Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Notas mat – 023
Series de Fourier
Segundo Semestre 2012

1. Funciones Ortogonales

Definición **1.1** El conjunto de funciones seccionalmente continuas $\{\phi_n(x) : n = 0, 1, \dots\}$ en un intervalo finito $[\alpha, \beta]$ o infinito, se dice ortogonal en $[\alpha, \beta]$ con respecto a la función no negativa $r(x)$ si

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle = \begin{cases} \displaystyle\int_\alpha^\beta r(x)\phi_m(x)\bar{\phi}_n(x)\, dx = 0 & \forall\, m \neq n \\ \displaystyle\int_\alpha^\beta r(x)|\phi_n(x)|^2\, dx \neq 0 & \forall\, n \end{cases} \tag{1.1}$$

La función $r(x)$ es llamada función peso. ■

Siempre asumiremos que $r(x)$ posee un número finito de ceros en el intervalo $[\alpha, \beta]$ y que las integrales en 1.1 existen para todo n. La notación $\bar{\phi}_n(x)$ significa que consideramos el conjugado de la función $\phi_n(x)$, que en general es a valores complejos. Por ello, escribimos $|\phi_n(x)|^2 = \phi_n(x)\bar{\phi}_n(x)$. Sin embargo, en la mayoría de nuestras aplicaciones las funciones consideradas son a valores reales y luego, $\phi_n(x) = \bar{\phi}_n(x)$ y además $|\phi_n(x)|^2 = \phi^2(x)$.
El conjunto de funciones $\{\phi_n(x) : n = 0, 1, \dots\}$ en $[\alpha, \beta]$ con respecto a la función peso $r(x)$ se dice *ortonormal* si cumple con la primera de las relaciones en 1.1 para $m \neq n$, y además

$$\int_\alpha^\beta r(x)|\phi_n(x)|^2\, dx = 1 \qquad \forall\, n.$$

Así, las funciones ortonormales poseen las mismas propiedades que las funciones ortogonales, pero además, han sido normalizadas, i.e., cada función $\phi_n(x)$ del conjunto ortogonal ha sido dividida por su propia norma, que se define como

$$\|\phi_n\| = \left(\int_\alpha^\beta r(x)|\phi_n(x)|^2\, dx \right)^{1/2}. \tag{1.2}$$

Ejemplo **1.1** El conjunto

$$\{1, \cos nx,\ n = 1, 2, \dots\},$$

JCM/jcm. juan.chavarria@usm.cl.

es ortogonal sobre $0 < x < \pi$ con $r(x) = 1$. En efecto, para $m \neq n$, tenemos

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi \cos mx \cos nx \, dx &= \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x] \, dx \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{sen}(m-n)x}{m-n} + \frac{\operatorname{sen}(m+n)x}{m+n} \right] \Big|_0^\pi \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{sen}(m-n)\pi}{m-n} - 0 + \frac{\operatorname{sen}(m+n)\pi}{m+n} - 0 \right] = 0.
\end{aligned}
$$

Ahora, puesto que

$$
\begin{aligned}
\|\phi_0\| &= \left(\int_0^\pi dx \right)^{1/2} = \sqrt{\pi} \\
\|\phi_n\| &= \left(\int_0^\pi \cos^2 nx \, dx \, dx \right)^{1/2} = \left(\int_0^\pi \frac{1 + \cos 2nx}{2} \, dx \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}},
\end{aligned}
$$

sigue que el conjunto

$$
\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx, n = 1, 2, \ldots \right\},
$$

es ortonormal en $0 < x < \pi$ con $r(x) = 1$.

Ejemplo **1.2** El conjunto

$$
\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} nx, \; n = 1, 2, \ldots \right\} \tag{1.3}
$$

es ortonormal sobre $-\pi < x < \pi$ con $r(x) = 1$. Para esto, primero necesitamos chequear que

$$
\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^2 dx = 1, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \right)^2 dx = 1, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} nx \right)^2 dx = 1.
$$

La primera integral es evidente. En tanto, las siguientes se calculan usando el ejemplo anterior más la propiedad de integración de funciones pares en intervalos simétricos: $\int_{-p}^{p} h(z)dz = 2 \int_0^p h(z)dz$. En segundo lugar, debemos chequear que

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \, dx = 0, && \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} nx \, dx = 0, \\
&\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos mx \, dx = 0, && \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} nx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} mx \, dx = 0, \; m \neq n
\end{aligned}
$$

y

$$
\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} mx \, dx = 0 \, m \neq n.
$$

Es fácil chequear esto recordando que todas las funciones involucradas son trigonométricas integradas en el período $(-\pi, \pi)$.

Ejemplo **1.3** El conjunto de funciones a valores complejos

$$
\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, n \in \mathbb{Z} \right\}, \tag{1.4}
$$

es ortonormal en el intervalo $-\pi < x < \pi$ con la función peso $r(x) = 1$. En efecto

$$
\|\phi_n\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-inx} \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = 1.
$$

Además, usando la fórmula de Euler si $m \neq n$:

$$\begin{aligned}
\langle \phi_m, \phi_n \rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x}dx \\
&= \frac{1}{2\pi(m-n)i}e^{i(m-n)x}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi(m-n)i}\left\{e^{i(m-n)\pi} - e^{-i(m-n)\pi}\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi(m-n)i}\{\cos(m-n)\pi + i\,\mathrm{sen}(m-n)\pi - \cos(m-n)\pi + i\,\mathrm{sen}(m-n)\pi\} = 0.
\end{aligned}$$

Ejemplo **1.4** Los polinomios de Chebyshev de primer orden

$$\{T_n(x) = \cos(n \arccos x), n = 0, 1, 2, \dots\},$$

son ortogonales en el intervalo $-1 < x < 1$ con la función peso $r(x) = (1-x^2)^{-1/2}$. En efecto

$$\begin{aligned}
\langle T_m, T_n \rangle &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cos(m \arccos x)\cos(n \arccos x)\,dx \\
&= \int_0^{\pi} \cos m\theta \cos n\theta\, d\theta \qquad (x = \cos\theta) \\
&= \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi/2, & m = n \neq 0 \\ \pi, & m = n = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

2. Series de Fourier

A menudo necesitaremos expandir una función dada en términos de otras funciones con una exactitud específica de tal forma de realizar operaciones en la práctica. En esta sección mostraremos que los conjuntos de funciones que hemos estudiado en la sección anterior pueden ser utilizados efectivamente como la base en la expansión de funciones más generales.

La base $\{e^1, e^2, \dots, e^n\}$ (e^k es un vector unitario) de $\mathbb{R}^n$ posee una importante característica: para cualquier $u \in \mathbb{R}^n$ existe una elección única de constantes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ para las cuales $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^i$. Más aún, por la ortonormalidad de los vectores $e^i, 1 < i < n$ podemos determinar estas constantes $\alpha_i, 1 < i < n$ como sigue

$$u \cdot e^j = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e^i\right) \cdot e^j = \sum_{i=1}^n \alpha_i (e^i \cdot e^j) = \alpha_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Así, el vector u posee una única representación.
Una generalización natural de este resultado, el cual es ampliamente aplicable y ha llevado a una gran cantidad de avances en matemática avanzada, puede establecerse como sigue: Sea $\{\phi_n(x),\, n = 0, 1, \dots\}$ un conjunto ortogonal de funciones en el intervalo $[\alpha, \beta]$ con respecto a la función peso $r(x)$. Entonces, una función arbitraria $f(x)$ puede ser expresada como una serie infinita que involucra a las funciones $\phi_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$ como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x). \tag{2.1}$$

La pregunta natural que surge es el sentido de la igualdad en 2.1, i.e., el o los tipos de convergencia, si las hay, de la serie infinita en el lado derecho para poder tener una idea de qué tan bien representa a $f(x)$. También podríamos determinar los coeficientes c_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ en 2.1.

