Contenidos

- Curvas y Superficies de Nivel.
- Límites y Continuidad.
- Derivadas Parciales.

Problemas Propuestos

1. Determinar el dominio y dibujar las curvas de nivel de las siguientes funciones.

a) $\sqrt{4-x^2-y^2}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$ c) $\operatorname{arc\,sen}(x+y)$

d) $\dfrac{-4x}{x^2+y^2+1}$ e) $\dfrac{2x}{x^2+y^2}$ f) $\dfrac{x+y}{x-y}$

g) $e^{x/y}$ h) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$ i) $\min\{|x+2|,|1+y|,x+y\}$

2. Dada la función

$$f(x,y,z)=\ln\left(\frac{1+\sqrt{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}}}{1-\sqrt{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}}}\right)$$

(a) Determinar su dominio y recorrido.

(b) Encuentre una expresión general para las superficies de nivel y determine aquellas correspondientes a los niveles $f(x,y,z)=-1$, $f(x,y,z)=0$ y $f(x,y,z)=1$.

3. Calcule los siguientes límites, en caso de que existan.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2-y^2}{x^2+2y^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|\operatorname{sen}x\cdot\operatorname{sen}y|}{|x|+|y|}$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x|+|y|}{\operatorname{sen}(|x|+|y|)}$

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x+y}\right)}{x^2+|x|+2}$

(f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{xy}-1}{x^2+y^2}$

(g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2\operatorname{sen}\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{x^2+y^2}$

(h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\operatorname{sen}(xy^3)}{x^2+y^6}$

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}$

(j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy\operatorname{sen}\left(y^3\right)}{x^4+y^4}$

(k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^2}{|x|+|y|}$

(l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

4. Deduzca que la función

$$f(x,y)=\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2},$$

cumple con $-6y\leq f(x,y)\leq 6y$ y utilice esto para determinar $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$.

5. Considere la función $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4+\operatorname{sen}(y^4)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

Determine si f es continua en $(0,0)$.

6. Analizar la continuidad en el dominio de la función

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}, & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

7. Sea $f:A\to\mathbb{R}$ donde,

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:|y|>x\} \quad \text{y} \quad f(x,y)=\frac{xy}{|x|+|y|}$$

   (a) Analice: $\displaystyle\lim_{x\to0^-}\left(\lim_{y\to0}f(x,y)\right)$ y $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\left(\lim_{y\to0}f(x,y)\right)$

   (b) Demostrar que: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$

8. Determine para cuales valores de $\alpha\in\mathbb{R}$ existe el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^\alpha y}{x^2+y^2}$$

9. Determine todos los puntos en el plano donde las siguientes funciones son continuas:

   (a) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{(1+4x)(1+6y)}-1}{2x+3y} & \text{si} \quad 2x+3y\neq0, \\ 0, & \text{si} \quad 2x+3y=0. \end{cases}$

   (b) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{si} \quad |x|>y^2, \\ 0, & \text{si} \quad (x,y)=(0,0). \end{cases}$

   (c) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy-x}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}, & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,1), \\ 0, & \text{si} \quad (x,y)=(0,1). \end{cases}$

10. Dada la función $f(x,y)=|x^2-3x+y^2|$. Determinar las regiones donde no existen las derivadas parciales de $f(x,y)$.

11. Una empresa vende dos productos, x e y. Suponga que las utilidades se estiman mediante la función

$$U(x,y)=3(x-4)^2+8xy-\frac{2}{3}y^3.$$

   (a) Muestre, mediante un gráfico, los puntos del plano donde las utilidades están creciendo con respecto a x.

   (b) ¿En qué puntos de la región determinada en (a), las utilidades con respecto a la variable y están creciendo y en qué puntos están decreciendo?

Problemas Resueltos

1. Determinar el dominio y dibujar las curvas de nivel de las siguiente función

$$f(x,y)=(x+y+1)(x^2-y^2)$$

Solución. Notamos que f no presenta ningún problema de indefinición y luego su dominio es $\mathbb{R}^2$. Para determinar las curvas de nivel, notamos que la función puede escribirse como

$$f(x,y)=(x+y+1)(x^2-y^2)=(x+y+1)(x+y)(x-y),$$

lo que nos lleva a hacer el cambio de variables (rotación de ejes en 45°) dada por $u=x+y$ y $v=x-y$. De esta forma, la función luce como

$$f(u,v)=(u+1)uv,$$

que nos permite estudiar las curvas de nivel $f=k\in\mathbb{R}$ de una forma sencilla. Veamos las distintas posibilidades

$k = 0$ Esto implica que o bien $u = 0$ ó $u = -1$ ó $v = 0$.

