Teoremas de la Función Implícita e Inversa

Problemas Propuestos

1. Dada la ecuación: $\operatorname{sen}(yz) + \operatorname{sen}(xz) + \operatorname{sen}(xy) = 0$
   (a) Encuentre las condiciones para que z esté definida implícitamente como función de x e y cerca de $(x, y, z) = (1, 0, \pi)$.
   (b) Encontrar la ecuación del plano tangente a la gráfica de $z = g(x, y)$ en $(x, y, z) = (1, 0, \pi)$.

2. Sea $2x - xy + xz^2 = f(x + z, y + xz)$.
   (a) Dar condiciones para que exista una función $z = z(x, y)$ en una vecindad del punto $(1, 2, 3)$.
   (b) Bajo las condiciones anteriores , encontrar $z_x(1, 2)$.
   (c) ¿Bajo qué condiciones se cumple la igualdad: $zz_y = z_x$ en el punto $(1, 2, 3)$?

3. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $g(3, 5) = \pi/2$, y $\nabla g(3, 5) = (a, b)$. Considere la ecuación
$$x^2 + y^2 + xz^2 + \cos(g(zx, y + z)) = 14.$$
   (a) Determine los valores de los números reales a y b para los cuales existe una función diferenciable $z = z(x, y)$ solución de la ecuación dada cerca del punto $(1, 2, 3)$.
   (b) Si a y b toman valores dados en el inciso anterior, obtenga la ecuación del plano tangente de $z = z(x, y)$ en $(1, 2, 3)$.

4. Pruebe que el sistema de ecuaciones
$$\left.\begin{array}{rcl} e^u + xy^2 + v &=& 2 \\ \operatorname{sen} u + x^2 y + v^3 &=& 1 \end{array}\right\},$$
define a u y v como funciones implícitas diferenciables de las variables x e y en una vecindad del punto $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0, 2, 0, 1)$. Calcule
$u(0, 2); v(0, 2); \dfrac{\partial u}{\partial x}(0, 2)$ y $\dfrac{\partial v}{\partial y}(0, 2)$.

5. Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con derivadas parciales continuas en una vecindad del punto $(1, 2)$, tal que $f(1, 2) = 0$, $f_x(1, 2) = 2$, $f_y(1, 2) = 3$. Considere la ecuación:
$$1 + f(y + 2\operatorname{sen} z, x + z) = e^{f(x-y,2y+z)}.$$
   (a) ¿Existe una función $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en el punto $(2, 1)$ tal que en una vecindad de $(2, 1)$ se tenga $z = h(x, y)$, donde $h(2, 1) = 0$?
   (b) Determine la derivada direccional de la función h, si existe, en el punto $(2, 1)$ en la dirección en que esta derivada es máxima.

6. Dada la transformación
$$\begin{array}{rcl} u &=& x + xyz \\ v &=& y + xy \\ w &=& z + 2x + 3z^2. \end{array}$$
¿Es esta transformación invertible cerca del origen?

7. Dada la transformación

$$\begin{aligned} u &= \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \\ v &= \frac{xy}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

¿Es esta transformación invertible cerca del punto $(x,y)=(0,1)$?

8. Sea $f(x,y)=(x+x^2+y, x^2+y^2)$ de clase $\mathcal{C}^1$. Si $f(1,1)=(3,2)$, determine la diferencial de f^{-1} en el punto $(3,2)$.

9. Dada la transformación $T(u,v)=(u-uv, uv)$.
   (a) Determine las condiciones para que la transformación sea invertible y calcule la trasformación inversa.
   (b) Sea el rectángulo $R=[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]\times[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$. Determine la gráfica de la imagen de R bajo la transformación T.

10. Considere la función $\vec{f}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\vec{f}(x,y)=(u,v)$ definida implícitamente por el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} u+3x-y^3 &= 0 \\ v+3y+x^3 &= 0. \end{aligned}$$

Analizar si f admite inversa local en torno al punto (x_0,y_0) , en cada uno de los dos casos siguientes: (a) $(x_0,y_0)=(1,0)$ (b) $(x_0,y_0)=(1,1)$.
En caso de que la inversa exista y sea derivable, hallar sus derivadas parciales respecto de u en el punto $(u_0,v_0)=f(x_0,y_0)$.

