# Integrales Dobles: Problemas Resueltos

1. Calcule las siguientes integrales

   (a) $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_1^3 |x-2|\sin y \; dxdy$

   (b) $\displaystyle\int_0^1\int_y^1 \frac{\tan x}{x}\; dxdy$

   (c) $\displaystyle\int_0^1\int_{\arcsin y}^{\pi/2} \sqrt{1+\cos^2 x}\cos x dxdy$

   **Solución:**

   (a)
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\int_1^3 |x-2|\sin y \; dxdy &= \int_0^{\pi}\int_1^2 (2-x)\sin y \; dxdy + \int_0^{\pi}\int_2^3 (x-2)\sin y \; dxdy\\ &= -\frac{(2-x)^2}{2}\Big|_1^2 (-\cos y)\Big|_0^{\pi} + \frac{(x-2)^2}{2}\Big|_2^3 (-\cos y)\Big|_0^{\pi}\\ &= \frac{1}{2}(1-\cos(\pi)) + \frac{1}{2}(1-\cos(\pi)) = 2\end{aligned}$$

   (b)
$$\int_0^1\int_y^1 \frac{\tan x}{x}\; dxdy = \int_0^1\int_0^x \frac{\tan x}{x}\; dydx = \int_0^1 \tan x dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\ln\cos 1$$

   (c)
$$\begin{aligned}\int_0^1\int_{\arcsin y}^{\pi/2} \sqrt{1+\cos^2 x}\cos x dxdy &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin x} \sqrt{1+\cos^2 x}\cos x dydx\\ &= \int_0^{\pi/2} \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\cos x dx\\ &= -\frac{(1+\cos^2 x)^{3/2}}{3}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}\end{aligned}$$

2. Calcule el valor de $\displaystyle\iint_{\Omega}\left(4x^2+y^2\right)dA$ si $\Omega$ es la región descrita por la parte interior de $x^2+y^2=4y$

   **Solución:** La región descrita consiste en $\Omega\;:\; x^2+(y-2)^2=4$, luego utilizando coordenadas polares de la forma $x=2r\cos\theta$ e $y=2+2r\sin\theta$ tenemos que su jacobiano es $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=4r$, así:
$$\begin{aligned}\iint_{\Omega}\left(4x^2+y^2\right)dA &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 4r[16r^2\cos^2\theta+(2+2r\sin\theta)^2]drd\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 4r[16r^2\cos^2\theta+4+8r\sin\theta+4r^2\sin^2\theta]drd\theta = \frac{64\pi}{4}+\frac{32\pi}{2}+\frac{16\pi}{4} = 36\pi\end{aligned}$$

3. Determine, si existe, una constante $k\in\mathbb{R}$ tal que
$$\int_0^x\int_0^t tf(u)dudt = k\int_0^x (x^2-u^2)f(u)du.$$

   **Solución:** Sea $D=\left\{(u,t)\in\mathbb{R}^2 : 0\le t\le x\wedge 0\le u\le t\right\}=\left\{(u,t)\in\mathbb{R}^2 : 0\le u\le x\wedge u\le t\le x\right\}$, intercambiando el orden de integración, se tiene que
$$\int_0^x\int_0^t tf(u)dudt = \int_0^x\int_u^x tf(u)dtdu = \int_0^x f(u)\frac{t^2}{2}\Big|_u^x du = \frac{1}{2}\int_0^x (x^2-u^2)f(u)du \implies k=\frac{1}{2}$$

4. Para $0 < \epsilon < 1$ determine el valor de $\displaystyle\iint_{\Omega_\epsilon} 3(x^2+y^2)\, dA$ si se sabe que el conjunto $\Omega_\epsilon$ está descrito mediante:

$$\Omega_\epsilon = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \leq 4x+5, \ 9x^2+4y^2 \geq \epsilon^2\right\}$$

**Solución:** Observamos que

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega_\epsilon} 3(x^2+y^2)\, dA &= 3\int_0^{2\pi}\int_0^1 9r\Big(9r^2\sin^2\theta + (2+3r\cos\theta)^2\Big)drd\theta - 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\epsilon} \frac{r}{6}\left(\frac{r^2}{9}\cos^2\theta + \frac{r^2}{4}\sin^2\theta\right)drd\theta \\
&= 3\int_0^{2\pi}\int_0^1 9r(9r^2+12r\cos\theta)drd\theta - \left(\frac{3\pi\epsilon^4}{216} + \frac{3\pi\epsilon^4}{96}\right) \\
&= \frac{243\pi}{2} - \left(\frac{3\pi\epsilon^4}{216} + \frac{3\pi\epsilon^4}{96}\right)
\end{aligned}$$

5. Considerar la transformación T definida por las ecuaciones

$$x = u+v, \qquad y = v-u^2.$$

(a) Determine el jacobiano de la transformación.