$k > 0$ Esto implica que $v = \dfrac{k}{u(u+1)}$.

$k < 0$ Esto implica que $v = -\dfrac{k}{u(u+1)}$.

Notemos que el último caso es una reflexión del segundo caso. Presentamos las curvas de niver en la siguiente figura en el plano uv. Se deja como ejercicio efectuar la rotación de ejes.

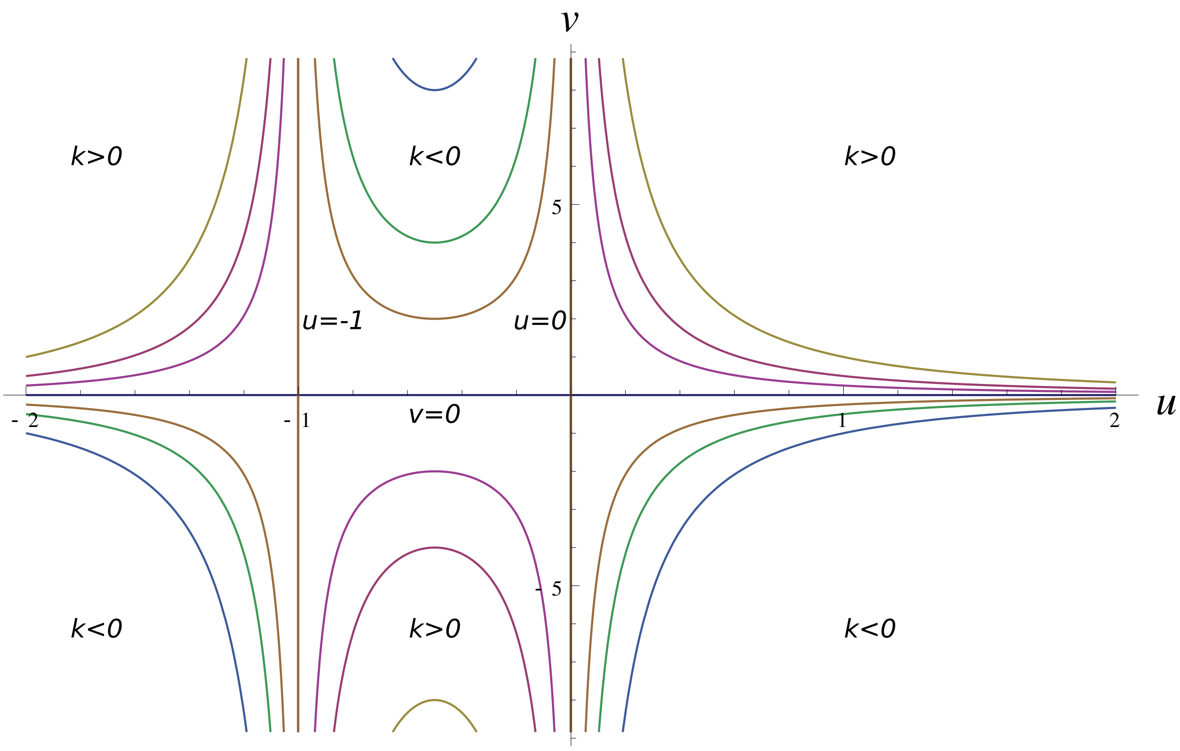


Figura 1: Curvas de nivel en plano uv. Note como las rectas verticales $u = 0, u = -1$ y horizontal $v = 0$ separan los comportamientos de las distintas curvas. Además, curvas de nivel en plano xy se obtienen de rotar en 45° la figura (invierta transformación lineal).

2. Sea $z = f(x, y)$ la función dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2y^2)}{4x^2+9y^2} + 6, & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \\ 6, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Pruebe que f es continua en el origen.
Solución. Utilizamos acotamiento, pues

$$0 \leq \left| \frac{\operatorname{sen}(x^2y^2)}{4x^2+9y^2} + 6 - 6 \right| \leq \frac{|xy|^2}{x^2+y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2} = x^2+y^2,$$

que tiende a cero si $(x, y) \to (0, 0)$. Por lo tanto f es continua en $(0, 0)$.

3. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

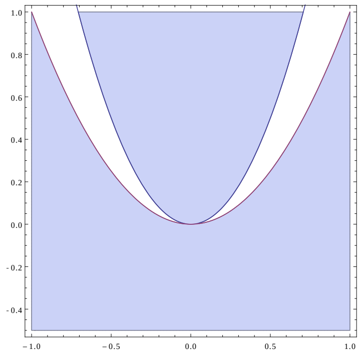
$$f(x,y) = \begin{cases} |x| & \text{si } x^2 < y < 2x^2 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

(a) Determine y realice un esbozo de los conjuntos de nivel de f.

(b) Analizar la continuidad de f en el origen.

Solución.

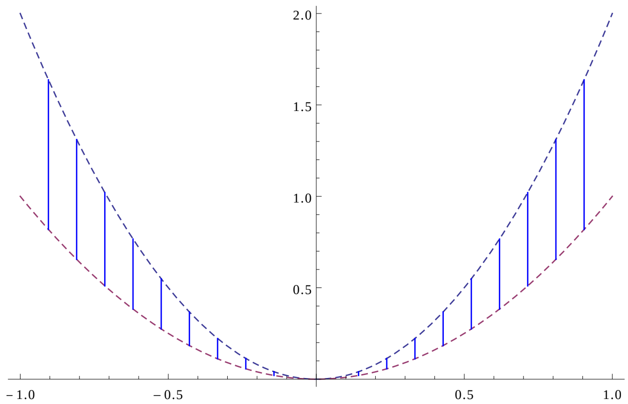
(a) El conjunto de nivel c de f es la gráfica del conjunto solución de la ecuación $f(x, y) = c$.
Si $c < 0$ el conjunto de nivel c es vacío.
Si $c = 0$ el conjunto de nivel $c = 0$ de f es $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, | f(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in R^2 | y \leq x^2 \text{ ó } y \geq 2x^2\}$.
Un esbozo se presenta en la figura (área sombreada)



Si $c > 0$ el conjunto de nivel c de f es

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = c, x^2 < y < 2x^2\} = \{(c, y) \in \mathbb{R}^2 : c^2 < y < 2c^2\} \cup \{(-c, y) \in \mathbb{R}^2 : c^2 < y < 2c^2\}.$$

Se esbozan conjuntos de nivel en la figura:



(b) Se tiene que $0 \leq |f(x, y) - f(0, 0)| = |f(x, y)| \leq |x|$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$, se deduce que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$ y por lo tanto f es continua en $(0, 0)$.

4. Sea S la superficie de ecuación $3x^2 - 3y^2 + x^2y^2z + z - 29 = 0$. Por el punto $P:(2,1,4)$ de S pasan dos planos: el primero paralelo al plano xz y el segundo paralelo al plano yz, determinando con S curvas de intersección C_1 y C_2 respectivamente. Determinar el ángulo en que se cruzan dichas curvas.

Solución.

La ecuación de S puede escribirse como la función de dos variables:

$$z = f(x,y) = \frac{29 - 3x^2 + 3y^2}{x^2y^2 + 1}$$

Las derivadas parciales evaluadas en $(2,1)$ nos entregan las pendientes de las tangentes a C_1 y C_2 respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{2x\left(3y^4 + 29y^2 + 3\right)}{\left(x^2y^2+1\right)^2} \\ \Rightarrow m_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) &= -\frac{28}{5} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{2\left(3x^4 - 29x^2 + 3\right)y}{\left(x^2y^2+1\right)^2} \\ \Rightarrow m_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) &= -\frac{26}{5} \end{aligned}$$

También, los vectores directores de las tangentes a C_1 y C_2 son los vectores:

$$\vec{u} = (1, 0, m_1) \quad \text{y} \quad \vec{v} = (0, 1, m_2).$$

Note que por ejemplo, para $\vec{u}$, la componente en $y = 0$ pues C_1 es una curva en el plano $y = 0$ (al cortar S por el plano paralelo al plano xz). Se aplica el mismo razonamiento a $\vec{v}$. Si el ángulo entre estos vectores es θ, entonces

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{m_1 m_2}{\sqrt{1+m_1^2}\sqrt{1+m_2^2}} = 0{,}9667.$$

Con esto se tiene $\theta = 16{,}8°$.