



Transformaciones Lineales (MAT023)

Primer semestre de 2012

Verónica Gruenberg Stern

DEFINICION

Sean U, V dos espacios vectoriales sobre un cuerpo \mathbb{K} y sea $T : U \longrightarrow V$ una función. Diremos que T es una transformación lineal ssi satisface las siguientes dos condiciones:

1. $T(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = T(\mathbf{u}_1) + T(\mathbf{u}_2) \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U.$
2. $T(\alpha \cdot \mathbf{u}) = \alpha \cdot T(\mathbf{u}) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \mathbf{u} \in U.$

OBSERVACIÓN

La primera condición dice que la función T transforma la suma de dos vectores en U en la suma de las imágenes de estos dos vectores en V . Del mismo modo, la segunda condición indica que T transforma el producto por escalar de un vector en U en el producto del mismo escalar por la imagen del vector en V .

TEOREMA

Sean U, V espacios vectoriales sobre el cuerpo \mathbb{K} ; entonces $T : U \longrightarrow V$ es una transformación lineal ssi

$$T(\alpha \cdot \mathbf{u}_1 + \beta \cdot \mathbf{u}_2) = \alpha \cdot T(\mathbf{u}_1) + \beta \cdot T(\mathbf{u}_2) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$$

Dem.

Debemos probar que T satisface las condiciones 1. y 2. de la definición si y solamente si $T(\alpha \cdot \mathbf{u}_1 + \beta \cdot \mathbf{u}_2) = \alpha \cdot T(\mathbf{u}_1) + \beta \cdot T(\mathbf{u}_2) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U.$

\Leftarrow Para la condición 1. basta tomar $\alpha = \beta = 1$, y para la condición 2., basta tomar $\beta = 0$.

\Rightarrow Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{K}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$. Luego:

$$\begin{aligned} T(\alpha \cdot \mathbf{u}_1 + \beta \cdot \mathbf{u}_2) &= T(\alpha \cdot \mathbf{u}_1) + T(\beta \cdot \mathbf{u}_2) \quad \text{condición 1. aplicada a } \alpha \mathbf{u}_1, \beta \mathbf{u}_2 \in U. \\ &= \alpha \cdot T(\mathbf{u}_1) + \beta \cdot T(\mathbf{u}_2), \quad \text{por la condición 2.} \end{aligned}$$

EJEMPLOS

1. Considere la función $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $T(x) = 5x$. Veamos si T es o no una transformación lineal.

a) Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces, $T(x + y) = 5(x + y) = 5x + 5y = T(x) + T(y)$.

b) Sea $x \in \mathbb{R}$, (espacio vectorial), y sea $\alpha \in \mathbb{R}$ (cuerpo). Entonces,
 $T(\alpha x) = 5\alpha x = \alpha 5x = \alpha T(x)$.

Así, hemos probado que $T(x) = 5x$ es una transformación lineal. Notar que de la misma manera podríamos haber probado que $T(x) = k \cdot x$ es una transformación lineal, para cualquier constante real k .

2. Considere la función $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $T(x) = 5x + 9$. Veamos si T es o no una transformación lineal.

a) Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces, $T(x + y) = 5(x + y) + 9 = 5x + 5y + 9$

Claramente, esta última expresión es diferente a $T(x) + T(y)$. Luego, esta función **no** es una transformación lineal. Como antes, vemos que

$T(x) = k \cdot x + n$ nunca es una transformación lineal, salvo que $n = 0$.

3. Análogamente, podemos probar que funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas por expresiones como $f(x) = x^2$ ó $f(x) = \sin x$ ó $f(x) = \cos x$ ó $f(x) = a^x$ etc. **no** son lineales.

4. Considere la función $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x + y, x - y)$. Veamos si T es o no una transformación lineal.

a) Sean $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$. Entonces,

$$\begin{aligned} T((x, y) + (u, v)) &= T((x + u, y + v)) = (x + u + y + v, x + u - y - v) \\ &= (x + y, x - y) + (u + v, u - v) = T(x, y) + T(u, v) \end{aligned}$$

b) Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$T(\alpha(x, y)) = T(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x + \alpha y, \alpha x - \alpha y) = \alpha(x + y, x - y) = \alpha T(x, y)$$

Así, hemos probado que $T(x, y) = (x + y, x - y)$ es una transformación lineal.

5. Considere la función $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y) = (x + y, x - y, 2x + 3y)$. Análogamente, probaremos que T es lineal:

a) Sean $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$. Entonces,

$$\begin{aligned} T((x, y) + (u, v)) &= T((x + u, y + v)) \\ &= (x + u + y + v, x + u - y - v, 2x + 2u + 3y + 3v) \\ &= (x + y, x - y, 2x + 3y) + (u + v, u - v, 2u + 3v) \\ &= T(x, y) + T(u, v) \end{aligned}$$

b) Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\begin{aligned} T(\alpha(x, y)) &= T(\alpha x, \alpha y) \\ &= (\alpha x + \alpha y, \alpha x - \alpha y, 2\alpha x + 3\alpha y) \\ &= \alpha(x + y, x - y, 2x + 3y) = \alpha T(x, y) \end{aligned}$$

6. Considere la función $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x + y, -1)$. Veamos si T es o no una transformación lineal.

$$\begin{aligned} \text{Sean } (x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2. \text{ Entonces, } T((x, y) + (u, v)) &= T((x + u, y + v)) = \\ (x + u + y + v, -1) &= (x + y, -1) + (u + v, 0), \quad (\text{por ejemplo}). \end{aligned}$$

Esta última expresión **no** es igual a $T(x, y) + T(u, v)$. Luego, T **no** es una transformación lineal.

7. Si U y V son espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo, la función que a cada elemento de U le asigna el elemento 0 de V , que denotamos $\sigma : U \longrightarrow V$, $\sigma(u) = 0_V$, es una transformación lineal, que llamamos **nula**.
8. Si U es un espacio vectorial, siempre es posible definir una aplicación del espacio en sí mismo, que a cada elemento le asigna **el mismo** elemento, que denotamos $\text{id} : U \longrightarrow U$, $\text{id}(u) = u$ y que es una transformación lineal, llamada **identidad**.
9. Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, y definamos $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ con $T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ donde $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ se considera como vector columna. Entonces, T es una transformación lineal. En efecto: sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\begin{aligned} T_A(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) &= A(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) \\ &= \alpha A\mathbf{u} + \beta A\mathbf{v} \\ &= \alpha T_A(\mathbf{u}) + \beta T_A(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Hemos probado así que para cada matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ podemos construir una transformación lineal de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m .

10. Sea $Tr : \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $Tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Como $Tr(\alpha A + \beta B) = \alpha \sum_{i=1}^n a_{ii} + \beta \sum_{i=1}^n b_{ii} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, es claro que Tr es lineal. $Tr(A)$ se llama la **traza** de A .

11. Considere $D : C^1[a, b] \longrightarrow C[a, b]$, $D(f) = \frac{df}{dx}$. Como $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:
 $\frac{d}{dx}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \frac{df}{dx}(x) + \beta \frac{dg}{dx}(x)$, se tiene que D es una transformación lineal.
12. Considere $D^n : C^n[a, b] \longrightarrow C[a, b]$, $D^n(f) = \frac{d^n f}{dx^n}$. Análogamente al ejemplo anterior, D^n es una transformación lineal.
13. Considere $I : C[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, con $I(f) = \int_a^b f(x) dx$.
 Como $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$, se tiene que I es una transformación lineal.
14. Para cada $x \in [a, b]$, considere $I_x : C[a, b] \longrightarrow C^1[a, b]$, definida por:
 $I_x(f) = \int_a^x f(t) dt$. Análogamente, I_x es una transformación lineal.

