DMAT
Departamento de Matemática
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

EX UMBRA IN SOLEM

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Coordinación MAT024 - 1^{er} semestre 2017

GUÍA #1 – INTEGRACIÓN MULTIDIMENSIONAL

Ejercicios Resueltos: Integrales Dobles

1. Calcule el valor de $\displaystyle\iint_\Omega (4x^2+y^2)\,dA$ si Ω es la región descrita por la parte interior de $x^2+y^2=4y$

Solución: La región descrita consiste en $\Omega\ :\ x^2+(y-2)^2=4$, luego utilizando coordenadas polares de la forma $x=2r\cos\theta$ e $y=2+2r\sin\theta$ tenemos que su jacobiano es $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=4r$, así:

$$\begin{aligned}\iint_\Omega (4x^2+y^2)\,dA &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 4r[16r^2\cos^2\theta+(2+2r\sin\theta)^2]drd\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 4r[16r^2\cos^2\theta+4+8r\sin\theta+4r^2\sin^2\theta]drd\theta=\frac{64\pi}{4}+\frac{32\pi}{2}+\frac{16\pi}{4}=36\pi\end{aligned}$$

2. Determine el valor de las siguientes integrales dobles

(a) $\displaystyle\int_0^\pi\int_1^3 |x-2|\sin y\;dxdy$

(b) $\displaystyle\int_0^1\int_y^1 \frac{\tan x}{x}\;dxdy$

(c) $\displaystyle\int_0^1\int_{\arcsin y}^{\pi/2} \sqrt{1+\cos^2 x}\cos x dxdy$

(d) $\displaystyle\int_0^3\int_{x^2}^{9} x^3e^{y^3}\;dy\;dx$

Solución:

(a)

$$\begin{aligned}\int_0^\pi\int_1^3 |x-2|\sin y\;dxdy &= \int_0^\pi\int_1^2(2-x)\sin y\;dxdy+\int_0^\pi\int_2^3(x-2)\sin y\;dxdy\\ &= -\frac{(2-x)^2}{2}\bigg|_1^2(-\cos y)\bigg|_0^\pi+\frac{(x-2)^2}{2}\bigg|_2^3(-\cos y)\bigg|_0^\pi\\ &= \frac{1}{2}(1-\cos(\pi))+\frac{1}{2}(1-\cos(\pi))=2\end{aligned}$$

(b)

$$\int_0^1\int_y^1\frac{\tan x}{x}\;dxdy = \int_0^1\int_0^x\frac{\tan x}{x}\;dydx=\int_0^1\tan x dx=\int_0^1\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\ln\cos 1$$

(c)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi/2} \sqrt{1+\cos^2 x}\cos x dx dy &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin x} \sqrt{1+\cos^2 x}\cos x dy dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\cos x dx \\
&= -\frac{(1+\cos^2 x)^{3/2}}{3}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}
\end{aligned}$$

(d)

$$\int_0^3 \int_{x^2}^9 x^3 e^{y^3}\, dy\, dx = \int_0^9 \int_0^{\sqrt{y}} x^3 e^{y^3} dx dy = \frac{1}{4}\int_0^9 x^4 e^{y^3}\Big|_{x=0}^{x=\sqrt{y}} dy = \frac{1}{4}\int_0^9 y^2 e^{y^3} dy = \frac{e^{81}-1}{12}$$

3. Determine, si existe, una constante $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_0^x \int_0^t t f(u) du dt = k\int_0^x (x^2-u^2) f(u) du.$$

Solución: Sea $D = \{(u,t)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le t \le x \wedge 0 \le u \le t\} = \{(u,t)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le u \le x \wedge u \le t \le x\}$, intercambiando el orden de integración, se tiene que

$$\int_0^x \int_0^t t f(u) du dt = \int_0^x \int_u^x t f(u) dt du = \int_0^x f(u)\frac{t^2}{2}\Big|_u^x du = \frac{1}{2}\int_0^x (x^2-u^2) f(u) du \implies k = \frac{1}{2}$$

4. Para $0 < \epsilon < 1$ determine el valor de $\iint_{\Omega_\epsilon} 3(x^2+y^2)\, dA$ si se sabe que el conjunto Ω_ϵ está descrito mediante:

$$\Omega_\epsilon = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ :\ x^2+y^2 \le 4x+5,\ 9x^2+4y^2 \ge \epsilon^2\}$$

Solución: Denotamos como $I = \iint_{\Omega_\epsilon} 3(x^2+y^2)\, dA$ luego definimos los conjuntos $\Omega_1 :\ \ x^2+y^2 \le 4x+5$, y $\Omega_2 :\ \ 9x^2+4y^2 \ge \epsilon^2$ con lo anterior observamos que

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{\Omega_1} 3(x^2+y^2)\, dA - \iint_{\Omega_2} 3(x^2+y^2)\, dA \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 27r\Big(9r^2\sin^2\theta + (2+3r\cos\theta)^2\Big) dr d\theta - \int_0^{2\pi}\int_0^{\epsilon} \frac{r^3}{2}\left(\frac{1}{9}\cos^2\theta + \frac{1}{4}\sin^2\theta\right) dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 27r(9r^2+12r\cos\theta) dr d\theta - \left(\frac{3\pi\epsilon^4}{216} + \frac{3\pi\epsilon^4}{96}\right) \\
&= \frac{243\pi}{2} - \left(\frac{3\pi\epsilon^4}{216} + \frac{3\pi\epsilon^4}{96}\right)
\end{aligned}$$

5. Sea el cuadrado $R = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ justifique la siguiente desigualdad:

$$0 \le \iint_R \sin(x+y)\, dA \le \frac{\pi^2}{4}$$

Ayuda: Encuentre los máximos y mínimos de la función $f(x,y)$ en la región R.

