INF221 – Algoritmos y Complejidad

Clase #18 previa
Symbolic Method for Dummies

Horst H. von Brand

12 de octubre de 2016

La idea básica es usar funciones generatrices en forma sistemática en combinatoria. Lo que sigue es un condensado del apunte de Fundamentos de Informática [1, capítulo 21]. Ver también Lumbroso y Morcrette [2].

La idea es tener una *clase* de objetos, que anotaremos mediante letras caligráficas, como $\mathscr{A}$. La clase $\mathscr{A}$ consta de *objetos*, $\alpha \in \mathscr{A}$. Para el objeto α hay una noción de *tamaño*, que anotamos $|\alpha|$ (un número natural, generalmente el número de *átomos* que componen α). Al número de objetos de tamaño n lo anotaremos a_n. Usaremos $\mathscr{A}_n$ para referirnos al conjunto de objetos de la clase $\mathscr{A}$ de tamaño n, con lo que $a_n = |\mathscr{A}_n|$. Condición adicional es que el número de objetos de cada tamaño sea finito.

A las funciones generatrices ordinaria y exponencial correspondientes les llamaremos $A(z)$ y $\widehat{A}(z)$, respectivamente:

$$A(z) = \sum_{\alpha \in \mathscr{A}} z^{|\alpha|} = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$
$$\widehat{A}(z) = \sum_{\alpha \in \mathscr{A}} \frac{z^{|\alpha|}}{|\alpha|!} = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{z^n}{n!}$$

Nuestro siguiente objetivo es construir nuevas clases a partir de las que ya tenemos. Debe tenerse presente que como lo que nos interesa es contar el número de objetos de cada tamaño, basta construir objetos con distribución de tamaños adecuada (o sea, relacionados con lo que deseamos contar por una biyección). Comúnmente el tamaño de los objetos es el número de alguna clase de átomos que lo componen. Al combinar objetos para crear objetos mayores los tamaños simplemente se suman.

Las clases más elementales son $\varnothing$, la clase que no contiene objetos; $\mathscr{E} = \{\epsilon\}$, la clase que contiene únicamente el objeto vacío ϵ (de tamaño nulo); y la clase que comúnmente llamaremos $\mathscr{Z}$, conteniendo un único objeto de tamaño uno (que llamaremos ζ por consistencia). Luego definimos operaciones que combinan las clases $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ mediante *unión combinatoria* $\mathscr{A} + \mathscr{B}$, en que aparecen los α y los β con sus tamaños (los objetos individuales se "decoran" con su proveniencia, de forma que $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ no necesitan ser disjuntos; pero generalmente nos preocuparemos que $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ sean disjuntos, o podemos usar el principio de inclusión y exclusión para contar los conjuntos de interés). Ocasionalmente restaremos objetos de una clase, lo que debe interpretarse sin decoraciones (estamos dejando fuera ciertos elementos, simplemente). Usaremos *producto cartesiano* $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$, cuyos elementos son pares (α, β) y el tamaño del par es $|\alpha| + |\beta|$. Otras operaciones son formar *secuencias* de elementos de $\mathscr{A}$ (se anota $\textsc{Seq}(\mathscr{A})$), formar *conjuntos* $\textsc{Set}(\mathscr{A})$ y *multiconjuntos* $\textsc{MSet}(\mathscr{A})$ de elementos de $\mathscr{A}$.

Usaremos también la operación de *composición*, que anotaremos $\mathscr{A} \circ \mathscr{B}$, definida construyendo de cada objeto $\alpha \in \mathscr{A}$ un nuevo objeto substituyendo $|\alpha|$ elementos de $\mathscr{B}$ por sus átomos. Otra operación útil es *marcar* uno de los átomos de cada objeto, cosa que anotaremos $\mathscr{A}^\bullet$. De incluir objetos de tamaño cero en estas construcciones pueden crearse infinitos objetos de un tamaño dado, lo que no es una clase según nuestra definición. Por ello estas construcciones son aplicables sólo si $\mathscr{A}_0 = \varnothing$.

