Ayudantía 1 - Algoritmos y Complejidad
Cálculo de raíces y análisis de convergencia

Complex Executioners

1. Introducción

Las raíces de una función f son los puntos x_* tal que $f(x_*) = 0$.
Intentamos encontrar dichos puntos sabiendo que podemos evaluar $f(x)$ en cualquier momento, y a veces incluso $f'(x)$.
Esto también nos sirve, por ejemplo, para igualar dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, pues, encontrar los puntos en que se igualen equivale a encontrar las raíces de la función $h(x) = f(x) - g(x)$.
Existen varios algoritmos para lograr esto, trabajaremos con dos grupos:

1. Los que buscan directamente una solución para $f(x) = 0$, reduciendo cada vez más, de manera iterativa, el intervalo donde se puede encontrar.

2. Los que se aprovechan de otras funciones cuyos puntos fijos coinciden con las raíces de f. Un punto fijo x_p de una función g cumple con la propiedad de $x_p = g(x_p)$.

2. Métodos iterativos

2.1. Método de la bisección

Del teorema del valor medio se deduce que si una función $f(x)$ es continua y de un punto $x = a$ a otro $x = b$ cambia de signo, hay una raíz $x_* \in [a, b]$.
Si se conoce la existencia de una raíz en el intervalo $[a, b]$ (por ejemplo, si los signos de $f(a)$ y $f(b)$ son distintos) se puede evaluar $f(\frac{a+b}{2})$ para descartar una de las dos mitades del intervalo (la que tenga signos iguales).
Este proceso se pude repetir para ir *atrapando* a la raíz en un intervalo cada vez más pequeño. Cuando nos cansemos de hacer pequeño el intervalo, tomamos la mitad del mismo como aproximación de x_*. Suena lógico el que si en algún momento evaluamos $f(x)$ y nos da 0, hemos encontrado la raíz exacta, pero no siempre ocurre.

Pregunta al margen: Si se busca una raíz x_* en el intervalo $[a, b]$ con el método de la bisección y se pueden realizar tantas iteraciones como se quiera ¿Qué valores de x_* es imposible encontrar de manera exacta?

Respuesta: Los que se no puedan expresar como:

$$x_* = a + (b-a)\frac{j}{2^{k+1}} \qquad \text{Con } j,k \in \mathbb{Z}$$

Si se realizan n iteraciones, f se evaluará $n+2$ veces y el error máximo será:

$$|x - x_*| = \frac{b-a}{2^n} \cdot \frac{1}{2}$$

Si la aproximación x hecha de x_* se hace en la mitad del último intervalo encontrado, el error no puede ser mayor a la mitad de dicho intervalo.

Pregunta : Calcule cuantas iteraciones son necesarias para lograr una precisión de k números decimales usando el método de la bisección cuando se parte con el intervalo $[2,7]$.

Respuesta : El tamaño del intervalo tras n pasos será $\frac{B-A}{2^n}$ y el error máximo $x_n - x_*$ será la mitad de eso (porque siempre colocaremos x_n en la mitad del intervalo en el paso actual.
Que la presición sea mayor a k números decimales equivale a que el error sea menor que $0{,}5 \cdot 10^{-k}$. Entonces tenemos que lograr:

$$\begin{aligned}
e_n &< 0{,}5 \cdot 10^{-k} \\
\frac{7-2}{2^{n+1}} &< 0{,}5 \cdot 10^{-k} \\
\frac{5}{2^{n+1}} &< 0{,}5 \cdot 10^{-k} \\
2^{-(n+1)} &< 10^{-k-1} \\
-(n+1) &< \log_2(10^{-k-1}) \\
-n &< \log_2(10^{-k-1}) + 1 \\
n &> (k+1)\log_2(10) - 1
\end{aligned}$$

2.2. Método regular-falsi

El método de la regla falsa es como el método de la bisección, sin embargo, ve en cual de los extremos del intervalo $[a,b]$ la función se acera más al 0 y decide hacer el corte más cerca de ese extremo.
Si la función es más cercana a la recta entre estos dos puntos (osea, no tiene sesgo, o dicho de otra forma, no está muy abultada) convergerá más rápido que el método de la bisección, si no, convergirá peor, pues sólo descartará la parte más corta del intervalo.

$$\begin{aligned}
c &= b - f(b)\frac{b-a}{f(b)-f(a)} \\
c &= \frac{af(b) - bf(a)}{f(b)-f(a)}
\end{aligned}$$

3. Iteraciones de punto fijo

Los puntos fijos de una función f son los x_p tal que $f(x_p) = x_p$.
Algunas funciones convergen a un punto fijo cuando se aplican muchas veces sobre si mismas, por ejemplo:

$$cos(cos(cos(cos(...(cos(\alpha))...)))) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Siempre podemos trasformar cualquier problema $f(x) = 0$ a uno $g(x) = x$, simplemente realizando las operaciones correctas. La forma más sencilla de hacer esto es:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ f(x) + x &= x \\ g(x) &= x \end{aligned}$$

Sin embargo, no todas convergen al punto fijo, ni todas necesariamente tienen uno. Pero si convergen a algo, será a un punto fijo.