PROPIEDADES

Sea $T : U \longrightarrow V$ una transformación lineal. Entonces, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $T(0_U) = 0_V$. Es decir, **toda** transformación lineal lleva al vector nulo de U en el vector nulo de V .
2. Sean $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_s \in U$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in \mathbb{K}$; entonces
 $T(\alpha_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_s \cdot \mathbf{u}_s) = \alpha_1 \cdot T(\mathbf{u}_1) + \alpha_2 \cdot T(\mathbf{u}_2) + \dots + \alpha_s \cdot T(\mathbf{u}_s)$.
3. $T(-\mathbf{u}) = -T(\mathbf{u})$, $\forall \mathbf{u} \in U$. Es decir, **toda** transformación lineal lleva al inverso aditivo de un vector en el inverso aditivo de la imagen del vector.
4. Si $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_s$ son vectores l.d., entonces $T(\mathbf{u}_1), T(\mathbf{u}_2), \dots, T(\mathbf{u}_s)$ son l.d. Es decir, **toda** transformación lineal conserva la condición de **dependencia** lineal.

Dem.

1. $\forall \mathbf{u} \in U : T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{u} + 0_U) = T(\mathbf{u}) + T(0_U) \Rightarrow T(0_U) = 0_V$.
2. Es clara, por inducción.
3. $\forall \mathbf{u} \in U : T(-\mathbf{u}) = T(-1 \cdot \mathbf{u}) = -1 \cdot T(\mathbf{u}) = -T(\mathbf{u})$.
4. Como $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_s$ son vectores l.d., existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in \mathbb{K}$ no todos nulos tal que $\sum_{i=1}^s \alpha_i \cdot \mathbf{u}_i = 0_U$. Por lo tanto, si aplicamos T a ambos lados de la ecuación:

$$T\left(\sum_{i=1}^s \alpha_i \cdot \mathbf{u}_i\right) = T(0_U) \implies \sum_{i=1}^s \alpha_i \cdot T(\mathbf{u}_i) = 0_V$$

Como no todos los α_i son nulos, hemos probado que el conjunto formado por los s vectores $T(\mathbf{u}_i)$ del espacio vectorial V es l.d.

EJERCICIOS

Determine si las siguientes son o no transformaciones lineales:

1. $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x + y, 0)$
2. $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (2x - 3y, 4x - y)$.
3. $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (ax + by, cx - dy)$, donde a, b, c, d son números reales cualquiera.
4. $\text{ev}_0 : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $\text{ev}_0(x) = p(0)$.
5. $T : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_{n+1}[x]$, tal que $T(p) = D(p) + I_x(p)$.
6. $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $T(x, y) = x^2 + y^2$.
7. $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $T(x, y) = (x, y, xy)$.
8. Si $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^n$ fijos, estudie $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ con $T_A(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} + \mathbf{u}_0$.

A continuación, veremos un teorema que establece que una transformación lineal de un espacio vectorial de dimensión finita en otro espacio vectorial queda completamente determinada si se conoce las imágenes de todos los elementos de una base.

TEOREMA

Sean U, V espacios vectoriales sobre \mathbb{K} , $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ una base de U , y sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ arbitrarios. Entonces,

$$\exists ! T : U \longrightarrow V \text{ lineal, tal que } T(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Dem. Debemos probar existencia y unicidad de la transformación lineal.

Existencia: Sea $\mathbf{u} \in U$. Escribimos \mathbf{u} como una combinación lineal de los elementos de la base B , es decir, determinamos los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tal que :

$$\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n$$

y luego aplicamos la transformación lineal T :

$$T(\mathbf{u}) = T(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n) = \alpha_1 T(\mathbf{u}_1) + \alpha_2 T(\mathbf{u}_2) + \dots + \alpha_n T(\mathbf{u}_n)$$

$$T(\mathbf{u}) = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n \quad \text{ya que para cada } i = 1, \dots, n \text{ conocemos } T(\mathbf{u}_i).$$

Así, hemos probado la existencia de esta transformación lineal.

La unicidad se obtiene del hecho que los escalares que permiten escribir \mathbf{u} como combinación lineal de los elementos de la base B son únicos.

A continuación, veremos ejemplos de este teorema.

EJEMPLOS

1. Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que:

$$T(1, 0) = (1, -2, 3), \quad T(0, 1) = (-1, 1, -1)$$

Determine $T(x, y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Solución:

Para determinar explícitamente la transformación lineal, escribimos un vector genérico como combinación lineal de los elementos de la base: dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

Aplicando T a ambos lados de la ecuación:

$$T(x, y) = T(x(1, 0) + y(0, 1)) = xT(1, 0) + yT(0, 1) = x(1, -2, 3) + y(-1, 1, -1)$$

$$\text{Luego, } T(x, y) = (x - y, -2x + y, 3x - y).$$

2. Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que:

$$T(1, 2) = (2, 3, 4), \quad T(1, 3) = (6, 7, 8)$$

Determine $T(x, y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Solución:

Para determinar explícitamente la transformación lineal, escribimos un vector genérico como combinación lineal de los elementos de la base: dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$(x, y) = \alpha(1, 2) + \beta(1, 3) \implies \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = 2\alpha + 3\beta \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} \alpha = 3x - y \\ \beta = y - 2x \end{cases}$$

Así: $(x, y) = (3x - y)(1, 2) + (y - 2x)(1, 3)$ Aplicando T a ambos lados de la ecuación:

$$T(x, y) = (3x - y)T(1, 2) + (y - 2x)T(1, 3) = (3x - y)(2, 3, 4) + (y - 2x)(6, 7, 8)$$

$$\text{de donde} \quad T(x, y) = (-6x + 4y, -5x + 4y, -4x + 4y)$$

3. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que

$$T(1, 0, 1) = (1, -1), \quad T(1, 1, 0) = (1, 2), \quad T(0, 1, 1) = (-1, 2)$$

Hallar $T(x, y, z)$, para cualquier $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Solución:

Como $\{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ es L.I, es una base para \mathbb{R}^3 . Escribimos entonces un vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ cualquiera como combinación lineal de los elementos de la base:

$$(x, y, z) = \alpha(1, 0, 1) + \beta(1, 1, 0) + \gamma(0, 1, 1)$$

donde α, β, γ son números reales. Obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \beta + \gamma \\ z = \alpha + \gamma \end{cases} \quad \text{de donde} \quad \alpha = \frac{x - y + z}{2}, \quad \beta = \frac{x + y - z}{2}, \quad \gamma = \frac{-x + y + z}{2}.$$

Aplicamos T a la ecuación y usamos la linealidad de T obteniendo:

$$T(x, y, z) = \frac{x - y + z}{2} T(1, 0, 1) + \frac{x + y - z}{2} T(1, 1, 0) + \frac{-x + y + z}{2} T(0, 1, 1)$$

$$T(x, y, z) = \frac{x - y + z}{2} (1, -1) + \frac{x + y - z}{2} (1, 2) + \frac{-x + y + z}{2} (-1, 2)$$

Luego, la transformación buscada es

$$T(x, y, z) = \frac{1}{2} (3x - y - z, -x + 5y - z)$$

4. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ una transformación lineal tal que:

$$T(1+x) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad T(1+x^2) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(x+x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix},$$

Determine $T(a+bx+cx^2)$, $\forall a+bx+cx^2 \in \mathbb{R}_2[x]$.

