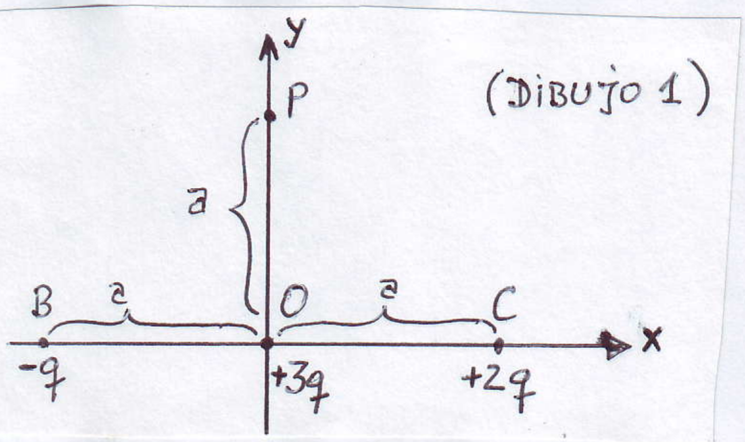
CERTAMEN 1 FIS-120 2.SEM.2004, UTFSM, 27 DE AGOSTO DE 2004

NOMBRE, APELLIDO:

ROL:

Hay 16+2=18 preguntas. 16 respuestas correctas y justificadas representan 100 puntos (nota de 100).
Respuesta correcta y no justificada: -4 puntos
Respuesta correcta y justificada: 100/16 = 6.25 puntos
Respuesta omitida: 1 punto.
Respuesta incorrecta: 0 puntos.
Duración: 120 minutos
REVISE PRIMERO TODOS LOS PROBLEMAS Y RESUELVE PRIMERO LOS QUE LE PARECEN MAS FACILES.

PROBLEMAS 1-6 SE REFIEREN AL DIBUJO 1
Cargas eléctricas $3q$, $-q$, y $2q$ están situadas en los puntos O, B, y C señalados en el dibujo ($q > 0$).



1.) ¿Cuál es la fuerza eléctrica $\vec{F}_{(\to C)}$ sobre la carga $2q$ en punto C?

(a) $-\hat{x}\ 6k(q^2/a^2)$ $(k = 1/(4\pi\epsilon_0))$
(b) $\hat{x}\ 6k(q^2/a^2)$
(c) $\hat{x}\ (11/2)k(q^2/a^2)$
(d) $-\hat{x}\ (11/2)k(q^2/a^2)$
(e) $-\hat{x}\ (1/2)k(q^2/a^2)$

$$\vec{F}_{(\to C)} = \hat{x}\cdot k\cdot\left(\frac{6q^2}{a^2} - \frac{2q^2}{(2a)^2}\right) = \hat{x}\cdot k\cdot\frac{q^2}{a^2}\left(6-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{(\to C)} = \hat{x}\cdot\left(\frac{11}{2}\right)k\cdot\frac{q^2}{a^2}}$$

2.) ¿Cuál es el trabajo que debe realizar Ud. para traer cada una de la tres cargas desde el infinito (donde están en reposo) a las posiciones indicadas en el dibujo (donde también están en reposo)? (Si quiere, traslade las cargas en forma secuencial.)
[Sugerencia: El trabajo mencionado y la energía potencial (del conjunto de las cargas) están relacionados.]

(a) $2k(q^2/a)$
(b) $6k(q^2/a)$
(c) $-3k(q^2/a)$
(d) $-3k(q^2/a)$
(e) ninguno de los anteriores

$$W = U_{O\text{-}B\text{-}C} = k\cdot\left(\frac{3q\cdot 2q}{a} + \frac{2q\cdot(-q)}{2a} + \frac{3q\cdot(-q)}{a}\right)$$

$$= k\cdot\frac{q^2}{a}(6-1-3)$$

$$\Rightarrow \boxed{W = 2k\cdot\frac{q^2}{a^2}}$$

3.) ¿Cuál es el vector campo eléctrico $\vec{E}(P)$ en el punto P señalado en el dibujo $[\vec{OP} = (0, a)]$?

(a) $k(q/a^2)(-\frac{3}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}} + 3)$
(b) $k(q/a^2)(-\frac{3}{2\sqrt{2}}, +\frac{1}{2\sqrt{2}} + 3)$
(c) $k(q/a^2)(-\sqrt{2}, 3 - \sqrt{2})$
(d) $k(q/a^2)(+\frac{3}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} + 3)$
(e) ninguno de los anteriores

$\vec{E}(P) = \vec{E}_{(C\to P)} + \vec{E}_{(O\to P)} + \vec{E}_{(B\to P)}$;

$\vec{E}_{(O\to P)} = +\hat{y}\cdot k\cdot \frac{3q}{a^2} = k\cdot\frac{q}{a^2}\cdot(0,3)$

$\vec{E}_{(C\to P)} = k\cdot\frac{2q}{(a\cdot\sqrt{2})^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = k\cdot\frac{q}{a^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\vec{E}_{(B\to P)} = k\cdot\frac{q}{(a\sqrt{2})^2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = k\cdot\frac{q}{a^2}\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(P) = k\cdot\frac{q}{a^2}\left(-\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}+3\right)}$

4.) ¿Cuál es el potencial eléctrico $V(P)$ en el punto P arriba mencionado?
(Se toma la convención usual: V = 0 para $|\vec{r}| = \infty$)

