Física General III

Ayudantía 7

Oscilaciones en fluidos y Mecánica de fluidos: Dinámica de fluidos

El alumno una vez finalizado la guía debe ser capaz:

- Aprender las ecuaciones fundamentales de la dinámica de fluidos
- Saber establecer las ecuaciones del movimiento de un fluido en una conducción (Teorema de Bernoulli, ecuación de continuidad, Torricelli).
- Determinar: presión, velocidad y cota en cualquier punto de un fluido.
- Conocer los tipos de movimiento de un fluido en relación a su variación espacial y temporal (permanente, variable, uniforme).

Problema 1.- Tenemos una boya de forma cilíndrica flotando en el mar. Se deja caer un objeto sobre la boya (por ejemplo, una persona que salta encima). La boya empieza a oscilar.

a) Determinar el periodo de la oscilación y la ecuación del M.A.S.

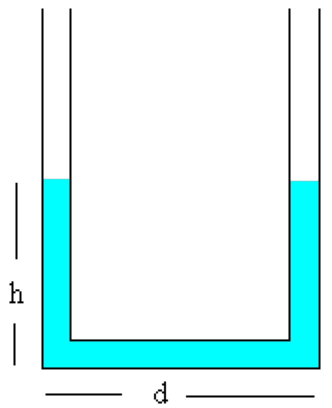
Ayuda: Suponer una boya de forma cilíndrica o paralepipédica de densidad ρ_s *menor que la del agua, de sección S y altura h.* ρ_f Representa la densidad del fluido.

Problema 2.-Vamos a describir las oscilaciones de un fluido ideal contenido en dos vasos comunicantes cuyas alturas iniciales difieren de la de equilibrio.

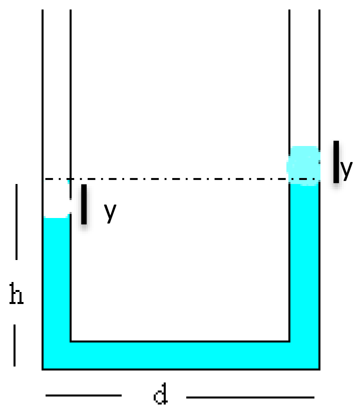
Se define y como la diferencia de altura con respecto a h.

a) Determinar la frecuencia angular

Sistema equilibrio

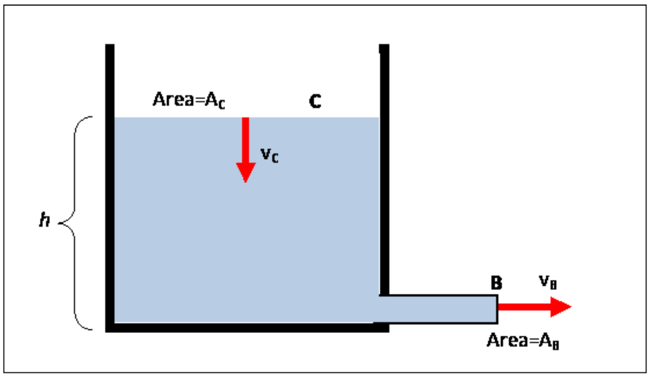


Sistema con desnivel

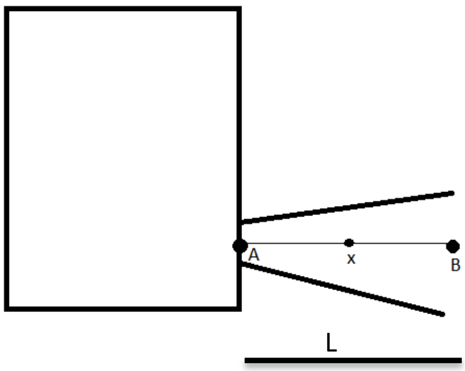


Problema 3.- Un recipiente cilíndrico de un radio de 0,1 metros se llena con agua hasta una altura de 0,5 metros. Tiene un tubo capilar de 0,15 metros de largo y 0,0002 metros de radio fija horizontalmente en su parte inferior.

a) Encontrar el tiempo en el que el nivel del agua alcanza una altura de 0,2 metros.



