Curvas de Nivel, Límites y Continuidad

Problemas Propuestos

1. Determinar el dominio y dibujar las curvas de nivel de las siguientes funciones.

   a) $\sqrt{4-x^2-y^2}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$ c) $\arcsin(x+y)$

   d) $\dfrac{-4x}{x^2+y^2+1}$ e) $\dfrac{2x}{x^2+y^2}$ f) $\dfrac{x+y}{x-y}$

   g) $e^{x/y}$ h) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ i) $\min\{|x+2|,|1+y|,x+y\}$

2. Calcule los siguientes límites, en caso de que existan.

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2-y^2}{x^2+2y^2}$

   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|\operatorname{sen}x\cdot\operatorname{sen}y|}{|x|+|y|}$

   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}$

   (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x|+|y|}{\operatorname{sen}(|x|+|y|)}$

   (e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x+y}\right)}{x^2+|x|+2}$

   (f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{xy}-1}{x^2+y^2}$

   (g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2\operatorname{sen}\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{x^2+y^2}$

   (h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\operatorname{sen}(xy^3)}{x^2+y^6}$

   (i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}$

   (j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy\operatorname{sen}\left(y^3\right)}{x^4+y^4}$

   (k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^2}{|x|+|y|}$

   (l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

3. Considere la función $g:\mathbb{R}^2\setminus\{(0;0)\}\to\mathbb{R}$ definida mediante
$$g(x,y)=\frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$
   Verifique que para una función $f(x,y)$ positiva tal que $f(x,y)\leq e^{x^2+y^2}$ en todo $\mathbb{R}^2$ el siguiente límite existe
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}[1+f(x,y)g(x,y)],$$
   y determine su valor.

4. Considere la función $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4+\operatorname{sen}(y^4)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

   Determine si f es continua en $(0,0)$.

5. Considere la función
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
   Estudie la continuidad de f en el origen.

6. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ donde,
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| > x\} \quad \text{y} \quad f(x,y) = \frac{xy}{|x|+|y|}$$
   (a) Analice: $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$ y $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$
   (b) Demostrar que: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

7. Sea $f : \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}$, definida por
$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{x|\operatorname{sen}(\sqrt{xy})|}{x^3+y}}, & \text{si } (x,y) \in \mathrm{Dom}(f) \setminus (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
   Determine y dibuje el conjunto $\mathrm{Dom}(f)$ y determine si f es continua en $(0,0)$.

8. Determine para cuales valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ existe el siguiente límite:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^\alpha y}{x^2+y^2}$$

9. Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^a\,|y|^b}{x^2+xy+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$
   Determine condiciones para los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que la función f sea continua en todo $\mathbb{R}^2$.

10. Determine todos los puntos en el plano donde las siguientes funciones son continuas:
   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{(1+4x)(1+6y)}-1}{2x+3y} & \text{si} \quad 2x+3y \neq 0, \\ 0, & \text{si} \quad 2x+3y = 0. \end{cases}$
   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{si} \quad |x| > y^2, \\ 0, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$
   (c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy-x}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,1), \\ 0, & \text{si} \quad (x,y) = (0,1). \end{cases}$

Problemas Resueltos

1. Determinar el dominio y dibujar las curvas de nivel de las siguiente función
$$f(x,y) = (x+y+1)(x^2-y^2)$$
   Solución. Notamos que f no presenta ningún problema de indefinición y luego su dominio es $\mathbb{R}^2$. Para determinar las curvas de nivel, notamos que la función puede escribirse como
$$f(x,y) = (x+y+1)(x^2-y^2) = (x+y+1)(x+y)(x-y),$$
   lo que nos lleva a hacer el cambio de variables (rotación de ejes en 45°) dada por $u = x+y$ y $v = x-y$. De esta forma, la función luce como
$$f(u,v) = (u+1)uv,$$
   que nos permite estudiar las curvas de nivel $f = k \in \mathbb{R}$ de una forma sencilla. Veamos las distintas posibilidades

$k = 0$ Esto implica que o bien $u = 0$ ó $u = -1$ ó $v = 0$.

$k > 0$ Esto implica que $v = \dfrac{k}{u(u+1)}$.

$k < 0$ Esto implica que $v = -\dfrac{k}{u(u+1)}$.

Notemos que el último caso es una reflexión del segundo caso. Presentamos las curvas de niver en la siguiente figura en el plano uv. Se deja como ejercicio efectuar la rotación de ejes.