(a) $4k(q/a)$
(b) $5k(q/a)$
(c) $(3 - \frac{1}{\sqrt{2}})k(q/a)$
(d) $(3 - \sqrt{2})k(q/a)$
(e) $(3 + \frac{1}{\sqrt{2}})k(q/a)$

$V(P) = k\cdot\left(+\frac{2q}{a\sqrt{2}} + \frac{3q}{a} - \frac{q}{a\cdot\sqrt{2}}\right) = \boxed{k\,\frac{q}{a}\left(3+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$

5.) ¿Cuál es el valor W del trabajo que Ud. debe realizar para traer una carga $4q$ desde el infinito hasta el punto P? La carga $4q$ está inicialmente en reposo y finalmente también en reposo. Las otras tres cargas (en los puntos O, B y C) están fijas.
[Sugerencia: utilice la respuesta a la pregunta anterior.]

(a) $20k(q^2/a)$
(b) $-16k(q^2/a)$
(c) $4(3 + \frac{1}{\sqrt{2}})k(q^2/a)$
(d) $4(3 - \frac{1}{\sqrt{2}})k(q^2/a)$
(e) $4(3 - \sqrt{2})k(q^2/a)$

$W = U_f - U_i = 4q\cdot V(P) - 4q\cdot \underset{0}{V(\infty)} = 4q\cdot V(P)$

$\Rightarrow$ por 4.) : $\boxed{W = 4k\cdot\frac{q^2}{a}\left(3+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$

6.) ¿Cuál es el valor W del trabajo que Ud. debe realizar para trasladar una partícula de carga eléctrica $4q$ y masa m desde el punto P' $[\vec{OP'} = (0, 2a)]$ hasta el punto P $[\vec{OP} = (0, a)]$, si esta carga tiene inicialmente en el punto inicial P' velocidad $\vec{v}_0$ y en el punto final P está en reposo? Las otras tres cargas (en los puntos O, B y C) están fijas.

(a) $4\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)k(q^2/a) - \frac{1}{2}m|\vec{v}_0|^2$
(b) $6k(q^2/a) + \frac{1}{2}m|\vec{v}_0|^2$
(c) $4\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)k(q^2/a) - \frac{1}{2}m|\vec{v}_0|^2$
(d) $4\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)k(q^2/a) + \frac{1}{2}m|\vec{v}_0|^2$
(e) depende de la dirección de la velocidad $\vec{v}_0$

$W^{(4q)}_{(P'\to P)} = \left(\underset{0}{K(P)} + U(P)\right) - \left(\underbrace{K(P')}_{\frac{1}{2}m\vec{v}_0^{\,2}} + U(P')\right)$

inicial P', final P

$U(P) = 4q\cdot V(P) = 4\cdot\left(3+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)k\cdot\frac{q^2}{a}$ (por 4.) & 5.))

$U(P') = 4q\cdot V(P') = 4q\cdot k\cdot\left(\frac{2q}{(a\sqrt{5})} + \frac{3q}{(2a)} - \frac{q}{(a\cdot\sqrt{5})}\right)$

$\Rightarrow U(P') = k\cdot\frac{q^2}{a}\cdot 4\cdot\left(+\frac{3}{2}+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

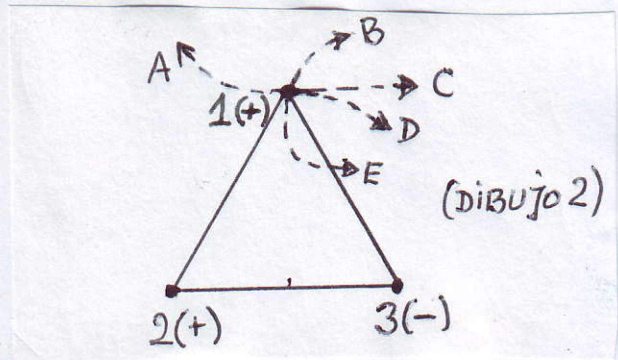
$\Rightarrow W^{(4q)}_{(P'\to P)} = -\frac{1}{2}m\vec{v}_0^{\,2} + k\cdot\frac{q^2}{a}\cdot 4\left[\left(3+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{3}{2}+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right] = \boxed{-\frac{1}{2}m\vec{v}_0^{\,2} + 4\cdot\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)k\,\frac{q^2}{a}}$

[fin del bloque 1-6]

7.) Tres cargas puntuales, de iguales magnitudes y de signos indicados en el dibujo 2, están dispuestas en un plano sin fricción formando un triángulo isósceles. Las cargas 2 y 3 están fijas, la 1 tiene libertad de moverse. ¿Qué alternativa representa mejor la trayectoria que tomará la carga 1 si se le deja en libertad? [Sugerencia: establezca primero la dirección de la fuerza eléctrica sobre la carga 1 en el momento inicial; ¿qué sucede después? Tiene que justificar la respuesta.]

