INF221 – Algoritmos y Complejidad

Clase #1
Ceros de una Función

Aldo Berrios Valenzuela

Martes 2 de Agosto de 2016

Resumen

Comienza la diversión, comienza algoco `:D`

1. Algoritmos y Complejidad

- Cómo diseñar buenos algoritmos.
- Evaluar algoritmos.
- Un poquito más de complejidad.

> Buscamos el algoritmo que mejor resuelva nuestro problema.

1.1. Temario del Ramo

- Algoritmos numéricos[1].
- Algoritmos, complejidad[2].

2. Encontrar ceros de funciones

Idea: Dada $f(x)$, hallar x^* tal que $f(x^*) = 0$ (f debe ser continua). Por ejemplo: ¿Para qué valor de x se cumple $x = e^{-x}$?. Una idea para resolver este problema simplemente basta con graficar

$$f(x) = x - e^{-x} \tag{2.1}$$

y ver cuáles son los valores de x^* tal que $f(x^*) = 0$.

Otra forma de solucionar el problema puede ser graficar x, e^{-x}, para buscar las intersecciones (Figura 1).

[1] Dorin Levy "Introduction to numerical analysis."
[2] Dasgupta, Papadimitriou, Vazarani "Algoritmos" (CLRS)

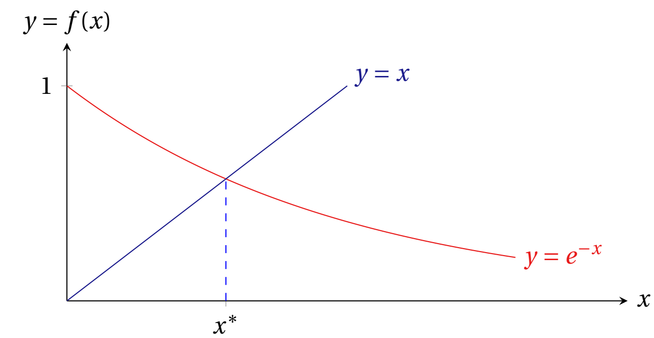

Figura 1: Es claro que usando un gráfico podemos apreciar que $0 < x^* < 1$.

2.1. Métodos Bracketing

Corresponden a métodos para encontrar ceros (o raíces) de funciones los cuales usan el *teorema del valor intermedio* ello y que básicamente van encerrando la solución hasta encontrar un punto de convergencia. A continuación, se explican dos métodos Bracketing: el método de la bisección y regula falsi.

2.1.1. Método de la Bisección

Si tengo x_0, x_1 tales que $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$, hay un cero de f en $]x_0, x_1[$, elegimos

$$x_2 = \frac{x_0 + x_1}{2} \tag{2.2}$$

con $]x_0, x_2[$ o $]x_2, x_1[$ según el cual tenga valores de f de signo distinto. Por ejemplo, consideremos la Figura 2.

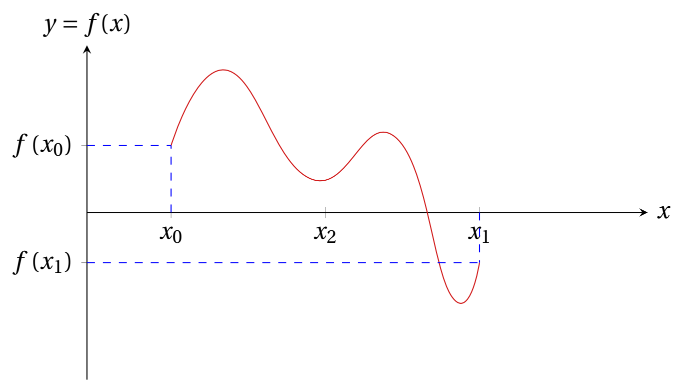

Figura 2: Si las cotas del intervalo $[x_0, x_1]$ cumplen con $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$, es claro que para algún valor $x^* \in [x_0, x_1]$ se cumple que $f(x^*) = 0$.

En ella, podemos apreciar que el intervalo $]x_2, x_1[$ cumple con $f(x_2) \cdot f(x_1) < 0$. En consecuencia, sabemos que $x^* \in]x_2, x_1[$. Luego, para obtener x^* obtenemos el valor medio del intervalo $]x_2, x_1[$ y repetimos el proceso.

Nótese que la gracia de todo esto es encontrar sólo un cero, ¡no todos!. Esto quiere decir lo ideal es escoger intervalo $[a, b]$ tal que sólo tenga un cero (Evite casos como los de la Figura 3). Por lo tanto, el método de la bisección no abarca todos los casos posibles.

