Extremos con y sin Restricciones

Problemas Propuestos

1. Localice y clasifique los puntos críticos de las siguientes funciones:
   (a) $f(x,y) = 4xy - 2x^4 - y^2$.
   (b) $f(x,y) = 2x^3 + y^3 - 3x^2 - 12x - 3y$.
   (c) $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{x^2-y^2}$.
   (d) $f(x,y) = ax^2 + by^4, \quad a,b \in \mathbb{R}$.

2. Considere la función $f(x,y) = \cos(x^2+y^2)$. Encuentre un polinomio de dos variables $P(x,y)$ de grado $n = 2010$ tal que
$$D^{(k)}f(0,0) = D^{(k)}P(0,0), \qquad \text{para } k = 0,1,\dots,2010.$$

3. Encuentre el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que la matriz
$$A(x,y) = \begin{bmatrix} x & \alpha \\ 1 & y \end{bmatrix}$$
sea la matriz Hessiana de una función $F(x,y)$ de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Luego de un ejemplo de $F(x,y)$ que satisfaga dicha condición(es).

4. Sea $f(s,t)$ el cuadrado de la distancia entre un punto de la recta $L: x=t, y=t+1, z=2t$ y un punto de la recta $L': x=2s, y=s-1, z=s+1$. Muestre que el único punto crítico de f es un mínimo local. Determine entonces los puntos más cercanos entre L y L'.

5. Encuentre y clasifique todos los puntos críticos de la función $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}(2x^2+y^2)$, en la región $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 4\}$.

6. Un cable de 120 centímetros de largo se corta en tres partes de longitudes x, y y $120-x-y$; cada parte se dobla con la forma de un cuadrado. Sea $f(x,y)$ la suma de las áreas de estos cuadrados. Muestre que el único punto crítico de f es un mínimo local. Sin embargo, es posible maximizar la suma de las áreas. Explique.

7. Una pieza de hojalata de 24 cm de ancho ha de convertirse en un recipiente con perfil dado por un trapecio isóceles doblando hacia arriba los dos lados. Hallar el ancho y la inclinación de cada lado si la capacidad del recipiente es máxima.

8. Determine la distancia mínima entre las superficies:
$$x+y+z = 10 \quad \text{y} \quad x^2+y^2+z^2 = 1.$$

9. Sean x la cantidad de sillas e y la cantidad de mesas producidas por un fabricante de muebles. Si las funciones $f(x,y) = 256 - 3x - y$ y $g(x,y) = 222 + x - 5y$ corresponden a los respectivos precios unitarios de venta de los productos. Hallar las cantidades de sillas y mesas de modo de obtener máximas utilidades, si se sabe que el costo de la producción total es de $C(x,y) = x^2 + xy + y^2$.

10. Un servicio de transporte urgente de paquetes requiere que las dimensiones de las cajas rectangulares que se envíen a través del mismo sean tales que la longitud de la caja mas el doble de su anchura mas el doble de su altura no rebase 108 pulgadas. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la caja rectangular de volumen máximo que pueden enviarse a través de esa agencia? ¿Cuál es ese volumen máximo?

11. La temperatura de una placa en un punto cualquiera (x,y) viene dada por $T(x,y) = 25 + 4x^2 - 4xy + y^2$. Una alarma térmica, situada sobre los puntos de la circunferencia $x^2+y^2 = 25$, se dispara a temperaturas superiores a 180 grados o inferiores a 20 grados. ¿Se disparará la alarma?

Problemas Resueltos

1. Sea $f(x, y) = x^5 \cos(x + y)$. Encuentre el polinomio $p(x, y)$ de grado 9 que mejor aproxima a la función $f(x, y)$ cerca de $(x, y) = (0, 0)$.

   Solución. El problema se reduce a calcular el polinomio Taylor de la función $g(x, y) = \cos(x + y)$, el cual encontramos usando que el polinomio de Taylor de la función $\cos(\theta)$ que es:

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{(2n)!} \\ \Rightarrow \cos(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+y)^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

   Así, basta multiplicar lo anterior por x^5 y se obtiene el desarrollo de $f(x, y)$ y el polinomio de grado 9 se obtiene al sumar hasta $n = 2$ y luego

$$f(x,y) = x^5 \cos(x+y) \approx p(x,y) = \sum_{n=0}^{2} \frac{(-1)^n x^5 (x+y)^{2n}}{(2n)!} = x^5 \left(1 - \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(x+y)^4}{4!}\right)$$

2. Considere $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ que satisface la ecuación diferencial parcial

$$-\triangle u = f(x, y)$$

   donde $f(x, y) > 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ es una función de clase $\mathcal{C}^1$. Verifique que $u(x, y)$ no es constante ni posee mínimos locales.
   Observación: $\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ es el *Laplaciano* de u.