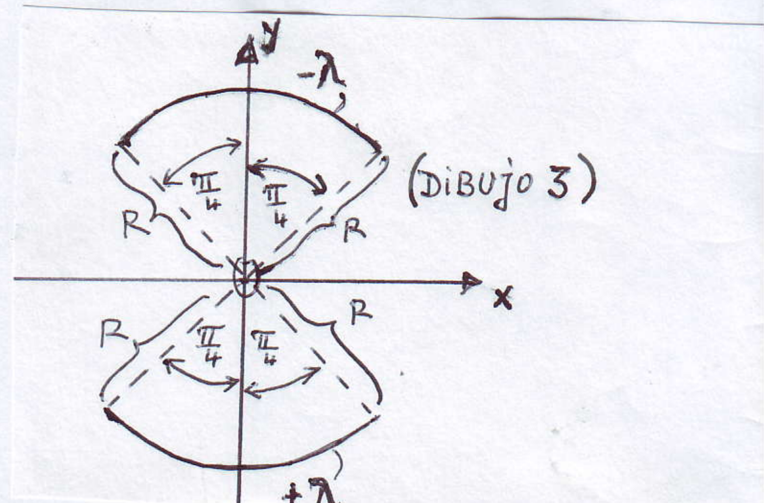
Por la ley de Coulomb, fuerza $\vec{F}_{(\to 1)}$ inicialmente tiene dirección C. Después de moverse un poco, la distancia (1-2) es mayor que la distancia (2-3) $\Rightarrow$ fuerza $|\vec{F}_{(2\to 1)}| < |\vec{F}_{(3\to 1)}|$ $\Rightarrow$ por eso desviación hacia abajo $\Rightarrow$ la trayectoria D es la correcta.

(a) A
(b) B
(c) C
(d) D
(e) E



PROBLEMAS 8-9 SE REFIEREN AL DIBUJO 3

En el dibujo, tenemos dos arcos de material aislante, en el plano xy. Ambos arcos están cargados uniformemente, el superior con la densidad lineal $-\lambda$ (< 0) y el inferior con λ (> 0). Los arcos tienen el radio de curvatura R.



8.) ¿Cuál es el vector campo eléctrico $\vec{E}(O)$ en el punto de origen?
[Sugerencia: la dirección del campo $\vec{E}(O)$ se puede determinar por simetría.]

(a) $2\pi k(\lambda/R)\,\hat{y}$
(b) $\sqrt{2}k(\lambda/R)\,\hat{y}$
(c) $\pi k(\lambda/R)\,\hat{y}$
(d) $2\sqrt{2}k(\lambda/R)\,\hat{y}$
(e) $\sqrt{2}k(\lambda/R)\,\hat{x}$

y componente de $E_{(-)}$

$$\vec{E}(O) = \vec{E}_{(-)} + \underbrace{\vec{E}_{(+)}}_{(=\vec{E}_{(-)})} = 2\vec{E}_{(-)} = 2\cdot\hat{y}\,|\vec{E}_{(-)}| = 2\hat{y}\cdot E_{(-)_y} \quad (1)$$

$$(E_{(-)})_y = \int dE_{(-)_y} = \int |d\vec{E}_{(-)}| \operatorname{sen}\varphi = \int_{\varphi=\pi/4}^{3\pi/4} \frac{k|dq|}{R^2}\operatorname{sen}\varphi =$$

$$= \int_{\varphi=\pi/4}^{3\pi/4} \frac{k\cdot\lambda\cdot R\,d\varphi}{R^2}\operatorname{sen}\varphi = \frac{k\cdot\lambda}{R}\cdot\underbrace{\int_{\varphi=\frac{\pi}{4}}^{(3\pi/4)} d\varphi\cdot\operatorname{sen}\varphi}_{-\cos\varphi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{+3\pi/4} = \sqrt{2}}$$

$dE_{(-)_y} = |d\vec{E}_{(-)}| \operatorname{sen}\varphi$

$$\Rightarrow \boxed{E_{(-)_y} = \frac{k\cdot\lambda}{R}\cdot\sqrt{2}} \quad (2)$$

Colocando (2) en (1): $\boxed{\vec{E}(O) = \hat{y}\cdot 2\sqrt{2}\,\frac{k\cdot\lambda}{R}}$ (3)

9.) ¿Cuál es el vector campo eléctrico $\vec{E}(0,0,R)$ en el punto $(0,0,R)$, es decir, en el eje z a distancia R del origen?

[Sugerencia: aplicando la ley de Coulomb, se puede ver, por simetría, que las componentes E_x y E_z son cero; ambos arcos dan igual contribución a la componente E_y; haga tu propio dibujo para tres dimensiones.]

(a) $(1/4)k(\lambda/R)\ \hat{y}$
(b) $(1/8)k(\lambda/R)\ \hat{y}$
(c) $(1/2)k(\lambda/R)\ \hat{y}$
(d) $\sqrt{2}k(\lambda/R)\ \hat{y}$
(e) $k(\lambda/R)\ \hat{y}$

1.) $(d\vec{E}_{(-)} + d\vec{E}_{(+)})$ no tiene componente $\hat{z}$ (por simetría)

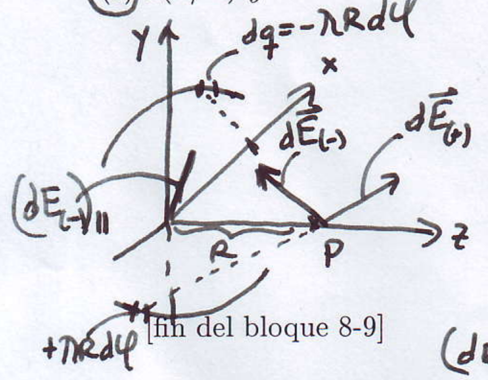
2.) La componente $(\vec{E}_{(-)} + \vec{E}_{(+)})_x = 0$ (por simetría)