(b) Un triángulo $W$ en el plano $uv$ tiene vértices en $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$. Representar, mediante un gráfico, la imagen $S$ en el plano $xy$.

(c) Verifique el teorema del cambio de variables calculando el área de $S$ directamente y con la transformación antes definida.

(d) Calcular la integral

$$\iint_S \frac{1}{(x-y+1)^2} dA$$

**Solución:**

(a) Del cambio de variables $x = u+v$ e $y = v-u^2$, se tiene que el jacobiano es

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2u & 1 \end{vmatrix} = 1+2u,$$

(b) Identificando los tres lados del triángulo como $\ell_1, \ell_2$ y $\ell_3$, se tiene que

$$\begin{array}{lccl}
\ell_1 : & u=0, \ \ 0 \leq v \leq 2 & \Longrightarrow & y = x, \quad 0 \leq x \leq 2 \\
\ell_2 : & v=0, \ \ 0 \leq u \leq 2 & \Longrightarrow & y = -x^2, \quad 0 \leq x \leq 2 \\
\ell_3 : & u+v=2, \ \ 0 \leq u \leq 2 & \Longrightarrow & x = 2
\end{array}$$

De esta forma la imagen de la región $W$ en el plano $uv$ definida como

$$W = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / \ \ 0 \leq u \leq 2, \ \ 0 \leq v \leq u-2\}$$

es la región $S$ en el plano $xy$ dada por

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \leq x \leq 2, \quad -x^2 \leq y \leq x\}$$

(c) El area de la región $S$, de forma directa es

$$\text{area}(S) = \iint_S dA = \int_0^2\int_{-x^2}^{x} dydx = \int_0^2 (x+x^2)dx = \frac{14}{3}$$

mientras que utilizando el teorema del cambio de variables, se tiene

$$\text{area}(S) = \iint_S dA = \iint_W \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dvdu = \int_0^2\int_0^{2-u}(1+2u)dvdu = \int_0^2 (2+3u-2u^2)du = \frac{14}{3}$$

(d) Para calcular la integral pedida se ocupa el teorema del cambio de variables luego

$$\iint_S \frac{1}{(x-y+1)^2}dA = \int_0^2\int_0^{2-u}\frac{1+2u}{(1+u+u^2)^2}dvdu = \int_0^2\int_0^{2-v}\frac{1+2u}{(1+u+u^2)^2}dudv,$$

donde

$$\int_0^2\int_0^{2-v}\frac{1+2u}{(1+u+u^2)^2}dudv = \int_0^2\left(1-\frac{1}{v^2-5v+7}\right)dv = 2-\frac{\sqrt{3}}{9}\left(\pi - 6\arctan\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$$

6. Sea $R$ la región limitada por las rectas $x-2y=0$, $x-2y=4$, $x+y=4$ y $x+y=1$. Calcule usando un cambio de variable adecuado la integral:

$$\iint_R 9xydA$$

**Solución:** Considere el cambio de variable

$$\left\{\begin{array}{ccc} u & = & x-2y \\ v & = & x+y \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \left|\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{array}\right| = 3$$

Además, sea $R_{uv} = \left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : 0\le u\le 4 \wedge 1\le v\le 4\right\}$ la región bajo la transformación. Por otro lado,

$$v-u=3y \quad \wedge \quad u+2v=3x \quad \Rightarrow \quad 9xy=(v-u)(u+2v)=2v^2-uv-u^2$$

Por lo tanto,

$$\iint_R 9xydA \quad = \quad \frac{1}{3}\int_1^4\int_0^4[2v^2-uv-u^2]dudv = \frac{44}{3}$$

7. Dada la región $\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ 1\le x^2+y^2\le 16\right\}$, calcule:

$$\iint_\Omega \text{máx}\left\{9, x^2+y^2\right\}\ dA$$

**Solución:** Comenzamos notando que

$$\text{máx}\{x^2+y^2, 9\} = \left\{\begin{array}{ccc} 9 & , & 9\ge x^2+y^2 \\ x^2+y^2 & , & 9< x^2+y^2 \end{array}\right.$$

de esta forma la integral a evaluar se descompone en dos tramos, es decir:

$$\begin{aligned}\iint_\Omega \text{máx}\left\{9, x^2+y^2\right\}\ dA &= \iint_{1\le x^2+y^2\le 9} 9\ dA + \iint_{9\le x^2+y^2\le 16}(x^2+y^2)\ dA \\ &= 72\pi + \int_0^{2\pi}\int_3^4 r^3 drd\theta = 72\pi + \frac{\pi}{2}(4^4-3^4)\end{aligned}$$