Procederemos formalmente en primer lugar sin considerar la pregunta de la convergencia. Multiplicamos 2.1 por $r(x)\bar{\phi}_m(x)$ e integramos desde α a β, para obtener

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta r(x)\bar{\phi}_m(x)f(x)\,dx &= \int_\alpha^\beta \sum_{n=0}^\infty c_n r(x)\phi_n(x)\bar{\phi}_m(x)\,dx \\ &= c_m \int_\alpha^\beta r(x)|\phi_m(x)|^2\,dx = c_m\|\phi_m\|^2.\end{aligned}$$

Así, bajo condiciones adecuadas de convergencia los coeficientes constantes c_n, $n = 0, 1, \ldots$ están dados por la fórmula

$$c_n = \int_\alpha^\beta r(x)\bar{\phi}_n(x)f(x)\,dx \Big/ \|\phi_n\|^2. \tag{2.2}$$

Sin embargo, si el conjunto $\{\phi_n(x)\}$ es ortonormal, es decir $\|\phi_n\| = 1$, entonces tenemos

$$c_n = \int_\alpha^\beta r(x)\bar{\phi}_n(x)f(x)\,dx. \tag{2.3}$$

Si la serie $\sum_{n=0}^\infty c_n\phi_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ en $[\alpha, \beta]$, entonces el procedimiento previo está justificado, y entonces los coeficientes c_n están dados por 2.2.

Los coeficientes c_n obtenidos en 2.2 son llamados *coeficientes de Fourier* de la función $f(x)$ con respecto al conjunto ortogonal $\{\phi_n(x)\}$ y la serie $\sum_{n=0}^\infty c_n\phi_n(x)$ con coeficientes 2.2 es llamada la *Serie de Fourier* de $f(x)$. Vamos a escribir

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^\infty c_n\phi_n(x)$$

lo cual, en general, es sólo una correspondencia, i.e., a menudo $f(x) \neq \sum_{n=0}^\infty c_n\phi_n(x)$, a menos que se pruebe. A continuación, listamos algunos de los casos con más frecuencia utilizados.

2.1. Serie de Fourier de Cosenos.

En la sección pasada hemos probado que el conjunto de funciones

$$\left\{\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx,\ n = 1, 2, \ldots\right\},$$

es ortonormal en $0 < x < \pi$. Así, para cualquier función seccionalmente continua $f(x)$ definida sobre $0 < x < \pi$,

$$f(x) \sim c_0\phi_0(x) + \sum_{n=1}^\infty c_n\phi_n(x) = \frac{c_0}{\sqrt{\pi}} + \sum_{n=1}^\infty c_n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx,$$

donde

$$c_0 = \int_0^\pi f(t)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,dt, \qquad c_n = \int_0^\pi f(t)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nt\,dt, \qquad n \geq 1.$$

Luego,

$$f(x) \sim \frac{1}{2} \times \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,dt + \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos nt\,dt\right)\cos nx,$$

lo que puede ser escrito como

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \tag{2.4}$$

donde

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\,dt, \qquad n \geq 0. \tag{2.5}$$

Esta serie es conocida como *serie de Fourier de cosenos*.

Ejemplo **2.1** Vamos a encontrar la serie de Fourier de cosenos de la función $f(x) = x$, $0 < x < \pi$. Claramente

$$\begin{aligned} a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos 0t\,dt &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\,dt = \pi, \\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos nt\,dt &= \frac{2}{\pi}\left[t\frac{\operatorname{sen} nt}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen} nt}{n}\,dt \right] \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{0-0}{n} + \frac{\cos n\pi}{n^2}\right] = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}, \qquad n \geq 1. \end{aligned}$$

Así, de 2.4, tenemos

$$x \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos nx, \qquad 0 < x < \pi.$$

En la figura se muestra la gráfica de la función y la aproximación por la serie truncada para diversos valores.

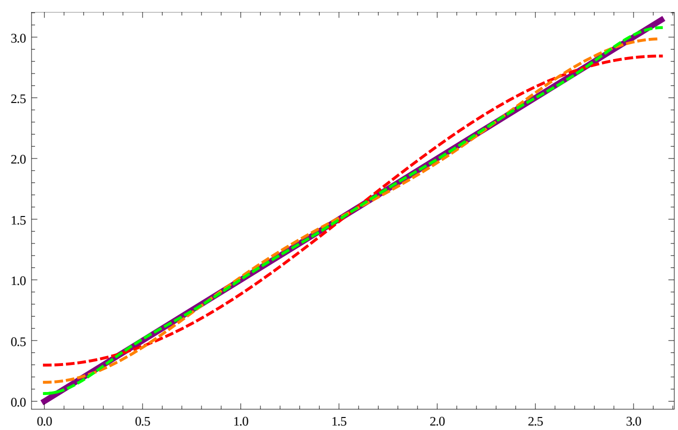

Figura **2.1** Gráfico de $f(x) = x$ (púrpura) y de las aproximaciones con 1 coeficiente (rojo), 4 coeficientes (naranja) y 10 coeficientes (verde). A medida que se toman más coeficientes de la expansión, la gráfica de la serie se ajusta a la función, como se esperaba.

2.2. Series de Fourier de Senos.

Recuerde que el conjunto

$$\left\{ \phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{sen} nx,\ n = 1, 2, \dots \right\}$$

es ortonormal sobre $0 < x < \pi$. Así, para cualquier función continua por tramos $f(x)$ definida sobre $0 < x < \pi$,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{sen} nx,$$

donde

$$c_n = \int_0^{\pi} f(t)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{sen} nt\,dt, \qquad n \geq 1.$$

De nuevo podemos rescribir como

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx, \tag{2.6}$$

donde

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt\, dt, \qquad n \geq 1. \tag{2.7}$$

Esta representación de $f(x)$ es llamada *serie de Fourier de senos.*

Ejemplo **2.2** Vamos a encontrar la serie de Fourier de senos de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad 0 < x < \pi/2 \\ 0, & \text{si} \quad \pi/2 < x < \pi. \end{cases}$$

Claramente, para $n \geq 1$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} nt\, dt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos(n\pi/2)+1}{n}\right].$$

Así,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\left[\frac{1-\cos(n\pi/2)}{n}\right] \operatorname{sen} nx, \qquad 0 < x < \pi.$$

2.3. Serie de Fourier Trigonométrica. En la sección pasada, hemos verificado que el conjunto

$$\left\{\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \phi_{2n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\ \phi_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} nx,\ n = 1, 2, \ldots\right\}$$

es ortonormal sobre $-\pi < x < \pi$. Así, para cualquier función seccionalmente continua $f(x)$ definida sobre $-\pi < x < \pi$,

$$f(x) \sim \frac{c_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_{2n-1}\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + c_{2n}\frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{\pi}}\right],$$

donde

$$\begin{aligned} c_0 &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dt \\ c_{2n-1} &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt\, dt, \qquad n \geq 1 \\ c_{2n} &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} nt\, dt, \qquad n \geq 1. \end{aligned}$$

Al reescribir las relaciones de arriba, tenemos la *serie de Fourier trigonométrica*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx\right), \tag{2.8}$$

donde

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\, dt, \qquad n \geq 0, \tag{2.9a}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\operatorname{sen} nt\, dt, \qquad n \geq 1. \tag{2.9b}$$

Para nuestra discusión posterior notamos las siguientes relaciones

$$c_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}a_0, \quad c_{2n-1} = \sqrt{\pi}a_n, \quad c_{2n} = \sqrt{\pi}b_n. \tag{2.10}$$

EJEMPLO **2.3** Vamos a encontrar la serie de Fourier trigonométrica de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad -\pi < x < 0 \\ x, & \text{si} \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$$

De 2.9a-2.9b, tenemos

$$\begin{aligned} a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 1\cdot\cos nt\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos nt\,dt \\ &= 0 + \frac{1}{\pi}\left[\frac{t\,\mathrm{sen}\,nt}{n} + \frac{\cos nt}{n^2}\right]\Bigg|_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}, \qquad n \geq 1. \\ a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 1\cdot 1\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\cdot 1\,dt &= 1 + \frac{\pi}{2}, \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 1\cdot\mathrm{sen}\,nt\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\,\mathrm{sen}\,nt\,dt &= \frac{-1 + (1-\pi)(-1)^n}{n\pi}, \qquad n \geq 1. \end{aligned}$$

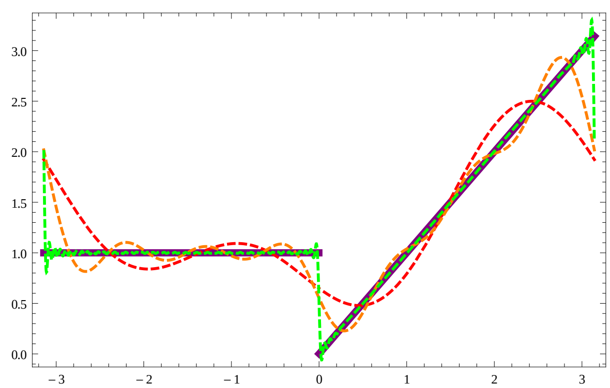

FIGURA **2.2** Función $f(x)$ y su serie de Fourier trigonométrica para 2 coeficientes (rojo), 6 (naranja) y 100 coeficientes (verde). Note la oscilación de la serie en los extremos y en los puntos de discontinuidad.