Solución: Notando que la función $f(x,y) = \sin(x+y)$ es continua en R, luego alcanza sus mínimos y máximos, así en R se tiene que:

$$0 \le f(x,y) \le 1,$$

utilizando propiedades de integración tenemos

$$0 \le \iint_R f(x,y)\, dA \le \iint_R 1\, dA = \text{area}(R) = \frac{\pi^2}{4},$$

6. Considere el rectángulo $R = [-2,2] \times [-1,1]$, además de la función f definida mediante

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{si } y \leq x, \\ \\ -1 & \text{si } y > x. \end{cases}$$

Encuentre

$$\iint_R f(x,y)dxdy \qquad \text{y} \qquad \iint_R f(x,y)dydx,$$

Solución: Al descomponer la función f en la región R se tiene que

$$\begin{aligned} \iint_R f(x,y)dxdy &= \int_{-1}^{1}\int_{-2}^{y} -1\; dxdy + \int_{-1}^{1}\int_{y}^{2} 2\; dxdy \\ \iint_R f(x,y)dydx &= \int_{-2}^{-1}\int_{-1}^{1} -1\; dydx + \int_{-1}^{1}\int_{x}^{1} -1\; dydx + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{x} 2\; dydx + \int_{1}^{2}\int_{-1}^{1} 2\; dydx \end{aligned}$$

7. Considerar la transformación T definida por las ecuaciones

$$x = u + v, \qquad y = v - u^2.$$

(a) Determine el jacobiano de la transformación.

(b) Un triángulo W en el plano uv tiene vértices en $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$. Representar, mediante un gráfico, la imagen S en el plano xy.

(c) Verifique el teorema del cambio de variables calculando el área de S directamente y con la transformación antes definida.

(d) Calcular la integral

$$\iint_S \frac{1}{(x-y+1)^2} dA$$

Solución:

(a) Del cambio de variables $x = u + v$ e $y = v - u^2$, se tiene que el jacobiano es

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2u & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2u,$$

(b) Identificando los tres lados del triángulo como ℓ_1, ℓ_2 y ℓ_3, se tiene que

$$\begin{array}{lccc} \ell_1: & u = 0,\;\; 0 \leq v \leq 2 & \Longrightarrow & y = x, \;\; 0 \leq x \leq 2 \\ \ell_2: & v = 0,\;\; 0 \leq u \leq 2 & \Longrightarrow & y = -x^2, \;\; 0 \leq x \leq 2 \\ \ell_3: & u + v = 2,\;\; 0 \leq u \leq 2 & \Longrightarrow & x = 2 \end{array}$$

De esta forma la imagen de la región W en el plano uv definida como

$$W = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 /\;\; 0 \leq u \leq 2,\;\; 0 \leq v \leq u - 2\}$$

es la región S en el plano xy dada por

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \; 0 \leq x \leq 2, \;\; -x^2 \leq y \leq x\}$$

(c) El area de la región S, de forma directa es

$$\text{area}(S) = \iint_S dA = \int_0^2 \int_{-x^2}^{x} dydx = \int_0^2 (x + x^2)dx = \frac{14}{3}$$

mientras que utilizando el teorema del cambio de variables, se tiene

$$\text{area}(S) = \iint_S dA = \iint_W \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dvdu = \int_0^2 \int_0^{2-u} (1+2u)dvdu = \int_0^2 (2 + 3u - 2u^2)du = \frac{14}{3}$$

(d) Para calcular la integral pedida se ocupa el teorema del cambio de variables luego

$$\iint_S \frac{1}{(x-y+1)^2} dA = \int_0^2 \int_0^{2-u} \frac{1+2u}{(1+u+u^2)^2} dvdu = \int_0^2 \int_0^{2-v} \frac{1+2u}{(1+u+u^2)^2} dudv,$$

donde

$$\int_0^2 \int_0^{2-v} \frac{1+2u}{(1+u+u^2)^2} dudv = \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{v^2-5v+7}\right) dv = 2 - \frac{\sqrt{3}}{9}\left(\pi - 6\arctan\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$$

8. Sea R la región limitada por las rectas $x-2y=0$, $x-2y=4$, $x+y=4$ y $x+y=1$. Calcule usando un cambio de variable adecuado la integral:

$$\iint_R 9xydA$$

Solución: Considere el cambio de variable

$$\left\{\begin{array}{lcl} u & = & x-2y \\ v & = & x+y \end{array}\right. \Rightarrow \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \left|\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{array}\right| = 3$$

Además, sea $R_{uv} = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 4 \wedge 1 \leq v \leq 4\right\}$ la región bajo la transformación. Por otro lado,

$$v-u=3y \ \wedge \ u+2v=3x \ \Rightarrow \ 9xy = (v-u)(u+2v) = 2v^2-uv-u^2$$

Por lo tanto,

$$\iint_R 9xydA = \frac{1}{3}\int_1^4 \int_0^4 [2v^2-uv-u^2]dudv = \frac{44}{3}$$

9. Dada la región $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq x^2+y^2 \leq 16\right\}$, calcule:

$$\iint_\Omega \text{máx}\left\{9, x^2+y^2\right\} \, dA$$

Solución: Comenzamos notando que

$$\text{máx}\{x^2+y^2, 9\} = \left\{\begin{array}{ccc} 9 & , & 9 \geq x^2+y^2 \\ x^2+y^2 & , & 9 < x^2+y^2 \end{array}\right.$$

de esta forma la integral a evaluar se descompone en dos tramos, es decir:

$$\begin{aligned} \iint_\Omega \text{máx}\left\{9, x^2+y^2\right\} \, dA &= \iint_{1\leq x^2+y^2\leq 9} 9 \, dA + \iint_{9\leq x^2+y^2\leq 16} (x^2+y^2) \, dA \\ &= 72\pi + \int_0^{2\pi}\int_3^4 r^3 drd\theta = 72\pi + \frac{\pi}{2}(4^4-3^4) \end{aligned}$$

