

Departamento de Informática  
Universidad Técnica Federico Santa María

# PERT/CMP

v. 1.0.0

Renata Mella  
`renata.mella.12@sansano.usm.cl`

October 9, 2016



## Introducción

Preámbulo

Representación

## Critical Path Method (CPM)

Resolución Gráfica

Modelo

Crashing

## Program Evaluation and Review Technique (PERT)

Definición

## Ejercicios

CMP



La programación y control de proyectos se refiere a determinar una secuencia de actividades de un proyecto, determinar la duración total de éste y tomar ciertas decisiones sobre las actividades para ver su efecto en el proyecto completo.

### Existen dos tipos de proyectos:

- ▶ Proyectos donde la duración de las actividades está determinada con certeza, por lo tanto se sabe exactamente la duración del proyecto.
- ▶ Proyectos donde la duración de las actividades no está determinada con certeza, por lo que existen diversas duraciones del proyecto dependiendo de probabilidades de las actividades.



Para representar como un modelo de red se necesita saber dos cosas:

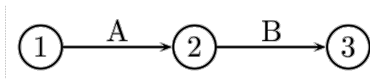
- ▶ La lista de actividades del proyecto.
- ▶ El conjunto de actividades predecesoras.

Con esta información se pueden graficar las relaciones entre cada actividad y determinar la estructura del proyecto.

En este caso, cada nodo de la red será la culminación de una o múltiples actividades y cada arco será una actividad.

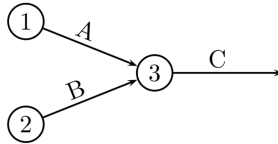
Consideremos un proyecto consta de sólo actividades A y B. Supongamos que la actividad A es predecesora de la actividad B.

La representación gráfica de este proyecto es:

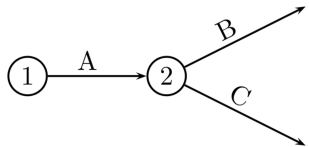




Si suponemos ahora que las actividades A y B deben ser terminadas antes que una actividad C pueda comenzar, la representación gráfica de este proyecto es:



Si A fuera predecesora de las actividades B y C, la representación gráfica de este proyecto es:





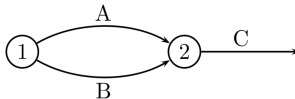
Dado un conjunto de actividades y sus predecesores, se puede construir una representación gráfica de acuerdo a las siguientes reglas:

- ▶ El **nodo 1 representa el inicio del proyecto**. Por lo tanto, las actividades que parten del nodo 1 no pueden tener predecesores.
- ▶ El **nodo final del proyecto debe representar el término de todas las actividades incluidas en la red.**
- ▶ **Una actividad no puede ser representada por más de un arco en la red.**
- ▶ **Dos nodos deben estar conectado por a lo más un arco.**

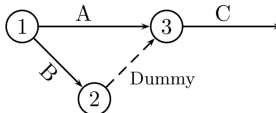


Para no violar las reglas 3 y 4, a veces es necesario introducir una actividad artificial o dummy que posee tiempo de duración nulo.

Supongamos que las actividades A y B son predecesores de la actividad C y además comienzan al mismo tiempo.



Con esta representación se viola la regla 4. Por lo que se introduce una actividad extra para poder representar este caso.





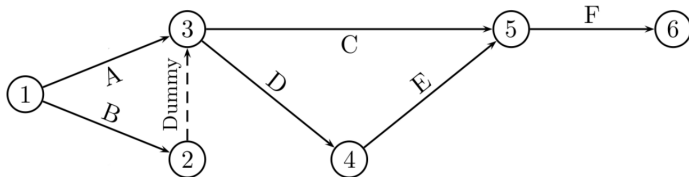
Actividad	Predecesor
A	-
B	-
C	A, B
D	A, B
E	D
F	C, E





Actividad	Predecesor
A	-
B	-
C	A, B
D	A, B
E	D
F	C, E

El gráfico para la tabla anterior nos queda:





Como lo dice el nombre del método, la idea es determinar la ruta crítica del proyecto y así determinar su flexibilidad.

Se definen dos tiempos dentro del proyecto:

- ▶ El tiempo **más temprano** para un nodo  $i$  es el instante más inmediato en el cual puede ocurrir la actividad correspondiente al nodo  $i$ .
- ▶ El tiempo **más tarde** para un nodo  $i$  es el último instante en el cual puede ocurrir la actividad correspondiente al nodo  $i$  sin retrasar la duración del proyecto,

# Critical Path Method (CPM)

## Resolución Gráfica



Ejemplo:

Actividad	Predecesor	Duración
A	-	6
B	-	9
C	A, B	8
D	A, B	7
E	D	10
F	C, E	12

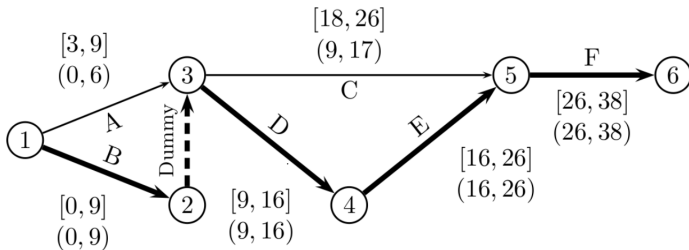


Definiremos dos conceptos:

- ▶ Una actividad crítica es una actividad que no puede ser retardada sin afectar la duración total del proyecto. En otras palabras, el tiempo más temprano y el tiempo más tarde son idénticos.
- ▶ Una ruta crítica es una secuencia de actividades críticas que forman un camino desde el nodo inicial al nodo final. Pueden existir rutas críticas paralelas para un mismo proyecto.

