Capítulo 1

Curvas en el plano y en el espacio

1.1. Curvas parametrizadas

Definición 1.1.1 (Curva parametrizada). *Una curva parametrizada diferenciable* $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$*, es una aplicación de clase* C^∞*, donde* $I \subset \mathbb{R}$ *es un intervalo abierto, que puede ser una semirrecta o todo* $\mathbb{R}$*.*

- Esto significa que si $\alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, entonces las funciones $x_i(t)$ son de clase C^∞.
- La variable t recibe el nombre de *parámetro* de la curva.
- La imagen $\alpha(I)$ se denomina *traza* de la curva.
- Este curso estudiaremos únicamente curvas en el plano y en el espacio.

Ejemplo 1.1.2. -

1. No hay que identificar la curva (una aplicación) con su traza (un subconjunto del plano o el espacio). Las dos curvas

$$\alpha(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t) \quad y \quad \beta(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t),$$

son diferentes y, sin embargo tienen la misma traza (la circunferencia unidad).

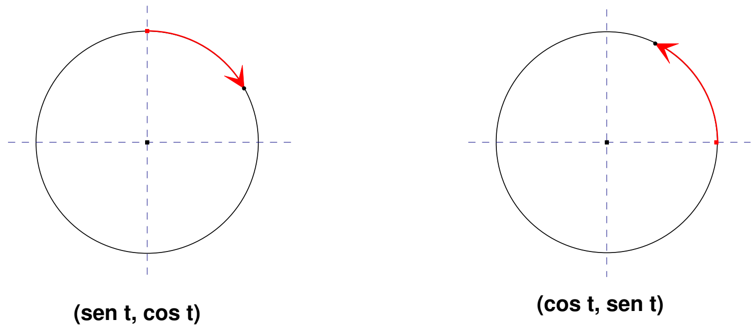

Figura 1.1: Dos curvas con una misma traza.

2. La recta, en su conocida forma paramétrica,
$$\alpha(t) = (p_1 + tv_1, p_2 + tv_2, p_3 + tv_3)$$
3. Una curva no es necesariamente inyectiva, es decir, puede tener autointersecciones. Así, la curva parametrizada $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$

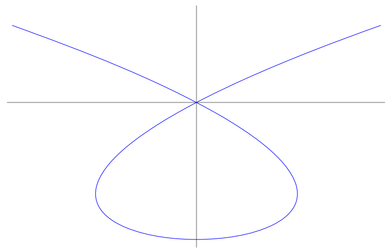

Figura 1.2: Un curva puede tener autointersecciones.

4. Una curva parametrizada no es, necesariamente diferenciable; por ejemplo $\alpha(t) = (t, |t|)$, ya que $|t|$ no es diferenciable en $t = 0$.

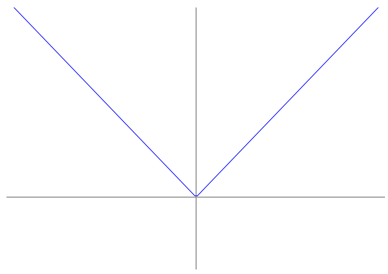

Figura 1.3: Un curva no es , necesariamente diferenciable.

5. Sin embargo hay curvas diferenciables, cuya traza tiene "picos "; por ejemplo $\alpha(t) = (t^3, t^2)$.

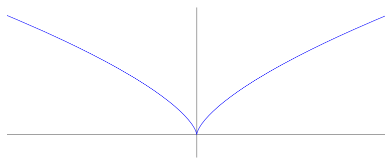

Figura 1.4: Curva diferenciable, con aspecto "engañoso".

Definición 1.1.3 (Vector tangente o vector velocidad). *Al vector $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ se le llama vector tangente a la curva α, para $t \in I$ o vector velocidad. La velocidad es $\|\alpha'(t)\|$.*

Llamaremos *recta tangente* a la curva α en el punto $\alpha(t)$ a la recta que pasa por dicho punto y tiene como vector director al vector tangente a la curva en tal punto. Observemos que si $\alpha'(t) = 0$ para algún $t \in I$, entonces no podemos calcular la recta tangente. A los puntos de la curva α cuyo vector tangente es cero, se les llama puntos singulares. En la curva del ejemplo (5) anterior, $\alpha(0)$ es un punto singular.

