

Institut National du Bâtiment et des
Travaux Publics
INBTP

RESISTANCE DES MATERIAUX

NOTE DE COURS

Par Jean Patience KIAKA LWATA



BUT DU COURS DE RESISTANCE DES MATERIAUX

Ce cours vise à mettre à la disposition des apprenants les connaissances nécessaires pour calculer et mettre en œuvre des structures stables et économiques.

Les connaissances ainsi attendues se résument essentiellement sous forme d'un triangle dit « **Triangle d'or** » dont :

1. Les trois sommets symbolisent respectivement la maîtrise de :

- ⊕ **Sommet 1** : La destination (l'utilisation) de l'élément de structure sous étude, répondant à la question « à quoi va servir l'élément de structure ? Dans quelles conditions va-t-il être utilisé ? » ;

- ⊕ **Sommet 2** : La matière (le matériaux) avec lequel l'élément de structure sous étude va être réalisé, répondant à la question « avec quel matériau allons-nous réaliser notre élément de structure ? » ;
- ⊕ **Sommet 3** : La forme et la géométrie de l'élément de structure sous étude, répondant à la question « Quelle forme et quelle géométrie pour l'élément de structure à réaliser ? ».

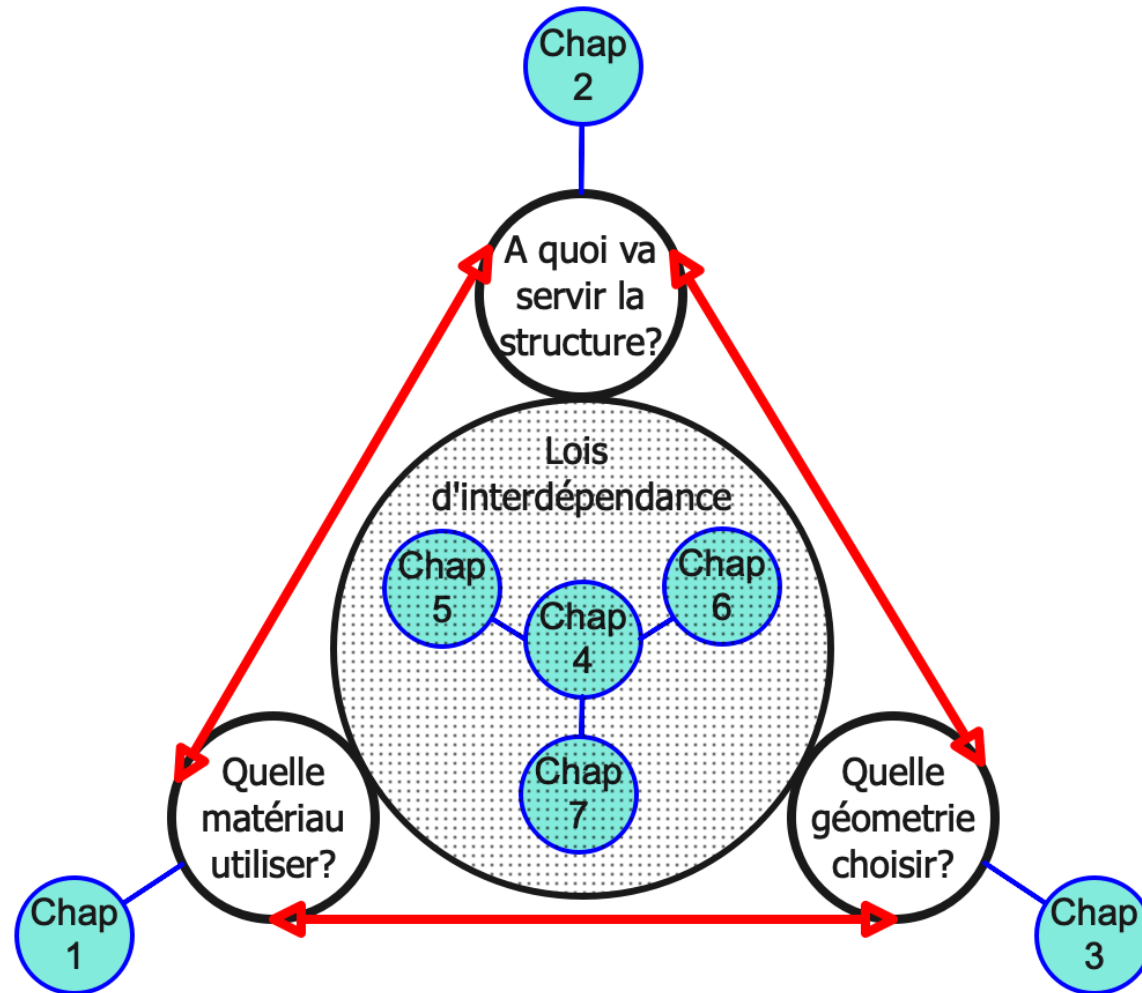
2. Les côtés représentent les relations mathématiques (lois de comportement) mettant en combinaison les paramètres représentants respectivement les trois sommets décrits ci-dessus et les rendant ainsi interdépendant, condition nécessaire pour assurer la stabilité de l'élément de structure à réaliser.

Ses relations tiennent également compte de :

- ⊕ La forme de la structure ;
- ⊕ Le mode de fonctionnement mécanique de la structure.

Les chapitres qui seront étudiés dans le cadre de ce cours auront ainsi pour finalité la maîtrise de ces trois sommets ainsi que l'établissement de ces relations mathématiques d'interdépendance (lois de comportement).

STRUCTURE DU COURS DE RESISTANCE DES MATERIAUX



Les Chapitres du cours :

Chap. 1 Introduction à l'étude du champ des contraintes

Chap. 2 Actions sur les structures

Chap. 3 Poutres

Chap. 4 Évaluation des contraintes et déformations

Chap. 5 Calcul de déplacement dans les poutres à plan moyen

Chap. 6 Introduction aux calculs des systèmes hyperstatiques

Chap. 7 Méthodes énergétiques

RESULTATS ATTENDUS

A l'issu de ce cours, les apprenants seront en mesure de garantir la stabilité des éléments de structures et assurer la rationalité des ressources utilisées et étant capable de :

- ⊕ Dimensionner les éléments de structures pour lesquels les matériaux utilisés sont identifiés ainsi que leurs conditions d'utilisation.
- ⊕ Faire le choix des matériaux à utiliser pour les éléments de structures pour lesquels les dimensions sont identifiées ainsi que leurs conditions d'utilisations.
- ⊕ Orienter le choix des conditions d'utilisation des éléments de structures pour lesquels les matériaux ainsi que les dimensions sont identifiés.
- ⊕ Vérifier la stabilité des éléments de structures pour lesquels les matériaux, les conditions d'utilisation ainsi que les dimensions sont identifiées.

PREREQUIS

Pour améliorer compréhension de ce cours, les apprenants sont invités à avoir une bonne connaissance de :

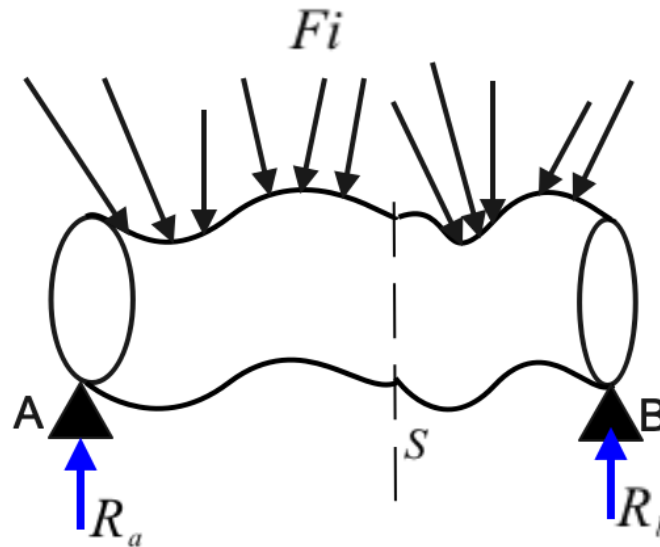
- ⊕ Mathématiques.
- ⊕ Physique.
- ⊕ Statique appliquée.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION A L'ETUDE DU CHAMP DES CONTRAINTES

1.1.Définitions

1.1.1.Équilibre d'un corps (rappel)

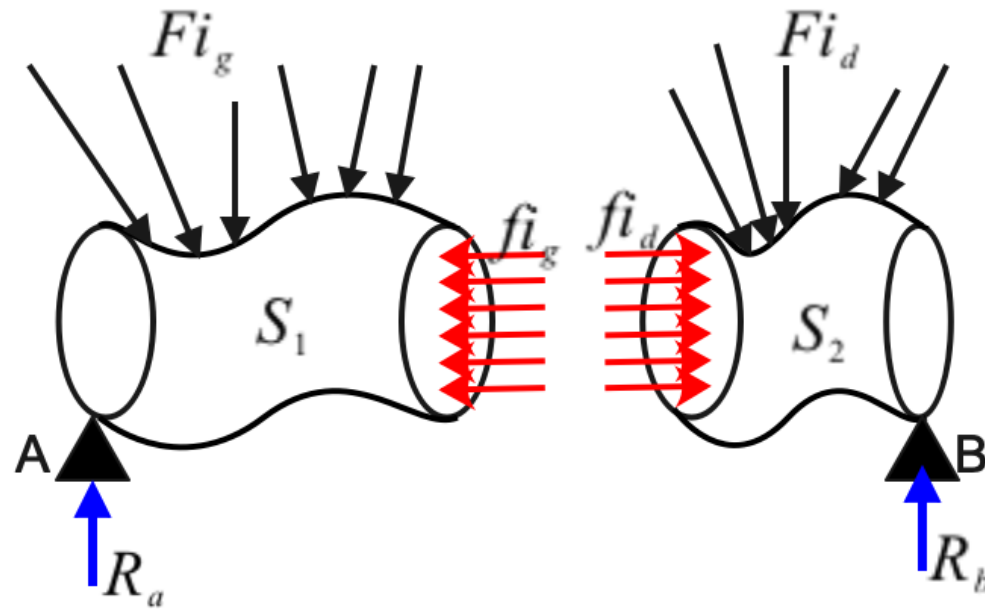


Constat :

- ⊕ Les appuis sont généralement situés loin des points d'application des forces F_i
- ⊕ Les Forces R_a et R_b réagissent à l'action du système F_i
- ⊕ Il y a transfert à l'intérieur de la matière, constituant le corps en équilibre, du système de charges F_i vers les appuis R_a et R_b .