11. Dada la transformación:

$$T: \quad u=\frac{x}{x^2+y^2}, \qquad v=\frac{y}{x^2+y^2}$$

   (a) Pruebe que la transformación admite una inversa local diferenciable en cualquier vecindad que no contenga al origen.
   (b) Determine la imagen de los círculos $x^2+y^2=k^2$, $k=1/2$, 1, 2. Comente.

12. Se definen las coordenadas esféricas como la transformación $\Phi:\mathbb{R}_0^+\times[0,2\pi]\times[0,\pi]\to\mathbb{R}^3$ dada por:

$$\begin{aligned} \rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi &= x, \\ \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi &= y, \\ \rho\cos\phi &= z. \end{aligned}$$

   (a) Determine y dibuje la imagen del paralelepípedo $[0,3]\times[0,2\pi]\times[0,\pi/2]$.
   (b) Si $u=u(x,y,z)$ es una función de clase C^2, determine una expresión para el operador de Laplace $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$ en coordenadas esféricas.

13. Considere la función $z=f(x,y)$ que en los alrededores del punto $(1,1,1)$ esta definida implícitamente por

$$z^3+3x^2y-y^3z+y^2-3x-1=0$$

obtener la expansión de Taylor de orden 2 para z en $(1,1)$.

14. (a) Sea $f(x,y)=x^5\cos(x+y)$. Encuentre el polinomio $p(x,y)$ de grado 9 que mejor aproxima a la función $f(x,y)$ cerca de $(x,y)=(0,0)$.
   (b) Sea $G(x,y,z)$ una función de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ tal que $G(1,0,1)=0$ y

$$\nabla G(1,0,1)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \text{ y } H_G(1,0,1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

   Muestre que existe un abierto $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ que contiene al punto $(1,0)$ y una función $F:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2(\Omega)$ tal que $F(1,0)=1$ y $G(x,y,F(x,y))=0, \forall(x,y)\in\Omega$. Calcule la matriz $H_F(1,0)$.

Problemas Resueltos

1. Con las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcl} e^u\cos(v)-x &=& 0\\ e^u\,\mathrm{sen}(v)-y &=& 0\end{array}\right|$$

   (a) ¿Es posible definir a u y v como funciones de x e y en $P_0=(u,v,x,y)=\left(0,\frac{\pi}{3},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$?

   (b) Encuentre en P_0 las derivadas $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

   (c) Determine el ángulo entre los vectores $\dfrac{\partial u}{\partial x}\hat{\imath}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\hat{\jmath}$ y $\dfrac{\partial v}{\partial x}\hat{\imath}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\hat{\jmath}$.

   Solución.

   (a) Sean $F(u,v,x,y)=e^u\cos v-x$ y $G(u,v,x,y)=e^u\,\mathrm{sen}\,v-y$. Ambas funciones diferenciables en todo $\mathbb{R}^4$. Además, el punto P_0 satisface el sistema $F=G=0$. Por último, la matriz Jacobiana:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{bmatrix} e^u\cos v & -e^u\,\mathrm{sen}\,v\\ e^u\,\mathrm{sen}\,v & e^u\cos v\end{bmatrix},$$

   que evaluado en P_0 es

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

   cuyo determinate es $1\neq 0$. Luego, por el Teorema de la función implícita es posible definir a u y v como funciones de x e y en $P_0=(u,v,x,y)=\left(0,\frac{\pi}{3},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

   (b) Las derivadas parciales se obtienen de la ecuación matricial

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\cdot\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)},$$

   que se evalúa en P_0 para obtener

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

   Al invertir se obtiene lo deseado, es decir

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

   (c) Utilizamos la definición de producto punto para los vectores ∇u y ∇v en P_0 que entrega

$$\begin{array}{rcl} \nabla u(P_0)\cdot\nabla v(P_0) &=& ||\nabla u(P_0)||\cdot||\nabla v(P_0)||\cos(\measuredangle(\nabla u(P_0),\nabla v(P_0)))\\ 0=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right) &=& \cos(\measuredangle(\nabla u(P_0),\nabla v(P_0))).\end{array}$$

   Luego, ambos vectores son ortogonales y el ángulo que forman es de $\dfrac{\pi}{2}$ ó $\dfrac{3\pi}{2}$.