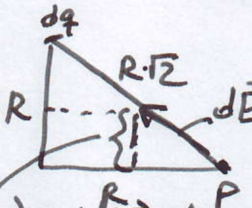
$$\Rightarrow \vec{E}(P) = \int (d\vec{E}_{(-)} + d\vec{E}_{(+)})_y \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot 2 \cdot \int dE_{(-)_y} \quad (1)$$

$$|d\vec{E}_{(-)}| = k\frac{|dq|}{(R\sqrt{2})^2} = \frac{k(\lambda R\, d\varphi)}{R^2 \cdot 2} = \frac{1}{2}\frac{k\lambda}{R}\, d\varphi \quad (2)$$

$$\int dE_{(-)_y} = \int (dE_{(-)})_{\parallel} \cdot \operatorname{sen}\varphi = \int \frac{1}{\sqrt{2}} |d\vec{E}_{(-)}| \operatorname{sen}\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}\frac{k\lambda}{R} \cdot \int_{\varphi=\pi/4}^{(3\pi/4)} d\varphi \operatorname{sen}\varphi = \frac{1}{2}\frac{k\lambda}{R} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(P) = \hat{y} \cdot \frac{k \cdot \lambda}{R}} \text{ por (1)\&(3)}$$



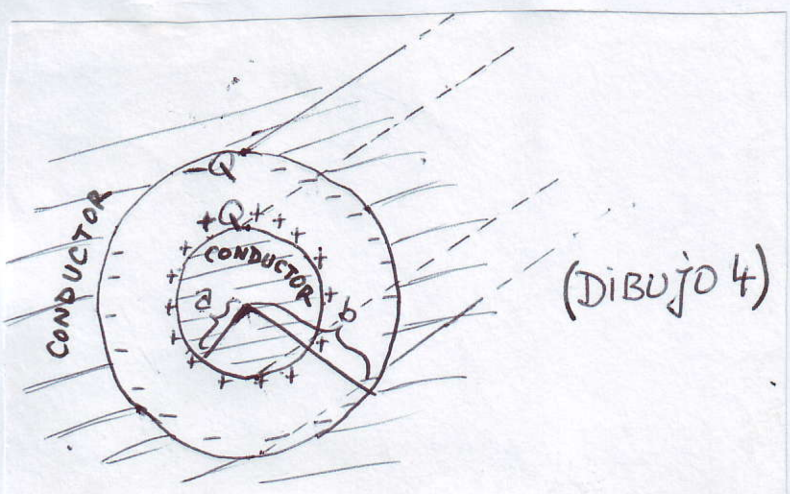


$(dE_{(-)})_{\parallel} = |d\vec{E}_{(-)}| \frac{1}{\sqrt{2}}$ (proyección de $d\vec{E}_{(-)}$ sobre el plano xy)

[fin del bloque 8-9]

PROBLEMAS 10-12 SE REFIEREN AL DIBUJO 4

Un cilíndro conductor, a lo large del eje z, con radio $a = 0.1m$ y longitud $L = 10m$ $(L \gg a)$, tiene carga $Q = 10^{-6}C$. Alrededor del cilíndro mencionado, hay un cascarón cilídrico conductor de la misma longitud L y con el radio interior $b = 0.2m$ $(= 2a)$.



10.) ¿Cuál es el valor de la densidad superficial de la carga del cilíndro de radio a?

(a) $(1/\pi) \cdot 10^{-6}\ C/m^2$
(b) $(1/\pi) \cdot 10^{-4}\ C/m^2$
(c) $10^{-4}\ C/m^2$
(d) $(1/(2\pi)) \cdot 10^{-6}\ C/m^2$
(e) $10^{-8}\ C/m^2$

$$\sigma(r_\perp = a) = \frac{+Q}{A} = \frac{+Q}{2\pi a \cdot L} = \frac{10^{-6}}{2\pi \cdot 10^{-1} \cdot 10}\frac{C}{m^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma(r_\perp = a) = \frac{1}{2\pi} \cdot 10^{-6}\frac{C}{m^2}}$$

11.) ¿Cuál es aproximadamente el campo eléctrico $\vec{E}$ a distancia de $1mm$ de la superficie del cilíndro (fuera del cilíndro)?
[Use: $2\pi\epsilon_0 \approx 5 \cdot 10^{-11}\ C^2/(Nm^2)$.]
[Sugerencia: se puede usar el resultado de la pregunta anterior.]

