podemos obtener el *momento de inercia respecto al origen*, el cual corresponde a

$$I_0 = \int_{\gamma} (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds$$

Fórmulas para la masa y momentos de un alambre, cuerda o resorte delgado en el espacio xyz

■ **Masa:**

$$M = \int_{\gamma} \rho ds = \int_a^b \rho(\vec{r}(t)) \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| dt.$$

■ **Momentos estáticos (primeros momentos) con respecto a los planos coordenados:**

$$M_{yz} = \int_{\gamma} x \rho ds, \quad M_{xz} = \int_{\gamma} y \rho ds \quad \text{y} \quad M_{xy} = \int_{\gamma} z \rho ds.$$

■ **Centro de masa:** $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} \quad \text{y} \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}.$$

OBSERVACIÓN: Si la densidad es constante, el **centro de masa** se denomina **centroide**.

■ **Momentos de inercia (segundos momentos) con respecto a los ejes coordenados:**

$$I_x = \int_{\gamma} (y^2 + z^2) \rho \, ds, \quad I_y = \int_{\gamma} (x^2 + z^2) \rho \, ds \quad \text{e} \quad I_z = \int_{\gamma} (x^2 + y^2) \rho \, ds.$$

■ **Momento de inercia con respecto al origen** (momento polar):

$$I_0 = \int_{\gamma} (x^2 + y^2 + z^2) \rho \, ds.$$

■ **Momento de inercia con respecto a una recta L :**

$$I_L = \int_{\gamma} (r(x, y, z))^2 \rho \, ds,$$

donde $r(x, y, z)$ es la distancia del punto (x, y, z) a la recta L .

■ **Radio de giro con respecto a una recta L :**

$$R_L = \sqrt{\frac{I_L}{M}}$$

EJEMPLO 3.5.1 Un alambre enrollado en forma de hélice circular recta (o alambre helicoidal) posee una densidad de masa lineal igual a $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ medida en $[\frac{gr}{m}]$. Si la hélice tiene radio 1 y altura de paso 2π , ¿cuál es la masa total del trozo de alambre que da una vuelta completa?

Solución. La parametrización de la hélice de radio 1 y altura de paso 2π está dada por $\vec{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde

$$t \mapsto \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Luego, para calcular la masa total del trozo de alambre que da una vuelta completa, consideramos $t \in [0, 2\pi]$. Obtenemos,

$$\begin{aligned} M &= \int_{\gamma} \rho \, ds \\ &= \int_0^{2\pi} \rho(\vec{r}(t)) \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2) \|(-\sin t, \cos t, 1)\| dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}(1+t^2) dt \\
&= \sqrt{2} \left(t + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} (3 + 4\pi^2).
\end{aligned}$$

Luego, la masa total solicitada es $\frac{2\sqrt{2}\pi}{3} (3 + 4\pi^2) \left[\frac{gr}{m} \right]$. \square

EJEMPLO 3.5.2 Un alambre helicoidal (o resorte) posee una densidad de masa lineal igual a $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ medida en $\left[\frac{gr}{m} \right]$. Si la hélice tiene radio 1 y altura de paso 2π , ¿cuál es el centro de masa del trozo de alambre que da una vuelta completa?

Solución. La parametrización de la hélice de radio 1 y altura de paso 2π está dada por $\vec{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde

$$t \mapsto \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Luego, para calcular el centro de masa del trozo de alambre que da una vuelta completa, consideramos $t \in [0, 2\pi]$. Notemos que la masa total M ya fue obtenida en el Ejemplo 3.5.1.

(1º) Calculamos \bar{x} :

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{M} \int_{\gamma} x \rho ds \\
&= \frac{3}{2\sqrt{2}\pi(3+4\pi^2)} \int_0^{2\pi} x(t) \rho(\vec{r}(t)) \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| dt \\
&= \frac{3}{2\sqrt{2}\pi(3+4\pi^2)} \int_0^{2\pi} \cos t (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2) \left\| (-\sin t, \cos t, 1) \right\| dt \\
&= \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\pi(3+4\pi^2)} \int_0^{2\pi} \cos t (1+t^2) dt \\
&= \frac{3}{2\pi(3+4\pi^2)} \left(\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos t dt}_{I} + \underbrace{\int_0^{2\pi} t^2 \cos t dt}_{\text{II}} \right).
\end{aligned}$$

Ahora, integramos I por partes,

$$\left. \begin{array}{l} u = t^2 \\ du = 2t dt \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} dv = \cos t dt \\ v = \sin t \end{array} \right. \right\} \Rightarrow I = t^2 \sin t \Big|_0^{2\pi} - 2 \int_0^{2\pi} t \sin t dt,$$

y nuevamente integrando por partes,

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{u} = t \\ d\tilde{u} = dt \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} d\tilde{v} = \sin t dt \\ \tilde{v} = -\cos t \end{array} \right. \right\} \Rightarrow I = 2t \cos t \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos t dt = 4\pi.$$

Luego,

$$\bar{x} = \frac{6}{(3 + 4\pi^2)}.$$

(2º) Ahora calculamos \bar{y} .

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{M} \int_{\gamma} y \rho \, ds \\ &= \frac{3}{2\pi(3 + 4\pi^2)} \left(\underbrace{\int_0^{2\pi} \sin t \, dt}_{-\cos t \Big|_0^{2\pi}} + \underbrace{\int_0^{2\pi} t^2 \sin t \, dt}_I \right).\end{aligned}$$

Integrando I por partes, se obtiene

$$\left. \begin{array}{l} u = t^2 \\ du = 2t \, dt \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = \sin t \, dt \\ v = -\cos t \end{array} \right\} \Rightarrow I = \underbrace{-t^2 \cos t \Big|_0^{2\pi}}_{-4\pi^2} + 2 \int_0^{2\pi} t \cos t \, dt,$$

y nuevamente integrando por partes,

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{u} = t \\ d\tilde{u} = dt \end{array} \quad \begin{array}{l} d\tilde{v} = \cos t \, dt \\ \tilde{v} = \sin t \end{array} \right\} \Rightarrow I = -4\pi^2 + t \sin t \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin t \, dt.$$

Luego,

$$\bar{y} = \frac{-6\pi}{(3 + 4\pi^2)}.$$

(3º) Finalmente calculamos \bar{z}

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \frac{1}{M} \int_{\gamma} z \rho \, ds \\ &= \frac{3}{2\pi(3 + 4\pi^2)} \int_0^{2\pi} t(1 + t^2) \, dt \\ &= \frac{3}{2\pi(3 + 4\pi^2)} \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{3\pi(1 + 2\pi^2)}{(3 + 4\pi^2)}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el centro de masa es

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{3}{3 + 4\pi^2} (2, -2\pi, \pi(1 + 2\pi^2)). \quad \square$$

EJEMPLO 3.5.3 Un alambre helicoidal (o resorte) posee una densidad de masa lineal igual a ρ_0 medida en $[\frac{g}{m}]$. Si la hélice tiene radio 1 y altura de paso 2π , ¿cuál es el centro de masa del trozo de alambre que da una vuelta completa?

Solución. La parametrización de la hélice de radio 1 y altura de paso 2π está dada por $\vec{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde

$$t \mapsto \vec{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Luego, para calcular la masa y el centro de masa del trozo de alambre que da una vuelta completa, consideramos $t \in [0, 2\pi]$. Tenemos,

$$\begin{aligned} M &= \int_{\gamma} \rho_0 \, ds \\ &= \rho_0 \int_0^{2\pi} \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| dt \\ &= \rho_0 \int_0^{2\pi} \|(-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)\| dt \\ &= 2\sqrt{2}\rho_0 \pi. \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\bar{x} = \frac{1}{2\sqrt{2}\rho_0\pi} \int_{\gamma} x \rho_0 \, ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos t \, dt = 0,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2\sqrt{2}\rho_0\pi} \int_{\gamma} y \rho_0 \, ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \, dt = 0$$

y

$$\bar{z} = \frac{1}{2\sqrt{2}\rho_0\pi} \int_{\gamma} z \rho_0 \, ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t \, dt = \pi.$$

Luego, el centro de masa solicitado es $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, \pi)$. \square

EJERCICIOS 3.5.1

1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a > b > 0$. Calcula la masa de la curva de ecuaciones paramétricas

$$x(t) = a \cos t, \quad y(t) = b \operatorname{sen} t \quad t \in [0, 2\pi],$$

si su densidad lineal de masa está dada por $\rho(x, y) = |y|$.

2. Sea $a > 0$. Determina el centro de masa del arco de cicloide de trayectoria

$$\vec{r}(t) = a(t - \operatorname{sen} t)\hat{i} + a(1 - \cos t)\hat{j} \quad t \in [0, \pi],$$

si su densidad de masa lineal es constante e igual a 1.

3. Determina las coordenadas del centroide del triángulo esférico homogéneo:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad \text{con } x \geq 0, y \geq 0 \text{ y } z \geq 0.$$

4. Encuentra los momentos de inercia respecto a los ejes coordinados de la hélice circular recta homogénea γ de trayectoria

$$\vec{r}(t) = a \cos t \hat{i} + a \cos t \hat{j} + \frac{ht}{2\pi} \hat{k} \quad \forall t \in [0, 2\pi].$$

5. Calcula el momento polar de inercia, para la curva γ que representa al contorno del cuadrado homogéneo $\max\{|x|, |y|\} = a, a > 0$.

6. Calcula la masa de la curva γ de trayectoria $\vec{r}(t) = (t, t^2, 0)$, con $t \in [0, 1]$, si su densidad de masa lineal es $\rho(x, y, z) = x \cos z$.

Para ver las Soluciones de los Ejercicios 3.5.1 presiona aquí A

3.6. Integral de línea de un campo vectorial

DEFINICIÓN 3.6.1 (Integral de línea de un campo vectorial) Sea $N = 2$ o $N = 3$, sea Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^N , sea γ una curva simple, regular y suave en Ω , sea $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$, una C^1 -parametrización simple y regular de γ y sea $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ un campo vectorial continuo. Entonces se define la integral de línea de \vec{F} sobre γ como

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t) dt.$$

OBSERVACIÓN 3.6.1 Se puede probar que la integral de línea de un campo vectorial sobre una curva no depende de la parametrización simple, regular y suave escogida de la curva. Sin embargo, sí depende de la orientación de tal curva.

OBSERVACIÓN 3.6.2 La definición 3.6.1 se puede extender a curvas γ seccionalmente regulares, que es cuando existen γ_i , para $i = 1, 2, \dots, k$, curvas simples, regulares y suaves tales que $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_k$. En este caso, obtenemos

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} \vec{F} \cdot d\vec{r}_i,$$

donde las parametrizaciones \vec{r}_i de las respectivas curvas γ_i son suaves.

NOTACIÓN 3.6.1 Sea Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^N , sea γ una curva simple, regular y suave en Ω , sea $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ una C^1 -parametrización simple y regular de γ , con punto inicial en $\vec{A} = \vec{r}(a)$ y punto terminal en $\vec{B} = \vec{r}(b)$ y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua.

- Notaciones alternativas para indicar que queremos calcular la integral de línea de \vec{F} sobre γ son:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{A}}^{\vec{B}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{o bien} \quad \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma} F_i dx_i.$$

En particular,

- Si $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es tal que $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, se usa

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} P dx + Q dy.$$

- Si $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es tal que $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$, se usa

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz.$$

- Si $\vec{A} = \vec{r}(a) = \vec{B} = \vec{r}(b)$, entonces la curva es cerrada y ponemos

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{en vez de} \quad \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

EJEMPLO 3.6.1 Sea γ la curva de trayectoria $\vec{r}(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t, t)$, $t \in [0, \frac{7\pi}{2}]$. Evalúa la integral de línea

$$\int_{\gamma} \operatorname{sen} z dx + x^{\frac{1}{3}} dy - (xy)^{\frac{1}{3}} dz.$$

Solución. Notemos que, $\vec{F}(x, y, z) = (\operatorname{sen} z, x^{\frac{1}{3}}, -(xy)^{\frac{1}{3}})$, de donde

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (\operatorname{sen} t, \cos t, -\cos t \operatorname{sen} t).$$

Además,

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = (-3 \cos^2 t \operatorname{sen} t, 3 \operatorname{sen}^2 t \cos t, 1).$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \operatorname{sen} z dx + x^{\frac{1}{3}} dy - (xy)^{\frac{1}{3}} dz &= \int_0^{\frac{7\pi}{2}} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{7\pi}{2}} (\operatorname{sen} t, \cos t, -\cos t \operatorname{sen} t) \cdot (-3 \cos^2 t \operatorname{sen} t, 3 \operatorname{sen}^2 t \cos t, 1) dt \\ &= \int_0^{\frac{7\pi}{2}} (-3 \cos^2 t \operatorname{sen}^2 t + 3 \operatorname{sen}^2 t \cos^2 t - \cos t \operatorname{sen} t) dt \\ &= - \int_0^{\frac{7\pi}{2}} \cos t \operatorname{sen} t dt \\ &= - \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 t \right) \Big|_0^{\frac{7\pi}{2}} \\ &= -\frac{1}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

EJERCICIOS 3.6.1

1. Calcula la integral de línea

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

si $\vec{F}(x, y, z) = x^2\hat{i} + y^2\hat{i} + (xz - y)\hat{k}$ y γ es la curva de trayectoria $\vec{r}(t) = t^2\hat{i} + 2t\hat{j} + 4t^2\hat{k}$ que une el punto $(0, 0, 0)$ con el punto $(1, 2, 4)$.

2. Calcula la integral de línea

$$\int_{\gamma} xy^2 dx + x^2y dy$$

si γ es el arco parabólico $x = y^2$ desde el punto $(0, 0)$ hasta el punto $(-1, 1)$, usando

a) x como parámetro,

b) la parametrización $\vec{r}(t) = (\sqrt{2} \cos t, \cos(2t) + 1), t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}]$

3. Calcula la integral

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{|x| + |y|} (dx + dy)$$

donde γ es el contorno del cuadrado que de vértices $\vec{A} = (1, 0), \vec{B} = (0, 1), \vec{C} = (-1, 0)$ y $\vec{D} = (0, -1)$ recorrido en sentido antihorario.

4. Calcula la integral de línea del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2)$ sobre la curva γ que es el contorno del trozo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0$ y $z \geq 0$, recorrido de modo que la cara exterior del trozo de la esfera queda a la izquierda.

5. Evalúa

$$\int_{\gamma} (x^2 + y) dx + (y^2 + z) dy + (z^2 + x) dz$$

sobre la curva cerrada γ que resulta de la unión entre la curvas $\gamma_1 : x + z = 1, 0 \leq x \leq 1, y = 0; \gamma_2 : x + y = 1, 0 \leq y \leq 1, z = 0; y \gamma_3 : y^2 + z^2 = 1, y \geq 0, z \geq 0, x = 0$; recorrida de modo tal que la parte exterior de la superficie continua y acotada por esta curva queda a la izquierda de un observador sobre el plano xy que está a gran distancia del origen.

Para ver las Soluciones de los Ejercicios 3.6.1 presiona aquí **A**

3.7. Aplicaciones de la integral de línea de un campo vectorial

3.7.1. Trabajo

Supongamos que una partícula se mueve a lo largo de la imagen de una trayectoria \vec{r} , que es una C^1 -parametrización de una curva γ simple y regular, mientras actúa sobre ella una fuerza \vec{F} .

Un concepto fundamental es el "trabajo realizado" por \vec{F} sobre la partícula conforme ella traza la trayectoria \vec{r} . Si \vec{r} es un desplazamiento en línea recta dado por el vector \vec{d} , y \vec{F} es una fuerza constante, entonces el trabajo W realizado por \vec{F} al mover la partícula a lo largo de la trayectoria es $\vec{F} \cdot \vec{d}$ que es igual a la fuerza por el desplazamiento en la dirección de la recta. Luego, el trabajo W realizado por un campo vectorial de fuerzas \vec{F} sobre una curva γ de trayectoria \vec{r} se puede aproximar por

$$\begin{aligned} W &\approx \sum_{i=1}^n \vec{F}(\vec{r}(t_i)) \cdot (\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^n \vec{F}(\vec{r}(t_i)) \cdot \frac{\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \vec{F}(\vec{r}(t_i)) \cdot \frac{\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \Delta t_i. \end{aligned} \quad (3.2)$$

De manera análoga a la longitud de arco, se puede demostrar que si

$$\delta(\mathcal{P}) = \max_{1 \leq i \leq n} \{t_i - t_{i-1}\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ con } \mathcal{P} = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\},$$

entonces la sumatoria (3.2) converge a la siguiente integral de línea

$$\boxed{W = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t) dt}$$

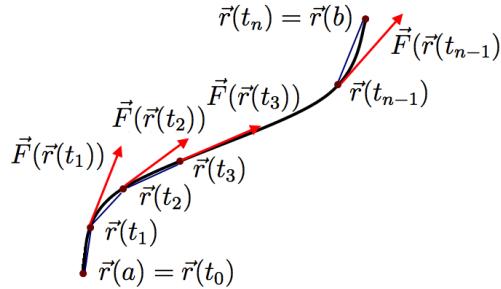


Figura 3.21. Campo vectorial de fuerzas actuando sobre una curva

DEFINICIÓN 3.7.1 (Trabajo) Sea $N = 2$ o $N = 3$, sea Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^N , sea γ una curva simple, regular y suave en Ω , sea $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ una C^1 -parametrización simple y regular de γ y sea $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ un campo vectorial continuo. Si γ representa un alambre, cuerda o varilla (si $N = 2$) o resorte (si $N = 3$), y \vec{F} representa un campo de fuerzas continuo sobre γ , entonces el *trabajo* realizado por \vec{F} sobre el alambre, cuerda o varilla (si $N = 2$) o resorte (si $N = 3$) está dado por

$$W = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t) dt.$$

EJEMPLO 3.7.1 Calcula el trabajo del campo $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x, y) = (3x + 4y, 2x + 3y^2)$ sobre la circunferencia γ de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ recorrida una vez en sentido antihorario respecto de la parte positiva del eje x .

Solución. Para la circunferencia γ de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ recorrida una vez en sentido antihorario consideramos la parametrización simple, regular y suave $\vec{r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$t \mapsto \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t).$$

Luego,

$$\begin{aligned} W &= \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (3 \cos t + 4 \sin t, 2 \cos t + 3 \sin^2 t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-3 \cos t \sin t - 4 \sin^2 t + 2 \cos^2 t + 3 \sin^2 t \cos t) dt \\ &= \left(-t + \sin^3 t + \frac{3 \cos^2 t}{2} + 3 \cos t \sin t \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= -2\pi. \quad \square \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.7.2 Considera el campo de fuerzas $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $\vec{F}(x, y, z) = (x, -y, z)$ y la curva γ de trayectoria $\vec{r}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$. Calcula el trabajo de \vec{F} sobre γ .

Solución. El trabajo es

$$\begin{aligned} W &= \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (2 \cos t, -2 \sin t, 0) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t, 0) dt \\ &= 0. \quad \square \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.7.3 Considera el campo de fuerzas $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $\vec{F}(x, y, z) = (x, -y, -z)$ y sean γ_1 y γ_2 las curvas de trayectorias $\vec{r}_1(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$, y $\vec{r}_2(t) = (1, 0, t)$, $t \in [0, 2\pi]$, respectivamente. Calcula el trabajo W_1 de \vec{F} sobre γ_1 y el trabajo W_2 de \vec{F} sobre γ_2 .

Solución. Tenemos,

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 \\
 &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}_1(t)) \cdot \frac{d\vec{r}_1}{dt}(t) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (\cos t, -\sin t, -t) \cdot (-\sin t, \cos t, 1) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (-\cos t \sin t - \cos t \sin t - t) dt \\
 &= -2\pi^2
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 W_2 &= \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 \\
 &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}_2(t)) \cdot \frac{d\vec{r}_2}{dt}(t) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (1, 0, -t) \cdot (0, 0, 1) dt \\
 &= - \int_0^{2\pi} t dt \\
 &= -2\pi^2. \quad \square
 \end{aligned}$$

Sobre los ejemplos anteriores haremos algunas apreciaciones.

- En el Ejemplo 3.7.1 y en el Ejemplo 3.7.2 hemos calculado el trabajo sobre curvas cerradas. En el Ejemplo 3.7.1 el trabajo fue distinto de cero, mientras que en el Ejemplo 3.7.2 el trabajo fue cero. Entonces, surge la siguiente pregunta

Si la curva es cerrada ¿Bajo qué condiciones podemos asegurar que el trabajo es igual a 0?

- En el Ejemplo 3.7.3 hemos calculado el trabajo sobre curvas cerradas diferentes que tienen los mismos puntos inicial y terminal, obteniendo que el trabajo es el mismo. Entonces, surge la siguiente pregunta

Si las curvas γ_1 y γ_2 tienen el mismo punto inicial y también el mismo punto terminal ¿Bajo qué condiciones podemos asegurar que la integral de trabajo sobre γ_1 es igual a la integral de trabajo sobre γ_2 ?

Más adelante daremos condiciones precisas sobre el campo vectorial y su dominio que permitirán responder apropiadamente a nuestras interrogantes.

3.7.2. Flujo y circulación

DEFINICIÓN 3.7.2 Sea $N = 2$ o $N = 3$, sea Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^N , sea γ una curva simple, regular y suave en Ω , sea $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ una C^1 -parametrización simple y regular de γ y sea $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ un campo vectorial que representa un continuo de velocidades. El *flujo a lo largo de la curva γ* desde $\vec{A} = \vec{r}(a)$ hasta $\vec{B} = \vec{r}(b)$ está dado por

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t) dt.$$

Si la curva γ es cerrada, entonces el flujo se denomina *circulación* a lo largo de la curva.

EJEMPLO 3.7.4 Sea $H_{1,2\pi}$ la hélice circular recta de radio 1 y altura de paso 2π y sea $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ un campo continuo de velocidades. Calcula el flujo de \vec{F} a lo largo del trozo de la hélice $H_{1,2\pi}$ que comienza en $(0, 1, 0)$ y finaliza en $(0, 1, -2\pi)$.

Solución. La parametrización de la hélice de radio 1 y altura de paso 2π que nos sirve está dada por $\vec{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde

$$t \mapsto \vec{r}(t) = (\sin t, \cos t, -t) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

puesto que ésta pasa primero por el punto $(0, 1, 0)$ y luego por el punto $(0, 1, -2\pi)$. Luego, el flujo de \vec{F} a lo largo del trozo de la hélice $H_{1,2\pi}$ que comienza en $(0, 1, 0)$ y finaliza en $(0, 1, -2\pi)$ viene dado por

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin t, \cos t, -t) \cdot (\cos t, -\sin t, -1) dt \\ &= \int_0^{2\pi} t dt \\ &= 2\pi^2. \quad \square \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.7.5 Calcula la circulación del campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (x - y)\hat{i} + x\hat{j}$ a lo largo de la circunferencia unitaria recorrida una vez en sentido antihorario.

Solución. Sea γ la circunferencia unitaria recorrida en sentido antihorario y consideremos su parametrización $\vec{r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$t \mapsto \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t).$$

Entonces,

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (\cos t - \sin t, \cos t) \quad \forall t \in [0, 2\pi],$$

y se sigue que el flujo de circulación viene dado por

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos t - \sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - \sin t \cos t) dt \\ &= 2\pi. \quad \square\end{aligned}$$

EJERCICIOS 3.7.1

1. Calcula el trabajo del campo de fuerzas $\vec{F}(x, y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$ sobre la parábola $y = x^2$, con $x \in [-1, 1]$, recorrida en el sentido del crecimiento de x .
2. Calcula el trabajo del campo de fuerzas $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 - z^2, 2yz, y - x^2)$ sobre la curva de trayectoria $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$, con $0 \leq t \leq 1$, recorrida en el sentido del crecimiento del parámetro.
3. Considera el campo de velocidades $\vec{F}(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$, con $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, y sea γ la circunferencia determinada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, y el plano $y = x \tan \alpha$, para alguna $\alpha \in]0, \pi[$, recorrida en sentido antihorario respecto de la parte positiva del eje x . Calcula la circulación de \vec{F} a través de γ .
4. Calcula el flujo del campo de velocidades $\vec{F}(x, y, z) = (y - x^2)\hat{i} + (z - y^2)\hat{j} + (x - z^2)\hat{k}$, con $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, a lo largo de la curva γ de trayectoria $\vec{r}(t) = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$, con $t \geq 0$, recorrida desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 1, 1)$.
5. Calcula el flujo del campo de velocidades $\vec{F}(x, y, z) = y^2\hat{i} + z^2\hat{j} + x^2\hat{k}$ a lo largo de la curva γ que se genera de la intersección entre las superficies en \mathbb{R}^3 , $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $S_2 : x^2 + y^2 = ax$, $z \geq 0$; recorrida en sentido antihorario cuando es vista desde el eje x en dirección positiva.

