MAT-023: Ecuaciones Diferenciales Exactas

Juan Carlos Chavarría [1]

Universidad Técnica Federico Santa María

Resumen

Apuntes y Ejercicios sobre Ecuaciones Diferenciales Exactas.

1. Ecuaciones Exactas

Dada una función de dos variables $F = F(x, y)$, su *diferencial total*, dF, está dado por

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy,$$

siempre y cuando $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ existan. Puesto que las derivadas parciales de F también son funciones de x e y es posible escribir lo anterior como

$$dF = M(x, y)dx + N(x, y)dy.$$

Consideremos ahora la curva de nivel $F(x, y) = c \in \mathbb{R}$ definida sobre una región del plano R. Si suponemos que $F \in \mathscr{C}^1(R)$, entonces

$$dF = M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \qquad \forall(x, y) \in R. \tag{1.1}$$

Si además, exigimos que $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \in R$, entonces el Teorema de la Función Implícita implica que para cada punto de R, $y = y(x)$ de forma única y diferenciable y además

$$y' = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)},$$

de donde y es una solución de 1.1.

Se dice la expresión $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es una *diferencial exacta* si existe una función F tal que $dF = M(x, y)dx + N(x, y)dy$. En tal caso, la ecuación 1.1 se denomina *exacta* y la expresión $F(x, y) = c$, c arbitraria, define la solución general de 1.1 en todo R, llamada la *integral general* de esta ecuación.

Ejemplo **1.1** La ecuación

$$xdx + ydy = 0,$$

es exacta, ya que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) = x, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) = y.$$

De donde la la integral de esta ecuación es

$$F(x, y) = x^2 + y^2 = 2c > 0.$$

[1] Al lector dedicado se ruega hacer llegar sus observaciones al correo electrónico juan.chavarria@usm.cl

Sin embargo, no contamos con una técnica que nos permita reconocer una ecuación diferencial exacta para abordar su resolución. Esto lo podemos hacer simplemente exigiendo a F que sea una función dos veces diferenciable con segundas derivadas parciales continuas en R, es decir, $F \in \mathscr{C}^2$. Si esto ocurre, entonces

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$

pero hemos definido a $M(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}$ y $N(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}$. Luego, esta última condición puede escribirse como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{1.2}$$

Este criterio será efectivo para determinar la exactitud de una ecuación si el recíproco de 1.2 es verdadera. Para tal fin, es necesario añadir una hipótesis adicional. Esto es, se debe exigir que R sea una *región simplemente conexa*, concepto que será profundizado en el curso siguiente. Informalmente hablando, diremos que R es simplemente conexa si no posee *agujeros* en su interior. Enunciamos el siguiente resultado:

Teorema **1.1.** *Sean $M(x,y)$, $N(x,y)$ continuamente diferenciables en una región simplemente conexa R. Entonces $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ es un diferencial exacto si y sólo si $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.*

Ejemplo **1.2** La ecuación $(x^2+y)dx + (x-2y)dy = 0$ es exacta pues

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y) = 1 \qquad \wedge\ \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(x-2y) = 1.$$

Buscamos una curva solución de la forma $F(x,y) = c$. Para resolver, recordamos que por definición: $\frac{\partial F}{\partial x} = M$ y luego, integrando con respecto a x

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= (x^2+y) \\
F(x,y) &= \int (x^2+y)\,dx + A(y) \\
F(x,y) &= \frac{x^3}{3} + xy + A(y),
\end{aligned}$$

donde $A(y)$ es una función que sólo depende de y. Derivando la última expresión y comparando con N:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial y} &= x + A'(y) \\
N(x,y) &= x + A'(y) \\
x - 2y &= x + A'(y) \Rightarrow A(y) = -y^2 + C.
\end{aligned}$$

Entonces la cuva solución es

$$F(x,y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 = c.$$

1.1. Factor de Integración

Supongamos que la ecuación 1.1 no es exacta. Para poder escribirla en dicha forma, se multiplica la ecuación por una función $\mu = \mu(x,y) \neq 0$ tal que la ecuación

$$(\mu M)\,dx + (\mu N)\,dy = 0, \tag{1.3}$$

sea exacta. Al realizar un cálculo sencillo se llega a la ecuación

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right),$$

que es una ecuación diferencial parcial de primer orden, posiblemente más compleja que el problema inicial. Sin embargo, si por ejemplo, el factor depende sólo de y, entonces

$$\begin{aligned} M\frac{\partial \mu}{\partial y} &= \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial y} &= \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y}(\ln \mu) &= \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

Puesto que en este caso $\mu = \mu(y)$, entonces el lado derecho de la última ecuación no depende de x y la ecuación resultante es una EDO.

De forma similar, si $\mu = \mu(x)$, debe verificarse que la expresión

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right),$$

sólo dependa de x.

Ejemplo **1.3** Dada la ecuación $(y + xy^2)\,dx - x\,dy = 0$, se tiene que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2xy, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

y la ecuación no es exacta, pero si consideramos la razón

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{-1 - 1 - 2xy}{y + xy^2} = -\frac{2(1 + xy)}{y(1 + +xy)} = -\frac{2}{y}.$$

Luego un factor integrante depende de y. Este factor confirma la EDO

$$\frac{\partial}{\partial y}(\ln \mu) = -\frac{2}{y},$$

de acá $\ln \mu = -2\ln y$ y entonces $\mu = \frac{1}{y^2}$ es un factor integrante. Multiplicando la ecuación original por este factor se obtiene

$$\left(\frac{1}{y} + x\right)\,dx - \frac{x}{y^2}\,dy = 0,$$

que es exacta pues

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y} + x\right) = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{y^2}\right).$$

Se deja como ejercicio su resolución.

Referencias

[1] *Ecuaciones Diferenciales*. Kreider-Kuller-Ostberg. Fondo Educativo Interamericano S.A, 1973.

2. Ejercicios Propuestos

1. Determine si los siguientes diferenciales son exactos. En caso de no serlo, encuentre un factor de integración y resuelva.

   a) $(3xy - y^2)\,dx + x(x-y)\,dy = 0$

   b) $(x+y)\operatorname{sen} y\,dx + (x\operatorname{sen} y + \cos y)\,dy = 0$

   c) $(3e^x y + x)\,dx + e^x\,dy = 0, \quad y(0) = 1$

2. Determine los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que el diferencial:

$$(5xy^2 - y)\,dx + (3x^2y - x)\,dy = 0,$$

   admita un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = x^a y^b$. Una vez determinados dichos valores, resuelva la ecuación.

3. Demuestre que $\mu_1(x,y) = x$ es un factor integrante de

$$(3xy + y^2)\,dx + (x^2 + xy)\,dy = 0,$$

   pero que $\mu_2(x,y) = \frac{1}{xy(2x+y)}$ también lo es. Resuelva para cada caso y comente.

4. Muestre que el siguiente diferencial

$$(axy^2 + by)\,dx + (bx^2y + ax)\,dy = 0,$$

   es exacto solo si $a = b$. Si $a \neq b$, muestre que $x^m y^n$ es un factor integrante, donde m, n dependen de a, b. Determine dichos valores y resuelva la ecuación.

5. Si $y = C(x)$ representa el costo de producir x unidades en un proceso de manufactura, la elasticidad del costo se define como

$$E(x) = \frac{\text{costo marginal}}{\text{costo promedio}} = \frac{C'(x)}{C(x)/x} = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}.$$

   Encuentre la función de costo si la función de elasticidad es

$$E(x) = \frac{20x - y}{2y - 10x}, \qquad x \geq 500.$$