Es importante recalcar las relaciones y diferencias entre las estructuras. En una secuencia es central el orden de las piezas que la componen. Ejemplo son las palabras, interesa el orden exacto de las letras (y estas pueden repetirse). En un conjunto solo interesa si el elemento está presente o no, no hay orden. En un conjunto un elemento en particular está o no presente, a un multiconjunto puede pertenecer varias veces.

Hay dos grandes opciones: Objetos rotulados y no rotulados. Consideramos que el objeto es *rotulado* si sus átomos componentes tienen identidad, cosa que se representa rotulándolos de 1 a $|\alpha|$. Si los átomos son libremente intercambiables, son objetos *no rotulados*. Un punto que produce particular confusión es que tiene perfecto sentido hablar de secuencias de elementos sin rotular. La secuencia impone un orden, pero elementos iguales se consideran indistinguibles (en una palabra interesa el orden de las letras, pero al intercambiar dos letras iguales la palabra sigue siendo la misma).

Requieren tratamiento separado, y en algunos casos operaciones especializadas.

1. Objetos no rotulados

Nuestro primer teorema relaciona las funciones generatrices ordinarias respectivas para algunas de las operaciones entre clases definidas antes. Las funciones generatrices de las clases $\varnothing$, $\mathscr{E}$ y $\mathscr{Z}$ son, respectivamente, 0, 1 y z. En las derivaciones de las transferencias de ecuaciones simbólicas a ecuaciones para las funciones generatrices lo que nos interesa es contar los objetos entre manos, recurriremos a biyecciones para ello en algunos de los casos.

Teorema 1 (Método simbólico, OGF)**.** *Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ clases de objetos, con funciones generatrices ordinarias respectivamente $A(z)$ y $B(z)$. Entonces tenemos las siguientes funciones generatrices ordinarias:*

1. *Para enumerar $\mathscr{A} + \mathscr{B}$:*

$$A(z) + B(z)$$

2. *Para enumerar $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$:*

$$A(z) \cdot B(z)$$

3. *Para enumerar* $\textsc{Seq}(\mathscr{A})$*:*

$$\frac{1}{1 - A(z)}$$

4. *Para enumerar* $\textsc{Set}(\mathscr{A})$*:*

$$\prod_{\alpha \in \mathscr{A}} \left(1 + z^{|\alpha|}\right) = \prod_{n \geq 1} (1 + z^n)^{a_n} = \exp\left(\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} A(z^k)\right)$$

5. *Para enumerar* $\textsc{MSet}(\mathscr{A})$*:*

$$\prod_{\alpha \in \mathscr{A}} \frac{1}{1 - z^{|\alpha|}} = \prod_{n \geq 1} \frac{1}{(1 - z^n)^{a_n}} = \exp\left(\sum_{k \geq 1} \frac{A(z^k)}{k}\right)$$

6. *Para enumerar* $\textsc{Cyc}(\mathscr{A})$*:*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\phi(n)}{n} \ln \frac{1}{1 - A(z^n)}$$

Demostración. Usamos libremente resultados sobre funciones generatrices, ver [1, capítulo 14], en las demostraciones de cada caso. Usaremos casos ya demostrados en las demostraciones sucesivas.

1. Si hay a_n elementos de $\mathscr{A}$ de tamaño n y b_n elementos de $\mathscr{B}$ de tamaño n, habrán $a_n + b_n$ elementos de $\mathscr{A} + \mathscr{B}$ de tamaño n.

   Alternativamente, usando la notación de Iverson (ver [1, sección 1.4]):

$$\sum_{\gamma \in \mathscr{A} \cup \mathscr{B}} z^{|\gamma|} = \sum_{\gamma \in \mathscr{A} \cup \mathscr{B}} \left([\gamma \in \mathscr{A}] z^{|\gamma|} + [\gamma \in \mathscr{B}] z^{|\gamma|}\right) = \sum_{\alpha \in \mathscr{A}} z^{|\alpha|} + \sum_{\beta \in \mathscr{B}} z^{|\beta|} = A(z) + B(z)$$

2. Hay:

$$\sum_{0 \leq k \leq n} a_k b_{n-k}$$

maneras de combinar elementos de $\mathscr{A}$ con elementos de $\mathscr{B}$ cuyos tamaños sumen n, y este es precisamente el coeficiente de z^n en $A(z) \cdot B(z)$.