8. Calcular el valor de la siguiente integral

$$\int_0^{\pi/3}\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{\pi/3}}\frac{\sin x^2}{x}dxdy$$

**Solución:** Notamos que la función $f(x,y)=\dfrac{\sin x^2}{x}$ es acotada en el dominio $D$, luego podemos intercambiar los limites de integración, de esta forma:

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le \frac{\pi}{3} \wedge \sqrt{y}\le x\le\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right\} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le\sqrt{\frac{\pi}{3}} \wedge 0\le y\le x^2\right\}$$

Así, para la integral solicitada tenemos que

$$\int_0^{\sqrt{\pi/3}}\int_0^{x^2}\frac{\sin x^2}{x}dydx = \int_0^{\sqrt{\pi/3}}\frac{\sin x^2}{x}y\Big|_0^{x^2}dx = \int_0^{\sqrt{\pi/3}}x\sin(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}\sin(u)du = \frac{1}{4}$$

9. Calcule la integral

$$\iint_D \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,dA,$$

donde

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \geq 2 \wedge x^2+y^2 \leq 2y\right\}$$

**Solución:** Aplicamos coordenas polares, $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\sin(\theta)$, donde $x^2+y^2 = r^2$ y el jacobiano de la transformación es $r$. Notamos que $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Además,

$$\begin{array}{rcl} x+y \geq 2 & \rightarrow & r(\cos(\theta)+\sin(\theta)) \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad r \geq \dfrac{2}{\cos(\theta)+\sin(\theta)} \\ x^2+y^2 \leq 2y & \rightarrow & r^2 \leq 2r\sin(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad r \leq 2\sin(\theta) \ \text{ ya que } r \geq 0 \end{array}$$

Luego

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,dA &= \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_{\frac{2}{\cos(\theta)+\sin(\theta)}}^{2\sin(\theta)} \frac{\cos(\theta)}{r^2}\,drd\theta = -\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left[\frac{\cos(\theta)}{2\sin(\theta)} - \frac{\cos^2(\theta)+\cos(\theta)\sin(\theta)}{2}\right]d\theta \\ &= -\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos(\theta)\left[\frac{1}{\sin(\theta)} - \sin(\theta)\right]d\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^2(\theta)d\theta \\ &= -\frac{1}{2}\int_{1/\sqrt{2}}^{1}\left[\frac{1}{u} - u\right]du + \frac{1}{4}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left[1+\cos(2\theta)\right]d\theta = \frac{\pi - 4\ln(2)}{16} \end{aligned}$$

10. Determine la masa de una lámina $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ descrita en el primer cuadrante por la región encerrada por las curvas $y = x^2$, $y = x^2+3$, $y = -x^2+9$ e $y = -x^2+6$. Considere que la densidad en cada punto de la lámina $\Omega$ viene determinada por $\rho(x,y) = xe^{y-x^2}$.

**Solución:** Consideramos la transformación T definida como

$$\begin{aligned} u &= y - x^2 \\ v &= y + x^2, \end{aligned}$$

luego la imagen del dominio $\Omega$ bajo la transformación $T$ definida anteriormente corresponde a

$$\Omega_{uv} = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq u \leq 3, \quad 6 \leq v \leq 9\right\},$$

donde el jacobiano de tal transformación viene dado por

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} -2x & 1 \\ 2x & 1 \end{vmatrix} = -4x$$

de esta forma, la masa de la lámina se obtiene como

$$\iint_\Omega xe^{y-x^2}dA = \frac{1}{4}\iint_{\Omega_{uv}} e^u dudv = \frac{1}{4}\int_6^9\int_0^3 e^u dudv = \frac{3}{4}\left(e^3-1\right).$$

11. Determine el volumen de la región encerrada por las superficies $z+2x+2y = 1$ y $z = 3-x^2-y^2$.

**Solución:** Procedemos obteniendo el dominio maximal del sólido, el cual viene determinado por la región encerrada por la curva

$$3 - x^2 - y^2 = 1 - 2x - 2y,$$

de esta forma se tiene que la región buscada es $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ (x-1)^2+(y-1)^2 \leq 4\right\}$, luego si utilizamos el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2r\cos\theta \\ y &= 1 + 2r\sin\theta, \end{aligned}$$

cuyo jacobiano viene determinado por $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = 4r$, tenemos que el volumen del sólido viene dado por

$$\begin{aligned}
\iint_D \big|(3-x^2-y^2)-(1-2x-2y)\big|\, dA &= \iint_D \big|4-(x-1)^2-(y-1)^2\big|\, dA \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 4r|4-4r^2\cos^2\theta - 4r^2\sin^2\theta|drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 4r|4-4r^2|drd\theta = 32\pi\int_0^1 r|1-r^2|dr \\
&= 32\pi\int_0^1 r(1-r^2)dr = 8\pi
\end{aligned}$$