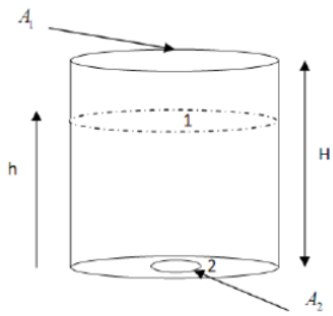
Ahora se cambia el tubo capilar de salida como se muestra en la figura y considere que el flujo es continuo, es decir, flujo permanente (velocidad en un punto no varía con el tiempo v(x,t) = v(x))



b) Determinar la diferencia de presión entre A y B

c) Determinar la presión en el punto x

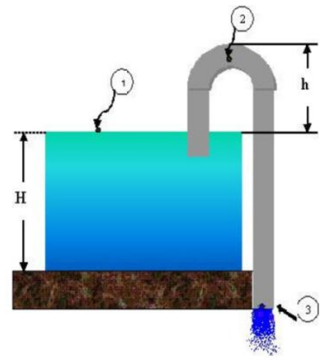
Problema 4.- Se tiene un estanque de altura H y área transversal A_1con agua, el cual posee un agujero de área A_2en el fondo. Considere que $A_2 \ll A_1$.



a) Calcule aproximadamente la velocidad de salida del agua, cuando la altura de la columna de agua es h.

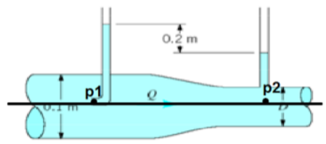
B) ¿Cuánto tiempo demora en vaciarse totalmente el jarro si al principio estaba totalmente lleno?

Problema 5.-Mediante una manguera doblada (sifón) se saca agua de un recipiente como se indica en la figura.



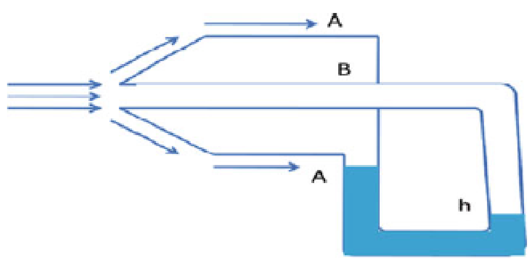
a) ¿Cuál es la velocidad de salida del agua por el extremo inferior del tubo?
b) ¿Cuál es la presión del agua en el punto más elevado del tubo?
c) ¿Cuál es la máxima altura h que admite este método de vaciado del recipiente?

Problema 6.- A través de la contracción de la tubería que se muestra en la figura fluye agua. Para la diferencia dada de 0,2 m en el nivel del manómetro, determinar la velocidad del fluido en la sección transversal de diámetro D. (Así funcionan los tubos pitot)



Problema 7.- Un tubo de Pitot, como se muestra en la figura, se monta en el eje de un gasoducto de sección transversal A.

a) Calcular el flujo de gas que pasa a través de la sección de la tubería, h es la diferencia de altura entre las columnas del líquido, y ρ_L y$\rho_g$son las densidades del líquido y el gas, respectivamente.

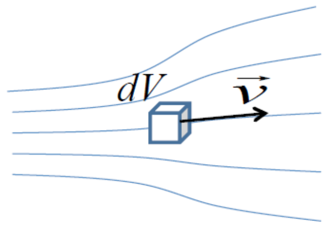


Problema 8.- Un medidor de Venturi tiene un diámetro de tubería de 4 cm y un diámetro de garganta de 2 cm. El velocidad del agua en la sección de tubo es de 10 cm / s.

a) Encontrar la velocidad en la garganta.
b) Encontrar la caída de presión.

Trabajo personal

Problema 9.- Demuestre que un elemento de volumen en un flujo no viscoso y con un campo de velocidades ***v (x,t)*** , satisfacen las siguientes ecuaciones:



$$dF_R = (dm)\frac{dv}{dt}$$

$$dF_R = (dm)\frac{dv}{dt} \quad \rightarrow \quad -\Delta p\, dV + g\, dm = dm\,\frac{dv}{dt} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{\rho}\nabla p + g = \frac{dv}{dt}$$

Con

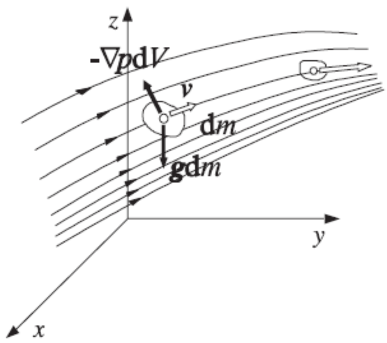
$$Derivada\ sustancial\ o\ material\ (convectiva):\ \ \frac{d}{dt}(v) = \frac{\partial(v)}{\partial t} + v\cdot\nabla(v)$$

Para finalmente llegar a una ecuación general de la ecuación de bernoulli, dada por:

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho}{2}{v_1}^2 = p_2 + \frac{\rho}{2}{v_2}^2 + \rho g h_2 + \rho\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t}\ dx$$