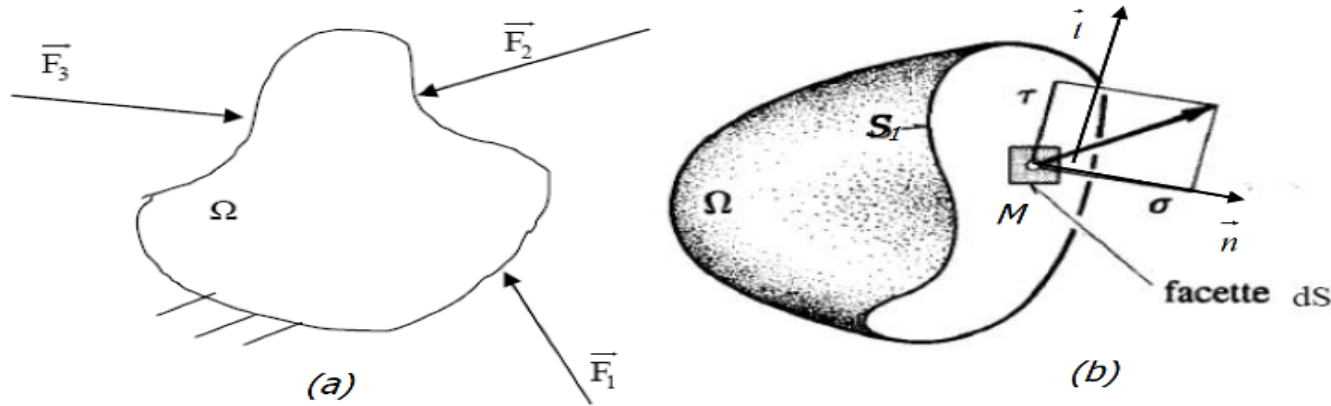
Nous nous proposons de sectionner ce corps en équilibre en deux parties au droit de la section S .

Isolons la partie de gauche de ce corps



$$R_a + (Fi)g + (fi)g = 0$$

1.1.2. Vecteur contrainte



Considérons un point M au droit de la section, côté gauche, entouré par une surface ΔS . Le solide S_2 exerce une action mécanique sur le solide S_1 , que l'on peut modéliser par un effort réparti et on a :

$$\vec{\Delta F}_{S_2/S_1} = \vec{C}(M, \vec{n}) \Delta S$$

Le Vecteur $\vec{C}(M, \vec{n})$

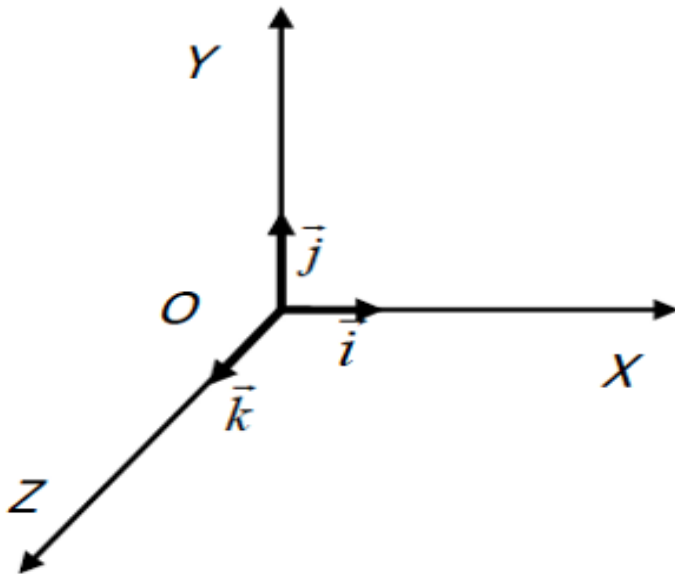
Est appelé **vecteur contrainte** au point M et de normale n (où n est le vecteur unitaire normal à ΔS sortant).

Le vecteur contrainte C au point M relativement à l'élément de surface ΔS orienté par sa normale extérieure x, est défini par :

$$\vec{C}(M, \vec{x}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta f}}{\Delta S} = \frac{\vec{df}}{dS}$$

1.1.3.Facette

Nous appellerons facette dS , toute surface infiniment petite, définie autour d'un point M et portée par sa normale orientée \vec{n} . Dès lors toute facette dS sera déterminée par le point M autour duquel elle est définie et par sa normale orientée n . Nous le noterons $dS (M, n)$.



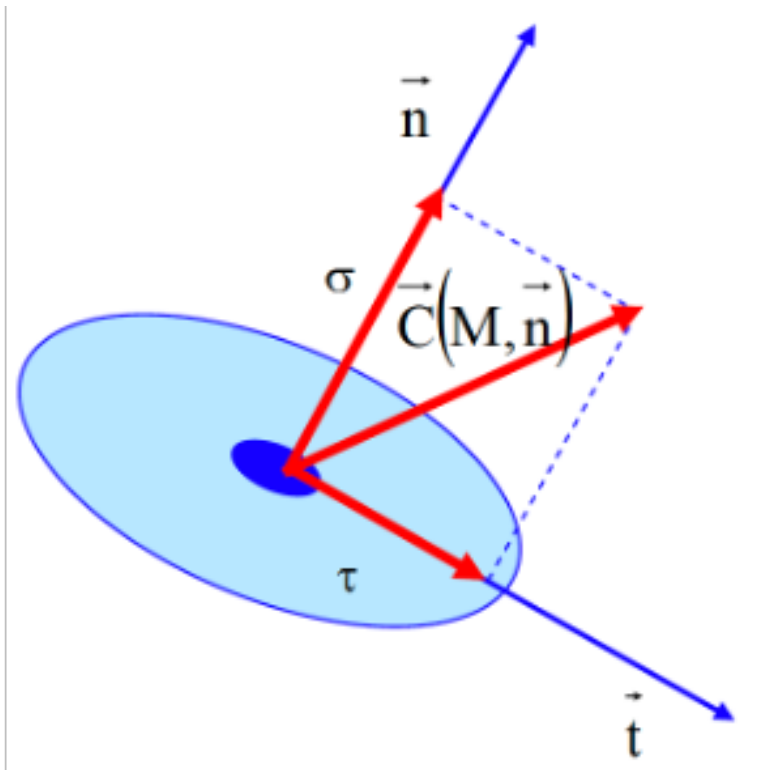
La normale \vec{n} est comptée positive extérieurement suivant le sens de rotation du produit vectoriel. En effet, si Oxyz constitue un repère orthonormé, alors :

$$X \wedge Y = Z ; Y \wedge Z = X \text{ et } Z \wedge X = Y$$

Pour toute facette dS , il existe un et un seul vecteur-contrainte \vec{C} , dont l'orientation est quelconque.

1.1.4. Décomposition du Vecteur contrainte

Tout vecteur contrainte \vec{C} associé à une facette dS peut se s'écrire sous forme d'une somme vectorielle de deux composantes $\vec{\sigma}$ et $\vec{\tau}$, dont $\vec{\sigma}$ est orientée suivant la normale \vec{n} de la facette et $\vec{\tau}$ orientée suivant la tangente \vec{t} à la facette.



σ sera appelée contrainte normale et τ sera appelé contrainte tangentielle.
Dès lors :

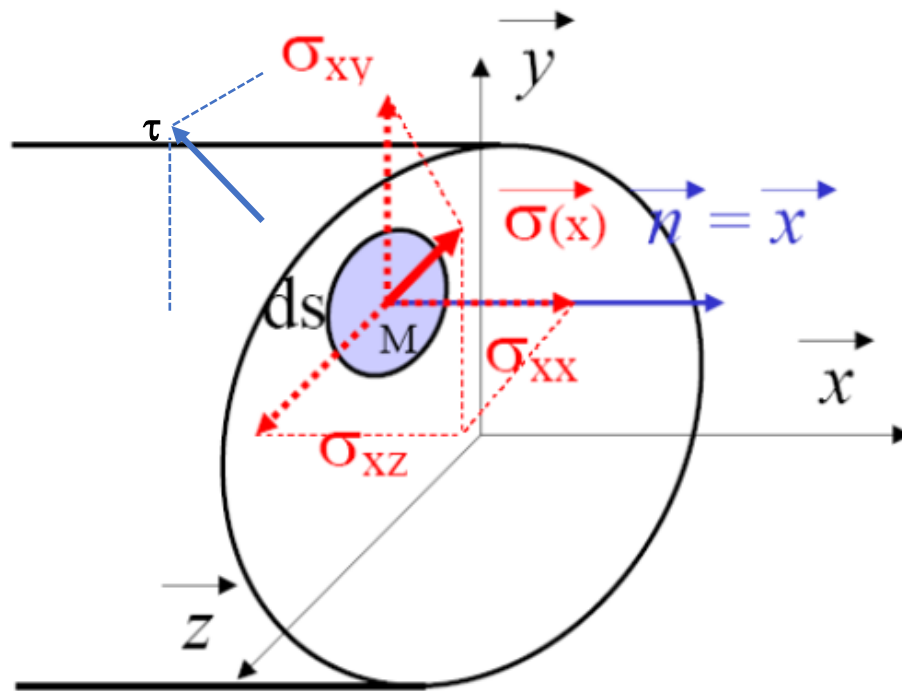
$$\vec{C}(M, \vec{n}) = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t}$$

Lorsque la normale est $\vec{n} = \vec{x}$, on munit le plan tangent de deux vecteurs y et z, tels que la base (x , y , z) soit ortho normale directe. On décompose la contrainte alors comme étant :

σ_{xx} est la contrainte normale et la contrainte tangentielle τ est égale à :

$$\tau = \sqrt{\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2}$$

Comme le montre le schéma suivant :



1.1.5. Interprétation

- ⊕ De manière simplifiée, une contrainte est une force intérieure appliquée à l'unité de surface à un point donné d'une section bien déterminée.
- ⊕ Expérimentalement, on définit pour chaque matériau une contrainte limite admissible, notée $[\sigma']$, au-delà de laquelle la pièce subit des détériorations de ses caractéristiques mécaniques, dimensionnelles, voire une rupture.
- ⊕ Le calcul de résistance des matériaux consiste à vérifier que les contraintes engendrées par les sollicitations extérieures ne dépassent pas la contrainte limite admissible par le matériau $[\sigma']$.
- ⊕ Une contrainte est un outil de calcul ; on ne peut pas l'observer directement, par contre, on peut observer ses effets ; études des déformations par exemple.