Solución:

Para determinar explícitamente la transformación lineal, escribimos un polinomio genérico como combinación lineal de los elementos de la base:

$$a+bx+cx^2 = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma(x+x^2)$$

$$\text{Luego, } \begin{cases} a = \alpha + \beta \\ b = \alpha + \gamma \\ c = \beta + \gamma \end{cases} \quad \text{de donde} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{a+b-c}{2}, & \beta = \frac{a-b+c}{2}, \\ \gamma = \frac{-a+b-c}{2} \end{cases}$$

$$\text{Así: } a+bx+cx^2 = \frac{a+b-c}{2}(1+x) + \frac{a-b+c}{2}(1+x^2) + \frac{-a+b-c}{2}(x+x^2)$$

de donde:

$$T(a+bx+cx^2) = \frac{a+b-c}{2}T(1+x) + \frac{a-b+c}{2}T(1+x^2) + \frac{-a+b-c}{2}T(x+x^2)$$

$$= \frac{a+b-c}{2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} + \frac{a-b+c}{2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{-a+b-c}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\therefore T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} 2a & 3a & 4a \\ 6b-6c & \frac{7(b-c)}{2} & 8b-8c \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS

1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ una transformación lineal tal que:

$$T(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}, \quad T(1,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinar $T(3,4,-5)$ y $T(a,b,c)$.

2. Determine **una** transformación lineal $S : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$S(1) = (1, -1, 1) \quad \wedge \quad S(x^2) = (2, 1, 0)$$

DEFINICION

Sea $T : U \longrightarrow V$ una transformación lineal. Definimos

1. el **kernel** ó **núcleo** de T como el conjunto

$$\text{Ker}(T) = \{\mathbf{u} \in U : T(\mathbf{u}) = 0_V\}$$

es decir, al conjunto de todos los elementos de U que tienen como imagen al 0_V .

2. la **imagen** de T como el conjunto

$$\text{Im}(T) = \{\mathbf{v} \in V : \exists \mathbf{u} \in U \text{ con } T(\mathbf{u}) = \mathbf{v}\}$$

es decir, es el conjunto de todos los elementos de V que son imágenes de elementos de U .

TEOREMA

Sea $T : U \longrightarrow V$ una transformación lineal. Entonces $\text{Ker}T \leq U$.

Dem. Debemos probar que:

1. $\text{Ker}T \neq \emptyset$, lo cual es claro pues $T(0_U) = 0_V$, de donde $0_U \in \text{Ker}T$.
2. $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \text{Ker}T \Rightarrow \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in \text{Ker}T$. En efecto: $T(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = T(\mathbf{u}_1) + T(\mathbf{u}_2) = 0_V + 0_V = 0_V$
3. $\mathbf{u} \in \text{Ker}T, \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha\mathbf{u} \in \text{Ker}T$. En efecto: $T(\alpha\mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u}) = \alpha 0_V = 0_V$.

TEOREMA

Sea $T : U \longrightarrow V$ una transformación lineal. Entonces $\text{Im}T \leq V$.

Dem.

Debemos probar que:

1. $\text{Im}T \neq \emptyset$, lo cual es claro pues $T(0_U) = 0_V$, de donde $0_V \in \text{Im}T$.
2. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \text{Im}T \Rightarrow \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \text{Im}T$. En efecto: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \text{Im}T \implies \exists \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U : T(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1, T(\mathbf{u}_2) = \mathbf{v}_2$. Por lo tanto, $T(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = T(\mathbf{u}_1) + T(\mathbf{u}_2) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. Luego $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \text{Im}T$.
3. $\mathbf{v} \in \text{Im}T, \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha\mathbf{v} \in \text{Im}T$. En efecto: como $\mathbf{v} \in \text{Im}T, \exists \mathbf{u} \in U : T(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$. Luego, $T(\alpha\mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u}) = \alpha\mathbf{v}$, de donde $\alpha\mathbf{v} \in \text{Im}T$.

EJEMPLOS

1. $\sigma : U \longrightarrow V \Rightarrow \text{Ker } \sigma = U, \text{ Im } \sigma = \{0_V\}$.
2. $\text{id} : U \longrightarrow U \Rightarrow \text{Ker id} = \{0_U\}, \text{ Im id} = U$.
3. $D : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x] \Rightarrow \text{Ker}D = \{p(x) : p(x) = \text{cte.}\}, \text{ Im}D = \mathbb{R}_{n-1}[x]$.

4. $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + y, y + z)$. Entonces, $(x, y, z) \in \text{Ker}T \iff T(x, y, z) = (0, 0) \iff x + y = 0 \wedge y + z = 0$. Así, $x = z = -y$, de donde

$$\begin{aligned} \text{Ker}T &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z = -y\} = \{(-y, y, -y), y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y \cdot (-1, 1, -1), y \in \mathbb{R}\} = \langle (-1, 1, -1) \rangle \end{aligned}$$

Luego, también hemos encontrado una base para el $\text{Ker}T$ y $\dim \text{Ker}T = 1$.

Para encontrar $\text{Im } T \subseteq \mathbb{R}^2$, hay varios métodos.

Método1: Usando la definición: buscamos todos los $(u, v) \in \mathbb{R}^2$:
 $\exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : T(x, y, z) = (u, v)$. Ello es así, si: $x + y = u \wedge y + z = v$. Como este es un sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas, fijamos una de ellas, digamos $y = 0$ y tenemos que $x = u$, $z = v$, de donde

$$T(x, 0, z) = T(u, 0, v) = (u + 0, 0 + v) = (u, v).$$

Luego, $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$ podemos encontrar un elemento $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : T(x, y, z) = (u, v)$. Así, $\text{Im } T = \mathbb{R}^2$.

Método2: Notamos que los elementos que pertenecen a $\text{Im}T$ son de la forma

$$(x + y, y + z) = x(1, 0) + y(1, 1) + z(0, 1)$$

es decir, factorizamos por los escalares correspondientes.

$$\text{Así, } \text{Im}T = \langle (1, 0), (1, 1), (0, 1) \rangle = \langle (1, 0), (0, 1) \rangle = \mathbb{R}^2.$$

Método3: Usamos el teorema que afirma que una transformación lineal está completamente determinada por las imágenes de una base, por ejemplo, de la base canónica:

$$\begin{aligned} T(1, 0, 0) &= (1, 0) \\ T(0, 1, 0) &= (1, 1) \\ T(0, 0, 1) &= (0, 1) \end{aligned} \Rightarrow \text{Im}T = \langle (1, 0), (1, 1), (0, 1) \rangle = \mathbb{R}^2$$

5. $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(x, y, z) = x + y + z$.

Análogamente, $(x, y, z) \in \text{Ker}T \iff T(x, y, z) = 0 \iff x + y + z = 0 \iff z = -x - y$, de donde

$$\begin{aligned} \text{Ker } T &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -x - y\} \\ &= \{(x, y, -x - y), x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, 0, -x) + (0, y, -y), x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1) : x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1, 0, -1), (0, 1, -1) \rangle \end{aligned}$$

Así, hemos encontrado una base para el $\text{Ker}T$ y por lo tanto, $\dim \text{Ker}T = 2$.