2.1.2. Método Regula Falsi

Cuando tenemos la sospecha o simplemente nos dicen que nuestra curva f tiene una especie de "guatita" o simplemente tiene tendencia lineal (Figura 4), podemos usar:

$$x_2 = x_1 - f(x_1) \cdot \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} \tag{2.3}$$

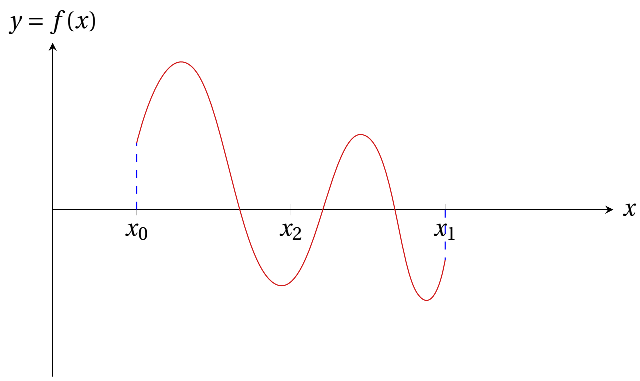

Figura 3: La presente función tiene 3 ceros.

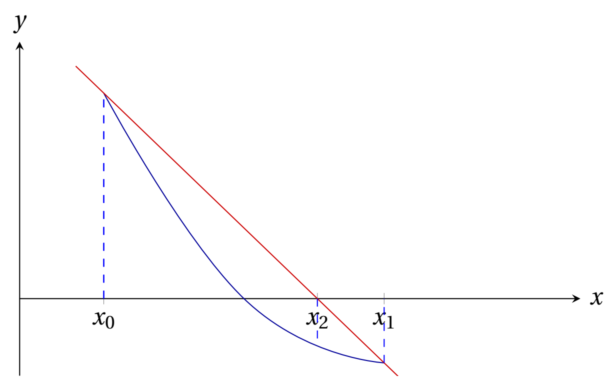

Figura 4: f tiene tendencia lineal.

2.2. Iteración de Punto Fijo (FPI)

Definición 2.1. Sea $g(x)$ una función. Un *punto fijo* de g es x^* tal que $x^* = g(x^*)$.

Encontrar la raíz de una función por algún método de punto fijo consiste en reescribir

$$f(x) = 0 \tag{2.4}$$

luego, despejamos x de (2.4) y lo que quede al lado opuesto de la ecuación será una función $g(x)$ tal que:

$$g(x) = x \tag{2.5}$$

Ejemplo 2.1. Supongamos que queremos encontrar el cero de la ecuación

$$\cos(x) - 2x = 0$$

Es fácil ver que $f(x) = \cos(x) - 2x$. Entonces, se tiene una posible función g sería:

$$\underbrace{\cos(x) - x}_{g(x)} = x$$

□

Usando iteraciones de punto fijo, se tiene que el cero de la función corresponde a la intersección entre $y = x$ y $g(x)$ (Figura 5).

Para efectos de convergencia, se puede ver como una espiral (Figura 6 y Figura 7). Nótese que para construir estas espirales debe partir por el eje x, en algún x_0 a su gusto. Luego, tirar una linea vertical hasta chocar con g. En seguida, continúe con una línea horizontal hasta llegar a $y = x$ y vuelva a trazar otra vertical hasta $g(x)$... y así sucesivamente hasta encontrar el punto de convergencia.

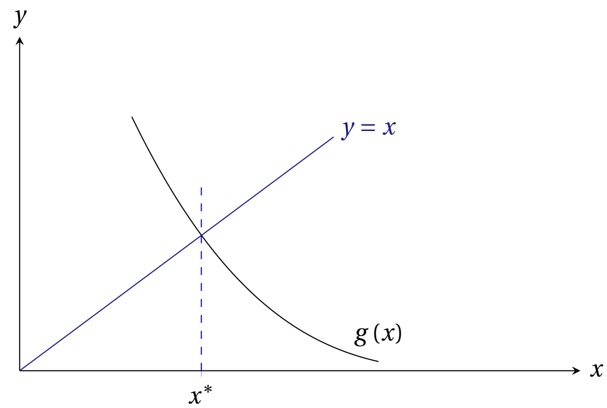

Figura 5: El valor de x de la intersección entre la recta $y = x$ y la función $g(x)$ corresponde al cero de f

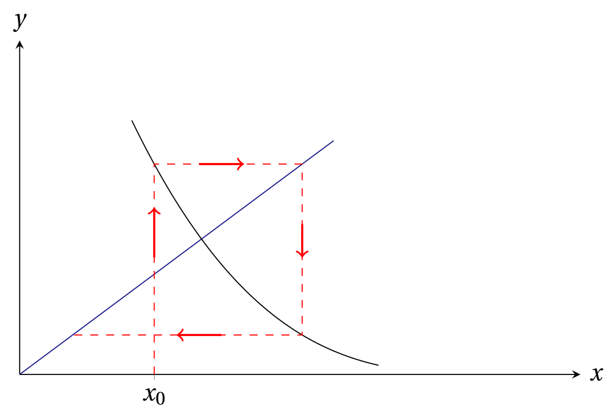

Figura 6: En este caso, la espiral diverge (mire las flechas).