10. Considere el paralelogramo R de vértices $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,0)$ y $(2,0)$, además se define la función f como

$$f(x,y) = \left\{\begin{array}{ll} x-y & \text{si } \ y \leq x, \\ 1 & \text{si } \ y > x. \end{array}\right.$$

Encuentre

$$\iint_R f(x,y)dA$$

Solución 1: Una opción consiste en realizar la transformación T definida como

$$T : \left\{\begin{array}{l} u = y-x \\ v = y+x \end{array}\right.$$

la cual produce una rotación del paralelogramo y genera a $T(R) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 /\ 1 \leq v \leq 2,\ -v \leq u \leq v\}$, asociada a esta transformación el jacobiano es

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

de esta forma se tiene que

$$\begin{aligned} \iint_R f(x,y)dA &= \iint_{T(R)} f\left(\frac{v-u}{2}, \frac{u+v}{2}\right) \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| dudv = \frac{1}{2} \iint_{T(R)} f\left(\frac{v-u}{2}, \frac{u+v}{2}\right) dudv \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_1^2 \int_0^v 1dudv - \int_1^2 \int_{-v}^0 ududv\right) = \frac{1}{2}\left(\int_1^2 vdv + \int_1^2 \frac{v^2}{2}dv\right) = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Solución 2: Mediante integración directa se tiene que

$$\begin{aligned} \iint_R f(x,y)dA &= \int_0^{1/2} \int_{1-x}^{2-x} 1dydx + \int_{1/2}^1 \int_{1-x}^x (x-y)dydx + \int_{1/2}^1 \int_x^{2-x} dydx + \int_1^2 \int_0^{2-x} (x-y)dydx \\ &= \int_0^{1/2} dx + \int_{1/2}^1 \left(\frac{1}{2} - 2x + 2x^2\right) dx + \int_{1/2}^1 (2-2x)\, dx + \int_1^2 \left(-2 + 4x - \frac{3x^2}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

11. Considere el conjunto D definido como $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ y = 1,\ x \in \mathbb{Q}\}$ además del cuadrado $R = [0,2] \times [0,2]$. Justifique si la función f definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in D, \\ \\ -1 & \text{si } (x,y) \in R - D. \end{cases}$$

es integrable en R.

Solución: Procedemos por definición, para esto construimos una partición sobre el conjunto R de la forma

$$R = \bigcup_{i,j=0}^{n} R_{i,j},$$

los elementos de la partición tiene como área $\Delta A_{i,j} = \Delta x_i \Delta y_j$. Además tomaremos un punto arbitrario en cada elemento el cual será denotada por $c_{i,j} = (\alpha_i, \beta_j)$. Así

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{\substack{n \to +\infty \\ \max\{\mathrm{diag}_{i,j}\} \to 0}} \sum_{i,j=0}^{n} f(\alpha_i, \beta_j) \Delta A_{i,j},$$

donde $\mathrm{diag}_{i,j}^2 = (\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2$, luego si $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ tenemos que

$$\sum_{i,j=0}^{n} f(\alpha_i, \beta_j) \Delta A_{i,j} = \sum_{i,j=0}^{n} 1 \Delta A_{i,j} = 4,$$

mientras que en el caso que $\alpha_i \notin \mathbb{Q}$ se tiene

$$\sum_{i,j=0}^{n} f(\alpha_i, \beta_j) \Delta A_{i,j} = \sum_{i,j=0}^{n} -1 \Delta A_{i,j} = -4,$$

lo anterior nos permite concluir que el límite de la sumas de Riemann no existe, de este modo la función indicada no es integrable.

12. Calcular el valor de la siguiente integral

$$\int_0^{\pi/3} \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{\pi/3}} \frac{\sin x^2}{x} dxdy$$

Solución: Notamos que la función $f(x,y) = \dfrac{\sin x^2}{x}$ es acotada en el dominio D, luego podemos intercambiar los limites de integración, de esta forma:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \frac{\pi}{3} \wedge \sqrt{y} \le x \le \sqrt{\frac{\pi}{3}}\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \sqrt{\frac{\pi}{3}} \wedge 0 \le y \le x^2\right\}$$

Así, para la integral solicitada tenemos que

$$\int_0^{\sqrt{\pi/3}} \int_0^{x^2} \frac{\sin x^2}{x} dydx = \int_0^{\sqrt{\pi/3}} \frac{\sin x^2}{x} y\Big|_0^{x^2} dx = \int_0^{\sqrt{\pi/3}} x\sin(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \sin(u)du = \frac{1}{4}$$

13. Calcule la integral

$$\iint_D \frac{x}{(x^2+y^2)^2} dA,$$

donde

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \ge 2 \wedge x^2+y^2 \le 2y\right\}$$

Solución: Aplicamos coordenas polares, $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\sin(\theta)$, donde $x^2+y^2 = r^2$ y el jacobiano de la transformación es r. Notamos que $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Además,

$$\begin{aligned} x+y \ge 2 \quad &\rightarrow \quad r(\cos(\theta)+\sin(\theta)) \ge 2 \quad \Leftrightarrow \quad r \ge \frac{2}{\cos(\theta)+\sin(\theta)} \\ x^2+y^2 \le 2y \quad &\rightarrow \quad r^2 \le 2r\sin(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad r \le 2\sin(\theta) \ \text{ ya que } r \ge 0 \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x}{(x^2+y^2)^2} dA &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_{\frac{2}{\cos(\theta)+\sin(\theta)}}^{2\sin(\theta)} \frac{\cos(\theta)}{r^2} drd\theta = -\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left[\frac{\cos(\theta)}{2\sin(\theta)} - \frac{\cos^2(\theta)+\cos(\theta)\sin(\theta)}{2}\right] d\theta \\ &= -\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos(\theta)\left[\frac{1}{\sin(\theta)} - \sin(\theta)\right] d\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2(\theta)d\theta \\ &= -\frac{1}{2}\int_{1/\sqrt{2}}^{1} \left[\frac{1}{u} - u\right] du + \frac{1}{4}\int_{\pi/4}^{\pi/2} [1+\cos(2\theta)]\, d\theta = \frac{\pi - 4\ln(2)}{16} \end{aligned}$$

14. Determine la masa de una lámina $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ descrita en el primer cuadrante por la región encerrada por las curvas $y = x^2$, $y = x^2+3$, $y = -x^2+9$ e $y = -x^2+6$. Considere que la densidad en cada punto de la lámina Ω viene determinada por $\rho(x,y) = xe^{y-x^2}$.