Solución

La ecuación de Euler.- Supongamos un fluido ideal en movimiento, y consideremos un elemento infinitesimal del mismo (partícula fluida), de masa dm y volumen dV (ver figura). Siguiendo a la partícula fluido en su movimiento. Naturalmente, supondremos que la masa (dm) de la partícula fluida permanece constante en el transcurso de su movimiento, aunque su volumen (dV) podrá variar, a menos que el fluido sea incompresible. La segunda ley del movimiento de newton nos relaciona la aceleración total que adquiere la partícula con la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre ella



$$dF_R = (dm)\frac{dv}{dt}$$

Las fuerzas que actúan sobre la partícula fluida son de dos tipos: *Fuerzas superficiales y fuerzas másicas.* Puesto que el fluido es ideal, la fuerza superficial neta que actúa sobre la partícula fluida es debida únicamente a la presión. Se puede expresar dicha fuerza de la forma $-\nabla p dV$, ya que $f_P = -\nabla p$ representa la fuerza por unidad de volumen debida a la presión. Las fuerzas másicas son fuerzas exteriores que actúan sobre la partícula fluida y que acostumbramos a expresar referidas a la unidad de volumen del fluido ($\boldsymbol{f_m}$, densidad de fuerza másica) o a la unidad de masa del mismo **(g**, fuerza másica específica), de modo que la fuerza másica neta que actúa sobre la partícula fluida será $\boldsymbol{f_m} dV = \boldsymbol{g} dm$. Entonces, la segunda ley del movimiento de Newton nos permite escribir en un referencial inercial.

$$-\Delta p\, dV + g\, dm = dm\, \frac{dv}{dt}$$

O sea,

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p + g = \frac{dv}{dt}$$

Donde la aceleración $\frac{dv}{dt}$ es la aceleración total o sustancial. Utilizaremos la definición de derivada sustancial o material

$$Derivada\ sustancial\ o\ material\ (convectiva):\quad \frac{d}{dt}(*) = \frac{\partial(*)}{\partial t} + v \cdot \nabla(*)$$

Donde v es la velocidad del fluido. El primer término representa la variación de la propiedad en un punto fijo del espacio y por ello se la denomina derivada local, mientras que el segundo representa la variación de la propiedad asociado al cambio de posición de la partícula fluida, y se la denomina derivada convectiva.

Aplicando dicha definición, se obtiene que:

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p + g = \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v \qquad [\mathbf{1}]$$

Otra forma de la ecuación de Euler.- De aquí en adelante, supondremos que la fuerza másica específica **g** es conservativa, de modo que puede expresarse como el gradiente (cambiado de signo) de un *energía potencial específica* (energía por unidad de masa) que designaremos por ℵ;

$$g = -\nabla\aleph$$

Como es obvio, normalmente la fuerza másica será debida al propio peso del fluido, en un campo gravitatorio uniforme, de modo que

$$\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{k} \quad ; \quad \aleph = gz$$

Midiéndose z verticalmente hacia arriba a partir de un cierto plano horizontal de referencia.

En estas condiciones, reescribiremos la ecuación de Euler **[1]** en la forma

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p\ -\ \nabla\aleph\ = \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v$$

En la que conviene sustituir el último término por su equivalencia

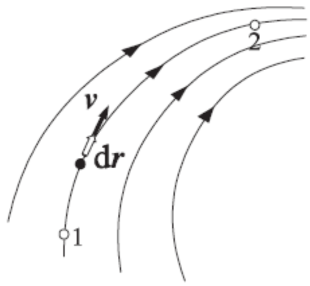
$$(v \cdot \nabla)v = \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) + (\nabla \times v) \times v$$

Para obtener finalmente:

$$\frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla\aleph + \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) + (\nabla \times v) \times v + \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \qquad [\mathbf{2}]$$

Generalización de la ecuación de Bernoulli al flujo no estacionario.- Consideremos un flujo ideal en régimen no estacionario. Entonces por régimen de *flujo no estacionario,* aquél en el que la dirección de la velocidad en cada punto del espacio no permanece constante en el transcurso del tiempo.

Multiplicaremos escalarmente todos los términos de la ecuación de Euler **[2]** por el vector desplazamiento elemental d***r*** a lo largo de una línea de corriente (ver figura) para obtener:



$$[\mathbf{3}]\ \frac{1}{\rho}\nabla p \cdot d\boldsymbol{r} + \nabla\aleph \cdot d\boldsymbol{r} + \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) \cdot d\boldsymbol{r} + (\nabla \times v) \times v \cdot d\boldsymbol{r} + \frac{\partial v}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

Los tres primeros términos de esta expresión son de la forma general $\nabla\emptyset \cdot d\boldsymbol{r} = d\emptyset$**.** El cuarto término es nulo por ser $v | dr$, por la misma razón, el quinto término puede escribirse como $\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) ds$, donde $ds = |dr|$ representa el elemento de longitud a lo largo de la línea de corriente. En definitiva, la expresión **[3]** nos conduce a:

$$\frac{dp}{\rho} + d\aleph + d\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) ds$$

Ecuación diferencial que se integra a lo largo de una línea de corriente, entre los puntos 1 y 2, para obtener

$$\int_1^2 \frac{\boldsymbol{dp}}{\boldsymbol{\rho}} + (\aleph_2 - \aleph_1) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\boldsymbol{v}_2^2 - \boldsymbol{v}_1^2) = -\int_1^2 \left(\frac{\boldsymbol{\partial v}}{\boldsymbol{\partial t}}\right) \boldsymbol{ds}$$

Ecuación válida para un régimen de flujo no estacionario y no viscoso y que constituye una generalización de la ecuación de Bernoulli.