# Critical Path Method (CPM)

Resolución Gráfica



Las actividades críticas son: B, *Dummy*, D, E, F.

La ruta crítica es: B → *Dummy* → D → E → F

# Critical Path Method (CPM)

## Modelo



Definiremos un modelo de programación lineal para determinar las(s) rutas(s) críticas(s).

La variable  $x_j$  será la acumulación de tiempo hasta el nodo  $j$  (lo mismo para  $x_i$ ).

Las restricciones serán de la forma:

$$x_j \geq x_i + t_{ij}$$

para cada arco  $(i, j)$  donde  $t_{ij}$  es el tiempo de duración de la actividad correspondiente a ese arco.

El tiempo total del proyecto está definido por la diferencia de tiempo acumulado entre el nodo inicial y el nodo final. Por lo tanto, la función objetivo tiene que ser una minimización de este tiempo.

$$\min z = x_f - x_i$$



La función objetivo sería:

$$\min z = x_6 - x_1$$

Y las restricciones son:

$$x_2 \geq x_1 + 9 \quad \text{arco (1, 2)}$$

$$x_3 \geq x_1 + 6 \quad \text{arco (1, 3)}$$

$$x_3 \geq x_2 + 0 \quad \text{arco (2, 3)}$$

$$x_4 \geq x_3 + 7 \quad \text{arco (3, 4)}$$

$$x_5 \geq x_3 + 8 \quad \text{arco (3, 5)}$$

$$x_5 \geq x_4 + 10 \quad \text{arco (4, 5)}$$

$$x_6 \geq x_5 + 12 \quad \text{arco (5, 6)}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$



Resolviendo el problema anterior nos queda:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 9$$

$$x_3 = 9$$

$$x_4 = 16$$

$$x_5 = 26$$

$$x_6 = 38$$

$$z = 38 - 0 = 38$$



# Critical Path Method (CPM)

## Crashing



Para poder acelerar un proyecto es necesario acelerar ciertas actividades de la red.

Un proyecto con crashing es un proyecto al cual se le asignan recursos para poder acelerar ciertas actividades.

Sea:

$c_n$ : costo normal de una actividad.

$t_n$ : tiempo normal de una actividad.

$c_a$ : costo acelerado de una actividad. Siendo  $c_a \geq c_n$

$t_a$ : tiempo acelerado de una actividad. Siendo  $t_a \leq t_n$

# Critical Path Method (CPM)

## Crashing



Con estos datos podemos calcular una aceleración total de cada actividad, pero también se define un coeficiente  $k_i$  para cada actividad donde:

$$k_i = \frac{c_a - c_n}{t_n - t_a}, \forall i$$

Dado que no siempre conviene acelerar la totalidad posible si no que sólo un porcentaje (determinada en unidades de tiempo de aceleración), se define a  $i$  como la cantidad máxima que se puede acelerar una actividad.

# Critical Path Method (CPM)

## Crashing



17

Dado que el objetivo cambió, es necesario modificar el modelo de programación lineal para considerar la aceleración. El nuevo objetivo es acelerar a menor costo, por lo que la función objetivo es:

$$\min z = \sum_{ij} k'_{ij} y'_{ij}$$

Donde  $y'_{ij}$  es la cantidad de unidades que se acelera una actividad.

La duración acumulada ahora está definida por la duración original menos una posible aceleración:

$$x_i \geq x_j + t_{ij} - y'_{ij}$$

¿Donde se define el máximo de aceleración o la duración deseada?  
Se genera nuevas restricciones:

$$x_f - x_i \leq \text{duración original} - \text{cuanto se desea acelerar}$$

$$y'_{ij} \leq a'_{ij} \quad \forall i$$



Mientras que CPM asumía que la duración de las actividades era segura, PERT asume que esa duración es variables.

Para cada actividad se estiman las siguientes cantidades:

a = Estimación de la duración en condiciones más favorables.

b = Estimación de la duración en condiciones más desfavorables.

m = Duración más probable de la actividad.

# Program Evaluation and Review Technique (PERT)

## Definición



Sea  $T_{ij}$  la variable aleatoria asociada a la duración de la actividad del arco  $(i, j)$ .

PERT asume una distribución Beta para las probabilidades de duración.