Solución: Consideramos la transformación T definida como

$$\begin{aligned} u &= y - x^2 \\ v &= y + x^2, \end{aligned}$$

luego la imagen del dominio Ω bajo la transformación T definida anteriormente corresponde a

$$\Omega_{uv} = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \le u \le 3, \ \ 6 \le v \le 9\right\},$$

donde el jacobiano de tal transformación viene dado por

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} -2x & 1 \\ 2x & 1 \end{vmatrix} = -4x$$

de esta forma, la masa de la lámina se obtiene como

$$\iint_\Omega xe^{y-x^2} dA \quad = \quad \frac{1}{4}\iint_{\Omega_{uv}} e^u dudv = \frac{1}{4}\int_6^9 \int_0^3 e^u dudv = \frac{3}{4}\left(e^3 - 1\right).$$

15. Determine el volumen de la región encerrada por las superficies $z + 2x + 2y = 1$ y $z = 3 - x^2 - y^2$.

    Solución: Procedemos obteniendo el dominio maximal del sólido, el cual viene determinado por la región encerrada por la curva

    $$3 - x^2 - y^2 = 1 - 2x - 2y,$$

    de esta forma se tiene que la región buscada es $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 4\right\}$, luego si utilizamos el cambio de coordenadas

    $$\begin{aligned} x &= 1 + 2r\cos\theta \\ y &= 1 + 2r\sin\theta, \end{aligned}$$

    cuyo jacobiano viene determinado por $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = 4r$, tenemos que el volumen del sólido viene dado por

    $$\begin{aligned} \iint_D \left|(3 - x^2 - y^2) - (1 - 2x - 2y)\right| dA &= \iint_D \left|4 - (x-1)^2 - (y-1)^2\right| dA \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 4r|4 - 4r^2\cos^2\theta - 4r^2\sin^2\theta| dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 4r|4 - 4r^2| dr d\theta = 32\pi\int_0^1 r|1 - r^2| dr \\ &= 32\pi\int_0^1 r(1 - r^2) dr = 8\pi \end{aligned}$$

16. Sea $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ |x| + |y| \leq 1\right\}$ y una función g continua en $\mathbb{R}$. Compruebe que

    $$\iint_D g(x+y) dA = \int_{-1}^1 g(u) du$$

    Solución: Para el desarrollo podemos considerar la transformación T definida como

    $$\begin{aligned} u &= x + y \\ v &= y - x, \end{aligned}$$

    luego la imagen del dominio D bajo la transformación T corresponde a

    $$\Omega_{uv} = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ / \ -1 \leq u \leq 1, \quad -1 \leq v \leq 1\right\},$$

    donde el jacobiano de la transformación viene determinado por

    $$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

    luego

    $$\iint_D g(x+y) dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{g(u)}{2} dv du = \int_{-1}^1 g(u) du$$

17. Calcular, de ser posible, la siguiente integral

    $$\int_1^2 \int_{\sqrt{x}}^x \cos\left(\frac{\pi x}{y}\right) dy dx + \int_2^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \cos\left(\frac{\pi x}{y}\right) dy dx$$

    Solución: En primer lugar notamos que al integrar directamente como se presenta el ejercicio es difícil encontrar la antiderivada de $\cos(\pi x/y)$ con respecto a y. Pero como la función $\cos(\pi x/y)$ es acotada en el dominio D, podemos intercambiar los límites de integración.

    $$\begin{aligned} D &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (1 \leq x \leq 2 \wedge \sqrt{x} \leq y \leq x) \cup (2 \leq x \leq 4 \wedge \sqrt{x} \leq y \leq 2)\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2 \wedge y \leq x \leq y^2\right\} \end{aligned}$$

Luego, se debe calcular la integral equivalente

$$\int_1^2 \int_y^{y^2} \cos\left(\frac{\pi x}{y}\right) dxdy = \int_1^2 \frac{y}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{y}\right)\Big|_y^{y^2} dy = \int_1^2 \frac{y}{\pi} \sin(\pi y)\, dy = -\frac{3}{\pi^2}$$

18. Mostrar que

$$4e^5 \leq \iint_{[1,3]\times[2,4]} e^{x^2+y^2} dA \leq 4e^{25}$$

Solución: Sea $f(x,y) = x^2 + y^2$ con $(x,y) \in D = [1,3] \times [2,4]$. Como la función $x^2 + y^2$ tiene un mínimo absoluto en $(0,0)$, pero f está definida en un cuadrado que no contiene al origen, se tiene que en el punto más cercano de D al origen, f alcanza un mínimo y en el punto más lejano f alcanza un máximo, dichos puntos son el $(1,2)$ y $(3,4)$ respectivamente. Luego, se tiene que $f(1,2) \leq f(x,y) \leq f(3,4) \;\Leftrightarrow\; 5 \leq f(x,y) \leq 25$. Además como la función exponencial, es creciente se tiene que

$$5 \leq f(x,y) \leq 25 \quad \Leftrightarrow \quad e^5 \leq e^{f(x,y)} \leq e^{25} \quad \Leftrightarrow \quad e^5 \leq e^{x^2+y^2} \leq e^{25}$$

Por otro lado $A(D) = 4$, así que finalmente

$$e^5 A(D) \leq \iint_D e^{f(x,y)} \leq e^{25} A(D) \quad \Leftrightarrow \quad 4e^5 \leq \iint_D e^{x^2+y^2} \leq 4e^{25}$$

19. Resuelva los siguientes problemas

(a) Calcule la integral $\iint_D e^{x+\sin y} \cos y dydx$, si D es el ractángulo $[0,\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$

(b) Calcular la integral doble $\iint_D (x^2+y^2) dA$, si la región D está limitada por las rectas $y = x$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$.