4. Análisis de convergencia

A la hora de elegir un método es importante saber a qué velocidad nos estamos acercando a la solución o qué condiciones, si las hay, se requieren para que converjan.
Para tener una idea de la velocidad de convergencia buscamos una relación entre el error en un paso $n \to \infty$, $e_n = x_n - x_*$ y en el siguiente $e_{n+1} = x_{n+1} - x_*$.

- **Convergencia lineal**: Un método convergerá linealmente con razón M si:

  $$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{e_{n+1}}{e_n} \right| = M$$

  Siempre que M sea menor que 1, si no, el error crecerá.

- **Convergencia cuadrática**: Un método convergerá cuadráticamente con razón S si:

  $$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{e_{n+1}}{(e_n)^2} \right| = S$$

  Siendo S cualquier valor (cuando no hay convergencia cuadrática el límite se hace ∞).
  Si se evalúa la convergencia lineal de estos métodos, resultará ser 0.

- **Convergencia super-lineal**: A veces no hay convergencia cuadrática pero se puede demostrara que:

  $$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{e_{n+1}}{(e_n)^p} \right| = S$$

  para algún $1 < p < 2$, en cuyo caso pasa lo mismo que con convergencia cuadrática, que exista un valor $S < \infty$ implica que $M = 0$.

Problema : Calcular la convergencia lineal del método de la bisección.

Respuesta : Si el intervalo inicial era $[A, B]$, tras el paso n vemos que el tamaño del intervalo será $\frac{B-A}{2^n}$ y el error máximo $x_n - x_*$ a lo más será $\frac{\frac{B-A}{2^n}}{2}$ y que la aproximación en el paso n, se coloca en la mitad del intervalo pequeño.
Al comparar los errores máximos en n y $n+1$, resulta:

$$\begin{aligned}\frac{e_{n+1}}{e_n} &= \frac{\frac{\frac{B-A}{2^{n+1}}}{2}}{\frac{\frac{B-A}{2^n}}{2}} \\ &= \frac{\frac{B-A}{2^{n+2}}}{\frac{B-A}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

4.1. Convergencia lineal de iteraciones de punto fijo

Lo clave es que el error de la aproximación $n+1$ está relacionado con la aproximación anterior, por ejemplo, si se trata de una iteración de punto fijo $e_{n+1} = x_{n+1} - x_* = g(x_n) - x_*$.
Por ejemplo, para intentar demostrar convergencia podemos partir de la serie de Taylor, intentando formar $f(x)$ y sabiendo que los términos más pequeños de la serie podemos descartarlos ya que $n \to \infty$ y que $f(x_*) = 0$.
Para demostrar la convergencia lineal de cualquier método iterativo:

$$\begin{aligned}g(x_*) &= g(x_n) + g'(x_n)(x_* - x_n) + O((x_* - x_n)^2) \\ x_* &= g(x_n) + g'(x_n)(x_* - x_n) \\ x_* &= x_{n+1} + g'(x_n)(x_* - x_n) \\ x_{n+1} - x_* &= -g'(x_n)(x_* - x_n) \\ \frac{x_{n+1} - x_*}{x_* - x_n} &= -g'(x_n)\end{aligned}$$

Todos los métodos convergirán si $|g'(x_n)| < 1$.
Si demostramos que $|g'(x_*)| < 1$ sabremos que al menos en un intervalo cerca de la solución (puede ser muy pequeño para nuestra desgracia), pasará que los x_n convergirán, ya que habrá un intervalo en que también $|g'(x_n)| < 0$ y siempre nos iremos acercando, esto se llama *convergencia local*. El problema es que generalmente no sabemos el valor de x_* (de hecho eso es lo que queremos buscar al principio), pero podemos demostrar que un intervalo que contiene la raíz cumple con $|g'(x)| < 1$.