12. Sea $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \ |x|+|y|\leq 1\right\}$ y una función $g$ continua en $\mathbb{R}$. Compruebe que

$$\iint_D g(x+y)dA = \int_{-1}^1 g(u)du$$

**Solución:** Para el desarrollo podemos considerar la transformación T definida como

$$\begin{aligned} u &= x+y \\ v &= y-x, \end{aligned}$$

luego la imagen del dominio $D$ bajo la transformación $T$ corresponde a

$$\Omega_{uv} = \left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \ / \ -1\leq u\leq 1, \quad -1\leq v\leq 1\right\},$$

donde el jacobiano de la transformación viene determinado por

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

luego

$$\iint_D g(x+y)dA \quad = \quad \int_{-1}^1\int_{-1}^1 \frac{g(u)}{2}dvdu = \int_{-1}^1 g(u)du$$

13. Calcular, de ser posible, la siguiente integral

$$\int_1^2\int_{\sqrt{x}}^x \cos\left(\frac{\pi x}{y}\right)dydx + \int_2^4\int_{\sqrt{x}}^2 \cos\left(\frac{\pi x}{y}\right)dydx$$

**Solución:** En primer lugar notamos que al integrar directamente como se presenta el ejercicio es difícil encontrar la antiderivada de $\cos(\pi x/y)$ con respecto a $y$. Pero como la función $\cos(\pi x/y)$ es acotada en el dominio $D$, podemos intercambiar los límites de integración.

$$\begin{aligned}
D &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (1\leq x\leq 2 \wedge \sqrt{x}\leq y\leq x)\cup(2\leq x\leq 4\wedge\sqrt{x}\leq y\leq 2)\right\} \\
&= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\leq y\leq 2\wedge y\leq x\leq y^2\right\}
\end{aligned}$$

Luego, se debe calcular la integral equivalente

$$\int_1^2\int_y^{y^2}\cos\left(\frac{\pi x}{y}\right)dxdy = \int_1^2 \frac{y}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{y}\right)\Bigg|_y^{y^2} dy = \int_1^2 \frac{y}{\pi}\sin(\pi y)\,dy = -\frac{3}{\pi^2}$$

14. Mostrar que

$$4e^5 \leq \iint_{[1,3]\times[2,4]} e^{x^2+y^2}dA \leq 4e^{25}$$

**Solución:** Sea $f(x,y) = x^2 + y^2$ con $(x,y) \in D = [1,3] \times [2,4]$. Como la función $x^2 + y^2$ tiene un mínimo absoluto en $(0,0)$, pero $f$ está definida en un cuadrado que no contiene al origen, se tiene que en el punto más cercano de $D$ al origen, $f$ alcanza un mínimo y en el punto más lejano $f$ alcanza un máximo, dichos puntos son el $(1,2)$ y $(3,4)$ respectivamente. Luego, se tiene que $f(1,2) \leq f(x,y) \leq f(3,4) \iff 5 \leq f(x,y) \leq 25$. Además como la función exponencial, es creciente se tiene que

$$5 \leq f(x,y) \leq 25 \quad \Leftrightarrow \quad e^5 \leq e^{f(x,y)} \leq e^{25} \quad \Leftrightarrow \quad e^5 \leq e^{x^2+y^2} \leq e^{25}$$

Por otro lado $A(D) = 4$, así que finalmente

$$e^5 A(D) \leq \iint_D e^{f(x,y)} \leq e^{25} A(D) \quad \Leftrightarrow \quad 4e^5 \leq \iint_D e^{x^2+y^2} \leq 4e^{25}$$

15. Probar que

$$2\int_a^b \int_x^b f(x)f(y)dydx = \left( \int_a^b f(x)dx \right)^2$$

**Solución:** Por el teorema fundamental del calculo, sea $F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$, luego

$$\begin{aligned}
2\int_a^b \int_x^b f(x)f(y)dydx &= 2\int_a^b f(x)\left[F(b) - F(x)\right]dx = 2F(b)\int_a^b f(x)dx - 2\int_a^b f(x)F(x)dx \\
&= 2F(b)\left[F(b) - F(a)\right] - \int_{F(a)}^{F(b)} 2udu = 2F(b)^2 - 2F(b)F(a) - F(b)^2 + F(a)^2 \\
&= (F(b) - F(a))^2 = \left( \int_a^b f(x)dx \right)^2
\end{aligned}$$

16. Considere una lámina $D$ la cual esta descrita mediante $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ |x| + |y| \leq 2\}$, si la densidad en cada punto de la lámina viene definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} 3a(x+y)^2 & \text{si} \quad y \geq x + a, \\ 4a & \text{si} \quad y < x + a. \end{cases}$$

Determine el valor de $a \in [0,2]$ de modo que la masa de la lámina $D$ sea 16.