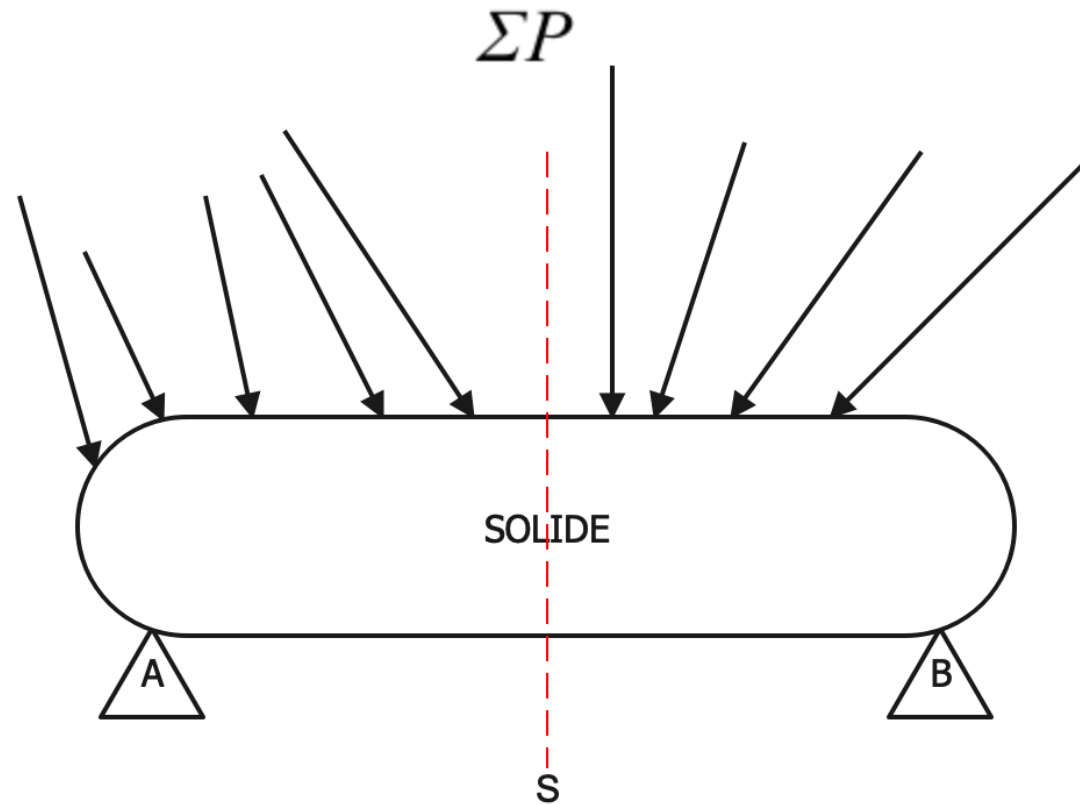
- ⊕ Les paramètres qui influencent directement une contrainte sont les sollicitations et la section de la pièce.

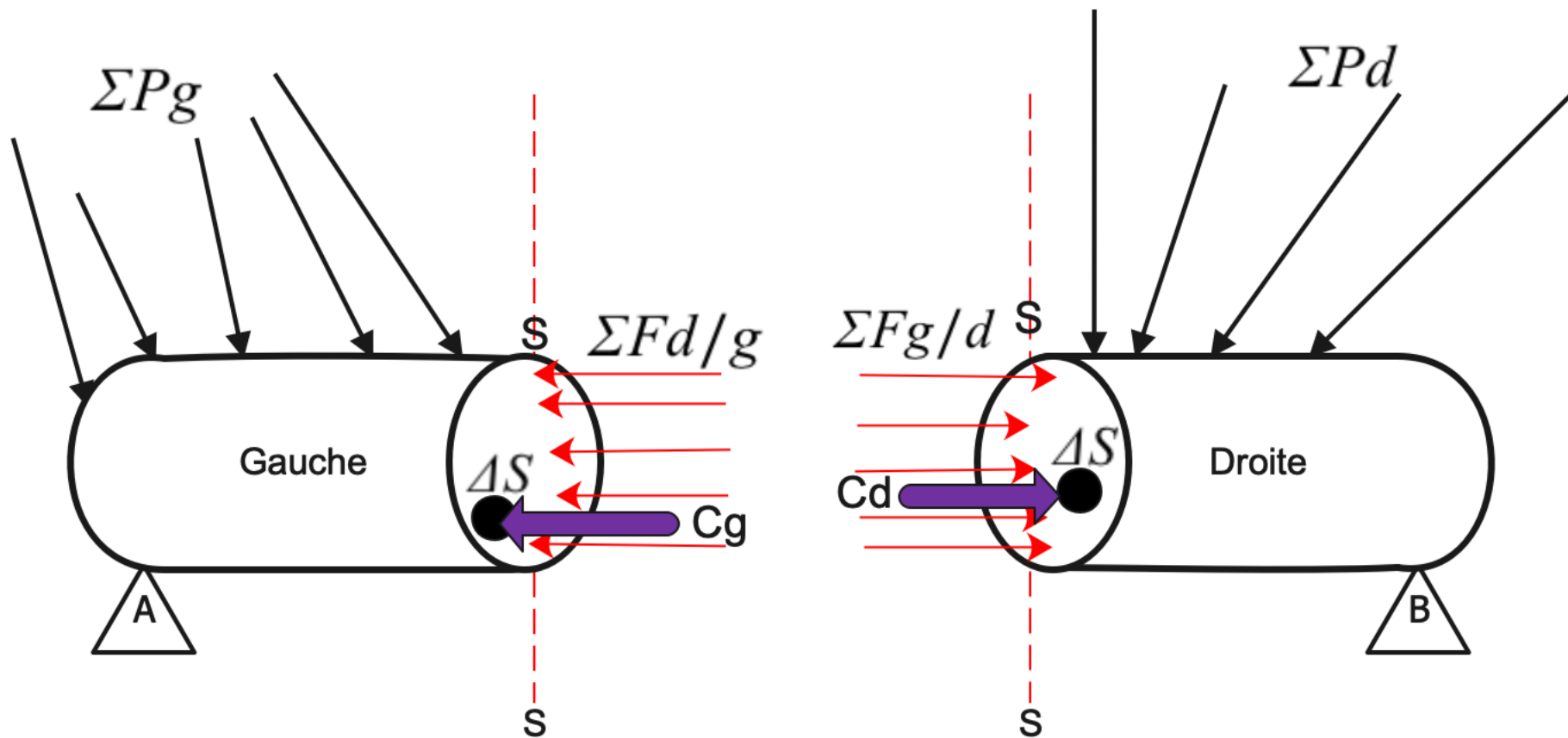
1.2. But de l'étude du champ des contraintes

- ⊕ Vérifier les conditions d'équilibre d'un matériau (matière) dont on connaît la géométrie (dimensions et forme) et les actions (forces) auxquelles il est soumis de manière à prouver que les contraintes produites en tout point du matériau sont inférieures (ou égales) aux contraintes limites dudit matériau ;
- ⊕ Déterminer les dimensions (dimensionner) d'un matériau dont on connaît les actions (forces) qui lui seront appliquées en s'assurant que les contraintes limites dudit matériau ne sont pas dépassées en tout point.

1.3.Calcul du vecteur-contrainte

1.3.1.Principe





Soit :

- $\sum P_g$ le système des forces extérieures appliquées sur la partie gauche de ce solide ;
- $\sum P_d$ le système des forces extérieures appliquées sur la partie droite ;
- $\sum F_{g/d}$ la somme des forces intérieures exercées par la partie gauche du solide sur la partie droite, au droit de la section S ;
- $\sum F_{d/g}$ la somme des forces intérieures exercées par la partie droite du solide sur la partie gauche, au droit de la section S ;
- ΔS la surface élémentaire S définie autour du point M de la section S ;
- $F_{g/d}$ la force intérieure élémentaire exercée par la partie gauche du solide sur la partie droite, au droit de la section S ;

- $F_{d/g}$ la force intérieure élémentaire exercée par la partie droite du solide sur la partie gauche, au droit de la section S ;
- C_g la contrainte qui s'exerce au point M sur la face gauche de la section S ;
- C_d la contrainte qui s'exerce au point M sur la face droite de la section S.

De telle sorte que :

$$S = \sum \Delta S$$

$$F_{g/d} = C_d \cdot \Delta S$$

$$F_{d/g} = C_g \cdot \Delta S$$

$$\sum F_{g/d} = \sum C_d \cdot \Delta S$$

$$\sum F_{d/g} = \sum C_g \cdot \Delta S$$

En isolant la partie gauche du solide et en admettant qu'elle reste en équilibre, nous pouvons écrire que :

$$\sum \mathbf{F}_{d/g} + \sum \mathbf{P}_g = \mathbf{0} \text{ , d'où alors}$$

$$\sum \mathbf{P}_g = \sum \mathbf{C}_g \cdot \Delta \mathbf{S}$$

De même, en isolant la partie droite du solide et en admettant qu'elle reste en équilibre, nous aurons :

$$\sum \mathbf{F}_{g/d} + \sum \mathbf{P}_d = \mathbf{0} \text{ , d'où alors}$$

$$\sum \mathbf{P}_d = \sum \mathbf{C}_d \cdot \Delta \mathbf{S}$$

D'où le théorème suivant :

1.3.2. Théorème de SAINT-VENANT

Les contraintes et la suite les déformations, dans une section région (section) éloignée des points d'application d'un système des forces extérieures, ne dépendent que de la résultante générale et du moment résultant de ce système des forces extérieures.

