Ecuaciones Diferenciales Parciales

1. Para $\lambda \in \mathbb{R}$ considere la ecuación diferencial parcial: Hallar $u = u(x,y)$ tal que

$$\lambda u_{xx} + 4u_{xy} + 21u_{yy} = 0$$

(i) Clasifique la ecuación diferencial parcial para los distintos valores de $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) Para $\lambda = -1$ transforme la ecuación a su forma normal y encuentre la solución general.

Solución:

(i) Se tiene el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, donde $a = \lambda$, $b = 4$ y $c = 21$. Luego:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 84\lambda \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda < 4/21 \ \therefore \text{ EDP Hiperbólica,} \\ \Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4/21 \ \therefore \text{ EDP Parabólica,} \\ \Delta < 0 \Leftrightarrow \lambda > 4/21 \ \therefore \text{ EDP Elíptica.} \end{cases}$$

(ii) Para $\lambda = -1$, las ecuaciones características quedan: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4 \pm \sqrt{100}}{-2}$

$$y = 3x + C_1, \qquad y = -7x + C_2.$$

Luego el cambio de coordenadas es $\xi = y - 3x$ y $\eta = y + 7x$. Así se tiene que:

$$\begin{aligned} u_x &= -3u_\xi + 7u_\eta \\ u_y &= u_\xi + u_\eta \\ u_{xx} &= 9u_{\xi\xi} - 42u_{\xi\eta} + 49u_{\eta\eta} \\ u_{xy} &= -3u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta} + 7u_{\eta\eta} \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \end{aligned}$$

sustituyendo en la EDP y reduciendo términos se tiene que $100u_{\xi\eta} = 0$, luego solo es necesario resolver

$$u_{\xi\eta} = 0,$$

esta nueva ecuación tiene como solución

$$u(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta), \quad F, G \in C^2,$$

asi la solución general de la EDP es:

$$u(x,y) = F(y - 3x) + G(y + 7x), \quad F, G \in C^2,$$

2. Considere el problema de hallar $u = u(x,t)$ tal que

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Determine todos los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$, tales que el problema con las condiciones $u(x, \lambda x) = f(x)$ y $u_t(x, \lambda x) = g(x)$ tenga una solución única para todo $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$

Solución: Se sabe que la solución de la ecuación de onda $u_{tt} = 4u_{xx}$ para $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$ se obtiene mediante la transformación $\xi = x + 2t$ y $\eta = x - 2t$, la cual reduce la ecuación a $u_{\xi\eta} = 0$ lo que permite concluir que la solución de la EDP es $u(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta)$ donde F y G son funciones arbitrarias o bien:

$$u(x,t) = F(x + 2t) + G(x - 2t),$$

reemplazando las condiciones $u(x, \lambda x) = f(x)$ y $u_t(x, \lambda x) = g(x)$ se tiene

$$\begin{aligned} u(x,\lambda x) = F(x + 2\lambda x) + G(x - 2\lambda x) &= f(x) \\ u_t(x,\lambda x) = 2F'(x + 2\lambda x) - 2G'(x - 2\lambda x) &= g(x) \end{aligned}$$

derivando se obtiene un sistema de ecuaciones para $F'(x+2\lambda x)$ y $G'(x-2\lambda x)$

$$\begin{aligned}(1+2\lambda)F'(x+2\lambda x)+(1-2\lambda)G'(x-2\lambda x) &= f'(x)\\ 2F'(x+2\lambda x)-2G'(x-2\lambda x) &= g(x)\end{aligned}$$

el cual tiene como soluciones

$$F'(x+2\lambda x)=\frac{f'(x)}{2}-\frac{(2\lambda-1)}{4}g(x), \qquad G'(x-2\lambda x)=\frac{f'(x)}{2}-\frac{(2\lambda+1)}{4}g(x)$$

• Si $\lambda \in \mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$ se tiene que integrando las ecuaciones anteriores, se obtienen las expresiones

$$\begin{aligned}\frac{F(x+2\lambda x)}{1+2\lambda} &= \frac{f(x)}{2}-\frac{(2\lambda-1)g(x)}{4}+C_1,\\ \frac{G(x-2\lambda x)}{1-2\lambda} &= \frac{f(x)}{2}-\frac{(2\lambda+1)g(x)}{4}+C_2,\end{aligned}$$

como C_1 y C_2 están en $\mathbb{R}$ hay infinitas soluciones.

• Si $\lambda=\frac{1}{2}$ se tiene que $G'(0)=\dfrac{f'(x)-g(x)}{2}$ y además $2F'(2x)=f'(x)$, luego $F(2x)=f(x)+C_1$, es decir, si $f'(x)-g(x)=\in\mathbb{R}$ hay infinitas soluciones y si $f'(x)-g(x)=h(x)$ no hay soluciones.

• Si $\lambda=-\frac{1}{2}$ se tiene que $F'(0)=\dfrac{f'(x)+g(x)}{2}$ y además $2G'(2x)=f'(x)$, luego $G(2x)=f(x)+C_2$, es decir, si $f'(x)+g(x)=k\in\mathbb{R}$ hay infinitas soluciones y si $f'(x)+g(x)=h(x)$ no hay soluciones.

3. Para $f(x)$ una función continua sobre todo $\mathbb{R}$ considere el problema: Hallar $u=u(x,y)$ tal que

$$\begin{cases} u_{xx} = 2u_{xy}+3u_{yy} & x\in\mathbb{R}, \quad y>0,\\ u(x,-x) = f(x) & x\in\mathbb{R},\\ u_y(x,-x) = 1 & x\in\mathbb{R},\end{cases}$$

(i) Clasifique la ecuación diferencial parcial según su forma normal.

(ii) Encuentre la solución general del problema propuesto.

Sugerencia: Considere el cambio de coordenadas $\eta=x+y$, $\xi=x$ y observe que las condiciones iniciales del problema están puestas sobre la recta $y=-x$.