Como cualquier $u \in \mathbb{R}$ puede ser obtenido como suma de tres números reales, $\text{Im}T \leq \mathbb{R}$ y $\dim \mathbb{R} = 1$, una base para $\text{Im}T$ puede ser $C = \{1\}$.

$$6. T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^5, \quad T(x, y, z) = (x + y, y + z, x + 2y + z, x + y, 0)$$

$$(x, y, z) \in \text{Ker}T \iff T(x, y, z) = (0, 0, 0, 0, 0) \iff$$

$$\left. \begin{array}{rcl} x + y & = & 0 \\ y + z & = & 0 \\ x + 2y + z & = & 0 \\ x + y & = & 0 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{rcl} x & = & -y \\ z & = & -y \end{array} \right\} \quad \text{Por lo tanto,}$$

$$\text{Ker}T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -y, z = -y\} = \{(-y, y, -y), y \in \mathbb{R}\} = \langle(-1, 1, -1)\rangle$$

Para determinar $\text{Im}T$, notamos que:

$$(x + y, y + z, x + 2y + z, x + y, 0) = x(1, 0, 1, 1, 0) + y(1, 1, 2, 1, 0) + z(0, 1, 1, 0, 0)$$

$$\text{Así,} \quad \text{Im}T = \langle(1, 0, 1, 1, 0), (1, 1, 2, 1, 0), (0, 1, 1, 0, 0)\rangle.$$

Es fácil ver que estos 3 vectores son l.d. en \mathbb{R}^5 , por lo que escogemos 2 de ellos, y obtenemos que

$$\text{Im}T = \langle(1, 0, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 0, 0)\rangle$$

Luego, $\dim \text{Ker}T = 1$ y $\dim \text{Im}T = 2$.

$$7. \text{ Sea } T : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_2[x], \quad \text{con} \quad T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + b)x^2 + (b + c)x + d$$

Determinar una base para $\text{Ker}T$ y para $\text{Im}T$.

$$\begin{aligned} \text{Ker } T &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : (a + b)x^2 + (b + c)x + d = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : a + b = 0, b + c = 0, d = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : a \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\text{Im}T = \left\{ \alpha x^2 + \beta x + \gamma \in \mathbb{R}_2[x] : \exists \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \text{ con } T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \right\}$$

$$\text{Im}T = \{ \alpha x^2 + \beta x + \gamma \in \mathbb{R}_2[x] : (a + b)x^2 + (b + c)x + d = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \}$$

$$\text{Debemos resolver el sistema de 3 ecuaciones y 4 incógnitas:} \quad \left. \begin{array}{rcl} a + b & = & \alpha \\ b + c & = & \beta \\ d & = & \gamma \end{array} \right\}$$

Claramente, si por ejemplo, $a = \alpha, b = 0, c = \beta, d = \gamma$ entonces

$T \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Así, vemos que **todos** los polinomios de $\mathbb{R}_2[x]$ pertenecen a $\text{Im}T$. Luego, $\text{Im}T = \mathbb{R}_2[x] = \langle 1, x, x^2 \rangle$.

Otro camino, es notar que:

$$(a+b)x^2 + (b+c)x + d = ax^2 + b(x^2 + x) + cx + d$$

Luego, $\text{Im}T = \langle x^2, x^2 + x, x, 1 \rangle = \langle x^2, x, 1 \rangle = \mathbb{R}_2[x]$.

8. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que

$$T(1, 0, 1) = (1, -1), \quad T(1, 1, 0) = (1, 2), \quad T(0, 1, 1) = (-1, 2)$$

Hallar $\text{Ker}(T)$ y una base del $\text{Ker}(T)$.

Solución:

Como vimos antes,

$$T(x, y, z) = \frac{1}{2} (3x - y - z, -x + 5y - z)$$

Luego, para determinar el $\text{Ker}T$:

$$\begin{aligned} \text{Ker}(T) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : T(x, y, z) = (0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - y - z = 0 \wedge -x + 5y - z = 0\} \\ &= \left\{ \left(x, \frac{2}{3}x, \frac{7}{3}x \right) : x \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Por lo tanto, una base para $\text{Ker}(T)$ es $\{(3, 2, 7)\}$ y $\dim \text{Ker}T=1$.

EJERCICIOS

1. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ una transformación lineal tal que:

$$T(1+x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(x+x^2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T(1+x^2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinar $T(a+bx+cx^2)$, $\text{Ker}T$ e $\text{Im}T$.

2. Sea $L : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$, $L(p(x)) = p(x-1)$.

- Demuestre que es lineal.
- Determine $\text{Ker}L$ e $\text{Im}L$.

TEOREMA

Sea $T : U \rightarrow V$ una transformación lineal; entonces, T es 1-1 $\iff \text{Ker } T = \{0_U\}$.

Dem.

\Rightarrow Sea $x \in \text{Ker}T$. Entonces $T(x) = 0_V = T(0_U)$. Como T es inyectiva, $T(x) = T(0_U) \Rightarrow x = 0_U$. Por lo tanto, $\text{Ker}T = \{0_U\}$.

⊆ Sean $x, y \in U : T(x) = T(y)$. Luego, $T(x) - T(y) = 0 \Rightarrow T(x - y) = 0 \quad \therefore \quad x - y \in \text{Ker}T$.
Ahora, $\text{Ker}T = \{0_U\} \Rightarrow x - y = 0_U$, de donde $x = y$, por lo que T es inyectiva.

EJEMPLO

Sea $T : \mathbb{R}_4[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $T(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4) = (a + b, c + d, e)$. Pruebe que T es lineal, determine $\dim \text{Ker}T$, $\dim \text{Im}T$ y encuentre una base para ellos. ¿Es T inyectiva?

1. Dejamos como ejercicio probar que T es lineal.

2. $p(x) \in \text{Ker}T \iff T(p(x)) = (0, 0, 0) \iff$

$$a + b = 0$$

$$c + d = 0$$

$$e = 0$$

Esto implica que $b = -a$, $d = -c$. Luego:

$$p(x) \in \text{Ker}T \iff p(x) = a - ax + cx^2 - cx^3$$

lo cual implica que $p(x) = a(1 - x) + c(x^2 - x^3)$. Una base para $\text{Ker}T$ es $\{(1 - x), (x^2 - x^3)\}$.
Por tanto, $\dim \text{Ker}T = 2$, por lo que T **no** es inyectiva.

3. Consideremos la base canónica de $\mathbb{R}_4[x]$. Tenemos que: $T(1) = (1, 0, 0)$,
 $T(x) = (1, 0, 0)$, $T(x^2) = (0, 1, 0)$, $T(x^3) = (0, 1, 0)$, $T(x^4) = (0, 0, 1)$. Claramente, los
3 vectores linealmente independientes que encontramos (vectores de la base canónica de \mathbb{R}^3)
forman la base de $\text{Im}T$. Por lo tanto, $\dim \text{Im}T = 3$.