Para ver las Soluciones de los Ejercicios 3.7.1 presiona aquí A

3.8. Campos conservativos e independencia de la trayectoria

En esta sección vamos a responder a las preguntas planteadas en la subsección previa, introduciendo, cuando sea oportuno, algunos conceptos que nos serán de utilidad.

La pregunta específica que queremos responder aquí es la siguiente:

¿Bajo qué condiciones la integral de línea de un campo vectorial es independiente de la trayectoria sobre la cual se integra, y dependiente solo de sus puntos inicial y terminal?

3.8.1. El gradiente y sus propiedades

DEFINICIÓN 3.8.1 Sea Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^N y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar en Ω .

- Si $\vec{x} \in \Omega$ es tal que para cada $i = 1, 2, \dots, N$ existen $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$, entonces llamamos *gradiente de f* en \vec{x} al vector

$$\nabla f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(\vec{x}) \right).$$

- Si para cada $\vec{x} \in \Omega$ existe $\nabla f(\vec{x})$, entonces llamamos *gradiente de f* en Ω al campo vectorial $\nabla f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ definido por

$$\vec{x} \mapsto \nabla f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(\vec{x}) \right).$$

DEFINICIÓN 3.8.2 Sea Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^N , sea

$$\mathcal{F} = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es un campo escalar en } \Omega : \exists \nabla f \text{ en } \Omega\}$$

y sea

$$\mathfrak{F} = \{\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N : \vec{F} \text{ es un campo vectorial en } \Omega\}.$$

Se define el *operador gradiente* en \mathcal{F} , como el operador diferencial $\nabla : \mathcal{F} \rightarrow \mathfrak{F}$ definido por

$$f \mapsto \nabla f = \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \right) (f) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathbf{e}_i.$$

NOTACIÓN 3.8.1 Sea Ω un abierto en \mathbb{R}^N y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar tal que en cada punto $\vec{x} \in \Omega$ existe $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$.

- En el caso $N = 2$, poniendo $\vec{x} = (x, y)$, el operador gradiente se expresa como

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j}$$

y el gradiente de f en (x, y) , como

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \hat{j} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right). \end{aligned}$$

- En el caso $N = 3$, poniendo $\vec{x} = (x, y, z)$, el operador gradiente se expresa como

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

y el gradiente de f en (x, y, z) , como

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \hat{k} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right).\end{aligned}$$

TEOREMA 3.8.1 (Propiedades del gradiente de un campo escalar) Sea Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^N , sean $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dos campos escalares que admiten gradiente en Ω , y sean α y β dos números reales. Entonces se verifica que,

- i) $\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla f + \beta \nabla g$
- ii) $\nabla(f g) = (\nabla f) g + f (\nabla g).$

TEOREMA 3.8.2 (Otras propiedades del gradiente) Sea Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^N .

- i) Sea $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar que admite gradiente en Ω , sea I un conjunto abierto en \mathbb{R} tal que $\text{Rec}(u) \subset I$, y sea $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función real derivable en I , entonces

$$\nabla(h(u)) = h'(u) \nabla u.$$

- ii) Para cada $i = 1, 2, \dots, M$, sean $u_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ campos escalares que admiten gradiente en Ω , sea Λ un conjunto abierto en \mathbb{R}^M tal que $\text{Rec}(u_1) \times \text{Rec}(u_2) \times \dots \times \text{Rec}(u_M) \subset \Lambda$ y sea $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar derivable en Λ , entonces si ponemos $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_M)$, se verifica que

$$\nabla f(\vec{u}) = \sum_{i=1}^M \frac{\partial f}{\partial u_i} \nabla u_i.$$

- iii) Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar que admite gradiente en Ω , sea I un conjunto abierto en \mathbb{R} y sea $\vec{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ una función vectorial derivable en I , tal que $\text{Rec}(\vec{r}) \subset \Omega$; entonces

$$\frac{d}{dt} (f(\vec{r})) = \nabla u(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Interpretación geométrica del gradiente

Daremos la motivación solo en el caso $N = 2$. Sea Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^2 , sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar de clase C^1 en Ω , y sea (x_0, y_0) un punto que pertenece al conjunto de nivel

$$C_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) = \lambda\}$$

tal que $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Si γ es una curva de nivel que contiene al punto (x_0, y_0) y

$$\vec{r} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

es una C^1 -parametrización de γ tal que para cierto punto $t_0 \in \text{int}(I)$ se verifica que $\vec{r}(t_0) = (x_0, y_0)$, con $\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) \neq (0, 0)$, entonces

$$f(\vec{r}(t)) = \lambda \quad \forall t \in I$$

y

$$\nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = 0 \quad \forall t \in \text{int}(I).$$

En particular, obtenemos

$$\nabla f(\vec{r}(t_0)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) = 0$$

que implica que el vector $\nabla f(\vec{r}(t_0)) = \nabla f(x_0, y_0)$ resulta perpendicular a las curvas que contienen al punto (x_0, y_0) . Una ecuación de recta que contiene al punto (x_0, y_0) y que es paralela al vector $\nabla f(x_0, y_0)$ es llamada *recta normal* a la curva de nivel λ en el punto (x_0, y_0) . La ecuación de esta recta es

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t \nabla f(x_0, y_0) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado, $\nabla f(x, y)$ también sirve para determinar la dirección de máximo crecimiento de f en el punto (x, y) cuando $\nabla f(x, y) \neq (0, 0)$. En efecto, dado un vector unitario (u, v) , la variación de f en la dirección de (u, v) es como la derivada de $f((x, y) + t(u, v))$ que es:

$$df(x, y)[(u, v)] = \langle \nabla f(x, y), (u, v) \rangle, \quad (3.3)$$

la cuál tiene valor máximo cuando el vector (u, v) es paralelo a $\nabla f(x, y)$, es decir cuando

$$(u, v) = \frac{\nabla f(x, y)}{\|\nabla f(x, y)\|}.$$

Luego, el valor máximo en (3.3) es exactamente

$$df(x, y)[(u, v)] = \|\nabla f(x, y)\|.$$

La siguiente proposición valida las ideas previas para $N = 2$ y $N = 3$.

TEOREMA 3.8.3 Sea Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^N , sea $\vec{a} \in \Omega$, y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar que admite gradiente en \vec{a} tal que $\nabla f(\vec{a}) \neq \vec{0}$. Entonces se verifica que,

- i) La dirección de máximo crecimiento de f es $\nabla f(\vec{a})$, y su valor es $\|\nabla f(\vec{a})\|$; mientras que la dirección de mínimo crecimiento de f es $-\nabla f(\vec{a})$, y su valor es $-\|\nabla f(\vec{a})\|$.
- ii) La derivada de f en la dirección \vec{u} se anula en \vec{a} si y solo la dirección \vec{v} es perpendicular a $\nabla f(\vec{a})$.

EJEMPLO 3.8.1 Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ el campo escalar definido por $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Determina un vector ortogonal a una curva nivel que pase por el punto $(1, \sqrt{3})$, y encuentra las ecuaciones de las rectas tangente y normal a tal curva en el punto $(1, \sqrt{3})$.

Solución. Como $f(1, \sqrt{3}) = 5$, la curva de nivel que nos interesa es la elipse de ecuación

$$2x^2 + y^2 = 5.$$

Ahora, como

$$\nabla f(x, y) = (4x, 2y),$$

obtenemos que un vector ortogonal a la curva de nivel en $(1, \sqrt{3})$ es

$$\nabla f(1, \sqrt{3}) = (4, 2\sqrt{3}).$$

Se sigue que la ecuación de la recta tangente a la elipse en el punto $(1, \sqrt{3})$ está dada por la relación

$$\langle (x - 1, y - \sqrt{3}), (4, 2\sqrt{3}) \rangle = 0$$

que equivale a la recta de ecuación

$$2x + 3y - 5 = 0.$$

Por último, la ecuación de la recta normal a la elipse en el punto $(1, \sqrt{3})$ es:

$$(x, y) = (1, \sqrt{3}) + \lambda(4, 2\sqrt{3})$$

que equivale a la recta de ecuación

$$\frac{x - 1}{4} = \frac{y - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}. \quad \square$$

EJEMPLO 3.8.2 Considera una superficie en \mathbb{R}^3 de ecuación $xyz + x^3 + y^3 + z^3 = 3z$. Determina las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a la superficie S en el punto $(1, -1, 2)$.

Solución. Podemos considerar el campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = xyz + x^3 + y^3 + z^3 - 3z.$$

De esta forma, la superficie de nivel 0 de f es precisamente la superficie de ecuación

$$xyz + x^3 + y^3 + z^3 = 3z$$

en el punto $(1, -1, 2)$, pues se verifica que $f(1, -1, 2) = 0$. Ahora, como

$$\nabla f(x, y, z) = (yz + 3x^2, xz + 3y^2, xy + 3z^2 - 3),$$

obtenemos que un vector ortogonal a la superficie de nivel en $(1, -1, 2)$ es

$$\nabla f(1, -1, 2) = (1, 5, 8).$$

Se sigue que la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $(1, -1, 2)$ está dada por la relación

$$\langle (x - 1, y + 1, z - 2), (1, 5, 8) \rangle = 0$$

que equivale al plano de ecuación

$$x - 1 + 5(y + 1) + 8(z - 2) = 0. \quad \square$$

EJEMPLO 3.8.3 El calor fluye desde regiones que poseen una mayor temperatura a regiones con una menor temperatura a una velocidad \vec{J} proporcional al gradiente de temperaturas: $\vec{J}(x, y, z) = -\kappa \nabla T(x, y, z)$, donde la constante $\kappa > 0$ es la constante de conductividad térmica propia del medio conductor. Por lo tanto, el flujo de calor sigue localmente la dirección de máximo descenso de la temperatura y es perpendicular a la correspondiente superficie de nivel, usualmente denominada *isotermia*. \square

3.8.2. Función potencial. Campos conservativos

DEFINICIÓN 3.8.3 Sea Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^N . Decimos que un campo vectorial continuo $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ es un *campo vectorial gradiente* o *campo conservativo* si existe un campo escalar $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $\vec{F} = \nabla f$ en Ω . El campo escalar f recibe el nombre de *función potencial* de \vec{F} .

EJEMPLO 3.8.4 Prueba que el campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $\vec{F}(x, y) = (x + y^2, 2xy)$ es un campo conservativo determinando explícitamente su función potencial.

Solución. Deseamos construir un campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x + y^2 \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy.$$

Observemos ahora que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x + y^2 \Rightarrow f(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy^2 + \varphi_1(y)$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy \Rightarrow f(x, y) = xy^2 + \varphi_2(x)$$

para ciertas funciones $\varphi_i \in C^1(\mathbb{R})$. Finalmente, considerando

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + xy^2 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

obtenemos que $\vec{F} = \nabla f$, y por lo tanto \vec{F} es conservativo y f es su función potencial. \square

EJEMPLO 3.8.5 Muestra que todo campo constante es conservativo. En particular, muestra que un campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$(x, y, z) \mapsto \vec{F}(x, y, z) = (a, b, c),$$

donde $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ es fijo, admite una función potencial.

Solución. Deseamos construir un campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = a, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = b \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = c.$$

Observemos ahora que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = a \Rightarrow f(x, y, z) = ax + \varphi_1(y, z),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = b \Rightarrow f(x, y, z) = by + \varphi_2(x, z)$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = c \Rightarrow f(x, y, z) = cz + \varphi_3(x, y),$$

para ciertas funciones $\varphi_i \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Finalmente, considerando

$$f(x, y, z) = ax + by + cz \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

obtenemos que $\vec{F} = \nabla f$, y por lo tanto \vec{F} es conservativo y f es su función potencial. \square

EJEMPLO 3.8.6 Muestra que todo campo radial es conservativo. En particular, muestra que un campo vectorial $\vec{F} :]0, \infty[\times]0, 2\pi] \times]0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$(\rho, \theta, \phi) \mapsto \vec{F}(\rho, \theta, \phi) = \psi(\rho^2) \rho \hat{\rho},$$

donde $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en \mathbb{R} , es un campo vectorial conservativo.

Solución. Recordemos que las coordenadas esféricas están dadas por

$$\vec{v}(\rho, \theta, \phi) = (\rho \cos \theta \operatorname{sen} \phi, \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \rho \cos \phi) \quad \forall (\rho, \theta, \phi) \in]0, \infty[\times]0, 2\pi] \times]0, \pi],$$

y que

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \frac{(\cos \theta \operatorname{sen} \phi, \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \phi, \cos \theta)}{\|(\cos \theta \operatorname{sen} \phi, \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \phi, \cos \theta)\|} \\ &= (\cos \theta \operatorname{sen} \phi, \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \phi, \cos \theta), \end{aligned}$$

de donde $\vec{v}(\rho, \theta, \phi) = \rho \hat{\rho}$. Ahora, considerando $(x, y, z) = \vec{v}(\rho, \theta, \phi)$, obtenemos

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

y por lo tanto

$$\vec{F}(x, y, z) = \psi(x^2 + y^2 + z^2)(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

De esta forma, deseamos construir un campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \psi(x^2 + y^2 + z^2)x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \psi(x^2 + y^2 + z^2)y$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \psi(x^2 + y^2 + z^2) z.$$

Notemos que $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$t \mapsto \Psi(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \psi(s) ds,$$

verifica

$$\Psi'(t) = \frac{1}{2} \psi(t).$$

Luego,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \psi(x^2 + y^2 + z^2) x \Rightarrow f(x, y, z) = \Psi(x^2 + y^2 + z^2) + \varphi_1(y, z),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \psi(x^2 + y^2 + z^2) y \Rightarrow f(x, y, z) = \Psi(x^2 + y^2 + z^2) + \varphi_2(x, z)$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \psi(x^2 + y^2 + z^2) z \Rightarrow f(x, y, z) = \Psi(x^2 + y^2 + z^2) + \varphi_3(x, y),$$

para ciertas funciones $\varphi_i \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Finalmente, considerando

$$f(x, y, z) = \Psi(x^2 + y^2 + z^2) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

obtenemos que $\vec{F} = \nabla f$, y por lo tanto \vec{F} es conservativo. \square

EJEMPLO 3.8.7 ¿Es $\vec{F}(x, y, z) = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}, \frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}, -\frac{xy}{z^2}\right)$ un campo conservativo sobre su dominio?

Solución. Notemos que $Dom(\vec{F}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \neq 0 \wedge z \neq 0\}$. Deseamos construir un campo escalar $f : Dom(\vec{F}) \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{x}{z} + \frac{x}{y^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -\frac{xy}{z^2}.$$

Observemos ahora que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z} \Rightarrow f(x, y, z) = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} + \varphi_1(y, z),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{x}{z} + \frac{x}{y^2} \Rightarrow f(x, y, z) = \frac{xy}{z} - \frac{x}{y} + \varphi_2(x, z)$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -\frac{xy}{z^2} \Rightarrow f(x, y, z) = \frac{xy}{z} + \varphi_3(x, y),$$

para ciertas funciones $\varphi_i \in C^1(D_i)$, donde

$$D_1 = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0 \wedge z \neq 0\}, \quad D_2 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : z \neq 0\} \quad \text{y} \quad D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}.$$

Finalmente, considerando

$$f(x, y, z) = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } y \neq 0 \text{ y } z \neq 0,$$

obtenemos que $\vec{F} = \nabla f$ es conservativo en su dominio. \square

3.8.3. Conjuntos conexos y convexos

Conjuntos conexos

DEFINICIÓN 3.8.4 Sea Ω un conjunto en \mathbb{R}^N . Decimos que Ω es *disconexo* si existen conjuntos A y B en \mathbb{R}^N tales que

$$A \neq \emptyset, \quad B \neq \emptyset, \quad A \cup B = \Omega, \quad y \quad \overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset.$$

Si Ω no es disconexo, decimos que Ω es *conexo*.

DEFINICIÓN 3.8.5 Sea Ω un conjunto en \mathbb{R}^N . Decimos que Ω es *arco-conexo* si para cada par de puntos $\vec{A}, \vec{B} \in \Omega$ existe una función continua $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \Omega$ tal que

$$\vec{r}(a) = \vec{A} \quad y \quad \vec{r}(b) = \vec{B}.$$

TEOREMA 3.8.4 (Caracterización de los conjuntos abiertos conexos en \mathbb{R}^N) Sea Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^N . Entonces, Ω es conexo si y solo si Ω es arco-conexo.

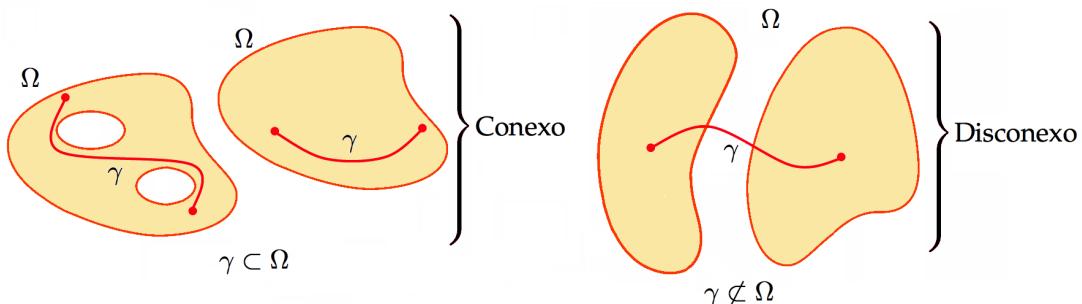


Figura 3.22. Conjuntos conexos y disconexos (no conexos) en \mathbb{R}^N .

Conjuntos convexos

DEFINICIÓN 3.8.6 Sea Ω un conjunto en \mathbb{R}^N . Decimos que Ω es *convexo* si dados dos puntos cualesquiera de Ω , el segmento de recta que los une queda totalmente contenido en Ω ; es decir, si

$$(\forall \vec{x}, \vec{y} \in \Omega) (\text{la combinación convexa } ((1 - \lambda)\vec{x} + \lambda\vec{y}) \in \Omega) (\forall \lambda \in [0, 1]).$$

El siguiente resultado es evidente.

PROPOSICIÓN 3.8.1 Todo conjunto convexo en \mathbb{R}^N es conexo en \mathbb{R}^N .

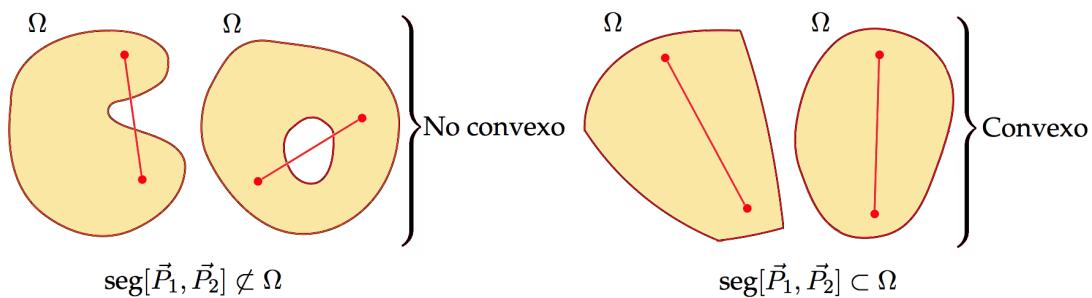


Figura 3.23. Conjuntos convексos y no convексos en \mathbb{R}^N . Es claro que si Ω es convexo entonces también es conexo. Sin embargo, el recíproco no es siempre cierto.

Conjuntos simplemente conexos y múltiplemente conexos en \mathbb{R}^2

DEFINICIÓN 3.8.7 Sea Ω un conjunto abierto y conexo en \mathbb{R}^2 . Decimos que Ω es *simplemente conexo* si para cada curva γ simple, cerrada y regular en Ω , la región acotada encerrada por la curva γ queda totalmente contenida en Ω . En caso contrario, decimos que Ω es *múltiplemente conexo*.

El siguiente resultado permite ilustrar la definición previa.

PROPOSICIÓN 3.8.2 Todo conjunto convexo en \mathbb{R}^2 es simplemente conexo en \mathbb{R}^2 .

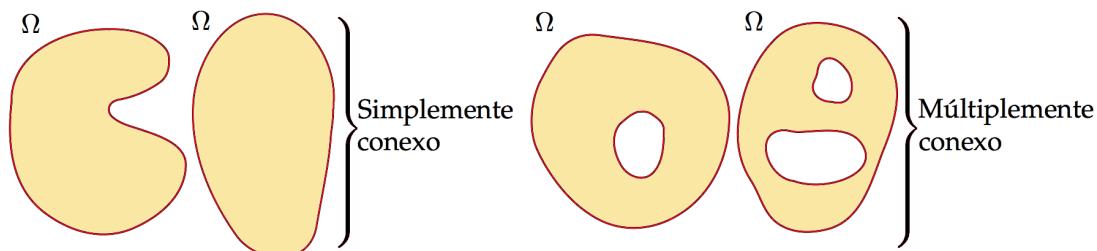


Figura 3.24. Conjuntos simplemente conexos y múltiplemente conexos en \mathbb{R}^2 . Un conjunto múltiplemente conexo en \mathbb{R}^2 posee agujeros (los cuales también pueden ser solo un punto o una línea).

3.8.4. El rotor y sus propiedades

DEFINICIÓN 3.8.8 Sea Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^3 y sea $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial en Ω .

- Si $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ y para $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ existen $\frac{\partial \vec{F}_i}{\partial x_j}(\vec{x})$ para cada $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$, entonces llamamos *rotor* de \vec{F} en \vec{x} al vector

$$\text{rot } \vec{F}(\vec{x}) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}(\vec{x}) - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(\vec{x}), \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(\vec{x}) - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(\vec{x}), \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\vec{x}) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\vec{x}) \right).$$

- Si para cada $\vec{x} \in \Omega$ existe $\text{rot } \vec{F}(\vec{x})$, entonces llamamos *rotor* de \vec{F} en Ω al campo vectorial $\text{rot } \vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$\vec{x} \mapsto \text{rot } \vec{F}(\vec{x}) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}(\vec{x}) - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(\vec{x}), \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(\vec{x}) - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(\vec{x}), \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\vec{x}) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\vec{x}) \right).$$

DEFINICIÓN 3.8.9 Sea Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^3 , sea

$$\mathfrak{G} = \{ \vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 : \vec{F} \text{ es un campo vectorial en } \Omega : \exists \text{ rot } \vec{F} \text{ en } \Omega \}$$

y sea

$$\mathfrak{F} = \{ \vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 : \vec{F} \text{ es un campo vectorial en } \Omega \}.$$

Se define el *operador rotor* en \mathfrak{G} , como el operador diferencial $\text{rot} : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{F}$ definido por

$$\vec{F} \mapsto \text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) \vec{k}.$$

NOTACIÓN 3.8.2 Sea Ω un abierto en \mathbb{R}^3 y sea $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial tal que $\vec{F} = (P, Q, R)$ y existen $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}$ en Ω . Entonces, podemos poner

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= \nabla \times \vec{F} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (P, Q, R) \\ &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}. \end{aligned}$$

y el rotor de \vec{F} en $(x, y, z) \in \Omega$, como

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F}(x, y, z) &= \nabla \times \vec{F}(x, y, z) \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial Q}{\partial z}(x, y, z), \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) - \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) \right). \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 3.8.10 Sea Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^3 y sea $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial en Ω tal que existe $\text{rot } \vec{F}$. Si

$$\text{rot } \vec{F} = (0, 0, 0) \quad \text{en } \Omega,$$

entonces decimos que \vec{F} es *irrotacional* sobre Ω .