2. Dadas las ecuaciones:

$$(P)\qquad \left.\begin{array}{rcl} x &=& u+2v,\\ y &=& 3u^2+v^2,\\ z &=& u^3+v^3\end{array}\right|$$

   (a) Entregue las condiciones para las cuales exista la superficie $z=f(x,y)$ obtenida de las ecuaciones dadas en (P).

   (b) Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie $z=f(x,y)$ donde $u=1$ & $v=2$.

   Solución.

(a) Sean

$$\begin{aligned} x &= u+2v, & (1)\\ y &= 3u^2+v^2. & (2)\end{aligned}$$

Como $z=f(u,v)=u^3+v^3$, si somos capaces de invertir el sistema (1)-(2) a $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ se tendrá que $z=f(u(x,y),v(x,y))=f(x,y)$ y el problema estará resuelto. Para tal fin, usamos el Teorema de la Función Inversa en el sistema (1)-(2). En efecto, las funciones $x=u+2v$ e $y=3u^2+v^2$ son de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ pues son polinomios. Resta por imponer que el Jacobiano

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 6u & 2v\end{vmatrix}=2(v-6u),$$

sea no nulo. Esto ocurre si y solo si $v\neq 6u$. En tal caso, es posible despejar de forma única y diferenciable a $z=f(x,y)=u^3(x,y)+v^3(x,y)$.

(b) El plano tangente es

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0),$$

donde (x_0,y_0,z_0) se obtiene de reemplazar los valores $u=1,v=2$ en (P) y entrega $(x_0,y_0,z_0)=(5,7,9)$. Además, por la regla de la cadena

$$\begin{aligned} f_x &= f_u u_x + f_v v_x\\ f_y &= f_u u_y + f_v v_y.\end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}f_x\\ f_y\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}u_x & v_x\\ u_y & v_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_u\\ f_v\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}f_u\\ f_v\end{bmatrix},\end{aligned}$$

donde $f_u(1,2)=3u^2|_{(1,2)}=3$ y $f_v(1,2)=3v^2|_{(1,2)}=12$ y la matriz $\begin{bmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{bmatrix}$ se determina tomando la Inversa de $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 6u & 2v\end{bmatrix}$ evaluada en $(1,2)$, la cual está dada por

$$\frac{1}{2(v-6u)}\begin{bmatrix}2v & -2\\ -6u & 1\end{bmatrix}\Bigg|_{(1,2)}=-\frac{1}{8}\begin{bmatrix}4 & -2\\ -6 & 1\end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$\begin{bmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/2 & 1/4\\ 3/4 & -1/8\end{bmatrix}$$

De esta forma

$$\begin{bmatrix}f_x\\ f_y\end{bmatrix}\Bigg|_{(5,7)}=\begin{bmatrix}-1/2 & 3/4\\ 1/4 & -1/8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15/2\\ -3/4\end{bmatrix}$$

Y el plano tangente es

$$z-9=\frac{15}{2}(x-5)-\frac{3}{4}(y-7).$$

3. Se definen las coordenadas cilíndricas como la transformación $\Phi:\mathbb{R}_0^+\times[0,2\pi]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ dada por:

$$\begin{aligned}\rho\cos\theta &= x,\\ \rho\,\mathrm{sen}\,\theta &= y,\\ z &= z.\end{aligned}$$

(a) Determine y dibuje la imagen $\Omega=\Phi(R)$ del paralelepípedo $R=[0,3]\times[0,\pi]\times[-1,1]$.

(b) Si $u=u(x,y,z)$ es una función de clase C^2, determine una expresión para el operador de Laplace $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$ en coordenadas cilíndricas.