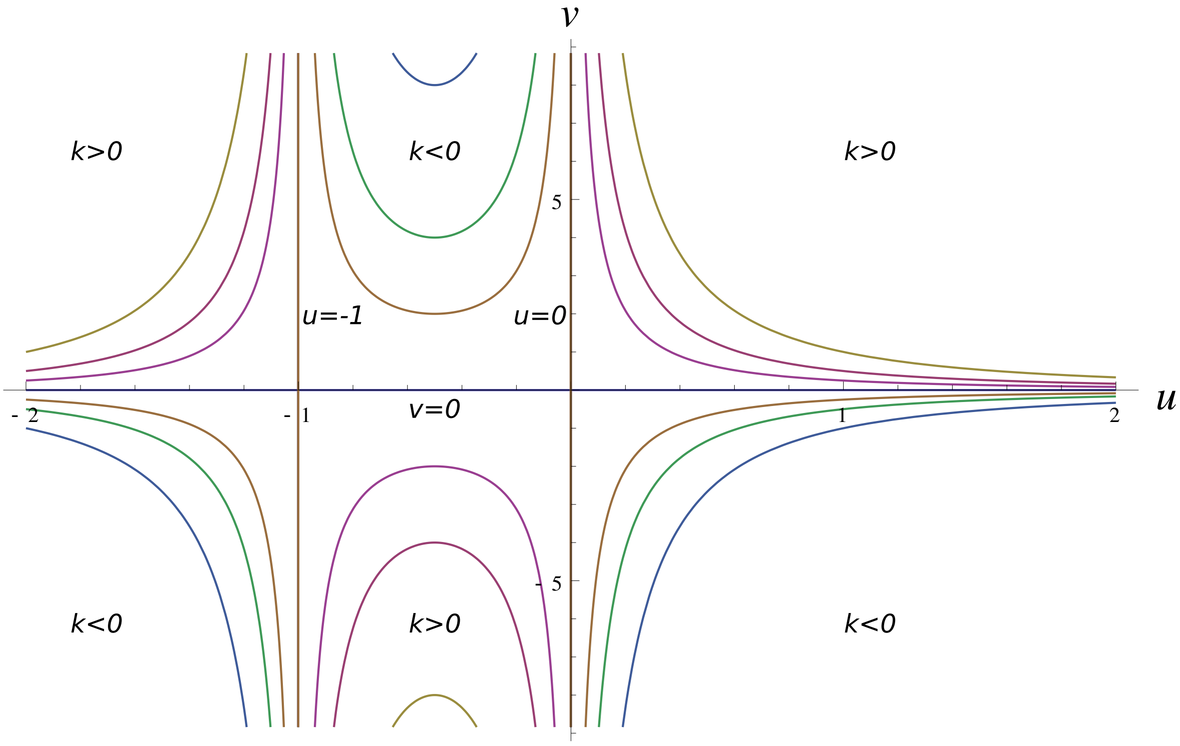


Figura 1: Curvas de nivel en plano uv. Note como las rectas verticales $u = 0, u = -1$ y horizontal $v = 0$ separan los comportamientos de las distintas curvas. Además, curvas de nivel en plano xy se obtienen de rotar en 45° la figura (invierta transformación lineal).

2. Sea $z = f(x, y)$ la función dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2y^2)}{4x^2+9y^2} + 6, & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \\ 6, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Pruebe que f es continua en el origen.
Solución. Utilizamos acotamiento, pues

$$0 \leq \left| \frac{\operatorname{sen}(x^2y^2)}{4x^2+9y^2} + 6 - 6 \right| \leq \frac{|xy|^2}{x^2+y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2} = x^2 + y^2,$$

que tiende a cero si $(x, y) \to (0, 0)$. Por lo tanto f es continua en $(0, 0)$.

3. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

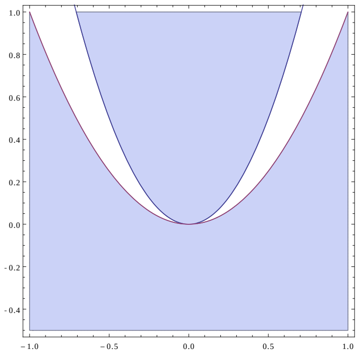
$$f(x,y) = \begin{cases} |x| & \text{si } x^2 < y < 2x^2 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

(a) Determine y realice un esbozo de los conjuntos de nivel de f.

(b) Analizar la continuidad de f en el origen.

Solución.

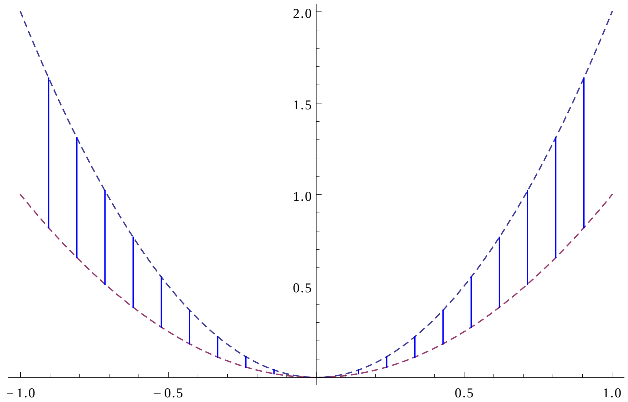
(a) El conjunto de nivel c de f es la gráfica del conjunto solución de la ecuación $f(x,y)=c$.
Si $c<0$ el conjunto de nivel c es vacío.
Si $c=0$ el conjunto de nivel $c=0$ de f es $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|f(x,y)=0\}=\{(x,y)\in R^2|y\leq x^2 \text{ ó } y\geq 2x^2\}$.
Un esbozo se presenta en la figura (área sombreada)



Si $c>0$ el conjunto de nivel c de f es

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:f(x,y)=c\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:|x|=c,x^2<y<2x^2\} = \{(c,y)\in\mathbb{R}^2:c^2<y<2c^2\}\cup\{(-c,y)\in\mathbb{R}^2:c^2<y<2c^2\}.$$

Se esbozan conjuntos de nivel en la figura:



(b) Se tiene que $0\leq|f(x,y)-f(0,0)|=|f(x,y)|\leq|x|$, para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|x|=0$, se deduce que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$ y por lo tanto f es continua en $(0,0)$.