4. Notar que $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Ker}T) + \dim_{\mathbb{R}}(\text{Im}T) = 2 + 3 = 5 = \dim \mathbb{R}_4[x]$

Si revisamos la relación anterior en todos los ejemplos que hemos desarrollado, veremos que se cumple siempre. Esta relación es un hecho general, y tenemos el siguiente

TEOREMA

Sea $T : U \rightarrow V$ lineal, tal que $\dim_{\mathbb{K}}U = n$. Entonces

$$\dim_{\mathbb{K}}(\text{Ker}T) + \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}T) = n$$

Dem. Sea $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\}$ una base de $\text{Ker}T$. Completamos esta base a una base de U , es decir, consideramos los vectores $\mathbf{u}_{m+1}, \dots, \mathbf{u}_n \in U : \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_{m+1}, \dots, \mathbf{u}_n\}$ sea una base de U . Debemos probar, entonces, que las imágenes de los vectores que hemos agregado, forman una base de $\text{Im}T$, es decir, que $\{T(\mathbf{u}_{m+1}), \dots, T(\mathbf{u}_n)\}$ es base de $\text{Im}T$.

Sea \mathbf{u} un vector cualquiera en U . Expresamos \mathbf{u} como combinación lineal de los elementos de la base:

$$\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_m \mathbf{u}_m + \alpha_{m+1} \mathbf{u}_{m+1} + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n$$

Aplicamos T a la relación:

$$T(\mathbf{u}) = \alpha_1 T(\mathbf{u}_1) + \dots + \alpha_m T(\mathbf{u}_m) + \alpha_{m+1} T(\mathbf{u}_{m+1}) + \dots + \alpha_n T(\mathbf{u}_n)$$

Como $T(\mathbf{u}_i) = 0, \forall i = 1, \dots, m,$ se tiene que:

$$T(\mathbf{u}) = \alpha_{m+1}T(\mathbf{u}_{m+1}) + \dots + \alpha_n T(\mathbf{u}_n)$$

Luego, como \mathbf{u} es un vector cualquiera, es claro que $T(\mathbf{u}_{m+1}), \dots, T(\mathbf{u}_n)$ es un conjunto generador de $\text{Im}T$.

Probemos ahora que este conjunto es l.i.: sean $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n$ escalares tal que

$$\alpha_{m+1}T(\mathbf{u}_{m+1}) + \dots + \alpha_n T(\mathbf{u}_n) = 0$$

Por lo tanto, usando la linealidad de T :

$$T(\alpha_{m+1}\mathbf{u}_{m+1} + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n) = 0 \quad \text{por lo que} \quad \alpha_{m+1}\mathbf{u}_{m+1} + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n \in \text{Ker}T$$

Luego, podemos escribir este vector como combinación lineal de los elementos de la base de $\text{Ker}T$:

$$\alpha_{m+1}\mathbf{u}_{m+1} + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_m \mathbf{u}_m$$

ó equivalentemente

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_m \mathbf{u}_m - \alpha_{m+1}\mathbf{u}_{m+1} - \dots - \alpha_n \mathbf{u}_n = 0$$

Como $\{\mathbf{u}_1 + \dots + \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_{m+1} + \dots + \mathbf{u}_n\}$ es base de U , $\alpha_i = 0, \forall i = 1, \dots, n$.

Por lo tanto, el conjunto $\{T(\mathbf{u}_{m+1}), \dots, T(\mathbf{u}_n)\}$ es una base de $\text{Im}T$, y queda demostrado el teorema.

EJERCICIO Sea $T : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ definida por

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b) + (c+d)x + (a+b+c+d)x^2 + ax^3$$

Demuestre que T es lineal, y determine base de $\text{Ker}(T)$ y $\dim \text{Im}(T)$.

Dejamos como ejercicio probar que T es lineal. Determinemos la dimensión del Kernel:

$$\begin{aligned} \text{Ker}T &= \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a+b=0, \quad c+d=0, \quad a+b+c+d=0, \quad a=0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a=b=0, \quad d=-c \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & -c \end{pmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\dim \text{Ker } T = 1$. Aplicamos el teorema para determinar la dimensión de $\text{Im } T$:

$$1 + \dim \text{Im}(T) = 4 = \dim \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \implies \dim \text{Im}(T) = 3$$

TEOREMA

Sea $T : U \longrightarrow V$ lineal e inyectiva. Si $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ es l.i., entonces $\{T(\mathbf{u}_1), \dots, T(\mathbf{u}_n)\}$ es l.i.

Dem.

Formamos $\alpha_1 T(\mathbf{u}_1) + \dots + \alpha_n T(\mathbf{u}_n) = 0$. Como T es lineal, es equivalente a

$$T(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n) = 0 \quad \text{Luego,} \quad \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n \in \text{Ker } T. \quad \therefore \quad \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n = 0$$

Como $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ es l.i., los escalares $\alpha_i = 0, \forall i = 1, \dots, n$. $\therefore \{T(\mathbf{u}_1), \dots, T(\mathbf{u}_n)\}$ es l.i.

Estudiaremos a continuación qué propiedades se traspasan al resultado de operar con transformaciones lineales.

TEOREMA

Sean U, V espacios vectoriales sobre un cuerpo \mathbb{K} , y sea $\alpha \in \mathbb{K}$.

Sean $T, S : U \longrightarrow V$ transformaciones lineales. Entonces:

1. $T + S$ es una transformación lineal.
2. $\alpha \cdot T$ es una transformación lineal.

Dem.

1. Debemos probar que $T + S$ es una transformación lineal. Para ello, sean $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$. Formamos

$$\begin{aligned} (T + S)(\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2) &= T(\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2) + S(\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2) \quad (\text{suma de funciones}) \\ &= \lambda_1 T(\mathbf{u}_1) + \lambda_2 T(\mathbf{u}_2) + \lambda_1 S(\mathbf{u}_1) + \lambda_2 S(\mathbf{u}_2) \quad (\text{linealidad de } T \text{ y } S) \\ &= \lambda_1 T(\mathbf{u}_1) + \lambda_1 S(\mathbf{u}_1) + \lambda_2 T(\mathbf{u}_2) + \lambda_2 S(\mathbf{u}_2) \\ &= \lambda_1 (T + S)(\mathbf{u}_1) + \lambda_2 (T + S)(\mathbf{u}_2). \quad (\text{suma de funciones}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $T + S$ es una transformación lineal.

2. Ahora debemos probar que $\alpha \cdot T$ es una transformación lineal. Como antes, sean $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$. Formamos $(\alpha T)(\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2) = \alpha T(\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2)$. Por la linealidad de T : $= \alpha(\lambda_1 T(\mathbf{u}_1) + \lambda_2 T(\mathbf{u}_2)) = \lambda_1(\alpha T(\mathbf{u}_1)) + \lambda_2(\alpha T(\mathbf{u}_2))$. Por lo tanto, αT es una transformación lineal.

Observación:

Si U y V son 2 espacios vectoriales, es posible considerar el conjunto

$$\mathcal{L}(U, V) = \{T : U \rightarrow V \text{ tal que } T \text{ es lineal}\}$$

Claramente, la transformación lineal nula pertenece a este conjunto, de donde $\mathcal{L}(U, V) \neq \emptyset$. Junto al Teorema anterior, esto prueba que $\mathcal{L}(U, V) \leq \mathcal{F}(U, V)$.

TEOREMA

Sean U, V, W espacios vectoriales sobre \mathbb{K} y sean $T \in \mathcal{L}(U, V)$, $S \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces, la composición de las transformaciones lineales también es lineal, es decir, $S \circ T \in \mathcal{L}(U, W)$.

