Apellido Paterno	Apellido Materno	Nombres

Rut	Rol	Firma

Paralelo	Nombre del Profesor

Instrucciones :

- Tiempo 90 minutos.
- Escriba con lápiz pasta o tinta. Los desarrollos con lápiz grafito no tienen derecho a apelación
- Escriba con claridad y **justifique** cada uno de sus desarrollos.
- No se permiten calculadoras, computadores, celulares ni hojas adicionales.
- No debe arrancar hojas del cuadernillo.
- Quienes sean sorprendidos cometiendo actos de deshonestidad académica tendrán nota 0 en esta prueba.

	Puntaje
1	
2	
3	
4	
Nota	

1. (25 PUNTOS) Considere el campo de fuerzas $\overrightarrow{F}(x,y) = \left(\dfrac{x^3+xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y^3+x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$, sea $\mathcal{C}$ una curva suave, cerrada y simple dada en sentido antihoraria, contenida en la región $R:\{(x,y):\ x^2+y^2\geq 1 \wedge x^2+4y^2\leq 16\}$
Calcula el trabajo realizado por $\overrightarrow{F}$ a lo largo de la curva $\mathcal{C}$.
Solución:
Caso 1: Sea una curva en R que contenga al origen en su interior y sea R_1 la región en R que tiene frontera a $\mathcal{C}\cup\mathcal{C}_1^-$, donde $\mathcal{C}_1:\ x^2+y^2=1$ tiene sentido antihorario. Por el teorema de Green para regiones multiplemente conexa se tiene
$$\oint_{\mathcal{C}\cup\mathcal{C}_1^-} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = \iint_{R_1} (N_x - M_y)\, dA = 0$$
entonces $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = \oint_{\mathcal{C}_1} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$, donde una parametrización es $\overrightarrow{r}(t) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta),\ \theta\in[0,2\pi]$, de donde $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}_1} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = \int_0^{2\pi} \left[(\cos^3\theta + \cos\theta\operatorname{sen}^2\theta)(-\operatorname{sen}\theta) + (\operatorname{sen}^3\theta + \cos^2\theta\operatorname{sen}\theta)\cos\theta\right]\, d\theta = 0$. Por tanto
$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = 0.$$
Caso 2: Denotemos el campo $\overrightarrow{F}(x,y) = (M(x,y), N(x,y))$, sea $\mathcal{C}$ una curva en R que no contenga al origen en su interior, se tiene entonces que $\nabla\times\overrightarrow{F} = N_x - M_y = \overrightarrow{0}$ y además se tiene que $\operatorname{int}(R)$ es simplemente conexo entonces $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = 0$.

2. (25 PUNTOS) La porción del cilindro $x^2+z^2=a^2$, para $0\le y\le mx$, donde $a>0$ y $m>0$, es la ubicación espacial de una lámina delgada homogénea de densidad a^{-3}. Determina el valor de $m\in\mathbb{R}$, de tal manera que el momento de inercia de esta lámina respecto del eje y sea igual a $6a$.
Sug: $I_y=\iint_S \delta(x,y,z)\,(x^2+z^2)\,dS$

Solución:

La gráfica de la lámina viene dada por:

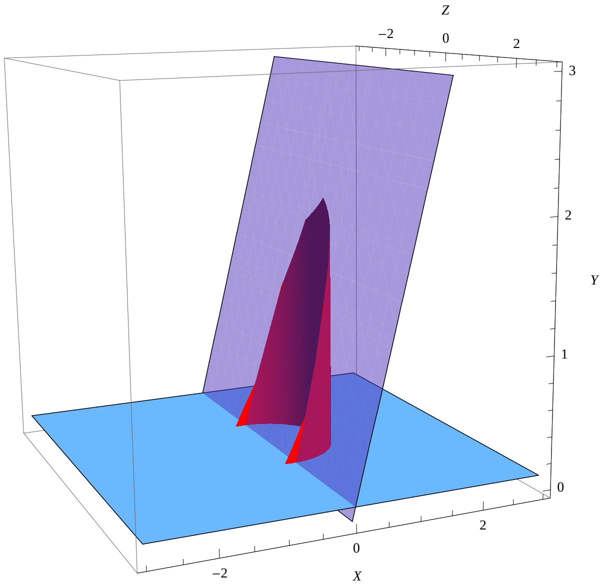

Figura 1: Gráfica de la lámina

Primera Forma:
Una parametrización para la superficie S, está dada por

$$\vec{r}(t,y)=(a\cos(t),y,a\operatorname{sen}(t)),\quad \text{con } (t,y)\in D,$$