Alternativamente:

$$\sum_{\gamma \in \mathscr{A} \times \mathscr{B}} z^{|\gamma|} = \sum_{\substack{\alpha \in \mathscr{A} \\ \beta \in \mathscr{B}}} z^{|(\alpha,\beta)|} = \sum_{\substack{\alpha \in \mathscr{A} \\ \beta \in \mathscr{B}}} z^{|\alpha|+|\beta|} = \left(\sum_{\alpha \in \mathscr{A}} z^{|\alpha|} \right) \cdot \left(\sum_{\beta \in \mathscr{B}} z^{|\beta|} \right) = A(z) \cdot B(z)$$

3. Hay una manera de obtener la secuencia de largo 0 (aporta el objeto vacío ϵ), las secuencias de largo 1 son simplemente los elementos de $\mathscr{A}$, las secuencias de largo 2 son elementos de $\mathscr{A} \times \mathscr{A}$, y así sucesivamente. O sea, las secuencias se representan mediante:

$$\mathscr{E} + \mathscr{A} + \mathscr{A} \times \mathscr{A} + \mathscr{A} \times \mathscr{A} \times \mathscr{A} + \cdots$$

Por la segunda parte y la serie geométrica, la función generatriz correspondiente es:

$$1 + A(z) + A^2(z) + A^3(z) + \cdots = \frac{1}{1 - A(z)}$$

4. La clase de los subconjuntos finitos de $\mathscr{A}$ queda representada por el producto simbólico:

$$\prod_{\alpha \in \mathscr{A}} (\mathscr{E} + \{\alpha\})$$

ya que al distribuir los productos de todas las formas posibles aparecen todos los subconjuntos de $\mathscr{A}$. Directamente obtenemos entonces:

$$\prod_{\alpha \in \mathscr{A}} \left(1 + z^{|\alpha|}\right) = \prod_{n \geq 0} (1 + z^n)^{a_n}$$

Otra forma de verlo es que cada objeto de tamaño n aporta un factor $1 + z^n$, si hay a_n de estos el aporte total es $(1 + z^n)^{a_n}$. Esta es la primera parte de lo aseverado. Aplicando logaritmo:

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha \in \mathscr{A}} \ln\left(1 + z^{|\alpha|}\right) &= -\sum_{\alpha \in \mathscr{A}} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k z^{|\alpha| k}}{k} \\
&= -\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k} \sum_{\alpha \in \mathscr{A}} z^{|\alpha| k} \\
&= \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1} A(z^k)}{k}
\end{aligned}$$

Exponenciando lo último resulta equivalente a la segunda parte.

5. Podemos considerar un multiconjunto finito como la combinación de una secuencia para cada tipo de elemento:

$$\prod_{\alpha \in \mathscr{A}} \textsc{Seq}(\{\alpha\})$$

La función generatriz buscada es:

$$\prod_{\alpha \in \mathscr{A}} \frac{1}{1 - z^{|\alpha|}} = \prod_{n \geq 0} \frac{1}{(1 - z^n)^{a_n}}$$

Esto provee la primera parte. Nuevamente aplicamos logaritmo para simplificar:

$$\begin{aligned}
\ln \prod_{\alpha \in \mathscr{A}} \frac{1}{1 - z^{|\alpha|}} &= -\sum_{\alpha \in \mathscr{A}} \ln\left(1 - z^{|\alpha|}\right) \\
&= \sum_{\alpha \in \mathscr{A}} \sum_{k \geq 1} \frac{z^{k|\alpha|}}{k} \\
&= \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \sum_{\alpha \in \mathscr{A}} z^{k|\alpha|} \\
&= \sum_{k \geq 1} \frac{A(z^k)}{k}
\end{aligned}$$