Se define  $E[T_{ij}]$  y  $V[T_{ij}]$  como la esperanza y la varianza de la variable  $T_{ij}$  donde:

$$E[T_{ij}] = \frac{a + 4m + b}{6}$$

$$V[T_{ij}] = \frac{(b - a)^2}{36}$$

# Program Evaluation and Review Technique (PERT)

## Definición



20

Además se asume que la duración de las actividades es independiente, por lo tanto el valor esperado y la varianza de una ruta cualquiera sería:

$$\sum_{(i,j) \in \text{ruta}} E[T_{ij}]$$
$$\sum_{(i,j) \in \text{ruta}} V[T_{ij}]$$

Sea CP la variable asociada a la duración de la ruta crítica calculada mediante CPM:

$$CP = \sum_{(i,j) \in \text{ruta crítica}} T_{ij}$$

Además PERT asume que la ruta crítica encontrada a través de CPM contiene suficientes actividades para emplear el teorema del límite central y que CP se distribuye normalmente.

# Program Evaluation and Review Technique (PERT)

Ejemplo



Actividad	$a$	$b$	$m$	$E[T_{ij}]$	$V[T_{ij}]$
A	2	10	6	6	1,78
B	5	13	9	9	1,78
C	3	13	8	8	2,78
D	1	13	7	7	4,00
E	8	12	10	10	0,44
F	9	15	12	12	1,00

4. Un proyecto está compuesto por actividades cuyas características se presentan en la siguiente tabla:

Actividad	Predecesor	Normal	Acelerado	
		Duración [día]	Duración [día]	Costo [\$]
A	-	2	1	120
B	-	4	2	250
C	A, B	3	1	150
D	B	2	1	30
E	B	3	1	90
F	E	1	1	-
G	C, D	4	1	200
H	C, D	3	2	80
I	G	3	2	300
J	H	6	3	400
K	I	3	2	150
L	I	5	3	100
M	J, K	1	1	-

1. ( $\frac{1}{3}$ ) Dibuje la malla del proyecto, la ruta crítica y la duración del proyecto.
2. ( $\frac{1}{3}$ ) Considerando la posibilidad de acelerar las actividades, formule un modelo de programación lineal que permita determinar qué actividades deban ser aceleradas y en cuánto de manera tal de terminar el proyecto dentro de 15 días.
3. ( $\frac{1}{3}$ ) Se quiere acelerar el proyecto en tres días a costo mínimo. ¿Cuáles actividades conviene acelerar y en cuánto? ¿A qué costo? Dibuje como quedaría la nueva malla.



4. Un proyecto está compuesto por actividades cuyas características se presentan en la siguiente tabla:

Actividad	Predecesor inmediato	Normal		Acelerado	
		Duración [día]	Costo [\$]	Duración [día]	Costo [\$]
A	–	4	200	4	200
B	–	7	500	6	650
C	–	3	400	2	450
D	B	5	400	3	600
E	B	4	200	4	200
F	C	6	300	4	700
G	A, D	8	600	5	900
H	E, F	9	700	8	900
I	E, F	3	300	3	300
J	B, G, H	6	500	6	500
K	B, G, H, I	8	650	7	750

1. ( $\frac{1}{3}$ ) Dibuje una red para representar el proyecto y, considerando la duración normal de las actividades, determine la ruta crítica, la duración mínima y el costo total del proyecto.
2. ( $\frac{1}{3}$ ) Considerando la posibilidad de acelerar las actividades, formule un modelo de programación lineal que permita determinar qué actividades deben ser aceleradas y en cuánto de manera tal de terminar el proyecto dentro de 26 días minimizando el costo total del proyecto.

4. Se tiene la siguiente programación de un proyecto:

Actividad	Predecesoras	Duración [días]	Varianza
A	-	3	0,2
B	A	2	0,15
C	-	4	0,3
D	B, C	2	0,15
E	A, D	3	0,2
F	B, C	4	0,3
G	B, C	3	0,25
H	E, F	2	0,1
I	E, F, G	3	0,2
J	E, F, G	2	0,15
K	H, I	1	0,05
L	H, I, J	2	0,1

1. (40 %) Grafique la malla del proyecto e identifique la ruta crítica. Obtenga la duración esperada y la varianza del proyecto.
2. (20 %) Determine la probabilidad de terminar el proyecto antes de 14 días, en exactamente 15 días y después de 16 días.

3. (40 %) Suponga que han pasado 7 días de desarrollo del proyecto en las condiciones esperadas, pero debido a algunos requerimientos no detectados desde un comienzo se requiere agregar las siguientes actividades al proyecto:

Actividad	Predecesoras	Duración [días]
M	K, L	2
N	L	3

A pesar de haber agregado actividades al proyecto, se desea terminar lo que queda del proyecto en el plazo restante de acuerdo a lo calculado en 1 (descontando los 7 días que ya han transcurrido).

Para cumplir el objetivo de terminar el proyecto a tiempo se han establecido las actividades susceptibles de acelerar, su costo por día de aceleración y el máximo número de días a disminuir para cada una de ellas:

Actividad	Costo unitario acel. [\$/día]	Disminución máxima [días]
E, M	40	3
G, H, J	10	2
F, I	15	2
K, L	10	1

Determine la forma de terminar el proyecto a tiempo a costo mínimo.