Solución:

(i) Se tiene que el discriminante $\Delta=b^2-4ac$, con $a=1$, $b=-2$ y $c=-3$. esta dado por:

$$\Delta=b^2-4ac=16 \quad\Longrightarrow\quad \Delta>0 \ \therefore \text{ EDP Hiperbólica}$$

(ii) Las condiciones iniciales del problema $u(x,-x)=f(x)$ y $u_y(x,-x)=1$ están sobre la recta $y=-x$, luego usando el cambio de coordenadas entregado se tiene que las nuevas condiciones iniciales son:

$$u(\xi,0)=f(\xi), \qquad u_\eta(\xi,0)=1.$$

Ademas se observa que:

$$\begin{aligned}u_x &= u_\xi+u_\eta\\ u_y &= u_\eta\\ u_{xx} &= u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\\ u_{xy} &= u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\\ u_{yy} &= u_{\eta\eta}\end{aligned}$$

sustituyendo los términos anteriores en la EDP se obtiene que:

$$u_{\eta\eta}=\frac{1}{4}u_{\xi\xi}$$

la cual es una ecuación de Onda. La resolución de esta ultima ecuación pasa por el uso de la formula D'Alembert, se tiene que:

$$u(\xi,\eta)=\frac{f(\xi+\frac{1}{2}\eta)+f(\xi-\frac{1}{2}\eta)}{2}+\int_{\xi-\frac{1}{2}\eta}^{\xi+\frac{1}{2}\eta}d\tau=\frac{f(\xi+\frac{1}{2}\eta)+f(\xi-\frac{1}{2}\eta)}{2}+\eta,$$

la solución final de la ecuación es

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\left\{f\left(\frac{y+3x}{2}\right)+f\left(\frac{x-y}{2}\right)\right\}+x+y$$

4. Determine la solución general $u=u(x,t)$ de la ecuación diferencial parcial

$$u_{xx}+4u_x+4u_t=u_{tt}+4(x-t)e^{-2(x-t)}.$$

Solución: Notamos que la ecuación característica de esta EDP es $\dfrac{dx}{dt}=\pm 1$ y corresponde a ser una ecuación del tipo Hiperbólica. Luego las curvas características son

$$\eta=x-t \qquad \xi=x+t,$$

de esta forma se reduce la EDP a su forma normal, para esto

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\eta+u_\xi\\
u_{xx} &= u_{\eta\eta}+2u_{\xi\eta}+u_{\xi\xi}\\
u_t &= -u_\eta+u_\xi\\
u_{tt} &= u_{\eta\eta}-2u_{\xi\eta}+u_{\xi\xi}
\end{aligned}$$

luego

$$u_{xx}+4u_x+4u_t=u_{tt}+4(x-t)e^{-2(x-t)} \qquad \Longrightarrow \qquad u_{\xi\eta}+2u_\xi=\eta e^{-2\eta},$$

la cual es una EDO de primer orden para $w=u_\xi$, es decir, $w_\eta+2w=\eta e^{-2\eta}$. Con solución dada por

$$w=\frac{\eta^2}{2}e^{-2\eta}+f(\xi)e^{-2\eta} \qquad \Longrightarrow \qquad u=\frac{\xi\eta^2}{2}e^{-2\eta}+F(\xi)e^{-2\eta}+G(\eta),$$

con F y G funciones arbitrarias, de esta forma la solución final de la EDP es

$$u(x,t)=\tfrac{1}{2}(x+t)(x-t)^2e^{-2(x-t)}+F(x+t)e^{-2(x-t)}+G(x-t)$$

5. Encuentre la solución general del problema: Hallar $u=u(x,t)$ tal que

$$t^5u_{xx}+2u_t=tu_{tt}, \quad t>0$$

posteriormente encuentre la solución si se tienen las condiciones $u(0,t)=\frac{t^6}{9}$ y $u_x(0,t)=1$.

Solución: Las ecuaciones características vienen dadas por $x'(t)=\pm t^2$, de esta forma las curvas características son $x=\pm\frac{t^3}{3}$, luego el cambio de coordenadas a utilizar es $r=x+\frac{t^3}{3}$ y $s=x-\frac{t^3}{3}$, lo cual al ser reemplazado en la ecuación permite obtener

$$t^4u_{rs}=0,$$

como $t>0$ se tiene que la solución general es

$$u(r,s)=f(r)+g(s)$$

con f y g funciones arbitrarias, luego al volver a las variables originales se tiene que

$$u(x,t)=f\left(x+\frac{t^3}{3}\right)+g\left(x-\frac{t^3}{3}\right),$$

al imponer las condiciones se tiene que

$$f\left(\frac{t^3}{3}\right)+g\left(-\frac{t^3}{3}\right)=\frac{t^6}{9}$$

y también

$$f'\left(\frac{t^3}{3}\right)+g'\left(-\frac{t^3}{3}\right)=1$$

e integrando respecto a t se tiene que

$$f\left(\frac{t^3}{3}\right)-g\left(-\frac{t^3}{3}\right)=\frac{t^3}{3}+c$$

luego tomando $z=\frac{t^3}{3}$ se logra obtener $f(z)=\frac{1}{2}(z^2+z+c)$ y $g(z)=\frac{1}{2}(z^2+z-c)$. Así la solución final es

$$u(x,t)=x+\frac{1}{2}\left[\left(x+\frac{t^3}{3}\right)^2+\left(x-\frac{t^3}{3}\right)^2\right]$$

6. Resuelva el problema de Sturm Liouville: Hallar $m(x)$ y λ tal que

$$m''(x)+\lambda m(x)=0,\quad 0<x<\ell$$

sujeto a las condiciones de contorno o de borde:

(i) $m(0)=m(\ell)=0$.
(ii) $m'(0)=m'(\ell)=0$.
(iii) $m(0)=m'(\ell)=0$.
(iv) $m'(0)=m(\ell)=0$.
(v) $m(0)+m'(0)=0$, $m(\ell)=0$.
(vi) $m(0)=m(\ell)$, $m'(0)=m'(\ell)$.
(vii) $m(0)-m'(0)=0$, $m(\ell)-m'(\ell)=0$

Solución: Analizamos directamente el caso $\lambda>0$ pues no entrega soluciones no nulas, en tal caso, la solución de la ecuación viene dada como

$$m(x)=a\cos\sqrt{\lambda}x+b\sin\sqrt{\lambda}x$$

(i) $m(0)=m(\ell)=0$. Al imponer las condiciones tenemos que $\lambda_k=\dfrac{k^2\pi^2}{\ell}$ luego $m_k(x)=\sin\dfrac{k\pi x}{\ell}$.

(ii) $m'(0)=m'(\ell)=0$. Similar al caso anterior al imponer las condiciones tenemos que $\lambda_k=\dfrac{k^2\pi^2}{\ell}$ luego $m_k(x)=\cos\dfrac{k\pi x}{\ell}$.

(iii) $m(0)=m'(\ell)=0$. Tenemos que $\lambda_k=\dfrac{(2k+1)^2\pi^2}{4\ell^2}$ y $m_k(x)=\sin\sqrt{\lambda_k}x$.

(iv) $m'(0)=m(\ell)=0$. También es similar al caso anterior, así tenemos que $\lambda_k=\dfrac{(2k+1)^2\pi^2}{4\ell^2}$ y $m_k(x)=\cos\sqrt{\lambda_k}x$.

(v) $m(0)+m'(0)=0$, $m(\ell)=0$. Tenemos que $\lambda=\lambda_k$ satisface $\sqrt{\lambda_k}=\tan\sqrt{\lambda_k}\ell$ y las funciones propias son: $\sin\sqrt{\lambda_k}x$ y $\cos\sqrt{\lambda_k}x$.