6. Esta situación es más compleja de tratar, vea la discusión en [1, sección 21.2.3]. □

1.1. Algunas aplicaciones

La clase de los árboles binarios $\mathscr{B}$ es por definición es la unión disjunta del árbol vacío y la clase de tuplas de un nodo (la raíz) y dos árboles binarios. O sea:

$$\mathscr{B} = \mathscr{E} + \mathscr{Z} \times \mathscr{B} \times \mathscr{B}$$

de donde directamente obtenemos:

$$B(z) = 1 + zB^2(z)$$

Con el cambio de variable $u(z) = B(z) - 1$ queda:

$$u(z) = z(1 + u(z))^2$$

Es aplicable la fórmula de inversión de Lagrange [1, teorema 17.8] con $\phi(u) = (u+1)^2$ y $f(u) = u$:

$$\begin{aligned}
\left[z^n\right] u(z) &= \frac{1}{n} \left[u^{n-1}\right] \phi(u)^n \\
&= \frac{1}{n} \left[u^{n-1}\right] (u+1)^{2n} \\
&= \frac{1}{n} \left[u^{n-1}\right] \sum_{k \geq 0} \binom{2n}{k} u^k \\
&= \frac{1}{n} \binom{2n}{n-1} \\
&= \frac{1}{n} \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} \\
&= \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \\
&= \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

Tenemos, como $u(z) = B(z) - 1$ y sabemos que $b_0 = 1$:

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} \dbinom{2n}{n} & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Casualmente la expresión simplificada para $n \geq 1$ da el valor correcto $b_0 = 1$. Estos son los números de Catalan, es $b_n = C_n$.

Sea ahora $\mathscr{A}$ la clase de *árboles con raíz ordenados*, formados por un nodo raíz conectado a las raíces de una secuencia de árboles ordenados. La idea es que la raíz tiene hijos en un cierto orden. Simbólicamente:

$$\mathscr{A} = \mathscr{Z} \times \textsc{Seq}(\mathscr{A})$$

El método simbólico entrega directamente la ecuación:

$$A(z) = \frac{z}{1 - A(z)}$$

Nuevamente es aplicable la fórmula de inversión de Lagrange, con $\phi(A) = (1-A)^{-1}$ y $f(A) = A$:

$$\begin{aligned}
\left[z^n\right] A(z) &= \frac{1}{n} \left[A^{n-1}\right] \phi(A)^n \\
&= \frac{1}{n} \left[A^{n-1}\right] (1-A)^{-n} \\
&= \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} \\
&= C_{n-1}
\end{aligned}$$

Otra vez números de Catalan.

La manera obvia de representar $\mathbb{N}_0$ es por secuencias de marcas, como |||| para 4; simbólicamente $\mathbb{N}_0 = \textsc{Seq}(\mathcal{Z})$. Para calcular el número de multiconjuntos de k elementos tomados entre n, un multiconjunto queda representado por las cuentas de los n elementos de que se compone, y eso corresponde a:

$$\mathbb{N}_0 \times \cdots \times \mathbb{N}_0 = (\textsc{Seq}(\mathcal{Z}))^n$$

Para obtener el número que nos interesa:

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left[z^k\right](1-z)^{-n} = (-1)^n \binom{-n}{k} = \binom{n+k-1}{n}$$

Una *combinación* de n es expresarlo como una suma. Por ejemplo, hay 8 combinaciones de 4:

$$4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+3 = 1+2+1 = 1+1+2 = 1+1+1+1$$

Llamemos $c(n)$ al número de combinaciones de n. Con la misma idea anterior, $\mathbf{N} = \mathcal{Z} \times \textsc{Seq}(\mathcal{Z})$, que da:

$$N(z) = \frac{z}{1-z}$$

A su vez, una combinación no es más que una secuencia de naturales:

$$\mathcal{C} = \textsc{Seq}(\mathbb{N})$$

Directamente resulta:

$$\begin{aligned}
C(z) &= \sum_{n \ge 0} c(n) z^n \\
&= \frac{1}{1 - N(z)} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-2z} \\
c(n) &= \frac{1}{2}\,[n=0] + \frac{1}{2} \cdot 2^n \\
&= \frac{1}{2}\,[n=0] + 2^{n-1}
\end{aligned}$$

Esto es consistente con $c(4) = 8$ obtenido arriba.