TEOREMA 3.8.5 (Propiedades del rotor de un campo escalar) Sea Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^N , sean $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $\vec{G} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dos campos vectoriales que admiten rotor en Ω , sean α y β dos números reales y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo escalar que admite gradiente en Ω . Entonces se verifica que,

- i) $\text{rot}(\alpha \vec{F} + \beta \vec{G}) = \alpha \text{rot} \vec{F} + \beta \text{rot} \vec{G}$
- ii) $\text{rot}(f \vec{F}) = f \text{rot} \vec{F} + \nabla f \times \vec{F}$
- iii) Si ∇f admite rotor en Ω , entonces $\text{rot}(\nabla f) = (0, 0, 0)$ en Ω .

Interpretación del rotor

OBSERVACIÓN 3.8.1 Si un campo \vec{F} representa el flujo de ciertas partículas de un fluido, entonces el hecho que $\text{rot}(\vec{F}) = 0$ físicamente significa que las partículas del fluido no rotan (son irrotacionales), es decir, el fluido puede sufrir traslaciones y distorsiones, pero no posee remolinos. Informalmente, esto significa que si colocamos en el fluido una pequeña rueda con aspas, ésta se moverá en el fluido pero no girará alrededor de su eje.

EJEMPLO 3.8.8 El campo de velocidades

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{y \hat{i} - x \hat{j}}{x^2 + y^2}$$

es irrotacional. Una pequeña rueda con aspas moviéndose en el fluido no girará alrededor de su eje ω . □

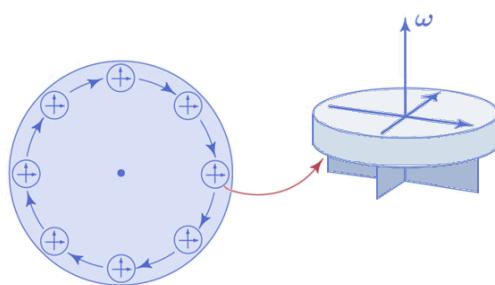


Figura 3.25. Una pequeña rueda con aspas moviéndose en el fluido no girará alrededor de su eje ω .

EJEMPLO 3.8.9 El campo de velocidades

$$\vec{F}(x, y, z) = y \hat{i} - x \hat{j}$$

es rotacional. Una pequeña rueda con aspas moviéndose en el fluido girará alrededor de su eje ω . \square

OBSERVACIÓN 3.8.2 La siguiente situación ilustra por qué el rotacional está asociado con rotaciones. Consideramos un cuerpo Ω girando alrededor del eje z . El movimiento rotacional se puede describir mediante un vector $\vec{\omega}$ en el eje z , y la dirección se considera siguiendo la regla de la mano derecha. Si

$$\omega = \|\vec{\omega}\|$$

es la longitud del vector $\vec{\omega}$,

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\rho},$$

$$\alpha = \text{dist}(Q, \text{eje } z) = \|\vec{\rho}\| \sin \phi = \rho \sin \phi,$$

con $\rho = \|\vec{\rho}\|$, y

$$\|\vec{v}\| = \omega \alpha = \omega \rho \sin \phi,$$

entonces

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} = -\omega y \hat{i} + \omega x \hat{j} = \omega(-y, x, 0),$$

donde $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$ y $\vec{\rho} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$. Más aún,

$$\text{rot } \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega \hat{k} = 2\vec{\omega}.$$

Por lo tanto, para la rotación de un cuerpo rígido el rotacional del campo vectorial es un campo vectorial dirigido paralelo al eje de rotación con magnitud igual al doble de la rapidez angular.

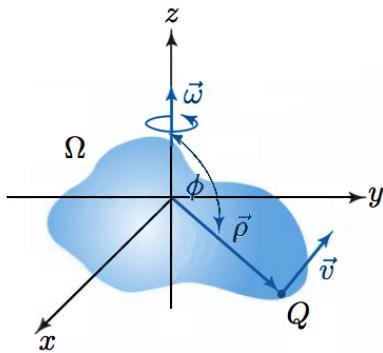


Figura 3.26. El rotacional está asociado a rotaciones.

3.8.5. Integral de línea de un campo vectorial independiente de la trayectoria

DEFINICIÓN 3.8.11 Sea $N = 2$ o $N = 3$, sea Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^N y sea $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ un campo vectorial continuo. Decimos que la integral la integral de línea del campo vectorial \vec{F} es *independiente de la trayectoria* en Ω si para cualquier par de curvas γ_1 y γ_2 seccionalmente simples y regulares contenidas en Ω , cuyos puntos extremos son comunes, se verifica que

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}_2,$$

donde \vec{r}_1 y \vec{r}_2 son parametrizaciones seccionalmente simples, regulares y suaves de γ_1 y γ_2 respectivamente.

El teorema a continuación generaliza al Teorema Fundamental del Cálculo, y es muy útil para el cálculo de integrales de línea de campos vectoriales que son gradientes de campos escalares; en cuyo caso, la integral del campo vectorial gradiente depende solamente de los valores extremos de la curva evaluados en el respectivo campo escalar, obteniéndose un criterio para averiguar cuando una integral de trabajo es independiente de la trayectoria.

TEOREMA 3.8.6 Sea $N = 2$ o $N = 3$, sea Ω un conjunto abierto, conexo y no vacío en \mathbb{R}^N , y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 en Ω . Si γ es una curva simple, regular y suave en Ω y $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ es una parametrización simple, regular y suave de γ , entonces

$$\int_{\gamma} \nabla f \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)).$$

Demostración. Sea γ una curva seccionalmente regular y suave en Ω parametrizada por la función seccionalmente regular y suave $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Teniendo en cuenta el Teorema Fundamental del Cálculo y el hecho que f es de clase C^1 en Ω , obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \nabla f \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} (f(\vec{r}(t))) dt \\ &= f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

El teorema previo prueba que la integral de línea de un campo gradiente continuo es independiente de la trayectoria en Ω , si Ω es conexo, y, en particular, el valor de esta integral es cero si integramos sobre una curva cerrada contenida en Ω . En efecto, para fijar ideas, consideremos Ω un conjunto conexo abierto y no vacío en \mathbb{R}^3 , sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar derivable en Ω , con derivadas continuas, y sea $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo tal que

$$\vec{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in \Omega,$$

entonces la integral de trabajo de \vec{F} sobre una curva γ seccionalmente simple, regular y suave contenida en Ω de trayectoria $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ seccionalmente regular y suave, está dada por

$$\begin{aligned} W &= \int_{\gamma} \nabla f \cdot d\vec{r} \\ &= f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)). \end{aligned}$$

De esta manera, no nos interesa conocer con precisión cual es la curva γ (ni alguna parametrización \vec{r} de γ), puesto que solo nos basta con saber cuál es el punto inicial y el punto terminal de la curva, a la cual le exigimos que sea seccionalmente regular y suave (para efectos de integrabilidad).

Un criterio para determinar independencia de la trayectoria

TEOREMA 3.8.7 Sea $N = 2$ o $N = 3$, sea Ω un conjunto abierto, conexo y no vacío en \mathbb{R}^N , y sea $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ un campo vectorial continuo. Entonces, las siguientes tres propiedades son equivalentes:

- i) Existe una función potencial $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de \vec{F} . Es decir, \vec{F} es conservativo.
- ii) Para cada curva γ cerrada seccionalmente simple, regular y suave en Ω se verifica que

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

- iii) Para cualquier par de curvas γ_1 y γ_2 seccionalmente simples, regulares y suaves en Ω tales que poseen extremos comunes, se verifica que

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}_2,$$

donde \vec{r}_1 y \vec{r}_2 son parametrizaciones seccionalmente simples, regulares y suaves de γ_1 y γ_2 respectivamente.

Demostración.

- i) \Rightarrow ii) Sea γ una curva cerrada, simple, regular y suave contenida en Ω y asumamos que existe una función f de clase C^1 en Ω tal que $\vec{F} = \nabla f$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\gamma} \nabla f \cdot d\vec{r} \\ &= f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

- ii) \Rightarrow iii) Sean γ_1 y γ_2 dos curvas simples, regulares y suaves en Ω tales que poseen extremos comunes y asumamos que ii) se cumple. Sea $\vec{r}_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ una parametrización simple, regular y suave de γ_1 y $\vec{r}_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^N$ una parametrización simple, regular y suave de γ_2 , con $\vec{r}_1(a) = \vec{r}_2(c)$ y $\vec{r}_1(b) = \vec{r}_2(d)$. Luego, como γ_2^- es la curva que invierte la orientación

de γ_2 , obtenemos que $\gamma_1 + \gamma_2^-$ es una curva cerrada simple, regular y suave, y se verifica que

$$\int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{\gamma_2^-} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

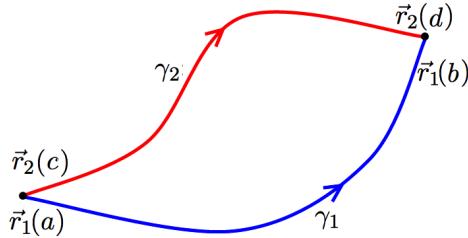


Figura 3.27. Curvas con mismo punto inicial y final

Luego, si ponemos

$$\begin{aligned} \vec{r} : [a, b + d - c] &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ t &\rightarrow \vec{r}(t) = \begin{cases} \vec{r}_1(t) & \text{si } a \leq t \leq b \\ \vec{r}_2(-t + b + d) & \text{si } b \leq t \leq b + d - c, \end{cases} \end{aligned}$$

obtenemos que $\vec{r}(a) = \vec{r}(b+d-c)$ y que $\vec{r}(b) = \vec{r}_1(b) = \vec{r}_2(d)$. Así que \vec{r} es una parametrización simple, regular y suave de la curva $\gamma_1 + \gamma_2^-$ y como estamos asumiendo que *ii)* se cumple, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 - \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 &= \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 + \int_{\gamma_2^-} \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 \\ &= \int_{\gamma_1 + \gamma_2^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= 0. \end{aligned}$$

iii) \Rightarrow ii) Sea γ una curva cerrada, simple, regular y suave en Ω y asumamos que *iii)* se cumple. Poniendo

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2^-$$

para algunas curvas γ_1 y γ_2 simples, regulares y suaves tales que poseen extremos comunes verificando que la unión de sus trazas es igual a la traza de γ , desde *iii)* obtenemos que

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_2^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

ii) \Rightarrow i) Queremos probar que

$$\exists f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } \vec{F} = \nabla f,$$

bajo el supuesto que *ii)* se cumple.

Sea \vec{v}_0 en Ω fijo, pero escogido de manera arbitraria, y para cada $\vec{v} \in \Omega$ consideremos $\gamma(\vec{v}_0, \vec{v})$ una curva simple, regular y suave contenida en Ω tal que su punto inicial es \vec{v}_0 y su punto

terminal es \vec{v} . Consideremos también $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ una parametrización simple, regular y suave de $\gamma(\vec{v}_0, \vec{v})$ tal que $\vec{r}(a) = \vec{v}_0$ y $\vec{r}(b) = \vec{v}$.

Definamos $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\vec{w} \mapsto f(\vec{w}) = \int_{\gamma(\vec{v}_0, \vec{w})} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

La definición de f es correcta pues ya hemos probado $ii) \Leftrightarrow iii)$, de manera que da lo mismo cual es la curva γ simple, regular y suave contenida en Ω que conecta \vec{v}_0 con \vec{w} , así como también da lo mismo cual es su correspondiente parametrización \vec{r} simple, regular y suave. Debemos probar que

$$\nabla f(\vec{w}) = \vec{F}(\vec{w}) \quad \forall \vec{w} \in \Omega.$$

Sea $\lambda \in]0, \text{dist}(\vec{v}_1, \partial\Omega)[$, sea $\vec{h} \in B(\vec{0}, 1)$ fijo, pero arbitrario y extendamos la curva $\gamma(\vec{v}_0, \vec{v})$ por una curva simple, regular y suave $\gamma(\vec{v}_0, \vec{v} + \lambda\vec{h})$ cuyo punto inicial es \vec{v}_0 y cuyo punto terminal es $\vec{v} + \lambda\vec{h}$. Será suficiente probar que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(\vec{v} + \varepsilon\vec{h}) - f(\vec{v})}{\varepsilon} = \vec{F}(\vec{v}) \cdot \vec{h}.$$

Tenemos,

$$\begin{aligned} \frac{f(\vec{v} + \varepsilon\vec{h}) - f(\vec{v})}{\varepsilon} &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{\gamma(\vec{v}_0, \vec{v} + \varepsilon\vec{h})} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\gamma(\vec{v}_0, \vec{v})} \vec{F} \cdot d\vec{r} \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\gamma(\vec{v}, \vec{v} + \varepsilon\vec{h})} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \end{aligned}$$

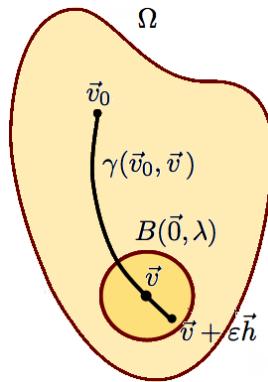


Figura 3.28. Una vecindad sobre γ .

Pongamos ahora $\vec{r}(t) = \vec{v} + t\vec{h}$, para $t \in [0, \lambda]$. Se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\gamma(\vec{v}, \vec{v} + \varepsilon\vec{h})} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \vec{F}(\vec{v} + t\vec{h}) \cdot \vec{h} dt \\ &= \vec{F}(\vec{v} + \xi\vec{h}) \cdot \vec{h} \end{aligned}$$

para alguna $\xi \in [0, \varepsilon]$, y como $\xi \rightarrow 0^+$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ y \vec{F} es un campo vectorial continuo, obtenemos

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(\vec{v} + \varepsilon \vec{h}) - f(\vec{v})}{\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\gamma(\vec{v}, \vec{v} + \varepsilon \vec{h})} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \vec{F}(\vec{v} + \xi \vec{h}) \cdot \vec{h} \\ &= \vec{F}(\vec{v}) \cdot \vec{h}.\end{aligned}$$

En resumen, hemos probado que

$$\nabla f(\vec{v}) \cdot \vec{h} = \vec{F}(\vec{v}) \cdot \vec{h} \quad \forall \vec{v} \in \Omega, \forall \vec{h} \in B(\vec{0}, 1),$$

de donde se concluye que $\nabla f = \vec{F}$ en Ω . ■

Otro criterio para determinar independencia de la trayectoria

Ahora damos otro criterio para determinar independencia de la trayectoria

PROPOSICIÓN 3.8.3 Bajo las condiciones del Teorema 3.8.7, y asumiendo adicionalmente que Ω es un conjunto convexo en \mathbb{R}^N , y que \vec{F} es de clase C^1 en Ω , entonces las afirmaciones i), ii) y iii) del Teorema 3.8.7 también equivalen a la siguiente afirmación:

iv) Para cada $i, j = 1, \dots, N$ se tiene que $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$.

Si $\vec{F} = (P, Q)$ es un campo vectorial de clase C^1 definido en un conjunto abierto, convexo y no vacío de \mathbb{R}^2 , la condición iv) de la Proposición 3.8.3 se traduce en

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Si $\vec{F} = (P, Q, R)$ es un campo vectorial de clase C^1 definido en un conjunto abierto, convexo y no vacío de \mathbb{R}^3 , la condición iv) de la Proposición 3.8.3 se traduce en

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x},$$

que a su vez equivale a

$$\operatorname{rot} \vec{F} = (0, 0, 0) \quad \text{en } \Omega.$$

Luego, bajo las hipótesis de la Proposición 3.8.3, en el caso $N = 3$ la afirmación iv) de tal proposición equivale a

\vec{F} es irrotacional en Ω .

EJEMPLO 3.8.10 Sea Λ un conjunto abierto y conexo en \mathbb{R}^2 que contiene a la bola cerrada $\overline{B((0, 0), 1)}$, sea $\Omega = \Lambda \setminus \{(0, 0)\}$ y sea $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ el campo vectorial definido por

$$(x, y) \mapsto \vec{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Considerando $\vec{F} = (P, Q)$ comprueba que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{en } \Omega,$$

y que sin embargo \vec{F} no es conservativo.

Solución. Para cada $(x, y) \in \Omega$ se verifica que

$$P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Luego,

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

y

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{en } \Omega.$$

Consideremos ahora la circunferencia unitaria γ recorrida una vez en sentido antihorario, y consideremos la función vectorial $\vec{r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$t \mapsto \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t),$$

que es una parametrización simple, cerrada, regular y suave de γ . Tenemos,

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (-\sin t, \cos t) \quad \text{y} \quad \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = (-\sin t, \cos t).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\gamma} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) (-\sin t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Notemos que Ω es un abierto conexo en \mathbb{R}^3 y \vec{F} es continuo en Ω , por lo que el Teorema 3.8.7 es aplicable, y puesto que γ es una curva cerrada y regular para la cual ii) del Teorema 3.8.7 falla, concluimos que \vec{F} no es conservativo. Observemos que esto no contradice a la Proposición 3.8.3, pues aunque \vec{F} es C^1 en Ω , Ω no es convexo en \mathbb{R}^2 , y por lo tanto la proposición no es aplicable. \square

EJERCICIOS 3.8.1

1. Calcula la integral de línea

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} x \, dx + y^2 \, dy - z^3 \, dz.$$

2. Calcula la integral de línea

$$\int_{(a_1,b_1,c_1)}^{(a_2,b_2,c_2)} \frac{x \, dx + y \, dy + z \, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

donde (a_1, b_1, c_1) pertenece a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R_1^2$ y (a_2, b_2, c_2) pertenece a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R_2^2$, con $R_2 > R_1 > 0$.

3. Considera el campo gravitacional

$$\vec{G}(\rho, \theta, \phi) = -\frac{m M g \hat{\rho}}{\rho^2} \quad \forall (\rho, \theta, \phi) \in]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times]0, \pi],$$

donde m es la masa de una partícula que es atraída por una masa M en el origen de \mathbb{R}^3 , g es una constante gravitacional, y ρ es la distancia al origen. Si M fuese la masa de la Tierra, ρ sería la distancia al centro de la Tierra y g sería la constante gravitacional de Newton. Muestra que \vec{G} es un campo vectorial conservativo.

4. Encuentra, si es posible, una función potencial para el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = (y^2 \cos x + z^3, 4 + 2y \sin x, 3xz^2 + 2) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

5. Muestra que

$$\int_{\gamma} (6x + 2y^2) \, dx + (4xy - z^2) \, dy - 2yz \, dz$$

es independiente de la trayectoria de cualquier curva γ seccionalmente regular y suave en \mathbb{R}^3 , y determina su valor para una tal curva con punto inicial $(1, 2, -1)$ y punto terminal $(4, 0, 2)$, de la siguiente forma:

- a) Determinando una función potencial,
- b) Determinando una poligonal de lados paralelos a los ejes coordenados.

6. Muestra que el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = (3x^2y + 2, x^3 + 4y^3) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

es conservativo.

7. Muestra que todo campo vectorial conservativo de clase C^1 es irrotacional.

8. Muestra que el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, z \right) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, t) : t \in \mathbb{R}\}$$

es irrotacional y que, sin embargo, no verifica que

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0,$$

donde γ es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en el plano xy recorrida en sentido antihorario. ¿Contradice esto al Teorema 3.8.7 y la Proposición 3.8.3? Justifica tu respuesta.

Para ver las Soluciones de los Ejercicios 3.8.1 presiona aquí A

3.9. El Teorema de Green

En esta sección enunciaremos un teorema que expresa una integral doble sobre una región D del plano cartesiano en términos de una integral de línea respecto de una curva cerrada γ que corresponde a la frontera $\text{Fr}(D)$ de la región D recorrida en sentido antihorario.

Ahora damos uno de los resultados principales de esta sección.

TEOREMA 3.9.1 (Teorema de Green para dominios simplemente conexos) Sea D una región en \mathbb{R}^2 cuya frontera $\text{Fr}(D)$ es la traza de una curva simple, cerrada, suave y seccionalmente regular, sea Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^2 tal que $D \cup \text{Fr}(D) \subset \Omega$, y sea $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1 tal que

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j} = (P(x, y), Q(x, y)) \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Si $\text{Fr}(D)$ es recorrida en sentido antihorario, entonces se verifica que

$$\oint_{\text{Fr}(D)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\text{Fr}(D)} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

EJEMPLO 3.9.1 Calcula

$$\oint_{\gamma} (x^2 + y^2) dx - xy dy$$

si γ representa los lados del cuadrado de vértices $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ y $(0, -1)$ recorrido en sentido antihorario.

Solución. Pongamos

$$\begin{aligned}\vec{F}(x, y) &= (P(x, y), Q(x, y)) \\ &= (x^2 + y^2, -xy).\end{aligned}$$

Claramente se trata de un campo vectorial de clase C^1 en \mathbb{R}^2 y se verifica que

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = -y \quad \text{y} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 2y,$$

de donde obtenemos que

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -3y.$$

Por otro lado, la curva determinada por el cuadrado de vértices $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ y $(0, -1)$ recorrido en sentido antihorario es una curva simple, cerrada, suave y seccionalmente regular. Luego, podemos aplicar el Teorema 3.9.1 de Green para dominios simplemente conexos. Obtenemos

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma} (x^2 + y^2) dx - xy dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dy dx \\ &= -3 \left(\int_{-1}^0 \int_{-1-x}^{1+x} y dy dx + \int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} y dy dx \right) \\ &= -\frac{3}{2} \left(\int_{-1}^0 ((x+1)^2 - (-(1+x))^2) dx + \int_0^1 ((1-x)^2 - (-(1-x))^2) dx \right) \\ &= 0. \quad \square\end{aligned}$$

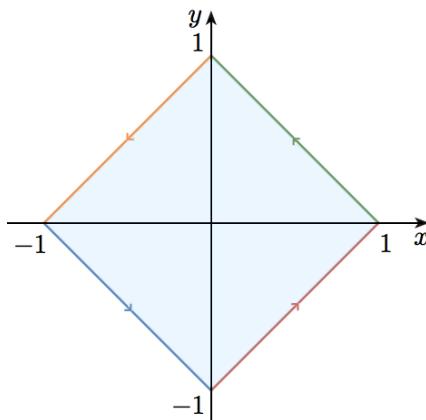


Figura 3.29. Región encerrada por los lados del cuadrado de vértices $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ y $(0, -1)$ recorridos en sentido antihorario.

TEOREMA 3.9.2 (Teorema de Green para dominios múltiplemente conexos) Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región cuya frontera $\text{Fr}(D)$ está constituida por $n + 1$ curvas simples, cerradas y seccionalmente regulares, a saber: $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, tales que:

- i) la región encerrada por γ incluye en su interior a cada γ_i , $i = 1, 2, \dots, n$,
- ii) $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset$ si $i \neq j$,
- iii) ninguna de las γ_i está contenida en la región encerrada por otra γ_j .

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un abierto tal que $D \cup \text{Fr}(D) \subset \Omega$, y $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial de clase C^1 tal que

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j} = (P(x, y), Q(x, y))$$

y $\text{Fr}(D)$ es recorrida en sentido antihorario, entonces

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA + \sum_{i=1}^n \oint_{\gamma_i} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

o bien

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA + \sum_{i=1}^n \oint_{\gamma_i} P dx + Q dy.$$

OBSERVACIÓN 3.9.1

- En el teorema anterior todas las curvas involucradas en las integrales están dadas en sentido antihorario; esto es: $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ están recorridas en el sentido antihorario usual.
- Recordemos que si γ es recorrida en sentido antihorario, entonces γ^- recorre a la traza de γ en sentido horario, comenzando en el punto terminal de γ . Luego, si \vec{F} es un campo vectorial continuo, y \vec{r} es una parametrización simple, regular y suave de la curva γ en el interior de $\text{Dom}(\vec{F})$, entonces se verifica que

$$\oint_{\gamma^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

EJEMPLO 3.9.2

Calcula

$$\oint_{\gamma} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

si γ es una curva cerrada, simple, regular y suave, recorrida en sentido antihorario, y tal que el interior de la región encerrada por γ contiene al origen.