(vi) $m(0)=m(\ell)$, $m'(0)=m'(\ell)$. El valor propio es $\lambda_k=\dfrac{4k^2\pi^2}{\ell^2}$ y las funciones propias son: $\sin\sqrt{\lambda_k}x$ y $\cos\sqrt{\lambda_k}x$.

(vii) $m(0)-m'(0)=0$, $m(\ell)-m'(\ell)=0$. Para este caso tenemos que el valor propio es $\lambda_k=\dfrac{k^2\pi^2}{\ell^2}$ así la funciones propias son: $\sin\sqrt{\lambda_k}x$ y $\cos\sqrt{\lambda_k}x$.

7. Resuelva el siguiente problema: Hallar $u = u(x,t)$ tal que

$$\begin{cases} u_t + u_{xx} &= \operatorname{sen}(x) & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0,t) &= 2 & t > 0, \\ u(\pi,t) &= 6 & t > 0, \\ u_t(x,0) &= 10\operatorname{sen}(5x) & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Solución:

El problema es no homogéneo por lo cual utilizamos que $u(x,t) = v(x,t) + \phi(x)$, así la función $\phi(x)$ satisface la ecuación diferencial $\phi''(x) = \operatorname{sen}(x)$ con las condiciones $\phi(0) = 2$ y $\phi(\pi) = 6$, la cual tiene como solución $\phi(x) = -\operatorname{sen}(x) + c_1 x + c_2$, imponiendo las condiciones se obtiene que $\phi(x) = -\operatorname{sen}(x) + \dfrac{4x}{\pi} + 2$. Luego el problema homogéneo a resolver es:

$$\begin{cases} v_t + v_{xx} &= 0 & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ v(0,t) &= 0 & t > 0, \\ v(\pi,t) &= 0 & t > 0, \\ v_t(x,0) &= 10\operatorname{sen}(5x) & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Utilizamos $v(x,t) = m(x)n(t)$ luego al reemplazar en la ecuación y usando el método de separación de variables se llega a

$$\frac{m''(x)}{m(x)} = \frac{n'(t)}{-n(t)} = -\lambda,$$

el problema de contorno asociado es $m''(x) + \lambda m(x) = 0$ sujeto a las condiciones $m(0) = m(\pi) = 0$, así las soluciones son $\lambda_k = k^2$ y $m_k(x) = \operatorname{sen}(kx)$. Mientras que el problema para la variable temporal es:

$$n_k'(t) - kn_k(t) = 0,$$

el cual tiene como solución $n_k(t) = a_k e^{k^2 t}$, de esta forma la solución de la ecuación diferencial sin imponer condiciones iniciales es:

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{k^2 t} \operatorname{sen}(kx),$$

imponiendo la condición inicial se tiene que

$$v_t(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 a_k \operatorname{sen}(kx) = 10\operatorname{sen}(5x),$$

igualando coeficientes se tiene que $a_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N} - \{5\}$, mientras que para $k = 5$ se tiene $a_5 = \frac{2}{5}$. Así la solución final del problema es

$$u(x,t) = \frac{2}{5} e^{25t} \operatorname{sen}(5x) - \operatorname{sen}(x) + \frac{4x}{\pi} + 2.$$

8. Obtener la solución de la siguiente ecuación diferencial parcial es

$$\begin{cases} u_{tt} &= u_{xx} & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0 & t > 0, \\ u(x,0) &= 4\sin(4x) & 0 < x < \pi, \\ u_t(x,0) &= 0 & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Solución: Consideramos $u(x,t) = m(x)n(t)$ de esta forma tenemos que

$$\frac{m''(x)}{m(x)} = \frac{n''(t)}{n(t)} = -\lambda$$

luego el problema de Sturm Liouville es $m''(x) + \lambda m(x) = 0$ sujeto a las condiciones $m(0) = m(\pi) = 0$ el cual tiene como valor propio $\lambda_k = k^2$ y función propia $m_k(x) = \sin(kx)$. Similarmente la solución del problema temporal $n_k''(t) + \lambda_k n_k(t) = 0$ es $n_k(t) = a_k \sin(kt) + b_k \cos(kt)$. Así

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \sin(kt) + b_k \cos(kt)) \sin kx,$$

si reemplazamos la condición $u(x,0) = 4\sin(4x)$ obtenemos que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kx) = 4\sin(4x)$, obteniéndose $b_4 = 4$ y $b_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N} - \{4\}$, luego si reemplazamos la condición $u_t(x,0) = 0$ obtenemos que $a_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Concluyéndose que la solución final es

$$u(x,t) = 4\cos(4t)\sin(4x).$$

9. Resuelva el siguiente problema: Hallar $u = u(x,t)$ tal que

$$\begin{cases} u_{tt} &= 2u_{xx} - u_t & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) &= u(\pi,t) = 0 & t > 0, \\ u(x,0) &= 0 & 0 < x < \pi, \\ u_t(x,0) &= \cos\left(\dfrac{3x}{2}\right) & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Solución:

Para la resolución de la EDP, se procede mediante separación de variables para esto construimos la solución como $u(x,t) = m(x)n(t)$, donde se tiene que:

$$u_{tt} = 2u_{xx} - u_t \quad \rightarrow \quad \frac{m''(x)}{m(x)} = \frac{n''(t) + n'(t)}{2n(t)} = -\lambda$$

de lo anterior se genera un problema de contorno, el cual consiste en: Hallar $m(x)$ y λ tal que

$$m''(x) + \lambda m(x) = 0, \qquad m'(0) = 0, \quad m(\pi) = 0,$$

las soluciones a este problema son $m_k(x) = \cos(\sqrt{\lambda_k}x)$ y $\lambda_k = \dfrac{(1+2k)^2}{4}$. Posteriormente se genera el problema temporal asociado, el cual esta dado por

$$n_k''(t) + n_k'(t) + 2\lambda_k n_k(t) = 0$$

tal problema tiene como solución:

$$n_k(t) = a_k e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{8\lambda_k - 1}}{2} t\right) + b_k e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{8\lambda_k - 1}}{2} t\right)$$

de este modo la solución de la ecuación diferencial parcial sin imponer la condición inicial es:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{8\lambda_k - 1}}{2} t\right) \cos(\sqrt{\lambda_k}x) + b_k e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{8\lambda_k - 1}}{2} t\right) \cos(\sqrt{\lambda_k}x)$$

imponiendo la condición $u(x,0) = 0$ se tiene que

$$u(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(\sqrt{\lambda_k}x) = 0,$$

es decir $a_k = 0$ para $k \geq 0$, ahora imponiendo la condición $u_t(x,0) = \cos\left(\dfrac{3x}{2}\right)$ se obtiene que

$$u_t(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{8\lambda_k - 1} b_k}{2} \cos(\sqrt{\lambda_k}x) = \cos\left(\frac{3x}{2}\right)$$

donde $b_k = 0$ si $k \neq 1$ mientras que para $k = 1$ se obtiene $b_1 = \dfrac{2}{\sqrt{8\lambda_1 - 1}}$, de este modo la solución final de la EDP es:

$$u(x,t) = b_1 e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{8\lambda_1 - 1}}{2} t\right) \cos(\sqrt{\lambda_1} x), \qquad \lambda_1 = \frac{9}{4}.$$