Dem. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x, y \in U$. Entonces

$$\begin{aligned}(S \circ T)(\alpha x + \beta y) &= S(T(\alpha x + \beta y)) = S((\alpha T(x) + \beta T(y))) = (\alpha S(T(x)) + \beta S(T(y))) \\ &= \alpha(S \circ T)(x) + \beta(S \circ T)(y).\end{aligned}$$

TEOREMA

Sea $T : U \rightarrow V$ lineal e inyectiva. Entonces la inversa de T , que denotamos por $T^{-1} : \text{Im}T \rightarrow U$ también es una transformación lineal.

Dem. Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \text{Im}T \implies \exists \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U :$

$T^{-1}(\mathbf{v}_1) = \mathbf{u}_1$, $T^{-1}(\mathbf{v}_2) = \mathbf{u}_2$. Luego, $T(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1$, $T(\mathbf{u}_2) = \mathbf{v}_2$. Por lo tanto,

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = T(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \implies \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = T^{-1}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \implies$$

$$T^{-1}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = T^{-1}(\mathbf{v}_1) + T^{-1}(\mathbf{v}_2).$$

De la misma manera, se prueba que $T^{-1}(\alpha \mathbf{v}) = \alpha T^{-1}(\mathbf{v})$. Así, T^{-1} es lineal.

DEFINICION

Sea $T : U \rightarrow V$ lineal. Diremos que T es un **isomorfismo** si y sólo si T es inyectiva e $\text{Im}T = V$. En este caso, diremos que U y V son **isomorfos**, y escribimos $U \cong V$.

OBSERVACION

Si $T : U \rightarrow V$ es un isomorfismo, entonces $T^{-1} : V \rightarrow U$ también es un isomorfismo.

EJEMPLOS

1. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} , tal que $\dim_{\mathbb{R}} V = n$. Sea $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ una base ordenada de V , de modo que si $\mathbf{v} \in V$, entonces formamos la matriz de coordenadas de \mathbf{v} en la base B :

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Definimos la función $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $\varphi(\mathbf{v}) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Dejamos como ejercicio demostrar que φ es lineal, inyectiva y epiyectiva. Por lo tanto, φ es un isomorfismo.

De este modo, se ha probado que si $\dim V = n$, entonces, $V \cong \mathbb{R}^n$.

2. Encuentre un isomorfismo entre el espacio de los polinomios $\mathbb{R}_3[x]$ y el espacio de las matrices $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
3. Sean U, V espacios vectoriales sobre \mathbb{R} , y considere el conjunto $\mathcal{L}(U, V) = \{T : U \longrightarrow V, T \text{ lineal}\}$
 - a) Pruebe que $\mathcal{L}(U, V)$ es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} .
 - b) Demuestre que, si $\dim U = n$ y $\dim V = m$, entonces $\mathcal{L}(U, V) \cong \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$.
 - c) Determine una base para $\mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}^2)$.

MATRIZ ASOCIADA A UNA TRANSFORMACION LINEAL

Como hemos hecho hasta ahora, consideraremos en esta sección espacios vectoriales de dimensión finita.

Sean U, V espacios vectoriales sobre un cuerpo \mathbb{K} , tal que $\dim_{\mathbb{K}} U = n$ y $\dim_{\mathbb{K}} V = m$. Sean $B_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$, $B_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$ bases ordenadas de U y V , respectivamente.

Sea $T : U \longrightarrow V$ una transformación lineal. Sabemos que existen escalares α_{ij} únicos ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$):

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}_1) &= \alpha_{11}\mathbf{v}_1 + \alpha_{21}\mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_{m1}\mathbf{v}_m \\ T(\mathbf{u}_2) &= \alpha_{12}\mathbf{v}_1 + \alpha_{22}\mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_{m2}\mathbf{v}_m \\ &\vdots \\ T(\mathbf{u}_n) &= \alpha_{1n}\mathbf{v}_1 + \alpha_{2n}\mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_{mn}\mathbf{v}_m \end{aligned}$$

La matriz de m filas y n columnas $(\alpha_{ij})_{m \times n}$ se llama **matriz asociada a la transformación lineal** T , con respecto a las bases B_1 y B_2 .

Denotamos esta matriz por

$$[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

EJEMPLOS

1. Considere la función $T : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $T(p(x)) = (p(0), p(1), p(2))$. Sean $B = \{1, x, x^2\}$ y $D = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ bases de $\mathbb{R}_2[x]$ y \mathbb{R}^3 respectivamente.
 - a) Pruebe que T es lineal.

b) Determine el $\text{Ker } T$ y $[T]_B^D$

c) ¿Es T un isomorfismo?

Solución:

a) Sean $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned} T(\alpha p(x) + \beta q(x)) &= (\alpha p(0) + \beta q(0), \alpha p(1) + \beta q(1), \alpha p(2) + \beta q(2)) \\ &= \alpha(p(0), p(1), p(2)) + \beta(q(0), q(1), q(2)) \\ &= \alpha T(p(x)) + \beta T(q(x)) \end{aligned}$$

Por lo tanto T es lineal.

b) Sea $p(x) = ax^2 + bx + c \in \text{Ker}(T)$, entonces $(p(0), p(1), p(2)) = (0, 0, 0)$, y esto ocurre si y solo si:

$$\begin{array}{r|l} c = 0 & a = 0 \\ a + b + c = 0 & \Rightarrow b = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 & c = 0 \end{array}$$

Por lo tanto $\text{Ker}(T) = \{0\}$, de donde además T es inyectiva.

Determinemos ahora la matriz asociada a esta transformación lineal:

$$\begin{aligned} T(1) &= (1, 1, 1) = 1 \cdot (1, 0, 0) + 1 \cdot (0, 1, 0) + 1 \cdot (0, 0, 1) \\ T(x) &= (0, 1, 2) = 0 \cdot (1, 0, 0) + 1 \cdot (0, 1, 0) + 2 \cdot (0, 0, 1) \\ T(x^2) &= (0, 1, 4) = 0 \cdot (1, 0, 0) + 1 \cdot (0, 1, 0) + 4 \cdot (0, 0, 1) \end{aligned}$$

Luego, la matriz asociada buscada es

$$[T]_B^D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

c) Por el teorema de la dimensión, $\dim \mathbb{R}_2[x] = \dim \text{Ker } T + \dim \text{Im } T$.

Como $\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$, y $\dim \text{Ker } T = 0$, tenemos que $\dim \text{Im } T = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Así, $\text{Im } T = \mathbb{R}^3$, y por lo tanto, T es epiyectiva.

Luego, T es lineal y biyectiva de donde T es un isomorfismo.

2. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, dado por $T(x, y, z) = (x - 2y + 3z, 4x - y - z)$.

a) Si $B_1 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ y $B_2 = \{(1, 2), (1, -1)\}$ son bases ordenadas de \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^2 respectivamente, encuentre $[T]_{B_1}^{B_2}$.

Para encontrar la matriz asociada a la transformación lineal con respecto a estas bases, escribimos:

$$\begin{aligned} T(1, 1, 0) &= (-1, 3) = \alpha_{11}(1, 2) + \alpha_{21}(1, -1) \\ T(1, 0, 1) &= (4, 3) = \alpha_{12}(1, 2) + \alpha_{22}(1, -1) \\ T(0, 1, 1) &= (1, -2) = \alpha_{13}(1, 2) + \alpha_{23}(1, -1) \end{aligned}$$

Resolviendo los tres sistemas de ecuaciones, obtenemos:

$$[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 2/3 & 7/3 & -1/3 \\ -5/3 & 5/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

b) Sea $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$. Encuentre $[\mathbf{u}]_{B_1}$, $[T(\mathbf{u})]_{B_2}$, y $[T]_{B_1}^{B_2} \cdot [\mathbf{u}]_{B_1}$.