**Solución:** El problema consiste en hallar $a$ tal que $\displaystyle\iint_D f(x,y)dA = 16$, para esto consideramos la transformación $T$ definida como

$$\begin{aligned} u &= y - x \\ v &= y + x \end{aligned}$$

luego la imagen del dominio $D$ bajo $T$ corresponde a

$$D_{uv} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / -2 \leq u \leq 2, \quad -2 \leq v \leq 2\},$$

el jacobiano de la transformación es

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

de esta forma

$$\iint_D f(x,y)dA = \frac{1}{2}\iint_{D_{uv}} f\left(\frac{v-u}{2}, \frac{u+v}{2}\right)dudv,$$

notamos que

$$f\left(\frac{v-u}{2}, \frac{u+v}{2}\right) = \begin{cases} 3av^2 & \text{si } u \geq a, \\ 4a & \text{si } u < a. \end{cases}$$

así

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)dA &= \frac{1}{2}\iint_{D_{uv}} f\left(\frac{v-u}{2},\frac{u+v}{2}\right)dudv,\\ &= \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{a} 4adudv + \int_{-2}^{2}\int_{a}^{2} 3av^2dudv\right) = 32a\end{aligned}$$

finalmente $a = 1/2$.

17. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ una lámina delimitada por las curvas

$$y = x^3, \quad y = x^3 + 2, \quad y + x = 0, \quad y + x - 3 = 0,$$

si la densidad en cada punto de la lámina viene determinada por la función $\rho(x, y) = 1 + 3x^2$ y si para $k \in [0, 3]$ se define la recta $\ell:\ x + y = k$

(a) Calcule el momento de inercia de la lámina respecto a la recta $\ell$, el cual sera denotado por $I(k)$.

(b) Determine $k$ de modo que $I(k)$ sea mínimo.

**Solución:**

(a) El momento de inercia respecto a la recta $\ell$ viene definido como

$$I(k) = \iint_\Omega r_\ell^2 dm,$$

donde $r_\ell^2$ es la distancia al cuadrado de cualquier punto del dominio a la recta $\ell$, la cual viene descrita por

$$r_\ell^2 = \frac{(x + y - k)^2}{2},$$

de esta forma tenemos que aplicando el teorema del cambio de variables con

$$\begin{aligned} u &= y - x^3 \\ v &= y + x \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\right| = -1 - 3x^2$$

Luego,

$$\begin{aligned} I(k) &= \iint_\Omega r_\ell^2 dm = \iint_\Omega r_\ell^2 \rho(x, y)dA \\ &= \iint_\Omega \frac{(1 + 3x^2)(x + y - k)^2}{2} dA = \int_0^2 \int_0^3 \frac{(1 + 3x^2)(v - k)^2}{2} \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| dvdu \\ &= \int_0^2 \int_0^3 \frac{(v - k)^2}{2} dvdu = \left.\frac{(v - k)^3}{3}\right|_0^3 = 3k^2 - 9k + 9 \end{aligned}$$

(b) Notamos que $I(k) = 3k^2 - 9k + 9$ es una parábola la cual no tiene raíces reales y además su mínimo en el intervalo $[0, 3]$ se alcanza en su vértice, el cual es $k = \frac{3}{2}$.

18. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ una región cerrada y acotada, además se define la región $D$ como

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}.$$

Suponga que $\Omega \subset D$ y la función $z = f(x, y)$ es continua y positiva sobre todo $\mathbb{R}^2$, la cual posee la propiedad que para todo $a > 0$ se tiene

$$f(x, y) \le ae^{-a(x^2+y^2)}$$

Verifique que

$$\lim_{a\to\infty} \iint_\Omega f(x, y)dA = 0$$

**Solución:**

Usando propiedades de la integral, como $f(x,y) \geq 0$ en todo $\mathbb{R}^2$, se tiene que

$$0 \leq \iint_\Omega f(x,y)dA \leq \iint_D f(x,y)dA,$$

además pues $f(x,y) \leq ae^{-a(x^2+y^2)}$

$$0 \leq \iint_\Omega f(x,y)dA \leq \iint_D f(x,y)dA \leq \iint_D ae^{-a(x^2+y^2)}dA,$$