(c) Determine el volumen del cuerpo limitado por las superficies $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$.

(d) Obtenga el valor de

$$\int_0^1 \int_{x/2}^{x} y \sin y^3 dydx + \int_1^2 \int_{x/2}^{1} y \sin y^3 dydx$$

Solución:

(a) Notamos que

$$\iint_D e^{x+\sin y} \cos y dydx = \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x+\sin y} \cos y dydx = \int_0^{\pi} e^x dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin y} \cos y dy = (e-1)(e^{\pi}-1)$$

(b) Para la integral propuesta, si escribimos sus limites de integración en coordenadas polares observamos que

$$\iint_D (x^2+y^2)\, dA = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{1}{\sin\theta}}^{\frac{2}{\sin\theta}} r^3 dr d\theta = 5$$

(c) La integral de volumen viene determinada por:

$$\text{Volumen} = \iint_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} (x^2+y^2)\, dydx = \frac{88}{105}$$

(d) Observamos que intercambiando los ordenes de integración, tenemos que

$$\int_0^1 \int_{x/2}^{x} y \sin y^3 dydx + \int_1^2 \int_{x/2}^{1} y \sin y^3 dydx = \int_0^1 \int_y^{2y} y \sin y^3 dxdy = \frac{2}{3} \sin^2\left(\frac{1}{2}\right)$$

20. Probar que

$$2\int_a^b\int_x^b f(x)f(y)dydx = \left(\int_a^b f(x)dx\right)^2$$

Solución: Por el teorema fundamental del calculo, sea $F(b)-F(a)=\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, luego

$$\begin{aligned}
2\int_a^b\int_x^b f(x)f(y)dydx &= 2\int_a^b f(x)\left[F(b)-F(x)\right]dx = 2F(b)\int_a^b f(x)dx - 2\int_a^b f(x)F(x)dx\\
&= 2F(b)\left[F(b)-F(a)\right] - \int_{F(a)}^{F(b)} 2udu = 2F(b)^2-2F(b)F(a)-F(b)^2+F(a)^2\\
&= (F(b)-F(a))^2 = \left(\int_a^b f(x)dx\right)^2
\end{aligned}$$

21. Considere el rectángulo $R=[-2,2]\times[-1,1]$, además de la función f definida mediante $f(x,y)=\min\{x,y\}$. Encuentre

$$\iint_R f(x,y)dxdy \qquad \text{y} \qquad \iint_R f(x,y)dydx,$$

Solución: Al descomponer la función f en la región R se tiene que

$$\begin{aligned}
\iint_R f(x,y)dxdy &= \int_{-1}^1\int_{-2}^y x\,dxdy + \int_{-1}^1\int_y^2 y\,dxdy\\
\iint_R f(x,y)dydx &= \int_{-2}^{-1}\int_{-1}^1 x\,dydx + \int_{-1}^1\int_x^1 x\,dydx + \int_{-1}^1\int_{-1}^x y\,dydx + \int_1^2\int_{-1}^1 y\,dydx
\end{aligned}$$

22. Considere una lámina D la cual esta descrita mediante $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ |x|+|y|\le 2\}$, si la densidad en cada punto de la lámina viene definida como

$$f(x,y)=\begin{cases} 3a(x+y)^2 & \text{si} \quad y\ge x+a,\\ 4a & \text{si} \quad y<x+a.\end{cases}$$

Determine el valor de $a\in[0,2]$ de modo que la masa de la lámina D sea 16.

Solución: El problema consiste en hallar a tal que $\displaystyle\iint_D f(x,y)dA=16$, para esto consideramos la transformación T definida como

$$\begin{aligned} u &= y-x\\ v &= y+x\end{aligned}$$

luego la imagen del dominio D bajo T corresponde a

$$D_{uv}=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2/-2\le u\le 2, \quad -2\le v\le 2\},$$

el jacobiano de la transformación es

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2$$

de esta forma

$$\iint_D f(x,y)dA=\frac{1}{2}\iint_{D_{uv}} f\left(\frac{v-u}{2},\frac{u+v}{2}\right)dudv,$$

notamos que

$$f\left(\frac{v-u}{2},\frac{u+v}{2}\right)=\begin{cases} 3av^2 & \text{si } u\ge a,\\ 4a & \text{si } u<a.\end{cases}$$

así

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)dA &= \frac{1}{2}\iint_{D_{uv}} f\left(\frac{v-u}{2},\frac{u+v}{2}\right)dudv,\\ &= \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{a} 4adudv + \int_{-2}^{2}\int_{a}^{2} 3av^2dudv\right) = 32a\end{aligned}$$

finalmente $a = 1/2$.

23. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ una lámina delimitada por las curvas

$$y = x^3,\;\; y = x^3+2,\;\; y+x=0,\;\; y+x-3=0,$$

si la densidad en cada punto de la lámina viene determinada por la función $\rho(x,y) = 1+3x^2$ y si para $k\in[0,3]$ se define la recta $\ell:\; x+y=k$

(a) Calcule el momento de inercia de la lámina respecto a la recta ℓ, el cual sera denotado por $I(k)$.