Solución. Notemos que

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

no es C^1 en regiones que contienen al círculo unitario. Sin embargo, \vec{F} sí es C^1 en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Luego, si a la región D_0 encerrada por γ (recorrida en sentido antihorario) le quitamos el círculo

B_ε de centro en el origen y radio ε , con $0 < \varepsilon < 1$ (cuya frontera es la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio ε , a la que asociamos la curva γ_ε que la recorre en sentido antihorario), entonces sobre la región $D = D_0 \setminus B_\varepsilon$ es posible aplicar el Teorema 3.9.2 de Green para dominios múltiplemente conexos.

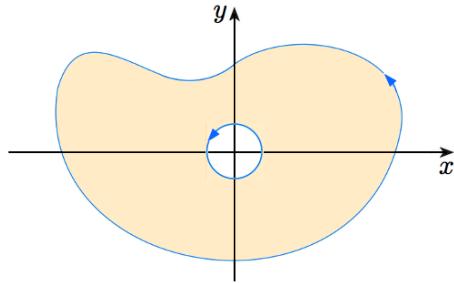


Figura 3.30. Región $D = D_0 \setminus B_\varepsilon$, donde D_0 es una región que contiene al origen y está encerrada por la curva γ que es cerrada, simple, regular y suave, recorrida en sentido antihorario; y B_ε es el círculo de centro en el origen y radio ε , cuya frontera es recorrida en sentido antihorario.

Obtenemos

$$\oint_{\gamma} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA + \oint_{\gamma_\varepsilon} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Ahora, como

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

y

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

se sigue que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \text{en } D,$$

y sobre γ_ε se tiene que $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$, así que

$$\oint_{\gamma} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \frac{1}{\varepsilon^2} \oint_{\gamma_\varepsilon} -y dx + x dy.$$

Ahora, podemos concluir de dos formas diferentes:

Primera forma. Consideraremos $\vec{F}_1(x, y) = (-y, x)$ y parametrizamos γ_ε mediante la función vectorial $\vec{r}(t) = (\varepsilon \cos t, \varepsilon \sin t)$, con $t \in [0, 2\pi]$. Luego,

$$\vec{F}_1(\vec{r}(t)) = \varepsilon(-\sin t, \cos t) \quad \text{y} \quad \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \varepsilon(-\sin t, \cos t),$$

de donde

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_\varepsilon} -y \, dx + x \, dy &= \int_{\gamma_\varepsilon} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \varepsilon (-\sin t, \cos t) \cdot \varepsilon (-\sin t, \cos t) \, dt \\ &= \varepsilon^2 \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) \, dt \\ &= 2\varepsilon^2 \pi. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \frac{-y}{x^2 + y^2} \, dx + \frac{x}{x^2 + y^2} \, dy &= \frac{1}{\varepsilon^2} \oint_{\gamma_\varepsilon} -y \, dx + x \, dy \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Segunda forma. Consideremos $\vec{F}_1(x, y) = (-y, x) = (P_1(x, y), Q_1(x, y))$ y usemos el Teorema 3.9.1 de Green para dominios simplemente conexos. Claramente

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = -1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q_1}{\partial x} = 1$$

de donde obtenemos que

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} = 2.$$

Ahora, como B_ε el círculo encerrado por γ_ε , por el Teorema 3.9.1 de Green para dominios simplemente conexos obtenemos

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_\varepsilon} -y \, dx + x \, dy &= \iint_{B_\varepsilon} \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} \right) dA \\ &= 2 \iint_{B_\varepsilon} dA \\ &= 2\varepsilon^2 \pi, \end{aligned}$$

pues el área de B_ε , que es el círculo centrado en el origen y de radio ε , es $\pi\varepsilon^2$. Se sigue que

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \frac{-y}{x^2 + y^2} \, dx + \frac{x}{x^2 + y^2} \, dy &= \frac{1}{\varepsilon^2} \oint_{\gamma_\varepsilon} -y \, dx + x \, dy \\ &= 2\pi. \quad \square \end{aligned}$$

EJERCICIOS 3.9.1

1. Calcula el trabajo del campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (2xy - x^2, x + y^2)$ sobre la frontera de la superficie encerrada por las curvas $y = x^2$ y $x = y^2$, recorrida en sentido antihorario. Verifica el Teorema 3.9.1.

2. Evalúa

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

donde γ es la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ recorrida en sentido antihorario, donde

$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2y, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x \right).$$

3. Sea $a > 0$. Evalúa la integral de línea

$$\oint_{\gamma} \frac{-y \, dx + (x - a) \, dy}{(x - a)^2 + y^2}$$

sobre cualquier curva γ cerrada, simple, regular y suave recorrida en sentido antihorario de forma tal que

- a) el punto $(a, 0)$ no pertenece a la curva ni a la región que ella encierra
 - b) el punto $(a, 0)$ pertenece a la región encerrada por la curva.
4. Sean $a > 0$ y $b > 0$. Calcula el área de la región acotada limitada por la elipse $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.
5. Sea $a > 0$. Halla el área de la región del primer cuadrante acotada por un arco de la cicloide $\vec{r}(t) = (at - a \operatorname{sen} t, a - a \operatorname{cos} t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

6. Calcula

$$\oint_{\gamma} e^{-(x^2-y^2)} \cos(2xy) \, dx + e^{-(x^2-y^2)} \operatorname{sen}(2xy) \, dy,$$

donde γ es la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$, recorrida en sentido antihorario.

7. a) Muestra que el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (x^3 - 2xy^3)\hat{i} - 3x^2y^2\hat{j}$ es un campo vectorial gradiente.

- b) Evalúa

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

donde γ es la curva de trayectoria $\vec{r}(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Para ver las Soluciones de los Ejercicios 3.9.1 presiona aquí A

Capítulo 4

Superficies en \mathbb{R}^3

En el presente capítulo estudiaremos superficies en el espacio tratando de llevar un enfoque similar al desarrollado en el capítulo previo sobre curvas en el plano y en el espacio.

4.1. Superficies en \mathbb{R}^3

Intuitivamente, una superficie en \mathbb{R}^3 es una superficie que se puede obtener a partir de una región plana que se ha deformado (doblado, enrollado, empujado, estirado, encogido).

EJEMPLO 4.1.1 Un círculo en \mathbb{R}^2 , representa una superficie plana en \mathbb{R}^3 . \square

EJEMPLO 4.1.2 En general, una superficie de \mathbb{R}^3 no representa la gráfica de una función real en dos variables en la forma $z = f(x, y)$. \square

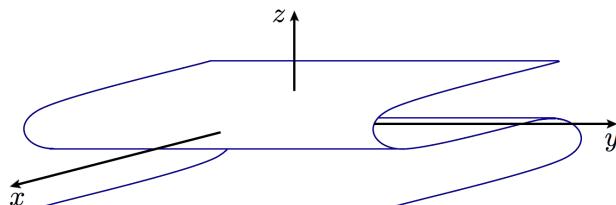


Figura 4.1. Una región rectangular de \mathbb{R}^2 que se ha deformado doblándola para que adquiera forma de una "S", con ciertas zonas de la superficie paralelas, no tiene la forma $z = f(x, y)$.

EJEMPLO 4.1.3 El manto de un toro. \square

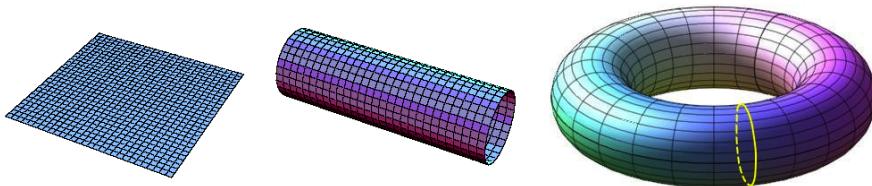


Figura 4.2. Región rectangular de \mathbb{R}^2 que se ha deformado dándole la forma de un tubo cilíndrico circular recto y a partir de él, el manto del toro, obtenido al doblar el tubo en torno a un eje, hasta pegar sus extremos.

DEFINICIÓN 4.1.1 (Superficie en \mathbb{R}^3) Sea D un conjunto conexo en \mathbb{R}^2 y sea

$$\begin{aligned}\vec{\Phi} : A \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\rightarrow \vec{\Phi}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),\end{aligned}$$

donde A es un conjunto abierto en \mathbb{R}^2 que contiene a D , una función continua e inyectiva. Si $S = \vec{\Phi}(D) = \text{Rec}(\vec{\Phi})$, entonces decimos que S es una *superficie* en \mathbb{R}^3 y que la función $\vec{\Phi}$ es una *parametrización o representación paramétrica* de la superficie S .

OBSERVACIÓN 4.1.1

- En general, asumimos que el conjunto D en la definición previa es un conjunto cerrado y acotado en \mathbb{R}^2 , a menos que se señale otra cosa.
- En la definición previa, la función $\vec{\Phi}$ puede entenderse como una función que transforma una región plana D en \mathbb{R}^2 en una superficie S en \mathbb{R}^3 .

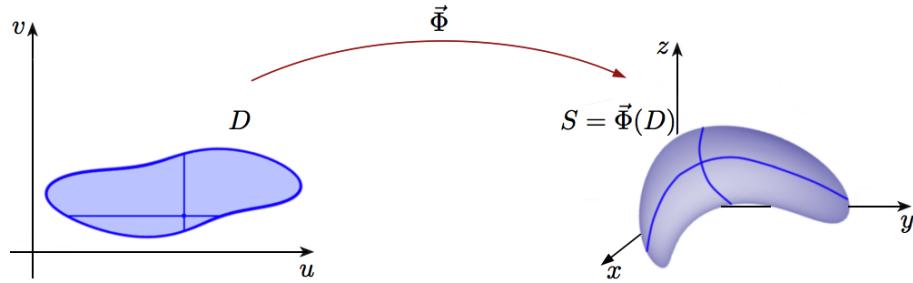


Figura 4.3. Función vectorial $\vec{\Phi}$ sobre una región $D \subset \mathbb{R}^2$.

DEFINICIÓN 4.1.2 Sea S una superficie en \mathbb{R}^3 y sea $\vec{\Phi} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de S . Decimos que:

- $\vec{P}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ pertenece a la superficie S si $\exists (u_0, v_0) \in D$ tal que $\vec{P}_0 = \vec{\Phi}(u_0, v_0)$.
- El conjunto $\{\vec{P} \in \mathbb{R}^3 : \exists (u, v) \in D \text{ tal que } \vec{P} = \vec{\Phi}(u, v)\}$ es la *traza de la superficie* S .
- $\vec{P} = \vec{\Phi}(u, v) \in S$ se denomina *punto múltiple* si existe más de un punto $(u, v) \in \mathcal{D} = D \setminus \partial D$ tal que $\vec{P} = \vec{\Phi}(u, v)$.
- S es *simple* si no tiene puntos múltiples. Es decir, S es simple si $\vec{\Phi} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ es inyectiva, donde $\mathcal{D} = D \setminus \partial D$.
- S es *suave* si posee una parametrización $\vec{\Phi} \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$, en cuyo caso también decimos que $\vec{\Phi}$ es *suave*.

OBSERVACIÓN 4.1.2 Tal como con las curvas, es deseable clasificar las superficies en cerradas, orientables y regulares. Para ello, necesitamos algunos elementos previos. Sea S una superficie parametrizada por $\vec{\Phi} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, con $\vec{\Phi}$ suave (es decir, de clase C^1), y sea $(u_0, v_0) \in D$ un punto que está fijo. Entonces:

- $u \mapsto \vec{\Phi}(u, v_0)$ define una función vectorial de variable u (v_0 está fijo) cuya imagen es una curva suave en \mathbb{R}^3 , y el vector tangente a esta curva en el punto $\vec{\Phi}(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{\Phi}_u(u_0, v_0) = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \hat{k}.$$

- De forma análoga, $v \mapsto \vec{\Phi}(u_0, v)$ define una función vectorial de variable v (u_0 está fijo) cuya imagen es una curva suave en \mathbb{R}^3 , y el vector tangente a esta curva en el punto $\vec{\Phi}(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^3$ es

$$\vec{\Phi}_v(u_0, v_0) = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u_0, v_0) = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \hat{k}.$$

- Como los vectores $\vec{\Phi}_u$ y $\vec{\Phi}_v$ son tangentes a dos curvas contenidas sobre la superficie $S = \vec{\Phi}(D)$ que contienen al punto $\vec{\Phi}(u_0, v_0)$, entonces ellas deben determinar el plano tangente a la curva en el punto $\vec{\Phi}(u_0, v_0)$. Luego, un vector normal a la superficie S en tal punto está dado por

$$\vec{\Phi}_u(u_0, v_0) \times \vec{\Phi}_v(u_0, v_0).$$

DEFINICIÓN 4.1.3 Sea S una superficie parametrizada por $\vec{\Phi} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, con $\vec{\Phi}$ suave. Decimos que:

- $(u_0, v_0) \in D$ es un punto singular de $\vec{\Phi}$ si $\vec{\Phi}_u \times \vec{\Phi}_v = 0$ en (u_0, v_0) .
- $(u_0, v_0) \in D$ es un punto regular de $\vec{\Phi}$ si $\vec{\Phi}_u \times \vec{\Phi}_v \neq 0$ en (u_0, v_0) .
- $\vec{\Phi}$ es una parametrización regular de la superficie S si todos los puntos en D son regulares.
- S es una superficie regular si admite una parametrización regular.
- S es una superficie seccionalmente regular o regular por trozos si está compuesta por una unión finita de superficies regulares.

OBSERVACIÓN 4.1.3 Sea $\vec{\Phi}$ una parametrización regular en (u_0, v_0) de una superficie S .

- El vector normal a la superficie S en el punto $\vec{\Phi}(u_0, v_0)$ está dado por

$$\vec{n}(u_0, v_0) = \vec{\Phi}_u(u_0, v_0) \times \vec{\Phi}_v(u_0, v_0) = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u_0, v_0).$$

- La ecuación del plano tangente a la superficie S en el punto $\vec{\Phi}(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$ está dada por

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \vec{n}(u_0, v_0) = 0.$$

- El vector normal unitario a la superficie S parametrizada por $\vec{\Phi}$ en el punto (u_0, v_0) está dada por

$$\hat{n}(u_0, v_0) = \frac{\vec{n}(u_0, v_0)}{\|\vec{n}(u_0, v_0)\|} = \frac{\vec{\Phi}_u(u_0, v_0) \times \vec{\Phi}_v(u_0, v_0)}{\|\vec{\Phi}_u(u_0, v_0) \times \vec{\Phi}_v(u_0, v_0)\|}$$

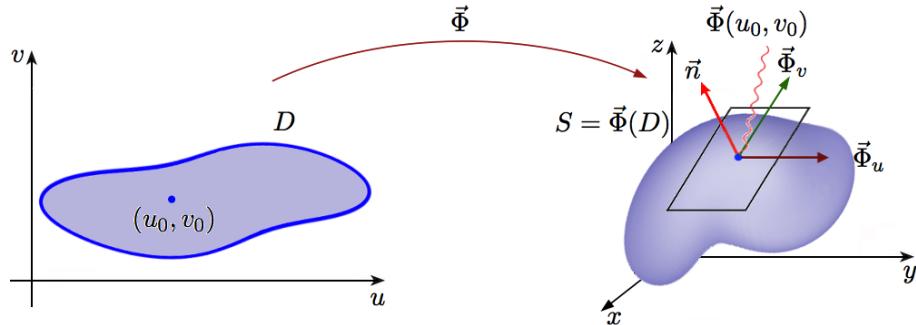


Figura 4.4. Parametrización de una superficie mediante en \mathbb{R}^3 a una superficie en el plano \mathbb{R}^2 .

DEFINICIÓN 4.1.4 Consideremos la notación dada en la Definición 4.1.2, la Observación 4.1.2 y la Observación 4.1.3. Decimos que una superficie S es *orientable* si admite una parametrización regular $\vec{\Phi} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, de manera que \vec{n} y \hat{n} definen funciones continuas sobre D ; es decir, el campo vectorial de los vectores normales a la superficie S es continuo.

DEFINICIÓN 4.1.5 La *frontera* de una superficie suave S en \mathbb{R}^3 es el conjunto ∂S consistente de todos los puntos $(x_0, y_0, z_0) \in S$ para los cuales cada conjunto de la forma

$$\mathcal{M}_\varepsilon(x_0, y_0, z_0) = \{(x, y, z) \notin S : \|(x - x_0, y - y_0, z - z_0)\| < \varepsilon\}$$

es conexo.

OBSERVACIÓN 4.1.4 Notemos que toda bola de radio $\varepsilon > 0$ pequeño, centrada en $(x_0, y_0, z_0) \in \partial S$ contiene puntos en S y puntos fuera de S . Notemos también que, en general, la frontera ∂S de una superficie S en \mathbb{R}^3 no coincide con su frontera topológica $\text{Fr}(S)$.

EJEMPLO 4.1.4 Determina la frontera del hemisferio superior de la esfera de radio R , a saber:

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} : x^2 + y^2 \leq R^2 \right\}.$$

Solución. Notemos que si $(x_0, y_0, z_0) \in S$ es tal que $z_0 > 0$, entonces al considerar cualquier bola de radio $\varepsilon > 0$ pequeño centrada en (x_0, y_0, z_0) , ésta quedará dividida en dos partes, de manera que $\mathcal{M}(x_0, y_0, z_0)$ será desconexo. Sin embargo, si $(x_0, y_0, z_0) \in S$ es tal que $z_0 = 0$, entonces al considerar cualquier bola de radio $\varepsilon > 0$ pequeño centrada en (x_0, y_0, z_0) , ésta no quedará dividida

en dos partes, de manera que $\mathcal{M}(x_0, y_0, z_0)$ será conexo. Por lo tanto, la frontera del hemisferio superior de la esfera de radio R y centro en el origen es el conjunto

$$\partial S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = R^2 \wedge z = 0\}. \quad \square$$



Figura 4.5. Hemisferio superior de la esfera de radio R y centro en el origen.

EJEMPLO 4.1.5 Determina la frontera del cilindro circular recto y acotado

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = a^2 \wedge |z| \leq 2\}.$$

Solución. Notemos que si $(x_0, y_0, z_0) \in S$ es tal que $-2 < z_0 < 2$, entonces al considerar cualquier bola de radio $\varepsilon > 0$ pequeño centrada en (x_0, y_0, z_0) , ésta quedará dividida en dos partes, de manera que $\mathcal{M}(x_0, y_0, z_0)$ será desconexo. Sin embargo, si $(x_0, y_0, z_0) \in S$ es tal que $z_0 = -2$ o $z_0 = 2$, entonces al considerar cualquier bola de radio $\varepsilon > 0$ pequeño centrada en (x_0, y_0, z_0) , ésta no quedará dividida en dos partes, de manera que $\mathcal{M}(x_0, y_0, z_0)$ será conexo. Por lo tanto, la frontera ∂S del cilindro circular recto y acotado S es la unión de las circunferencias

$$\mathcal{C}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = a^2 \wedge z = 2\}$$

y

$$\mathcal{C}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = a^2 \wedge z = -2\}. \quad \square$$

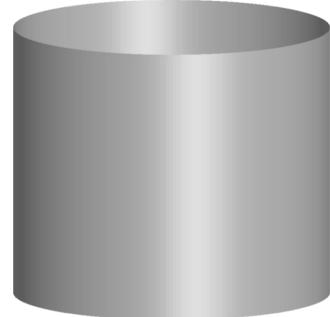


Figura 4.6. Cilindro circular recto.

EJEMPLO 4.1.6 Determina la frontera de la esfera

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}.$$

Solución. Es fácil chequear que la esfera S no posee frontera, pues si $(x_0, y_0, z_0) \in S$, entonces al considerar cualquier bola de radio $\varepsilon > 0$ pequeño centrada en (x_0, y_0, z_0) , ésta quedará dividida en dos partes, de manera que $\mathcal{M}(x_0, y_0, z_0)$ será desconexo. \square

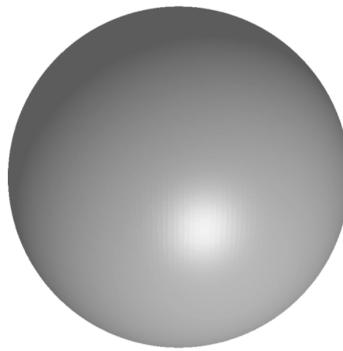


Figura 4.7. Esfera.

PROPOSICIÓN 4.1.1 Sea S una superficie suave y sea $\vec{\Phi} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización suave de S . Todo punto de ∂S es imagen de un punto de ∂D por $\vec{\Phi}$, sin embargo, un punto de ∂D no necesariamente tiene su imagen sobre ∂S .

El siguiente ejemplo sirve para ilustrar la Proposición 4.1.1.

EJEMPLO 4.1.7 Muestra que la parametrización del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ acotado por los planos $z = 2$ y $z = -2$ que proviene del uso de coordenadas cilíndricas es tal que no todo punto en la frontera de su dominio posee una imagen en la frontera de la superficie.

Solución. La parametrización del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ acotado por los planos $z = 2$ y $z = -2$, que proviene desde el uso de coordenadas cilíndricas, está dada por

$$\begin{aligned}\vec{\Phi} : [0, 2\pi] \times [-2, 2] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, z) &\rightarrow \vec{\Phi}(\theta, z) = (a \cos \theta, a \sin \theta, z).\end{aligned}$$

Notemos que los puntos de la forma $(0, z) \in \mathbb{R}^2$ y $(2\pi, z) \in \mathbb{R}^2$ tales que $|z| \leq 2$, pertenecen a $\text{Fr}(D) = \text{Fr}([0, 2\pi] \times [-2, 2])$, la frontera del dominio de $\vec{\Phi}$ y que sin embargo, las imágenes $\vec{\Phi}(0, z)$ y $\vec{\Phi}(2\pi, z)$ no pertenecen a ∂S , la frontera de la superficie S , cuando $|z| < 2$. Por otro lado, ∂S proviene de la unión de las imágenes de $\vec{\Phi}(0, z)$ y $\vec{\Phi}(2\pi, z)$ cuando $|z| = 2$. \square

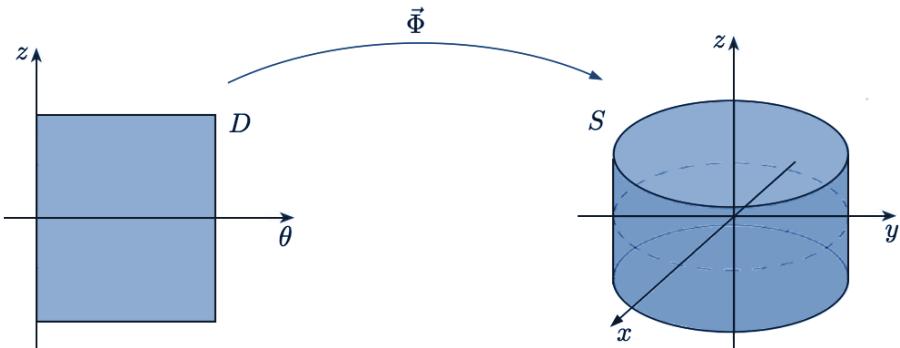


Figura 4.8. Parametrización del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ acotado por los planos $z = 2$ y $z = -2$.

DEFINICIÓN 4.1.6 En \mathbb{R}^3 decimos que una superficie es *cerrada* si divide el espacio en dos regiones, una acotada (interior a la superficie) y otra no acotada (exterior a la superficie).

OBSERVACIÓN 4.1.5 Todas las superficies cerradas regulares en el espacio son orientables respecto a la dirección escogida como positiva en cada punto. En general, la orientación positiva es la que se escoge saliendo desde la región acotada hacia su exterior, siguiendo la regla de la mano derecha.

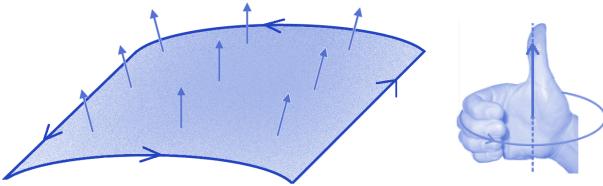


Figura 4.9. Si S es regular, entonces el campo de vectores normales es continuo, y la superficie es orientable. Más aún, la orientación de la frontera de la curva que encierra la superficie y el campo de vectores normales a la superficie se relacionan mediante la regla de la mano derecha.