Definición 1.1.4 (Curva regular). *Una curva paramétrica diferenciable $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva regular si $\alpha'(t) \neq 0$ para cada $t \in I$.*

1.2. Reparametrizaciones. Longitud del arco

Ejemplo 1.2.1. Es fácil ver que las curvas parametrizadas siguientes tienen como traza la circunferencia de centro el origen y radio unidad:

$$\begin{aligned}\alpha(t) = &\quad (\cos t, \operatorname{sen} t), \quad t \in \mathbb{R}\\ \beta(t) = &\quad (cos(-t), \operatorname{sen}(-t)), \quad t \in \mathbb{R}\\ \gamma(t) = &\quad \left(\cos(t+\tfrac{\pi}{2}), \sin(t+\tfrac{\pi}{2})\right), \quad t \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Definición 1.2.2 (Reparametrización). *Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada diferenciable; y $g : J \longrightarrow I$ un difeomorfismo. Entonces la aplicación $\beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $\beta = \alpha \circ g$, es claramente una curva parametrizada diferenciable que se llama reparametrización de la curva α; la aplicación g recibe el nombre de cambio de parámetro.*

Ejercicio 1.2.3. -

1. ¿Cuáles son los cambios de parámetro en el ejemplo anterior? ¿Qué ocurre con la velocidad en cada uno de ellos?
2. Sea β es una reparametrización de una curva parametrizada diferenciable α.
   a) Demuestre que β es regular si, y sólo si α lo es.
   b) La rectas tangentes en cualquier punto coinciden.
3. Explique por qué $\delta(t) = (\cos(t^3), \operatorname{sen}(t^3))$ no es una reparametrización de $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in \mathbb{R}$.

1.2.1. Longitud del arco

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada diferenciable y un intervalo cerrado $[a, b] \subset I$. Consideremos una partición de dicho intervalo

$$P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\};$$

dicha partición determina una línea (curva) poligonal inscrita en la traza de α, cuya longitud no es otra cosa que

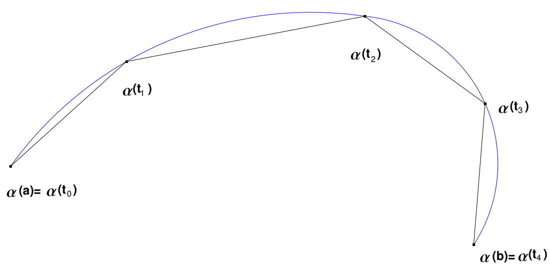

Figura 1.5: Una poligonal inscrita en la curva.

la suma de las longitudes de cada uno de los segmentos que la forman

$$L_a^b(P, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} \|\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})\|.$$

Llamaremos diámetro de una partición P a $|P| = \text{máx}\{t_k - t_{k-1} : t = 1, \ldots, n\}$.

Proposición 1.2.4. *Si $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva parametrizada diferenciable y $[a,b] \subset I$; entonces*

$$\lim_{|P|\to 0} L_a^b(\alpha, P) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Demostración. Veamos que para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|P| < \delta$, entonces

$$\left| L_a(\alpha, P) - \int_a \|\alpha'(t)\| dt \right| < \varepsilon$$

Si $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, entonces $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$

Por otra parte, por el teorema del valor medio aplicado a cada una de las funciones x, y, z, tenemos que para cada intervalo de la partición existen $a_k, b_k, c_k \in (t_{k-1}, t_k)$ tales que

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(a_k)(t_k - t_{k-1})$$

$$y(t_k) - y(t_{k-1}) = y'(b_k)(t_k - t_{k-1})$$

$$z(t_k) - z(t_{k-1}) = z'(c_k)(t_k - t_{k-1})$$

En definitiva tenemos

$$L_a^b(\alpha, P) = \sum_{k=1}^{n} \|\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})\| = \sum_{k=1}^{n} \|(x'(a_k), y'(b_k), z'(c_k))\|(t_k - t_{k-1})$$

Si ahora consideramos la integral y aplicamos el teorema del valor intermedio, existen $\xi_k \in (t_{k-1}, t_k)$, para cada $k = 1, \ldots, n$ tales que