(b) Determine k de modo que $I(k)$ sea mínimo.

Solución:

(a) El momento de inercia respecto a la recta ℓ viene definido como

$$I(k) = \iint_\Omega r_\ell^2 dm,$$

donde r_ℓ^2 es la distancia al cuadrado de cualquier punto del dominio a la recta ℓ, la cual viene descrita por

$$r_\ell^2 = \frac{(x+y-k)^2}{2},$$

de esta forma tenemos que aplicando el teorema del cambio de variables con

$$\begin{array}{rcl} u &=& y-x^3 \\ v &=& y+x \end{array} \quad\Rightarrow\quad \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = -1-3x^2$$

Luego,

$$\begin{aligned}I(k) &= \iint_\Omega r_\ell^2 dm \;=\; \iint_\Omega r_\ell^2\rho(x,y)dA\\ &= \iint_\Omega \frac{(1+3x^2)(x+y-k)^2}{2}dA = \int_0^2\int_0^3 \frac{(1+3x^2)(v-k)^2}{2}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dvdu\\ &= \int_0^2\int_0^3 \frac{(v-k)^2}{2}dvdu = \frac{(v-k)^3}{3}\Big|_0^3 = 3k^2-9k+9\end{aligned}$$

(b) Notamos que $I(k) = 3k^2-9k+9$ es una parábola la cual no tiene raíces reales y además su mínimo en el intervalo $[0,3]$ se alcanza en su vértice, el cual es $k=\frac{3}{2}$.

24. Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ una región cerrada y acotada, además se define la región D como

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\; 1\le x^2+y^2\le 4\}.$$

Suponga que $\Omega\subset D$ y la función $z = f(x,y)$ es continua y positiva sobre todo $\mathbb{R}^2$, la cual posee la propiedad que para todo $a>0$ se tiene

$$f(x,y)\le ae^{-a(x^2+y^2)}$$

Verifique que

$$\lim_{a\to\infty}\iint_\Omega f(x,y)dA = 0$$

Solución:
Usando propiedades de la integral, como $f(x,y) \geq 0$ en todo $\mathbb{R}^2$, se tiene que

$$0 \leq \iint_\Omega f(x,y)dA \leq \iint_D f(x,y)dA,$$

además pues $f(x,y) \leq ae^{-a(x^2+y^2)}$

$$0 \leq \iint_\Omega f(x,y)dA \leq \iint_D f(x,y)dA \leq \iint_D ae^{-a(x^2+y^2)}dA,$$

pero

$$\iint_D ae^{-a(x^2+y^2)}dA = \int_0^{2\pi}\int_1^2 are^{-ar^2}drd\theta = -\pi e^{-ar^2}\Big|_{r=1}^{r=2} = \pi(e^{-a} - e^{-4a}),$$

luego

$$0 \leq \iint_\Omega f(x,y)dA \leq \pi(e^{-a} - e^{-4a}) \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \lim_{a\to\infty}\iint_\Omega f(x,y)dA \leq \lim_{a\to\infty}\pi(e^{-a} - e^{-4a}) = 0$$

por acotamiento

$$\lim_{a\to\infty}\iint_\Omega f(x,y)dA = 0$$

25. Considere la región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ descrita mediante

$$\Omega = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq 4, \ -x \leq y \leq x^2\Big\}.$$

(a) Muestre que $\Omega = T(\mathcal{D})$, donde $\mathcal{D}$ es la región acotada por las rectas: $u=0$, $v=0$ y $v+u=4$ y T es la transformación definida como

$$T : \begin{cases} x = u+v, \\ y = u^2 - v. \end{cases}$$

además justifique que T es una transformación de coordenadas válida.

(b) Para la función $f(x,y) = \dfrac{2x}{\sqrt{1+4x+4y}}$, obtenga el valor de la integral

$$\iint_\Omega f(x,y)\ dA$$

Solución:

(a) Procederemos mapeando lado a lado del conjunto $\mathcal{D}$, para esto

• Sea ℓ_1 el lado descrito por $v=0$ desde $0 \leq u \leq 4$, al aplicar la transformación tenemos que $T(\ell_1)$ esta determinado por $y = x^2$ con $0 \leq x \leq 4$.

• Sea ℓ_2 el lado descrito por $u+v=4$ desde $0 \leq u \leq 4$, al aplicar la transformación tenemos que $T(\ell_2)$ esta determinado por $x=4$.

• Sea ℓ_3 el lado descrito por $u=0$ desde $0 \leq v \leq 4$, al aplicar la transformación tenemos que $T(\ell_3)$ esta determinado por $y=-x$ con $0 \leq x \leq 4$.

Lo anterior permite verificar que $\Omega = T(\mathcal{D})$. Además notamos que el jacobiano de la transformación entregada es $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = |1+2u|$ el cual es no nulo en la región.

(b) Usando el teorema del cambio de variables, se tiene que:

$$\begin{aligned}\iint_\Omega f(x,y)\ dA &= \iint_{\mathcal{D}} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dvdu \\ &= \int_0^4\int_0^{4-u} 2(u+v)dvdu = \int_0^4 (4^2-u^2)du = 4^3 - \frac{4^3}{3} = \frac{128}{3}\end{aligned}$$

26. Considere una lámina D cuya forma corresponde a un hexágono regular de lado $a > 0$ con centro en el origen. Verifique que la masa de la lámina es menor a 1, si la densidad en cada punto de D es

$$f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2+\pi)^2}$$

Sugerencia: Encierre el hexágono regular por alguna circunferencia de un radio adecuado.