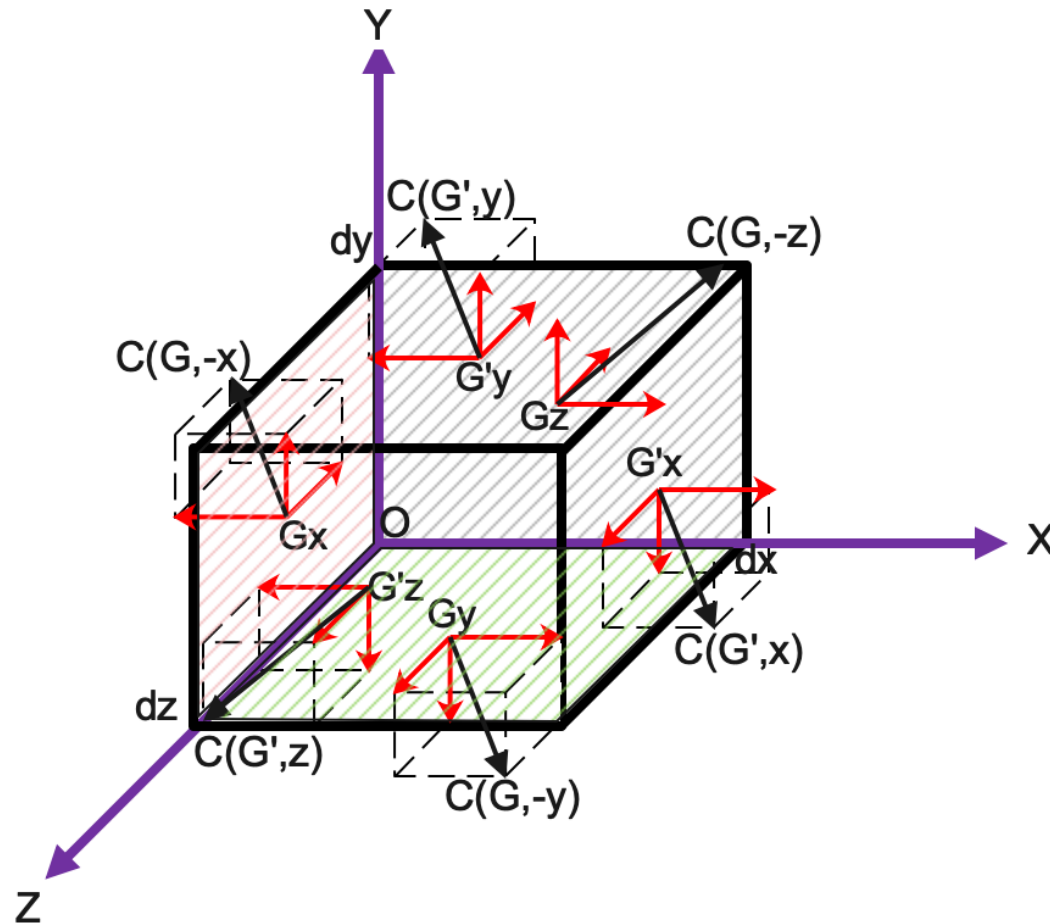
Observations

- ⊕ A chaque facette est associée un vecteur-contrainte et autour d'un point il y a une infinité de manière de définir une facette. Ainsi autour d'un point il y a une infinité des vecteurs contraintes ;
- ⊕ Si tous les vecteurs-contraintes autour du même point ont la même intensité, les extrémités de ces vecteurs contraintes se déplacent le long d'une sphère. C'est le cas de « Contraintes hydrostatiques » ;

- ⊕ Si toutes ses contraintes sont contenues dans un plan unique, on parlera de « État plan de Contraintes » ;
- ⊕ Si toutes ses contraintes sont contenues dans un plan unique et portées par une même direction, on parlera de « État plan unidirectionnel de Contraintes »
- ⊕ Si les contraintes sont contenues dans un plan unique et portées par deux directions, on parlera de « État plan bi-axial de Contraintes »
- ⊕ Si contraintes sont portées par trois directions, on parlera de « État triaxial Contraintes.

1.4.Réciprocité des contraintes tangentielles

Considérons un volume élémentaire dV tel que $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ comme le montre la figure ci-dessous :



Avec :

- ⊕ $\vec{C}(G, -\vec{x})$: Vecteur contrainte agissant au centre de gravité G de la facette OYZ orientée suivant $-\vec{x}$;
- ⊕ $\vec{C}(G', \vec{x})$: Vecteur contrainte agissant au centre de gravité G' de l'autre facette OYZ orientée suivant \vec{x} ;
- ⊕ $\vec{C}(G, -\vec{y})$: Vecteur contrainte agissant au centre de gravité G de la facette OZX orientée suivant $-\vec{y}$;
- ⊕ $\vec{C}(G', \vec{y})$: Vecteur contrainte agissant au centre de gravité G' de l'autre facette OZX orientée suivant \vec{y} ;
- ⊕ $\vec{C}(G, -\vec{z})$: Vecteur contrainte agissant au centre de gravité G de la facette OXY orientée suivant $-\vec{z}$;

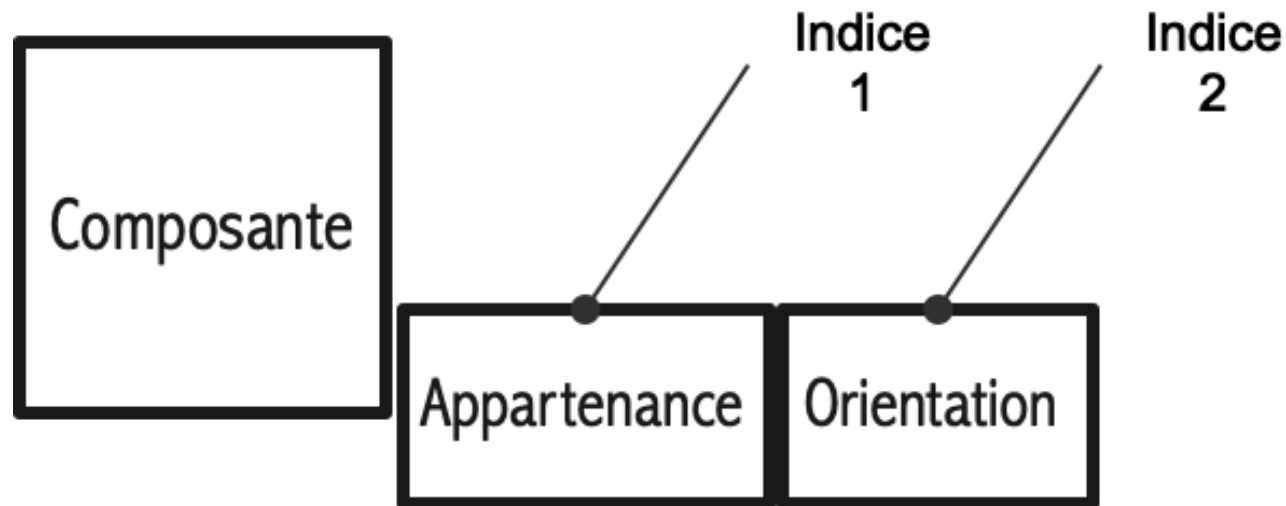
- ⊕ $\vec{C}(G', \vec{z})$: Vecteur contrainte agissant au centre de gravité G' de l'autre facette OXY orientée suivant \vec{z} .

Chaque vecteur contrainte \vec{C} peut se décomposer suivant les trois axes OX, OY et OZ comme le montre la figure ci-dessus :

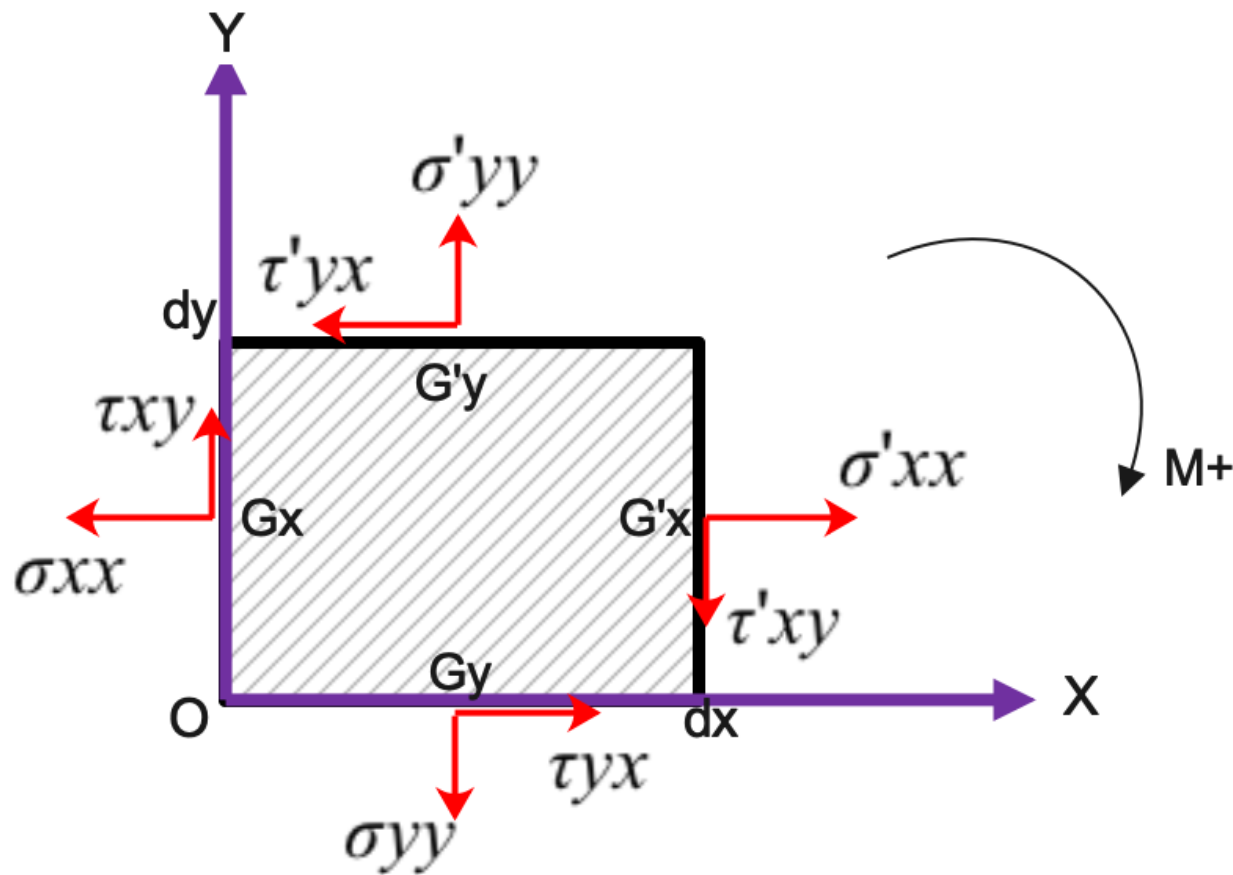
- ⊕ La composante portée par la normale à la facette considérée sera appelée : **Contrainte normale (notée σ)** ;
- ⊕ Les composantes portées par les autres axes situés dans le plan de la facette considérée seront appelées **contraintes tangentielles (notées τ)**.

