Sergio Yansen Núñez

Actividad 1

Calcule, en caso de existir, los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-2y^3}{x^2+|y|}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(x^y)sen(y^2)}{x^6+|y|}$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2+2y^2-2xy}$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^2}$

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(3x^2+y^2)}{x^2-y^2}$

f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^3+y^3}$

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{(x+1)(y-1)^3}{(x+1)^2+(y-1)^6}$

h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6y}{x^{12}+y^2}$

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x^2-y^2}{x^3+y^3}$

j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(2x^2)sen(3x)}{x^2+y^4}$

Actividad 2

Considere la función g definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+1)(y-1)^2}{(x+1)^2+2(y-1)^4} + x - 2y & , \quad (x,y) \neq (-1,1) \\ \\ -3 & , \quad (x,y) = (-1,1) \end{cases}$$

¿Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} g(x,y)$?

Sergio Yansen Núñez

Resolución

Actividad 1

a)

$$0 \leq \left| \frac{x^4-2y^3}{x^2+|y|} \right| \leq \frac{x^4}{x^2+|y|} + \frac{2|y|^3}{x^2+|y|} \leq x^2 + 2y^2$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 + 2y^2 = 0$$

Por Teorema de acotamiento, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-2y^3}{x^2+|y|} = 0$

b)

$$0 \leq \left| \frac{sen(x^y)sen(y^2)}{x^6+|y|} \right| = \frac{|sen(x^y)||sen(y^2)|}{x^6+|y|} \leq \frac{|sen(y^2)|}{x^6+|y|} \leq \frac{y^2}{x^6+|y|} \leq |y|$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$$

Por Teorema de acotamiento, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(x^y)sen(y^2)}{x^6+|y|} = 0$

c) $0 \leq \left| \frac{y^4}{x^2+2y^2-2xy} \right| = \frac{y^4}{(x-y)^2+y^2} \leq y^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2 = 0$$

Por Teorema de acotamiento, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2+2y^2-2xy} = 0$

d)

Se sabe que $xy \leq x^2 + y^2 \;\Rightarrow\; x^2y \leq x^4 + y^2$

$$0 \leq \left| \frac{x^3y}{x^4+y^2} \right| = \frac{|x|x^2|y|}{x^4+y^2} \leq \frac{|x|(x^4+y^2)}{x^4+y^2} = |x|$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$$

Por Teorema de acotamiento, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^2} = 0$

e) Aproximación mediante la familia de rectas: $y = mx$; $m \neq 1$, $m \neq -1$

Sean $\varphi(t)=(t,mt)$; $m\neq 1$, $m\neq\ -1$; $f(x,y)=\frac{sen(3x^2+y^2)}{x^2-y^2}$

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} f(\varphi(t)) &= \lim_{t\to 0}\frac{sen(3t^2+m^2t^2)}{t^2-m^2t^2} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{sen((3+m^2)t^2)}{(1-m^2)t^2} \\
&= \frac{(3+m^2)}{(1-m^2)}\lim_{t\to 0}\frac{sen((3+m^2)t^2)}{(3+m^2)t^2} \\
&= \frac{(3+m^2)}{(1-m^2)}\ \text{(depende de } m\text{)}
\end{aligned}$$

Por tanto, el límite no existe.

f) Aproximación mediante la familia de rectas: $y=mx$; $m\neq\ -1$

Sean $\varphi(t)=(t,mt)$; $m\neq\ -1$; $f(x,y)=\frac{xy^2}{x^3+y^3}$

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} f(\varphi(t)) &= \lim_{t\to 0}\frac{tm^2t^2}{t^3+m^3t^3} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{m^2t^3}{(1+m^3)t^3} \\
&= \frac{m^2}{1+m^3}\ \text{(depende de } m\text{)}
\end{aligned}$$

Por tanto, el límite no existe.

g) Consideremos un cambio de variables:

Sean $u=x+1$, $v=y-1$

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)}\frac{(x+1)(y-1)^3}{(x+1)^2+(y-1)^6} = \lim_{(u,v)\to(0,0)}\frac{uv^3}{u^2+v^6}$$

Aproximación mediante la familia: $v=mu^{\frac{1}{3}}$

Sean $\varphi(t)=(t,mt^{\frac{1}{3}})$; $f(u,v)=\frac{uv^3}{u^2+v^6}$

$$\lim_{t\to 0} f(\varphi(t)) = \lim_{t\to 0}\frac{tm^3t}{t^2+m^6t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{m^3t^2}{(1+m^6)t^2}$$

$$= \frac{m^3}{1+m^6} \quad \text{(depende de } m\text{)}$$

Por tanto, el límite no existe.

h) Aproximación mediante la familia: $y = mx^6$

Sean $\varphi(t) = (t, mt^6)$; $f(x,y) = \frac{x^6y}{x^{12}+y^2}$

$$\lim_{t\to 0} f(\varphi(t)) = \lim_{t\to 0}\frac{t^6mt^6}{t^{12}+m^2t^{12}}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{mt^{12}}{(1+m^2)t^{12}}$$

$$= \frac{m}{1+m^2} \quad \text{(depende de } m\text{)}$$

Por tanto, el límite no existe.

i)

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)}\frac{x^2-y^2}{x^3+y^3} = \lim_{(x,y)\to(1,-1)}\frac{(x-y)(x+y)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,-1)}\frac{(x-y)}{(x^2-xy+y^2)} = \frac{2}{3}$$

j)

$$0 \leq \frac{\left|sen(2x^2)\right|sen(3x)\right|}{x^2+y^4} \leq \frac{2x^2|3x|}{x^2+y^4} = \frac{6x^2|x|}{x^2+y^4} \leq \frac{6x^2|x|}{x^2} = 6|x| \ , \ x \neq 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 6|x| = 0$$

Por Teorema de acotamiento, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{sen(2x^2)sen(3x)}{x^2+y^4} = 0$

Sergio Yansen Núñez
Actividad 2

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{(x+1)(y-1)^2}{(x+1)^2+2(y-1)^4} + x - 2y$$

donde $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} x - 2y = -3$

Para analizar $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{(x+1)(y-1)^2}{(x+1)^2+2(y-1)^4}$ consideremos un cambio de variables:

Sean $u = x+1$, $v = y-1$

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{(x+1)(y-1)^2}{(x+1)^2+2(y-1)^4} = \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{uv^2}{u^2+2v^4}$$

Aproximación mediante la familia: $v = mu^{\frac{1}{2}}$

Sean $\varphi(t) = (t, mt^{\frac{1}{2}})$; $f(u,v) = \frac{uv^2}{u^2+2v^4}$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} g(\varphi(t)) &= \lim_{t\to 0} \frac{m^2t^2}{t^2+2m^2t^2} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{m^2t^2}{(1+2m^2)t^2} \\ &= \frac{m^2}{1+2m^2} \quad \text{(depende de } m\text{)}\end{aligned}$$

Por tanto, el límite no existe.

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{(x+1)(y-1)^2}{(x+1)^2+2(y-1)^4}$ no existe se tiene que $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} g(x,y)$ no existe.