Integrales de Línea y Teorema de Green: Problemas Resueltos

1. Para $a \in \mathbb{R}$, considere el campo vectorial definido sobre $\mathbb{R}^3$ mediante

$$\vec{F}_a(x,y,z) = \left(ax^2z, z^2, \frac{2}{3}ayz + x^a + 2\right).$$

   (a) Determine los valores de a para que $\vec{F}_a$ posea un potencial escalar. Para estos valores, determine el potencial escalar ϕ_a correspondiente.

   (b) Calcule el trabajo realizado por $\vec{F}_0$ entre los puntos $(0,-2,0)$ y $(0,2,0)$ sobre la curva Γ, intersección de

$$S_1 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad \text{y} \quad S_2 : \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1 + \frac{x^2}{9}, \quad x, z \geq 0.$$

Solución:

   (a) $\vec{F}_a$ es de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$, luego para que posea un potencial escalar basta con que sea irrotacional. Esto ocurre si

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ ax^2z & z^2 & \frac{2}{3}ayz + x^a + 2 \end{vmatrix} = (0,0,0).$$

   Luego

$$2z\left(\frac{a}{3} - 1\right) = a\left(x^{a-1} - x^2\right) = 0 \Rightarrow a = 3.$$

   Por lo tanto, $\vec{F}_3 = (3x^2, z^2, 2 + x^3 + 2yz)$ posee un potencial escalar ϕ_3 tal que $\nabla\phi_3 = \vec{F}_3$. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_3}{\partial x} &= 3x^2 \Rightarrow \phi_3 = x^3z + f(y,z) \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial y} &= f_y = z^2 \Rightarrow f(y,z) = yz^2 + g(z) \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial z} &= x^3 + 2yz + g_z = 2 + x^3 + 2yz \Rightarrow \phi_3(x,y,z) = x^3z + yz^2 + 2z. \end{aligned}$$

   (b) Γ está parametrizada por

$$\begin{aligned} x &= 3\cos t \\ y &= 2\operatorname{sen} t \\ z &= 2\sqrt{2}|\cos t|. \end{aligned}$$

   Sin embargo, nos movemos entre $(0,-2,0)$ y $(0,2,0)$ y ambas $x, z \geq 0$. Esto obliga a que $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ y luego $z = 2\sqrt{2}\cos t$. Con esto

$$d\vec{r} = (-3\operatorname{sen} t, 2\cos t, -2\sqrt{2}\operatorname{sen} t)dt$$

   Además:

$$\vec{F}_0\Big|_\Gamma = (0, 4\cos^2 t, 3)$$

   Y entonces sobre la curva Γ:

$$\int_\Gamma \vec{F}_0 \cdot d\vec{r} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (8\cos^3 t - 6\sqrt{2}\operatorname{sen} t)dt = \frac{32}{3}.$$

2. Calcule

$$\int_\gamma z dx + x^2 dy + y dz,$$

donde γ es la curva:

(a) El segmento de recta que une $(0,0,0)$ con $(1,1,1)$.

(b) El arco de curva $x=t$, $y=t^2$ y $z=t^3$ desde $(0,0,0)$ hasta $(1,1,1)$.

(c) La hélice $y=\sin t$, $x=\cos t$ y $z=t$ con $t\in[0,2\pi]$.

Solución:

(a) $\displaystyle\int_0^1 (t+t^2+t)dt = \frac{4}{3}$

(b) $\displaystyle\int_0^1 (t^3+2t^3+3t^4)dt = \frac{27}{20}$

(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \big(-t\sin(t)+\cos^3(t)+\sin(t)\big)\,dt = 2\pi$

3. Considere la curva C descrita por $x=6\sin 4t$, $\quad y=4\cos 2t$, $\quad z=4t$, $\quad \dfrac{\pi}{2}\le t\le\pi$ y el campo vectorial $\vec{F}$ definido como

$$\vec{F}(x,y,z)=\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^4},\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^4},\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^4}\right).$$

Calcule el trabajo efectuado del campo $\vec{F}$ sobre la curva C.

Solución: Para el campo vectorial $\vec{F}$ el rotacional del campo $\vec{F}$ es

$$\nabla\times\vec{F}=(\partial_yP-\partial_zN,-\partial_xP+\partial_zM,\partial_xN-\partial_yM)$$

donde $M(x,y,z)=\dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^4}$, $N(x,y,z)=\dfrac{y}{(x^2+y^2+z^2)^4}$ y $P(x,y,z)=\dfrac{z}{(x^2+y^2+z^2)^4}$. Luego tenemos que

$$\begin{aligned}
\partial_yP-\partial_zN &= \frac{-8zy}{(x^2+y^2+z^2)^5}-\frac{-8zy}{(x^2+y^2+z^2)^5}=0\\
-\partial_xP+\partial_zM &= -\frac{-8zx}{(x^2+y^2+z^2)^5}+\frac{-8zx}{(x^2+y^2+z^2)^5}=0\\
\partial_xN-\partial_yM &= \frac{-8yx}{(x^2+y^2+z^2)^5}-\frac{-8yx}{(x^2+y^2+z^2)^5}=0
\end{aligned}$$

con lo cual se obtiene que $\nabla\times F=\vec{0}$, así el campo vectorial es irrotacional. Posteriormente se procede detectando la función potencial del campo vectorial, tal función es un campo escalar f tal que

$$\nabla f=\vec{F},$$

para esto es necesario resolver el sistema de ecuaciones diferenciales asociado, de esta forma:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^4}\qquad\Longrightarrow\qquad f(x,y,z)=-\frac{1}{6(x^2+y^2+z^2)^3}+\varphi(y,z)$$

derivando respecto a y e integrando se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^4}+\partial_y\varphi=\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^4}\qquad\Longrightarrow\qquad\varphi(y,z)=\phi(z),$$

es decir

$$f(x,y,z)=-\frac{1}{6(x^2+y^2+z^2)^3}+\phi(z),$$

derivando respecto a z e integrando

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^4}+\phi'(z)=\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^4}\qquad\Longrightarrow\qquad\phi(z)=k,\quad k\in\mathbb{R}$$

luego para cada $k \in \mathbb{R}$ tenemos una función potencial, la cual es

$$f(x,y,z) = -\frac{1}{6(x^2+y^2+z^2)^3} + k,$$

de esta forma el trabajo efectuado del campo $\vec{F}$ sobre la curva C es

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(0,4,4\pi) - f(0,-4,2\pi) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{(16+4\pi^2)^3} - \frac{1}{(16+16\pi^2)^3}\right)$$

4. Sea γ una curva de longitud ℓ, parametrizada mediante

$$\begin{array}{rll} \vec{r}: & [a,b] \subseteq \mathbb{R} & \longmapsto \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto \vec{r}(t), \end{array}$$

tal que $\|\vec{v}(t)\| \neq 0$ para todo $t \in [a,b]$. Suponga también que el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)$ cumple que

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = u(t)\frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \forall t \in [a,b], \qquad\qquad \|\vec{F}(x,y,z)\| = \rho(x,y,z),$$

donde $\rho(x,y,z)$ es una función positiva y no nula la cual representa la densidad en cada punto de la curva γ y ademas $u(t) > 0$ para $t \in [a,b]$.

(a) Encuentre la masa de la curva γ si se sabe que $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 4\pi$.

(b) Verifique que

$$8\pi\ell = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

si $\rho(x,y,z) = 8\pi$.

(c) Interprete geométricamente la condición

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = u(t)\frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \forall t \in [a,b],$$

donde $u(t) > 0$ para todo $t \in [a,b]$.