$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$ cerca de la superficie del conductor

($r_\perp$ = distancia entre el punto y el eje del cilíndro)

(a) $10^6\ N/C$, perpendicular a la superficie, hacia fuera
(b) $2 \cdot 10^2\ N/C$, paralelo a la superficie
(c) $2 \cdot 10^4\ N/C$, perpendicular a la superficie, hacia fuera
(d) cero
(e) $10^{-4}\ N/C$, perpendicular a la superficie, hacia el cilíndro

por 10.)

$$\vec{E}(r_\perp = a+\delta) \approx \vec{E}(r_\perp = a) = \frac{\sigma(r_\perp = a)}{\varepsilon_0}\cdot\hat{n} = \frac{1\cdot 10^{-6}(C/m^2)}{2\pi\varepsilon_0}\hat{n} \approx \frac{10^{-6}}{5\cdot 10^{-11}}\frac{N}{C}\cdot\hat{n}$$

($a = 100mm$, $\delta = 1mm$)

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(r_\perp = a+\delta) \approx (0.2\cdot 10^{+5}\hat{n})\frac{N}{C} = (2\cdot 10^4 \frac{N}{C})\hat{n}}$$

perp. a la superficie, hacia fuera

Otro approach: por Gauss: $\vec{E}(r_\perp) = \frac{Q}{\varepsilon_0 \cdot 2\pi L r_\perp}\cdot\hat{n} \approx \frac{Q}{\varepsilon_0 \cdot 2\pi L a}\hat{n} = \frac{\sigma(r_\perp = a)}{\varepsilon_0}\hat{n} = \dots$

12.) ¿Cuál es aproximadamente el valor de la capacitancia C del sistema cilíndro-cascarón del dibujo 4?
[Use: $2\pi\epsilon_0 \approx 5 \cdot 10^{-11}\ C^2/(Nm^2)$.]
[Sugerencia: Calcule primero $\vec{E}(r_\perp)$ para $a < r_\perp < b$, donde $r_\perp$ es la distancia del eje del cilíndro. Después calcule la diferencia $|\triangle V|$ de potencial entre las dos superficies.]

(a) $5 \cdot 10^{-10}\ F$
(b) $\frac{5}{\ln 2} \cdot 10^{-10}\ F$
(c) $5 \cdot 10^{-8}\ F$
(d) $\frac{5}{\ln 2} \cdot 10^{-8}\ F$
(e) ninguno de los anteriores

Gauss: $\oint \vec{E}_\perp \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot \underset{= Q}{q_{enc}} \Rightarrow |\vec{E}(r_\perp)| \cdot \underbrace{\oint dA}_{= 2\pi r_\perp \cdot L} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

$(b <) r_\perp (< a)$

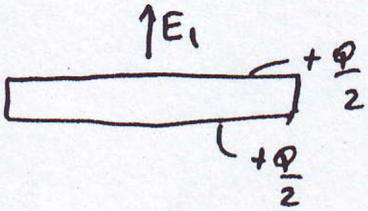
$\Rightarrow |\vec{E}(r_\perp)| = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \cdot L}\frac{1}{r_\perp}$;

$$|\Delta V| = \int_a^b dr_\perp \cdot E(r_\perp) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\cdot\int_a^b \frac{dr_\perp}{r_\perp} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{2\pi\varepsilon_0 \cdot L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \approx \frac{5\cdot 10^{-11}\cdot 10}{\ln 2} F$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{5}{\ln 2}\cdot 10^{-10} F}$$

[Fin del bloque 10-12]

13.) Una placa cuadrática metálica (puede ser delgada) de lado $a = 10cm$ tiene una carga total $Q = 6\cdot 10^{-6}\ C$. Si E_1 es la magnitud del campo eléctrico a $1mm$ por encima del centro de la placa, y E_2 la magnitud del campo eléctrico a distancia $D = 10m$ de la placa, ¿cuál es aproximadamente la razón E_1/E_2?
[Clarificaciones adicionales: E_1 está cerca de una de las superficies del conductor. La carga total Q está distribuida uniformemente por ambas superficies, la superior y la inferior, de la placa. E_2 está muy lejos, desde donde toda la placa aparece prácticamente como un punto.]
(Tome: $\pi \approx 3$)



$E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \left(\frac{Q}{2}\right)\cdot\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow \boxed{E_1 = \frac{Q}{2\cdot a^2}\frac{1}{\varepsilon_0}}$ (1)

(a) $1.2 \cdot 10^4$
(b) $4 \cdot 10^4$
(c) $9 \cdot 10^3$
(d) $6 \cdot 10^4$
(e) ninguno de los anteriores

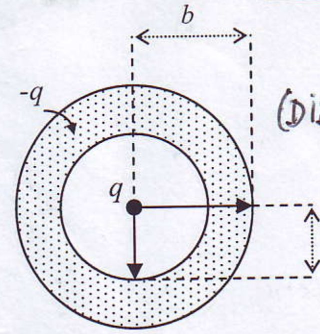
$\boxed{E_2 \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{D^2}}$ (2)

se ve como un punto carga Q

(1)&(2) $\Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{Q}{2a^2\varepsilon_0}\cdot\frac{4\pi\varepsilon_0 \cdot D^2}{Q}$

$$\Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{2\pi\cdot D^2}{a^2} \simeq \frac{2\cdot 3\cdot 10^2}{(10^{-1})^2} = 6\cdot 10^{+4}$$

14.) Un cascarón esférico, conductor, de radios a y b (ver el dibujo 5), tiene en su centro una carga puntual $q > 0$. El cascarón tiene una carga neta $-q$ (< 0). Señale el gráfico que mejor describe el potencial eléctrico (electrostático) $V(r)$ de esta distribución. Tome como referencia el valor cero del potencial en el infinito. (c y c' indicados en los diagramas son constantes.) Justifique la respuesta.