Los siguientes ejemplos ilustran los conceptos previos. Además, muestran que una superficie admite más de una parametrización y que algunos puntos regulares para una parametrización pueden resultar singulares para otra, tal como sucedía en el caso de las curvas.

EJEMPLO 4.1.8 Muestra que el hemisferio superior de la esfera de radio R y centro en el origen es una superficie simple, suave, regular y orientable, salvo tal vez un conjunto finito de puntos.

Solución. Sea S el hemisferio superior de la esfera de radio R y centro en el origen. Como $\|\vec{x}\| = R$ para cada $\vec{x} \in S$, podemos parametrizar en coordenadas esféricas la superficie, mediante

$$\begin{aligned}\vec{\Phi}_1 : [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \phi) &\rightarrow \vec{\Phi}_1(\theta, \phi) = (R \cos \theta \sin \phi, R \sin \theta \sin \phi, R \cos \phi).\end{aligned}$$

Observemos ahora lo siguiente:

- S es simple. En efecto, $\vec{\Phi}_1$ es biyectiva en $]0, 2\pi] \times]0, \frac{\pi}{2}]$.
- S es suave. En efecto, $\exists \vec{\Phi}_1$ que es una C^1 -parametrización de S .
- S es regular salvo tal vez en $(0, 0, R)$. En efecto, de acuerdo a la definición de $\vec{\Phi}_1$, tenemos

$$\begin{aligned}\vec{n}(\theta, \phi) &= \frac{\partial \vec{\Phi}_1}{\partial \theta}(\theta, \phi) \times \frac{\partial \vec{\Phi}_1}{\partial \phi}(\theta, \phi) \\ &= (-R \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, R \cos \theta \operatorname{sen} \phi, 0) \times (R \cos \theta \cos \phi, R \operatorname{sen} \theta \cos \phi, -R \operatorname{sen} \phi) \\ &= R^2 \operatorname{sen} \phi \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\theta} & \hat{\phi} \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ \cos \theta \cos \phi & \operatorname{sen} \theta \cos \phi & -\operatorname{sen} \phi \end{vmatrix} \\ &= R^2 \operatorname{sen} \phi (-\cos \theta \operatorname{sen} \phi, -\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, -\cos \phi) \\ &= -R \operatorname{sen} \phi (R \cos \theta \operatorname{sen} \phi, R \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, R \cos \phi) \\ &= -R \operatorname{sen} \phi (x(\theta, \phi), y(\theta, \phi), z(\theta, \phi)).\end{aligned}$$

Notemos que $\vec{n}(\theta, \phi) = (0, 0, 0)$ si y solo si $\phi = 0$. Por otro lado, el único punto del hemisferio superior para el cual $\phi = 0$, es el punto $(0, 0, R)$. Por lo tanto, $\exists \vec{\Phi}_1$ que es una parametrización regular de S salvo en $(0, 0, R)$.

- $S \setminus \{(0, 0, R)\}$ es orientable. En efecto,

$$\vec{n}(\theta, \phi) = -R \operatorname{sen} \phi (R \cos \theta \operatorname{sen} \phi, R \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, R \cos \phi)$$

y

$$\hat{n}(\theta, \phi) = -(\cos \theta \operatorname{sen} \phi, \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \cos \phi)$$

definen funciones continuas sobre $[0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$. Además, $-1 \leq -\operatorname{sen} \phi \leq 0$ para $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, y por lo tanto el vector normal apunta hacia el lado interior del hemisferio. \square

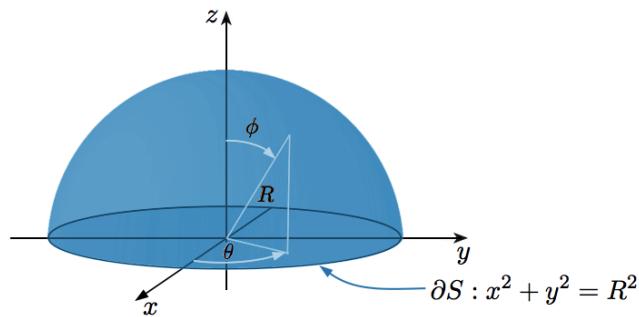


Figura 4.10. Parametrización del hemisferio superior de la esfera de radio R y centro en el origen.

Cabe preguntarse,

¿Son regulares en los mismos puntos todas las parametrizaciones regulares de una superficie?

Veamos que esto no es cierto.

EJEMPLO 4.1.9 Muestra que no todas las parametrizaciones del hemisferio superior S de la esfera de radio R y centro en el origen son regulares en $S \setminus \{(0, 0, R)\}$.

Solución. El hemisferio superior S de la esfera de radio R y centro en el origen está determinado por el sistema

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad \text{con } z \geq 0 \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} \quad \forall (x, y) \in \overline{B((0, 0), R)},$$

donde $\overline{B((0, 0), R)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$. La parametrización de esta superficie en coordenadas rectangulares es:

$$\begin{aligned} \vec{\Phi}_2 : \overline{B((0, 0), R)} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\rightarrow \vec{\Phi}_2(x, y) = (x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \vec{n}(x, y) &= \frac{\partial \vec{\Phi}_2}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \vec{\Phi}_2}{\partial y}(x, y) \\ &= \left(1, 0, -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right) \times \left(0, 1, -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right) \\ &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \\ 0 & 1 & -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} (x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) \\ &= \frac{1}{z(x, y)} (x, y, z(x, y)). \end{aligned}$$

Notemos que $\vec{n}(x, y)$ está bien definido si $z(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} > 0$ y que $\vec{n}(x, y) = (0, 0, 0)$ si y solo si

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} (x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) = (0, 0, 0).$$

Por lo tanto, la parametrización $\vec{\Phi}_2$ es regular en $(0, 0, R)$, pero no está definida para $(x, y, z) \in S$ tal que $x^2 + y^2 = R^2$, pues en esta situación se verifica que $z(x, y) = 0$. Notemos también que el vector normal exterior en coordenadas rectangulares, apunta hacia el exterior del hemisferio, lo cual difiere de la parametrización en el Ejemplo 4.1.8. \square

En los Ejemplos 4.1.8 y 4.1.9 hemos obtenido dos parametrizaciones de una misma superficie, cada una definiendo un campo de vectores normales continuo, pero con direcciones opuestas. Luego, si una superficie S es orientable, parece natural hablar de vector normal \vec{n} exterior a la superficie y de vector normal $-\vec{n}$ interior a la superficie, según la orientación de la superficie que escojamos como positiva. Así, podremos distinguir lo que sucede con el vector normal exterior \vec{n} de una superficie dependiendo de la parametrización que nos demos de ella.

DEFINICIÓN 4.1.7 Sea S una superficie orientable, sea \vec{n} el vector normal exterior de acuerdo a la orientación escogida como positiva, y sea $\vec{\Phi}$ una parametrización de S . Decimos que:

- $\vec{\Phi}$ preserva la orientación de S si

$$\vec{\Phi}_u(u, v) \times \vec{\Phi}_v(u, v) = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u, v) = \vec{n}(u, v),$$

- $\vec{\Phi}$ invierte la orientación de S si

$$\vec{\Phi}_u(u, v) \times \vec{\Phi}_v(u, v) = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u, v) = -\vec{n}(u, v).$$

- $\vec{\Phi}$ es equivalente a una parametrización $\vec{\Phi}_1$ de S si, o bien ambas parametrizaciones preservan la orientación de S , o bien ambas invierten la orientación de S .

EJEMPLO 4.1.10 Sea S el hemisferio superior de la esfera de radio R y centro en el origen, y consideremos como cara exterior de la superficie a aquella de contiene a sus planos tangentes. ¿Son equivalentes las parametrizaciones $\vec{\Phi}_1$ de S en el Ejemplo 4.1.8 y $\vec{\Phi}_2$ de S en el Ejemplo 4.1.9?

Solución. Las parametrizaciones $\vec{\Phi}_1$ y $\vec{\Phi}_2$ del hemisferio superior de la esfera de radio R y centro en el origen dadas en el Ejemplo 4.1.8 y en el Ejemplo 4.1.9 respectivamente, son tales que $\vec{\Phi}_1$ invierte la orientación y $\vec{\Phi}_2$ preserva la orientación cuando consideramos como cara exterior de la superficie a aquella de contiene a sus planos tangentes. Por lo tanto, las parametrizaciones Φ_1 y Φ_2 no son equivalentes. \square

EJEMPLO 4.1.11 Sea S la superficie de un cono circular recto de radio a y altura h y sean $\vec{\Phi}_1$, $\vec{\Phi}_2$ y $\vec{\Phi}_3$ respectivamente una parametrización esférica, una cilíndrica y una cartesiana de ella. Considerando como cara exterior de la superficie S a aquella de contiene a sus planos tangentes, estudia si estas parametrizaciones son simples, suaves, regulares y/o equivalentes entre sí, y determina una ecuación para los planos tangentes a S .

Solución. Vamos a considerar la superficie S del cono circular recto cuyo vértice está en el origen y es perpendicular al plano xy ; esto es, S queda determinada por el sistema

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{h^2} z^2 \quad \text{con } 0 \leq z \leq h$$

y su frontera ∂S queda determinada por el sistema

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \text{con } z = h.$$

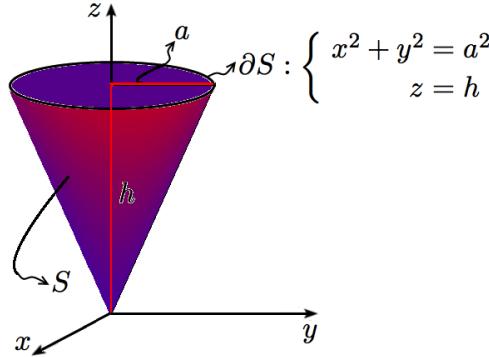


Figura 4.11. Cono circular recto de radio a y altura h .

- La parametrización en coordenadas esféricas se obtiene observando que

$$\sin \phi = \frac{\text{cat. opuesto a } \phi}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}},$$

$$\cos \phi = \frac{\text{cat. adyacente a } \phi}{\text{hipotenusa}} = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}.$$

Así que, esta parametrización está dada por

$$\begin{aligned} \vec{\Phi}_1 : [0, \sqrt{a^2 + h^2}] \times [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\rho, \theta) &\rightarrow \vec{\Phi}_1(\rho, \theta) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + h^2}} (a \rho \cos \theta, a \rho \sin \theta, \rho h). \end{aligned}$$

- La parametrización en coordenadas cilíndricas se obtiene observando que

$$\frac{r}{z} = \frac{a}{h}$$

y que la proyección en el plano xy de la superficie es el círculo

$$\overline{B((0,0), a)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\} = \{(r, \theta) \in [0, a] \times [0, 2\pi] : r \leq a\}.$$

Así que, esta parametrización está dada por

$$\begin{aligned} \vec{\Phi}_2 : [0, a] \times [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta) &\rightarrow \vec{\Phi}_2(r, \theta) = \left(r \cos \theta, r \sin \theta, \frac{rh}{a} \right). \end{aligned}$$

- La parametrización en coordenadas rectangulares se obtiene observando que

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \frac{a}{h}$$

y que la proyección en el plano xy de la superficie es el círculo

$$\overline{B((0, 0), a)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

Así que, esta parametrización está dada por

$$\begin{aligned}\vec{\Phi}_3 : \overline{B((0, 0), a)} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\rightarrow \vec{\Phi}_3(x, y) = \left(x, y, \frac{h}{a} \sqrt{x^2 + y^2} \right).\end{aligned}$$

- S es simple. En efecto, $\vec{\Phi}_1$, $\vec{\Phi}_2$ y $\vec{\Phi}_3$ son biyectivas en el interior de sus respectivos dominios sobre sus respectivas imágenes.
- S es suave. En efecto, $\exists \vec{\Phi}_1$ (o $\exists \vec{\Phi}_2$) que es suave en D ; $\vec{\Phi}_3$ no lo es, pues no es diferenciable en el origen; es decir, $(0, 0)$ es un punto singular para $\vec{\Phi}_3$.
- Ahora estudiamos el vector normal asociado a cada parametrización.

- En primer lugar, notemos que

$$\begin{aligned}\vec{n}(\rho, \theta) &= \frac{\partial \vec{\Phi}_1}{\partial \rho}(\rho, \theta) \times \frac{\partial \vec{\Phi}_1}{\partial \theta}(\rho, \theta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + h^2}} (a \cos \theta, a \operatorname{sen} \theta, h) \times \frac{1}{\sqrt{a^2 + h^2}} (-a \rho \operatorname{sen} \theta, a \rho \cos \theta, 0) \\ &= \frac{a^2 \rho}{a^2 + h^2} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\theta} & \hat{\phi} \\ \cos \theta & \operatorname{sen} \theta & \frac{h}{a} \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{a^2}{a^2 + h^2} \left(-\frac{h}{a} \rho \cos \theta, -\frac{h}{a} \rho \operatorname{sen} \theta, \rho \right) \\ &= -\frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} \left(\frac{a \rho}{\sqrt{a^2 + h^2}} \cos \theta, \frac{a \rho}{\sqrt{a^2 + h^2}} \operatorname{sen} \theta, -\frac{a^2}{h^2} \frac{\rho h}{\sqrt{a^2 + h^2}} \right) \\ &= -\frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} \left(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta), -\frac{a^2}{h^2} z(\rho, \theta) \right)\end{aligned}$$

define una función continua sobre $[0, \sqrt{a^2 + h^2}] \times [0, 2\pi]$.

- Notemos también que

$$\begin{aligned}
 \vec{n}(\theta, r) &= \frac{\partial \vec{\Phi}_2}{\partial r}(r, \theta) \times \frac{\partial \vec{\Phi}_2}{\partial \theta}(r, \theta) \\
 &= \left(\cos \theta, \sin \theta, \frac{h}{a} \right) \times (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0) \\
 &= r \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{z} \\ \cos \theta & \sin \theta & \frac{h}{a} \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \left(-\frac{h}{a} r \cos \theta, -\frac{h}{a} r \sin \theta, r \right) \\
 &= -\frac{h}{a} \left(r \cos \theta, r \sin \theta, -\frac{a^2}{h^2} \frac{rh}{a} \right) \\
 &= -\frac{h}{a} \left(x(r, \theta), y(r, \theta), -\frac{a^2}{h^2} z(r, \theta) \right)
 \end{aligned}$$

define una función continua sobre $[0, a] \times [0, 2\pi]$.

- Por último, notemos que

$$\begin{aligned}
 \vec{n}(x, y) &= \frac{\partial \vec{\Phi}_3}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \vec{\Phi}_3}{\partial y}(x, y) \\
 &= \left(1, 0, \frac{h}{a} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \times \left(0, 1, \frac{h}{a} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\
 &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & \frac{h}{a} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ 0 & 1 & \frac{h}{a} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(-\frac{h}{a} x, -\frac{h}{a} y, \sqrt{x^2 + y^2} \right) \\
 &= -\frac{h}{a \sqrt{x^2 + y^2}} \left(x, y, -\frac{a^2}{h^2} \frac{h}{a} \sqrt{x^2 + y^2} \right) \\
 &= -\frac{h}{a \sqrt{x^2 + y^2}} \left(x, y, -\frac{a^2}{h^2} z(x, y) \right)
 \end{aligned}$$

define una función continua sobre $\overline{B((0, 0), a)} \setminus \{(0, 0)\}$.

- Como una consecuencia del estudio de los vectores normales, obtenemos que S es regular

excepto en $(0, 0, 0)$. Más aún, S resulta orientable donde S es regular, pues los vectores normales definen funciones continuas. Se chequea fácilmente que

$$\vec{\Phi}_i \quad \text{invierte la orientación, para cada } i = 1, 2, 3,$$

y de esta manera obtenemos que las tres parametrizaciones son equivalentes.

- Plano tangente: Tenemos,

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \left(\frac{h}{a} x_0, \frac{h}{a} y_0, -z_0 \right) = 0, \quad \text{con } z_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}. \quad \square$$

EJERCICIOS 4.1.1

1. Encuentra la frontera, si existe, de la superficie compuesta por el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, con $z \leq 0$, y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, con $0 \leq z \leq 1$.
2. Encuentra la frontera, si existe, del elipsoide $\frac{1}{9}x^2 + y^2 + \frac{1}{4}z^2 = 1$
3. Considera la superficie parametrizada por $\vec{\Phi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\vec{\Phi}(x, y, z) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, u^2 + v^2)$. Determina el conjunto donde $\vec{\Phi}$ es regular y encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $\vec{\Phi}(1, 0)$.
4. Encuentra el plano tangente a la superficie S en \mathbb{R}^3 parametrizada por $(x, y, z) = (u^2, u \operatorname{sen} e^v, \frac{1}{3}u \cos e^v)$ en el punto $(13, -2, 1)$.
5. Considera la superficie S en \mathbb{R}^3 parametrizada por $\vec{\Phi} : [0, 1] \times [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(r, \theta) \mapsto \vec{\Phi}(r, \theta) = (r \cos \theta, \operatorname{sen} \theta, \theta)$.
 - a) Indique cuál es la superficie
 - b) Encuentra el vector normal unitario
 - c) Encuentra el plano tangente a la superficie S en el punto (a, b, c)
 - d) Si $(a, b, c) \in S$, muestra que el segmento de recta horizontal de longitud 1 que va desde el eje z hasta (a, b, c) pertenece a S y al plano tangente a S en el punto (a, b, c) .
6.
 - a) Encuentra una parametrización para el hiperboloide $S : x^2 + y^2 - z^2 = 25$
 - b) Encuentra el vector normal unitario a S
 - c) Encuentra el plano tangente a la superficie S en el punto (a, b, c) , donde $a^2 + b^2 = 25$
 - d) Muestra que las rectas $L_1 : (a, b, 0) + (-b, a, 25)t$ y $L_2 : (a, b, 0) + (b, -a, 25)t$ pertenecen a S y al plano tangente del ítem c).

Para ver las Soluciones de los Ejercicios 4.1.1 presiona aquí A

4.1.1. Área de una superficie

Por simplicidad, supongamos que D es un rectángulo en \mathbb{R}^2 , subdividido en pequeñas celdas, de manera que $\vec{\Phi}(D) = S$ corresponde a una superficie en \mathbb{R}^3 , también dividida en pequeñas celdas (asumiendo que $\vec{\Phi}$ es una parametrización simple, suave y regular de S).

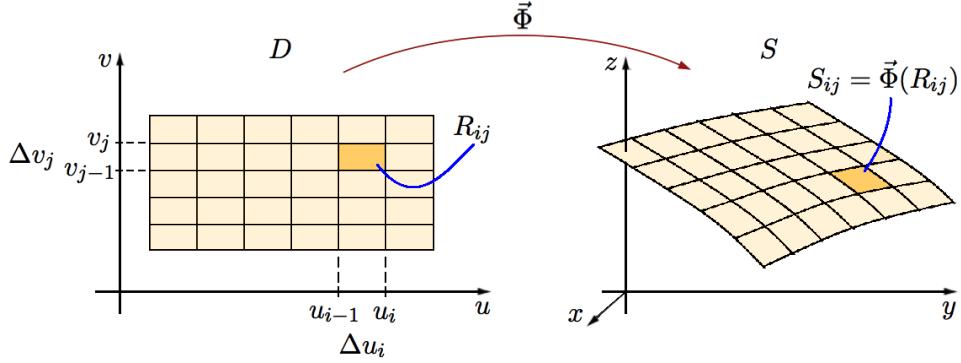


Figura 4.12. Partición de una superficie parametrizada, con $\vec{\Phi}(D) = S$ y $\vec{\Phi}(R_{ij}) = S_{ij}$, donde $R_{ij} = \Delta u_i \times \Delta v_j$, siendo $\Delta u_i = u_i - u_{i-1}$ y $\Delta v_j = v_j - v_{j-1}$.

Notemos que si escogemos $\delta = \max_{ij}\{\Delta u_i, \Delta v_j\}$ suficientemente pequeño, entonces el área $A(S_{ij}) = A(\vec{\Phi}(R_{ij}))$ resulta muy similar al área de una región plana tangente a S . Específicamente, tenemos que

$$\begin{aligned} A(S_{ij}) &\sim \|\Delta u_i \vec{\Phi}_u(u_i, v_j) \times \Delta v_j \vec{\Phi}_v(u_i, v_j)\| \\ &= \|\vec{\Phi}_u(u_i, v_j) \times \vec{\Phi}_v(u_i, v_j)\| \Delta u_i \Delta v_j \\ &= \|\vec{n}(u_i, v_j)\| \Delta u_i \Delta v_j. \end{aligned}$$

Luego, el área de S es aproximadamente

$$\begin{aligned} A(S) &\sim \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n A(S_{ij}) \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \|\vec{n}(u_i, v_j)\| \Delta u_i \Delta v_j. \end{aligned}$$

Notando que cuando $\delta \rightarrow 0, n, m \rightarrow \infty$, concluimos que

$$A(S) = \iint_D \|\vec{n}(u, v)\| du dv$$

donde $\vec{n}(u, v) = \vec{\Phi}_u(u, v) \times \vec{\Phi}_v(u, v) = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u, v)$.

DEFINICIÓN 4.1.8 Sea S una superficie simple, suave y regular, y sea $\vec{\Phi} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una C^1 -parametrización simple y regular de S . Se define el *área de una superficie* mediante el valor $A(S)$ dado por

$$A(S) = \iint_D \|\vec{n}(u, v)\| du dv = \iint_S dS,$$

donde $\vec{n}(u, v) = \vec{\Phi}_u(u, v) \times \vec{\Phi}_v(u, v) = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u, v)$.

EJEMPLO 4.1.12 Determina el área de la superficie asociada a la región acotada del paraboloide $x^2 + y^2 - z = 0$ que ha sido seccionado por el plano $z = 4$.

Solución. Observemos la gráfica de la superficie de paraboloide $z = x^2 + y^2$, con $0 \leq z \leq 4$, y su proyección en el plano xy .

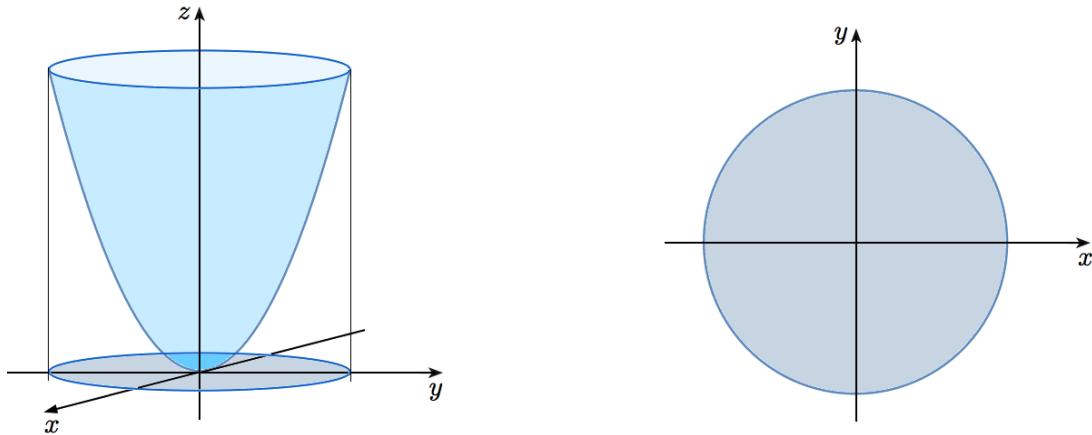


Figura 4.13. Superficie de paraboloide $z = x^2 + y^2$, con $0 \leq z \leq 4$, y su proyección en el plano xy .