10. Resuelva el siguiente problema: Hallar $u = u(x,t)$ tal que

$$\begin{cases} u_t &= u_{xx} - 6x & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) &= 0 & t > 0, \\ u(1,t) &= 3 & t > 0, \\ u_t(x,0) &= 8\pi^2 \operatorname{sen}(2\pi x) & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Solución: El problema es no homogéneo por lo cual lo descomponemos en una parte homogénea y no homogénea, para esto tomamos $u(x,t) = v(x,t) + \phi(x)$, donde la función $\phi(x)$ se construye de modo que se tenga un problema homogéneo para $v = v(x,t)$.

De lo anterior tenemos que $\phi(x)$ satisface la ecuación diferencial $\phi''(x) = 6x$ con las condiciones $\phi(0) = 0$ y $\phi(1) = 3$, al resolver se obtiene que $\phi(x) = x^3 + 2x$. Luego el problema homogéneo corresponde a: Hallar $v = v(x,t)$ tal que

$$\begin{cases} v_t &= v_{xx} & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ v(0,t) &= 0 & t > 0, \\ v(1,t) &= 0 & t > 0, \\ v_t(x,0) &= 8\pi^2 \operatorname{sen}(2\pi x) & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Para resolver este último problema usamos separación de variables, es decir, tomamos $v(x,t) = m(x)n(t)$ luego al reemplazar en la ecuación y separar las variables se llega a

$$\frac{m''(x)}{m(x)} = \frac{n'(t)}{n(t)} = -\lambda.$$

• El problema de contorno generado es $m''(x) + \lambda m(x) = 0$ bajo las condiciones $m(0) = m(1) = 0$, cuyo valor propio es $\lambda_k = k^2\pi^2$ y la respectiva función propia es $m_k(x) = \sin(k\pi x)$.

• Para cada $k \in \mathbb{N}_0$ se resuelve el problema para la variable temporal, el cual es $n_k'(t) + \lambda_k n_k(t) = 0$, en tal caso la solución viene dada por $n_k(t) = a_k e^{-k^2\pi^2 t}$.

De forma la solución de la ecuación diferencial sin imponer las condiciones iniciales es:

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-k^2\pi^2 t} \sin(k\pi x),$$

imponiendo la condición inicial se tiene que

$$v_t(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(-k^2\pi^2) \sin(k\pi x) = 8\pi^2 \sin(2\pi x),$$

igualando coeficientes se tiene que $a_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N} - \{2\}$, mientras que para $k = 2$ se tiene $a_2(-4\pi^2) = 8\pi^2$, así $a_2 = -2$. De este modo la solución final de la ecuación diferencial parcial es:

$$u(x,t) = x^3 + 2x - 2e^{-4\pi^2 t} \sin(2\pi x)$$

11. Encuentre la solución $u = u(r,\theta)$ de la ecuación de Laplace:

$$\begin{cases} r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} &= 0 & 1 < r < 2, \quad 0 < \theta < \pi, \\ u_\theta(r,0) = u_\theta(r,\pi) &= 0 & 1 < r < 2, \\ u(1,\theta) &= 4 & 0 < \theta < \pi, \\ u_r(2,\theta) &= 1 + 5\cos(\theta) & 0 < \theta < \pi, \end{cases}$$

Solución:

Utilizamos $u(r,\theta) = m(\theta)n(r)$ luego al reemplazar en la ecuación y usando el método de separación de variables se llega a

$$\frac{m''(\theta)}{m(\theta)} = \frac{r^2 n''(r) + rn'(r)}{-n(r)} = -\lambda,$$

el problema de contorno asociado es $m''(\theta) + \lambda m(\theta) = 0$ sujeto a las condiciones $m'(0) = m'(\pi) = 0$, así las soluciones son $\lambda_k = k^2$ y $m_k(\theta) = \cos(k\theta)$. Mientras que el problema para la variable radial es:

$$r^2 n_k''(r) + rn_k'(r) - \lambda_k n_k(r) = 0,$$

de esta forma la solución de la ecuación diferencial sin imponer condiciones iniciales es:

$$u(r,\theta) = a_0 \ln(r) + b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k \cos(k\theta) + b_k r^{-k} \cos(k\theta),$$

imponiendo la condición inicial $u(1,\theta) = 4$ se tiene que

$$u(1,\theta) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\theta) + b_k \cos(k\theta) = 4,$$

igualando coeficientes se tiene que $b_0 = 4$ y $a_k + b_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Ahora imponiendo la condición inicial $u_r(2,\theta) = 1 + 5\cos(\theta)$ se tiene que

$$u_r(2,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(ka_k 2^{k-1} - kb_k 2^{-k-1}\right)\cos(k\theta) = 1 + 5\cos(\theta),$$

igualando coeficientes se tiene que $a_0 = 2$ y $ka_k 2^{k-1} - kb_k 2^{-k-1} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N} - \{1\}$, mientras que para $k = 1$ se tiene $a_1 - \dfrac{b_1}{4} = 5$, resolviendo el sistema se llega a $a_1 = 4$ y $b_1 = -4$. Así la solución final del problema es

$$u(r,\theta) = 2\ln(r) + 4 + 4r\cos(\theta) - 4r^{-1}\cos(\theta),$$

12. Considere el problema de valores propios

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad y(0) + y(1) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

(i) ¿Es un problema de Sturm Liouville?.