pero

$$\iint_D ae^{-a(x^2+y^2)}dA = \int_0^{2\pi}\int_1^2 are^{-ar^2}drd\theta = -\pi e^{-ar^2}\Big|_{r=1}^{r=2} = \pi(e^{-a} - e^{-4a}),$$

luego

$$0 \leq \iint_\Omega f(x,y)dA \leq \pi(e^{-a} - e^{-4a}) \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \lim_{a\to\infty} \iint_\Omega f(x,y)dA \leq \lim_{a\to\infty} \pi(e^{-a} - e^{-4a}) = 0$$

por acotamiento

$$\lim_{a\to\infty} \iint_\Omega f(x,y)dA = 0$$

19. Considere la región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ descrita mediante

$$\Omega = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq 4, \ -x \leq y \leq x^2\Big\}.$$

(a) Muestre que $\Omega = T(\mathcal{D})$, donde $\mathcal{D}$ es la región acotada por las rectas: $u = 0$, $v = 0$ y $v + u = 4$ y $T$ es la transformación definida como

$$T : \begin{cases} x = u + v, \\ y = u^2 - v. \end{cases}$$

además justifique que $T$ es una transformación de coordenadas válida.

(b) Para la función $f(x,y) = \dfrac{2x}{\sqrt{1+4x+4y}}$, obtenga el valor de la integral

$$\iint_\Omega f(x,y)\ dA$$

**Solución:**

(i) Procederemos mapeando lado a lado del conjunto $\mathcal{D}$, para esto

- Sea $\ell_1$ el lado descrito por $v = 0$ desde $0 \leq u \leq 4$, al aplicar la transformación tenemos que $T(\ell_1)$ esta determinado por $y = x^2$ con $0 \leq x \leq 4$.

- Sea $\ell_2$ el lado descrito por $u + v = 4$ desde $0 \leq u \leq 4$, al aplicar la transformación tenemos que $T(\ell_2)$ esta determinado por $x = 4$.

- Sea $\ell_3$ el lado descrito por $u = 0$ desde $0 \leq v \leq 4$, al aplicar la transformación tenemos que $T(\ell_3)$ esta determinado por $y = -x$ con $0 \leq x \leq 4$.

Lo anterior permite verificar que $\Omega = T(\mathcal{D})$. Además notamos que el jacobiano de la transformación entregada es $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = |1 + 2u|$ el cual es no nulo en la región.

(ii) Usando el teorema del cambio de variables, se tiene que:

$$\begin{aligned}\iint_\Omega f(x,y)\ dA &= \iint_{\mathcal{D}} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dvdu \\ &= \int_0^4\int_0^{4-u} 2(u+v)dvdu = \int_0^4 (4^2 - u^2)du = 4^3 - \frac{4^3}{3} = \frac{128}{3}\end{aligned}$$

20. Una función de densidad de probabilidad conjunta asociada a un vector aleatorio $(X, Y)$ corresponde a una función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que

- $f \geq 0,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, en particular $f > 0$ si $(x, y) \in D$.
- $\displaystyle\iint_D f\ dA = 1.$

Adicionalmente, se define la probabilidad de un "evento" (conjunto) $\Omega \subset D$ como

$$\mathbb{P}[\Omega] = \iint_\Omega f\ dA$$

En la elaboración de un determinado producto intervienen dos etapas. El tiempo de realización, en horas, de la primera etapa se modela por la variable "$x$", mientras que el tiempo total de elaboración, en horas, se modela por la variable "$y$". La función de densidad de probabilidad conjunta está dada por

$$f(x, y) = \alpha^3 x \exp\{-\alpha y\}$$

definida sobre la región

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < y\}$$

con $\alpha > 0$ un parámetro de escala (conocido).

(a) Bosqueje en $\mathbb{R}^2$ la región que representa al evento "$\Omega$: El tiempo de duración, en horas, de la primera etapa es más de la mitad del tiempo total, en horas, de elaboración" y calcule su probabilidad.

(b) Las componentes del centro de masa del dominio $D$ donde se define la función de densidad $f$, se denominan "valores esperados" o "valores promedio" asociados a cada componente del vector aleatorio $(X, Y)$. Calcule el centro de masa del dominio $D$. ¿Cómo interpretaría cada una de sus componentes?

