Matemática III
Ejercicios Tercera Ayudantía
Segundo Semestre 2015

Intrucciones

- Superficies y Curvas de Nivel.
- Límites y Continuidad.
- Derivadas Parciales.

1. Sea $f(x,y,z) = z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2$.
   (a) Determine $\text{Dom}(f), \text{Rec}(f)$.
   (b) Utilice las trazas $x=0, y=0, z=0$ para esbozar la gráfica de la superficie de nivel $f(x,y,z)=1$.

2. (a) Sean $a,b \geq 0$ y $p,q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Demuestre que

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

   (b) Utilice $0 < \alpha < q < 2 < p$, $a = x^2$ y $b = |y+2|$ para probar que si $\alpha \in (0,2)$ entonces la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(y+2)}{x^4 + |y+2|^\alpha} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,-2) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,-2) \end{cases}$$

   es continua en $(0,-2)$.
   (c) ¿Qué argumento utiliza para probar que si $\alpha \geq 2$ entonces f es discontinua en $(0,-2)$?

3. Se define la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por la fórmula

$$f(x,y) = \begin{cases} y\, x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   (a) Calcular por definición $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ en los puntos $(0,y)$.
   (b) Para $(x,y) \neq (0,y)$ calcular las derivadas parciales de f.
   (c) Analizar la continuidad en $\mathbb{R}^2$ de las funciones derivadas parciales de f.