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\alpha'(t)\| dt = \sum_{k=1}^{n} \|\alpha'(\xi_k)\|(t_k - t_{k-1}).$$

Entonces tenemos

$$L_a(\alpha, P) - \int_a \|\alpha'(t)\| dt = \sum_{k=1}^{n} \|(x'(a_k), y'(b_k), z'(c_k))\|(t_k - t_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} \|\alpha'(\xi_k)\|(t_k - t_{k-1}) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\|(x'(a_k), y'(b_k), z'(c_k))\| - \|x'(\xi_k), y'(\xi_k), z'(\xi_k))\| \right) (t_k - t_{k-1}). \tag{1.1}$$

Ahora podemos considerar la función $f(t_1, t_2, t_3) = \sqrt{(x'(t_1))^2 + (y'(t_2))^2 + (z'(t_3))^2}$, definida entre I^3 y $\mathbb{R}$ que, es claramente continua y por tanto, uniformemente continua en el compacto $[a,b]^3 \subset I^3$. Esto significa que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si

$$(t_1, t_2, t_3), (t'_1, t'_2, t'_3) \in [a,b]^3 \text{ y } |t_i - t'_i| < \delta \text{ para } i = 1,2,3, \text{ entonces}$$
$$\|f(t_1, t_2, t_3) - f(t'_1, t'_2, t'_3)\| < \frac{\varepsilon}{b-a} \tag{1.2}$$

.

Por tanto si tomamos una partición P tal que $|P| < \delta$, dado que $a_k, b_k, c_k, \xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$, se cumple la condición anterior 1.2.1 para los puntos (a_k, b_k, c_k) y (ξ_k, ξ_k, ξ_k); y teniendo en cuenta la igualdad 1.2.1 queda

$$\left| L_a^b(\alpha, P) - \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt \right| \leq \sum_{k=1}^{n} (\|f(a_k, b_k, c_k) - f(\xi_k, \xi_k, \xi_k)\|)(t_k - t_{k-1}) <$$

$$\frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) = \varepsilon.$$

□

Después de la proposición anterior podemos definir la longitud de un arco de curva del siguiente modo.

Definición 1.2.5 (Longitud del arco). *Dada una curva parametrizada diferenciable $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y un intervalo $[a, b] \subset I$, definimos la longitud del arco de curva $\alpha([a, b])$ como*

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

1.2.2. Curvas parametrizadas por la longitud del arco

Observación 1.2.6. *Se ve fácilmente que si $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$, entonces $L_a^t(\alpha) = t - a$, es decir la longitud del arco coincide con con la del segmento $[a, t]$; y recíprocamente, si ocurre esto último, entonces $\|\alpha'(t)\| = 1$. Además si $a = 0$, entonces $L_0^t(\alpha) = t$.*

Definición 1.2.7 (Curva parametrizada por la longitud del arco). *Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva parametrizada diferenciable, diremos que dicha curva está parametrizada por la longitud del arco si $\|\alpha'(t)\| = 1$.*

Proposición 1.2.8. *Toda curva $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada diferenciable y regular, se puede parametrizar por la longitud del arco.*

Demostración. Dado $t_0 \in I$, podemos definir la función $L : I :\longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$L(t) = L_{t_0}^t(\alpha) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(s)\| ds;$$

la función $\|\alpha'(s)\|$ es, en general, únicamente continua, luego la función L es derivable con $L'(t) = \|\alpha'(t)\|$; pero al ser α regular tenemos que L es de clase C^∞ y creciente, por tanto, si $J = L(I)$, $L : I \longrightarrow J$ es una biyección y su inversa $g : J \longrightarrow I$, es de clase C^∞, es decir, se trata de un difeomorfismo, con lo cual $\beta = \alpha \circ g$ es una reparamentrización de α.