*Recuerde que para $r \in \mathbb{N}$:*

$$\int_0^\infty u^r\ e^{-\lambda u}\ du = \frac{r!}{\lambda^{r+1}}$$

**Solución:**

(a) La región viene dada por $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ \ y/2 \leq x \leq y,\ 0 \leq y < \infty\}$ , luego

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\Omega] &= \int_0^\infty \int_{y/2}^y \alpha^3 x \exp\{-\alpha y\}\ dxdy = \frac{\alpha^3}{2} \int_0^\infty \frac{3}{4} y^2 \exp\{-\alpha y\}\ dy \\
&= \frac{3\alpha^3}{8} \int_0^\infty y^2 \exp\{-\alpha y\}\ dy = \frac{3\alpha^3}{8} \times \frac{2!}{\alpha^3} = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

(b) La masa de la región $D$, por definición de la función de densidad de probabilidad es $m = 1$. Luego, los primeros momentos respecto a cada eje son

$$\begin{aligned}
M_y = \int_0^\infty \int_x^\infty \alpha^3 x^2\ e^{-\alpha y}\ dydx \quad &\Rightarrow \quad M_y = \alpha^2 \int_0^\infty x^2\ e^{-\alpha x}\ dx \\
&\Rightarrow \quad M_y = \alpha^2 \times \frac{2!}{\alpha^3} \\
&\Rightarrow \quad M_y = \frac{2}{\alpha} \\
M_x = \int_0^\infty \int_0^y \alpha^3 xy\ e^{-\alpha y}\ dxdy \quad &\Rightarrow \quad M_x = \frac{\alpha^3}{2} \int_0^\infty y^3\ e^{-\alpha y}\ dy \\
&\Rightarrow \quad M_x = \frac{\alpha^3}{2} \times \frac{3!}{\alpha^4} \\
&\Rightarrow \quad M_x = \frac{3}{\alpha}
\end{aligned}$$

Finalmente, el centroide es $(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\frac{2}{\alpha}, \frac{3}{\alpha}\right)$, cuya componente $\overline{x}$ corresponde al tiempo promedio de la realización primera etapa y $\overline{y}$ al tiempo promedio total de elaboración.

21. Considere $a \in \mathbb{R}$ y $\ell > 0$, justifique si es posible o no acotar el volumen del sólido $W$ mediante

$$\text{Volumen}(W) \leq \pi/a^2,$$

donde $W$ es el sólido que está encerrado por el plano $z = 0$ y la función $f(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+y^2+a^2)^2}$ en la región $D$ definida como

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ |x| + |y| \leq \ell\}$$

**Solución:**

El volumen del solido $W$ viene determinado por

$$\text{Volumen}(W) = \iint_D f(x,y)dA,$$

notamos que la región $D$ es un rombo, en particular tal región esta contenida en un disco $R$ de radio $\ell$ con centro en $(0,0)$. Así, como $f(x,y) \geq 0$ en todo $\mathbb{R}^2$ se tiene que

$$\text{Volumen}(W) \leq \iint_R f(x,y)dA,$$

a la integral $\displaystyle\iint_R f(x,y)dA$ le podemos aplicar coordenadas polares, de esta forma

$$\iint_R f(x,y)dA \;=\; \int_0^{2\pi}\int_0^{\ell} \frac{r}{(r^2+a^2)^2} dr d\theta = -\pi(r^2+a^2)^{-1}\Big|_{r=0}^{r=\ell} = \pi\left(a^{-2} - (\ell^2+a^2)^{-1}\right) = \frac{\pi\ell^2}{a^2(\ell^2+a^2)},$$

como $\ell^2 \leq \ell^2 + a^2$ se tiene que

$$\text{Volumen}(W) \leq \pi/a^2,$$

# Integrales Dobles: Problemas Propuestos

1. Calcule las siguientes integrales

   (a) $\displaystyle\int_0^1\int_y^1 e^{x^2}dxdy$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}|\cos(x+y)|dA$ (c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\int_0^{\text{mín}\{2-\sin\theta,1+\sin\theta\}} drd\theta$

   (d) $\displaystyle\int_0^1\int_x^1 \tan y^2 dydx$ (e) $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{9+y^6}dydx$ (f) $\displaystyle\int_0^1\int_x^1 \sqrt{1+y^4}dydx$

2. Considere el rectángulo $R=[-2,2]\times[-1,1]$, además de la función $f$ definida mediante

$$f(x,y)=\begin{cases} 2 & \text{si } y\le x, \\ -1 & \text{si } y>x. \end{cases}$$

   Encuentre

$$\iint_R f(x,y)dxdy \qquad \text{y} \qquad \iint_R f(x,y)dydx,$$

3. Obtenga el valor de

$$\int_0^1\int_{x/2}^{x} y\sin y^3 dydx+\int_1^2\int_{x/2}^{1} y\sin y^3 dydx$$

4. Sea $R=[0,1]\times[0,1]$. Considere $f(x,y)=\dfrac{x-y}{(x+y)^3}$ y $g(x,y)=\dfrac{x-y}{(x+y)^2}$.
   Muestre que

$$\iint_R f(x,y)dxdy\neq\iint_R f(x,y)dydx \text{ pero que } \iint_R g(x,y)dxdy=\iint_R g(x,y)dydx$$

5. Evaluar la integral $\displaystyle\iint_D e^{x-y}dA$ donde $D$ es el interior del triángulo con vértices $(0,0)$, $(1,3)$ y $(2,2)$.