Pour des raisons pratiques, chaque composante du vecteur contrainte \vec{C} sera identifiée par deux indices :

- ⊕ Le premier indice l'identifie à la facette à laquelle elle appartient (indique la normale de la facette) ;
- ⊕ Le deuxième indice indique sa direction (l'axe d'orientation ou de projection)



En projetant le volume élémentaire dV dans le plan OXY, nous aurons :



Le Théorème des accroissements finis nous permet d'établir les relations suivantes :

$$\tau'_{yx} = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \quad \tau'_{xy} = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx$$

$$\begin{aligned} \sigma'_{yy} &= \sigma_{yy} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy \\ \sigma'_{xx} &= \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \end{aligned}$$

Si admettant que le volume élémentaire dV est en équilibre, en supposant que $dz = 1$ et en écrivant l'équation des moments autour du point O, nous aurons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \cdot \frac{dy^2}{2} + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dx dy - \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy \cdot \frac{dx^2}{2} \\ - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dy = 0 \end{aligned}$$

En négligeant les infiniment petits du troisième ordre, nous obtenons :

$$(\tau_{xy}) dx dy - (\tau_{yx}) dx dy = 0$$

Ainsi :

$$(\tau_{xy}) = (\tau_{yx})$$

D'où le théorème suivant :

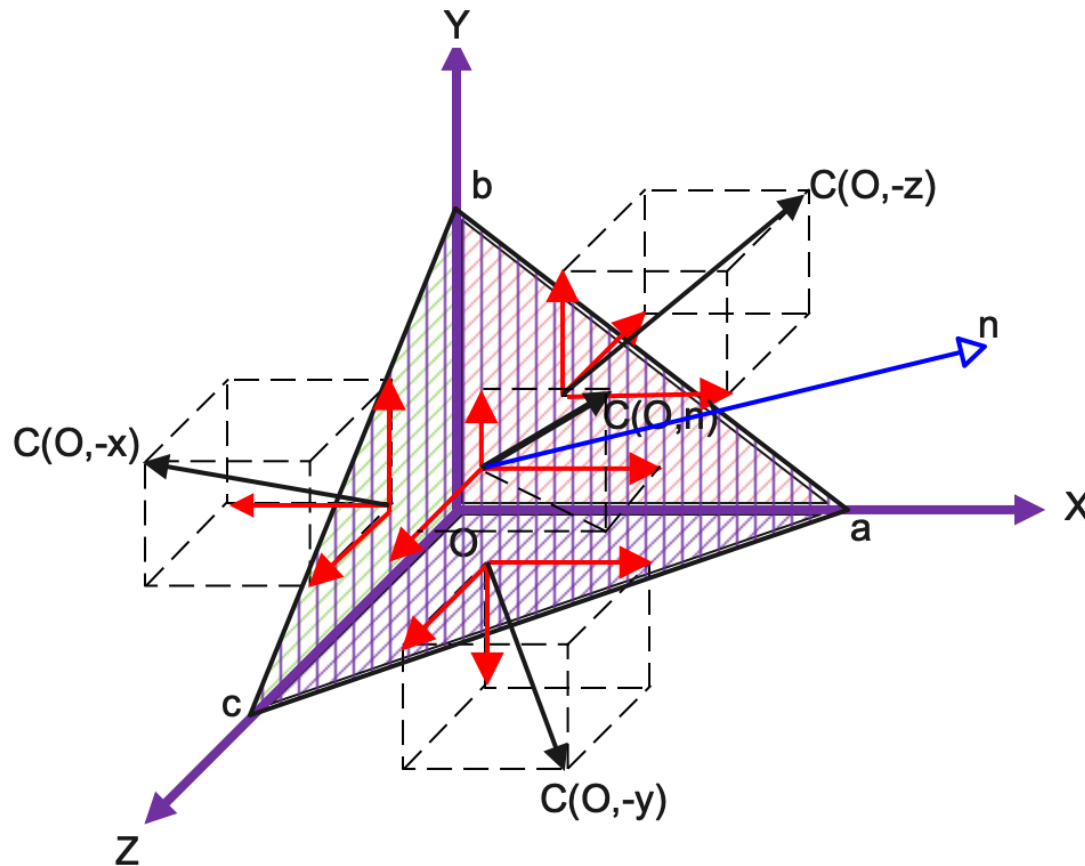
Principe de réciprocité de MAXWEL

Les contraintes tangentielles associées aux facettes perpendiculaires sont égales. Elles divergent de l'arrête commune et convergent de l'arrête adjacente.

1.5. Distribution des contraintes autour d'un point dans l'espace

1.5.1. Principe

Considérons un point O autour duquel nous délimitons judicieusement une facette quelconque dS et admettons que ce point O est également l'origine d'un référentiel trirectangle $Oxyz$, de manière que :



- ⊕ Oab soit la projection de dS dans le plan Oxy , soit la facette dS_1 ;
- ⊕ Obc soit la projection de dS dans le plan Oyz , soit la facette dS_2 ;
- ⊕ Oca soit la projection de dS dans le plan Oxz , soit la facette dS_3 ;

Soit :

- ⊕ $\vec{C}(\mathbf{0}, \vec{n})$, le vecteur contrainte associé à la facette dS et agissant au point O ;
- ⊕ $\vec{C}(\mathbf{0}, -\vec{x})$, le vecteur contrainte associé à la facette dS_2 et agissant au point O ;
- ⊕ $\vec{C}(\mathbf{0}, -\vec{y})$, le vecteur contrainte associé à la facette dS_3 et agissant au point O ;
- ⊕ $\vec{C}(\mathbf{0}, -\vec{z})$, le vecteur contrainte associé à la facette dS_1 et agissant au point O ;
- ⊕ $\vec{n}(\alpha, \beta, \gamma)$, la normale à la facette dS de cosinus directeurs α, β, γ .
- ⊕ f , la force élastique agissant sur la facette dS ;
- ⊕ f_1 , la force élastique agissant sur la facette dS_1 ;

- ⊕ \mathbf{f}_2 , la force élastique agissant sur la facette $d\mathbf{S}_2$;
- ⊕ \mathbf{f}_3 , la force élastique agissant sur la facette $d\mathbf{S}_3$;

Le trièdre **Oabc** (solide élémentaire) étant en équilibre, nous pouvons écrire la relation suivante :

$$\mathbf{f} + \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 = \mathbf{0}. \quad (1)$$

Sachant que :

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{f}} &= d\mathbf{S} \cdot \vec{\mathbf{C}}(0, \vec{\mathbf{n}}) \\ \vec{\mathbf{f}}_1 &= d\mathbf{S}_1 \vec{\mathbf{C}}(0, -\vec{\mathbf{z}}) \\ \vec{\mathbf{f}}_2 &= d\mathbf{S}_2 \vec{\mathbf{C}}(0, -\vec{\mathbf{x}}) \\ \vec{\mathbf{f}}_3 &= d\mathbf{S}_3 \vec{\mathbf{C}}(0, -\vec{\mathbf{y}}) \end{aligned} \quad (2)$$

Et qu'à la suite de la projection de dS sur les trois axes Ox, Oy et Oz :

$$dS_1 = \gamma \cdot dS ; dS_2 = \alpha \cdot dS ; dS_3 = \beta \cdot dS$$

Les relations (2) deviennent :

$$\vec{f} = dS \cdot \vec{C}(0, \vec{n})$$

$$\vec{f}_1 = \gamma \cdot dS \cdot \vec{C}(0, -\vec{z})$$

$$\vec{f}_2 = \alpha \cdot dS \cdot \vec{C}(0, -\vec{x}) \quad (3)$$

$$\vec{f}_3 = \beta \cdot dS \cdot \vec{C}(0, -\vec{y})$$

Dès lors, la relation (1) devient :

$$dS \cdot \vec{C}(0, \vec{n}) + \gamma \cdot dS \cdot \vec{C}(0, -\vec{z}) + \alpha \cdot dS \cdot \vec{C}(0, -\vec{x}) + \beta \cdot dS \cdot \vec{C}(0, -\vec{y}) = 0$$

Soit :

$$\vec{C}(0, \vec{n}) = \alpha \cdot \vec{C}(0, \vec{x}) + \beta \cdot \vec{C}(0, \vec{y}) + \gamma \cdot \vec{C}(0, \vec{z}) = 0 \quad (4)$$

1.5.2. Théorème de Cauchy :

La relation (4) nous permet de conclure que le vecteur contrainte $\vec{C}(0, \vec{n})$, associé à une facette quelconque orientée suivant la normale $\vec{n}(\alpha, \beta, \gamma)$, est une combinaison linéaire des vecteurs contraintes associés aux facettes dont les normales sont portées par les axes de référence, définis autour du point 0.

Les coordonnées des vecteurs contraintes, repris dans la relation (4), par rapport aux axes étant respectivement :

$$\vec{C}(0, \vec{n}) = (X, Y, Z)$$

$$\vec{C}(0, \vec{x}) = (\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz})$$

$$\vec{C}(0, \vec{y}) = (\tau_{yx}, \sigma_{yy}, \tau_{yz})$$

$$\vec{C}(0, \vec{z}) = (\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_{zz})$$

En projetant la relation (4) sur les trois axes de référence Ox, Oy et Oz, nous obtenons :

$$X = \alpha \cdot \sigma_{xx} + \beta \cdot \tau_{yx} + \gamma \cdot \tau_{zx}$$

$$Y = \alpha \cdot \tau_{xy} + \beta \cdot \sigma_{yy} + \gamma \cdot \tau_{zy} \quad (5)$$

$$Z = \alpha \cdot \tau_{xz} + \beta \cdot \tau_{yz} + \gamma \cdot \sigma_{zz}$$

Le système d'équation (5) peut s'écrire sous forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (6)$$

(Q)

La matrice (Q) est appelée « **Tenseur des Contraintes** » ou « **Matrice de l'état des contraintes** » ou « **Tenseur de Cauchy** »

D'après le principe de réciprocité de MAXWELL, nous pouvons admettre que :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Dès lors le Tenseur des contraintes (Q) est une matrice symétrique, ce qui implique l'existence d'un repère trirectangulaire rendant le tenseur des contraintes (Q) diagonale.