Luego, hemos obtenido

$$f(x) \sim \frac{2+\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos nx + \frac{-1+(1-\pi)(-1)^n}{n\pi}\,\mathrm{sen}\,nx\right], \quad -\pi < x < \pi.$$

Es claro que las constantes a_n, b_n para la serie de Fourier trigonométrica son diferentes de aquellos obtenidos para la serie de Fourier de cosenos y senos. Sin embargo, si la función $f(x)$ es impar, entonces

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = 0, \qquad n \geq 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{sen}\,nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{sen}\,nt\,dt, \qquad n \geq 1 \end{aligned}$$

y la serie de Fourier trigonométrica se reduce a la serie de Fourier de senos. Así, concluimos que si $f(x)$ es impar, o definida sólo sobre $(0, \pi)$ y hacemos su extensión impar entonces la serie de Fourier de senos es válida sobre $(-\pi, \pi)$. Exactamente en el mismo sentido, si $f(x)$ es par, o definida sólo sobre $(0, \pi)$ y hacemos su extensión par entonces

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\,dt, \qquad n \geq 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\operatorname{sen} nt\,dt = 0, \qquad n \geq 1 \end{aligned}$$

y la serie de Fourier trigonométrica se reduce a la serie de Fourier de cosenos.

Ejemplo **2.4** Vamos a calcular la serie de Fourier trigonométrica de la función definida sobre $-\pi < x < \pi$

$$f(x) = \begin{cases} -(x+\pi) & \text{si} \quad -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2} \\ x & \text{si} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{si} \quad \frac{\pi}{2} < x \leq \pi, \end{cases}$$

con $f(x + 2\pi) = f(x)$.

Puesto que la función es impar, sigue que $a_0 = a_n = 0$, $\forall n \geq 1$. Además, se tiene que

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} x\operatorname{sen} nx\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - x)\operatorname{sen} nx\,dx\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} x\operatorname{sen} nx\,dx - \int_{\pi/2}^{\pi} x\operatorname{sen} nx\,dx\right. \\ &+ \left.\pi\int_{\pi/2}^{\pi}\operatorname{sen} nx\,dx\right). \end{aligned}$$

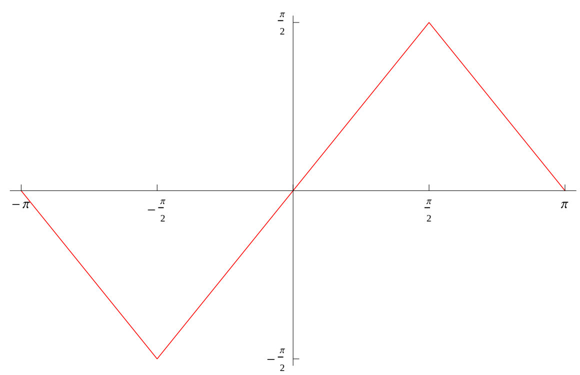

Figura **2.3** La función $f(x)$ del ejemplo. Note que es impar.

Las dos primeras integrales se calculan por partes y se obtiene $\int z\operatorname{sen} nz\,dz = \dfrac{\operatorname{sen} nz}{n^2} - \dfrac{z\cos nz}{n}$. Luego

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}\bigg|_0^{\pi/2} - \frac{x\cos nx}{n}\bigg|_0^{\pi/2} + \frac{x\cos nx}{n}\bigg|_{\pi/2}^{\pi} - \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}\bigg|_{\pi/2}^{\pi} - \frac{\pi\cos nx}{n}\bigg|_{\pi/2}^{\pi}\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{2\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2} - \frac{\pi\cos\frac{n\pi}{2}}{2n} + \frac{\pi\cos n\pi}{n} - \frac{\pi\cos\frac{n\pi}{2}}{2n} - \frac{\pi\cos n\pi}{n} + \frac{\pi\cos\frac{n\pi}{2}}{n}\right) \\ &= \frac{4}{\pi n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

Estos coeficientes son distintos de cero si n es impar, o sea, $n = 2k-1, k \in \mathbb{N}$. Utilizando la identidad trigonométrica del seno de la diferencia de dos ángulos, sigue que $\operatorname{sen}(2k-1)\frac{\pi}{2} = -\cos k\pi = (-1)^{k+1}$. Entonces

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2}\,; \quad \text{y} \\ f(x) &\sim \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2}\,\operatorname{sen}(2k-1)x\,. \end{aligned}$$

Finalmente, hacemos notar que si la función seccionalmente continua $f(x)$ está definida sobre $-L < x < L$, entonces su serie de Fourier trigonométrica 2.8 toma la forma

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{2.11}$$

donde

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt, \qquad n \geq 0 \tag{2.12a}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}\,dt, \qquad n \geq 1. \tag{2.12b}$$

2.3.1. Expansión de Medio Rango. Suponga que una función f está definida sobre $0 < x < \pi$ y que deseamos expandirla en una serie de Fourier trigonométrica. Dado que los coeficientes a_n y b_n involucran integrales desde $-\pi$ a π, debemos de alguna manera extender la definición de f al intervalo $(-\pi, \pi)$. Podemos hacer esto de varias maneras a nuestro beneficio. Una forma, es extender f tal que sea una función *par* sobre el intervalo $(-\pi, \pi)$ (figura 2.4). Dado que es una función par, se tiene que $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ y la serie de Fourier trigonométrica sólo posee términos de cosenos, es decir, coincide con la serie de Fourier de cosenos antes estudiada. Esta expansión es denominada *expansión de medio rango*.

También, una función definida en el intervalo $(0, \pi)$ puede también ser extendida al intervalo $(-\pi, \pi)$ como una función *impar*. La figura 2.5 muestra tal extensión, y notamos que se introducen discontinuidades en $x = -\pi, 0, \pi$, a menos que $f(-\pi) = f(0) = f(\pi) = 0$. esto no nos preocupa, puesto que como se verá en la siguiente sección, los teoremas de convergencia para series de Fourier son válidos para funciones seccionalmente continuas. Dado que esta expansión es impar, se tiene que $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, la serie resultante es una serie de Fourier de senos.

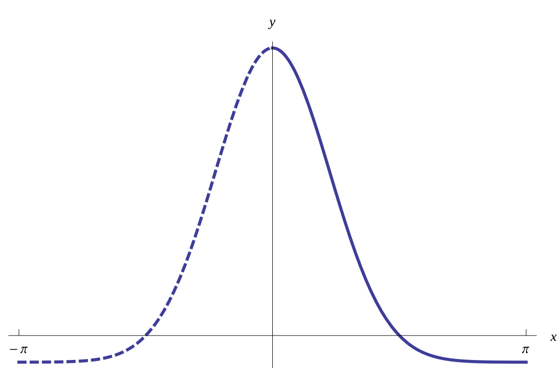

FIGURA **2.4** Extensión par de $f(x)$ al intervalo $(-\pi, \pi)$.

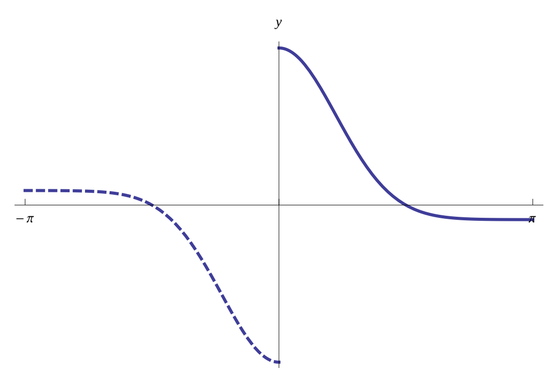

FIGURA **2.5** Extensión impar de $f(x)$ al intervalo $(-\pi, \pi)$.