6. Sea el cuadrado $R=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ justifique la siguiente desigualdad:

$$0\le\iint_R \sin(x+y)\,dA\le\frac{\pi^2}{4}$$

   *Ayuda:* Encuentre los máximos y mínimos de la función $f(x,y)$ en la región $R$.

7. Mostrar que

$$4\pi\le\int_D (x^2+y^2+1)dA\le 20\pi,$$

   donde $D$ es el disco de radio 2 y centro en el origen.

8. Usando coordenadas polares, hallar el área acotada por la lemniscata $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$.

9. Encuentre el volumen usando coordenadas polares, grafique previamente las regiones:

   (a) $1\le x^2+y^2\le 9$ ; $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\le z\le 1$.

   (b) $-2\le x\le 2$ ; $0\le y\le\sqrt{4-x^2}$ ; $0\le z\le x\sqrt{y}$.

10. Considere una lámina delgada cuya función de densidad de masa es

$$f(x,y)=k\frac{x}{y},$$

   tal lámina está delimitada por la región encerrada por las curvas

$$y=\sqrt{8x} \quad , \quad y=x^2 \quad , \quad 1\le x\le 4$$

(a) Calcule la constante $k$ de tal forma que la masa total de la lámina sea igual a 1.

(b) Calcule las coordenadas del centro de masa de la lámina.

11. Sea la región $D$ en el plano $xy$ acotada por las rectas

$$y = x,\ y = 3x,\ x + y = 2,\ x + y = 4$$

(a) Haga un bosquejo de la imagen $T(D)$, donde $T$ es una transformación definida por el sistema de ecuaciones

$$T : \begin{cases} u = x + y - 2 \\ v = y - x \end{cases}$$

(b) Si $D$ es una placa de densidad $\rho(x, y) = y - x$, encontrar la masa de la placa.

(c) Justifique claramente el valor de verdad de la siguiente desigualdad:

$$\text{Área}(D) - \text{Área}(T(D)) > 0$$

12. Considere el rectángulo $R = [-2, 2] \times [-1, 1]$, además de la función $f$ definida mediante $f(x, y) = \text{mín}\{x, y\}$. Encuentre

$$\iint_R f(x, y)dxdy \qquad \text{y} \qquad \iint_R f(x, y)dydx,$$

13. En los siguientes ejercicios encontrar la masa y el centro de masa de la lámina dada si la densidad de área es como se indica.

(a) Una lámina tiene la forma de la región rectangular acotada por las rectas $x = 3$, $y = 2$ y los ejes coordenados. La densidad de área en cualquier punto es $xy^2$.

(b) Una lámina está acotada en el primer cuadrante por el círculo $x^2 + y^2 = a^2$ y los ejes coordenados. La densidad de área es constante.

14. Considere la región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ definida como

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y^2 \geq x^2, \ \ x^2 + y^2 \leq 8y\right\},$$

mediante el uso de coordenadas polares, exprese las integrales que permiten calcular

$$\iint_\Omega e^{x^2+y^2}\ dA$$

15. Resuelva los siguientes problemas

(a) Considere una lámina $D$ cuya forma corresponde a un hexágono regular de lado $a > 0$ con centro en el origen. Verifique que la masa de la lámina es menor a 1, si la densidad en cada punto de $D$ es

$$f(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + \pi)^2}$$

(b) Calcule el valor de la integral doble dada por

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_{\sqrt{3}x/3}^{x} \frac{1}{(x^2 + y^2 + 4)^2} dydx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \int_{\sqrt{3}x/3}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{(x^2 + y^2 + 4)^2} dydx.$$

(c) Considere el conjunto $D$ definido como $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ y = 1,\ x \in \mathbb{Q}\}$ además del cuadrado $\Omega = [0, 2] \times [0, 2]$. Justifique si la función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida como

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in D, \\ \\ -1 & \text{si } (x, y) \in \Omega - D. \end{cases}$$

es integrable en $\Omega$.