2. Objetos rotulados

En la discusión previa solo interesaba el tamaño de los objetos, no su disposición particular. Consideraremos ahora objetos rotulados, donde importa cómo se compone el objeto de sus partes (los átomos están numerados, o se ubican en orden).

El objeto más simple con partes rotuladas son las permutaciones (biyecciones $\sigma \colon [n] \to [n]$, podemos considerarlas secuencias de átomos numerados). Para la función generatriz exponencial tenemos, ya que hay $n!$ permutaciones de n elementos:

$$\sum_\sigma \frac{z^{|\sigma|}}{|\sigma|!} = \sum_{n \ge 0} n! \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{1-z}$$

Lo siguiente más simple de considerar es colecciones de ciclos rotulados. Por ejemplo, escribimos $(1\ 3\ 2)$ para el objeto en que viene 3 luego de 1, 2 sigue a 3, y a su vez 1 sigue a 2. Así $(2\ 1\ 3)$ es solo otra forma de anotar el ciclo anterior, que no es lo mismo que $(3\ 1\ 2)$. Interesa definir formas consistentes de combinar objetos rotulados. Por ejemplo, al combinar el ciclo $(1\ 2)$ con el ciclo $(1\ 3\ 2)$ resultará un objeto con 5 rótulos, y debemos ver cómo los distribuimos entre las partes. El cuadro 1 reseña las posibilidades al respetar el orden de los elementos asignados a cada parte. Es claro que lo que estamos haciendo es elegir un subconjunto de 2 rótulos de entre los 5 para asignárselos al primer ciclo. El combinar dos clases de objetos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de esta forma lo anotaremos $\mathcal{A} \star \mathcal{B}$. Otra operación

(1 2)(3 5 4)	(2 3)(1 5 4)	(3 4)(1 5 2)	(4 5)(1 3 2)
(1 3)(2 5 4)	(2 4)(1 3 5)	(3 5)(1 4 2)	
(1 4)(2 5 3)	(2 5)(1 3 4)		
(1 5)(2 4 3)			

Cuadro 1: Combinando los ciclos (1 2) y (1 3 2)

común es la *composición*, anotada $\mathscr{A} \circ \mathscr{B}$. La idea es elegir un elemento $\alpha \in \mathscr{A}$, luego elegir $|\alpha|$ elementos de $\mathscr{B}$, y reemplazar los $\mathscr{B}$ por las partes de α, en el orden que están rotuladas; para finalmente asignar rótulos a los átomos que conforman la.estructura completa respetando el orden de los rótulos al interior de los $\mathscr{B}$. Ocasionalmente es útil *marcar* uno de los componentes del objeto, operación que anotaremos $\mathscr{A}^{\bullet}$. Otra notación común para esta operación es $\Theta\mathscr{A}$. Usaremos también la construcción $\mathrm{MS{\small ET}}(\mathscr{A})$, que podemos considerar como una secuencia de elementos numerados obviando el orden. Cuidado, muchos textos le llaman $\mathrm{S{\small ET}}()$ a esta operación.

Tenemos el siguiente teorema:

Teorema 2 (Método simbólico, EGF)**.** *Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ clases de objetos, con funciones generatrices exponenciales $\widehat{A}(z)$ y $\widehat{B}(z)$, respectivamente. Entonces tenemos las siguientes funciones generatrices exponenciales:*

1. *Para enumerar $\mathscr{A}^{\bullet}$:*
$$z\mathrm{D}\widehat{A}(z)$$
2. *Para enumerar $\mathscr{A} + \mathscr{B}$:*
$$\widehat{A}(z) + \widehat{B}(z)$$
3. *Para enumerar $\mathscr{A} \star \mathscr{B}$:*
$$\widehat{A}(z) \cdot \widehat{B}(z)$$
4. *Para enumerar $\mathscr{A} \circ \mathscr{B}$:*
$$\widehat{A}(\widehat{B}(z))$$
5. *Para enumerar $\mathrm{S{\small EQ}}(\mathscr{A})$:*
$$\frac{1}{1 - \widehat{A}(z)}$$
6. *Para enumerar $\mathrm{MS{\small ET}}(\mathscr{A})$:*
$$\mathrm{e}^{\widehat{A}(z)}$$
7. *Para enumerar $\mathrm{C{\small YC}}(\mathscr{A})$:*
$$-\ln(1 - \widehat{A}(z))$$

Demostración. Usaremos casos ya demostrados en las demostraciones sucesivas.