Ejemplo **2.5** Vamos a expandir de forma par la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad 0 < x < \pi/2 \\ 1, & \text{si} \quad \pi/2 < x < \pi. \end{cases}$$

El gráfico de la extensión par se muestra en la figura 2.6. Puesto que es una expansión par, sigue que $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Además

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} dt = 1,$$

y

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos kt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \cos kt\,dt \\ &= \frac{2}{k\pi}\Big|_{\pi/2}^{\pi} = -\frac{2}{k\pi}\,\mathrm{sen}\,\frac{k\pi}{2} \end{aligned}$$

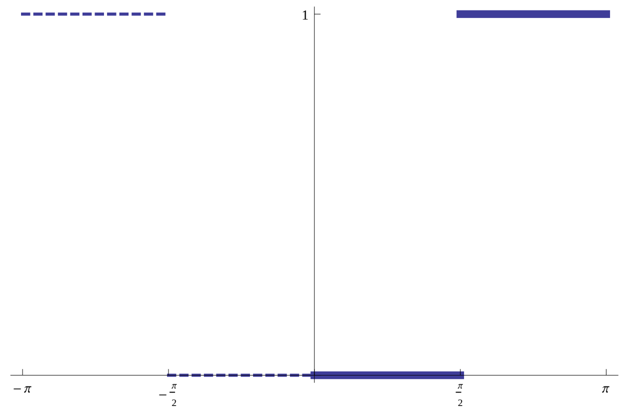

Figura **2.6** Extensión par de $f(x)$.

Los coeficientes son cero, salvo los impares, i.e., si $k = 2n - 1$, $n = 1, 2, \ldots$ Usando la identidad $\mathrm{sen}\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos n\pi = (-1)^{n+1}$, obtenemos

$$a_k = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad k = 2n,\ n = 1, 2, \ldots \\ \dfrac{2}{\pi}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}, & \text{si} \quad k = 2n-1,\ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\cos nx, \qquad -\pi < x < \pi.$$

Se deja como ejercicio realizar la expansión impar.

Si deseamos expandir una función seccionalmente continua definida sobre el intervalo $[c-\pi, c+\pi]$, formamos su *extensión periódica* f_0 como sigue

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si} \quad c - \pi < x < c + \pi, \\ f_0(x - 2\pi), & \text{para cualquier otro } x. \end{cases}$$

No importa cuan suave sea la función f, estaremos introduciendo discontinuidades en $x = c - \pi$ y $x = c + \pi$ al menos que $f(c - \pi) = f(c + \pi)$. Dado que tanto $f_0(x), \cos nx$ y $\mathrm{sen}\,nx$ son todas funciones periódicas con periodo 2π, podemos reemplazar el intervalo $[-\pi, \pi]$ por $[c - \pi, c + \pi]$, sobre el cual f_0 coincide con f. Entonces, los coeficientes de Fourier están dados por

(2.13a) $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{c-\pi}^{c+\pi} f(t)\cos nt\,dt,$$

(2.13b) $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{c-\pi}^{c+\pi} f(t)\,\mathrm{sen}\,nt\,dt.$$

La serie de Fourier formada con los coeficientes en 2.13a-2.13b entregan una expansión que es válida sobre el intervalo $c - \pi < x < c + \pi$.

Ejemplo **2.6** Vamos a expandir la función $f(x) = x$ sobre $0 < x < 2\pi$. El gráfico de la extensión periódica se muestra en la figura 2.7. Calculamos

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\,dt = 2\pi, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t\operatorname{sen} nt}{n} + \frac{\cos nt}{n^2}\right]_0^{2\pi} = 0, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\operatorname{sen} nt\,dt = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{t\cos nt}{n} + \frac{\operatorname{sen} nt}{n^2}\right]_0^{2\pi} \\ &= -\frac{2}{n}. \end{aligned}$$

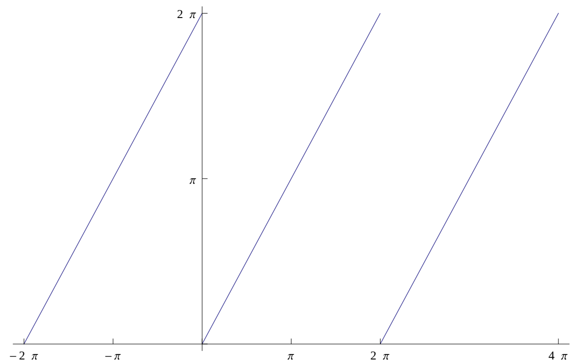

Figura **2.7** Extensión periódica de $f(x)$.

Por lo tanto,

$$f(x) \sim \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}, \qquad 0 < x < 2\pi.$$

Observación **2.1** Por supuesto, podríamos haber hecho los cálculos sobre el intervalo $[-\pi, \pi]$ usando la función extendida f_0. Sin embargo, en tal caso, las integrales que determinan los coeficientes de Fourier deberían separarse en dos, lo que hace más engorrosa su determinación, aun cuando el resultado sería el mismo.

2.4. Serie de Fourier Compleja. En la sección anterior hemos visto que el conjunto de funciones

$$\left\{\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, n \in \mathbb{Z}\right\},$$

es ortonormal en el intervalo $-\pi < x < \pi$ con la función peso $r(x) = 1$. Así, para cualquier función seccionalmente continua $f(x)$ definida sobre $-\pi < x < \pi$, (hemos abusado de la notación para estar de acuerdo con la literatura existente)

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_n \phi_n(x),$$

donde

$$\tilde{c}_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-int}\,dt.$$

Así

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt\right) e^{inx}. \end{aligned}$$

Al reescribir la relación de arriba tenemos la *serie de Fourier exponencial*

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{2.14}$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\, dt. \tag{2.15}$$

Ejemplo **2.7** Vamos a encontrar la serie de Fourier exponencial de la función $f(x) = e^x$ definida sobre $-\pi < x < \pi$. Tenemos que

$$\begin{aligned} c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t e^{-int}\, dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)t}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-in} \left[e^{(1-in)\pi} - e^{-(1-in)\pi} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-in} \left[e^{\pi} e^{-in\pi} - e^{-\pi} e^{in\pi} \right]. \end{aligned}$$

Usando la fórmula de Euler y la definición de seno hiperbólico

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-in} \left[e^{\pi} \cos n\pi - e^{-\pi} \cos n\pi \right] \\ &= \frac{\operatorname{senh} \pi}{\pi} \frac{(-1)^n}{1-in}. \end{aligned}$$

Luego

$$f(x) \sim \frac{\operatorname{senh} \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-in} e^{inx}, \qquad -\pi < x < \pi.$$

3. Convergencia de las Series de Fourier

En esta sección vamos a examinar la convergencia de la serie de Fourier de la función $f(x)$. Por esto, para hacer el análisis ampliamente aplicable, asumiremos que las funciones $\phi_n(x)$, $n = 0, 1, \ldots$ y $f(x)$ son sólo seccionalemente continuas sobre $[\alpha, \beta]$. Sea la suma de los primeros $N+1$ términos de $\sum_{n=0}^{N} c_n \phi_n(x)$ que denotaremos por $S_N(x)$. Consideraremos la diferencia $|S_N(x) - f(x)|$ para varios valores de N y x. Si para una constante arbitraria $\epsilon > 0$ existe un entero $N(\epsilon) > 0$ tal que $|S_N(x) - f(x)| < \epsilon$, entonces la serie de Fourier *converge uniformemente* a $f(x)$ para todo $x \in [\alpha, \beta]$. Por otro lado, si N depende tanto de x como de ϵ, entonces la serie de Fourier *converge puntualmente* a $f(x)$. Sin embargo, por el momento ambos tipos de convergencia son demasiado exigentes, y nos conformaremos con algo menos. Para este fin, estudiaremos lo siguiente.