L'équation caractéristique de la matrice (Q) sera :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma \end{bmatrix} = 0 \quad (7)$$

En développant la relation (7), nous trouvons le polygone caractéristique suivant :

$$-\sigma^3 + b\sigma^2 - c\sigma + d = 0 \quad (8)$$

Avec :

$$b = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

$$c = (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx}) - (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$$

$$d = (\sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}) - (\sigma_{zz}\tau_{xy}^2 + \sigma_{xx}\tau_{yz}^2 + \sigma_{yy}\tau_{zx}^2) \quad (9)$$

Les relations (9) montrent que :

$$b = \text{Trace de } (Q)$$

$$c = \frac{1}{2}[\text{Trace}^2(Q) - \text{Trace}(Q)^2]$$

$$d = \text{Déterminant } (Q)$$

Soient σ_1 , σ_2 et σ_3 , les racines caractéristiques de l'équation (8), dès lors :

- ⊕ σ_1 , σ_2 et σ_3 sont des valeurs propres du tenseur des contraintes (Q) et sont appelés **contraintes principales** ;
- ⊕ Les axes de référence du système trirectangulaire qui a rendu diagonale le tenseur des contraintes (Q) sont appelés **directions principales des contraintes** et le système lui-même est dit « **repère ou système principale** ».

Ainsi, dans le repère principal, l'équation matricielle (6) ci-dessus s'écrit alors comme suit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (10)$$

Constat :

Les composantes tangentielles des vecteurs contraintes associées aux facettes de références portées par les directions principales, sont tous nulles.

D'où alors :

$$\begin{array}{ll} X = \sigma_1 \alpha & \alpha = \frac{X}{\sigma_1} \\ Y = \sigma_2 \beta & \text{Soit } \beta = \frac{Y}{\sigma_2} \\ Z = \sigma_3 \gamma & \gamma = \frac{Z}{\sigma_3} \end{array}$$

α, β et γ , étant les cosinus directeurs de la normale \vec{n} qui porte la facette dS , la somme de leurs carrés vaut l'unité, d'où nous pouvons écrire :

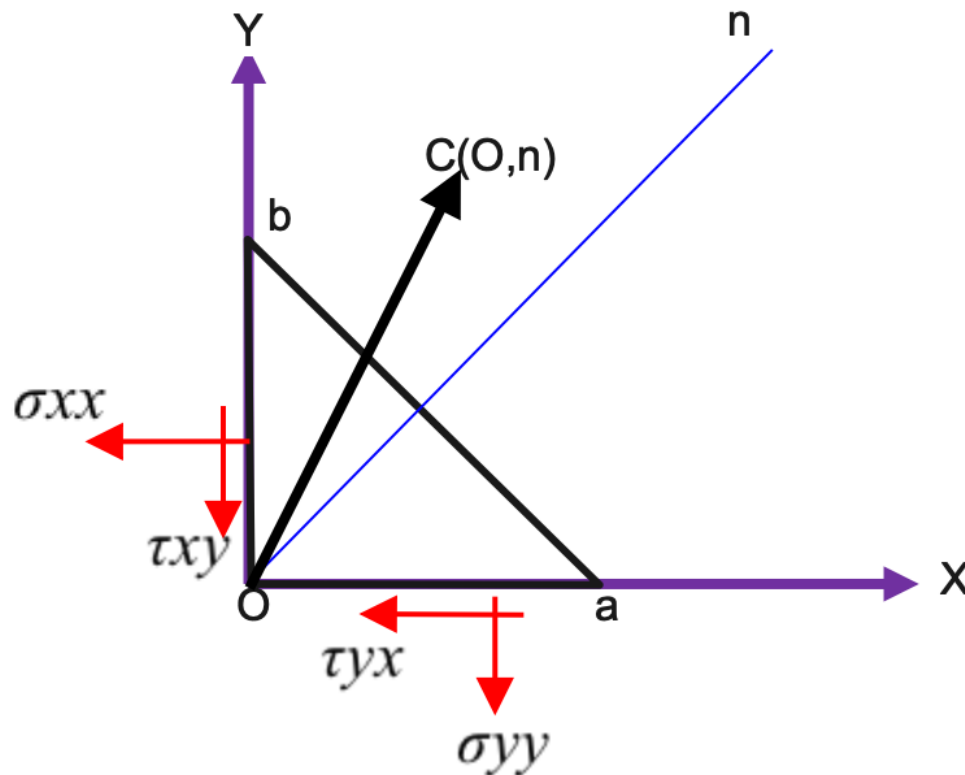
$$\frac{X^2}{\sigma_1^2} + \frac{Y^2}{\sigma_2^2} + \frac{Z^2}{\sigma_3^2} = 1 \quad (11)$$

Conséquence de la relation (11) :

La relation (11) montre que les extrémités des vecteurs contraintes associés aux facettes définies autour d'un point dans l'espace, se déplacent le long d'une ellipsoïde d'équation (11) appelé « **Ellipsoïde de Lamé** ».

1.6. Distribution des contraintes autour d'un point dans le plan

Considérons un point O autour duquel nous délimitons judicieusement une facette quelconque dS et admettons que ce point O est également l'origine d'un référentiel bi rectangulaire Oxy , de manière que :



- ⊕ Oa soit la projection de dS sur l'axe Ox , soit la facette dS_1 ;
- ⊕ Ob soit la projection de dS sur l'axe Oy , soit la facette dS_2 ;

Soit :

- ⊕ $\vec{c}(\mathbf{0}, \vec{n})$, le vecteur contrainte associé à la facette dS et agissant au point O ;
- ⊕ $\vec{c}(\mathbf{0}, -\vec{x})$, le vecteur contrainte associé à la facette dS_1 et agissant au point O ;
- ⊕ $\vec{c}(\mathbf{0}, -\vec{y})$, le vecteur contrainte associé à la facette dS_2 et agissant au point O ;
- ⊕ $\vec{n}(\alpha, \beta)$, la normale à la facette dS de cosinus directeurs α et β .
- ⊕ \mathbf{f} , la force élastique agissant sur la facette dS ;

- ⊕ \mathbf{f}_1 , la force élastique agissant sur la facette dS_1 ;
- ⊕ \mathbf{f}_2 , la force élastique agissant sur la facette dS_2 ;

Le triangle **Oab** (surface élémentaire) étant en équilibre, nous pouvons écrire la relation suivante :

$$\mathbf{f} + \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 = \mathbf{0}. \quad (1)$$

Sachant que :

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{f}} &= dS. \vec{\mathbf{C}}(0, \vec{\mathbf{n}}) \\ \vec{\mathbf{f}}_1 &= dS_1 \vec{\mathbf{C}}(0, -\vec{\mathbf{x}}) \\ \vec{\mathbf{f}}_2 &= dS_2 \vec{\mathbf{C}}(0, -\vec{\mathbf{y}}) \end{aligned} \quad (2)$$

Et qu'à la suite de la projection de dS sur les deux axes Ox et Oy :

$$dS_1 = \alpha. dS ; dS_2 = \beta. dS ;$$

Les relations (2) deviennent :

$$\vec{f} = dS. \vec{C}(0, \vec{n})$$

$$\vec{f}_1 = \alpha. dS. \vec{C}(0, -\vec{x}) \quad (3)$$

$$\vec{f}_2 = \beta. dS. \vec{C}(0, -\vec{y})$$

Dès lors, la relation (1) devient :

$$dS. \vec{C}(0, \vec{n}) + \alpha. dS. \vec{C}(0, -\vec{x}) + \beta. dS. \vec{C}(0, -\vec{y}) = 0$$

Soit :

$$\vec{C}(O, \vec{n}) = \alpha. \vec{C}(O, \vec{x}) + \beta. \vec{C}(O, \vec{y}) = 0 \quad (4)$$

Les coordonnées des vecteurs contraintes, repris dans la relation (4), par rapport aux axes étant respectivement :

$$\vec{C}(O, \vec{n}) = (X, Y)$$

$$\vec{C}(O, \vec{x}) = (\sigma_{xx}, \tau_{xy})$$

$$\vec{C}(O, \vec{y}) = (\tau_{yx}, \sigma_{yy})$$

En projetant la relation (4) sur les deux axes de référence Ox et Oy, nous obtenons :

$$\begin{aligned} X &= \alpha \cdot \sigma_{xx} + \beta \cdot \tau_{yx} \\ Y &= \alpha \cdot \tau_{xy} + \beta \cdot \sigma_{yy} \end{aligned} \quad (5)$$

Le système d'équation (5) peut s'écrire sous forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (6)$$

(Q)

L'équation caractéristique de la matrice (Q) sera :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$= 0$$

En développant la relation (7), nous trouvons le polygone caractéristique suivant :

$$\sigma^2 - b\sigma + c = 0 \quad (8)$$

Avec :

$$b = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

$$c = (\sigma_{xx}\sigma_{yy}) - (\tau_{xy}^2) \quad (9)$$

Les relations (9) montrent que :

$$b = \textit{Trace de } (Q)$$

$$c = \textit{Déterminant } (Q)$$

Soient σ_1 et σ_2 , les racines caractéristiques de l'équation (8), dès lors :

$$\sigma_{1,2} = \frac{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{2} \pm \frac{\sqrt{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2}}{2}$$

Ainsi, dans le repère principal, l'équation matricielle (6) ci-dessus s'écrit alors comme suit :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (10)$$

D'où :

$$\begin{aligned} X &= \sigma_1 \alpha \\ Y &= \sigma_2 \beta \end{aligned} \quad \text{Soit} \quad \begin{aligned} \alpha &= \frac{X}{\sigma_1} \\ \beta &= \frac{Y}{\sigma_2} \end{aligned}$$

α et β étant les cosinus directeurs de la normale \vec{n} qui porte la facette dS , la somme de leurs carrés vaut l'unité, d'où nous pouvons écrire :