(ii) Resuelva el siguiente problema: Hallar $u = u(x,t)$ tal que

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t + u &=& 2tu_{xx} & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) &=& -u(1,t) & t > 0, \\ u_x(0,t) &=& 0 & t > 0, \\ u(x,0) &=& x & 0 < x < 1. \end{array}\right.$$

Solución:

(i) Es suficiente probar que los valores propios están en los reales y las funciones propias son ortogonales. La solución de la ecuación diferencial viene dada por $y(x) = a\cos\sqrt{\lambda}x + b\sin\sqrt{\lambda}x$ luego al imponer las condiciones dadas se tiene que de $y'(0) = 0$ se llega a $b\sqrt{\lambda} = 0$, de este modo $b = 0$ luego de la condición $y(0) + y(1) = 0$ se obtiene que $\cos\sqrt{\lambda} = -1$, de este modo $\lambda_k = \pi^2(1+2k)^2 \in \mathbb{R}$ y las funciones propias $y_k(x) = \cos\sqrt{\lambda_k}x$ son ortogonales. En efecto

$$\begin{aligned}
\Big\langle y_k(x), y_m(x)\Big\rangle &= \int_0^1 \cos\sqrt{\lambda_k}x\cos\sqrt{\lambda_m}xdx = \int_0^1 \cos\pi(1+2k)x\cos\pi(1+2m)xdx\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \Big[\cos\Big(\pi(1+2k)x+\pi(1+2m)x\Big)+\cos\Big(\pi(1+2k)x-\pi(1+2m)x\Big)\Big]dx\\
&= \frac{\sin\Big(\pi(1+2k)+\pi(1+2m)\Big)}{2\pi(1+2k)+2\pi(1+2m)} - \frac{\sin\Big(\pi(1+2k)-\pi(1+2m)\Big)}{2\pi(1+2k)-2\pi(1+2m)} = 0, \qquad k\neq m.\\
\Big\langle y_k(x), y_k(x)\Big\rangle &= \int_0^1 \cos^2\pi(1+2k)xdx,\\
&= \int_0^1 \left(\frac{1-\cos 2\pi(1+2k)x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(ii) Para la resolución de la EDP, se procede mediante separación de variables para esto tomamos $u(x,t) = m(x)n(t)$ luego

$$u_t + u = 2tu_{xx} \quad \to \quad \frac{m''(x)}{m(x)} = \frac{n'(t)+n(t)}{2tn(t)} = -\lambda$$

el cual genera el problema $m''(x)+\lambda m(x) = 0$ sujeto a las condiciones $u(0,t)+u(1,t) = 0,\ \ u_x(0,t) = 0$, cuya solución es $m_k(x) = \cos\pi(1+2k)x$ y $\lambda_k = \pi^2(1+2k)^2$ y el problema temporal es $n_k'(t)+(1+2t\lambda_k)n_k(t) = 0$ cuya solución es $n_k(t) = a_k e^{-t-\lambda_k t^2}$, de este modo la solución de la ecuación sin imponer la condición inicial es

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-t-\lambda_k t^2}\cos\pi(1+2k)x$$

imponiendo la condición $u(x,0) = x$ y usando la ortogononalidad de las funciones propias se tiene que

$$u(x,0) = x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\cos\pi(1+2k)x \quad \to \quad a_k = \frac{\Big\langle x, m_k(x)\Big\rangle}{\Big\langle m_k(x), m_k(x)\Big\rangle} = 2\int_0^1 x\cos\pi(1+2k)xdx = \frac{-4}{(\pi+2k\pi)^2}$$

luego la solución final de la ecuación es

$$u(x,t) = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4e^{-t-\lambda_k t^2}\cos\pi(1+2k)x}{(\pi+2k\pi)^2}$$

13. Determine soluciones acotadas para el problema: Hallar $u = u(r,\theta)$ tal que

$$\begin{cases}
r^2u_{rr}+ru_r = 6\theta - u_{\theta\theta} & r>1, \quad 0<\theta<\pi,\\
u_\theta(r,0) = 0 & r>1,\\
u_\theta(r,\pi) = 3\pi^2 & r>1,\\
u(1,\theta) = 4+\theta^3+6\cos 3\theta & 0<\theta<\pi.
\end{cases}$$

Solución:

El problema es no homogéneo por lo cual utilizamos que $u(r,\theta) = v(r,\theta)+\phi(\theta)$, así la función $\phi(\theta)$ satisface la ecuación diferencial $\phi''(\theta) = 6\theta$ con las condiciones $\phi'(0) = 0$ y $\phi'(\pi) = 3\pi^2$, la cual tiene como solución $\phi(\theta) = \theta^3+b$ con $b\in\mathbb{R}$, tomamos $b = 4$. Luego el problema homogéneo a resolver es:

$$\begin{cases}
r^2v_{rr}+rv_r = -v_{\theta\theta} & r>1, \quad 0<\theta<\pi,\\
v_\theta(r,0) = 0 & r>1,\\
v_\theta(r,\pi) = 0 & r>1,\\
v(1,\theta) = 6\cos 3\theta & 0<\theta<\pi,
\end{cases}$$

Utilizamos $v(r,\theta) = m(\theta)n(r)$ luego al reemplazar en la ecuación y usando el método de separación de variables se llega a

$$\frac{m''(\theta)}{m(\theta)} = \frac{r^2n''(r) + rn'(r)}{-n(r)} = -\lambda,$$

el problema de contorno asociado es $m''(\theta) + \lambda m(\theta) = 0$ sujeto a las condiciones $m'(0) = m'(\pi) = 0$, así las soluciones son $\lambda_k = k^2$ y $m_k(\theta) = \cos(k\theta)$. Mientras que el problema para la variable radial es:

$$r^2n_k''(r) + rn_k'(r) - \lambda_k n_k(r) = 0,$$

de esta forma la solución de la ecuación diferencial sin imponer condiciones iniciales

$$v(r,\theta) = a_0\ln(r) + b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k\cos k\theta + b_k r^{-k}\cos k\theta,$$

buscamos soluciones acotadas, de este modo pedimos que $\lim\limits_{r\to+\infty} v(r,\theta) < +\infty$, así $a_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego imponiendo la condición inicial se tiene que

$$v(1,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k\cos k\theta = 6\cos 3\theta,$$

igualando coeficientes se tiene que $b_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N} - \{3\}$, mientras que para $k = 3$ se tiene $b_3 = 6$. Así la solución final del problema es

$$u(r,\theta) = \theta^3 + 4 + 6r^{-3}\cos 3\theta.$$

14. Determine la solución $u = u(x,t)$ de la siguiente ecuación diferencial parcial

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t - u_{xx} & = & 2t + 4te^{-4\pi^2 t}\cos(2\pi x) & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) & = & u(1,t) & t > 0, \\ u_x(0,t) & = & u_x(1,t) & t > 0, \\ u(x,0) & = & \cos(2\pi x) & 0 < x < 1. \end{array}\right.$$

Solución:

Procedemos mediante variación de parámetros, para esto consideramos el problema de Sturm Liouville o de contorno asociado a la EDP, el cual es: Hallar $m(x)$ y λ tal que

$$m_k''(x) + \lambda_k m_k(x) = 0, \qquad m_k(0) = m_k(1), \qquad m_k'(0) = m_k'(1)$$

el cual tiene como valor propio $\lambda_k = 4k^2\pi^2$ y función propia $m_k(x) = a_k\cos(2k\pi x) + b_k\sin(2k\pi x)$. De este modo se propone como solución del problema