Solución:

(a)

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{v}(t)dt = \int_a^b u(t)\|\vec{v}(t)\|^2 dt$$

esto pues $\vec{F}(\vec{r}(t)) = u(t)\vec{v}(t)$, luego

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \|\vec{F}(\vec{r}(t))\|\|\vec{v}(t)\|dt = \int_\gamma \|\vec{F}\|ds = \int_\gamma \rho(x,y,z)ds = 4\pi$$

(b) Como

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\gamma \rho(x,y,z)ds$$

luego si $\rho(x,y,z) = 8\pi$ se tiene que

$$8\pi\ell = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

(c) El campo vectorial es paralelo a la curva $\vec{v}(t)$.

5. Sea C la curva obtenida de la intersección de las superficies

$$S_1 : \quad z = 2x, \quad y \geq 0 \qquad \text{y} \qquad S_2 : \quad z = x^2 + y^2,$$

calcule la masa de la curva, si se sabe que la función de densidad es $f(x, y, z) = \sqrt{1 + 4y^2}$

Solución:

Comenzamos parametrizando la curva C intersección de las superficies, así tenemos que al interceptar las superficies se observa: $x^2 + y^2 = 2x, \quad y \geq 0$ con $z = 2x$, luego la parametrización de esta curva es: $\vec{r}(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2 + 2\cos t)$ con $0 \leq t \leq \pi$ y $\vec{v}(t) = (-\sin t, \cos t, -2\sin t)$. De este modo:

$$\begin{aligned} \int_C f\ ds &= \int_0^\pi f(\vec{r}(t))\|\vec{v}(t)\| dt = \int_0^\pi \sqrt{1 + 4\sin^2 t}\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 4\sin^2 t}\ dt \\ &= \int_0^\pi \left(1 + 4\sin^2 t\right) dt = \pi + 2\int_0^\pi \left[1 - \cos(2t)\right]\ dt = 3\pi \end{aligned}$$

6. Encuentre la masa de la curva C dada por $r = 1 + \sin\theta$, con $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Si la densidad en cada punto es $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Solución:

En general para cualquier curva descrita en coordenadas polares de la forma $r = f(\theta)$, esta se puede parametrizar mediante $x = f(\theta)\cos\theta$ e $y = f(\theta)\sin\theta$ con $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, luego

$$\begin{aligned} \int_C h(x, y) ds &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} h(f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\sin\theta)\sqrt{(f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta)^2 + (f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta)^2} d\theta \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} h(f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2 + \left[\frac{dr}{d\theta}\right]^2} d\theta. \end{aligned}$$

Restringiendonos al ejemplo tenemos que $r = f(\theta) = 1 + \sin\theta$, luego la masa de la curva viene dada por la integral

$$\text{Masa} \ = \ \int_C (x^2 + y^2) ds = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} (1 + \sin\theta)^2 \sqrt{1 + \sin\theta} d\theta = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} (1 + \sin\theta)^{5/2} d\theta = \frac{256}{15}$$

7. Sea Γ la curva intersección de las superficies $x + y + z = 3$ y $x^2 + y^2 = 1$, si la densidad de masa es $f(x, y, z) = x^2\sqrt{1 - xy}$. Calcule la masa de la curva.

Solución: La parametrización de la curva Γ viene dada por

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 3 - \cos t - \sin t)\,, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

$$\begin{aligned} \text{Masa} &= \int_C f\ ds = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\sqrt{1 - \cos t \sin t}\sqrt{2 - 2\cos t \sin t} dt \\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 t(1 - \cos t \sin t) dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi\sqrt{2}. \end{aligned}$$

8. Un alambre C se enrolla sobre el manto del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ de forma tal que la altura $z = z(\theta)$ satisface la ecuación diferencial $z'' = z$ con condiciones iniciales $z(0) = 1$ y $z'(0) = 0$, donde (r, θ, z) son las respectivas coordenadas cilíndricas del punto.

   (a) Calcule la longitud del alambre C si $\theta \in [0, 2\pi]$.

   (b) Obtenga la masa del alambre C si la densidad en cada punto es $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

Solución:

(a) Primero es necesario obtener la parametrización de la curva C, para esto se resuelve la ecuación diferencial $z'' = z$ la cual tiene como solución

$$z(\theta) = C_1 e^{\theta} + C_2 e^{-\theta},$$

al imponer la condición $z(0) = 1$ se obtiene que $C_1 + C_2 = 1$. Y al imponer $z'(0) = 0$ se obtiene que $C_1 - C_2 = 0$, lo cual se traduce en que $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$, así

$$z(\theta) = \cosh\theta,$$

lo cual permite concluir que la parametrización de la curva C que describe al alambre es

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \cos\theta, \\ y(\theta) &= \sin\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi] \\ z(\theta) &= \cosh\theta, \end{aligned}$$

Con lo anterior la longitud del alambre es

$$\begin{aligned} \text{Longitud}_C &= \int_C ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2 + (z'(\theta))^2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta + \sinh^2\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sinh^2\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \cosh\theta d\theta = \sinh 2\pi \end{aligned}$$

(b) La masa del alambre viene determinada por

$$\begin{aligned} \text{Masa}_C &= \int_C f ds \\ &= \int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta, \cosh\theta) \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2 + (z'(\theta))^2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + \cosh^2\theta) \cosh\theta d\theta = \sinh 2\pi + \int_0^{2\pi} (1 + \sinh^2\theta) \cosh\theta d\theta = 2\sinh 2\pi + \frac{\sinh^3 2\pi}{3} \end{aligned}$$

9. Encuentre la masa de la curva γ intersección de las superficies

$$z = y, \qquad 2z = x^2 + y^2 + \frac{1}{4}, \qquad x \geq 0, \qquad y \geq 1,$$

si la densidad en cada punto de la curva γ es $\rho(x, y, z) = 2(y-1)x$.

Solución: Primero se obtiene la curva γ generada en la intersección de las superficies, la cual viene dada por

$$\left\{ \begin{array}{c} z = y \\ 2z = x^2 + y^2 + \dfrac{1}{4} \\ x \geq 0 \\ y \geq 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{array}{c} x^2 + (y-1)^2 = \dfrac{3}{4} \\ x \geq 0, \quad y \geq 1 \end{array}$$

la cual es parametrizada como

$$r(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t \right) \qquad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

luego para obtener la masa total de la curva se debe obtener $\displaystyle\int_\gamma \rho ds$, de esta forma

$$\int_\gamma \rho ds = \int_0^{\pi/2} \rho(r(t)) ||r'(t)|| dt = \frac{3\sqrt{3}}{4} \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t \sqrt{1 + \cos^2 t} dt = \frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{2} - 1)$$

10. Considere la curva C intersección de las superficies

$$S_1: \quad z = x^2 + 4y^2, \qquad\qquad S_2: z = 2x + 3,$$

y el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (z, x, y)$

(a) Determinar una parametrización para la curva C.