1. El objeto $\alpha \in \mathscr{A}$ da lugar a $|\alpha|$ objetos al marcar cada uno de sus átomos, lo que da la función generatriz exponencial:
$$\sum_{\alpha \in \mathscr{A}} |\alpha| \frac{z^{|\alpha|}}{|\alpha|!}$$
Esto es lo indicado.
2. Nuevamente trivial.

3. El número de objetos γ que se obtienen al combinar $\alpha \in \mathscr{A}$ con $\beta \in \mathscr{B}$ es:

$$\binom{|\alpha| + |\beta|}{|\alpha|}$$

y tenemos la función generatriz exponencial:

$$\sum_{\gamma \in \mathscr{A} \star \mathscr{B}} \frac{z^{|\gamma|}}{|\gamma|!} = \sum_{\substack{\alpha \in \mathscr{A} \\ \beta \in \mathscr{B}}} \binom{|\alpha| + |\beta|}{|\alpha|} \frac{z^{|\alpha| + |\beta|}}{(|\alpha| + |\beta|)!} = \left(\sum_{\alpha \in \mathscr{A}} \frac{z^{|\alpha|}}{|\alpha|!} \right) \cdot \left(\sum_{\beta \in \mathscr{B}} \frac{z^{|\beta|}}{|\beta|!} \right) = \widehat{A}(z) \cdot \widehat{B}(z)$$

4. Tomemos $\alpha \in \mathscr{A}$, de tamaño $n = |\alpha|$, y n elementos de $\mathscr{B}$ en orden a ser reemplazados por las partes de α. Esa secuencia de $\mathscr{B}$ es representada por:

$$\mathscr{B} \star \mathscr{B} \star \cdots \star \mathscr{B}$$

con función generatriz exponencial:

$$\widehat{B}^n(z)$$

Sumando sobre las contribuciones:

$$\sum_{\alpha \in \mathscr{A}} \frac{\widehat{B}^{|\alpha|}(z)}{|\alpha|!}$$

Esto es lo prometido.

5. Primeramente, para $\textsc{Seq}(\mathscr{Z})$, como hay $n!$ secuencias de largo n:

$$\sum_{n \geq 0} n! \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{1 - z}$$

Aplicando composición se obtiene lo indicado.

6. Hay un único multiconjunto de n elementos rotulados (se rotulan simplemente de 1 a n), con lo que $\textsc{MSet}(\mathscr{Z})$ corresponde a:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} = \exp(z)$$

Al aplicar composición resulta lo anunciado.

Otra demostración es considerar el multiconjunto de $\mathscr{A}$, descrito por $\mathscr{M} = \textsc{MSet}(\mathscr{A})$. Si marcamos uno de los átomos de $\mathscr{M}$ estamos marcando uno de los $\mathscr{A}$, el resto sigue formando un multiconjunto de $\mathscr{A}$:

$$\mathscr{M}^\bullet = \mathscr{A}^\bullet \star \mathscr{M}$$

Por lo anterior:

$$z\widehat{M}'(z) = z\widehat{A}'(z)\widehat{M}(z)$$

Hay un único multiconjunto de tamaño 0, o sea $\widehat{M}(0) = 1$; y hemos impuesto la condición que no hay objetos de tamaño 0 en $\mathscr{A}$, vale decir, $\widehat{A}(0) = 0$. Así la solución a la ecuación diferencial es:

$$\widehat{M}(z) = \exp(\widehat{A}(z))$$

7. Consideremos un ciclo de $\mathscr{A}$, o sea $\mathscr{C} = \textsc{Cyc}(\mathscr{A})$. Si marcamos los $\mathscr{C}$, estamos marcando uno de los $\mathscr{A}$, y el resto es una secuencia:

$$\mathscr{C}^\bullet = \mathscr{A}^\bullet \star \textsc{Seq}(\mathscr{A})$$

Esto se traduce en la ecuación diferencial:

$$z\widehat{C}'(z) = z\widehat{A}'(z)\frac{1}{1-\widehat{A}(z)}$$

Integrando bajo el entendido $\widehat{C}(0) = 0$ con $\widehat{A}(0) = 0$ se obtiene lo indicado.