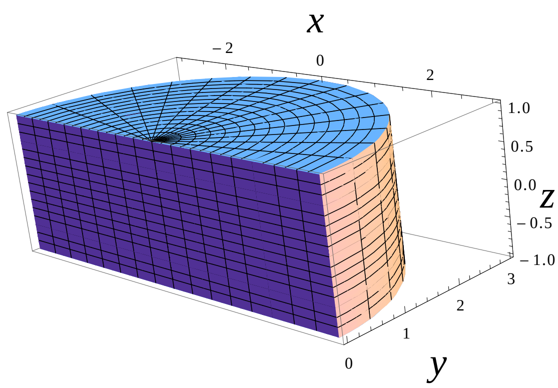

Figura 1: Imagen de R bajo la transformación de coordenadas.

Solución.

(a) La imagen de R bajo la transformación es simplemente la mitad de un cilindro circular de radio 3 y altura 2 que se ilustra en la figura.

(b) Para expresar al Laplaciano en el nuevo sistema de coordenadas, primero notamos que la tercera componente (z) no influye en nuestros cálculos y pasa directamente a la forma final del operador. Ahora, retenemos las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} u_x &= u_r r_x + u_\theta \theta_x \\ u_y &= u_r r_y + u_\theta \theta_y, \end{aligned}$$

pero, por la regla de la cadena y las transformación de coordenadas se tiene

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{x}{r} = \cos\theta, \\ r_y &= \frac{y}{r} = \operatorname{sen}\theta, \\ \theta_x &= -\frac{y}{x^2}\frac{1}{1+(y/x)^2} = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}, \\ \theta_y &= \frac{1}{x}\frac{1}{1+(y/x)^2} = \frac{\cos\theta}{r}. \end{aligned}$$

Reemplazando en lo anterior obtenemos

$$u_x = \cos\theta\, u_r - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} u_\theta \tag{3}$$

$$u_y = \operatorname{sen}\theta\, u_r + \frac{\cos\theta}{r} u_\theta. \tag{4}$$

Ahora, usando la regla de la cadena dos veces obtenemos

$$\begin{aligned} u_{rr} &= u_{xx}x_r^2 + u_x x_{rr} + u_{yy}y_r^2 + u_y y_{rr} \\ &= \cos^2\theta\, u_{xx} + \operatorname{sen}^2\theta\, u_{yy} \qquad (5) \\ u_{\theta\theta} &= u_{xx}x_\theta^2 + u_x x_{\theta\theta} + u_{yy}y_\theta^2 + u_y y_{\theta\theta} \\ &= r^2\operatorname{sen}^2\theta\, u_{xx} - r\cos\theta\, u_x + r^2\operatorname{sen}^2\theta\, u_{yy} - r\operatorname{sen}\theta\, u_y \\ &= r^2\operatorname{sen}^2\theta\, u_{xx} + r^2\operatorname{sen}^2\theta\, u_{yy} - ru_r, \qquad (6) \end{aligned}$$

donde se han usado (3) y (4) para simplificar la expresión de $u_{\theta\theta}$. Multiplicando (5) por r^2 y sumando con (6) obtenemos

$$r^2u_{rr} + u_{\theta\theta} + ru_r = r^2(u_{xx}+u_{yy}) \Longrightarrow u_{xx}+u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

y sumando u_{zz} a ambos lados obtenemos lo deseado, es decir

$$\Delta u = u_{xx}+u_{yy}+u_{zz} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_{zz}.$$

4. La superficie del Toro está definida paramétricamente por las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= (a + b\cos\varphi)\cos\theta \\ y &= (a + b\cos\varphi)\operatorname{sen}\theta \\ z &= b\operatorname{sen}\varphi \end{aligned}$$

con $\theta, \varphi \in [0, 2\pi]$ y $a > b > 0$ constantes.

(a) Determine si existe una vecindad de $(x, y, z) = (a, 0, b)$, en la superficie del Toro, en la que se puede despejar $z = f(x, y)$ como función de clase C^1 en términos de x e y.

(b) Calcular $\nabla f(x, y)$ en términos de θ y φ

Solución.