(b) Calcule $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Solución:

(a) Al interceptar las superficies $z = x^2 + 4y^2$ y $z = 2x + 3$ se obtiene que $(x-1)^2 + 4y^2 = 4$, de esta forma la parametrización de la curva C es:

$$\vec{r}(t) = (1 + 2\cos t, \sin t, 5 + 4\cos t), \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

cuyo vector velocidad es

$$\vec{v}(t) = (-2\sin t, \cos t, -4\sin t), \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

(b) El trabajo del campo $\vec{F}$ viene dado por

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}\left(\vec{r}(t)\right) \cdot \vec{v}(t)\ dt, \\
&= \int_0^{2\pi} (5 + 4\cos t, 1 + 2\cos t, \sin t) \cdot (-2\sin t, \cos t, -4\sin t)\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(2\cos^2 t - 4\sin^2 t\right) dt = 2\pi - 4\pi = -2\pi,
\end{aligned}$$

11. Sea C la curva que describe el borde de la región limitada por el primer cuadrante, $x^2 + y^2 = a^2$ y los ejes x e y respectivamente, en sentido anti horario. Si C_1 es el contorno de la circunferencia. Calcule

$$\int_{C_1} (x\sin(x^2) - y^3)dx + (x^3 + y\cos(y^2))dy$$

Solución: Denotamos por l_x y l_y los segmentos de curva correspondientes a los ejes X e Y respectivamente, y sea R la región encerrada por la curva cerrada simple $C_1 \cup l_x \cup l_y$, si denotamos como

$$m(x, y) = x\sin(x^2) - y^3, \qquad n(x, y) = x^3 + y\cos(y^2),$$

el problema consiste en hallar

$$\int_{C_1} m(x, y)dx + n(x, y)dy,$$

usando el Teorema de Green se tiene que

$$\int_{C_1} m(x, y)dx + n(x, y)dy + \int_{l_x} m(x, y)dx + n(x, y)dy + \int_{l_y} m(x, y)dx + n(x, y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial n}{\partial x} - \frac{\partial m}{\partial y}\right) dA,$$

luego

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} m(x, y)dx + n(x, y)dy &= -\int_{l_x} m(x, y)dx + n(x, y)dy - \int_{l_y} m(x, y)dx + n(x, y)dy + \iint_R (3x^2 + 3y^2)dA \\
&= -\int_{l_x} m(x, y)dx + n(x, y)dy - \int_{l_y} m(x, y)dx + n(x, y)dy + \int_0^{2\pi}\int_0^a 3r^3 dr d\theta \\
&= -\int_0^a \left(m(t, 0)\frac{dx}{dt} + n(t, 0)\frac{dy}{dt}\right) dt + \int_a^0 \left(m(0, t)\frac{dx}{dt} + n(0, t)\frac{dy}{dt}\right) dt \\
&+ \int_0^{2\pi}\int_0^a 3r^3 dr d\theta,
\end{aligned}$$

luego

$$\int_{C_1} m(x,y)dx + n(x,y)dy = -\int_0^a (t\sin^2 t + t\cos^2 t)dt + \int_0^{2\pi}\int_0^a 3r^3 dr d\theta = -\frac{a^2}{2} + \frac{3\pi a^4}{2}$$

12. Calcule la integral de línea

$$\oint_C \left(\frac{y}{9x^2+4y^2} - y^3\right)dx + \left(x^3 - \frac{x}{9x^2+4y^2}\right)dy,$$

a lo largo de la curva C descrita por $x^2+y^2 = 4x+5$ recorrida en sentido antihorario.

Solución: Comenzamos definiendo los campos escalares $m(x,y) = \dfrac{y}{9x^2+4y^2} - y^3$ y $n(x,y) = x^3 - \dfrac{x}{9x^2+4y^2}$, de esta forma:

$$\partial_x n - \partial_y m = 3x^2 - \left(\frac{9x^2+4y^2-18x^2}{(9x^2+4y^2)^2}\right) - \left(\frac{9x^2+4y^2-8y^2}{(9x^2+4y^2)^2}\right) + 3y^2 = 3(x^2+y^2),$$

posteriormente denotaremos por C_ϵ a la curva que permite encerrar a la singularidad $(0,0)$, tal curva será descrita por $9x^2+4y^2 = \epsilon^2$ con $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño de modo que la curva C_ϵ este completamente contenida en la región encerrada por C. Luego definiremos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de la forma

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \le 4x+5,\ 9x^2+4y^2 \ge \epsilon^2\right\},$$

notamos que $\vec{F}$ es de clase C^1 en Ω, así podemos aplicar el teorema de Green:

$$\oint_C mdx + ndy - \oint_{C_\epsilon} mdx + ndy = \iint_\Omega (\partial_x n - \partial_y m)\, dA,$$

• Cálculo de la integral de línea: La parametrización antihorario de la curva C_ϵ esta dada por: $x = \dfrac{\epsilon}{3}\cos t$ e $y = \dfrac{\epsilon}{2}\sin t$ con $0 \le t \le 2\pi$, de este modo se tiene que

$$\begin{aligned}
\oint_{C_\epsilon} mdx + ndy &= \int_0^{2\pi}\left[m\left(\frac{\epsilon}{3}\cos t, \frac{\epsilon}{2}\sin t\right)\left(-\frac{\epsilon}{3}\sin t\right) + n\left(\frac{\epsilon}{3}\cos t, \frac{\epsilon}{2}\sin t\right)\left(\frac{\epsilon}{2}\cos t\right)\right]dt \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{\epsilon^4}{54}\cos^4 t + \frac{\epsilon^4}{24}\sin^4 t - \frac{1}{6}\right)dt = \frac{3\pi\epsilon^4}{216} + \frac{3\pi\epsilon^4}{96} - \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

donde se usa que $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^4 t dt = \int_0^{2\pi}\sin^4 t dt = \frac{3\pi}{4}$.

• Cálculo de la integral doble: Notamos que

$$\begin{aligned}
\iint_\Omega (\partial_x n - \partial_y m)\, dA &= \iint_\Omega 3(x^2+y^2)\ dA \\
&= 3\int_0^{2\pi}\int_0^1 9r\Big(9r^2\sin^2\theta + (2+3r\cos\theta)^2\Big)drd\theta - 3\int_0^{2\pi}\int_0^\epsilon \frac{r}{6}\left(\frac{r^2}{9}\cos^2\theta + \frac{r^2}{4}\sin^2\theta\right)drd\theta \\
&= 3\int_0^{2\pi}\int_0^1 9r(9r^2 + 12r\cos\theta + 4)drd\theta - \left(\frac{3\pi\epsilon^4}{216} + \frac{3\pi\epsilon^4}{96}\right) = \frac{459\pi}{2} - \left(\frac{3\pi\epsilon^4}{216} + \frac{3\pi\epsilon^4}{96}\right)
\end{aligned}$$

donde se usa que $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta = \int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta = \pi$. Todo lo que permite concluir que

$$\oint_C mdx + ndy = \frac{459\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{1375\pi}{6}$$

13. Encuentre el área de la región limitada por la parte interior a $|z|+|x-1|=1$ y exterior a $(x-1)^{2/3}+z^{2/3}=1$

Solución: Sea Ω la región limitada por las curvas del enunciado, además sea Ω_c la región interior al astroide usando el teorema de Green en el plano zx esta área viene dada por

$$A(\Omega_c)=\frac{1}{2}\oint_{\partial\Omega} xdz-zdx,$$

para evaluar tal integral se parametriza el astroide como $\vec{r}(t)=\left(1+\cos^3 t,\sin^3 t\right)$ con $0\leq t\leq 2\pi$ de esta forma el vector velocidad viene dado por $\vec{v}(t)=\left(-3\cos^2\sin t, 3\sin^2 t\cos t\right)$ luego

$$\begin{aligned} A(\Omega_c) &= \frac{1}{2}\oint_{\partial\Omega} xdz-zdx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(x(t)\frac{dz}{dt}-z(t)\frac{dx}{dt}\right)dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left((1+\cos^3 t)3\sin^2 t\cos t+3\sin^4 t\cos^2\right)dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(3\sin^2 t\cos t+3\cos^4 t\sin^2 t+3\sin^4 t\cos^2 t\right)dt=\frac{3b^2}{2}\int_0^{2\pi}(\sin t\cos t)^2\,dt=\frac{3\pi}{8} \end{aligned}$$