3.1. Convergencia en Media.

Definición **3.1** Sean las funciones $\psi_n(x)$, $n \geq 0$ y $\psi(x)$ seccionalmente continuas sobre $[\alpha, \beta]$. Diremos que la serie $\{\psi_n(x)\}$ *converge en media* a $\psi(x)$ (con respecto a la función peso $r(x)$) en el intervalo $[\alpha, \beta]$ si

$$\lim_{n \to \infty} \|\psi_n - \psi\|^2 = \lim_{n \to \infty} \int_{\alpha}^{\beta} r(x) \left(\psi_n(x) - \psi(x) \right)^2 dx = 0. \qquad \blacksquare \tag{3.1}$$

Así, la serie de Fourier converge en media a $f(x)$ siempre que

$$\lim_{N \to \infty} \int_{\alpha}^{\beta} r(x) \left(S_N(x) - f(x) \right)^2 dx = 0. \tag{3.2}$$

Antes de probar la convergencia de las series de Fourier en media, vamos a considerar la posibilidad de representar a $f(x)$ por una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} d_n\phi_n(x)$, donde los coeficientes d_n no son necesariamente los coeficientes de Fourier. Sea

$$T_N(x) = \sum_{n=0}^{N} d_n\phi_n(x)$$

y sea e_N la cantidad $\|T_N - f\|$. Entonces, por la ortogonalidad de las funciones $\phi_n(x)$ es claro que

$$\begin{aligned} e_N^2 &= \|T_N - f\|^2 = \int_\alpha^\beta r(x)\left(\sum_{n=0}^{N} d_n\phi_n(x) - f(x)\right)^2 dx \\ &= \sum_{n=0}^{N} d_n^2 \int_\alpha^\beta r(x)\phi_n^2(x)\,dx - 2\sum_{n=0}^{N} d_n \int_\alpha^\beta r(x)\phi_n(x)f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta r(x)f^2(x)\,dx \\ &= \sum_{n=0}^{N} \|\phi_n\|^2(d_n^2 - 2d_nc_n + c_n^2) - \sum_{n=0}^{N} \|\phi_n\|^2 c_n^2 + \|f\|^2 \\ &= \sum_{n=0}^{N} \|\phi_n\|^2(d_n - c_n)^2 - \sum_{n=0}^{N} \|\phi_n\|^2 c_n^2 + \|f\|^2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Así, la cantidad e_N es minimizada cuando $d_n = c_n$ para $n = 0, 1, \ldots, N$. Por lo tanto, hemos establecido el siguiente resultado.

Teorema **3.1.** *Para cualquier entero no negativo N, la mejor aproximación en media a la función $f(x)$ por una expresión de la forma $\sum_{n=0}^{N} d_n\phi_n(x)$ es obtenida cuando los coeficientes d_n son los coeficientes de Fourier de $f(x)$.* ■

Ahora, en 3.3, hacemos $d_n = c_n$, $n = 0, 1, \ldots, N$ para obtener

$$\|S_N - f\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=0}^{N} \|\phi_n\|^2 c_n^2. \tag{3.4}$$

Así, sigue que

$$\|T_N - f\|^2 = \sum_{n=0}^{N} \|\phi_n\|^2(d_n - c_n)^2 + \|S_N - f\|^2. \tag{3.5}$$

Luego, encontramos que

$$0 \le \|S_N - f\| \le \|T_N - f\|. \tag{3.6}$$

Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} d_n\phi_n(x)$ converge en media a $f(x)$, i.e., si $\lim_{N\to\infty} \|T_N - f\| = 0$, entonces de 3.6 es claro que la serie de Fourier converge en media a $f(x)$, i.e., $\lim_{N\to\infty} \|S_N - f\| = 0$. Sin embargo, 3.5 implica que

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \|\phi_n\|^2(d_n - c_n)^2 = 0.$$

Pero esto es posible si y sólo si $d_n = c_n$, $n = 0, 1, \ldots$. Así, hemos probado el siguiente resultado.

Teorema **3.2.** *Si una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} d_n\phi_n(x)$ converge en media a $f(x)$, entonces los coeficientes d_n deben ser los coeficientes de Fourier de $f(x)$.* ■

Ahora, de la igualdad 3.3 notamos que

$$0 \leq \|S_{N+1} - f\| \leq \|S_N - f\|.$$

Así, la serie $\{\|S_N - f\|,\, N = 0, 1, \dots\}$ es no creciente y acotada inferiormente por cero, y por lo tanto debe converger. Si converge a cero, entonces la serie de Fourier de $f(x)$ converge en media a $f(x)$. Además, de 3.4, tenemos la desigualdad

$$\sum_{n=0}^{N} \|\phi_n\|^2 c_n^2 \leq \|f\|^2.$$

Dado que la serie $\{C_N,\, N = 0, 1, \dots\}$, donde $C_N = \sum_{n=0}^{N} \|\phi_n\|^2 c_n^2$ es no decreciente y acotada superiormente por $\|f\|^2$, debe converger. Por lo tanto, tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\phi_n\|^2 c_n^2 \leq \|f\|^2. \tag{3.7}$$

Luego, de 3.4 vemos que la serie de Fourier de $f(x)$ converge en media a $f(x)$ si y sólo si

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|\phi_n\|^2 c_n^2. \tag{3.8}$$

Para el caso en que $\phi_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$ sean ortonormales, 3.7 se reduce a la *desigualdad de Bessel*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \leq \|f\|^2 \tag{3.9}$$

y 3.8 se convierte en la *identidad de Parseval.*

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2. \tag{3.10}$$

Resumimos nuestra discusión con el siguiente resultado

TEOREMA **3.3.** *Sean $\{\phi_n(x), n = 0, 1, \dots$ un conjunto ortonormal de funciones y sean c_n los coeficientes de Fourier de $f(x)$ dados por 2.3. Entonces son válidas las siguientes*

I *La serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2$ converge, y por lo tanto*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \int_{\alpha}^{\beta} r(x)\phi_n(x) f(x)\, dx = 0,$$

II *La desigualdad de Bessel 3.9 es verdadera,*

III *La serie de Fourier de $f(x)$ converge en media a $f(x)$ si y sólo si la identidad de Parseval 3.10 se cumple.* ■

Recordando las relaciones 2.10, para la serie de Fourier trigonométrica la identidad de Parseval puede ser escrita como

$$\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} a_0\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((\sqrt{\pi} a_n)^2 + (\sqrt{\pi} b_n)^2\right) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx,$$

o bien

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx. \tag{3.11}$$

Ejemplo **3.1** Encontraremos la serie de Fourier trigonométrica de la función $|x|$ sobre el intervalo $-\pi < x < \pi$. Puesto que es una función par, sigue que $b_k = 0, \forall k \geq 1$. Además

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\,dt = \pi \\ a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\cos kt\,dt = \frac{2}{\pi}\left\{ \frac{t\,\mathrm{sen}\,kt}{k}\bigg|_0^\pi - \frac{1}{k}\int_0^\pi \mathrm{sen}\,kt\,dt \right\} \\ &= \frac{2}{k\pi}\left\{0 + \frac{\cos kt}{k}\bigg|_0^\pi\right\} = \frac{2}{k^2\pi}[(-1)^k - 1] \qquad k \geq 1 \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k = 2n,\ n = 1, 2, \ldots \\ -\dfrac{4}{\pi(2n-1)^2} & \text{si} \quad k = 2n-1,\ n = 1, 2, \ldots \end{cases} \end{aligned}$$

Luego

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{-4}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x, \qquad -\pi < x < \pi.$$

Evidentemente, $|x|$ es una función seccionalmente continua sobre $[-\pi, \pi]$. Además, comparando su serie de Fourier trigonométrica tenemos que

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad a_{2n} = 0, \quad a_{2n-1} = -\frac{4}{\pi(2n-1)^2}, \quad b_n = 0.$$

Así, la identidad 3.11 entrega

$$\frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=1}^\infty \left[\frac{-4}{\pi(2n-1)^2}\right]^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi |t|^2\,dt,$$

que es lo mismo que

$$\frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{2\pi^2}{3}$$

Y luego

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

3.2. Convergencia Puntual. La discusión analítica de la convergencia puntual y uniforme de la serie de Fourier de la función $f(x)$ es complicada. Por lo tanto, en esta parte vamos a establecer varios resultados sin prueba. Estos resultados son fácilmente aplicables a problemas concretos. Denotaremos por $f(x^+)$ y $f(x^-)$ a los límites de f hacia x por la derecha e izquierda respectivamente con $x \in (-\pi, \pi)$.