Veamos que β es una parametrización por la longitud del arco. En efecto, observemos que $g(L(t)) = t$, luego si derivamos

$$g'(L(t))L'(t) = 1; \text{ y por tanto } g'(L(t)) = \frac{1}{L'(t)} = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|}$$

Entonces

$$\beta'(s) = \alpha'(g(s))g'(s) = \frac{\alpha'(g(s))}{\|\alpha'(g(s))\|}$$

de donde se deduce que $\|\beta'(s)\|$, con lo que ya lo tenemos. □

Ejemplo 1.2.9. .-

1. Sea $\alpha(\theta) = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)$, con $r > 0$, entonces $\alpha'(\theta) = (-r \operatorname{sen}\theta, r \cos\theta)$ y, por tanto $\|\alpha'(\theta)\| = r$. Entonces $L(t) = rt$, con lo que la inversa es $g(s) = \frac{s}{r}$. Entonces

   $$\beta(s) = \left(r \cos\frac{s}{r}, r \operatorname{sen}\frac{r}{s}\right)$$

   es una reparametrización por la longitud del arco.

2. Consideremos ahora la curva $\alpha(t) = (t, t^2)$, entonces $\alpha'(t) = (1, 2t)$ y por tanto $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1+4t^2}$. Entonces
$$L(t) = \int_0^t \sqrt{1+4s^2}ds = \frac{1}{4}\ln\left(2t + \sqrt{1+4t^2}\right) + \frac{1}{2}t\sqrt{1+4t^2},$$
pero no podemos despejar t con lo que no podemos encontrar explícitamente la reparametrización por la longitud del arco.

Aunque son muchos los casos en los que la parametrización por la longitud del arco no se puede encontrar, en nuestro estudio de las curvas supondremos, casi siempre, que las curvas vienen parametrizadas por la longitud del arco.

1.3. Ejercicios y problemas

1. La curva $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida como

$$\alpha(t) = \left(ae^{bt}\cos t, ae^{bt}\operatorname{sen} t\right) \quad \text{con} \quad a > 0, b < 0,$$

   se llama *espiral logarítmica* (una curva curiosa y con historia).

   a) Calcule la función longitud del arco, para $t_0 \in \mathbb{R}$, relativa a t_0.

   b) Reparametrice esta curva por la longitud del arco.

   c) Estudie su traza.

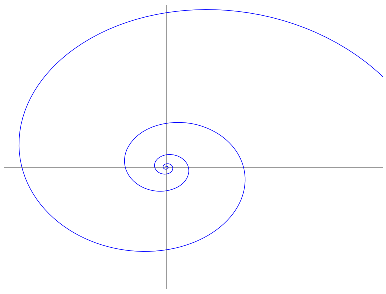

Figura 1.6: Espiral logarítmica.

2. Una curva cisoide es la generada por la suma de los vectores de posición de dos curvas fijas. La cisoide de Diocles es la curva generada por la diferencia entre el vector de posición de los puntos de una recta paralela al eje Y que pasa por el punto $(2a, 0)$ y el vector de posición de la circunferencia de radio a centrada en $(a, 0)$ como muestra la figura. Encuentre una parametrización de dicha curva.

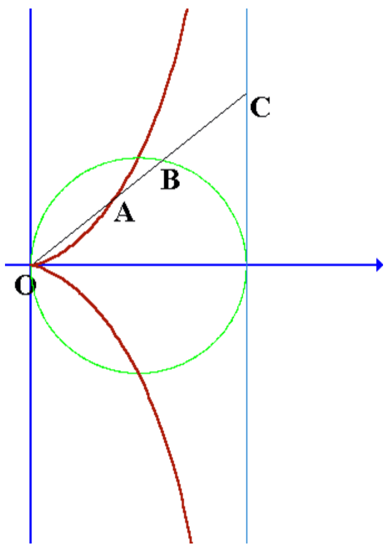

Figura 1.7: Cisoide de Diocles.

3. La epicicloide es la curva plana generada por el movimiento de un punto de una circunferencia que rueda, sin deslizamiento, sobre otra circunferencia.

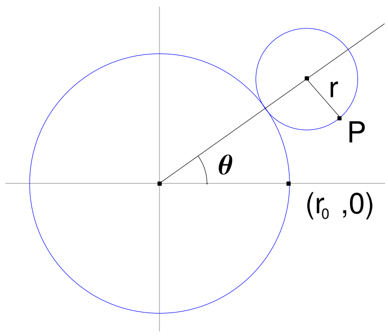

Figura 1.8: Epicicloide.

a) Determine una parametrización de la epicicloide generada por un punto P una circunferencia de radio r que que gira sobre una circunferencia de radio r_0 centrada en el origen, suponiendo que la posición inicial de P es $(r_0, 0)$.

b) Suponga que $r_0 = 3$ y $r = 1$. Encuentre los puntos singulares de la curva y represéntela gráficamente.

c) Idem para los casos $r_0 = r = 1$ y $r_0 = 1$ y $r = 2$.