Como la proyección en el plano xy de la superficie S asociada a la región acotada del paraboloide $x^2 + y^2 - z = 0$ que ha sido seccionado por el plano $z = 4$ corresponde al círculo $x^2 + y^2 \leq 4$, podemos considerar la siguiente parametrización de S :

$$\begin{aligned} \vec{\Phi} : [0, 2] \times [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta) &\rightarrow \vec{\Phi}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r^2). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \vec{n}(r, \theta) &= \vec{\Phi}_r(r, \theta) \times \vec{\Phi}_\theta(r, \theta) \\ &= (\cos \theta, \sin \theta, 2r) \times (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0) \\ &= r \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{z} \\ \cos \theta & \sin \theta & 2r \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-2r^2 \cos \theta, -2r^2 \sin \theta, r), \end{aligned}$$

de donde

$$\|\vec{n}(r, \theta)\| = \sqrt{4r^4 \cos^2 \theta + 4r^4 \sin^2 \theta + r^2} = r\sqrt{4r^2 + 1}.$$

Por lo tanto, el área de S es

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} r\sqrt{4r^2 + 1} \, d\theta \, dr \\ &= \frac{\pi}{6} (4r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \Big|_{r=0}^{r=2} \\ &= \frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 1). \quad \square \end{aligned}$$

EJEMPLO 4.1.13 Determina el área de la superficie de un toro de radio mayor R y radio menor a .

Solución. Consideremos la superficie S de un toro centrado en el origen de radio mayor R y radio menor a .

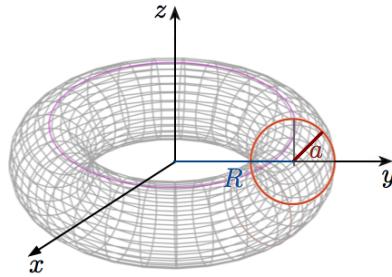


Figura 4.14. Superficie de un toro de radio mayor R y radio menor a .

Evidentemente, podemos considerar la siguiente parametrización de S :

$$\begin{aligned} \vec{\Phi} :]0, 2\pi] \times]0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \phi) &\rightarrow \vec{\Phi}(\theta, \phi) = ((R + a \sin \phi) \cos \theta, (R + a \sin \phi) \sin \theta, a \cos \phi). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \vec{n}(\theta, \phi) &= \vec{\Phi}_\theta(\theta, \phi) \times \vec{\Phi}_\phi(\theta, \phi) \\ &= (- (R + a \sin \phi) \sin \theta, (R + a \sin \phi) \cos \theta, 0) \times (a \cos \phi \cos \theta, a \cos \phi \sin \theta, -a \sin \phi) \\ &= (R + a \sin \phi) \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\theta} & \hat{\phi} \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ a \cos \phi \cos \theta & a \cos \phi \sin \theta & -a \sin \phi \end{vmatrix} \\ &= (R + a \sin \phi) (-a \cos \theta \sin \phi, -a \sin \theta \sin \phi, -a \cos \phi), \end{aligned}$$

de donde

$$\|\vec{n}(\theta, \phi)\| = a(R + a \sin \phi).$$

Por lo tanto, el área de S es

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a(R + a \sin \phi) d\theta d\phi \\ &= 2\pi a \int_0^{2\pi} (R + a \sin \phi) d\phi \\ &= 4\pi^2 a R. \quad \square \end{aligned}$$

EJEMPLO 4.1.14 Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^1 -diferenciable, y sea S la gráfica de f . Calcula el área de S cuando consideramos $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}^2$.

Solución. Consideremos la siguiente parametrización de S :

$$\begin{aligned} \vec{\Phi} : D &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\rightarrow \vec{\Phi}(x, y) = (x, y, f(x, y)). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \vec{n}(x, y) &= \vec{\Phi}_x(x, y) \times \vec{\Phi}_y(x, y) \\ &= \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right) \times \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) \\ &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{vmatrix} \\ &= \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), 1\right), \end{aligned}$$

de donde

$$\|\vec{n}(x, y)\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2}.$$

Por lo tanto, el área de S es

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2} dy dx. \quad \square$$

EJERCICIOS 4.1.2

1. Sea S la parte acotada del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$, ubicada sobre el plano xy . Determina su área.
2. Determina el área de la cubierta del hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $z \geq 0$, cortada por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

3. Calcula el área de un helicoide de radio a y altura de paso h .
4. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 en $[a, b]$, y sean R_f y S_f las superficies obtenidas al hacer girar la curva $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, en torno al eje x y en torno al eje y respectivamente. Calcula las áreas $A(R_f)$ y $A(S_f)$ considerando $f \geq 0$, y $b > a \geq 0$.

Para ver las Soluciones de los Ejercicios 4.1.2 presiona aquí **A**

4.2. Integrales de superficie de campos escalares

DEFINICIÓN 4.2.1 (Integral de superficie de un campo escalar) Sea S una superficie simple, suave y regular, sea $\vec{\Phi} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una C^1 -parametrización simple y regular de S , y sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo en Ω , siendo Ω un conjunto abierto que contiene a S . Entonces, llamamos *integral de superficie del campo escalar* f sobre la superficie S a la integral

$$\iint_D f(\vec{\Phi}(u, v)) \|\vec{n}(u, v)\| du dv = \iint_S f dS.$$

donde $\vec{n}(u, v) = \vec{\Phi}_u(u, v) \times \vec{\Phi}_v(u, v) = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u, v)$.

OBSERVACIÓN 4.2.1 Se puede probar que la integral de superficie de un campo escalar no depende de la parametrización simple, regular y suave escogida de la superficie, ni de la orientación de tal superficie.

OBSERVACIÓN 4.2.2 La definición 4.2.1 se puede extender a superficies S seccionalmente regulares, que es cuando existen superficies S_i , para $i = 1, 2, \dots, k$, simples, regulares y suaves que se traslanan a lo más en sus bordes, y que son tales que $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$. En este caso, obtenemos

$$\iint_S f dS = \sum_{i=1}^k \iint_{S_i} f dS_i,$$

donde las parametrizaciones $\vec{\Phi}_i$ de las respectivas curvas S_i son suaves.

EJEMPLO 4.2.1 Sea S la superficie determinada por la ecuación $z = x^2 + y^2$, con $0 \leq z \leq 4$. Evalúa la integral de superficie

$$\iint_S \sqrt{1 + z + 3(x^2 + y^2)} dS.$$

Solución. Consideremos la siguiente parametrización de S :

$$\begin{aligned} \vec{\Phi} : D &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\rightarrow \vec{\Phi}(x, y) = (x, y, f(x, y)) = (x, y, x^2 + y^2). \end{aligned}$$

donde $D = \overline{B((0, 0), 2)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$, que corresponde a la proyección sobre el

plano xy de la superficie $z = x^2 + y^2$, cuando $0 \leq z \leq 4$.

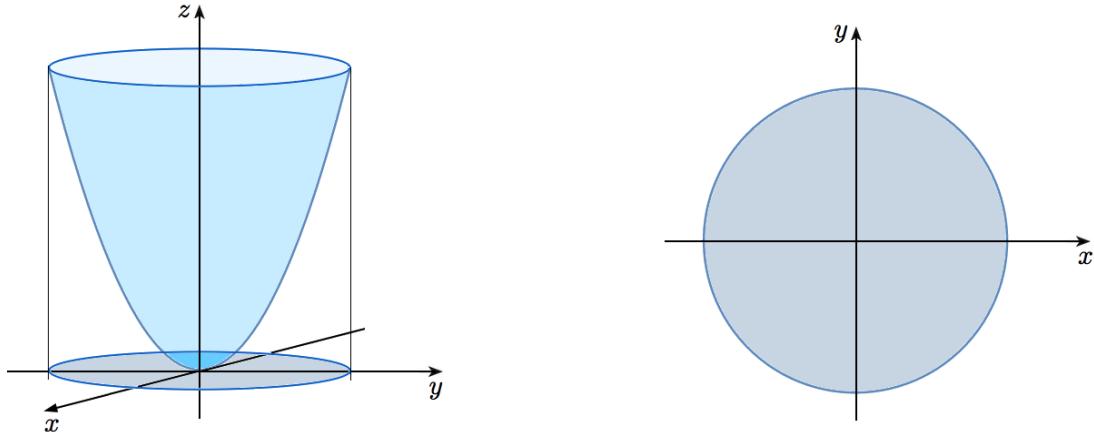


Figura 4.15. Superficie de paraboloid $z = x^2 + y^2$, con $0 \leq z \leq 4$, y su proyección en el plano xy .

De acuerdo al Ejemplo 4.1.14, observamos que

$$\begin{aligned}\vec{n}(x, y) &= \vec{\Phi}_x(x, y) \times \vec{\Phi}_y(x, y) \\ &= \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), 1 \right) \\ &= (-2x, -2y, 1)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\|\vec{n}(x, y)\| &= \|\vec{\Phi}_x(x, y) \times \vec{\Phi}_y(x, y)\| \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)^2} \\ &= \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}.\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\iint_S \sqrt{1 + z + 3(x^2 + y^2)} dS &= \iint_D f(\vec{\Phi}(x, y)) \|\vec{n}(x, y)\| dx dy \\ &= \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dx dy \\ &= \iint_D (1 + 4(x^2 + y^2)) dx dy \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (1 + 4r^2) r dr d\theta \\ &= 2\pi \left(\frac{r^2}{2} + r^4 \right) \Big|_{r=0}^{r=2} \\ &= 36\pi. \quad \square\end{aligned}$$

4.3. Aplicaciones de la integral de superficie de un campo escalar

4.3.1. Masa, centro de masa y momentos de una superficie

Fórmulas para la masa y el momento de capas muy delgadas en el espacio xyz

■ **Masa:**

$$M = \iint_S \rho(x, y, z) dS$$

■ **Primeros momentos con respecto a los planos coordenados:**

$$M_{yz} = \iint_S x \rho(x, y, z) dS, \quad M_{xz} = \iint_S y \rho(x, y, z) dS \quad y \quad M_{xy} = \iint_S z \rho(x, y, z) dS$$

■ **Centro de masa:** $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} \quad y \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}.$$

■ **Momentos de inercia (segundos momentos) con respecto a los ejes coordinados:**

$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dS, \quad I_y = \iint_S (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dS \quad y \quad I_z = \iint_S (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dS$$

■ **Momentos de inercia con respecto a una recta L :**

$$I_L = \iint_S (r(x, y, z))^2 \rho(x, y, z) dS \quad \text{donde } r(x, y, z) \text{ es la distancia del punto } (x, y, z) \text{ a la recta } L$$

■ **Momento de inercia respecto al origen (momento polar):**

$$I_0 = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dS$$

■ **Radio de giro con respecto a una recta L :**

$$R_L = \sqrt{\frac{I_L}{M}}$$

EJEMPLO 4.3.1 Calcula el centro de masa de un hemisferio superior de la esfera de radio a y densidad constante $\rho = x_0$.

Solución. Consideremos el hemisferio superior de la esfera de radio a centrada en el origen, determinada por el sistema $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, con $z \geq 0$. Notemos que podemos parametrizar la

superficie en coordenadas rectangulares mediante $\vec{\Phi} : B((0, 0), a) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$(x, y) \mapsto \vec{\Phi}(x, y) = (x, y, f(x, y)) = (x, y, \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}),$$

y así

$$\begin{aligned}\vec{n}(x, y) &= \vec{\Phi}_x(x, y) \times \vec{\Phi}_y(x, y) \\ &= \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), 1 \right) \\ &= \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, 1 \right),\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}\|\vec{n}(x, y)\| &= \|\vec{\Phi}_x(x, y) \times \vec{\Phi}_y(x, y)\| \\ &= \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + a^2 - x^2 - y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} \\ &= \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.\end{aligned}$$

Como la proyección de la superficie en el plano xy es la región $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a\}$, tenemos

$$\begin{aligned}M &= \iint_S \rho(x, y, z) dS \\ &= x_0 \iint_D \|\vec{n}(x, y)\| dA \\ &= ax_0 \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr d\theta \\ &= ax_0 \int_0^{2\pi} \left(-\sqrt{a^2 - r^2} \right) \Big|_{r=0}^{r=a} d\theta \\ &= a^2 x_0 \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2a^2 x_0 \pi.\end{aligned}$$

Notemos que si de antemano hubiésemos sabido que la superficie de la semiesfera de radio a mide $2a^2\pi$, entonces hubiésemos obtenido de inmediato

$$\begin{aligned}M &= \iint_S \rho(x, y, z) dS \\ &= x_0 \iint_S dS \\ &= 2a^2 x_0 \pi.\end{aligned}$$

Ahora, por simetría, es claro que $\bar{x} = 0$ y que $\bar{y} = 0$, por lo cual resta calcular \bar{z} . Tenemos

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iint_S z \rho(x, y, z) dS \\ &= x_0 \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \|\vec{n}(x, y)\| dA \\ &= ax_0 \int_0^{2\pi} \int_0^a r dr d\theta \\ &= ax_0 \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} \Big|_{r=0}^{r=a} d\theta \\ &= \frac{1}{2} a^3 x_0 \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= a^3 x_0 \pi. \end{aligned}$$

Notemos que $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, y que el área de un círculo de radio a es $a^2\pi$, luego, podríamos haber obtenido inmediatamente

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iint_S z \rho(x, y, z) dS \\ &= x_0 \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \|\vec{n}(x, y)\| dA \\ &= ax_0 \iint_D dA \\ &= a^3 x_0 \pi. \end{aligned}$$

En conclusión, el centro de masa está en el punto $(0, 0, \frac{a}{2})$. \square

EJEMPLO 4.3.2 Calcula la masa de la porción del plano $x + y + z = 1$ en el primer octante si la densidad de área en un punto (x, y, z) cualquiera en la superficie es $k x^2 \left[\frac{kg}{m^2} \right]$, donde k es una constante.

Solución. Consideremos la superficie determinada por el sistema $x + y + z = 1$, con $x \geq 0, y \geq 0$ y $z \geq 0$. Notemos que podemos parametrizar la superficie en coordenadas rectangulares mediante $\vec{\Phi} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$(x, y) \mapsto \vec{\Phi}(x, y) = (x, y, f(x, y)) = (x, y, 1 - x - y),$$

y así

$$\begin{aligned} \vec{n}(x, y) &= \vec{\Phi}_x(x, y) \times \vec{\Phi}_y(x, y) \\ &= \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), 1 \right) \\ &= (1, 1, 1), \end{aligned}$$

de donde

$$\|\vec{n}(x, y)\| = \sqrt{3}.$$

Como la proyección de la superficie en el plano xy es la región $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1 : x \geq 0 : y \geq 0\}$, tenemos

$$\begin{aligned} M &= \iint_S \rho(x, y, z) dS \\ &= k \iint_D x^2 \|\vec{n}(x, y)\| dA \\ &= k\sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 dy dx \\ &= k\sqrt{3} \int_0^1 (1-x) x^2 dx \\ &= k\sqrt{3} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &= k\sqrt{3} \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Por lo tanto la masa es $\frac{1}{12}k\sqrt{3}[kg]$. \square

EJERCICIOS 4.3.1

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ el campo escalar definido por

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 - z^2 & \text{si } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ 0 & \text{si } x^2 + y^2 + z^2 > 1. \end{cases}$$

Calcula $\mathcal{F}(t) = \iint_S f dS$ si S es la superficie $x + y + z = t$.

2. Sean S_1 la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y S_2 la superficie del octaedro, inscrito en la esfera, $|x| + |y| + |z| = a$. Calcula el valor de $I_1 - I_2$ si

$$I_1 = \iint_{S_1} (x^2 + y^2 + z^2) dS_1 \quad \text{e} \quad I_2 = \iint_{S_2} (x^2 + y^2 + z^2) dS_2.$$

3. Halla la masa de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$, cuya densidad de masa en cada punto es $\rho(x, y, z) = \frac{z}{a}$.

4. Halla el centro de masa de la superficie homogénea $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ recortada por la superficie $x^2 + y^2 = ax$.

5. Halla los momentos polares de inercia de las siguientes superficies S :

- a) la superficie del cubo $\max\{|x|, |y|, |z|\} = a$
- b) la superficie total del cilindro $x^2 + y^2 \leq R^2$, $0 \leq z \leq h$.

Para ver las Soluciones de los Ejercicios 4.3.1 presiona aquí A

4.4. Integrales de superficie sobre campos vectoriales

DEFINICIÓN 4.4.1 Sea Ω un abierto en \mathbb{R}^3 , sea $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial y sea $S \subset \Omega$ una superficie regular y orientable según el campo de vectores normales $\vec{n} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$. Llamamos *integral de superficie del campo vectorial \vec{F} a través de la superficie S* al valor de la siguiente integral:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS.$$

OBSERVACIÓN 4.4.1 Se puede probar que la integral de superficie de un campo vectorial no depende de la parametrización simple, regular y suave escogida de la superficie. Sin embargo, sí depende de la orientación de tal superficie.

OBSERVACIÓN 4.4.2 La definición 4.4.1 se puede extender a superficies S seccionalmente regulares, suaves y orientables, que es cuando existen superficies S_i , para $i = 1, 2, \dots, k$, simples, regulares y suaves que se traslanan a lo más en sus bordes, y que son tales que $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$. En este caso, obtenemos

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = \sum_{i=1}^k \iint_{S_i} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS_i,$$

donde las parametrizaciones $\vec{\Phi}_i$ de las respectivas curvas S_i son suaves.

NOTACIÓN 4.4.1 Se puede escribir indistintamente

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad \text{o} \quad \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS \quad \text{o bien} \quad \iint_D \vec{F}(\vec{\Phi}) \cdot \vec{n} \, dA.$$

En efecto, si S es una superficie suave, regular y orientable, y $\vec{\Phi}$ es una parametrización de S que preserva su orientación, entonces

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_D \vec{F}(\vec{\Phi}(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) \, du \, dv \\ &= \iint_D \vec{F}(\vec{\Phi}) \cdot \frac{\vec{n}(u, v)}{\|\vec{n}(u, v)\|} \|\vec{n}(u, v)\| \, du \, dv \\ &= \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS, \end{aligned}$$

donde dS mide en unidades de área sobre la superficie S (S es un subconjunto del espacio xyz); mientras que en términos de la parametrización $\vec{\Phi}$, dS corresponde a $\|\vec{n}(u, v)\| \, du \, dv$, que mide en unidades de área sobre la región D (D es la región del plano uv asociada a la parametrización $\vec{\Phi}$ de la superficie S). Por último, mencionamos que en algunos libros, como el de Thomas Jr., la notación para dS es $d\sigma$.

EJEMPLO 4.4.1 Sea S la superficie del plano de ecuación $x + y + z = 1$ ubicada en el primer octante, y sea $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ el campo vectorial definido por $F(x, y, z) = (x^2, \operatorname{sen} y, e^z)$. Calcula

$$\iint_S \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{S}.$$

Solución. Consideremos la siguiente parametrización de S :

$$\begin{aligned}\vec{\Phi} : D &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\rightarrow \vec{\Phi}(x, y) = (x, y, f(x, y)) = (x, y, 1 - x - y),\end{aligned}$$

donde D es la proyección del plano $x + y + z = 1$ sobre el primer cuadrante del plano xy . Luego,

$$\begin{aligned}\vec{n}(x, y) &= \vec{\Phi}_x(x, y) \times \vec{\Phi}_y(x, y) \\ &= \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), 1 \right) \\ &= (1, 1, 1).\end{aligned}$$

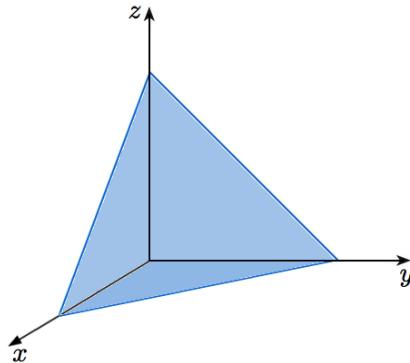


Figura 4.16. Superficie del plano $x + y + z = 1$ ubicada en el primer octante.

Se sigue que

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{S} &= \iint_D \vec{F}(\vec{\Phi}(x, y)) \cdot \vec{n}(x, y) dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2, \operatorname{sen} y, e^z) \cdot (1, 1, 1) dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2 + \operatorname{sen} y + e^{1-x-y}) dy dx \\ &= \int_0^1 (x^2 y - \cos y - e^{1-x-y}) \Big|_{y=0}^{y=1-x} dx \\ &= \int_0^1 (x^2(1-x) - \cos(1-x) + e^{1-x}) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \operatorname{sen}(1-x) - e^{1-x} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} dx \\ &= -\frac{11}{12} - \operatorname{sen} 1 + e. \quad \square\end{aligned}$$

4.5. Aplicaciones de la integral de superficie sobre un campo vectorial

4.5.1. Flujo

Supongamos que una placa metálica recibe calor por una cara y frío por la otra. La temperatura en cada punto de la placa produce un campo escalar $T(x, y, z)$ de temperatura. El flujo real del calor se puede representar con flechas indicando la dirección y magnitud del flujo de calor. La energía o campo vectorial del flujo de calor está dado por

$$\vec{J} = -\kappa \nabla T,$$

donde $\kappa > 0$ es la constante de conductividad del calor. El calor fluye de zonas calientes a zonas frías, pues $-\nabla T$ apunta en la dirección hacia donde la temperatura T decrece.

EJEMPLO 4.5.1 El movimiento giratorio se describe mediante el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y) = -y \hat{i} + x \hat{j}. \quad \square$$

EJEMPLO 4.5.2 El movimiento circular del agua tal como ocurre cuando se quita un tapón de un recipiente se describe aproximadamente por el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \hat{i} - \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{j}. \quad \square$$

¿Cómo podemos calcular el flujo de un campo vectorial \vec{F} sobre una superficie?

Consideremos un fluido sometido a un campo de velocidades y sea S una superficie inmersa en el flujo, con parametrización $\vec{\Phi}$. La cantidad $\vec{F}(\vec{\Phi}) \cdot \hat{n}(\vec{\Phi})$ representa la velocidad perpendicular a la superficie S en el punto $\vec{\Phi}$. Así, en un pequeño lapso de tiempo Δt el volumen de líquido que atraviesa un elemento ij de superficie $\Delta A_{ij} = \Delta u_i \Delta v_j$ es:

$$\Delta V_{ij} \sim \vec{F}(\vec{\Phi}) \Delta t \Delta A_{ij}.$$

Como

$$\Delta A_{ij} \sim \| \vec{\Phi}_u(u_i, v_j) \times \vec{\Phi}_v(u_i, v_j) \| \Delta u_i \Delta v_j$$

obtenemos

$$\frac{\Delta V_{ij}}{\Delta t} \sim \vec{F}(\vec{\Phi}(\bar{u}_i, \bar{v}_j)) \cdot \hat{n}(\vec{\Phi}(\bar{u}_i, \bar{v}_j)) \| \vec{\Phi}_u(u_i, v_j) \times \vec{\Phi}_v(u_i, v_j) \| \Delta u_i \Delta v_j$$

Entonces la variación del volumen total en S será aproximadamente la suma de todas las contribuciones, a saber

$$\frac{\Delta V_{\text{total}}}{\Delta t} \sim \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \vec{F}(\vec{\Phi}(\bar{u}_i, \bar{v}_j)) \cdot \hat{n}(\vec{\Phi}(\bar{u}_i, \bar{v}_j)) \| \vec{\Phi}_u(u_i, v_j) \times \vec{\Phi}_v(u_i, v_j) \| \Delta u_i \Delta v_j.$$

De aquí, pasando al límite, obtenemos que el flujo instantáneo (volumen por unidad de tiempo) que atraviesa la superficie S en el sentido del campo de los vectores normales determinado por la parametrización $\vec{\Phi}$ es

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$

DEFINICIÓN 4.5.1 Sea Ω un abierto en \mathbb{R}^3 , sea $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial que representa un campo de velocidades, y sea $S \subset \Omega$ una superficie regular y orientable según el campo de vectores normales $\vec{n} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$. Llamamos *flujo de \vec{F} a través de la superficie S* al valor de la siguiente integral:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS.$$

EJEMPLO 4.5.3 Calcula el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = x^2 \hat{i} + yx \hat{j} + zx \hat{k}$ a través de la superficie triangular de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 3)$ orientada según \hat{n} con componente z positiva.