Teorema **3.4.** *Sean $f(x)$ y $f'(x)$ seccionalmente continuas en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Entonces, la serie de Fourier trigonométrica de $f(x)$ converge a $[f(x^+) + f(x^-)]/2$ en cada punto del intervalo abierto $(-\pi, \pi)$ y en $x = \pm\pi$ la serie converge a $[f(-\pi^+) + f(\pi^-)]/2$.* $\blacksquare$

Ejemplo **3.2** Vamos a encontrar la serie de Fourier trigonométrica de la función $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \in [-\pi, 0) \\ 1 & \text{si} \quad x \in [0, \pi]. \end{cases}$
Tenemos que

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 1 \, dt = 1. \\
a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 1 \cos kt = \frac{1}{k\pi} \operatorname{sen} kt \Big|_0^\pi = 0, \qquad k \geq 1, \\
b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 1 \operatorname{sen} kt = \frac{-1}{k\pi} \cos kt \Big|_0^\pi = 0 \\
&= \frac{-1}{k\pi}((-1)^k - 1) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad k = 2n,\ n = 1, 2, \ldots \\ \dfrac{2}{(2n-1)\pi}, & \text{si} \quad k = 2n-1,\ n = 1, 2, \ldots \end{cases}
\end{aligned}
$$

Luego

$$
f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \operatorname{sen}(2n-1)x = S(x), \quad \text{digamos}, \qquad -\pi < x < \pi.
$$

Del teorema anterior, la igualdad $S(x) = f(x)$ es válida en cada punto de los intervalos abiertos $(-\pi, 0)$ y $(0, \pi)$, mientras que en $x = 0$ el lado derecho es $S(0) = 1/2$ que coincide con el valor $[f(0^+) + f(0^-)]/2$. Además, en $x = \pm\pi$, $S(\pm\pi) = 1/2$ que coincide con $[f(-\pi^+) + f(\pi^-)]/2$.

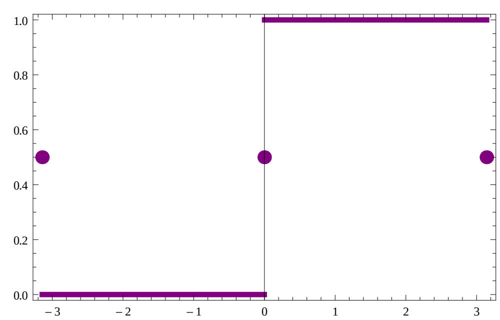

Figura **3.1** Gráfico de la serie de Fourier de $f(x)$ del ejemplo. Note la convergencia al valor $[f(0^+) + f(0^-)]/2$ en $x = 0$.

Ejemplo **3.3** Vamos a obtener la serie de Fourier de $f(x) = x + x^2/4$, $-\pi < x < \pi$ para mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$. En primer lugar tenemos que

$$
a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(t + \frac{t^2}{4} \right) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t^2}{4} \, dt = \frac{\pi^2}{6}.
$$

En segundo lugar, notando que $\forall n \geq 1$, $t\cos nt$ y $t^2 \operatorname{sen} nt$ son funciones impares sigue que

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(t+\frac{t^2}{4}\right)\cos nt\,dt = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos nt\,dt \\
&= \frac{1}{4\pi}\left[\left.\frac{t^2\operatorname{sen} nt}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} t\operatorname{sen} nt\,dt\right] = \frac{1}{4\pi}\left[0-\frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} t\operatorname{sen} nt\,dt\right] = -\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\operatorname{sen} nt\,dt \\
&= -\frac{1}{2n\pi}\left[-\left.\frac{t\cos nt}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nt\,dt\right] = \frac{1}{2n\pi}\left[\frac{\pi\cos n\pi + \pi\cos(-n\pi)}{n}+0\right] \\
&= \frac{(-1)^n}{n^2}, \qquad n \geq 1, \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(t+\frac{t^2}{4}\right)\operatorname{sen} nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\operatorname{sen} nt\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\left.\frac{-t\cos nt}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nt\,dt\right] = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi\cos n\pi + \pi\cos(-n\pi)}{n} - 0\right] \\
&= -\frac{2}{n}(-1)^n, \qquad n \geq 1.
\end{aligned}$$

Así

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\left(\cos nx - 2n\operatorname{sen} nx\right), \qquad -\pi < x < \pi.$$

Del teorema 3.4, al evaluar en $x = \pi$, encontramos que

$$\frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\left(\cos n\pi - 2n\operatorname{sen} n\pi\right) = \frac{f(\pi^-)+f(-\pi^+)}{2}$$

y luego

$$\frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\left((-1)^n - 0\right) = \frac{(\pi+\pi^2/4)+(-\pi+\pi^2/4)}{2} = \frac{\pi^2}{4},$$

o

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Para las series de Fourier de cosenos y senos también tenemos resultados similares, esta vez sobre el intervalo $[0,\pi]$.

Teorema **3.5.** *Sean $f(x)$ y $f'(x)$ seccionalmente continuas en el intervalo $[0,\pi]$. Entonces, la serie de Fourier de cosenos de $f(x)$ converge a $[f(x^+)+f(x^-)]/2$ en cada punto del intervalo abierto $(0,\pi)$ y en $x=0$ y $x=\pi$ la serie converge a $f(0^+)$ y $f(\pi^-)$, respectivamente.* ■

Ejemplo **3.4** Dejamos como ejercicio verificar que

$$f(x) = x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx, \qquad 0 < x < \pi.$$

Del teorema 3.5 sigue que

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx = \begin{cases} f(x) = x^2, & \text{si} \quad 0 < x < \pi \\ f(0^+) = 0, & \text{si} \quad x = 0 \\ f(\pi^-) = \pi^2, & \text{si} \quad x = \pi. \end{cases}$$

Así, en $x = \pi$, tenemos

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi = \pi^2$$

y luego

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2$$

lo que muestra que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Teorema **3.6.** *Sean $f(x)$ y $f'(x)$ seccionalmente continuas en el intervalo $[0, \pi]$. Entonces, la serie de Fourier de senos de $f(x)$ converge a $[f(x^+) + f(x^-)]/2$ en cada punto del intervalo abierto $(0, \pi)$. En $x = 0$ y $x = \pi$ la serie converge a 0.* ■

Para derivación e integración de series de Fourier trigonométricas tenemos los siguientes resultados

Teorema **3.7.** *Suponga que $f(x)$ es continua en $(-\pi, \pi)$, $f(-\pi) = f(\pi)$ y que $f'(x)$ es seccionalmente continua. Entonces,*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -na_n \operatorname{sen} nx + nb_n \cos nx,$$

en cada punto $x \in (-\pi, \pi)$ donde $f''(x)$ exista. ■

Ejemplo **3.5** En el ejemplo 3.1 mostramos que la serie de Fourier trigonométrica de la función $f(x) = |x|$ está dada por

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}, \qquad -\pi < x < \pi.$$

Claramente, $f(x)$ es continua sobre $(-\pi, \pi)$, $f(-\pi) = f(\pi) = \pi$. Además,

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{si} \quad -\pi < x < 0 \\ 1, & \text{si} \quad 0 < x < \pi \\ \nexists & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Luego, $f'(x)$ es seccionalmente continua en $(-\pi, \pi)$. Por último, $f''(x) = 0$ si $x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ y $f''(x)$ no existe si $x = 0$. Así, el teorema 3.7 es aplicable y tenemos

$$\left.\begin{array}{lll} -1, & \text{si} & -\pi < x < 0 \\ 1, & \text{si} & 0 < x < \pi \\ \nexists & \text{si} & x = 0. \end{array}\right\} = f'(x) \sim -\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(2n-1)\operatorname{sen}(2n-1)x}{(2n-1)^2} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{2n-1}.$$

Note que si bien la igualdad es válida para todo $x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$, en $x = 0$ la derivada no existe, pero la serie de Fourier vale 0.