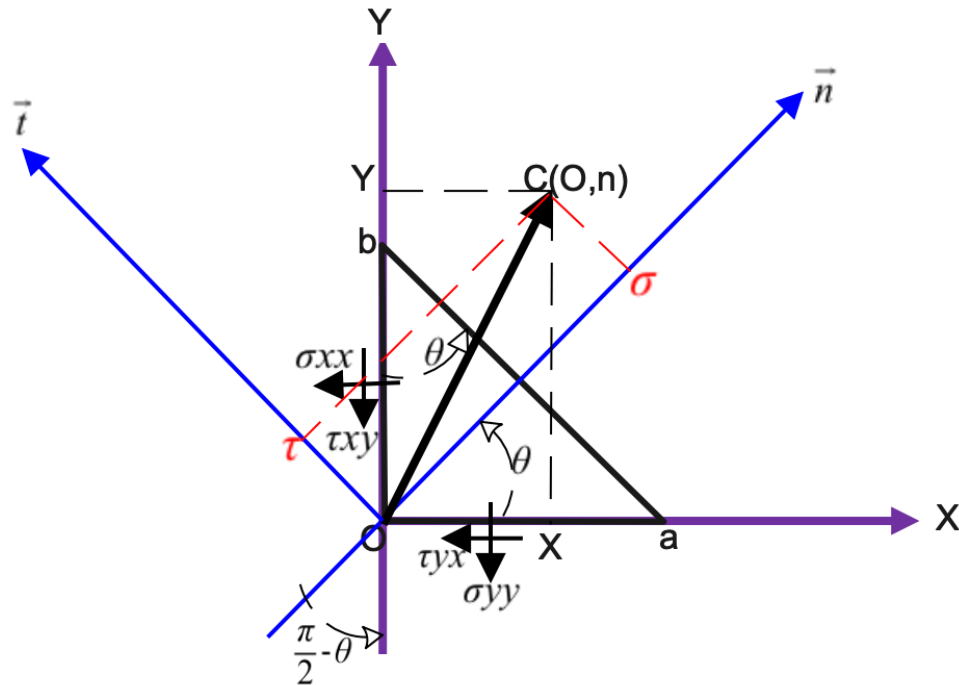
$$\frac{X}{\sigma_1} + \frac{Y}{\sigma_2} = 1 \quad (11)$$

Conséquence de la relation (11) :

La relation (11) montre que les extrémités des vecteurs contraintes associés aux facettes définies autour d'un point dans le plan, se déplacent le long d'une ellipse d'équation (11) appelé « **Ellipse de Lamé** ».

1.7.Détermination des composantes normale σ et tangentielle τ du vecteur contrainte $\vec{C}(O, \vec{n})$ associées à une facette quelconque dS

Considérons d'une part, un point O autour duquel nous délimitons judicieusement une facette quelconque dS , O étant également l'origine d'un référentiel bi rectangulaire Oxy et d'autre part, le système d'axes $O\vec{n}$ *et* $O\vec{t}$, formé respectivement par la normale \vec{n} et la tangentielle \vec{t} à la dite facette dS , comme le montre la figure suivante :



Dans le repère bi rectangulaire OX, OY ; la projection de la relation (4) ci-dessus, sur les deux axes donne :

$$X = \alpha \cdot \sigma_{xx} + \beta \cdot \tau_{yx}$$

$$Y = \alpha \cdot \tau_{xy} + \beta \cdot \sigma_{yy} \quad (i)$$

Sachant que :

$$\alpha = \cos \theta \text{ et que } \beta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \sin \theta$$

Les équations (i) deviennent :

$$X = \cos \theta \cdot \sigma_{xx} + \sin \theta \cdot \tau_{yx}$$

$$Y = \cos \theta \cdot \tau_{xy} + \sin \theta \cdot \sigma_{yy} \quad (\text{ii})$$

Dans le repère bi rectangulaire $O\vec{n}$ *et* $O\vec{t}$; la projection de la relation (4) ci-dessus, sur les deux axes donnera :

$$\begin{cases} \sigma = \cos \theta \cdot X + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \cdot Y \\ \tau = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \cdot X + \cos \theta \cdot Y \end{cases} \quad (\text{iii})$$

En remplaçant X et Y par les relations (ii) et en simplifiant, les équations (iii) deviennent :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{2} + \frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta) \\ \tau = - \frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{2} \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta) \end{cases} \quad (iv)$$

Application :

Admettons que le système d'axes $O\vec{n}$ *et* $O\vec{t}$ soit **principal**, dans ce cas, **la composante tangentielle τ** doit être nulle.

Démontrons cela :

Dans un système principal, les composantes normales σ sont extrémales (maximale ou minimale) ce qui entraîne que :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = 0$$

Soit :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \left[\frac{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{2} + \frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta) \right] = 0$$

D'où :

$$- \frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{2} \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta)$$

Or :

$$- \frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{2} \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta) = \tau$$

Donc : $\tau = 0$

Cas particulier :

Dans un repère principal, où toutes les composantes tangentielles des vecteurs contraintes sont nulles, les expressions (iv) deviennent :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{2} + \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \cos(2\theta) \\ \tau = - \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \sin(2\theta) \end{cases} \quad (iv \text{ bis})$$

1.8.Position des directions principales :

Dans l'application ci-dessus, nous venons de montrer que dans un repère principal, les composantes tangentielles des vecteurs contraintes sont nulles. Dès lors :

$$-\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{2} \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta) = 0$$

D'où :

$$\tan(2\theta) = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})} \quad (v)$$

Soit : $\theta = \theta_0 + k \frac{\pi}{2}$, les directions principales sont donc perpendiculaires.

1.9.Lignes isostatiques dans un champ des contraintes

Les lignes isostatiques sont des courbes tangentes, en tout du champ des contraintes, aux directions principales et suivant lesquelles s'exercent les contraintes extrémales. Ces lignes sont aussi appelées « **lignes du champ des contraintes extrémales** »

Les directions principales étant perpendiculaires en tout point du champ, les lignes isostatiques forment donc un réseau des « **trajectoires orthogonales** » à l'intérieur du champ des contraintes.

La détermination des lignes isostatiques dans un champ des contraintes se fait grâce à la résolution de l'équation différentielle issue de la relation (v) :

$$Tg(2\theta) = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}$$

De meme :

$$Tg(2\theta) = \frac{2Tg(\theta)}{(1 - Tg^2(\theta))}$$

Et sachant que :

$$Tg(\theta) = \frac{dy}{dx}$$

La relation (v) devient:

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{1 - (\frac{dy}{dx})^2} = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}$$

Soit :

$$\tau_{xy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\frac{dy}{dx} - \tau_{xy} = 0 \quad (\text{vi})$$

La relation (vi) est l'équation différentielle des lignes isostatiques. Les racines de cette équation différentielles du second degré sont :

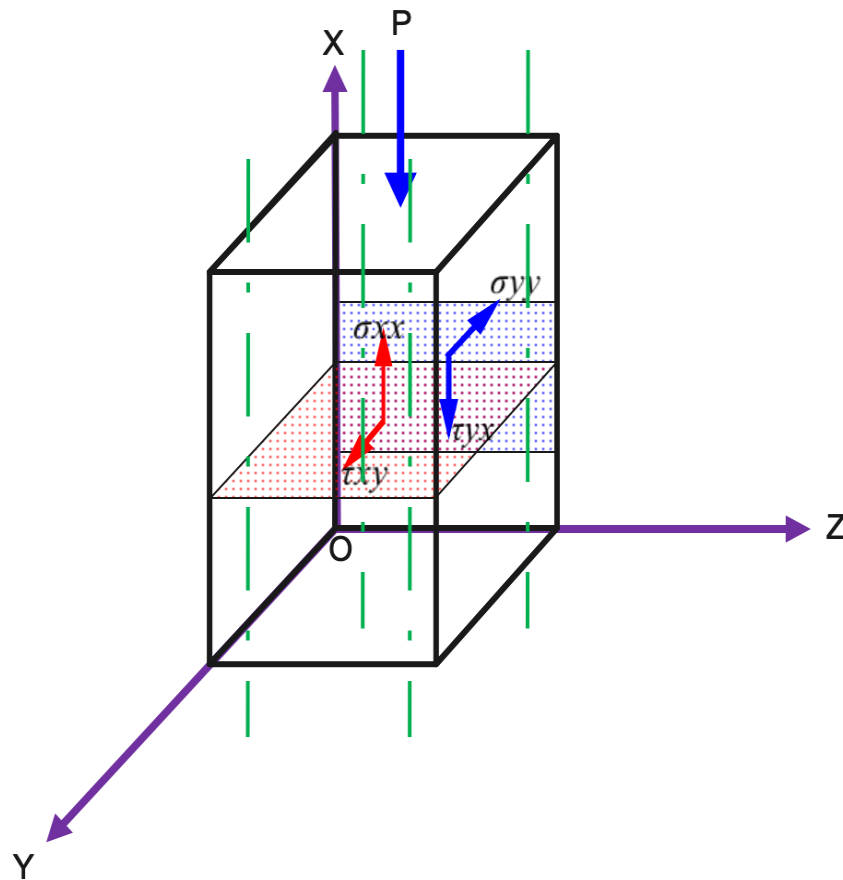
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{2\tau_{xy}} \pm \frac{\sqrt{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2}}{2\tau_{xy}} \quad (\text{vii})$$

Remarque :

Lorsque la contrainte tangentielle τ_{xy} s'annule, la relation (vi) montre bien que

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

Application 1. Cas d'un poteau vertical chargé verticalement



Nous avons :

$$\sigma_{xx} \neq 0$$

$$\sigma_{yy} = 0$$

$$\tau_{xy} = 0$$

La relation (vi) devient :

$$\sigma_{xx} \frac{dy}{dx} = 0 \text{ or } \sigma_{xx} \neq 0$$

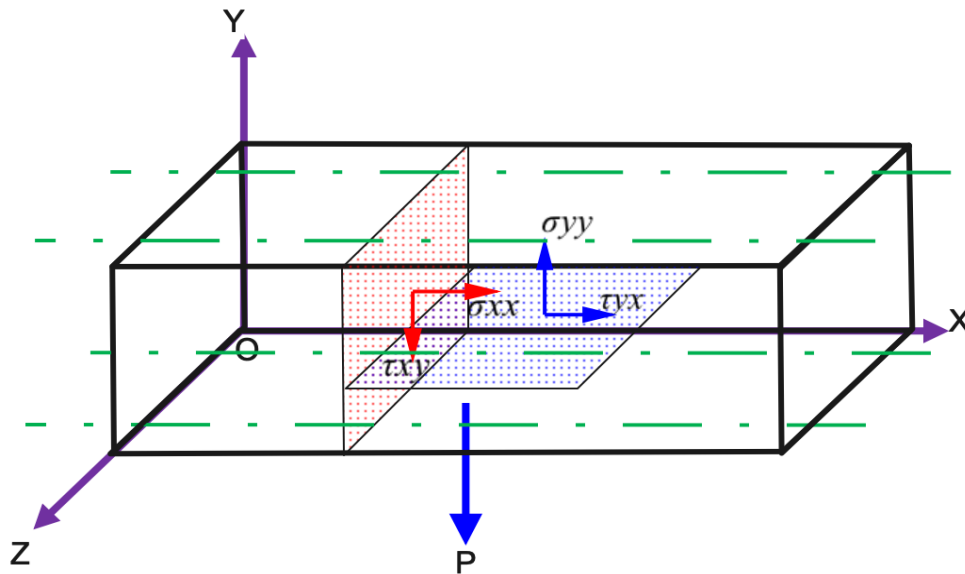
$$D'où : \frac{dy}{dx} = 0$$

Donc $y = a$, droite parallèle à OX

Conclusion :

Les lignes isostatiques sont parallèles à l'axe OX , sont donc verticales. Les armatures principales du poteau seront donc disposées suivant la même direction (verticale).