Solución. La ecuación del plano se obtiene de la siguiente forma. Consideramos los puntos dos a dos en los planos $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$, y obtenemos las respectivas rectas contenidas en ellos

$$3y + 2z = 6, \quad 3x + z = 3 \quad \text{y} \quad 2x + y = 2.$$

Multiplicando cada ecuación previa por convenientes escalares, obtenemos:

$$3y + 2z = 6, \quad 6x + 2z = 6 \quad \text{y} \quad 6x + 3y = 6,$$

de donde obtenemos la ecuación del plano que contiene a la superficie triangular, a saber

$$6x + 3y + 2z = 6.$$

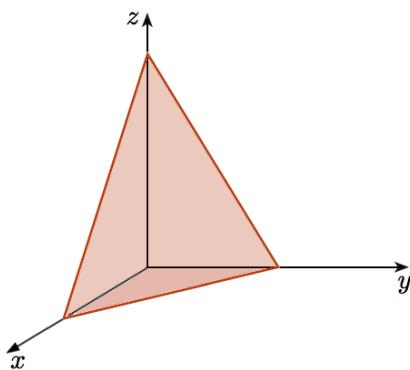


Figura 4.17. Superficie del plano $6x + 3y + 2z = 6$ ubicada en el primer octante.

Notemos que proyectando al plano $z = 0$ (plano xy), vemos que la región de integración está dada por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 : 0 \leq y \leq 2 - 2x\}.$$

Así, a partir de la ecuación del plano, podemos considerar la siguiente parametrización

$$\begin{aligned}\vec{\Phi} : D &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\rightarrow \vec{\Phi}(x, y) = (x, y, f(x, y)) = \left(x, y, 3 - \frac{3y}{2} - 3x\right).\end{aligned}$$

Tenemos,

$$\begin{aligned}\vec{n}(x, y) &= \vec{\Phi}_x(x, y) \times \vec{\Phi}_y(x, y) \\ &= \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), 1\right) \\ &= \left(3, \frac{3}{2}, 1\right),\end{aligned}$$

con componente $z > 0$, de donde

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS &= \iint_D \vec{F}(\vec{\Phi}(x, y)) \cdot \vec{n}(x, y) \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} \left(x^2, yx, \left(3 - \frac{3y}{2} - 3x\right)x\right) \cdot \left(3, \frac{3}{2}, 1\right) \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} \left(3x^2 + \frac{3}{2}xy + 3x - \frac{3}{2}xy - 3x^2\right) \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 3xy \Big|_{y=0}^{y=2-2x} \, dx \\ &= \int_0^1 3x(2 - 2x) \, dx \\ &= (3x^2 - 2x^3) \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &= 1. \quad \square\end{aligned}$$

EJEMPLO 4.5.4 Determina el flujo de $\vec{F}(x, y, z) = yz \hat{j} + z^2 \hat{k}$ a través de la superficie S del cilindro $y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, entre los planos $x = 0$ y $x = 1$.

Solución. Notemos que la proyección de la superficie del cilindro $y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, entre los planos $x = 0$ y $x = 1$, está dada por la región rectangular

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 : -1 \leq y \leq 1\}.$$

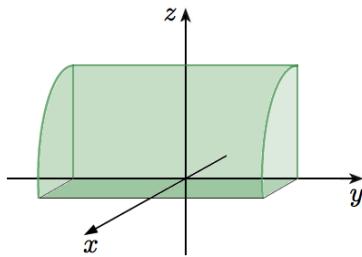


Figura 4.18. Superficie del cilindro $y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, entre los planos $x = 0$ y $x = 1$

Luego, podemos considerar la siguiente parametrización de la superficie S ,

$$\begin{aligned}\vec{\Phi} : D &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\rightarrow \vec{\Phi}(x, y) = (x, y, f(x, y)) = \left(x, y, \sqrt{1 - y^2} \right).\end{aligned}$$

Es fácil chequear que

$$\begin{aligned}\vec{n}(x, y) &= \vec{\Phi}_x(x, y) \times \vec{\Phi}_y(x, y) \\ &= \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), 1 \right) \\ &= \left(0, \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}, 1 \right)\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS &= \iint_D \vec{F}(\vec{\Phi}(x, y)) \cdot \vec{n}(x, y) dy dx \\ &= \int_0^1 \int_{-1}^1 (0, y\sqrt{1 - y^2}, 1 - y^2) \cdot \left(0, \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}, 1 \right) dy dx \\ &= \int_{-1}^1 \int_1^1 (y^2 + 1 - y^2) dx dy \\ &= \int_{-1}^1 \int_0^1 dx dy \\ &= 2. \quad \square\end{aligned}$$

EJERCICIOS 4.5.1

- Calcula $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ si $\vec{F}(x, y, z) = x\hat{i} + y^2\hat{j} + z\hat{k}$, y S es el triángulo determinado por el plano $x + y + z = 1$ y los planos coordenados, sabiendo que el vector normal \vec{n} posee componente z positiva.
- Calcula $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ si $\vec{F}(x, y, z) = x\hat{i} + y^2\hat{j} + z\hat{k}$, y S es la superficie seccionalmente suave conformada por $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2 \geq 0\}$; $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 : -1 \leq z \leq 0\}$, y $S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 : z = -1\}$, con el vector normal apuntando hacia afuera.

3. Calcula $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ donde $\vec{F}(x, y, z) = xy\hat{i} - x^2\hat{j} + (x + z)\hat{k}$ y S es la porción del plano $2x + 2y + z = 6$ que se encuentra en el primer octante, y \vec{n} apuntando hacia arriba.
4. Calcula el flujo del campo eléctrico $\vec{E}(\rho, \theta, \phi) = \frac{q\hat{\rho}}{4\pi\epsilon_0\rho^2}$, donde ϵ_0 es la constante dieléctrica, debido a una carga constante $q \in \mathbb{R}$ puesta en
 - a) la superficie de la esfera de centro en el origen y radio R , orientada según el vector normal exterior
 - b) la superficie del plano $z = h$ orientado según la normal superior \hat{k} .
5. Calcula el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = -\hat{k}$ a través de la superficie del cono $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$, orientada según el vector normal exterior.

Para ver las Soluciones de los Ejercicios 4.5.1 presiona aquí A

4.6. Teorema de Stokes

El Teorema de Stokes nos dará una relación muy importante entre una integral de trabajo y una integral de flujo, donde el flujo está descrito por un rotacional.

TEOREMA 4.6.1 (Teorema de Stokes) Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie seccionalmente regular, luego S es orientable en cada sección cuya frontera es una curva simple cerrada y regular, orientada de acuerdo a la orientación de ∂S (es decir, se satisface la regla de la mano derecha respecto a \vec{n}). Sea $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 sobre Ω , con $(S \cup \partial S) \subset \Omega$. Entonces,

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

NOTACIÓN 4.6.1 Conviene tener en cuenta la notación

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F}.$$

Por esta razón, podemos escribir

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \hat{n} dS \\ &= \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} dS. \end{aligned}$$

Además, en varios textos se usa escribir en **negrita** una expresión cuando ésta es vectorial. Así, es usual ver en algunos textos la siguiente notación:

- $\vec{F} = \mathbf{F}$
- $d\vec{S} = d\mathbf{S}$
- $d\vec{r} = dr$ (o bien $d\vec{s} = ds$)
- $\vec{n} = \mathbf{n}$ (aunque en algunos textos este se interpreta como el vector normal unitario).

De esta forma, en el texto de Thomas Jr., el Teorema 4.6.1 de Stokes se expresa con la siguiente notación

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

aquí \mathbf{n} es normal unitario, $d\sigma = dS$ y $C = \partial S$ es recorrida en sentido antihorario.

En muchas ocasiones, si el contexto no es ambiguo, también se suele suprimir un símbolo integral en la integral de superficie, como en el libro de Marsden y Tromba, donde el Teorema 4.6.1 de Stokes se escribe con la notación

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

EJEMPLO 4.6.1 Sean $\vec{E} : [0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(t, x, y, z) \mapsto \vec{E}(t, x, y, z)$ y $\vec{H} : [0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(t, x, y, z) \mapsto \vec{H}(t, x, y, z)$, con \vec{H} de clase C^1 , representando respectivamente un campo magnético y un campo eléctrico en el tiempo t , sobre una superficie S contenida en \mathbb{R}^3 , entonces, de acuerdo a la teoría de electromagnetismo

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

donde $\nabla \times \vec{E}$ se calcula manteniendo t fijo; y $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ se calcula manteniendo x , y y z constantes. De esta forma, si S es una superficie que verifica las hipótesis del Teorema 4.6.1 de Stokes, se obtiene la *Ley de Faraday*

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{r} &= \iint_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} \\ &= - \iint_S \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{H} \cdot d\vec{S}. \end{aligned}$$

Aquí $\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{r}$ representa el *voltaje* alrededor de ∂S y $\iint_S \vec{H} \cdot d\vec{S}$ el *flujo de \vec{H}* o *flujo magnético*. Si ∂S fuese un alambre, una corriente fluiría en proporción a este voltaje. En otras palabras, la Ley de Faraday dice que el voltaje inducido en un circuito cerrado es igual al negativo de la tasa de cambio de flujo magnético a través de una superficie con el circuito como borde. \square

EJEMPLO 4.6.2 Usando el Teorema 4.6.1 de Stokes, evalúa $\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} dS$, donde $\vec{F}(x, y, z) = ((1-z)y, ze^x, x \operatorname{sen} z)$, S es el hemisferio $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, y \hat{n} tiene positiva la componente z .

Solución. Claramente se satisfacen las condiciones para aplicar el Teorema 4.6.1 de Stokes.

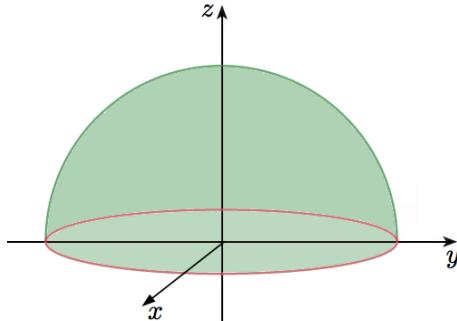


Figura 4.19. Superficie del hemisferio $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, y \hat{n} tiene positiva la componente z .

Luego, notando que $\partial S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = a^2 : z = 0\}$, podemos escoger la parametrización que recorre ∂S en sentido antihorario,

$$\begin{aligned}\vec{r}: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow \vec{r}(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t, 0).\end{aligned}$$

Tenemos,

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (a \operatorname{sen} t, 0, 0) \quad \text{y} \quad \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = (-a \operatorname{sen} t, a \cos t, 0).$$

De esta forma,

$$\begin{aligned}\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} dS &= \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (a \operatorname{sen} t, 0, 0) \cdot (-a \operatorname{sen} t, a \cos t, 0) dt \\ &= - \int_0^{2\pi} a^2 \operatorname{sen}^2 t dt \\ &= -a^2 \left(-\frac{1}{2} \operatorname{sen} t \cos t + \frac{1}{2} t \right) \Big|_{t=0}^{t=2\pi} \\ &= -a^2 \pi. \quad \square\end{aligned}$$

EJEMPLO 4.6.3 Sea S el semielipsoide $\frac{z}{2} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$, orientado de modo que la normal \vec{n} apunta hacia arriba, y sea $\vec{F}(x, y, z) = x^2 \hat{i} + y^2 \hat{j} + z^2 \tan(xy) \hat{k}$. Calcula $\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$.

Solución. Claramente se satisfacen las condiciones para aplicar el Teorema 4.6.1 de Stokes.

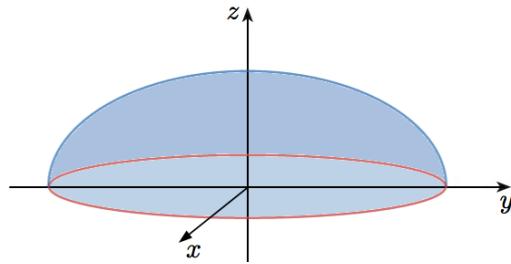


Figura 4.20. Superficie del semielipsoide $\frac{z}{2} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$, orientado de modo que la normal \vec{n} apunta hacia arriba.

Luego, notando que $\partial S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 : z = 0\}$, podemos escoger la parametrización que recorre ∂S en sentido antihorario,

$$\begin{aligned}\vec{r} : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \vec{r}(t) = (a \cos t, b \sin t, 0).\end{aligned}$$

Tenemos,

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (a^2 \cos^2 t, b^2 \sin^2 t, 0) \quad y \quad \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = (-a \sin t, b \cos t, 0).$$

De esta forma,

$$\begin{aligned}\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} &= \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 t, b^2 \sin^2 t, 0) \cdot (-a \sin t, b \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-a^3 \cos^2 t \sin t + b^3 \sin^2 t \cos t) dt \\ &= \frac{1}{3} (a^3 \cos^3 t + b^3 \sin^3 t) \Big|_{t=0}^{t=2\pi} \\ &= 0. \quad \square\end{aligned}$$

EJEMPLO 4.6.4 Calcula el trabajo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (2y, -x, z)$ sobre la curva $\gamma : x^2 + y^2 = a^2, z = 0$, recorrida en sentido antihorario.

Solución. Podemos proceder de dos formas diferentes.

Primera forma. Escogemos $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq a^2 : z = 0\}$ de manera que $\partial S = \gamma$, entonces podemos considerar la parametrización que recorre ∂S en sentido antihorario,

$$\begin{aligned}\vec{r} : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow \vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, 0).\end{aligned}$$

Tenemos,

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (2a \sin t, -a \cos t, 0) \quad \text{y} \quad \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = (-a \sin t, a \cos t, 0).$$

De esta forma,

$$\begin{aligned}\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (2a \sin t, -a \cos t, 0) \cdot (-a \sin t, a \cos t, 0) dt \\ &= -a^2 \int_0^{2\pi} (1 + \sin^2 t) dt \\ &= -2a^2 \pi - a^2 \left(-\frac{1}{2} \sin t \cos t + \frac{1}{2} t \right) \Big|_{t=0}^{t=2\pi} \\ &= -3a^2 \pi.\end{aligned}$$

Segunda forma. Consideremos S y ∂S como en la forma anterior, y notemos que se verifican las condiciones para aplicar el Teorema 4.6.1 de Stokes. Consideremos también la parametrización de S dada por

$$\begin{aligned}\vec{\Phi} : D &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\rightarrow \vec{\Phi}(x, y) = (x, y, f(x, y)) = (x, y, 0).\end{aligned}$$

donde $D = \overline{B((0, 0), a)}$. Luego,

$$\operatorname{rot} \vec{F}(\vec{\Phi}(x, y)) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y & -x & 0 \end{vmatrix} = 0\hat{i} + 0\hat{j} - 3\hat{k}$$

y

$$\vec{n}(x, y) = \vec{\Phi}_x(x, y) \times \vec{\Phi}_y(x, y) = (0, 0, 1).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_D \operatorname{rot} \vec{F}(\vec{\Phi}(x, y)) \cdot \vec{n}(x, y) dA \\ &= \iint_D (0, 0, -3) \cdot (0, 0, 1) dA \\ &= -3 \iint_D dA \\ &= -3a^2 \pi. \quad \square\end{aligned}$$

EJERCICIOS 4.6.1

- Verifica el Teorema 4.6.1 de Stokes para $\vec{F}(x, y, z) = y^2 \hat{i} + xy \hat{j} + xz \hat{k}$ y la superficie S correspondiente al paraboloide $z = a - x^2 - y^2$, $z \geq 0$.
- Calcula $\iint_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot \hat{n} dS$, donde $\vec{v}(x, y, z) = (1 + y - 2x^2) \hat{i} + 2x \hat{j} - (5z^3 + yz) \hat{k}$ y S es la superficie correspondiente a la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \leq 0$, con \hat{n} teniendo componente z negativa.
- Verifica el Teorema 4.6.1 de Stokes para $\vec{v}(x, y, z) = y \hat{i} + z \hat{j} + x \hat{k}$ y la superficie S correspondiente a la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ ubicada entre los planos $z = 0$ y $z = x + 2$, con \hat{n} apuntando hacia afuera.
- Verifica el Teorema 4.6.1 de Stokes para $\vec{F}(x, y, z) = (2x - y) \hat{i} - yz^2 \hat{j} - y^2 z \hat{k}$ y la superficie S correspondiente al cono $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ sobre el plano xy .
- Sea γ una curva simple, cerrada y seccionalmente regular y suave que es frontera de una superficie seccionalmente simple, regular y suave S . Prueba que si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 en \mathbb{R}^3 y $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^2 en \mathbb{R}^3 , entonces

$$\oint_{\gamma} f \nabla g \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot d\vec{S}$$

con γ y S orientadas apropiadamente.

- Considera la curva simple, seccionalmente regular y suave $\gamma = \cup_{i=1}^4 \gamma_i$, donde γ_1 es el segmento de recta que une los puntos $(1, 0, 2)$ y $(1, 0, 0)$, $\gamma_2 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 : y \geq 0\}$, γ_3 es el segmento de recta que une los puntos $(-1, 0, 0)$ y $(-1, 0, 2)$ y $\gamma_4 = \{(x, y, 2) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 : y \geq 0\}$. Calcula $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde \vec{F} es el campo en coordenadas cilíndricas dado por

$$\vec{F}(r, \theta, z) = r^4 \sin \theta \hat{r} + r^4 \cos \theta \hat{\theta} + r \theta z \hat{z}.$$

- Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ la cinta de Möbius parametrizada por la función $\vec{\Phi} : [0, 2\pi] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\vec{\Phi}(x, y) = 2(\cos x, \sin x, 0) + y(\cos(\frac{x}{2}) \cos x, \cos(\frac{x}{2}) \sin x, \sin(\frac{x}{2}))$, y sea $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ el campo vectorial definido por

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right).$$

Muestra que

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} \neq \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

¿Contradice esto el Teorema 4.6.1 de Stokes? Justifica apropiadamente su respuesta.

Para ver las Soluciones de los Ejercicios 4.6.1 presiona aquí A

4.7. El Teorema de Gauss

4.7.1. La divergencia y sus propiedades

DEFINICIÓN 4.7.1 Sea Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^N y sea $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ un campo vectorial en Ω .

- Si $\vec{F} = (F_1, F_2, \dots, F_N)$ y para $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \Omega$ existen $\frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\vec{x})$ para cada $i = 1, 2, \dots, N$, entonces llamamos *divergencia* de \vec{F} en \vec{x} al valor

$$\operatorname{div} \vec{F}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\vec{x}).$$

- Si para cada $\vec{x} \in \Omega$ existe $\operatorname{div} \vec{F}(\vec{x})$, entonces llamamos *divergencia* de \vec{F} en Ω al campo escalar $\operatorname{div} \vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ definido por

$$\vec{x} \mapsto \operatorname{div} \vec{F}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\vec{x}).$$

DEFINICIÓN 4.7.2 Sea Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^N , sea

$$\mathfrak{G} = \{\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N : \vec{F} \text{ es un campo vectorial en } \Omega : \exists \operatorname{div} \vec{F} \text{ en } \Omega\}$$

y sea

$$\mathfrak{F} = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N : f \text{ es un campo escalar en } \Omega\}.$$

Se define el *operador divergencia* en \mathfrak{G} , como el operador diferencial $\operatorname{div} : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{F}$ definido por

$$\vec{F} \mapsto \operatorname{div} \vec{F} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial x_i}.$$

NOTACIÓN 4.7.1 Sea Ω un abierto en \mathbb{R}^3 y sea $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial tal que $\vec{F} = (P, Q, R)$ y existen $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}$ y $\frac{\partial R}{\partial z}$ en Ω . Entonces, podemos poner

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{F} &= \nabla \cdot \vec{F} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P, Q, R) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \end{aligned}$$

y la divergencia de \vec{F} en $(x, y, z) \in \Omega$, como

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) &= \nabla \cdot \vec{F}(x, y, z) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z). \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 4.7.3 Sea Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^3 y sea $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial en Ω tal que existe $\operatorname{div} \vec{F}$. Si

$$\operatorname{div} \vec{F} = 0 \quad \text{en } \Omega,$$

entonces decimos que \vec{F} es *solenoidal* sobre Ω .

TEOREMA 4.7.1 (Propiedades de la divergencia de un campo escalar) Sea Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^N , sean $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $\vec{G} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dos campos vectoriales que admiten divergencia en Ω , sean α y β dos números reales y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo escalar que admite gradiente en Ω . Entonces se verifica que,

- i) $\operatorname{div}(\alpha \vec{F} + \beta \vec{G}) = \alpha \operatorname{div} \vec{F} + \beta \operatorname{div} \vec{G}$
- ii) $\operatorname{div}(f \vec{F}) = (\nabla f) \cdot \vec{F} + f \operatorname{div} \vec{G}$
- iii) Si \vec{F} admite rotacional en Ω , entonces $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0$.

4.7.2. El Teorema de Gauss

El Teorema de Gauss (también conocido como Teorema de Gauss-Ostrogradski o Teorema de la divergencia) dará una relación muy importante entre una integral de flujo y una integral de volumen.

TEOREMA 4.7.2 (Teorema de Gauss) Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^3 cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie seccionalmente simple, regular y suave, orientada según el vector normal exterior a Ω y sea $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vectorial tal que $F_i \in C^1(\bar{\Omega})$, para $i = 1, 2, 3$. Entonces,

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} \, dV = \iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Una consecuencia del Teorema de Gauss es la siguiente

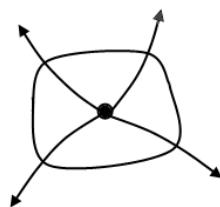
COROLARIO 4.7.1 Sea \vec{F} un campo vectorial de clase C^1 en una vecindad de $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Sea Ω_r un abierto de frontera orientable tal que $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega_r$ y $\operatorname{diam}(\Omega_r) \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} 0$. Entonces,

$$\nabla \cdot \vec{F}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{Vol}(\Omega_r)} \iint_{\partial\Omega_r} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

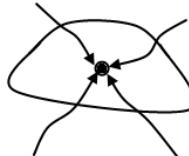
OBSERVACIÓN 4.7.1 El Corolario anterior nos permite interpretar la divergencia de un campo vectorial \vec{F} como la medida de la expansión de un fluido por unidad de volumen; así que

- i) $\nabla \cdot \vec{F}(x_0, y_0, z_0) > 0$, indica que el flujo se expande en el punto (es decir, que el número de líneas de fuerza que abandona la superficie es superior al número de líneas de fuerza que ingresan a ella). En este caso el punto actúa como un manantial.

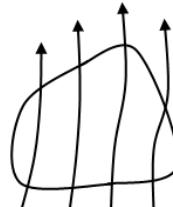
- ii) $\nabla \cdot \vec{F}(x_0, y_0, z_0) < 0$, indica que el flujo se contrae en el punto (es decir, que el número de líneas de fuerza que abandona la superficie es inferior al número de líneas de fuerza que ingresan a ella). En este caso el punto actúa como un sumidero.
- iii) $\nabla \cdot \vec{F}(x_0, y_0, z_0) = 0$, indica que el flujo no es afectado en el punto (es decir, que el número de líneas de fuerza que entra a la superficie es igual al número de líneas de fuerza que salen de ella). En este caso el punto no afecta el tránsito del flujo.



Flujo de salida positivo.
El punto actúa como manantial



Flujo de salida negativo.
El punto actúa como sumidero



Flujo de salida nulo.
El punto no afecta el tránsito del flujo

Figura 4.21. Flujo de salida en un punto de la superficie

EJEMPLO 4.7.1 Sea $\Omega = B(\vec{0}, R) \in \mathbb{R}^3$ y sea $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calcula $\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S}$.

Solución. Notemos que

$$\nabla \cdot \vec{F}(x, y, z) = 1 + 1 + 1 = 3 \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Luego, desde el Teorema 4.7.2 de Gauss obtenemos que

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} dV \\ &= \iiint_{\Omega} 3 dV \\ &= 3 \operatorname{Vol}(\Omega) \\ &= 3 \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) \\ &= 4 \pi R^3. \quad \square \end{aligned}$$

EJEMPLO 4.7.2 Sea Ω el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$, y sea $\vec{F}(x, y, z) = (x + 4 \cos z e^y, 2y + 2e^{-x}, 6z + 2 \operatorname{sen}(x^2 + y^2))$. Calcula $\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S}$.

