1. (25 PUNTOS) Suponga que $A = \int_0^1 e^{-t^2}\mathrm{d}t$. Probar que

$$\int_0^1 \int_0^x e^{-y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = A + \frac{e^{-1}-1}{2}$$

Desarrollo: La región de integración es

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x\right\}$$

esta también se puede describir como

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \wedge y \leq x \leq 1\right\}$$

luego

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^x e^{-y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \int_0^1 \int_y^1 e^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 e^{-y^2}\left(1-y\right)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 e^{-y^2}\mathrm{d}y - \int_0^1 e^{-y^2}y\mathrm{d}y \\
&= A + \frac{e^{-1}-1}{2}
\end{aligned}$$

2. (25 PUNTOS) Considere la región

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \geq x^2 \wedge x^2 + y^2 \leq 8y \wedge |y| \leq 6\right\}$$

Mediante el uso de coordenadas polares, exprese las integrales iteradas que permitan calcular

$$\iint_{\Omega} e^{x^2+y^2} \mathrm{d}A$$

Desarrollo: Usando el cambio $x = r\cos\theta$ y $y = r\sin\theta$ se sigue que $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$ y

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} e^{x^2+y^2} \mathrm{d}A \\ = \ & 2\left(\int_{\pi/4}^{\pi/3} \int_0^{8\sin\theta} e^{r^2} r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta + \int_{\pi/3}^{\pi/2} \int_0^{6\csc\theta} e^{r^2} r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta\right) \end{aligned}$$

3. (25 PUNTOS) Calcular $\displaystyle\iint_D \frac{1}{y^3}\,\mathrm{d}A$, donde D es la región limitada por las curvas $y = \operatorname{sen}(x)$, $y = 2\operatorname{sen}(x)$, $y = \cos(x)$, $y = 2\cos(x)$, con $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Desarrollo: Una forma de claclularlo es: Consideremos el cambio de variable

$$u = \frac{y}{\operatorname{sen}(x)}, \quad v = \frac{y}{\cos(x)} \quad \text{donde} \quad 1 \leq u \leq 2, \quad 1 \leq v \leq 2$$

El jacobiano de la transformación es:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -\frac{y}{\operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)}$$

Reemplazando, obtenemos que:

$$\iint_D \frac{1}{y^3}\,\mathrm{d}A = \int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{u^2v^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{4}$$

4. (25 PUNTOS) Sean $\Lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$ e $I = \iint_\Lambda (1 - |x| - |y|)\, \mathrm{d}A$.

   a) (15 PUNTOS) Usando las propiedades de la integral, argumente que, para toda región $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ donde la integral existe:

   $$\iint_\Omega (1 - |x| - |y|)\, \mathrm{d}A \leq I.$$

   b) (10 PUNTOS) Calcular el valor de I.

   Desarrollo:

   a) Si A y B son conjuntos donde la función $f(x,y) = 1 - |x| - |y|$ es positiva y C es un conjunto donde es negativa entonces

   $$\begin{aligned} \iint_A f(x,y)\, \mathrm{d}(x,y) &\leq \iint_{A \cup B} f(x,y)\, \mathrm{d}(x,y) \\ \iint_{A \cup C} f(x,y)\, \mathrm{d}(x,y) &\leq \iint_A f(x,y)\, \mathrm{d}(x,y) \end{aligned}$$

   Notar que $\Lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$ es el mayor conjunto donde $1 - |x| - |y| \geq 0$ se sigue que si $\Omega \subseteq \Lambda$ entonces $\iint_\Omega (1 - |x| - |y|)\, \mathrm{d}A \leq I$. Si Ω no es subconjunto de Λ entonces considerará una parte donde la funcón es negativa y por tanto la integral será menor al valor de I.

   b) Por simetría de la función y de la región de integración:

   $$\begin{aligned} \iint_\Lambda (1 - |x| - |y|)\, \mathrm{d}A &= 4 \iint_{\Lambda \cap \text{primer cuadrante}} (1 - x - y)\, \mathrm{d}(x,y) \\ &= 4 \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)\, \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$