Alternativamente, hay $(n-1)!$ ciclos de n elementos, con lo que para $\textsc{Cyc}(\mathcal{Z})$ obtenemos:

$$\sum_{n\geq 1}(n-1)!\frac{z^n}{n!} = \sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n} = -\ln\frac{1}{1-z}$$

Aplicar composición completa la demostración.

□

2.1. Algunas aplicaciones

Un ejemplo simple es el caso de permutaciones, que son simplemente secuencias de elementos rotulados:

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \textsc{Seq}(\mathcal{Z})\\ \widehat{P}(z) &= \frac{1}{1-z}\\ p_n &= n![z^n]\widehat{P}(z)\\ &= n!\end{aligned}$$

Consideremos colecciones de ciclos:

$$\textsc{MSet}(\textsc{Cyc}(\mathcal{Z}))$$

Vemos que esto corresponde a:

$$\exp\left(\ln\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{1-z}$$

Hay tantas permutaciones de tamaño n como colecciones de ciclos. Podemos representar permutaciones como los ciclos que parten en cada elemento.

Podemos describir permutaciones como un conjunto de elementos que quedan fijos combinado con otros elementos que están fuera de orden (un desarreglo, clase $\mathcal{D}$). O sea:

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \mathcal{D}\star\textsc{MSet}(\mathcal{Z})\\ \frac{1}{1-z} &= \widehat{D}(z)\mathrm{e}^z\\ \widehat{D}(z) &= \frac{\mathrm{e}^{-z}}{1-z}\end{aligned}$$

De acá, por propiedades de las funciones generatrices vemos que:

$$[z^n]\widehat{D}(z) = \sum_{0\leq k\leq n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

y tenemos, usando la notación común para el número de desarreglos de tamaño n:

$$D_n = n!\sum_{0\leq k\leq n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

Una *involución* es una permutación π tal que $\pi\circ\pi$ es la identidad. Es claro que una involución es una colección de ciclos de largos 1 y 2, o sea:

$$\mathcal{I} = \textsc{MSet}(\textsc{Cyc}_{\leq 2}(\mathcal{Z}))$$

Revisando la derivación, vemos que $\textsc{Cyc}_{\leq 2}(\mathcal{Z})$ corresponde a:

$$\frac{z}{1} + \frac{z^2}{2}$$

y tenemos para la función generatriz:

$$\widehat{I}(z) = \exp\left(\frac{z}{1} + \frac{z^2}{2}\right)$$

Un paquete de álgebra simbólica da:

$$\widehat{I}(z) = 1 + 1 \cdot \frac{z}{1!} + 2 \cdot \frac{z^2}{2!} + 4 \cdot \frac{z^3}{3!} + 10 \cdot \frac{z^4}{4!} + 26 \cdot \frac{z^5}{5!} + 76 \cdot \frac{z^6}{6!} + 232 \cdot \frac{z^7}{7!} + 764 \cdot \frac{z^8}{8!} + 2620 \cdot \frac{z^9}{9!} + 9496 \cdot \frac{z^{10}}{10!} + \cdots$$

Referencias

[1] Horst H. von Brand: *Fundamentos de Informática*. git://csrg.inf.utfsm.cl/vonbrand/Ramos/trainwreck, Agosto 2016. versión 0.83.

[2] Jérémie Lumbroso and Basile Morcrette: *A gentle introduction to analytic combinatorics*. http://www.sfu.ca/~jlumbros/Events/Oxford12/stuff/draft-v7.pdf, September 2012.