donde

$$D=\{(t,y):\ 0\le y\le ma\cos(t),\ -\pi/2\le t\le\pi/2\}$$

Luego,

$$\left.\begin{array}{rcl}\vec{r}_t&=&(-a\operatorname{sen}(t),0,a\cos(t))\\ \vec{r}_y&=&(0,1,0)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{rcl}\vec{r}_t\times\vec{r}_y&=&(-a\cos(t),0,-a\operatorname{sen}(t))\\ \|\vec{r}_t\times\vec{r}_y\|&=&a\end{array}$$

El momento de inercia de S respecto al eje z viene dado por:

$$\begin{aligned}I_y=\iint_S a^{-3}(x^2+z^2)dS&=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{ma\cos(t)} a^{-3}(a^2\operatorname{sen}^2(t)+a^2\cos^2(t))a\,dydt\\&=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{ma\cos(t)} dydt\\&=2ma\end{aligned}$$

Por lo tanto, solo si $m=3$ se cumple que $I_y=6a$.

Segunda Forma:
Otra parametrización para la superficie S, viene dada por

$$\vec{r}(t,y)=(a\operatorname{sen}(t),y,a\cos(t)),\quad \text{con } (t,y)\in D,$$

donde

$$D=\{(t,y):\ 0\le y\le ma\operatorname{sen}(t),\ 0\le t\le\pi\}$$

Luego,

$$\left.\begin{array}{rcl} \overrightarrow{r}_t & = & (a\cos(t), 0, -a\,\mathrm{sen}(t)) \\ \overrightarrow{r}_y & = & (0,1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} \overrightarrow{r}_t \times \overrightarrow{r}_y & = & (a\,\mathrm{sen}(t), 0, a\cos(t)) \\ \|\overrightarrow{r}_t \times \overrightarrow{r}_y\| & = & a \end{array}$$

El momento de inercia de S respecto al eje z viene dado por:

$$\begin{aligned} I_y = \iint_S a^{-3}(x^2+z^2)dS &= \int_0^{\pi}\int_0^{ma\,\mathrm{sen}(t)} a^{-3}(a^2\,\mathrm{sen}^2(t) + a^2\cos^2(t))a\,dydt \\ &= \int_0^{\pi}\int_0^{ma\,\mathrm{sen}(t)} dydt \\ &= 2ma \end{aligned}$$

Por lo tanto, solo si $m=3$ se cumple que $I_y = 6a$.

3. (25 PUNTOS) Determina la magnitud de la circulación del campo

$$\vec{F}(x,y,z) = \big(x\cos(x^2) - y, y\sin(y^3) - z, h(z) - x\big)\,, \quad h \in C^1(\mathbb{R}),$$

a lo largo de la curva C que se obtiene de la intersección del elipsoide $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1$ con el plano $y = 2z - x + 1$.

Solución:

El campo es de clase C^1 y la curva $\mathcal{C}$ es simple, es posible usar el Teorema de Stokes:

$$\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde S es la superficie $y = 2z - x + 1$ encerrada por la curva C, además $\nabla \times \vec{F} = (1,1,1)$ y $\overrightarrow{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$. De este modo

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

4. (25 PUNTOS) Sea $0 < a < \sqrt{6}$, sea $S = S_1 \cup S_2$ donde $S_1 : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 - z^2 = a^2 \;\wedge\; 0 \leq z \leq 4 - x\}$, $S_2 : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \dfrac{a^2}{2} - (x^2 + y^2) \;\wedge\; z \geq 0\}$ y consideremos el campo de velocidades $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left((8-2x)ye^{-y^2} + x - 4, \ln(z+1) - 2y - 2e^{-y^2}, -1 + z - 2zye^{-y^2}\right)$ de un cierto fluído.
Encuentra el valor de a para que el flujo del campo $\overrightarrow{F}(x,y,z)$ que atraviesa la superficie S según la normal exterior sea 34π.