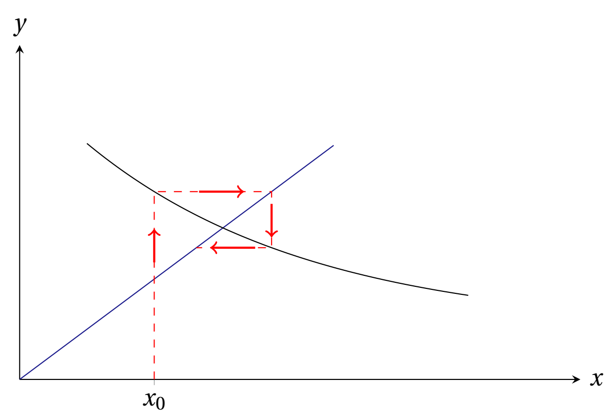

Figura 7: En este caso, la espiral converge (mire las flechas).

2.2.1. Método de la Secante

Mantener los últimos dos (x_1, x_2, luego x_2, x_3 y así sucesivamente). Ojo que el método de la secante no tiene garantía de convergencia (Figura 8).

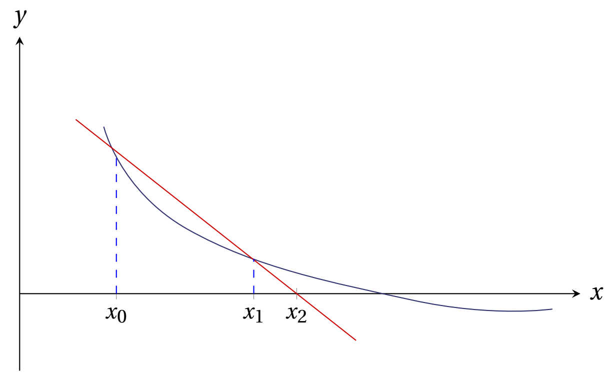

Figura 8: Una secante corta a la curva f en los puntos x_0 y x_1. El intercepto con el eje x corta en x_2. Luego, se evalúa f en x_2 y se obtiene una nueva secante que una los puntos $f(x_1)$ y $f(x_2)$. Finalmente, repetir el proceso hasta encontrar el valor de convergencia.

2.2.2. Método de la tangente (Newton)

La idea consiste en elegir un valor arbitrario x_0 que esté razonablemente cerca de x^* (cero de la función). Luego, encontramos el intercepto con el eje x de la recta tangente de la curva en x_0 usando la ecuación

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{2.6}$$

resultando un valor x_1 que se encuentra más cerca de x^* (Figura 9). Finalmente, iteramos el proceso hasta obtener un valor de convergencia.

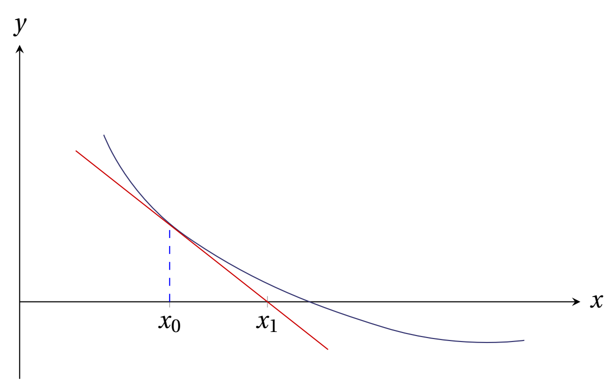

Figura 9: El valor x_1 obtenido con la ecuación (2.6) está más cercano a x^* que x_0.

3. Orden de Convergencias

Si definimos $e_n = |x_n - x^*|$, se dice que un método es de *orden p*, si hay constantes $C > 0$, p tales que

$$e_{n+1} \leq C e_n^p \tag{3.1}$$

Donde e_n corresponde al error con n iteraciones.

- Si $p = 1$ hablamos de convergencia lineal (bisección $C = \frac{1}{2}$).
- Si $p = 2$ hablamos de convergencia cuadrática (en cada paso, el error se eleva a $p = 2$).

- Si $1 < p < 2$ decimos que es superlineal.

Nótese que mientras mayor sea el orden de convergencia p, más rápido encontraremos el valor de convergencia.

> Es buena idea comparar cuál método es mejor según el caso que usemos

> Para el caso del método de bisección, tenemos que $p = 1$ y $C = \frac{1}{2}$