Solución: La masa de la lámina D viene determinada por $\text{Masa}(D) = \iint_D f(x,y)dA$. Notamos que la región D es un hexágono regular de lado a, en particular tal región esta contenida en un disco R de radio a con centro en $(0,0)$. Así, como $f(x,y) \geq 0$ en todo $\mathbb{R}^2$ se tiene que:

$$\text{Masa}(D) \leq \iint_R f(x,y)dA = \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{r}{(r^2+\pi)^2}drd\theta = -\pi(r^2+\pi)^{-1}\Big|_{r=0}^{r=a} = \pi\left(\pi^{-2} - (a^2+\pi)^{-1}\right) = \frac{\pi a^2}{a^2+\pi} \leq 1$$

luego se tiene que

$$\text{Masa}(D) \leq 1,$$

27. Una función de densidad de probabilidad conjunta asociada a un vector aleatorio (X,Y) corresponde a una función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que

- $f \geq 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, en particular $f > 0$ si $(x,y) \in D$.
- $\iint_D f\ dA = 1.$

Adicionalmente, se define la probabilidad de un "evento" (conjunto) $\Omega \subset D$ como

$$\mathbb{P}[\Omega] = \iint_\Omega f\ dA$$

En la elaboración de un determinado producto intervienen dos etapas. El tiempo de realización, en horas, de la primera etapa se modela por la variable "x", mientras que el tiempo total de elaboración, en horas, se modela por la variable "y". La función de densidad de probabilidad conjunta está dada por

$$f(x,y) = \alpha^3 x \exp\{-\alpha y\}$$

definida sobre la región

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < y\}$$

con $\alpha > 0$ un parámetro de escala (conocido).

(a) Bosqueje en $\mathbb{R}^2$ la región que representa al evento "Ω: El tiempo de duración, en horas, de la primera etapa es más de la mitad del tiempo total, en horas, de elaboración" y calcule su probabilidad.

(b) Las componentes del centro de masa del dominio D donde se define la función de densidad f, se denominan "valores esperados" o "valores promedio" asociados a cada componente del vector aleatorio (X,Y). Calcule el centro de masa del dominio D. ¿Cómo interpretaría cada una de sus componentes?

Recuerde que para $r \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^\infty u^r\ e^{-\lambda u}\ du = \frac{r!}{\lambda^{r+1}}$$

Solución:

(a) La región viene dada por $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ y/2 \leq x \leq y,\ 0 \leq y < \infty\}$, luego

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\Omega] &= \int_0^\infty \int_{y/2}^y \alpha^3 x \exp\{-\alpha y\}\ dxdy = \frac{\alpha^3}{2}\int_0^\infty \frac{3}{4}y^2 \exp\{-\alpha y\}\ dy \\
&= \frac{3\alpha^3}{8}\int_0^\infty y^2 \exp\{-\alpha y\}\ dy = \frac{3\alpha^3}{8} \times \frac{2!}{\alpha^3} = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

(b) La masa de la región D, por definición de la función de densidad de probabilidad es $m = 1$. Luego, los primeros momentos respecto a cada eje son

$$\begin{aligned}
M_y = \int_0^{\infty}\int_x^{\infty} \alpha^3 x^2\, e^{-\alpha y}\, dydx \quad &\Rightarrow \quad M_y = \alpha^2 \int_0^{\infty} x^2\, e^{-\alpha x}\, dx \\
&\Rightarrow \quad M_y = \alpha^2 \times \frac{2!}{\alpha^3} \\
&\Rightarrow \quad M_y = \frac{2}{\alpha} \\
M_x = \int_0^{\infty}\int_0^{y} \alpha^3 xy\, e^{-\alpha y}\, dxdy \quad &\Rightarrow \quad M_x = \frac{\alpha^3}{2}\int_0^{\infty} y^3\, e^{-\alpha y}\, dy \\
&\Rightarrow \quad M_x = \frac{\alpha^3}{2} \times \frac{3!}{\alpha^4} \\
&\Rightarrow \quad M_x = \frac{3}{\alpha}
\end{aligned}$$

Finalmente, el centroide es $(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\frac{2}{\alpha}, \frac{3}{\alpha}\right)$, cuya componente $\overline{x}$ corresponde al tiempo promedio de la realización primera etapa y $\overline{y}$ al tiempo promedio total de elaboración.

28. Considere la región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ definida como

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y^2 \geq x^2, \ \ x^2 + y^2 \leq 8y\right\},$$

mediante el uso de coordenadas polares, exprese las integrales que permiten calcular

$$\iint_{\Omega} e^{x^2+y^2}\, dA$$

Solución: Aplicando el teorema del cambio de variables junto con el uso de coordenadas polares, tenemos que:

$$\iint_{\Omega} e^{x^2+y^2}\, dA = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{8\sin\theta} e^{r^2} r\, drd\theta$$

29. Considere $a \in \mathbb{R}$ y $\ell > 0$, justifique si es posible o no acotar el volumen del sólido W mediante

$$\text{Volumen}(W) \leq \pi/a^2,$$

donde W es el sólido que está encerrado por el plano $z = 0$ y la función $f(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+y^2+a^2)^2}$ en la región D definida como

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ |x| + |y| \leq \ell\}$$

Solución:

El volumen del sólido W viene determinado por

$$\text{Volumen}(W) = \iint_D f(x,y)dA,$$

notamos que la región D es un rombo, en particular tal región esta contenida en un disco R de radio ℓ con centro en $(0,0)$. Así, como $f(x,y) \geq 0$ en todo $\mathbb{R}^2$ se tiene que

$$\text{Volumen}(W) \leq \iint_R f(x,y)dA,$$

a la integral $\iint_R f(x,y)dA$ le podemos aplicar coordenadas polares, de esta forma

$$\iint_R f(x,y)dA \quad = \quad \int_0^{2\pi}\int_0^{\ell} \frac{r}{(r^2+a^2)^2} drd\theta = -\pi(r^2+a^2)^{-1}\Big|_{r=0}^{r=\ell} = \pi\left(a^{-2} - (\ell^2+a^2)^{-1}\right) = \frac{\pi\ell^2}{a^2(\ell^2+a^2)},$$

como $\ell^2 \leq \ell^2 + a^2$ se tiene que

$$\text{Volumen}(W) \leq \pi/a^2,$$

Ejercicios Propuestos

1. Calcule las siguientes integrales

   (a) $\displaystyle\int_0^1\int_y^1 e^{x^2}dxdy$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}|\cos(x+y)|dA$ (c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\int_0^{\text{mín}\{2-\sin\theta,1+\sin\theta\}} drd\theta$