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(t)\cos(2k\pi x) + b_k(t)\sin(2k\pi x),$$

si reemplazamos la condición $u(x,0) = \cos(2\pi x)$ obtenemos que

$$\cos(2\pi x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(0)\cos(2k\pi x) + b_k(0)\sin(2k\pi x),$$

así $b_k(0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$ y $a_k(0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}_0 - \{1\}$ mientras que para $k = 1$ se tiene $a_1(0) = 1$. Luego si reemplazamos la solución propuesta en la ecuación diferencial tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k'(t)\cos(2k\pi x) + b_k'(t)\sin(2k\pi x) + \sum_{k=0}^{+\infty} 4a_k(t)k^2\pi^2\cos(2k\pi x) + 4b_k(t)k^2\pi^2\sin(2k\pi x) &= 2t + 4te^{-4\pi^2 t}\cos(2\pi x) \\ \sum_{k=0}^{+\infty}\Big(a_k'(t) + 4a_k(t)k^2\pi^2\Big)\cos(2k\pi x) + \Big(b_k'(t) + 4b_k(t)k^2\pi^2\Big)\sin(2k\pi x) &= 2t + 4te^{-4\pi^2 t}\cos(2\pi x) \end{aligned}$$

igualando coeficiente a coeficiente se tiene que

$$\begin{aligned}
a_k'(t) + 4k^2\pi^2 a_k(t) &= 0, & a_k(0) &= 0, & k &> 1,\\
b_k'(t) + 4k^2\pi^2 b_k(t) &= 0, & b_k(0) &= 0, & k &\in \mathbb{N}_0,\\
a_1'(t) + 4\pi^2 a_1(t) &= 4te^{-4\pi^2 t}, & a_1(0) &= 1 & &\\
a_0'(t) &= 2t, & a_0(0) &= 0 & &
\end{aligned}$$

del cual tenemos como solución $b_k(t) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$ y $a_k(t) = 0$ para todo $k > 1$, mientras que

$$\begin{aligned}
a_1(t) &= e^{-4\pi^2 t} + e^{-4\pi^2 t}\int_0^t 4\tau d\tau = (1+2t^2)e^{-4\pi^2 t},\\
a_0(t) &= t^2.
\end{aligned}$$

Luego la solución de la ecuación diferencial parcial es

$$u(x,t) = t^2 + (1+2t^2)e^{-4\pi^2 t}\cos(2\pi x)$$

15. Determine la solución $u = u(x,t)$ de la siguiente ecuación diferencial parcial

$$\begin{cases}
u_t - u_{xx} = 2tx^2 - 2xt - 2t^2 + 16\pi^4 t\cos 2\pi x & 0 < x < 1, \quad t > 0,\\
u(0,t) = u(1,t) & t > 0,\\
u_x(0,t) = u_x(1,t) - 2t^2 & t > 0,\\
u(x,0) = \cos 2\pi x & 0 < x < 1.
\end{cases}$$

Sugerencia: Considere $u(x,t) = w(x,t) + (ax^2 + bx + c)t^2$ donde a, b y c son constantes a determinar.

Solución: Utilizando la sustitución indicada $u(x,t) = w(x,t) + (ax^2 + bx + c)t^2$ se tiene que

$$\begin{aligned}
u_t &= w_t + (ax^2 + bx + c)2t\\
u_x &= w_x + (2ax + b)t^2\\
u_{xx} &= w_{xx} + 2at^2
\end{aligned}$$

Utilizando la condición $u(0,t) = u(1,t)$ se tiene que $w(0,t) + ct^2 = (a+b+c)t^2 + w(1,t)$ de este modo si tiene que $a + b = 0$ la condición de borde seria $w(0,t) = w(1,t)$. Posteriormente usando la condición $u_x(0,t) = u_x(1,t) - 2t^2$ se tiene que $w_x(0,t) + bt^2 = w_x(1,t) + (2a+b)t^2 - 2t^2$ asi se tiene que $2a - 2 = 0$ para obtener $w_x(0,t) = w_x(1,t)$. Luego

$$a = 1, \quad b = -1, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Reemplazando en la ecuación se obtiene

$$\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= w_t + (x^2 - x + c)2t - w_{xx} - 2t^2\\
&= w_t - w_{xx} + 2x^2 t + 2ct - 2xt - 2t^2 + 16\pi^4 t\cos 2\pi x\\
&= 2tx^2 - 2xt - 2t^2 + 16\pi^4 t\cos 2\pi x,
\end{aligned}$$

tomando $c = 0$ se tiene que $w_t - w_{xx} = 16\pi^4 t\cos 2\pi x$. Luego solo es necesario resolver el problema

$$\begin{cases}
w_t - w_{xx} = 16\pi^4 t\cos 2\pi x & 0 < x < 1, \quad t > 0,\\
w(0,t) = w(1,t) & t > 0,\\
w_x(0,t) = w_x(1,t) & t > 0,\\
w(x,0) = \cos 2\pi x & 0 < x < 1.
\end{cases}$$

Procedemos mediante variación de parámetros, para esto consideremos el problema de Sturm Liouville o de contorno, $m_k''(x) + \lambda_k m_k(x) = 0$ sujeto a las condiciones $m_k(0) = m_k(1)$ y $m_k'(0) = m_k'(1)$ el cual tiene como valor propio $\lambda_k = 4k^2\pi^2$ y función propia $m_k(x) = \hat{a}_k \cos 2k\pi x + \hat{b}_k \sin 2k\pi x$. De este modo se propone como solución del problema

$$w(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(t)\cos 2k\pi x + b_k(t)\sin 2k\pi x,$$

si reemplazamos la condición $w(x,0)=\cos 2\pi x$ obtenemos que

$$\cos 2\pi x = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(0)\cos 2k\pi x + b_k(0)\sin 2k\pi x,$$

así $b_k(0)=0$ para todo $k\in\mathbb{N}_0$ mientras que $a_1=1$ y $a_k=0$ para todo $k\in\mathbb{N}_0-\{1\}$. Luego si reemplazamos en la ecuación diferencial tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} a_k'(t)\cos 2k\pi x + b_k'(t)\sin 2k\pi x + \sum_{k=0}^{+\infty} 4a_k(t)k^2\pi^2\cos 2k\pi x + 4b_k(t)k^2\pi^2\sin 2k\pi x &= 16\pi^4 t\cos 2\pi x\\
\sum_{k=0}^{+\infty}\left(a_k'(t)+4a_k(t)k^2\pi^2\right)\cos 2k\pi x + \left(b_k'(t)+4b_k(t)k^2\pi^2\right)\sin 2k\pi x &= 16\pi^4 t\cos 2\pi x
\end{aligned}$$

igualando coeficiente a coeficiente se tiene que

$$\begin{aligned}
a_k'(t)+4k^2\pi^2 a_k(t) &= 0, & a_k(0)&=0\\
b_k'(t)+4k^2\pi^2 b_k(t) &= 0, & b_k(0)&=0\\
a_1'(t)+4\pi^2 a_1(t) &= 16\pi^4 t, & a_1(0)&=1
\end{aligned}$$

del cual tenemos como solución $b_k(t)=0$ para todo $k\in\mathbb{N}_0$ y $a_k(t)=0$ para todo $k\in\mathbb{N}_0-\{1\}$, mientras que

$$a_1(t)=e^{-4\pi^2 t}+e^{-4\pi^2 t}\int_0^t 16\pi^2\tau e^{4\pi^2\tau}d\tau = 4t-\frac{1}{\pi^2}+e^{-4\pi^2 t}\left(1+\frac{1}{\pi^2}\right),$$

luego la solución de la ecuación diferencial es

$$u(x,t)=(x^2-x)t^2+\left[4t-\frac{1}{\pi^2}+e^{-4\pi^2 t}\left(1+\frac{1}{\pi^2}\right)\right]\cos(2\pi x)$$