4. La hipocicloide es la curva plana generada por el movimiento de un punto de una circunferencia que rueda, sin deslizamiento, por el interior de otra circunferencia.

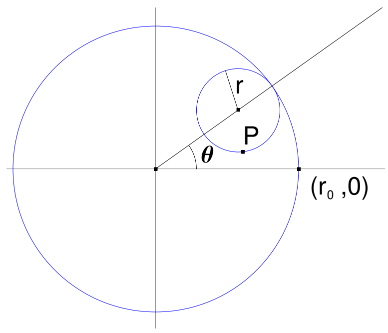

Figura 1.9: Hipocicloide.

a) Determine una parametrización de la epicicloide generada por un punto P una circunferencia de radio r que que gira sobre una circunferencia de radio r_0 centrada en el origen, suponiendo que la posición inicial de P es $(r_0, 0)$.

b) Suponga que $r_0 = 5$ y $r = 2$. Encuentre los puntos singulares de la curva y represéntela gráficamente.

5. Demuestre que la longitud de una curva parametrizada diferenciable es invariante por movimientos rígidos.

6. Sea $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *la espiral logarítmica* dada por $\alpha(t) = ae^{bt}(\cos(t), \operatorname{sen}(t))$, donde $a > 0$ y $b < 0$. Calcule la función longitud de arco de α. Reparametrice esta curva por la longitud de arco.

7. Si $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva parametrizada diferenciable y $[a, b]$. Demuestre que $\|\alpha(b) - \alpha(b)\| \leq L_a^b(\alpha)$ (Los segmentos de recta son las curvas de menor longitud, entre las que unen dos puntos)

8. Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada diferenciable.

a) Si α no pasa por el origen y $\alpha(t_0)$ es el punto de la traza de α más cercano al origen y $\alpha'(t_0) \neq 0$, demuestre que los vectores $\alpha(t_0)$ y $\alpha'(t_0)$ son ortogonales.

b) Si $\alpha''(t)$ es idénticamente nula, ¿que se puede decir sobre α?

c) Si $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Demuestre que $|\alpha(t)|$ es una constate no nula si, y sólo si $\alpha(t)$ y $\alpha'(t)$ son ortogonales para todo $t \in I$.

9. Un punto P de una circunferencia de radio r en el plano XY que rueda, sin deslizamiento sobre el eje X describe una cura que se llama cicloide.

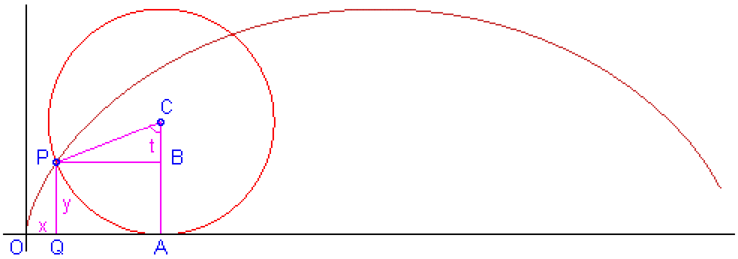

Figura 1.10: Cicloide.

a) Obtenga una parametrización para la cicloide suponiendo que la circunferencia de radio r parte de la posición en que su centro es el punto $(0, r)$ y que la posición de partida de P es el origen.

b) Cálcule la longitud de la cicloide correspondiente a una rotación completa de la circunferencia.

c) Parametrice la cicloide por la longitud del arco.

10. La curva de Gergome es la curva determinada por la intersección de dos cilindros perpendiculares. Sean los cilindros $x^2 + (z-1)^2 = 1$ y $y^2 + z^2 = 1$. Demuestre que $\alpha(t) = (\sqrt{2\cos t - \cos^2 t}, \operatorname{sen} t, \cos t)$, con $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ es una parametrización diferenciable, pero parcial de la curva de Gergome de los dos cilindros anteriores, tal que su traza contiene el punto $(1, 0, 1)$. Encuentre otra parametrización diferenciable tal que su traza contenga al punto $(0, 1, 0)$.