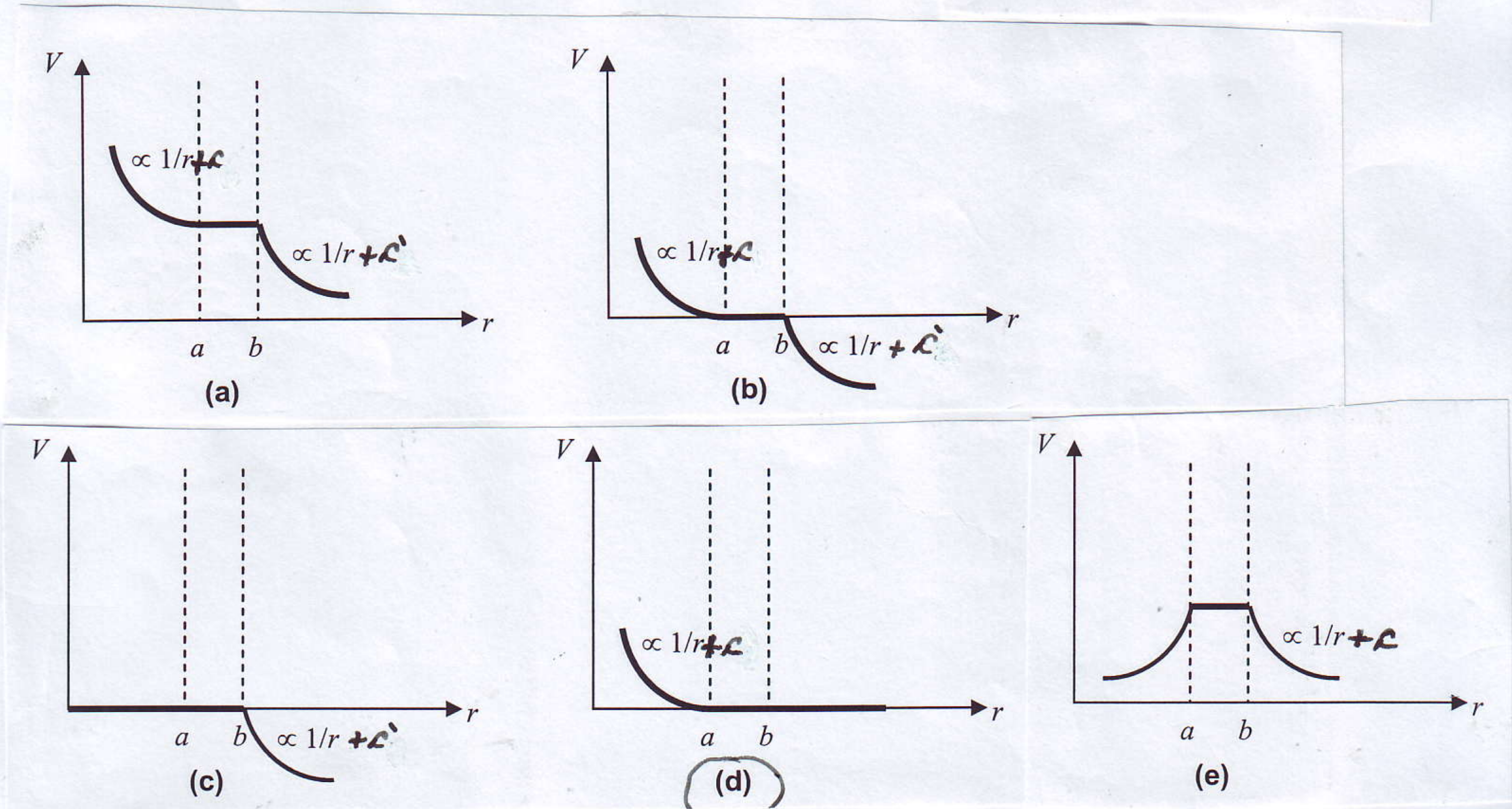


(DIBUJO 5)

$E(r)=0$ para $\boxed{a<r<b}$ (dentro del conductor)

$E(r)=0$ para $\boxed{r>b}$ ($Q_{enc.}=Q-Q=0 \Rightarrow$ Gauss $\Rightarrow E(r)=0$)

$\boxed{V(r)=0 \text{ para } a\le r<\infty}$



15.) Una partícula puntual de masa m y carga $q_0 > 0$ ($q_0 \ll q$) está colocada a distancia $r = a/3$ del centro de la configuración arriba mencionada. El cascarón tiene un túnel angosto para hacer posible la salida de la partícula (ver el dibujo 6). Además, la carga puntual $q > 0$ está fija en el centro. Se suelta la partícula puntual. ¿Cuál será la rapidez v_f que obtiene la partícula después de suficientemente largo tiempo? [Sugerencia: tendrá que hallar primero $V(r)$ de la pregunta anterior.]