16. Sean $f(\theta)$ y $g(\theta)$ dos funciones acotadas en todo $\mathbb{R}$ y $a>0$, mediante el método de separación de variables encuentre una solución acotada para el problema

$$\begin{cases}
r^2u_{rr}+ru_r+u_{\theta\theta} = g(\theta) & a<r<+\infty,\quad 0<\theta<\pi,\\
u(r,0) = A & a<r<+\infty,\\
u_\theta(r,\pi) = B & a<r<+\infty,\\
u_r(a,\theta) = f(\theta) & 0<\theta<\pi,
\end{cases}$$

donde $A,B\in\mathbb{R}$.

Solución: El problema es no homogéneo por lo cual utilizamos que $u(r,\theta)=v(r,\theta)+\phi(\theta)$, así la función $\phi(\theta)$ satisface la ecuación diferencial $\phi''(\theta)=g(\theta)$ con las condiciones $\phi(0)=A$ y $\phi(\pi)=B$. Luego el problema homogéneo es

$$\begin{cases}
r^2v_{rr}+rv_r+v_{\theta\theta} = 0 & a<r<+\infty,\quad 0<\theta<\pi,\\
v(r,0) = 0 & a<r<+\infty,\\
v_\theta(r,\pi) = 0 & a<r<+\infty,\\
v_r(a,\theta) = f(\theta) & 0<\theta<\pi,
\end{cases}$$

suponiendo como solución $v(r,\theta)=m(\theta)n(r)$ el problema de contorno es $m''(\theta)+\lambda m(\theta)=0$ bajo las condiciones $m(0)=m'(\pi)=0$, así $\lambda_k=(k+1/2)^2$ y la función propia es $m_k(\theta)=\sin\sqrt{\lambda_k}\theta$. Mientras que el problema para el radio es

$$r^2n_k''(r)+rn_k'(r)-\lambda_k n_k(r)=0,$$

así, el problema homogéneo tiene como solución

$$v(r,\theta)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^{-\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}\theta,$$

imponiendo la condición inicial se logra que

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\sqrt{\lambda_k}\right) a_k a^{-\sqrt{\lambda_k}-1} \sin\sqrt{\lambda_k}\theta,$$

así $a_k = -\dfrac{2a^{\sqrt{\lambda_k}+1}}{\pi\sqrt{\lambda_k}} \displaystyle\int_0^{\pi} f(\xi)\sin\sqrt{\lambda_k}\xi d\xi$. La solución final del problema es

$$v(r,\theta) = -\sum_{k=0}^{\infty} r^{-\sqrt{\lambda_k}} \sin\sqrt{\lambda_k}\theta \frac{2a^{\sqrt{\lambda_k}+1}}{\pi\sqrt{\lambda_k}} \int_0^{\pi} f(\xi)\sin\sqrt{\lambda_k}\xi d\xi,$$

con

$$u(r,\theta) = v(r,\theta) + \phi(\theta)$$

17. Determine la solución $u = u(x,t)$ de la siguiente ecuación diferencial parcial

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} &= t + 16\pi^4 t\cos 2\pi x & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) &= u(1,t) & t > 0, \\ u_x(0,t) &= u_x(1,t) & t > 0, \\ u(x,0) &= \cos 2\pi x & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Solución: Procedemos mediante variación de parámetros, para esto consideremos el problema de Sturm Liouville o de contorno, $m_k''(x) + \lambda_k m_k(x) = 0$ sujeto a las condiciones $m_k(0) = m_k(1)$ y $m_k'(0) = m_k'(1)$ el cual tiene como valor propio $\lambda_k = 4k^2\pi^2$ y función propia $m_k(x) = \hat{a}_k \cos 2k\pi x + \hat{b}_k \sin 2k\pi x$. De este modo se propone como solución del problema

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(t)\cos 2k\pi x + b_k(t)\sin 2k\pi x,$$

si reemplazamos la condición $w(x,0) = \cos 2\pi x$ obtenemos que

$$\cos 2\pi x = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(0)\cos 2k\pi x + b_k(0)\sin 2k\pi x,$$

asi $b_k(0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$ mientras que $a_1 = 1$ y $a_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}_0 - \{1\}$. Luego si reemplazamos en la ecuación diferencial tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k'(t)\cos 2k\pi x + b_k'(t)\sin 2k\pi x + \sum_{k=0}^{+\infty} 4a_k(t)k^2\pi^2\cos 2k\pi x + 4b_k(t)k^2\pi^2\sin 2k\pi x &= t + 16\pi^4 t\cos 2\pi x \\ \sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_k'(t) + 4a_k(t)k^2\pi^2\right)\cos 2k\pi x + \left(b_k'(t) + 4b_k(t)k^2\pi^2\right)\sin 2k\pi x &= t + 16\pi^4 t\cos 2\pi x \end{aligned}$$

igualando coeficiente a coeficiente se tiene que

$$\begin{aligned} a_k'(t) + 4k^2\pi^2 a_k(t) = 0, &\qquad a_k(0) = 0 \\ b_k'(t) + 4k^2\pi^2 b_k(t) = 0, &\qquad b_k(0) = 0 \\ a_0'(t) = t, &\qquad a_0(0) = 0 \\ a_1'(t) + 4\pi^2 a_1(t) = 16\pi^4 t, &\qquad a_1(0) = 1 \end{aligned}$$

del cual tenemos como solución $b_k(t) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$ y $a_k(t) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}_0 - \{1\}$, mientras que

$$a_1(t) = e^{-4\pi^2 t} + e^{-4\pi^2 t}\int_0^t 16\pi^2\tau e^{4\pi^2\tau} d\tau = 4t - \frac{1}{\pi^2} + e^{-4\pi^2 t}\left(1 + \frac{1}{\pi^2}\right),$$

y tambien

$$a_0(t) = \frac{t^2}{2}.$$

luego la solución de la ecuación diferencial es

$$u(x,t) = (x^2 - x)t^2 + \left[4t - \frac{1}{\pi^2} + e^{-4\pi^2 t}\left(1 + \frac{1}{\pi^2}\right)\right]\cos 2\pi x + \frac{t^2}{2}$$