   (d) $\displaystyle\int_0^1\int_x^1 \tan y^2 dydx$ (e) $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{9+y^6}dydx$ (f) $\displaystyle\int_0^1\int_x^1 \sqrt{1+y^4}dydx$

2. Resuelva los siguientes problemas

   (a) Hallar el área de la región $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ definida como $\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x^2+y^2\leq 1,\ x\leq\frac{1}{2},\ y\geq x,\ y\geq 0\right\}$.

   (b) Sea D la región definida como $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\quad y\leq\sin x,\quad 0\leq 2x\leq\pi y\}$. Determine el valor de la integral doble $\displaystyle\iint_D y\,dA$

3. Considere la siguiente región $\Omega_n=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\quad a^2(x-h)^2+b^2y^2\leq n^2,\ a,b,h>0\right\}$, adicionalmente se define
$$f(\xi,n)=\iint_{\Omega_n}\left(\xi^2+a^2(x-h)^2+b^2y^2\right)^{1-\xi}dA.$$
   Determine el valor de ξ de manera que $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty} f(\xi,n)<+\infty$, luego para los valores obtenidos del parámetro ξ calcule $f(\xi,n)$

   Sugerencia: Utilice coordenadas polares.

4. Sea $R=[0,1]\times[0,1]$. Considere $f(x,y)=\dfrac{x-y}{(x+y)^3}$ y $g(x,y)=\dfrac{x-y}{(x+y)^2}$.

   Muestre que
$$\iint_R f(x,y)dxdy\neq\iint_R f(x,y)dydx \text{ pero que } \iint_R g(x,y)dxdy=\iint_R g(x,y)dydx$$

5. Evaluar la integral $\displaystyle\iint_D e^{x-y}dA$ donde D es el interior del triángulo con vértices $(0,0)$, $(1,3)$ y $(2,2)$.

   Sugerencia: Utilice una sustitución de la forma $u=x-y$, $v=x+y$.

6. Para la región D definida como: $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y\geq 2\wedge x^2+y^2\leq 2y\right\}$. Calcule la integral $\displaystyle\iint_D\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^2}dA$,

7. Mostrar que
$$4\pi\leq\int_D(x^2+y^2+1)dA\leq 20\pi,$$
   donde D es el disco de radio 2 y centro en el origen.

   Sugerencia: Vea el problema 5 de los ejercicios resueltos.

8. Usando coordenadas polares, hallar el área acotada por la lemniscata $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$.

9. Encuentre el volumen usando coordenadas polares, grafique previamente las regiones:

   - $1\leq x^2+y^2\leq 9\ ;\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq z\leq 1.$
   - $-2\leq x\leq 2\ ;\ 0\leq y\leq\sqrt{4-x^2}\ ;\ 0\leq z\leq x\sqrt{y}.$

10. Considere una lámina delgada cuya función de densidad de masa es
$$f(x,y)=k\frac{x}{y},$$
    tal lámina está delimitada por la región encerrada por las curvas
$$y=\sqrt{8x}\quad,\quad y=x^2\ ,\ 1\leq x\leq 4$$

- Calcule la constante k de tal forma que la masa total de la lámina sea igual a 1.
- Calcule las coordenadas del centro de masa de la lámina.

11. Sea la región D en el plano xy acotada por las rectas

$$y = x,\ y = 3x,\ x + y = 2,\ x + y = 4$$

- Haga un bosquejo de la imagen $T(D)$, donde T es una transformación definida por el sistema de ecuaciones

$$T : \begin{cases} u = x + y - 2 \\ v = y - x \end{cases}$$

- Si D es una placa de densidad $\rho(x, y) = y - x$, encontrar la masa de la placa.
- Justifique claramente el valor de verdad de la siguiente desigualdad:

$$\text{Área}(D) - \text{Área}(T(D)) > 0$$

12. En los siguientes ejercicios encontrar la masa y el centro de masa de la lámina dada si la densidad de área es como se indica.

- Una lámina tiene la forma de la región rectangular acotada por las rectas $x = 3$, $y = 2$ y los ejes coordenados. La densidad de área en cualquier punto es xy^2.
- Una lámina está acotada en el primer cuadrante por el círculo $x^2 + y^2 = a^2$ y los ejes coordenados. La densidad de área es constante.

13. Sea f continua en $R = [a, b] \times [c, d]$; para $a < x < b$, $c < y < d$, definir

$$F(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(u, v) dv du.$$

Muestre que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

14. Calcule el valor de la integral doble dada por

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_{\sqrt{3}x/3}^{x} \frac{1}{(x^2 + y^2 + 4)^2} dy dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \int_{\sqrt{3}x/3}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{(x^2 + y^2 + 4)^2} dy dx.$$

15. Analizar la convergencia o divergencia de las siguientes integrales impropias

(a)

$$\iint_D \frac{\sin^2(x - y)}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dA,$$

donde D es el disco unitario $x^2 + y^2 \leq 1$.
Respuesta: La integral es convergente.

(b)

$$\iint_D \frac{e^{x^2+y^2}}{x - y} dA,$$

donde D es el conjunto de puntos tal que $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq x$.
Respuesta: La integral es divergente.