mientras que el área del rombo es 2, con esto se tiene que el área pedida es

$$A(\Omega)=2-A(\Omega_c)=2-\frac{3\pi}{8}$$

14. Determine la magnitud del trabajo ejercido por el campo de fuerzas $\vec{F}$ definido como $\vec{F}(x,y,z)=(z,x,y)$ a lo largo de la curva C descrita por la intersección de las superficies

$$S_1:\quad z=x^2+2y^2,\qquad S_2:\quad 4x^2+9y^2=36.$$

Solución: Procedemos parametrizando la curva C descrita por la intersección de las superficies, asi se tiene que

$$\vec{r}(t)=\left(3\cos t, 2\sin t, 9\cos^2 t+8\sin^2 t\right)\qquad 0\leq t\leq 2\pi,$$

luego

$$\begin{aligned} \left|\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}\right| &= \left|\int_0^{2\pi}\left(9\cos^2 t+8\sin^2 t, 3\cos t, 2\sin t\right)\cdot(-3\sin t, 2\cos t, -2\sin t\cos t)dt\right| \\ &= \left|\int_0^{2\pi}\left(-27\sin t\cos^2 t-24\sin^3 t+6\cos^2 t-4\sin^2 t\cos t\right)dt\right|=\left|\int_0^{2\pi}6\cos^2 t dt\right|=6\pi \end{aligned}$$

15. Determine el valor de la integral de línea

$$\oint_\gamma\left(\frac{-y}{4x^2+y^2}+5y\right)dx+\left(\frac{x}{4x^2+y^2}+9x\right)dy,$$

donde γ es la curva descrita en sentido anti horario por $|x|+|y|=4$

Solución: Comenzamos definiendo los campos escalares $M(x,y)=\dfrac{-y}{4x^2+y^2}+5y$ y $N(x,y)=\dfrac{x}{4x^2+y^2}+9x$, de esta forma:

$$\partial_x N-\partial_y M=\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}+9-\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}-5=4,$$

posteriormente denotaremos por C_ϵ a la curva que permite encerrar a la singularidad $(0,0)$, tal curva será descrita por $4x^2+y^2=\epsilon^2$ con $\epsilon>0$ lo suficientemente pequeño de modo que la curva C_ϵ este completamente contenida en la región encerrada por γ. Luego definiremos como $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ de la forma

$$\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ |x|+|y|\leq 4,\ 4x^2+y^2\geq\epsilon^2\right\}.$$

De este modo el Teorema de Green se aplica de la forma:

$$\oint_\gamma Mdx+Ndy-\oint_{C_\epsilon}Mdx+Ndy=\iint_\Omega(\partial_x N-\partial_y M)\,dA,$$

así consideraremos la parametrización anti horario de la curva C_ϵ como: $x = \frac{\epsilon}{2}\cos t$ e $y = \epsilon \sin t$ con $0 \le t \le 2\pi$, de este modo se tiene que

$$\begin{aligned}
\oint_{C_\epsilon} Mdx + Ndy &= \int_0^{2\pi} M\left(\frac{\epsilon}{2}\cos t, \epsilon \sin t\right)\left(-\frac{\epsilon}{2}\sin t\right) + N\left(\frac{\epsilon}{2}\cos t, \epsilon\sin t\right)(\epsilon\cos t)dy \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{9\epsilon^2}{2}\cos^2 t - \frac{5\epsilon^2}{2}\cos t\right)dt \\
&= \pi - \frac{5\epsilon^2\pi}{2} + \frac{9\epsilon^2\pi}{2} = \pi + 2\pi\epsilon^2
\end{aligned}$$

posteriormente

$$\iint_\Omega 4dA = 4\left(32 - \frac{\pi\epsilon^2}{2}\right) = 128 - 2\pi\epsilon^2,$$

lo que permite concluir que

$$\oint_\gamma Mdx + Ndy = 128 + \pi$$

16. Considere la curva C intersección de las superficies

$$S_1: \quad z - x^2 - 4y^2 = 0 \qquad\qquad S_2: z = 2x + 3, \quad x \ge 1.$$

Determine la masa de la curva C si la densidad en cada punto esta dada por

$$\rho(x, y, z) = (x-1)|y|$$

Solución: Al interceptar las superficies $z = x^2 + 4y^2$ y $z = 2x + 3$ se obtiene que $(x-1)^2 + 4y^2 = 4$, de esta forma la parametrización de la curva C es:

$$\vec{r}(t) = (1 + 2\cos t, \sin t, 5 + 4\cos t), \qquad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

cuyo vector velocidad es

$$\vec{v}(t) = (-2\sin t, \cos t, -4\sin t), \qquad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

y su norma viene dada por $\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + 20\sin^2 t} = \sqrt{1 + 19\sin^2 t}$, usando lo anterior se tiene que la masa de la curva viene dada por

$$\begin{aligned}
\text{Masa}_C &= \int_C \rho ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho\left(\vec{r}(t)\right)\|\vec{v}(t)\|dt \\
&= -\int_{-\pi/2}^{0} 2\cos t\sin t\sqrt{1 + 19\sin^2 t}dt + \int_0^{\pi/2} 2\cos t \sin t\sqrt{1 + 19\sin^2 t}dt \\
&= -\frac{2}{57}\left(1 + 19\sin^2 t\right)^{3/2}\Big|_{-\pi/2}^{0} + \frac{2}{57}\left(1 + 19\sin^2 t\right)^{3/2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{57}\left(20^{3/2} - 1\right)
\end{aligned}$$

17. Considere una placa laminar D determinada por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; / x \le \max\{y, -y\}, \;\; \ell^2 \le x^2 + y^2 \le r^2\}$$

(a) Utilizando el Teorema de Green encuentre el área de la placa laminar D.

(b) Si la densidad en cada punto de la placa D es $\rho(x, y) = x^2 + y^2$, encuentre una expresión en termino de integrales de línea para obtener la masa de la placa D.

Solución: Se sabe que el área del anillo completo es $A = \pi(r^2 - \ell^2)$, la área de D la obtendremos por diferencia, es decir, hallaremos el área de la región

$$D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; / x \ge \max\{y, -y\}, \;\; \ell^2 \le x^2 + y^2 \le r^2\},$$

así el área de D es $Area(D) = A - Area(D')$. Denotamos por C a la la curva cerrada simple que encierra a D', luego el área de D' se obtiene como

$$2\text{area}(D') = \oint_C xdy - ydx,$$

de esta forma parametrizando la curva C en sentido anti horario se tiene que

$$2\text{area}(D') = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (r^2\cos^2 t + r^2 \sin^2 t)dt - \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (\ell^2\cos^2 t + \ell^2 \sin^2 t)dt + \int_{\sqrt{2}/2\ell}^{\sqrt{2}/2r} (t-t)dt - \int_{\sqrt{2}/2r}^{\sqrt{2}/2\ell} (t-t)dt,$$

o bien

$$2\text{area}(D') = \frac{\pi}{2}(r^2 - \ell^2),$$

luego

$$\text{area}(D) = \frac{3\pi}{4}(r^2 - \ell^2).$$

Ahora, si la densidad en cada punto de la placa D es $\rho(x, y) = x^2 + y^2$, una expresión en términos de integrales de línea para obtener la masa de la lámina D es

$$\text{masa} = \iint_D (x^2 + y^2)dA = \oint_{C_D} \frac{x^3}{3}dy - \frac{y^3}{3}dx$$

donde C_D es la curva cerrada simple que encierra a D.

18. Considere el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{(x-1)^2 + y^2}, \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} + x \right)$ determine el trabajo en sentido antihorario a traves de la curva C descrita por $|x| + |y| = 4$.