Teorema **3.8.** *Suponga que $f(x)$ es seccionalmente continua en $(-\pi, \pi)$ y*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx), \qquad -\pi < x < \pi.$$

Entonces, para $x \in [-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt &= \int_{-\pi}^{x} \frac{a_0}{2}\,dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{x} (a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt)\; dt \\ &= \frac{a_0}{2}(x+\pi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left[a_n \operatorname{sen} nx - b_n(\cos nx + (-1)^{n+1})\right]. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejemplo **3.6** Vamos a usar la relación

$$f(x) = x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx, \qquad -\pi < x < \pi,$$

para encontrar un polinomio $p(x)$ tal que

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \operatorname{sen} nx, \qquad -\pi \le x \le \pi.$$

Claramente, la función $f(x) = x^2$ cumple todas las condiciones del teorema 3.8. Así, integrando desde $-\pi$ a x, obtenemos

$$\int_{-\pi}^{x} t^2\,dt = \frac{x^3}{3} + \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}(x+\pi) + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{(-1)^n}{n^2} \operatorname{sen} nx\right],$$

o

$$\frac{x^3}{3} = \frac{\pi^2 x}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \operatorname{sen} nx$$

y luego

$$p(x) = \frac{x(x^2-\pi^2)}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \operatorname{sen} nx, \qquad -\pi \le x \le \pi.$$

Referencias

[1] *Ordinary and Partial Differential Equations.* R. P. Agarwal & D. O'Regan. Universitext, Springer Verlag, 2009.

[2] *Modern Mathematical Analysis.* Murray H. Protter & Charles B. Morrey. Addison–Wesley Publishing Company, 1964.

Ejercicios

Apéndice A. Ejercicios Resueltos

1. *a*) Pruebe que las funciones $\phi_1(x) = 1, \phi_2(x) = \sqrt{3}(2x-1)$ son ortonormales en el intervalo $0 < x < 1$ con la función peso $r(x) = 1$.

   b) Encontrar la serie de Fourier de $f(x) = \sqrt{3}x^2$ en términos de ϕ_1, ϕ_2 en el intervalo $0 < x < 1$.

   c) Sea
$$F(a,b) = \int_0^1 \left(\sqrt{3}x^2 - a\phi_1(x) - b\phi_2(x)\right)^2 \, dx.$$
   Encontrar a, b tal que $F(a,b)$ alcanza su mínimo. Además, encuentre el mínimo valor de $F(a,b)$.

   a) Solución. Tenemos que
$$\begin{aligned}
\langle \phi_1, \phi_2 \rangle &= \sqrt{3}\int_0^1 (2x-1)\,dx = \sqrt{3}\,[x^2 - x]\big|_0^1 = 0,\\
\|\phi_1\|^2 = \langle \phi_1, \phi_1 \rangle &= \int_0^1 1^2\,dx = 1,\\
\|\phi_2\|^2 = \langle \phi_2, \phi_2 \rangle &= 3\int_0^1 (2x-1)^2\,dx = \frac{(2x-1)^3}{2} = 1.
\end{aligned}$$
   Luego, las funciones $\phi_1(x), \phi_2(x)$ son ortonormales en el intervalo $0 < x < 1$.

   b) Los coeficientes de Fourier están dados por 2.3, luego
$$\begin{aligned}
c_1 = \langle f, \phi_1 \rangle &= \sqrt{3}\int_0^1 x^2\,dx = \frac{\sqrt{3}}{3},\\
c_2 = \langle f, \phi_2 \rangle &= 3\int_0^1 x^2(2x-1)\,dx = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$
   Así, la serie de Fourier de $f(x)$ está dada por
$$f(x) \sim \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}(2x-1), \qquad 0 < x < 1.$$

   c) Primero, notamos que $F(a,b) \geq 0$. Ahora, si desarrollamos
$$\begin{aligned}
F(a,b) &= \int_0^1 \left[3x^2 - 2\sqrt{3}x^2(a\phi_1(x) + b\phi_2(x)) + (a\phi_1(x) + b\phi_2(x))^2\right] dx\\
&= \int_0^1 (\sqrt{3}x^2)^2\,dx - 2a\int_0^1 \sqrt{3}x^2\phi_1(x)\,dx - 2b\int_0^1 \sqrt{3}x^2\phi_2(x)\,dx + \int_0^1 (a\phi_1(x) + b\phi_2(x))^2\,dx\\
&= \|f\|^2 - 2ac_1 - 2bc_2 + a^2 + b^2,
\end{aligned}$$
   donde los últimos dos términos se han obtenido usando la ortonormalidad de ϕ_1, ϕ_2. Ahora derivamos a F con respecto a a y b para obtener
$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial a} &= 2a - 2c_1\\
\frac{\partial F}{\partial b} &= 2a - 2c_2.
\end{aligned}$$

Al igualar a cero ambas ecuaciones obtenemos los valores $a = c_1$, $b = c_2$. Puesto que $F(a,b) \geq 0$ sigue que estos valores minimizan F. Además, este valor mínimo es

$$F(c_1, c_2) = \|f\|^2 - c_1^2 - c_2^2 = \frac{3}{5} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{60}.$$

Note que este valor no es cero. Esto es natural, es imposible obtener una aproximación exacta al aproximar una función cuadrática usando polinomios de grado cero y uno.

2. Encontrar la serie de Fourier trigonométrica de $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad -\pi < x < 0, \\ 1, & \text{si} \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$ Utilice este resultado para calcular la suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\,dt = 1, \\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos kt\,dt = \frac{1}{k\pi}\operatorname{sen} kt\Big|_0^{\pi} = 0, \qquad k \geq 1, \\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\operatorname{sen} kt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} kt\,dt = -\frac{1}{k\pi}\cos kt\Big|_0^{\pi} \\
&= \frac{1-\cos k\pi}{k\pi} = \frac{1+(-1)^{k+1}}{k\pi} = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad k = 2n,\ n = 1, 2, \ldots \\ \dfrac{2}{(2n-1)\pi}, & \text{si} \quad k = 2n-1,\ n = 1, 2, \ldots \end{cases}, \qquad k \geq 1.
\end{aligned}$$

Luego

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi}\operatorname{sen}(2n-1)x.$$

Por último notamos que la forma de la serie a calcular sugiere el uso de la identidad de Parseval, entonces

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt.$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

3. Encuentre la serie de Fourier trigonométrica de la función $\cos ax$ sobre $[-\pi, \pi]$. Utilice este resultado para calcular el valor de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2-a^2}$.

Solución. Dejamos propuesto como ejercicio el caso $a \in \mathbb{Z}$. Para los otros casos, dado que $\cos ax$ es una función par, sigue que $b_n = 0$, $n \geq 1$ y

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos ax \cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\cos(n-a)x + \cos(n+a)x\right]\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}(n-a)x}{n-a} + \frac{\operatorname{sen}(n+a)x}{n+a}\right]\Bigg|_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}(-1)^{n+1}\left[\frac{\operatorname{sen} a\pi}{n-a} - \frac{\operatorname{sen} a\pi}{n+a}\right] = \frac{1}{\pi}(-1)^{n+1}\operatorname{sen} a\pi \frac{2a}{n^2-a^2}, \qquad n \geq 0.
\end{aligned}$$

Luego, sigue que

$$\cos ax \sim \frac{2a}{\pi}\operatorname{sen} a\pi\left[\frac{1}{2a^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-a^2}\cos nx\right], \qquad -\pi < x < \pi.$$

Al evaluar en el punto de continuidad $x = 0$ y usando el teorema 3.4 tenemos

$$\frac{2a}{\pi}\operatorname{sen} a\pi \left[\frac{1}{2a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - a^2}\right] = \cos 0 = 1$$

y luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - a^2} = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{a\pi}{\operatorname{sen} a\pi} - 1\right].$$

4. Considere a la función de periodo 2π definida por $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -\pi < x < 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{si} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$

   a) Pruebe que la serie de Fourier $S(x)$ de $f(x)$ es

$$S(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{\operatorname{sen} x}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1},$$

   señalando claramente cuáles son los coeficientes de la expansión.