Solución:

Tenemos que el campo $\overrightarrow{F}$ es de clase C^1, para poder usar el teorema de Gauss utilizamos las superficies:

$$S_1^* \quad : \quad \left\{(x,y,z) : \frac{a^2}{2} \leq x^2 + y^2 \;\wedge\; 2x^2 + y^2 \leq a^2, \;\wedge\; z = 0\right\}$$

$$S_2^* \quad : \quad \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 - z^2 \leq a^2 \;\wedge\; z = 4 - x\}$$

para obtener la superficie cerrada $S \cup S_1^* \cup S_2^*$ la cual encierra a una región R, como se muestra en la siguiente figura

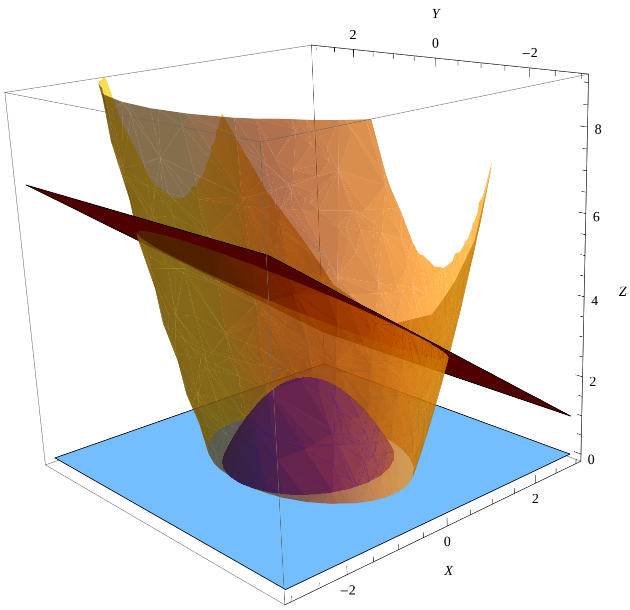

Figura 2: Gráfica de las superficies

Entonces, por el teorema de la Divergencia tenemos

$$\iiint_R div(\overrightarrow{F})\, dV = \iint_{S \cup S_1^* \cup S_2^*} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS$$

pero

$$div(\overrightarrow{F}) = -2ye^{-y^2} + 1 - 2 + 4ye^{-y^2} + 1 - 2ye^{-y^2} = 0$$

de donde

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = -\left(\iint_{S_1^*} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}_1\, dS + \iint_{S_2^*} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}_2\, dS\right)$$

- $\displaystyle\iint_{S_1^*} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \iint_{S_1^*} \overrightarrow{F} \cdot (0,0,-1)\, dS = \iint_{S_1^*} (1 - z + 2ze^{-y^2})\, dS = \iint_{S_1^*} dS = \text{Área}(S_1^*)$, pues $z = 0$ en S_1^*, de donde

$$\iint_{S_1^*} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \pi a^2 \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2}\right) = \pi a^2 \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right).$$

- $$\begin{aligned}
\iint_{S_2^*} \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\,dS &= \iint_{S_2^*} \overrightarrow{F}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)\,dS\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\iint_{S_2^*}\left((8-2x)ye^{-y^2}+x-4-1+z-2zye^{-y^2}\right)\,dS\\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_{S_2^*} dS,\ \text{ ya que } z=4-x\\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_{(x-4)^2+y^2\leq a^2+32}\sqrt{2}\,dS\\
&= -\pi(a^2+32).
\end{aligned}$$

  entonces, según la condición, tendremos

  $$\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\,dS = -\pi a^2\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)+\pi(a^2+32)=34\pi$$

  de donde

  $$a^2\left(\frac{-\sqrt{2}+1}{2}+1\right)=2$$

  entonces

  $$a=\frac{2}{\sqrt{3-\sqrt{2}}}\approx 1{,}5882.$$