La ecuación anterior es posible expresarla de una forma más conocida:

$$\frac{1}{\rho}(p_2 - p_1) + g(z_2 - z_1) + \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = -\int_1^2 \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) ds$$

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho}{2}{v_1}^2 = p_2 + \frac{\rho}{2}{v_2}^2 + \rho g h_2 + \rho \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t}\, dx$$

Nota:

Flujo permanente: Llamado también flujo estacionario.

Este tipo de flujo se caracteriza porque las condiciones de velocidad de escurrimiento en cualquier punto no cambian con el tiempo, o sea que permanecen constantes con el tiempo o bien, si las variaciones en ellas son tan pequeñas con respecto a los valores medios. Así mismo en cualquier punto de un flujo permanente, no existen cambios en la densidad, presión o temperatura con el tiempo, es decir:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

Para un flujo uniforme permanente:

$$\rho \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t}\, dx = 0$$

Y la ecuación de Bernoulli queda de la forma que se conoce habitualmente

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho}{2}{v_1}^2 = p_2 + \frac{\rho}{2}{v_2}^2 + \rho g h_2$$

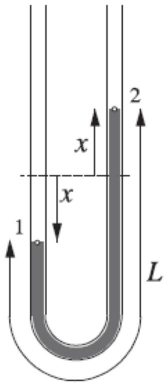
Flujo no permanente

$$\rho \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t}\, dx \neq 0$$

Ejemplo 1.- Determinar el período de las oscilaciones de la columna líquida contenida en un tubo en U de sección recta transversal constante y colocado verticalmente.

Solución:

Evidentemente, el régimen de flujo en el tubo es uniforme y no estacionario.



Aplicaremos la ecuación de Bernoulli generalizada para el flujo no estacionario e incompresible entre los puntos 1 y 2 de una línea de corriente.

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho}{2} {v_1}^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} {v_2}^2 + \rho g h_2 + \rho \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t}\ dx$$

Con

$$p_1 = p_2 = p_{atmosferica}; \quad -h_1 = h_2 = x; \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dv}{dr} = \frac{d^2 x}{dr^2}; \quad v_1^2 = v_2^2$$

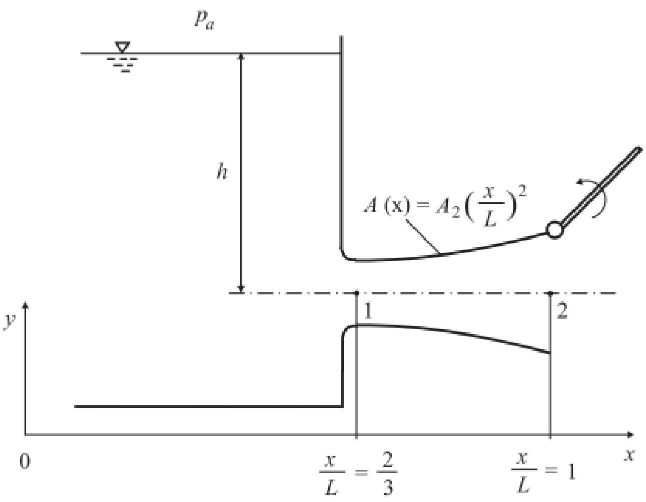
de modo que tenemos

$$2gx = -\frac{dv}{dt} L \qquad \frac{d^2x}{dr^2} + \frac{2g}{L} x = 0$$

Que es la ecuación de movimiento armónico simple, cuyo período es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2g}}$$

Problema 10.- La salida de un recipiente **<u>muy grande</u>** es construido como un difusor. La solapa (o barra) al final del difusor se abre abruptamente a t=0 segundos (Flujo no permanente o no estacionario).



Dados: $L,\ p_a,\ p_2 \approx p_a,\ A_2,\ h$

Determine:

a) La aceleración $\frac{dv_2}{dt}$ en el punto "2" inmediatamente después de la apertura de la solapa<u>. Ayuda</u>: Considere flujo no permanente.

b) La posición x en el difusor, donde la presión tiene su máximo, cuando v_2 alcanza la mitad de su valor final. <u>Ayuda:</u> Velocidad es máxima cuando la aceleración = 0.