Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática

Matemáticas III (MAT 023)

Ayudantía n°2

1$^{\text{er}}$ Semestre de 2015

1. Sea $C^n(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ n veces continuamente derivables y denotemos por $C^0(\mathbb{R})$ las funciones continuas sobre $\mathbb{R}$.

   Considere la función:

$$\begin{array}{rcl} T : C^0(\mathbb{R}) & \longrightarrow & C^0(\mathbb{R}) \\ f(x) & \longmapsto & T\big(f\big)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, e^{-t}\, dt \end{array}$$

   (a) Pruebe que T es una transformación lineal.

   (b) Hallar el núcleo de T y su dimensión.

   (c) Pruebe que Im $T = C^1(\mathbb{R})$. ¿Es T un isomorfismo?

   (d) En el caso anterior, ¿es posible utilizar el teorema de las dimensiones (o del rango) para hallar $\dim_{\mathbb{R}}$ Im T?.

2. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{x}{y - x}}$$

   (a) Determine y grafique el dominio U.

   (b) ¿Es U un conjunto abierto? ¿Es U cerrado?

   (c) Dibuje cinco curvas de nivel para f.

   (d) Defina $z = f(x, y)$, con $(x, y) \in U$. Grafique el conjunto:

$$A = \big\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : z = f(1, y)\big\}$$

   y calcule $\varphi'(1)$, en donde $\varphi(y) = f(1, y)$, con $(1, y) \in U$.