Solución: Primero definiremos los campos escalares $M(x, y) = \frac{-y}{(x-1)^2 + y^2}$ y $N(x, y) = \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} + x$, de esta forma:

$$\partial_x N - \partial_y M = \frac{y^2 - (x-1)^2}{((x-1)^2 + y^2)^2} + 1 - \frac{y^2 - (x-1)^2}{((x-1)^2 + y^2)^2} = 1,$$

posteriormente denotaremos por C_ϵ a la curva que permite encerrar a la singularidad (1,0), tal curva será descrita por $(x-1)^2 + y^2 = \epsilon^2$ con $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño de modo que la curva C_ϵ este completamente contenida en C. Consideraremos la parametrización anti horario de la curva C_ϵ como: $x = 1 + \epsilon \cos t$ e $y = \epsilon \sin t$ con $0 \leq t \leq 2\pi$, así el trabajo del campo $\vec{F}$ a lo largo de esta curva es:

$$\begin{aligned}
\oint_{C_\epsilon} Mdx + Ndy &= \int_0^{2\pi} M(1 + \epsilon\cos t, \epsilon \sin t)(-\epsilon \sin t) + N(1 + \epsilon \cos t, \epsilon \sin t)(\epsilon \cos t)dy \\
&= \int_0^{2\pi} (1 + \epsilon^2 \cos^2 t + \epsilon \cos t)dt = 2\pi + \pi\epsilon^2.
\end{aligned}$$

Posteriormente sea Ω_ϵ la región cerrada y acotada cuyo borde es la curva C_ϵ. Luego para determinar el trabajo ocupamos el Teorema de Green

$$\oint_C Mdx + Ndy - \oint_{C_\epsilon} Mdx + Ndy = \iint_{\Omega - \Omega_\epsilon} (\partial_x N - \partial_y M)\, dA = 32 - \pi\epsilon^2,$$

de esta forma tenemos que

$$\oint_C Mdx + Ndy = 32 - \pi\epsilon^2 + 2\pi + \pi\epsilon^2 = 34\pi$$

19. Para $\lambda \in \mathbb{R}$ considere el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{(x-1)^2 + y^2}, \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} + \lambda x \right)$ y sea C una curva cerrada simple la cual posee las siguientes propiedades:

- Para cualquier punto P de la curva C la distancia al origen es mayor que 4.
- La curva C encierra al origen.

- El área de la región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ cerrada y acotada cuyo borde es la curva C esta dada por A.

(a) Determine el trabajo del campo $\vec{F}$ sobre C para todo los valores de λ, si existen, tal que $\vec{F}$ es irrotacional.

(b) Determine el trabajo del campo $\vec{F}$ sobre C para todo los valores de λ, si existen, tal que $\vec{F}$ es rotacional.

Solución: Primero definiremos los campos escalares $M(x,y) = \dfrac{-y}{(x-1)^2+y^2}$ y $N(x,y) = \dfrac{x-1}{(x-1)^2+y^2} + \lambda x$, de esta forma:

$$\partial_x N - \partial_y M = \frac{y^2-(x-1)^2}{\left((x-1)^2+y^2\right)^2} + \lambda - \frac{y^2-(x-1)^2}{\left((x-1)^2+y^2\right)^2} = \lambda,$$

posteriormente denotaremos por C_ϵ a la curva que permite encerrar a la singularidad (1,0), tal curva será descrita por $(x-1)^2+y^2 = \epsilon^2$ con $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño de modo que la curva C_ϵ este completamente contenida en C. Consideraremos la parametrización anti horario de la curva C_ϵ como: $x = 1+\epsilon\cos t$ e $y = \epsilon \sin t$ con $0 \leq t \leq 2\pi$, así el trabajo del campo $\vec{F}$ a lo largo de esta curva es:

$$\begin{aligned}
\oint_{C_\epsilon} Mdx + Ndy &= \int_0^{2\pi} M(1+\epsilon\cos t, \epsilon\sin t)(-\epsilon\sin t) + N(1+\epsilon\cos t, \epsilon\sin t)(\epsilon\cos t)dy \\
&= \int_0^{2\pi} (1+\lambda\epsilon^2\cos^2 t + \lambda\epsilon\cos t) = 2\pi + \lambda\pi\epsilon^2.
\end{aligned}$$

Posteriormente sea Ω_ϵ la región cerrada y acotada cuyo borde es la curva C_ϵ.

(a) El campo es irrotacional si $\lambda = 0$, en este caso para hallar el trabajo ocupamos el Teorema de Green

$$\oint_C Mdx + Ndy - \oint_{C_\epsilon} Mdx + Ndy = \iint_{\Omega-\Omega_\epsilon} (\partial_x N - \partial_y M)\, dA = 0,$$

de esta forma tenemos que

$$\oint_C Mdx + Ndy = \oint_{C_\epsilon} Mdx + Ndy = 2\pi$$

(b) El campo es rotacional si $\lambda \neq 0$, en este caso para hallar el trabajo ocupamos el Teorema de Green

$$\oint_C Mdx + Ndy - \oint_{C_\epsilon} Mdx + Ndy = \iint_{\Omega-\Omega_\epsilon} (\partial_x N - \partial_y M)\, dA = \lambda(A - \pi\epsilon^2),$$

de esta forma tenemos que

$$\oint_C Mdx + Ndy = \lambda(A-\pi\epsilon^2) + (2\pi + \lambda\pi\epsilon^2) = \lambda A + 2\pi$$

20. Determinar el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x,y,z) = \left(1 + \dfrac{y^3}{(4x^2+y^2)^2}, \dfrac{-xy^2}{(4x^2+y^2)^2}\right)$ a lo largo de la curva C descrita por

$$\begin{aligned}
x^2+y^2 &= 9, \quad y \geq 0 \\
16x^2+9y^2 &= 144, \quad x \leq 0, \quad y \leq 0 \\
x - y &= 4, \quad y \leq 0, \quad x \geq 0
\end{aligned}$$

Solución:

La idea consiste en aplicar el Teorema de Green, para esto se definen los campos escalares $M(x,y) = 1 + \dfrac{y^3}{(4x^2+y^2)^2}$ y $N(x,y) = \dfrac{-xy^2}{(4x^2+y^2)^2}$ de donde es directo verificar que $\dfrac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$, posteriormente se procede agregando la curva C_1 definida como

$$C_1: \quad y = 0, \quad x = t, \quad 3 \leq t \leq 4,$$

en este caso $C_1 \cup C$ es una curva cerrada, luego encerramos la singularidad $(0,0)$ con la curva C_ϵ descrita por

$$C_\epsilon : \quad 4x^2 + y^2 = \epsilon^2, \quad 0 \leq \epsilon \leq 1,$$

ahora se Ω la región encerrada por las curvas $C \cup C_1$ y C_ϵ, con lo anterior el Teorema de Green para este caso consiste en

$$\oint_{C \cup C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \oint_{C_\epsilon} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_\Omega \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA,$$

de esta forma

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_\epsilon} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- Calculo de $\displaystyle\oint_{C_\epsilon} \vec{F} \cdot d\vec{r}$: La parametrización de C_ϵ es $x = \dfrac{\epsilon}{2} \cos t$ e $y = \epsilon \sin t$ con $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\begin{aligned} \oint_{C_\epsilon} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{\epsilon^3 \sin^3 t}{\epsilon^4}, \frac{-\frac{\epsilon^3}{2} \cos t \sin^2 t}{\epsilon^4} \right) \cdot \left(-\frac{\epsilon}{2} \sin t, \epsilon \cos t \right) dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\sin^4 t + \sin^2 t \cos^2 t \right) dt = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

- Calculo de $\displaystyle\oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$: En este caso notamos que

$$\oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_3^4 (1,0) \cdot (1,0) dt = -1$$

luego

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 1 - \frac{\pi}{2}$$

21. Calcule el trabajo del campo de vectorial $\vec{F}$ de clase $\mathcal{C}^1$ en $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ definido como

$$\vec{F}(x,y) = \begin{cases} \left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2} + x \right) & \text{si } y \geq 0, \\ \left(-\dfrac{y}{4x^2+y^2}, \dfrac{x}{4x^2+y^2} \right) & \text{si } y < 0, \end{cases}$$

a lo largo de la curva C descrita por $4x^2 + 9y^2 = 36$, orientada en sentido antihorario.