Ejercicio Se busca resolver el siguiente problema $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$ para lo cual se descubren las siguientes iteraciones de punto fijo:

$$\begin{aligned}x &= 1 - x^3 = g(x) \\ x &= \sqrt[3]{1-x} = g(x) \\ x &= \frac{1+2x^3}{1+3x^2} = g(x)\end{aligned}$$

Comprobar si hay convergencia local en las raíces de $f(x)$, que son los puntos fijos de cada una de estas $g(x)$.

Respuesta Se deben derivar cada $g(x)$ y comprobar si el valor absoluto de la derivada es menor a 1 en

4.2. Método de la tangente (o de Newton)

Consiste en, a partir de una suposición inicial x_0, aproximar la función a su recta tangente y avanzar al punto en que ésta se hace 0.
Osea:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Esta es una FPI muy especial, dado que siempre $g'(x) = 0$ (a menos que $f(x) = 0$), por lo tanto no sólo siempre converge linealmente, sino que (a menos que $f(x) = 0$) converge cuadráticamente (lo demostraremos más adelante).

4.3. Método de la secante

Si queremos utilizar el método de Newton pero no tenemos la derivada de la función (es muy común que sea así en aplicaciones computacionales), podemos partir con dos initial guests x_0 y x_1; y aproximar una *tangente* con la secante entre esos dos puntos para obtener un punto x_2 nuevo, y así seguimos, siempre con los últimos dos puntos.

$$x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{f(x_{n+1})}{\frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{x_{n+1}-x_n}}$$
$$x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{f(x_{n+1})(x_{n+1}-x_n)}{f(x_{n+1})-f(x_n)}$$

Resulta algo bastante parecido al método regular-falsi ¿Cuál es la diferencia?
Nota: Como son iteraciones de punto fijo, no está garantizado que converjan.

4.4. Convergencia cuadrática del método de Newton

Para demostrar la convergencia del método de Newton:

$$
\begin{aligned}
f(x_*) &= f(x_n) + f'(x_n)(x_* - x_n) + \frac{f''(x_n)(x_* - x_n)^2}{2} + O((x_* - x_n)^3) \\
0 &= f(x_n) + f'(x_n)(x_* - x_n) + \frac{f''(x_n)(x_* - x_n)^2}{2} \\
-f(x_n) &= f'(x_n)(x_* - x_n) + \frac{f''(x_n)(x_* - x_n)^2}{2} \\
-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} &= x_* - x_n + \frac{f''(x_n)(x_* - x_n)^2}{2f'(x_n)} \\
x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} &= x_* + \frac{f''(x_n)(x_* - x_n)^2}{2f'(x_n)} \\
x_{n+1} &= x_* + \frac{f''(x_n)(x_* - x_n)^2}{2f'(x_n)} \\
x_{n+1} - x_* &= \frac{f''(x_n)(x_* - x_n)^2}{2f'(x_n)} \\
\frac{x_{n+1} - x_*}{(x_n - x_*)^2} &= \frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)}
\end{aligned}
$$

Y vemos que convergerá cuadráticamente con radio $\left|\frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)}\right|$ siempre que dicho radio sea un número, osea, el método de Newton no converge cuadráticamente cuando:

$$\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = f'(x_*) \to 0$$

5. Otras preguntas

1. Demostrar que $1, 2, 3$ son puntos fijos de la siguiente función:

$$\frac{x^3 + x - 6}{6x - 10}$$

2. Encontrar el orden y razón de convergencia local de las siguientes funciones para iteración de punto fijo:

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \frac{2x-1}{x^2} && \text{al punto fijo} x = 1 \\
g(x) &= cos(x) + \pi + 1 && \text{al punto fijo} x = \pi \\
g(x) &= e^{2x} - 1 && \text{al punto fijo} x = 0
\end{aligned}
$$

3. Suponga que utiliza el método de la bisección para obtener una *raíz* de $\frac{1}{x}$. ¿Qué sucede?

4. Para calcular $\sqrt{2}$ los *antiguos* babilonios utilizaban, sin saberlo, la siguiente iteración de punto fijo:

$$\begin{aligned}
x^2 &= 2 \\
2x^2 &= x^2 + 2 \\
2x &= x + \frac{2}{x} \\
x &= \frac{x + \frac{2}{x}}{2}
\end{aligned}$$

Y comenzaban con $x = 1$, sabían que si $1 \leq x < 2$ la respuesta se encontraba entre x y $\frac{2}{x}$, así que sacaban el promedio entre los dos números.

a) Demuestre que este método converge linealmente.

b) Expanda su método para encontrar la raíz de cualquier número n.