Ecuaciones Diferenciales Parciales: Problemas Propuestos

1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales
   (i) Hallar $u = u(x,t)$ tal que: $u_x + 2xu = xe^{-x^2}$
   (ii) Hallar $u = u(x,t)$ tal que: $tu_{xt} + u_x = t^2e^t$
   (iii) Hallar $u = u(x,t)$ tal que: $u_{xt} = x + t$
   (iv) Hallar $u = u(x,t)$ tal que: $u_{tt} + u_t = e^{-t}$
   (v) Hallar $u = u(x,t)$ tal que: $u_{xx} = x + 1$
2. Considere la EDP, $\quad 4u_{xx} + u_{yy} = 0$
   (i) ¿Qué clase de EDP es la Ecuación Considerada?.
   (ii) Encontrar un cambio de coordenadas que transforma la EDP a su forma normal.
   (iii) Resuelva la EDP.
3. Determine $u = u(x,t)$ tal que

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_{tt} & = & 4u_{xx} & x \in \mathbb{R}_0^+, \quad t > 0, \\ u(0,t) & = & u_t(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R}_0^+, \quad t > 0, \\ u(x,0) & = & f(x). & \end{array}\right.$$

   Hint: Realizar una extensión impar a todo $\mathbb{R}$, y aplicar la formula D'Alembert.
4. Clasificar y reducir a su forma normal:
   (i) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x - u_y = 0$
   (ii) $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} + 3u_x + u = 0$
   (iii) $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} - 3x^2u_{yy} = y^2xu_x - 3x^2yu_y$
   (iv) $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0$
5. Considere la ecuación diferencial parcial: Hallar $u = u(x,y)$

$$\Delta u + (x^2 + y^2)u = 0,$$

   (i) ¿Admite soluciones de la forma $u(x,y) = m(x)n(y)$?.
   (ii) Transforme la ecuación a coordenadas polares. ¿Admite soluciones de la forma $u(r,\theta) = m(r)n(\theta)$?.
6. Mediante el método de separación de variables resuelva la ecuación de Laplace

$$\left\{\begin{array}{rcll} r^2u_{rr} + ru_r & = & u_{\theta\theta} & 1 < r < e, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ u(1,\theta) = u(e,\theta) & = & 0 & 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ u(r,0) & = & \sin(9\pi \ln r) & 1 < r < e, \\ u(r,\pi) & = & 8\sin(4\pi \ln r) & 1 < r < e. \end{array}\right.$$

7. Determine soluciones acotadas para el problema: Hallar $u = u(r,\theta)$ tal que

$$\left\{\begin{array}{rcll} r^2u_{rr} + ru_r + u_{\theta\theta} & = & -\cos\theta & 0 < r < 4, \quad -\pi < \theta < \pi, \\ u(r,-\pi) & = & u(r,\pi) & 0 < r < 4, \\ u_\theta(r,-\pi) & = & u_\theta(r,\pi) & 0 < r < 4, \\ u_r(4,\theta) & = & 6\cos 4\theta & -\pi < \theta < \pi. \end{array}\right.$$

   ¿Es posible encontrar alguna solución que cumpla la condición $u(1,0) = 4$?
8. Sea $f(x)$ una función continua en todo $\mathbb{R}$ y $a > 0$, resuelva la siguiente ecuación diferencial parcial

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t + au & = & u_{xx} & -\pi < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(-\pi,t) & = & u(\pi,t) & t > 0, \\ u_x(-\pi,t) & = & u_x(\pi,t) & t > 0, \\ u(x,0) & = & f(x) & -\pi < x < \pi. \end{array}\right.$$

   para esto considere una sustitución del tipo $v(x,t) = u(x,t)e^{at}$

9. Resuelva la ecuación diferencial parcial

$$\begin{cases} u_t &= 2tu_{xx} + f(x,t) & 0 < x < \ell, \quad t > 0, \\ u(0,t) &= u(\ell,t) = 0 & t > 0, \\ u(x,0) &= g(x) & 0 < x < \ell, \end{cases}$$

10. Determine la solución $u = u(x,t)$ de la ecuación diferencial parcial

$$\begin{cases} u_t + 9u &= (1+2t)u_{xx} + x & -\pi < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(-\pi,t) &= u(\pi,t) - \frac{2\pi}{9} & t > 0, \\ u_x(-\pi,t) &= u_x(\pi,t) & t > 0, \\ u_t(x,0) &= 4\sin 3x + 8\cos 6x & -\pi < x < \pi. \end{cases}$$

Sugerencia: Considere $u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x)$ con $\varphi(x)$ un polinomio de grado menor o igual a 1.

11. Sea $f(\theta)$ una función continua en todo $\mathbb{R}$ y $a > 0$, encuentre una solución acotada para el problema

$$\begin{cases} r^2u_{rr} + ru_r + u_{\theta\theta} &= 2 + u & a < r < +\infty, \quad 0 < \theta < 1, \\ u(r,0) &= 0 & a < r < +\infty, \\ u_\theta(r,1) &= 2e & a < r < +\infty, \\ u_r(a,\theta) &= f(\theta) & 0 < \theta < 1, \end{cases}$$

12. Si $u = u(x,t)$ es la solución del problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} &= g(t) + d & 0 < x < \ell, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) &= a & t > 0, \\ u_x(\ell,t) &= b & t > 0, \\ u(x,0) &= f(x) & 0 < x < \ell. \end{cases}$$

(i) Probar que la función $v(x,t) = u(x,t) - \int_0^t g(s)\,ds$ es una solución del problema de calor

$$v_t = v_{xx} + d \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0$$

con las mismas condiciones en la frontera y la misma condición inicial.

(ii) Resuelva el siguiente problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} &= e^{-t} + t - 2 & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) &= 0 & t > 0, \\ u_x(1,t) &= 2 & t > 0, \\ u(x,0) &= x^2 + \cos(\pi x) & 0 < x < 1. \end{cases}$$

13. Considere el problema de hallar $u = u(x,t)$ tal que

$$\begin{cases} u_t &= tu_{xx} + 2tu_x + f(x,t) & 0 < x < \ell, \quad t > 0, \\ u(0,t) &= h_1(t) & t > 0, \\ u(\ell,t) &= h_2(t) & t > 0, \\ u(x,0) &= g(x) & 0 < x < \ell. \end{cases}$$

Sabiendo que $f(x,t)$ es una función continua en $\mathbb{R}^2$ y además que $h_1(t)$, $h_2(t)$ y $g(x)$ son funciones continuas en $\mathbb{R}$. Resuelva la ecuación diferencial parcial.