Solución: Aplicamos el Teorema de Green para calcular

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

como el campo tiene una singularidad en $(0,0)$ procedemos a encerrarla mediante el uso de las siguientes curvas:

$$C_1 : \; x = \epsilon \cos t, \quad y = \epsilon \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi, \qquad C_2 : \; x = \frac{\delta}{2} \cos t, \quad y = \delta \sin t, \quad \pi \leq t \leq 2\pi,$$

para poder conectar estas curvas y proceder a encerrar la singularidad, es que consideraremos $\epsilon < \frac{\delta}{2}$ y los segmentos rectos:

$$\ell_1 : \; x = t, \quad y = 0, \quad \epsilon \leq t \leq \frac{\delta}{2}, \qquad \ell_2 : \; x = t, \quad y = 0, \quad -\frac{\delta}{2} \leq t \leq -\epsilon$$

en la cual ϵ y δ se escogen lo suficientemente pequeños de modo que las curvas estén contenidas en la región encerrada por la curva C. Así definimos la curva cerrada simple C^* como $C^* = C_1 \cup C_2 \cup \ell_1 \cup \ell_2$, de esta forma el Teorema de Green consiste en

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} - \oint_{C*} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_\Omega \nabla\times\vec{F}\cdot\hat{k}\; dA,$$

donde Ω es la región limitada por el interior de C y exterior de C^*.

• Integral doble: Para $y \geq 0$ tenemos que el campo es rotacional pues

$$\nabla\times\vec{F}\cdot\hat{k} = \partial_x\left(\frac{x}{x^2+y^2}+x\right) - \partial_y\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = 1,$$

mientras que para $y < 0$ tenemos que el campo es irrotacional

$$\nabla\times\vec{F}\cdot\hat{k} = \partial_x\left(\frac{x}{4x^2+y^2}\right) - \partial_y\left(-\frac{y}{4x^2+y^2}\right) = 0,$$

luego

$$\iint_\Omega \nabla\times\vec{F}\cdot\hat{k}\; dA = 3\pi - \frac{\pi\epsilon^2}{2}$$

• En la curva C_1 tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_\pi^{2\pi}\left(-\frac{\epsilon\sin t}{\epsilon^2}, \frac{\epsilon\cos t}{2\epsilon^2}\right)\cdot\left(-\frac{\epsilon}{2}\sin t, \epsilon\cos t\right)dt \\ &= \frac{1}{2}\int_\pi^{2\pi} dt = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

• En la curva C_2 tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_0^{\pi}\left(-\frac{\epsilon\sin t}{\epsilon^2}, \frac{\epsilon\cos t}{\epsilon^2}+\epsilon\cos t\right)\cdot(-\epsilon\sin t, \epsilon\cos t)\,dt \\ &= \int_0^\pi (1+\epsilon^2\cos^2 t)dt = \pi + \frac{\pi\epsilon^2}{2}\end{aligned}$$

• En la curva ℓ_1 tenemos que

$$\int_{\ell_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_\epsilon^{\delta/2}\left(0, \frac{1}{t}+t\right)\cdot(1,0)dt = 0$$

• En la curva ℓ_2 tenemos que

$$\int_{\ell_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{-\delta/2}^{-\epsilon}\left(0, \frac{1}{t}\right)\cdot(1,0)dt = 0$$

luego tenemos que el trabajo del campo vectorial de $\vec{F}$ sobre C es:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 3\pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{9\pi}{2}$$

Observación: Una solución alternativa es proceder mediante definición para determinar la integral de trabajo del campo $\vec{F}$ a través de la curva C

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\hat{r},$$

procediendo mediante definición de integrales de línea. Para esto es necesario parametrizar la curva C, la cual es:

$$\vec{r}(t) = (3\cos t, 2\sin t) \qquad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

luego el trabajo es

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{F}\cdot d\hat{r} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}\,(3\cos t, 2\sin t)\cdot(-3\sin t, 2\cos t)\,dt \\ &= \int_0^{\pi} \vec{F}\,(3\cos t, 2\sin t)\cdot(-3\sin t, 2\cos t)\,dt + \int_\pi^{2\pi} \vec{F}\,(3\cos t, 2\sin t)\cdot(-3\sin t, 2\cos t)\,dt\end{aligned}$$

La expresión anterior debe estar evaluada en la parametrización, aunque notar que para efectos del cálculo del valor de la expresión anterior es poco manejable algebraicamente, pues no es posible determinar una anti derivada explícita.

22. Determine el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x,y) = \left(\dfrac{x}{4x^2+y^2} + 4x, \dfrac{y}{4x^2+y^2}\right)$ a traves de la curva C descrita mediante $|x|+|y|=1$, respecto a la normal unitaria exterior.

Solución: Aplicamos el Teorema de Green o la divergencia en plano, así sea C_ϵ la curva $4x^2+y^2=\epsilon^2$ la cual encierra al origen y donde ϵ es lo suficientemente pequeño de modo que C_ϵ este contenida en la region Ω encerrada por C. Sea Ω_ϵ la región encerrada por C_ϵ y sean $\hat{n}_C$ y $\hat{n}_{C_\epsilon}$ las normales unitarias exteriores a las curvas C y C_ϵ, de esta forma

$$\iint_{\Omega-\Omega_\epsilon} \nabla\cdot\vec{F}dA = \oint_C \vec{F}\cdot\hat{n}_C ds - \oint_{C_\epsilon}\vec{F}\cdot\hat{n}_{C_\epsilon}ds,$$

luego

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega-\Omega_\epsilon} \nabla\cdot\vec{F}dA &= \iint_{\Omega-\Omega_\epsilon} 4dA\\ &= 4\text{area}(\Omega) - 4\text{area}(\Omega_\epsilon) = 8-2\pi\epsilon^2\end{aligned}$$

posteriormente si se definen los campos escalares $m(x,y) = \dfrac{x}{4x^2+y^2}+4x$ y $n(x,y) = \dfrac{y}{4x^2+y^2}$, y además se considera que la curva C_ϵ esta parametrizada por $x=\frac{\epsilon}{2}\cos t$ e $y=\epsilon\sin t$ con $0\le t\le 2\pi$ se tiene que:

$$\oint_{C_\epsilon}\vec{F}\cdot\hat{n}_{C_\epsilon}ds = \oint_{C_\epsilon} mdy - ndx = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+2\epsilon^2\cos^2 t\right)dt = \pi + 2\pi\epsilon^2,$$

de esta forma

$$\oint_C \vec{F}\cdot\hat{n}_C ds = 8+\pi$$

23. Calcule la integral de línea

$$\oint_C \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy - \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx,$$

a través de la curva C descrita por $x^2+y^2=4x+5$ recorrida en sentido antihorario.

