1. (35 PUNTOS) Considere la E.D.P.

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = e^y$$

a) Muestre que es una E.D.P. parabólica y obtener su forma normal.
Solución: Notemos que $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$ se sigue que es parabólica. La ecuación característica es

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-4}{2} = -2$$

entonces $y = -2x + k_1$ se sigue que podemos tomar

$$\begin{aligned} r(x,y) &= y + 2x \\ s(x,y) &= y \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} u_x &= u_r r_x + u_s s_x \\ &= 2u_r \\ u_y &= u_r r_y + u_s s_y \\ &= u_r + u_s \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} u_{xx} &= 2(u_{rr} r_x + u_{rs} s_x) \\ &= 4u_{rr} \\ u_{xy} &= 2(u_{rr} r_y + u_{rs} s_y) \\ &= 2u_{rr} + 2u_{rs} \\ u_{yy} &= u_{rr} + 2u_{rs} + u_{ss} \end{aligned}$$

reemplazando

$$\begin{aligned} 4u_{rr} - 4(2u_{rr} + 2u_{rs}) + 4(u_{rr} + 2u_{rs} + u_{ss}) &= e^s \\ 4u_{ss} &= e^s \end{aligned}$$

se sigue

$$u_{ss} = \frac{e^s}{4}$$

b) Determine la solución general de la E.D.P.
Solución: Integrando

$$\begin{aligned} u_s &= \frac{e^s}{4} + K(r) \\ u &= \frac{e^s}{4} + K(r)s + J(r) \end{aligned}$$

donde K y J son funciones de una variable. Volvemos a las variables x e y

$$u(x,y) = \frac{e^y}{4} + K(y+2x)\,y + J(y+2x)$$

corresponde a la solución general de la EDP

2. (30 PUNTOS) Considere el siguiente problema:

$$M''(x) + (1+\lambda)\, M(x) = 0 \text{ para } 0 < x < \pi$$

con $M(0) = M'(0)$, $M(\pi) = \alpha M'(\pi)$. Determine valores y/o condiciones para α de modo que $\lambda = 0$ sea un autovalor del problema.

Desarrollo. Para que $\lambda = 0$ sea un autovalor del problema debe tener autofunciones (funciones propias) asociadas no nulas. Resolvamos la ecuación:

$$M''(x) + M(x) = 0.$$

La ecuación característica es:

$$k^2 + 1 = 0 \Longrightarrow k = \pm i.$$

Las soluciones son

$$M(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \operatorname{sen}(x), \quad \text{donde } c_1 \text{ y } c_2 \text{ son constantes.}$$

Note que: $M(0) = c_1$ y $M'(0) = c_2$, de la condición

$$M(0) = M'(0) \quad \text{obtenemos} \quad c_1 = c_2 \ \ (\star)$$

Además: $M(\pi) = -c_1$ y $M'(\pi) = -c_2$, de la condición

$$M(\pi) = \alpha M'(\pi) \quad \text{obtenemos} \quad c_1 = c_2\alpha \ \ (\star\star)$$

De $(\star)$ y $(\star\star)$ obtenemos que

$$c_2 = c_2\alpha \Longrightarrow c_2(1-\alpha) = 0.$$

Si $\alpha - 1 = 0 \Longleftrightarrow \alpha = 1$, concluimos que $c_1 = c_2$ y tenemos autofunciones no nulas asociadas

$$M(x) = c_1 \cos(x) + c_1 \operatorname{sen}(x) \quad \text{es decir} \quad M(x) = \cos(x) + \operatorname{sen}(x).$$

3. (35 PUNTOS) Resuelva la ecuación de la onda unidimensional

$$\begin{array}{rcll} u_{tt} & = & 9u_{xx} & 0 < x < 5 \quad t > 0 \\ u(0,t) & = & 0 & t \geq 0 \\ u(5,t) & = & 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) & = & 0 & 0 \leq x \leq 5 \\ u_t(x,0) & = & 4 & 0 \leq x \leq 5 \end{array}$$

usando el método de separación de variables

Solución:

Buscamos una solución en la forma
$$u(x,t) = X(x)T(t),$$
reemplazando tenemos
$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{9}\frac{T''}{T} = -\lambda,$$
de las condiciones de contorno tenemos $X(0) = X(5) = 0$, resolviendo

$$\begin{array}{rcl} X'' + \lambda X & = & 0, \\ X(0) & = & 0, \\ X(5) & = & 0, \end{array}$$

se tiene como valor propio a $\lambda = \left(\frac{n\pi}{5}\right)^2$, $n = 1, 2, \cdots$ y como función propia a $X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{5}\right)$, (**2ptos**.), $n = 1, 2, \cdots$. Resolvemos ahora
$$T'' + \left(\frac{3n\pi}{5}\right)^2 T = 0$$
y tenemos que $T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{3n\pi}{5}t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{3n\pi}{5}t\right)$, de donde por el principio de superposición se tiene
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{3n\pi}{5}t + B_n \operatorname{sen}\frac{3n\pi}{5}t\right)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{5},$$
imponiendo la condición de contorno $u(x,0) = 0$ implica que $A_n = 0,\ \forall n = 1, 2, \cdots$. Por otro lado, al hacer $u_t(x,0) = 4$ tenemos que
$$4 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n\pi B_n}{5}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{5}\right)$$
que no es más que una extensión de senos, entonces

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{8}{3n\pi}\int_0^5 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{5}\right)dx \\ &= -\frac{40}{3n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right)\Big|_0^5 \\ &= -\frac{40}{3n^2\pi^2}(\cos(n\pi) - 1) \\ &= \begin{cases} \dfrac{80}{3n^2\pi^2} & \text{si} \quad n = 2k-1 \\ 0 & \text{si} \quad n = 2k \end{cases} \qquad k = 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

obteniéndose como solución
$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{80}{3(2k-1)^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{3(2k-1)\pi t}{5}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi x}{5}\right)$$