Escribimos $(1, 2, 3) = \alpha(1, 1, 0) + \beta(1, 0, 1) + \gamma(0, 1, 1)$, de donde

$$[\mathbf{u}]_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Para encontrar $[T(\mathbf{u})]_{B_2}$, primero calculamos $T(1, 2, 3) = (6, -1)$.

Ahora, $(6, -1) = \alpha(1, 2) + \beta(1, -1)$, de donde

$$[T(\mathbf{u})]_{B_2} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 13/3 \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora

$$[T]_{B_1}^{B_2} \cdot [\mathbf{u}]_{B_1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 7/3 & -1/3 \\ -5/3 & 5/3 & 4/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 13/3 \end{pmatrix} = [T(\mathbf{u})]_{B_2}.$$

Esta última propiedad es general, vale decir,

TEOREMA

Sea $T : U \rightarrow V$ lineal, B_1 base de U , B_2 base de V . Entonces,

$$[T]_{B_1}^{B_2} \cdot [\mathbf{u}]_{B_1} = [T(\mathbf{u})]_{B_2}$$

EJERCICIOS

1. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, definida por

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a + b & 2b + 3c \\ 3c + a & -a + b + 3c \end{pmatrix}$$

Sean $B_1 = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$ base de $\mathbb{R}_2[x]$ y $B_2 = \mathcal{C}$, la base canónica de las matrices de orden 2×2 .

Determine:

a) $[T]_{B_1}^{B_2}$

b) Si $p(x) = 7 - 2x + x^2$, determine $[p]_{B_1}$, $[T(p)]_{B_2}$, y $[T]_{B_1}^{B_2} \cdot [p]_{B_1}$.

2. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T(a + bx + cx^2) = (a + b + c, c - b)$.

Sean $B_1 = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$ base de $\mathbb{R}_2[x]$ y $B_2 = \{(1, -1), (1, 2)\}$ base de \mathbb{R}^2 .

Determine:

a) $[T]_{B_1}^{B_2}$

b) Si $p(x) = 5 - x + 8x^2$, determine $[p]_{B_1}$, $[T(p)]_{B_2}$, y $[T]_{B_1}^{B_2} \cdot [p]_{B_1}$.

MATRIZ CAMBIO DE BASE

Consideremos ahora la transformación lineal identidad de un espacio vectorial U en sí mismo, donde $\dim_{\mathbb{R}} U = n$. En el dominio U , consideremos la base $B_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$, y en el recorrido U , consideremos la base $B_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$.

Sabemos que existen escalares α_{ij} únicos:

$$\begin{aligned} id(\mathbf{u}_1) &= (\mathbf{u}_1) = \alpha_{11}\mathbf{v}_1 + \alpha_{21}\mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_{m1}\mathbf{v}_m \\ id(\mathbf{u}_2) &= (\mathbf{u}_2) = \alpha_{12}\mathbf{v}_1 + \alpha_{22}\mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_{m2}\mathbf{v}_m \\ &\vdots \\ id(\mathbf{u}_n) &= (\mathbf{u}_n) = \alpha_{1n}\mathbf{v}_1 + \alpha_{2n}\mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_{mn}\mathbf{v}_m \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz asociada a la transformación lineal **identidad**, $[id]_{B_1}^{B_2}$, posee la siguiente propiedad: $\mathbf{w} \in U \implies [id(\mathbf{w})]_{B_2} = [id]_{B_1}^{B_2} \cdot [\mathbf{w}]_{B_1}$, de donde

$$[\mathbf{w}]_{B_2} = [id]_{B_1}^{B_2} \cdot [\mathbf{w}]_{B_1}$$

Como la identidad es un isomorfismo, la matriz asociada es invertible, y se tiene que

$$([id]_{B_1}^{B_2})^{-1}[\mathbf{w}]_{B_2} = [\mathbf{w}]_{B_1}$$

EJEMPLOS:

1. Considere la aplicación identidad en \mathbb{R}^2 , con $B_1 = \{(1, 2), (1, 3)\}$ en el dominio y $B_2 = \{(1, 1), (1, 0)\}$ en la imagen.

Determine: $[id]_{B_1}^{B_2}$. Además, si $\mathbf{u} = (5, -3)$, determine además $[\mathbf{u}]_{B_1}$, $[id(\mathbf{u})]_{B_2}$, y $[id]_{B_1}^{B_2} \cdot [\mathbf{u}]_{B_1}$.

2. Sean $B_1 = \{u_1, u_2\}$, $B_2 = \{v_1, v_2\}$ dos bases del espacio vectorial U , tal que

$$u_1 = 3v_1 - 4v_2 \quad \text{y} \quad u_2 = v_1 + 2v_2$$

Determine:

a) la matriz cambio de base de B_2 a B_1 .

b) Si $[v]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$, determine $[v]_{B_1}$

Soluciones:

1. Ejercicio.

2. Como $u_1 = 3v_1 - 4v_2$, tenemos que $[u_1]_{B_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ y como $u_2 = v_1 + 2v_2$ tenemos que $[u_2]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto, la matriz cambio de base de B_1 a B_2 es $[id]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

Luego, la matriz cambio de base de B_2 a B_1 es $([id]_{B_1}^{B_2})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-1}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$.

Para determinar $[v]_{B_1}$, basta calcular: $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-1}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix} \cdot [v]_{B_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-1}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$\therefore [v]_{B_1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

RELACION ENTRE OPERACIONES DE TRANSFORMACIONES LINEALES Y OPERACIONES ENTRE MATRICES

Consideremos, como antes, los espacios vectoriales U, V sobre un cuerpo \mathbb{K} , tal que $\dim_{\mathbb{K}} U = n$, y $\dim_{\mathbb{K}} V = m$. Sean $B_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$, $B_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$ bases ordenadas de U y V , respectivamente. Sean $T, S \in L(U, V)$. Entonces:

1. $[T + S]_{B_1}^{B_2} = [T]_{B_1}^{B_2} + [S]_{B_1}^{B_2}$, es decir, la matriz asociada a la suma de transformaciones lineales es la suma de las matrices asociadas a cada transformación lineal.
2. $[\alpha T]_{B_1}^{B_2} = \alpha [T]_{B_1}^{B_2}$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, es decir, la matriz asociada al producto por escalar de una transformación lineal es el escalar multiplicado por la matriz asociada a la transformación lineal.
3. Sea W un espacio vectorial sobre \mathbb{K} , $B_3 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_p\}$ una base ordenada de W . Sea $L \in L(V, W)$ y supongamos que la composición de funciones $L \circ T$ está definida. Entonces, $[L \circ T]_{B_1}^{B_3} = [L]_{B_2}^{B_3} \cdot [T]_{B_1}^{B_2}$, es decir, la matriz asociada a la composición de transformaciones lineales es el producto de las matrices asociadas a cada transformación lineal, en el orden correspondiente.
4. Supongamos que T es un isomorfismo entre U y V . Sabemos que $\exists T^{-1} : V \longrightarrow U$ que también es un isomorfismo. Entonces, $[T^{-1}]_{B_1}^{B_2} = ([T]_{B_1}^{B_2})^{-1}$, es decir, la matriz asociada a la inversa de una transformación lineal es la inversa de la matriz asociada a la transformación lineal.