   Solución. Si u fuese constante entonces se tendría que $\triangle u = 0$ directamente, una contradicción.
   De igual modo, si u poseyera un mínimo local en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ entonces al analizar la matriz Hessiana de u en el punto (la cual es simétrica pues $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$)

$$H(u) = \begin{bmatrix} u_{xx}(x_0, y_0) & u_{xy}(x_0, y_0) \\ u_{xy}(x_0, y_0) & u_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

   se tendrá que $\triangle_1 = u_{xx} > 0$ (primer subdeterminante) y $\triangle_2 = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 > 0$ (segundo subdeterminante). Sin embargo, al despejar u_{yy} en la ecuación $-u_{xx} - u_{yy} = f$, obtenemos por otra parte que

$$\triangle_2 = u_{xx}(-u_{xx} - f) - u_{xy}^2 = -f u_{xx} - u_{xx}^2 - u_{xy}^2 < 0,$$

   lo que es una contradicción.

3. Sea $F(x, y, z)$ una función de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ tal que $F(1, 0, 1) = 0$ y

$$\nabla F(1,0,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad H_F(1,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   (a) Muestre que existe un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ que contiene al punto $(1, 0)$ y una función $g : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2(\Omega)$ tal que $g(1, 0) = 1$ y $F(x, y, g(x, y)) = 0$, $\forall (x, y) \in \Omega$.
   (b) Calcule la matriz $H_g(1, 0)$.

   Solución.

   (a) Notemos primero que dicha función $g = g(x, y)$ existe y es de clase $\mathcal{C}^2$, puesto que la función F es de clase $\mathcal{C}^2$ en todo $\mathbb{R}^3$ y en particular en una vecindad de $(1, 0, 1)$, además $F(1, 0, 1) = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial z}(1, 0, 1) = 1 \neq 0$, por lo tanto el Teorema de la función implícita garantiza la existencia de una vecindad de $(1, 0) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ y de $g : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que:

$$F(x, y, g(x, y)) = 0, \qquad \forall (x, y) \in \Omega.$$

(b) Por lo anterior, podemos derivar la ecuación de ariba para $i = 1, 2$ ($x_1 = x, x_2 = y$) y obtener lo solicitado

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_1, x_2, g(x_1, x_2))\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1, x_2) = 0,$$

que en la notación de subíndices queda

$$\begin{aligned} F_{x_i} + F_z g_{x_i} &= 0 \\ \Rightarrow g_{x_i} &= -\frac{F_{x_i}}{F_z} \end{aligned}$$

Derivando nuevamente, y para evitar confusiones con respecto a x_j con $j = 1, 2$:

$$F_{x_i x_j} + F_{x_i z} g_{x_j} + F_{z x_j} g_{x_i} + F_{zz} g_{x_i} g_{x_j} + F_z g_{x_i x_j} = 0.$$

Reemplazando la expresión obtenida para g_{x_i} y despejando las derivadas de segundo orden obtenemos

$$g_{x_i x_j} = -\frac{1}{F_z}\left(F_{x_i x_j} - F_{x_i z}\frac{F_{x_j}}{F_z} - F_{z x_j}\frac{F_{x_i}}{F_z} + F_{zz}\frac{F_{x_i} F_{x_j}}{F_z^2}\right)$$

Evaluando para $i, j = 1, 2$ en $(1, 0, 1)$ usando las derivadas de F entregadas como dato, se obtienen las componentes de la matriz Hessiana de g

$$\begin{aligned} g_{xx}(1,0) &= g_{yy}(1,0) = -4 \\ g_{xy}(1,0) &= g_{yx}(1,0) = 0 \\ \Rightarrow H_g(1,0) &= \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos funciones de clase $\mathcal{C}^2$. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto tal que $\nabla f(x_0) = 0$ y $H_f(x_0)$ (Hessiana) invertible. Demuestre que para todo $a \in \mathbb{R}$ lo suficientemente pequeño, la función

$$f^a(x) = f(x) + a\, g(x)$$

posee al menos un punto crítico.

