Enumeración Total en Programación Lineal Entera

MII-471, Optimización Combinatorial

Primer período académico 2008

Carlos Castro
Departamento de Informática
UTFSM
Abril de 2008

Enumeración total

- Enumeración de todas las posibilidades
- Verifica todas las posibilidades implicadas por los valores de las variables discretas, calculando para cada una la mejor elección de las variables continuas
- Entre las combinaciones que producen soluciones factibles aquellas con el mejor valor para la función objetivo son las soluciones óptimas
- Resuelve eficientemente modelos que involucran una pequeña cantidad de variables de decisión binarias

Enumeración total

Considerando el siguiente modelo de PLB:

$$Max \quad z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

Sujeto a

$$\begin{aligned}
6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 &\leq 10 \\
x_3 + x_4 &\leq 1 \\
-x_1 + x_3 &\leq 0 \\
-x_2 + x_4 &\leq 0 \\
x_i &\in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, \ldots, 4
\end{aligned}$$

Enumeración total

Solución				Factibilidad	z	Solución				Factibilidad	z
x_1	x_2	x_3	x_4			x_1	x_2	x_3	x_4		
0	0	0	0	$\surd$	0	1	0	0	0	$\surd$	9
0	0	0	1	$\times$	-	1	0	0	1	$\times$	-
0	0	1	0	$\times$	-	1	0	1	0	$\times$	-
0	0	1	1	$\times$	-	1	0	1	1	$\times$	-
0	1	0	0	$\surd$	5	1	1	0	0	$\surd$	14
0	1	0	1	$\surd$	9	1	1	0	1	$\times$	-
0	1	1	0	$\times$	-	1	1	1	0	$\times$	-
0	1	1	1	$\times$	-	1	1	1	1	$\times$	-

Por lo tanto, la solución óptima es: $x^* = (1, 1, 0, 0)$ con $z^* = 14$

Enumeración total

Considerando el siguiente modelo de PL entera mixta:

$$Max \;\; z = 20x_1 + 30x_2 - 550y_1 - 800y_2$$

Sujeto a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}x_1 + 4x_2 &\leq 300 \\
x_1 &\leq 400y_1 \\
x_2 &\leq 75y_2 \\
x_1, x_2 &\geq 0 \\
y_1, y_2 &\in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

Analizando las 2^2 combinaciones de valores de las variables binarias:

Enumeración total

$$Max \quad z = 20x_1 + 30x_2 - 550y_1 - 800y_2$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1 + 4x_2 &\leq 300 \\ x_1 &\leq 400y_1 \\ x_2 &\leq 75y_2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ y_1, y_2 &\in \{0,1\} \end{aligned}$$

Haciendo $y_1 = 0 \wedge y_2 = 0$:

$$Max \quad z = 20x_1 + 30x_2$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1 + 4x_2 &\leq 300 \\ x_1 &\leq 0 \\ x_2 &\leq 0 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Obviamente, $x^* = (0,0)$ con $z^* = 0$.

Enumeración total

$$Max \;\; z = 20x_1 + 30x_2 - 550y_1 - 800y_2$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1 + 4x_2 &\leq 300 \\ x_1 &\leq 400y_1 \\ x_2 &\leq 75y_2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ y_1, y_2 &\in \{0,1\} \end{aligned}$$

Haciendo $y_1 = 0 \wedge y_2 = 1$:

$$Max \;\; z = 20x_1 + 30x_2 - 800$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1 + 4x_2 &\leq 300 \\ x_1 &\leq 0 \\ x_2 &\leq 75 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Por simple inspección, la solución óptima es: $x^* = (0, 75)$ con $z^* = 1.450$.

Enumeración total

$$Max \quad z = 20x_1 + 30x_2 - 550y_1 - 800y_2$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1 + 4x_2 &\leq 300 \\ x_1 &\leq 400y_1 \\ x_2 &\leq 75y_2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ y_1, y_2 &\in \{0,1\} \end{aligned}$$

Haciendo $y_1 = 1 \wedge y_2 = 0$:

$$Max \quad z = 20x_1 + 30x_2 - 550$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1 + 4x_2 &\leq 300 \\ x_1 &\leq 400 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Por simple inspección, la solución óptima es: $x^* = (400, 0)$ con $z^* = 7.450$.

Enumeración total

$$Max \quad z = 20x_1 + 30x_2 - 550y_1 - 800y_2$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1 + 4x_2 &\leq 300 \\ x_1 &\leq 400y_1 \\ x_2 &\leq 75y_2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ y_1, y_2 &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Haciendo $y_1 = 1 \wedge y_2 = 1$:

$$Max \quad z = 20x_1 + 30x_2 - 1.350$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1 + 4x_2 &\leq 300 \\ x_1 &\leq 400 \\ x_2 &\leq 75 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Aplicando el método simplex, la solución óptima es: $x^* = (400, 25)$ con $z^* = 7.400$

Enumeración total

Solución				
x_1	x_2	y_1	y_2	z
0	0	0	0	0
0	75	0	1	1.450
400	0	1	0	7.450
400	25	1	1	7.400

Por lo tanto, la solución óptima del problema es:

$$(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*) = (400, 0)$$

con

$$z^* = 7.450$$