   b) Utilice lo anterior para calcular

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}.$$

   a) Solución Hacemos uso de las identidades $\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = [\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)]/2$, $\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = [\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]/2$ para calcular los coeficientes

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} t\,dt = \frac{2}{\pi},\\
a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos t\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} t\cos t\,dt = -\frac{1}{4\pi}\cos 2t\Big|_0^{\pi} = 0,\\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \left(\operatorname{sen}(1+k)t + \operatorname{sen}(1-k)t\right)\,dt\\
&= -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos(1+k)t}{1+k}\bigg|_0^{\pi} + \frac{\cos(1-k)t}{1-k}\bigg|_0^{\pi}\right] = -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{(-1)^{k+1}-1}{1+k} + \frac{(-1)^{k+1}-1}{1-k}\right]\\
&= \frac{(-1)^{k+1}-1}{2\pi}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{(-1)^{k+1}-1}{\pi}\,\frac{1}{k^2-1}, \qquad k \geq 2\\
&= \begin{cases} -\dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{4n^2-1} & \text{si} \quad k = 2n,\ n = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{si} \quad k = 2n+1,\ n = 1, 2, \ldots \end{cases}\\
b_n &= \frac{1}{\pi} f(t)\operatorname{sen} nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} t\operatorname{sen} nt\,dt = \begin{cases} 1/2 & \text{si} \quad n = 1 \\ 0 & \text{si} \quad n \neq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

   Con lo cual

$$S(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{\operatorname{sen} x}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}, \qquad -\pi < x < \pi,$$

   que es lo deseado.

   b) Evaluamos en el punto de continuidad $x = \pi/2$. Así

$$1 = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}.$$

Resolviendo, se llega a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\right).$$

5. *a*) Obtenga la expansión en serie de Fourier trigonométrica de la función periódica $f(x)$ de período 2 definida sobre el período $-1 < x < 1$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 1-x & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

b) Usar el resultado anterior para calcular la suma de la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2},$$

a) Solución. Los coeficientes de Fourier de $f(x)$ están dados por

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx = \frac{-1}{2}(1-x)^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\,\cos(n\pi x)\,dx = \int_0^1 (1-x)\,\cos(n\pi x)\,dx \longleftarrow \begin{cases} u & = 1-x \qquad du \;= -dx \\ dv & = \cos(n\pi x)\,dx \qquad v \;= \frac{1}{n\pi}\operatorname{sen}(n\pi x) \end{cases}$$

$$= \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x)\,dx = \frac{-1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)\Big|_0^1 = \frac{1-\cos(n\pi)}{n^2\pi^2},\; n = 1,2,3,\ldots$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\,\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx = \int_0^1 (1-x)\,\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx \longleftarrow \begin{cases} u & = 1-x \qquad du \;= -dx \\ dv & = \operatorname{sen}(n\pi x)\,dx \qquad v \;= -\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x) \end{cases}$$

$$= \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos(n\pi x)\,dx = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}(n\pi x)\Big|_0^1 = \frac{1}{n\pi},\; n = 1,2,3,\ldots$$

La serie de fourier de la función $f(x)$ es

$$\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-\cos(n\pi)}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x) + \frac{1}{n\pi}\operatorname{sen}(n\pi x)\right), \qquad -1 < x < 1.$$

b) En $x = 0$ la suma de la serie tiene valor $\frac{1}{2}\left(f(0^+) + f(0^-)\right) = \frac{1}{2}$, entonces

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos(n\pi)}{n^2\pi^2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{1^2\pi^2} + \frac{2}{3^2\pi^2} + \frac{2}{5^2\pi^2} + \frac{2}{7^2\pi^2} + \ldots + \frac{2}{(2n-1)^2\pi^2}\cdots$$

Por lo tanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Apéndice B. Ejercicios Propuestos

1. Encuentre la serie de Fourier de cosenos sobre el intervalo $0 < x < \pi$ para cada una de las siguientes funciones:

$$\text{(i)} \quad f(x) = x^2 \quad \text{(ii)} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad 0 < x < \pi/2 \\ 1, & \text{si} \quad \pi/2 < x < \pi \end{cases} \quad \text{(iii)} \quad f(x) = \cos x.$$

2. Encuentre la serie de Fourier de senos sobre el intervalo $0 < x < \pi$ para cada una de las siguientes funciones:

$$\text{(i)} \quad f(x) = 1 \quad \text{(ii)} \quad f(x) = \pi - x.$$

3. Encuentre la serie de Fourier trigonométrica de las siguientes funciones:

$$\text{(i)} \qquad f(x) = x - \pi, \quad -\pi < x < \pi \qquad \text{(ii)} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad -\pi < x < 0 \\ 2, & \text{si} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$\text{(iii)} \quad f(x) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad -\pi < x < 0 \\ 2, & \text{si} \quad x = 0 \\ e^{-x}, & \text{si} \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Además, para cada serie grafique la suma mostrando algunos términos gráficamente, comparando con la función expandida.

4. Encuentre la serie de Fourier trigonométrica de las siguientes funciones:

$$\text{(i)} \quad f(x) = x^2, \quad 0 < x < 2\pi \quad \text{(ii)} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad -2 < x < -1 \\ 1, & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 0, & \text{si} \quad 1 < x < 2. \end{cases}$$

5. Sea $f(x)$ una función periódica de período 2π tal que sus coeficientes de Fourier existan. Suponga que $f(\pi - x) = f(x)$, $\forall x$. Muestre que $a_n = 0$ si n es impar y que $b_n = 0$ si n es par. Encuentre explicitamente c_0, c_2 y c_4.
6. Encontrar, si existe, una serie de Fourier de período fundamental 2π para la función $f(x) = \operatorname{sen}^3 x, \forall x \in \mathbb{R}$. Justifique brevemente su respuesta.
7. Sea f una función arbitraria, seccionalmente continua en $[0, \pi]$, simétrica con respecto a la recta $x = \pi/2$. Demostrar que los únicos términos no nulos en el desarrollo de Fourier senoidal de f, con perído 2π, son los términos $b_{2k-1}, k = 1, 2, \ldots$
8. Desarrolle la función:

$$f(x) = x - 1, \qquad 1 \leq x \leq 2$$

en serie de Fourier, de tal modo que esa expansión tenga sólo términos pares.

9. Demostrar o refutar la identidad

$$x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n^2}, \qquad 0 \leq x \leq \pi.$$

10. Considere la función $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad 0 < x < \pi/2 \\ 0, & \text{si} \quad \pi/2 < x < \pi. \end{cases}$ Es sabido que las funciones $\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} nx$, $n = 1, 2, 3$ forman un conjunto ortonormal en el intervalo $0 < x < \pi$. Encuentre los valores de a, b para los cuales la integral

$$F(a, b) = \int_0^{\pi} (f(x) - a\phi_1(x) - b(\phi_2(x) + \phi_3(x)))^2 \, dx$$

alcanza su mínimo.

11. Sea $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \in [-1, 0) \\ 1, & \text{si} \quad x \in [0, 1]. \end{cases}$ Muestre que

$$\int_{-1}^{1} \left(f(x) - \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x \right)^2 dx \leq \int_{-1}^{1} \left(f(x) - d_0 - d_1 x - d_2 x^2 \right)^2 dx$$

para cualquier elección del conjunto de constantes d_0, d_1 y d_2.

12. Sean $f(x)$ y $g(x)$ seccionalmente continuas en el intervalo $[\alpha, \beta]$ tal que sus coeficientes de Fourier sean iguales con respecto a un conjunto ortonormal de funciones. Muestre que $f(x) = g(x)$ en cada punto de $[\alpha, \beta]$ donde ambas funciones sean continuas.

13. La serie de Fourier trigonométrica de la función e^x sobre el intervalo $-\pi < x < \pi$ está dada por

$$e^x \sim \frac{2 \operatorname{senh} \pi}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} (\cos nx - n \operatorname{sen} nx) \right].$$

a) Utilice la relación de arriba para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = \frac{\pi}{2} \coth \pi - \frac{1}{2}.$$

b) Encuentre el valor de la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}.$$

Justifique su respuesta.