(a) Despejar z en términos de x e y, es equivalente a despejar de las dos primeras ecuaciones φ en términos de x e y. Para esto se aplica el teorema de la función inversa a la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $F(\theta, \varphi) = ((a + b\cos\varphi)\cos\theta, (a + b\cos\varphi)\operatorname{sen}\theta) = (x, y)$

Si

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (a, 0, b) \\ &= ((a + b\cos\varphi)\cos\theta, (a + b\cos\varphi)\operatorname{sen}\theta, b\operatorname{sen}\varphi) \\ &\Rightarrow (\theta, \varphi) = (0, \pi/2), \end{aligned}$$

F satisface las hipótesis del teorema de la función inversa porque las funciones componentes de F son funciones de clase $\mathcal{C}^1$, por otra parte, el Jacobiano de F en el punto (θ, φ) es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \varphi)} = JF(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -(a + b\cos\varphi)\operatorname{sen}\theta & -b\cos\theta\operatorname{sen}\varphi \\ \cos\theta(a + b\cos\varphi) & -b\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \end{pmatrix} \quad \therefore\ JF(0, \pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

Como $\det(JF(0, \pi/2)) = ab \neq 0$, entonces por el teorema de la función inversa, existen vecindades U de $(\theta, \varphi) = (0, \pi/2)$ en $\mathbb{R}^2$ y W de $(x, y) = (a, 0)$ en $\mathbb{R}^2$, tal que $F : U \to W$ es biyección, con inversa de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $(\theta, \varphi) = F^{-1}(x, y) = (g(x, y), f(x, y))$, para todo $(x, y) \in W$. Por lo tanto

$$z = b\operatorname{sen}\varphi = b\operatorname{sen}(f(x, y))$$

(b) La matriz Jacobiana de $JF^{-1}(x, y)$, está dada por

$$JF^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{\operatorname{sen}\theta}{a+b\cos\varphi} & \frac{\cos\theta}{a+b\cos\varphi} \\ -\frac{\cos\theta\csc\varphi}{b} & -\frac{\csc\varphi\operatorname{sen}\theta}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_x & \theta_y \\ \varphi_x & \varphi_y \end{pmatrix}$$

Entonces el gradiente de $z = f(x, y)$ es

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= (z_x, z_y) = (b\cos\varphi\varphi_x, b\cos\varphi\varphi_y) = \left(-\frac{\cos\theta\csc\varphi}{b} b\cos\varphi, -\frac{\csc\varphi\operatorname{sen}\theta}{b} b\cos\varphi\right) \\ &= -\cot\varphi(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \end{aligned}$$

5. Sea $f(x, y) = xye^{x^2+2y^2}$. Encuentre (explícitamente) un polinomio en dos variables, $p(x, y)$ con la propiedad

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) - p(x, y)}{x^4 + y^4} = 0$$

Solución. Notemos que si $\phi(t) = e^t$, entonces por el teorema de Taylor en una variable

$$e^t = \phi(0) + \phi'(0)t + \phi''(\psi)\frac{t^2}{2}, \quad \psi \in]0, t[.$$

Reemplazando $t = x^2 + y^2$ y usando que $\phi(0) = \phi'(0) = 1$, obtenemos

$$e^{x^2+2y^2} = 1 + x^2 + 2y^2 + \frac{1}{2}e^{\psi}(x^2 + 2y^2)^2, \quad \psi \in]0, x^2 + 2y^2[.$$

Por lo tanto,

$$xye^{x^2+2y^2} - xy(1+x^2+2y^2) = \frac{1}{2}xye^{\psi}(x^2+2y^2)^2$$

y entonces, como $\psi \to 0$, cuando $(x,y) \to (0,0)$ encontramos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-p(x,y)}{x^4+y^4} = 0$$

si tomamos $p(x,y) = xy(1+x^2+2y^2)$.
Nota: Se obtiene el mismo resultado, aunque con más cálculos si se hace un desarrollo de Taylor de orden 4 de la función $f(x,y)$ en torno a $(0,0)$.