Solución: Comenzamos definiendo los campos escalares $m(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$ y $n(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, de esta forma:

$$\partial_x n - \partial_y m = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0,$$

notamos que la curva C puede ser descrita mediante $(x-2)^2+y^2=9$, de esta forma denotaremos por C_ϵ a la curva cuya región encerrada contiene a la singularidad $(0,0)$, tal curva será descrita por $x^2+y^2=\epsilon^2$ con $\epsilon>0$ lo suficientemente pequeño de modo que la curva C_ϵ este completamente contenida en la región encerrada por C. Luego aplicaremos el Teorema de Green en la región $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ definida como:

$$\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2\le 4x+5, \ x^2+y^2\ge\epsilon^2\right\},$$

en tal región el campo vectorial es de clase C^1, de este modo el Teorema de Green se aplica de la forma:

$$\oint_C mdx+ndy - \oint_{C_\epsilon} mdx+ndy = \iint_\Omega (\partial_x n - \partial_y m)\,dA,$$

así consideraremos la parametrización antihorario de la curva C_ϵ como: $x=\epsilon\cos t$ e $y=\epsilon\sin t$ con $0\le t\le 2\pi$, de este modo se tiene que:

$$\begin{aligned}\oint_{C_\epsilon} mdx+ndy &= \int_0^{2\pi}\Big[m(\epsilon\cos t,\epsilon\sin t)(-\epsilon\sin t) + n(\epsilon\cos t,\epsilon\sin t)(\epsilon\cos t)\Big]dt\\ &= \int_0^{2\pi}\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)dt = 2\pi\end{aligned}$$

todo lo anterior permite concluir que

$$\oint_C mdx + ndy = \oint_C \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy - \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx = 2\pi$$

24. Calcule la integral de línea

$$\oint_C \left(\frac{y}{9x^2+4y^2}\right)dx + \left(2x - \frac{x}{9x^2+4y^2}\right)dy,$$

a lo largo de la curva C descrita por $x^2+y^2=9$ recorrida en sentido antihorario.

Solución: Comenzamos definiendo los campos escalares $m(x,y) = \dfrac{y}{9x^2+4y^2}$ y $n(x,y) = 2x - \dfrac{x}{9x^2+4y^2}$, de esta forma:

$$\partial_x n - \partial_y m = 2 - \left(\frac{9x^2+4y^2-18x^2}{(9x^2+4y^2)^2}\right) - \left(\frac{9x^2+4y^2-8y^2}{(9x^2+4y^2)^2}\right) = 2,$$

posteriormente denotaremos por C_ϵ a la curva que permite encerrar a la singularidad $(0,0)$, tal curva será descrita por $9x^2+4y^2=\epsilon^2$ con $\epsilon>0$ lo suficientemente pequeño de modo que la curva C_ϵ este completamente contenida en la región encerrada por C. Luego definiremos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de la forma

$$\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \leq 9,\ 9x^2+4y^2 \geq \epsilon^2\right\},$$

de este modo $\vec{F}$ es de clase C^1 en Ω y podemos aplicar el teorema de Green:

$$\oint_C mdx + ndy - \oint_{C_\epsilon} mdx + ndy = \iint_\Omega (\partial_x n - \partial_y m)\, dA,$$

• Cálculo de integral de línea: La parametrización antihorario de la curva C_ϵ esta dada por: $x = \frac{\epsilon}{3}\cos t$ e $y = \frac{\epsilon}{2}\sin t$ con $0 \leq t \leq 2\pi$, de este modo se tiene que

$$\begin{aligned}\oint_{C_\epsilon} mdx + ndy &= \int_0^{2\pi} m\left(\frac{\epsilon}{3}\cos t, \frac{\epsilon}{2}\sin t\right)\left(-\frac{\epsilon}{3}\sin t\right) + n\left(\frac{\epsilon}{3}\cos t, \frac{\epsilon}{2}\sin t\right)\left(\frac{\epsilon}{2}\cos t\right) dy \\ &= \int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{6} + \frac{\epsilon^2}{3}\cos^2 t\right) dt = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi\epsilon^2}{3}\end{aligned}$$

• Cálculo de integral doble: Notamos que

$$\iint_\Omega (\partial_x n - \partial_y m)\, dA = \iint_\Omega 2\ dA = 2\cdot \text{Área}_\Omega = 2\left(9\pi - \frac{\pi\epsilon^2}{6}\right)$$

lo que permite concluir que

$$\oint_C mdx + ndy = \frac{53\pi}{3}$$

25. Sea $\vec{F} = \vec{F}(x,y)$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ definido sobre una región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ cerrada y acotada cuya frontera es una curva cerrada simple denotada por $\partial\Omega$, y sea $u = u(x,y)$ una función escalar de clase $\mathcal{C}^2(\Omega)$. Suponga además que:

- $\displaystyle\iint_\Omega u\ dA = -\oint_{\partial\Omega} u\vec{F}\cdot\hat{n}\ ds + \oint_{\partial\Omega} \nabla u\cdot\hat{n}\ ds$, donde $\hat{n}$ es la normal unitaria exterior a $\partial\Omega$.
- $\operatorname{div}(\vec{F}) = \nabla\cdot\vec{F} = 0$.

Verifique que:

$$\iint_\Omega \left(u + \vec{F}\cdot\nabla u - \Delta u\right) dA = 0$$

Sugerencia: Utilice el Teorema de Green, además recuerde que $\nabla u := \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$ *y* $\Delta u := \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Solución: De la información entregada y usando el Teorema de Green tenemos

$$\begin{aligned}\iint_\Omega u\,dA &= -\oint_{\partial\Omega} u\vec{F}\cdot\hat{n}\,ds + \oint_{\partial\Omega} \nabla u\cdot\hat{n}\,ds\\ &= -\iint_\Omega \operatorname{div}(u\vec{F})\,dA + \iint_\Omega \operatorname{div}(\nabla u)\,dA\end{aligned}$$

si tomamos como $\vec{F}(x,y) := (m,n)$ con $m = m(x,y)$ y $n = n(x,y)$ tenemos que

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(u\vec{F}) &= \partial_x(u\cdot m) + \partial_y(u\cdot n)\\ &= m\partial_x u + u\partial_x m + n\partial_y u + u\partial_y n\\ &= m\partial_x u + n\partial_y u + u\,\big(\partial_x m + \partial_y n\big)\\ &= \vec{F}\cdot\nabla u + u\,\operatorname{div}(\vec{F})\\ &= \vec{F}\cdot\nabla u\end{aligned}$$

lo anterior pues $\operatorname{div}(\vec{F}) = 0$. Además como $\operatorname{div}(\nabla u) = \Delta u$, tenemos de forma directa que:

$$\iint_\Omega \Big(u + \vec{F}\cdot\nabla u - \Delta u\Big)\,dA = 0$$

Integrales de Línea y Teorema de Green: Problemas Propuestos

1. Considere la curva intersección de las superficies $S_1: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4x$ y $S_2: \quad x^2 + y^2 = 2x$. Calcule la curvatura y la torsión de esta curva en $(2, 0, 2)$.

2. Considere la curva parametriza por $\vec{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, 0)$. Pruebe que el ángulo entre $\vec{r}(t)$ y $\vec{v}(t)$ es constante para todo t.

3. Considere la curva parametriza por $\vec{r}(t) = (1 + t, 1 - t, 1 - t^2)$ con $t \in [-1, 1]$.

   (a) ¿En qué punto de la curva se obtiene la curvatura máxima?.

   (b) Determine la torsión.

   (c) Muestre que la curva es plana.

4. Considere la curva intersección de las superficies $S_1: \quad y = x^2$ y $S_2: \quad z = x^2 + y^2$. Calcule la curvatura y la torsión de esta curva en $(0, 0, 0)$.