Solución. Notemos que

$$\nabla \cdot \vec{F}(x, y, z) = 1 + 2 + 6 = 9 \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Luego, desde el Teorema 4.7.2 de Gauss obtenemos que

$$\begin{aligned}\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} dV \\ &= \iiint_{\Omega} 9 dV \\ &= 9 \operatorname{Vol}(\Omega) \\ &= 9 \left(\frac{4}{3} \pi abc \right) \\ &= 12 \pi abc. \quad \square\end{aligned}$$

EJEMPLO 4.7.3 Con ayuda del Teorema 4.7.2 de la divergencia, evalúa la integral $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (x, 3xy, -2z)$ y $S = S_1 \cup S_2$, con $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2x, 0 \leq z \leq 1\}$ y $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2x, z = 0\}$.

Solución. Si a la superficie S le agregamos la superficie

$$S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2x, z = 1\},$$

entonces obtenemos el cilindro cerrado

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2x \wedge 0 \leq z \leq 1\}.$$

Luego, sobre la región cilíndrica Ω correspondiente a la unión entre la región encerrada por el cilindro unida a su superficie $\partial\Omega = S \cup S_3$, podemos aplicar el Teorema 4.7.2 de Gauss.

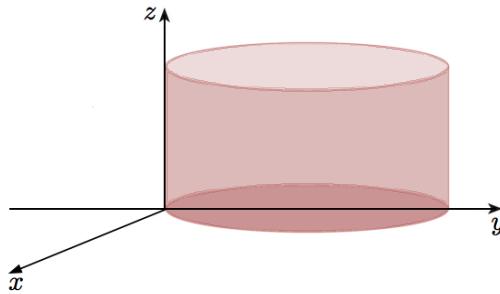


Figura 4.22. Cilindro $x^2 + y^2 \leq 2x$, con $0 \leq z \leq 1$.

Para ello, notemos que

$$\nabla \cdot \vec{F} = 1 + 3x - 2 = 3x - 1,$$

y por tratarse de un cilindro, podemos usar coordenadas cilíndricas.

Se sigue que

$$\begin{aligned}
 \iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS &= \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} \, dV \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{2\cos\theta} (3r \cos\theta - 1) r \, dr \, dz \, d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} (3r^2 \cos\theta - r) \, dr \, d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(r^3 \cos\theta - \frac{r^2}{2} \right) \Big|_{r=0}^{r=2\cos\theta} \, d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (8\cos^4\theta - 2\cos^2\theta) \, d\theta \\
 &= \frac{1}{4} (8\theta + 6\sin(2\theta) + \sin(4\theta)) \Big|_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \\
 &= 2\pi.
 \end{aligned}$$

Por otro lado, la tapa superior S_3 del cilindro puede parametrizarse mediante

$$\begin{aligned}
 \vec{\Phi} : D &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\
 (r, \theta) &\rightarrow \vec{\Phi}(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta, 1),
 \end{aligned}$$

donde $D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < r \leq 2\cos\theta \wedge -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$. Luego,

$$\begin{aligned}
 \vec{n}(r, \theta) &= \vec{\Phi}_r(r, \theta) \times \vec{\Phi}_\theta(r, \theta) \\
 &= (\cos\theta, \sin\theta, 0) \times (-r \sin\theta, r \cos\theta, 0) \\
 &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r \sin\theta & r \cos\theta & 0 \end{vmatrix} \\
 &= (0, 0, r).
 \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}
 \iint_{S_3} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS &= \iint_D \vec{F}(\vec{\Phi}(r, \theta)) \cdot \vec{n}(r, \theta) \, dr \, d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} (r \cos\theta, 3r^2 \cos\theta \sin\theta, -2) \cdot (0, 0, r) \, dr \, d\theta \\
 &= - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \Big|_{r=0}^{r=2\cos\theta} \, d\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^2 \theta \, d\theta \\
&= -(2\theta + \operatorname{sen}(2\theta)) \Big|_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \\
&= -2\pi,
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS &= \iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS - \iint_{S_3} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS \\
&= 2\pi - (-2\pi) \\
&= 4\pi. \quad \square
\end{aligned}$$

EJEMPLO 4.7.4 Usa el Teorema 4.7.2 de la divergencia para evaluar

$$\iint_{\partial\Omega} (x^2 + y + z) \, dS$$

donde Ω es la bola unitaria centrada en el origen.

Solución. El Teorema 4.7.2 de la divergencia dice que

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dV.$$

Por otro lado, notemos que $\partial\Omega$ corresponde a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, así que cualquier vector normal exterior a $\partial\Omega$ es unitario. De esta forma, debemos determinar $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ que verifique

$$\begin{aligned}
\vec{F} \cdot \hat{n} &= (F_1, F_2, F_3) \cdot (x, y, z) \\
&= x F_1 + y F_2 + z F_3 \\
&= x^2 + y + z \quad \forall (x, y, z) \in \partial\Omega,
\end{aligned}$$

de donde deducimos que $F_1 = x$ y $F_2 = F_3 = 1$. Por lo tanto,

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = 1$$

y así

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS &= \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} \, dV \\
&= \iiint_{\Omega} dV \\
&= \operatorname{Vol}(\Omega) \\
&= \frac{4}{3}\pi. \quad \square
\end{aligned}$$

EJERCICIOS 4.7.1

1. Evalúa la integral de superficie del campo vectorial dado a través de la superficie dada:
 - a) $\vec{F}(x, y, z) = x^2 \hat{i} + xy \hat{j} + xz \hat{k}$ a través de la superficie total S del cilindro acotado por $x^2 + y^2 = a^2, z = 0, z = b$
 - b) $\vec{F}(x, y, z) = 4xz \hat{i} - 2y^2 \hat{j} + z^2 \hat{k}$ a través de la superficie total S del cilindro acotado por $x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = 3$
 - c) $\vec{F}(x, y, z) = (\operatorname{sen} y, e^x, z^2)$ a través de la superficie total S de la semibola acotada por $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ y el plano $z = 0$.
2. Verifica el Teorema 4.7.2 de Gauss para el campo vectorial dado a través de la superficie dada:
 - a) $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ a través de la superficie S del sólido limitado por $y^2 = 2 - x, z = 0, z = x$
 - b) $\vec{F}(x, y, z) = (z, y, -x)$ a través de la superficie $S = S_1 \cup S_2$ donde $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2y \wedge y \leq 1\}$ y $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge 1 \leq y \leq 3 - z\}$
 - c) $\vec{F}(x, y, z) = (y, -x, z^2)$ a través de la superficie S del sólido limitado por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 2 - y$.
3. Calcula el flujo saliente del campo $\vec{F}(x, y, z) = (x^3 + 2yz) \hat{i} + (y^3 - 2xz) \hat{j} + (x^2 + y^2) \hat{k}$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, a través de la mitad superior del elipsoide de ecuación $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$ ($z \geq 0$).
4. Calcula el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = x^2 \hat{i} + y^2 \hat{j} + z^2 \hat{k}$ a través del octante positivo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$).
5. Sea $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ la curva definida en coordenadas cilíndricas por $r = \cos \phi, \theta = \theta_0$ fijo, y $z = \operatorname{sen}(2\phi)$, donde $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$. Considera la superficie S obtenida al rotar γ alrededor del eje z y encuentre una parametrización regular para la superficie S en función de (θ, ϕ) . Luego, use el Teorema de la divergencia para calcular el volumen del sólido limitado por S .
Sugerencia: Considera el campo $\vec{F} = z \hat{k}$.

Para ver las Soluciones de los Ejercicios 4.7.1 presiona aquí **A**

Apéndice A

Soluciones de los Ejercicios

Para volver a los ejercicios del capítulo y sección respectiva, presiona sobre el trío de números en **rojo** correspondiente.

Soluciones de los Ejercicios 1.1.1

a) $\frac{1}{2} (e^2 - 3)$

b) $\frac{13}{15}$

c) 1.

Soluciones de los Ejercicios 1.1.2

1. a) $F'(x) = \frac{4\pi^2 \cos(2\pi x)}{x} - \frac{2(\cos(2\pi x) + 2\pi x \sin(2\pi x) - 1)}{x^3}$

b) $F'(x) = 1 - \frac{\sin x}{x} + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \ln(1 + x^2) + \left(\frac{1}{x^2} - \cos x\right) \ln(1 + x \sin x)$

2. -.

Soluciones de los Ejercicios 1.2.1

1. -

2. -.

Soluciones de los Ejercicios 2.1.1

1. No

2. Sí.

Soluciones de los Ejercicios 2.2.1

1. $\int_0^1 \int_{e^y}^e f(x, y) dx dy$

2. a) $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x, y) dy dx + \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx$

b) $\int_{-1}^{-\frac{\sqrt{-1+\sqrt{5}}}{2}} \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy dx + \int_{-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}}^{\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy dx + \int_{\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}}^1 \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy dx$

c) $\int_{-2}^0 \int_{-x}^{-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}} f(x, y) dy dx + \int_0^2 \int_{\frac{1}{2}x}^{-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}} f(x, y) dy dx$

3. $\frac{8}{3}$

4. $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(\left(6 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} \right) - (x^2 + y^2) \right) dy dx$

5. 0. \square

Soluciones de los Ejercicios 2.2.2

1. $\frac{729}{2}$

2. $\frac{1}{16}\pi abc^2$

3. $\frac{\pi}{32}$. \square

Soluciones de los Ejercicios 2.3.1

1. 2

2. $\frac{3\pi a^{\frac{10}{3}}}{80}$

3. $\frac{e^2 - 1}{e}$

4. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

5. a) $\frac{3}{2} \left(\frac{y}{x} \right)^{\frac{3}{2}}$

b) $\frac{A(D')}{A(D)} = \frac{6}{5h^2} \left((b+h)^{\frac{5}{2}} - b^{\frac{5}{2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a+h}} \right)$

c) $\frac{A(D')}{A(D)} = \frac{3}{2} \frac{b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}} \quad \square$

Soluciones de los Ejercicios 2.3.2

1. 2
2. $\frac{\pi}{4}(1 - e^{-a^2})$
3. π
4. $\frac{\pi}{12}$. \square

Soluciones de los Ejercicios 2.3.3

1. 0
2. $\frac{32\pi}{3}$
3. $\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right)$
4. $\frac{\pi}{3}$. \square

Soluciones de los Ejercicios 2.3.4

1. $\frac{4}{3}\pi(e - 1)$
2. $\frac{4\pi a^3}{3}$.
3. $\frac{4\pi}{5}$
4. $\frac{1}{48}$. \square

Soluciones de los Ejercicios 2.4.1

1. Converge si $p > 2$
2. $I_{\frac{1}{2}} = 2\pi \operatorname{arcsenh}(1)$, $I_1 = \pi^2$. Converge si $q < \frac{3}{2}$. \square

Soluciones de los Ejercicios 3.2.1

1. Usa apropiadas coordenadas polares generalizadas
2. Desde la ecuación del plano: $z = x + y$, reemplaza ahora en la ecuación de la esfera y complete cuadrados de binomio. Usa coordenadas polares
3. Comienza parametrizando el cilindro, y luego usa esta parametrización para determinar z , en términos de este parámetro, en la ecuación de la esfera.
4. – \square

Soluciones de los Ejercicios 3.2.2

1. a) $\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt$

b) $\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

c) $\ell(\gamma) = 13\sqrt{13} - 16\sqrt{2}$

2. a) $\ell(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$

b) $\ell(\gamma) = 24$

3. $\ell(\gamma) = \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$

4. a) $\ell(\gamma) = 5$

b) $\ell(\gamma) = \sqrt{3}$

c) $\ell(\gamma) = \frac{3}{4\sqrt{2}} \left(\sqrt[3]{\frac{3c^4}{\lambda}} + 2\sqrt[3]{\frac{\lambda c^2}{3}} \right)$

5. $\ell(\gamma) = 1.$ \square

Soluciones de los Ejercicios 3.3.1

$$\begin{aligned} 1. \quad a) \quad & \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t) = \vec{v}(t) \times \left(v'(t) \hat{T}(t) + v(t) \frac{d\hat{T}}{dt}(t) \right) \\ &= v(t) \hat{T}(t) \times \left(v'(t) \hat{T}(t) + v(t) \frac{d\hat{T}}{dt}(t) \right) \\ &= v(t) \hat{T}(t) \times v'(t) \hat{T}(t) + v^2(t) \hat{T}(t) \times \frac{d\hat{T}}{dt}(t) \\ &= v^2(t) \left(\hat{T}(s) \times v(t) \frac{d\hat{T}}{ds}(s) \right) \\ &= v^3(t) \left(\hat{T}(s) \times \frac{d\hat{T}}{ds}(s) \right) \\ &= v^3(t) \kappa(s) \left(\hat{T}(s) \times \hat{N}(s) \right) \\ &= \left(\frac{ds}{dt}(t) \right)^3 \kappa(s) \hat{B}(s). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad & \kappa(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{d\hat{T}}{ds}(t) = 0 \Leftrightarrow \hat{T}(t) = \text{cte} \in \mathbb{R}^3 \text{ y unitario} \\ & \Leftrightarrow \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \text{cte} \in \mathbb{R}^3 \text{ y unitario} \\ & \Leftrightarrow \vec{r}(t) = (a_1 t + b_1, a_2 t + b_2, a_3 t + b_3) \wedge \| (a_1, a_2, a_3) \| = 1 \\ & \Leftrightarrow \text{la curva es una recta} \\ & x(t) = a_1 t, \quad y(t) = a_2 t + b_2, \quad z(t) = a_3 t + b_3. \end{aligned}$$

$$c) \quad \tau(t) = 0 \wedge \kappa(t) = cte \Leftrightarrow \frac{d\hat{B}}{dt}(t) = 0 \quad (\text{Frenet-Serret}) \wedge \kappa(t) = \frac{1}{v(t)} \left\| \frac{d\hat{T}}{dt}(t) \right\| = cte$$

$$\Leftrightarrow \hat{B}(t) = cte \in \mathbb{R}^3 \wedge \kappa(t) = cte \in \mathbb{R}.$$

Ahora, sea γ la circunferencia dada por $\vec{r}(\theta) = (a \cos \theta, a \sin \theta, 0)$. Entonces:

$$\vec{v}(\theta) = \frac{d\vec{r}}{dt}(\theta) = (-a \sin \theta, a \cos \theta, 0) \wedge v(\theta) = \left\| \frac{d\vec{r}}{d\theta}(\theta) \right\| = a.$$

Luego,

$$\hat{T}(\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \wedge \kappa(\theta) = \frac{1}{v(\theta)} \cdot \left\| \frac{d\hat{T}}{d\theta}(\theta) \right\| = \frac{1}{a} = cte \in \mathbb{R}.$$

Por otra parte,

$$\hat{N}(\theta) = \frac{\frac{d\hat{T}}{d\theta}(\theta)}{\left\| \frac{d\hat{T}}{d\theta}(\theta) \right\|} = (-\cos \theta, -\sin \theta, 0).$$

Luego,

$$\hat{B}(\theta) = \hat{T}(\theta) \times \hat{N}(\theta) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1) = cte \in \mathbb{R}^3,$$

y por el Teorema 3.3.5, no queda más que la curva sea una circunferencia.

- d) $\tau(t) = cte \in \mathbb{R}$ y $\kappa(t) = cte \in \mathbb{R}$ implica (por el teorema) que la curva es una hélice, pues en ese caso la torsión es constante: $\frac{2\pi h}{\sqrt{(2\pi a)^2 + h^2}}$ y la curvatura también: $\frac{(2\pi)^2 a}{(2\pi a)^2 + h^2}$.

2. $\kappa = \frac{2}{5}$, $R = \frac{5}{2}$ y $\tau = -\frac{1}{5}$.

3. $R = \sqrt{2} \csc(2t)$.

4. $12a(x - 8a) + 4b(y - 4b) + c(z - 2c) = 0$.

5. a) $\vec{v}(t) = (8t, -6t)$, $\|\vec{v}(t)\| = 10t$, $\vec{a}(t) = (8, -6)$.

b) $\kappa = 0, \tau = 0$.

c) Se trata de una recta. \square

Soluciones de los Ejercicios 3.4.1

$$1. -\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

$$2. \int_{\gamma} \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} \right) ds = 4a^{\frac{7}{3}}$$

$$3. \int_{\gamma} (x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{2}{3}\pi(3a^2 + 4\pi^2b^2)\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$4. \int_{\gamma} z ds = \frac{\lambda^2}{256\sqrt{2}} \left(100\sqrt{38} - 72 - 17 \ln \left(\frac{25+4\sqrt{38}}{17} \right) \right). \quad \square$$

Soluciones de los Ejercicios 3.5.1

$$1. M = 2b \left(b + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right) \right)$$

$$2. (\bar{x}, \bar{y}) = \frac{4}{3}a(1, 1)$$

$$3. (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4a}{3\pi}, \frac{4a}{3\pi} \right)$$

$$4. I_x = I_y = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right) \sqrt{h^2 + 4\pi^2a^2} \quad y \quad I_z = a^2 \sqrt{h^2 + 4\pi^2a^2}$$

$$5. I_0 = \frac{32}{3}a^3$$

$$6. M = \frac{5\sqrt{5} - 1}{12}. \quad \square$$

Soluciones de los Ejercicios 3.6.1

$$1. \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{25}{3}$$

$$2. \text{En ambos casos, } a) \text{ y } b), \text{ se obtiene } \int_{\gamma} xy^2 dx + x^2y dy = \frac{1}{2}$$

3. $\oint_{\gamma} \frac{1}{|x| + |y|} (dx + dy) = 0$
4. $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -4$
5. $\int_{\gamma} (x^2 + y) dx + (y^2 + z) dy + (z^2 + x) dz = -\frac{4 + \pi}{4}. \quad \square$

Soluciones de los Ejercicios 3.7.1

1. $W = -\frac{14}{15}$
2. $W = \frac{1}{35}$
3. La circulación es $2\sqrt{2} \pi a^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$
4. El flujo es $\frac{29}{60}$
5. El flujo es $-\frac{\pi a^3}{4}. \quad \square$

Soluciones de los Ejercicios 3.8.1

1. $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} x dx + y^2 dy - z^3 dz = -\frac{643}{12}$
2. $\int_{(a_1,b_1,c_1)}^{(a_2,b_2,c_2)} \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = R_2 - R_1$
3. **Sugerencia:** Procede como en Ejemplo 3.8.6
4. La función potencial es $f(x, y, z) = 4y + y^2 \operatorname{sen} x + xz^3 + 2z$ para cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
5. En ambos casos, a) y b), se obtiene $\int_{\gamma} (6x + 2y^2) dx + (4xy - z^2) dy - 2yz dz = 39$
6. –
7. –
8. –. \square

Soluciones de los Ejercicios 3.9.1

1. $W = \frac{1}{30}$
2. $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -6\pi$
3. a) $\oint_C \frac{-y dx + (x - a) dy}{(x - a)^2 + y^2} = 0$
b) $\oint_C \frac{-y dx + (x - a) dy}{(x - a)^2 + y^2} = 2\pi$

4. $A = \pi a b$
5. $A = 3a^2 \pi.$
6. $\oint_{\gamma} e^{-(x^2 - y^2)} (\cos(2xy) dx + \sin(2xy) dy) = 0$
7. a) $f(x, y) = \frac{x^4}{4} - x^2 y^3$
b) $-\frac{1}{4}$. \square

Soluciones de los Ejercicios 4.1.1

1. La frontera es la circunferencia en \mathbb{R}^3 descrita por: $x^2 + y^2 = 1 \wedge z = 1$.
2. No posee frontera.
3. Es regular en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. El plano pedido es $z = 2x - 1$.
4. $18z - 4y - x = 13$.
5. a) Helicoide de dos vueltas
b) $\vec{n} = \pm \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} (\sin \theta, \cos \theta, r)$
c) $b x - a y + (a^2 + b^2)z = (a^2 + b^2)c$
d) Considera $(a, b, c) = (r_0 \cos \theta_0, r_0 \sin \theta_0, \theta_0)$. El segmento de recta sería $\{(r \cos \theta_0, r \sin \theta_0, \theta_0) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq 1\} \in S$. Luego, representando la recta como $\{(at, bt, c) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq t \leq \frac{1}{a^2+b^2}\}$ y sustituyendo en c) se concluye que pertenece al plano tangente en (a, b, c) .
6. a) $\vec{\Phi} : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, (\theta, z) \mapsto \vec{\Phi}(25 + z^2) \cos \theta, (25 + z^2) \sin \theta, z$.
b) $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+4z^2}} (\cos \theta, \sin \theta, -2z)$
c) $a y + b y = 25$
d) **Sugerencia:** Reemplaza en la ecuación de S y en c). \square

Soluciones de los Ejercicios 4.1.2

1. $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$
2. $2\pi(2 - \sqrt{2})$
3. $\frac{h^2}{4\pi} \left(\frac{2\pi a}{h} \sqrt{1 + (\frac{2\pi a}{h})^2} + \ln \left| \frac{2\pi a}{h} + \sqrt{1 + (\frac{2\pi a}{h})^2} \right| \right)$
4. $A(R_f) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ y $A(S_f) = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$. \square

Soluciones de los Ejercicios 4.3.1

1. $\mathcal{F}(t) = \frac{\pi}{18}(3 - t^2)^2$
2. $I_1 - I_2 = (4\pi - 2\sqrt{3})a^4$

3. πa^2
4. $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{a}{2}, 0, \frac{16}{9\pi}a\right)$
5. a) $40a^4$
b) $\pi R \left(R(R+h)^2 + \frac{2}{3}h^3\right)$. \square

Soluciones de los Ejercicios 4.5.1

1. $\frac{5}{12}$
2. 3π
3. $\frac{27}{4}$
4. a) $\frac{q}{\varepsilon_0}$
b) $\frac{q}{2\varepsilon_0}$
5. π . **Sugerencia:** Realiza este ejercicio con una parametrización cartesiana (rectangular), luego con una cilíndrica, y finalmente con una esférica. Compara sus desarrollos. \square

Soluciones de los Ejercicios 4.6.1

1. 0
2. -16π
3. $-\pi$
4. 4π
5. —
6. 2π
7. —. \square

Soluciones de los Ejercicios 4.7.1

1. a) 0
b) 27π
c) $\frac{\pi a^4}{2}$
2. a) $\frac{256\sqrt{2}}{35}$
b) $\frac{8}{3}\pi$
c) $\frac{8}{3}\pi$

3. $\frac{21}{10}\pi$

4. $\frac{3\pi}{8}$

5. Considera la siguiente parametrización de S : $\vec{\Phi}(\theta, \phi) = (\cos \phi \cos \theta, \cos \phi \sin \theta, \sin(2\phi))$, con $(\theta, \phi) \in [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. El Volumen es $\frac{\pi^2}{2}$. \square

Bibliografía

- [1] T.M. Apostol, *Calculus*, Volume II, John Wiley & Sons, Second edition, 1969. Printed in the United States of America.
- [2] J. de Burgos. *Cálculo infinitesimal de varias variables*, McGraw-Hill, Primera edición, 1995. Impreso en España.
- [3] B.P. Demidovich, *5000 problemas de análisis matemático*, Ediciones Paraninfo, Madrid, 2001.
- [4] F. Galindo, J. Sanz, L. Tristán, *Guía práctica de cálculo infinitesimal en varias variables*, Ediciones Paraninfo, Madrid, 2005.
- [5] L. Leithold, *El Cálculo*, Oxford Press University, Séptima edición, 1998. Impreso en México.
- [6] I.I. Liashkó, A.K. Boiarchuk, Iá.G. Gai, G.P. Golovach, *Matemática superior, problemas resueltos*, Anti-Demidóvich, Tomo 3, Editorial URSS, Traducción de la cuarta edición rusa, Moscú, 1999.
- [7] J. Marsden, A. Tromba, *Cálculo Vectorial*, Addison-Wesley Iberoamericana, Tercera edición, 1988. Impreso en los Estados Unidos de América.
- [8] G. Thomas Jr., *Cálculo. Varias variables*, Pearson educación, Undécima edición, 2005. Impreso en México.