(a) ∞

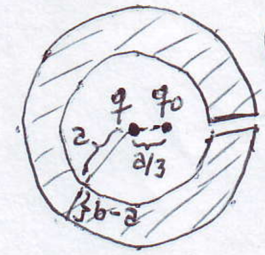
(b) $\sqrt{\frac{kqq_0}{bm}}$

(c) $2\sqrt{\frac{kqq_0}{(a+b)m}}$

(d) $2\sqrt{\frac{kqq_0}{am}}$

(e) $\sqrt{\frac{2kqq_0}{am}}$

(DIBUJO 6)



$0<r<a$: por Gauss: $E(r)=k\cdot\frac{q}{r^2}$

$\Rightarrow V(r)=\begin{cases} k\cdot\frac{q}{r}+C & (r\le a)\\ 0 & (a\le r)\end{cases}$

Por continuidad de V (en $r=a$): $V(r=a)=0$

$\Rightarrow C=-k\cdot\frac{q}{a} \Rightarrow \boxed{V(r)=k\cdot\frac{q}{r}-k\cdot\frac{q}{a}}$ $(r\le a)$

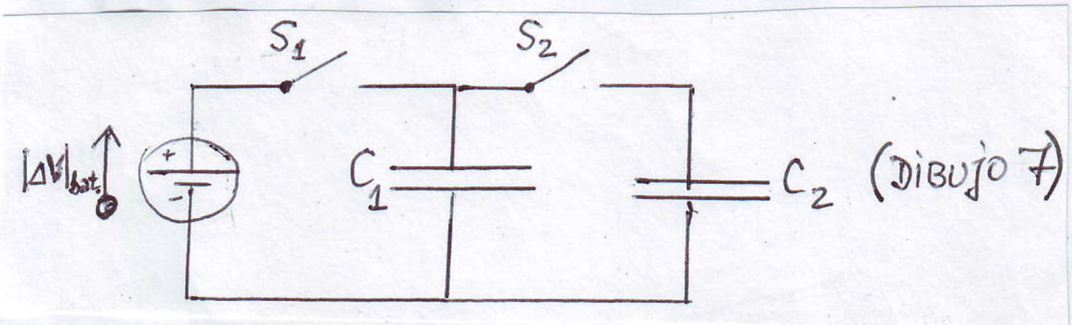
$(K_f+U_f)-(K_i+U_i)=0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_f^2+q_0(V(r_f)-V(r_i)) \Rightarrow \frac{1}{2}mv_f^2=q_0\cdot V(\frac{a}{3})=q_0 q\cdot k\cdot\left(\frac{1}{\frac{a}{3}}-\frac{1}{a}\right)$

$K_f = \frac{1}{2}mv_f^2$, $K_i = 0$, $V(r_f) = 0$ $(r_f>a)$, $r_i=\frac{a}{3}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_f^2=\frac{2qq_0k}{a} \Rightarrow \boxed{v_f=2\sqrt{\frac{qq_0k}{am}}}$

PROBLEMAS 16-18 SE REFIEREN AL DIBUJO 7

En la configuración del dibujo, hay dos condensadores ($\Leftrightarrow$ capacitores), el primero con $C_1 = 20\ \mu F$ y el segundo con $C_2 = 10\ \mu F$ ($1\ \mu F \equiv 10^{-6}\ F$). La batería tiene voltaje $|\triangle V|_{\text{bat.}} = 50\ V$. Hay dos interruptores S_1 y S_2. Primero los ambos interruptores están abiertos (dibujo), y los dos condensadores no están cargados.



16.) Ahora cerramos el interruptor S_1. Sólo el condensador 1 obtiene carga, Q_1 (y $-Q_1$). ¿Cuál es el valor de la carga Q_1?

(a) $10^{-3}\ C$
(b) $(1/3) \cdot 10^{-3}\ C$
(c) $1.5 \cdot 10^{-3}\ C$
(d) $10^{-4}\ C$
(e) $5 \cdot 10^{-4}\ C$

$Q_1 = C_1 \cdot |\Delta V|_{bat.} = 20 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10\, C = \boxed{10^{-3}\ C}$

17.) A continuación, abrimos de nuevo S_1, desconectando la batería, y luego cerramos S_2 logrando que ambos condensadores estén cargados. Cuál es el valor de la carga Q_2' en el condensador 2?
[Sugerencia: la carga Q_1 del problema anterior se redistribuye al cerrar S_2.]

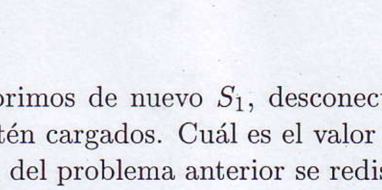
(a) $10^{-3}\ C$
(b) $(1/3) \cdot 10^{-3}\ C$
(c) $(2/3) \cdot 10^{-3}\ C$
(d) $(3/2) \cdot 10^{-4}\ C$
(e) $(5/3) \cdot 10^{-4}\ C$

$|\Delta V|_{C_1} = |\Delta V|_{C_2} \Rightarrow \frac{(Q_1 - Q_2')}{C_1} = \frac{Q_2'}{C_2} \Rightarrow Q_1 - Q_2' = Q_2' \cdot \frac{C_1}{C_2}$

$\Rightarrow Q_2'\left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right) = Q_1 \Rightarrow Q_2' = Q_1 \cdot \frac{C_2}{C_1 + C_2} = 10^{-3} \cdot \frac{10}{30}\, C = \boxed{\frac{1}{3} \cdot 10^{-3}\, C}$

$\Rightarrow \boxed{Q_2' = \frac{1}{3} \cdot 10^{-3}\, C}$ $\left(\Rightarrow Q_1' = Q_1 - Q_2' = \frac{2}{3} \cdot 10^{-3}\, C\right)$

18.) Después de lo ocurrido en la pregunta anterior, aplicamos fuerza externa para separar las placas del condensador 1 al doble de la distancia inicial ($D_1 \mapsto 2D_1$). Todo el tiempo, el interruptor S_2 está cerrado, manteniendo así conexión entre los dos condensadores. ¿Cuál es el valor W de trabajo de la fuerza externa?
[Sugerencia: el valor de C_1 cambia -> las cargas en los condensadores se redistribuyen -> la energía total almacenada en los dos condensadores se cambia.]