5. Considere el campo $\vec{F}(x, y) = (2x + y, x - 2y)$ en el plano xy.

   (a) Calcule la integral $\displaystyle\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ si C es la curva que encierra a la región

   $$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x + y \leq 2, \quad x - y^2 \geq 0, \; y \geq 0\}$$

   (b) Calcule la integral $\displaystyle\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ si Γ es el arco de una circunferencia superior que se inicia en $(0, 1)$ y termina en (2,1).

   Obs: los puntos inicial y terminal corresponden al diámetro de una circunferencia.

6. Sea el campo de vectores $\vec{F}(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - a^2}(-y, x), \; \forall a \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$.

   (a) ¿Cuál es el dominio del campo de vectores?

   (b) Calcular $\displaystyle\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde C es la curva $x^2 + y^2 = 1$, orientada en sentido anti horario.

   (c) ¿Existe algún valor del parámetro $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$ tal que el campo de vectores es un Campo Gradiente?

7. Considere el campo $\vec{F}(x, y) = (y, x + 2y)$ en el plano xy.

   (a) Determine si el campo es conservativo. ¡Justifique!

   (b) Encuentre una función φ tal que $\nabla\varphi = \vec{F}$

   (c) Calcule por definición $\displaystyle\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ si C es la curva compuesta por los segmentos rectos de $(0, 0)$ a $(0, b)$ y de $(0, b)$ a (a, b).

   (d) Calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ si γ es el semicírculo superior que se inicia en $(0, 1)$ y termina en $(2, 1)$. (Suponga que el segmento recto de $(0, 1)$ a $(2, 1)$ es un diámetro de este semicírculo).

8. Calcule $\displaystyle\int_\gamma (3x^2y - x)dx + (x^3 - 2y)dy$, donde γ es la curva descrita por $x = \sin^3 t$ e $y = t - \cos^2 t$ con $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

9. Considere el campo $\vec{F}(x, y) = (2x + y, x - 2y)$ en el plano xy.

   (a) Calcule la integral $\displaystyle\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ si C es la curva que encierra a la región

   $$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x + y \leq 2, \quad x - y^2 \geq 0, \; y \geq 0\}$$

(b) Calcule la integral $\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ si Γ es el arco de una circunferencia superior que se inicia en $(0,1)$ y termina en (2,1).

Obs: los puntos inicial y terminal corresponden al diámetro de una circunferencia.

10. Sean $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función continua y un campo vectorial $\vec{F}$ definido como

$$\vec{F}(x,y)=\Big(xg(u),yg(u)\Big),$$

donde $u=x^2+y^2$. Si $f(x,y)=\dfrac{1}{2}h(u)$, donde para cada $s\in\mathbb{R}$ se define $h(s)=\displaystyle\int_a^s g(t)\,dt$, siendo a un elemento del dominio de g, probar que

$$\nabla f=\vec{F}$$

11. Determinar una función potencial para el siguiente campo (si es que existe)

$$\vec{F}(x,y,z)=\left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}},\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}},2z\right),$$

luego evalue

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r},$$

si

(a) $C:\ 4x^2+9y^2=36,\ z=0$

(b) $C: x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t,\ z=e^t$ con $0\le t\le 2\pi$

12. Sea $\vec{F}:\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\longrightarrow\mathbb{R}^2$ el campo definido por

$$\vec{F}(x,y)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

(a) sea γ la curva parametrizada por $\vec{r}(t)=(\cos t,\sin t)$ con $0\le t\le 2\pi$. Calcule el trabajo de $\vec{F}$ sobre C y deducir que el campo vectorial no es conservativo.

(b) Encuentre un abierto $A\subset\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ tal que el campo $\vec{F}$ restringido al conjunto A sea conservativo.

(c) Calcule el trabajo de $\vec{F}$ a lo largo de la curva C descrita por $y=x^4$ desde $1\le x\le 4$.

13. Resuelva el siguiente problema

(a) Muestre utilizando un argumento basado en sumas de Riemann que el momento de inercia de una curva C respecto a una recta ℓ de la forma $ax+by+c=0$ es

$$\int_C d(x,y)dm.$$

donde $d(x,y)$ es la distancia de un punto arbitrario de la curva a la recta y dm es el diferencial de masa de la curva.

(b) Suponga que la curva C esta descrita mediante $y=x^2$ con $1\le x\le 4$. Si la densidad en cada punto de C es $f(x,y)=x^2+y^2$ calcule el momento de inercia respecto a la recta $x+y=0$.

14. Considere el campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z)=(4z,0,4y),$$

y la curva C dada por la intersección de las superficies

$$S_1:\quad z=4x^2+5y^2,\qquad S_2:\quad x^2+y^2+4=4x+4y.$$

Calcule el trabajo del campo $\vec{F}$ a lo largo de la curva C.

15. Una región Ω esta acotada en el primer cuadrante por las curvas

$$(x-1)^{2/3}+y^{2/3}=1 \qquad \wedge \qquad x^2+(y-2)^2=2.$$

(a) Bosquejar la región Ω y determinar su área.

(b) Si Ω representa una lamina cuya densidad viene dada por $\rho(x)=2x$. Obtenga una expresión mediante integrales de línea que permitan calcular la masa de Ω.

16. Determinar el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x,y)=\left(4y-\dfrac{y}{4x^2+y^2}, 2x+\dfrac{x}{4x^2+y^2}\right)$ a lo largo de las siguientes curvas C recorridas en sentido antihorario

(a) $C:\ |x|+|4y|=1$

(b) $C:\ x^2+4y^2=1$

(c) $C:\ 4x^2+y^2=1$

(d) $C:\ x^{2/3}+y^{2/3}=1$

17. Considere que $h:\mathbb{R}\longmapsto\mathbb{R}$ es una función diferenciable. Se define la curva γ como la intersección de las superficies

$$y=x^2-2x, \qquad z=h(x-1), \qquad 1\le x\le 2, \qquad -1\le y\le 0.$$

Encuentre condiciones sobre h, de modo que el trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F}(x,y,z)=(y,x-1,3z^2)$ sobre la curva γ sea 2π

18. Considere el campo vectorial $\vec{F}(x,y)=\left(-y+\dfrac{y}{9x^2+4y^2}, x-\dfrac{x}{9x^2+4y^2}\right)$ y sea C una curva cerrada simple la cual posee las siguientes propiedades:

- Para cualquier punto P de la curva C la distancia al origen es mayor que 4.
- La curva C encierra al origen.
- El área de la región $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ cerrada y acotada cuyo borde es la curva C esta dada por A, es decir, $A=\displaystyle\iint_\Omega dA$

De ser posible, con la información entregada determine el trabajo del campo $\vec{F}$ a lo largo de la curva C recorrida en sentido antihorario.

19. Sea $\vec{v}=\vec{v}(t,x,y,z)$ un campo vectorial continuamente diferenciable sobre una región $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ compacta cuya frontera es una curda de jordan y sea $p(t,x,y)$ una función escalar continuamente diferenciable. Si:

$$(P):\ \frac{d}{dt}\iint_\Omega p(t,x,y)dA=-\oint_{\partial\Omega} p\vec{v}\cdot\vec{n}\ ds,$$

donde $\vec{n}$ es la normal unitaria exterior a $\partial\Omega$.

(a) Usando la regla de Leibniz, dada por

$$\frac{d}{dt}\iint_\Omega p(t,x,y)dA=\iint_\Omega \frac{\partial p}{\partial t}\ dA,$$

demuestre que (P) es equivalente a la ecuación:

$$\textbf{div}\ (p\vec{v})+\frac{\partial p}{\partial t}=0$$

(b) Obtenga la ecuación reducida si $\textbf{div}(\vec{v})=0$. Para esto ocupe el resultado obtenido en (b).