Solución. Definimos a la función $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$F(a, x) = \nabla f(x) + a \nabla g(x).$$

Dado que f, g son de clase $\mathcal{C}^2$, sigue que F es de clase $\mathcal{C}^1$. Además, por hipótesis y la definición de F se tiene que $F(a, x_0) = \vec{0}$ y

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a, x) = H_f(x) + a H_g(x).$$

Al evaluar en $(0, x_0)$ obtenemos

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0, x_0) = H_f(x_0),$$

que es invertible por hipótesis. El teorema de la función implícita asegura entonces que existen $\delta > 0$ y una vecindad $V =]-\delta, \delta[\subset \mathbb{R}$ y una función $x : V \to \mathbb{R}^n$, tal que $x(a = 0) = x_0$ que cumple con

$$F(a, x(a)) = 0 = \nabla f^a(x(a)), \qquad \forall a \in V,$$

y luego $x(a) \in \mathbb{R}^n$ es un punto crítico de f^a. ■

5. Una partícula de masa constante M se ubica en un riel determinado por la curva intersección de las superficies $x^2 + y^2 = 1$ y $2x + z = 1$, y permanece estática en su posición inicial. En cierto momento se hace rotar dicho riel en torno a un eje de giro ℓ perpendicular al plano xy y que pasa por el punto $(2, 0, 0)$. Si se sabe que el momento de inercia de la partícula está dado por $I = MR^2$, donde R representa la distancia de la partícula al eje ℓ, determine la ubicación donde debe ubicarse inicialmente la partícula para maximizar el momento de inercia.

Solución. Dado que la masa es constante basta maximizar R^2 para maximizar el momento de inercia. Dado que el eje de giro ℓ es perpendicular al plano xy y pasa por el punto $(2,0,0)$ la distancia de un punto (x,y,z) a dicho eje estaá dada por $R(x,y,z)=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$.
Así, dado que la partícula está restringida a posicionarse inicialmente en la intersección del cilindro $x^2+y^2=1$ y el plano $2x+z=1$ se obtiene que el problema a analizar es

$$(\mathcal{P})\begin{cases} \text{máx} & (x-2)^2+y^2 \\ s.a. & x^2+y^2=1 \\ & 2x+z=1. \end{cases}$$

Luego, si definimos $f(x,y,z)=(x-2)^2+y^2,\ g(x,y,z)=x^2+y^2-1,\ h(x,y,z)=2x+z-1$, se tiene del teorema de los multiplicadores de Lagrange que

$$\nabla f=\lambda\nabla g+\mu\nabla h \Leftrightarrow \det[\nabla f\ \ \nabla g\ \ \nabla h]=0,$$

es decir,

$$\begin{vmatrix} 2(x-2) & 2x & 2 \\ 2y & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4y \begin{vmatrix} x-2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -8y=0$$

De las condiciones $g=0$ y $h=0$ se obtienen dos puntos críticos: $(1,0,-1)$ y $(-1,0,3)$. Al evaluar f en dichos puntos se concluye que el mayor momento de inercia se obtiene cuando la partícula se posiciona inicialmente en el punto $(-1,0,3)$.

6. Don Alejandro vende fierros cromados en su ferretería y quiere obtener mejores utilidades. Para ello quiere hacer los cálculos de las utilidades diarias, tomando en cuenta que la venta diaria es de 200 fierros cromados. Además se tiene lo siguiente:

- La producción de fierros cromados está dada por la función de producción definida por $f(x,y,z)=\sqrt{xyz}$, donde (x,y,z) son los insumos, es decir, fierro (x), cromo (y) y aglomerante (z).
- Los costos de los insumos son 10, 100 y 25 pesos respectivamente y cada fierro cromado se vende por 1000 pesos.

De acuerdo a estos datos.

(a) Plantee el problema para obtener la mayor ganancia.
(b) Resuelva utilizando multiplicadores de Lagrange para obtener la cantidad óptima de insumos a utilizar.
(c) Determine el margen de ganancia de Don Alejandro cada día.

Solución.

(a) El problema puede ser planteado como

$$\begin{aligned} \text{máx } U(x,y,z) &= 1000\times 200-10x-100y-25z \\ s.a\quad f(x,y,z) &= \sqrt{xyz}=200 \\ x,y,z &\geq 0. \end{aligned}$$

Note que dado que las ganancias son fijas el problema puede ser planteado como una minimización de costos. (Minimizar $10x+100y+25z$ sujeta a la misma restricción).

(b) El problema puede ser resuelto mediante multiplicadores de Lagrange considerando que en los puntos óptimos se cumple

$$\nabla U=\lambda\nabla f,\qquad \lambda\in\mathbb{R},$$

esto es, que los gradientes son proporcionales. Esto implica que se tienen las dos ecuaciones

$$\frac{U_x}{f_x}=\frac{U_y}{f_y}=\frac{U_z}{f_z}=\lambda,$$

En nuestro caso

$$10\sqrt{\frac{x}{yz}}=100\sqrt{\frac{y}{xz}}=25\sqrt{\frac{z}{xy}}=-\frac{\lambda}{2}.$$

Despejando obtenemos las relaciones

$$x=10y\qquad z=4y,$$

y reemplazando en la restricción obtenemos $y=10$ y luego $x=100$ y $z=40$.

(c) Con estos valores óptimos el margen de ganancia óptimo es $U^*=U(100,10,40)=\$197000$.