$Q_1 - Q_1'' = Q_2''$

$C_1'' = \frac{\varepsilon_0 A}{2D_1} = \frac{1}{2} C_1 = 10\,\mu F\ (= C_2)$

$C_1'' = C_2 \Rightarrow Q_1'' = (Q_1 - Q_1'')$

$\Rightarrow Q_1'' = Q_2'' = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}\, C$ [porque $|\Delta V|_{C_1''} = |\Delta V|_{C_2}$]

(a) $(1/24)\ Nm$
(b) $(1/16) \cdot 10^{-1}\ Nm$
(c) $(1/3) \cdot 10^{-1}\ Nm$
(d) $(1/4) \cdot 10^{-1}\ Nm$
(e) $(1/12) \cdot 10^{-1}\ Nm$

[fin del bloque 16-18]

$U_i = \frac{1}{2}\left(\frac{Q_1'^2}{C_1} + \frac{Q_2'^2}{C_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{10^{-6}}{2 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{10^{-6}}{10 \cdot 10^{-6}}\right) J = \frac{1}{2} \cdot 10^{-1} \left(\underbrace{\frac{2}{9} + \frac{1}{9}}_{=\frac{1}{3}}\right) J$ [por 17.

$\Rightarrow U_i = \frac{1}{6} \cdot 10^{-1}\, J$; $U_f = \frac{1}{2}\left(\frac{Q_1''^2}{C_1''} + \frac{Q_2''^2}{C_2}\right) = \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{Q_2''^2}{C_2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{10^{-6}}{10 \cdot 10^{-6}} J = \frac{1}{4} \cdot 10^{-1}\, J$ $\Rightarrow \boxed{W = U_f - U_i = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) \cdot 10^{-1} J = \frac{1}{12} 10^{-1} J}$

LISTA DE ALGUNAS FORMULAS
fis-120, 2.sem.2004, C1, UTFSM, 27 de agosto de 2004

Una carga q situada en $\vec{r}' = 0$ produce:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k\frac{q}{r^2}\hat{r} \quad (\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}) , \qquad V(\vec{r}) = k\frac{q}{r} ; \qquad \text{donde} : k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} , \quad \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\frac{C^2}{Nm^2} . \tag{1}$$

Una distribución de cargas $dq(\vec{r}')$ produce en el punto $\vec{r}$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k\int \frac{dq(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} , \qquad V(\vec{r}) = k\int \frac{dq(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} . \tag{2}$$

La relación general entre V y $\vec{E}$:

$$V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} , \qquad \vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) . \tag{3}$$

$V(\vec{r})$ es una función de $\vec{r}$ *sin* discontinuidades.
Si hay simetría esférica: $V(\vec{r}) = V(r)$, y $\vec{E}(r) = -[dV(r)/dr]\hat{r}$.
Si hay simetría cilíndrica: $V(\vec{r}) = V(r_\perp)$, y $\vec{E}(r_\perp) = -[dV(r_\perp)/dr_\perp]\hat{r}_\perp$.
La energía potencial electrostática de una carga q_0 en $\vec{r}$ es: $U(\vec{r}) = q_0 V(\vec{r})$.
La energía potencial de un conjunto de cargas q_j ($j = 1, 2, \ldots n$) es: $U = k\sum q_i q_j/|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$, donde la suma corre por todos los pares diferentes $q_i q_j$.

Ley de Gauss:

$$\epsilon_0 \oint_{\partial\Omega} E_\perp dA = q_{\text{enc.}}^{(\Omega)} , \qquad \text{donde} : \ E_\perp = \vec{E} \cdot \hat{n} . \tag{4}$$

Campo eléctrico cerca de un conductor (fuera):

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n} , \quad \text{donde } \sigma = dq/dA . \tag{5}$$

Condensadores (capacitores):

$$Q = CV \quad (V = |\triangle V|) , \quad U_{\mathcal{C}} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 . \tag{6}$$

$$C_{\text{eq.}} = \sum_{j=1}^{n} C_j \quad \text{(en paralelo)} , \qquad \frac{1}{C_{\text{eq.}}} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{C_j} \quad \text{(en serie)} . \tag{7}$$

Densidad (por volumen) de energía electrostática:

$$u = \frac{dU}{d\text{Vol.}} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \vec{E}^2 . \tag{8}$$

Condensador de placas paralelas conductoras (área de placas A, separación de placas D; $\sqrt{A} \gg D$):

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A\epsilon_0} , \quad V(\equiv |\triangle V|) = ED , \qquad C = \frac{\epsilon_0 A}{D} . \tag{9}$$

Si hay material dieléctrico: $E_0 \mapsto E = E_0/\kappa_e$; $C_0 \mapsto C = \kappa_e C_0$ ($\epsilon_0 \mapsto \kappa_e\epsilon_0$). Aquí, $\kappa_e > 1$ es constante dieléctrica.