EJEMPLOS

1. Consideremos las transformaciones lineales

$$S, T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{con} \quad T(x, y) = (x + y, x - y), \quad S(x, y) = (2x - 3y, 4x - 5y)$$

$L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_2[x] \quad \text{con} \quad L(a, b) = a + bx + (a + b)x^2$. Las matrices asociadas a estas transformaciones lineales en las respectivas bases canónicas son:

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$[S]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$[L]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$a) [T + S]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$b) [-5T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = -5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$c) [L \circ S]_C^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$$

2. Sean U, V como arriba, y considere la función $\zeta : \mathcal{L}(U, V) \longrightarrow \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ tal que $\zeta(T) = [T]_{B_1}^{B_2}$. Pruebe que es un isomorfismo y que, por lo tanto,

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}(U, V) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) = m \cdot n$$

EJERCICIOS

1. Determine cual de las siguientes funciones son transformaciones lineales.

- a) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, con $T(x, y, z) = (x, z)$
- b) $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, con $T(x, y, z, w) = (-x, -y, -z, w)$
- c) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $T(x, y, z) = (x, y, z) + (0, -1, 0)$
- d) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, con $T(x, y) = (2x, y - x)$
- e) $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$, con $T(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$

2. Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineal tal que $T(3, 1) = (1, 2)$ y $T(-1, 0) = (1, 1)$. Encuentre una expresión para T y calcule $T(1, 0)$ y $T(0, 1)$

3. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$ una transformación lineal. Encontrar T tal que
 $T(1, 0, -1) = 2 - x$, $T(0, 2, 1) = 1 + x$ y $T(1, 3, 1) = 3x - 2$

4. ¿Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(1) = 1$,
 $T(1 - x) = 2$, $T(1 - x^2) = 3$ tal que $T(2x^2 - 5x - 2) = -1$?

5. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ definida por

$$T(p(x)) = x^3 p'(0) + x^2 p(0)$$

¿Es T una transformación lineal?

6. Sea $T : \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + 1 \\ 2y \\ z \end{bmatrix}$$

¿Es T una transformación lineal?

7. Sea $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal definida por

$$T(x, y, z, w) = (x - y + z + w, x + 2z - w, x + y + 3z - 3w).$$

Encuentre una base y la dimensión del $\text{Ker } T$ y de $\text{Im } T$.

8. Sea $T : \mathcal{M}_{1 \times 4}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{1 \times 3}(\mathbb{R})$ una transformación lineal definida por

$$T([a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4]) = [a_1 + a_2 \ a_3 + a_4 \ a_1 + a_3]$$

- a) Hallar una base para el $\text{Ker } T$. ¿Cuál es su dimensión?
- b) Hallar una base para $\text{Im } T$. ¿Cuál es su dimensión?

9. Sea $T : \mathbb{R}_2[t] \rightarrow \mathbb{R}$ una transformación lineal definida por

$$T(at^2 + bt + c) = \int_0^1 (at^2 + bt + c) dt$$

Encuentre una base para el $\text{Ker } T$ y para $\text{Im } T$.

10. Sea $T : \mathbb{R}_2[t] \rightarrow \mathbb{R}_3[t]$ una transformación lineal definida por $T(p(t)) = t^2 p'(t)$ donde $p'(t) = \frac{dp}{dt}(t)$. Encuentre base para $\text{Ker } T$ y para $\text{Im } T$.
11. Sea $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a + 5c = 0 \right\}$. Demuestre que W es isomorfo a \mathbb{R}^3 .
12. Sea V el espacio vectorial generado por el conjunto $\{e^x, e^{-x}\}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Demuestre que V es isomorfo a \mathbb{R}^2 .
13. Sea $T : \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ una transformación lineal definida por $T(A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot A$, para toda matriz $A \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$. Hallar la dimensión del $\text{Ker } T$ y de $\text{Im } T$.
14. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ tal que

$$\begin{aligned} T(x) &= x^2 - x \\ T(x - 1) &= x - 2 \\ T(x^2 - 1) &= x^3 - x - 1 \end{aligned}$$

- a) Hallar $T(ax^2 + bx + c)$.
- b) Hallar generadores del $\text{Ker}(T)$.
- c) Hallar $\text{Im}(T)$.
15. Sea $T : \mathbb{R}_2[t] \rightarrow \mathbb{R}_1[t]$ una transformación lineal definida por $T(p(t)) = p'(t)$ y considere las bases $S = \{t^2, t, 1\}$ y $R = \{t + 1, t - 1\}$ para $\mathbb{R}_2[t]$ y $\mathbb{R}_1[t]$ respectivamente. Encuentre la matriz asociada a la transformación T respecto a estas bases.
16. Sea V el espacio vectorial con base $B = \{1, t, e^t, te^t\}$ y sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal definida por $T(f(t)) = f'(t)$. Hallar la representación matricial de T respecto de B .
17. Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineal definida por $T(x, y) = (x + y, -2x + 4y)$. Encuentre la matriz de T respecto a la base $\{(1, 1), (1, 2)\}$
18. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por la matriz

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

donde $\mathcal{B} = \{1, x - 1, x^2 - 1\}$ es base de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathcal{C} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ es una base de \mathbb{R}^3 .

Hallar $\text{Ker}(T)$ y $\dim \text{Ker}(T)$

19. Sea $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ considerar

$$f(p) = \int_0^1 p(x) dx$$

$$g(p) = \int_{-1}^0 p(x) dx$$

Se define $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(p(x)) = (f(p), g(p))$.

- Calcule el $\text{Ker} T$ y escríbalo usando el concepto de generador.
- Encuentre una base del $\text{Ker } T$ y calcule la $\dim(\text{Im}(T))$.
- Calcule $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^*}$, donde \mathcal{B} y \mathcal{B}^* son las bases canónicas de $\mathbb{R}_2[x]$ y \mathbb{R}^2 respectivamente.

20. Sea $T : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$, tal que

$$T[p(x)] = p''(x) + \int_0^1 p(x) dx$$

- Pruebe que T es una transformación lineal.
- Sean

$$\begin{aligned} B_1 &= \{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\} \\ B_2 &= \{1, x, x(x-1)\} \end{aligned}$$

bases de $\mathbb{R}_3[x]$ y $\mathbb{R}_2[x]$ respectivamente. Determine $[T]_{B_2}^{B_1}$ y use esta matriz para obtener el núcleo de T .

21. Probar que la matriz cambio de base siempre es invertible.

22. Encuentre la matriz cambio de base de S a R y la de R a S para:

- $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $R = \{(2, -3), (-2, 4)\}$
- $S = \{1, x, x^2\}$, $R = \{x^2 + x + 1, x^2 - x - 2, x^2 + x - 1\}$

23. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal cuya representación matricial respecto a las bases $S = \{(1, 0, -1), (0, 2, 0), (1, 2, 3)\}$ y $R = \{(1, -1), (2, 0)\}$ es $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Hallar la representación matricial de T respecto de las bases canónicas.

24. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal definida por $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar una expresión para T respecto a

- Las bases canónicas
- Las bases $S = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ y $R = \{(1, 2), (1, 3)\}$