Application 2. Cas d'une poutre horizontale chargée verticalement



Nous avons :

$$\sigma_{xx} = 0$$

$$\sigma_{yy} \neq 0$$

$$\tau_{yx} = 0$$

La relation (vi) devient :

$$-\sigma_{yy} \frac{dy}{dx} = 0 \text{ or } \sigma_{yy} \neq 0$$

$$D'où : \frac{dy}{dx} = 0$$

Donc $y = b$, droite parallèle à OX

Conclusion :

Les lignes isostatiques sont parallèles à l'axe OX, sont donc horizontales. Les armatures principales de la poutre seront donc disposées suivant la même direction (horizontale).

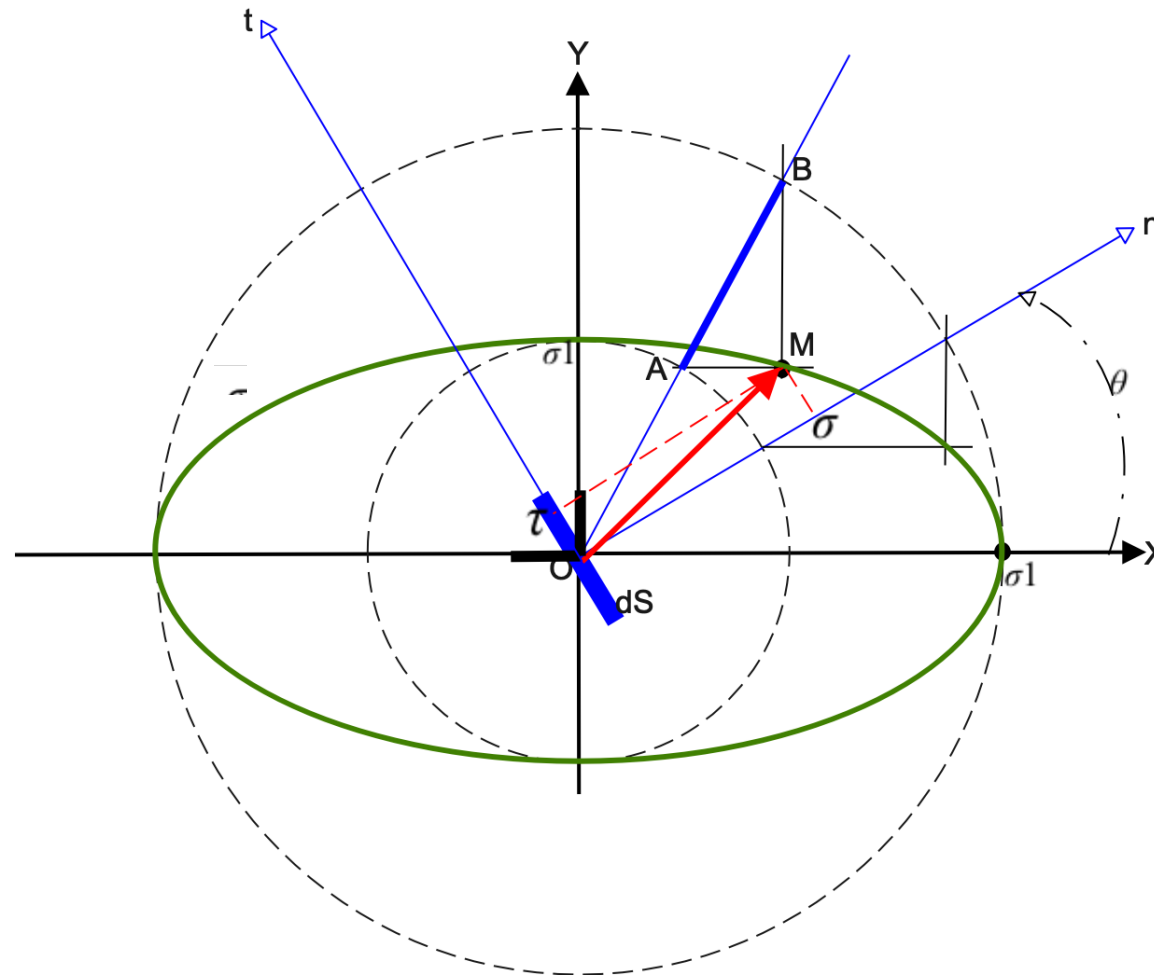
1.10.Représentation graphique de la distribution des contraintes autour d'un point dans le plan (Cercle de Mohr)

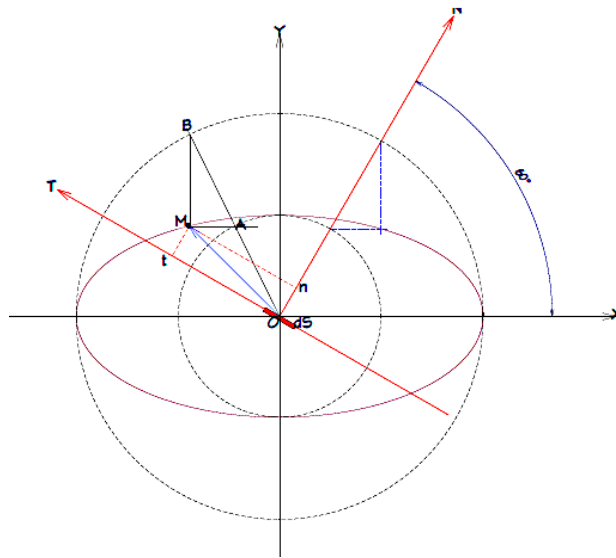
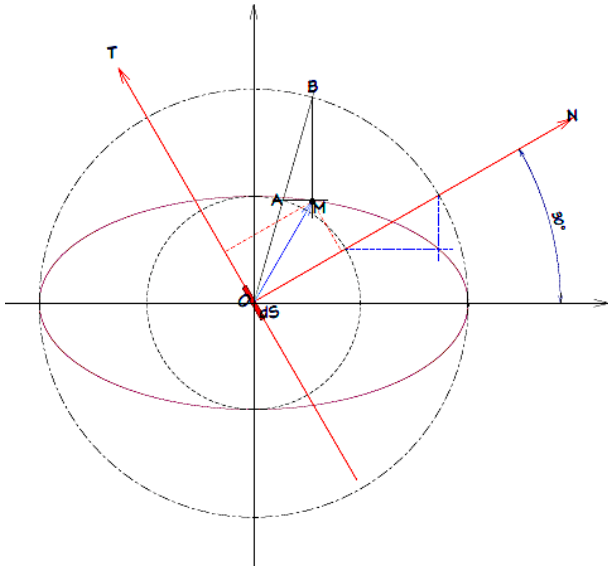
Le point (1.6) vu précédemment relation nous renseigne que les extrémités des vecteurs contraintes associés aux facettes définies autour d'un point dans le plan, se déplacent le long d'une ellipse appelé « **Ellipse de Lamé** » dont l'équation dans le repère bi rectangulaire OXY vaut :

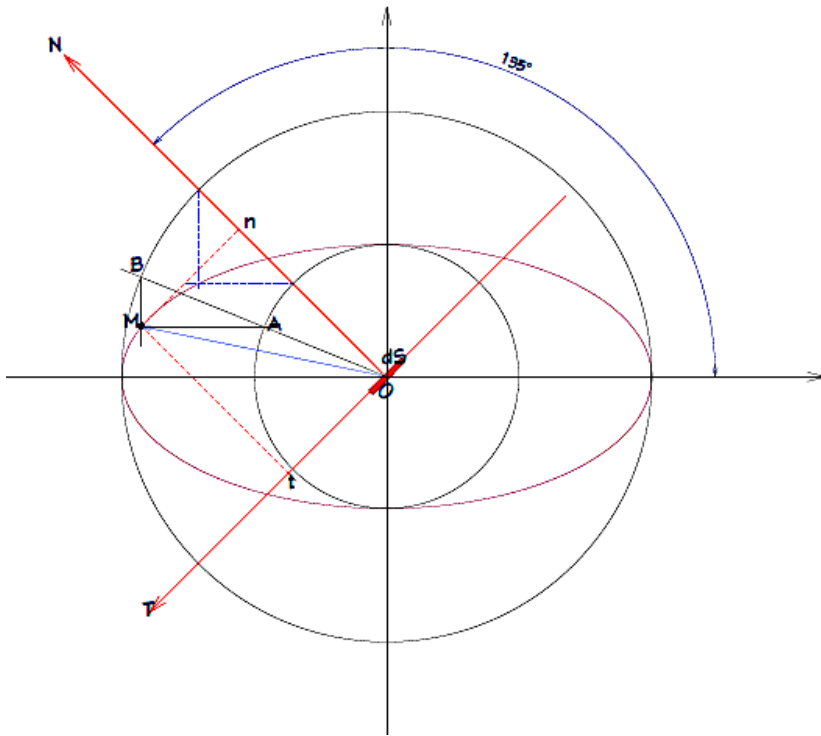
$$\frac{X^2}{\sigma_1^2} + \frac{Y^2}{\sigma_2^2} = 1 \qquad \sigma_1 \geq \sigma_2$$

Le repère OXY n'ayant pas une signification physique (réelle) par rapport à la facette dS, nous nous proposons de rechercher la représentation géométrique (graphique) de ce même état des contraintes dans le repère d'axes $O\vec{n}$ *et* $O\vec{t}$ attachés directement à ladite facette.

Pour se faire, construisons point par point l'ellipse de Lamé comme le montre la figure suivante :



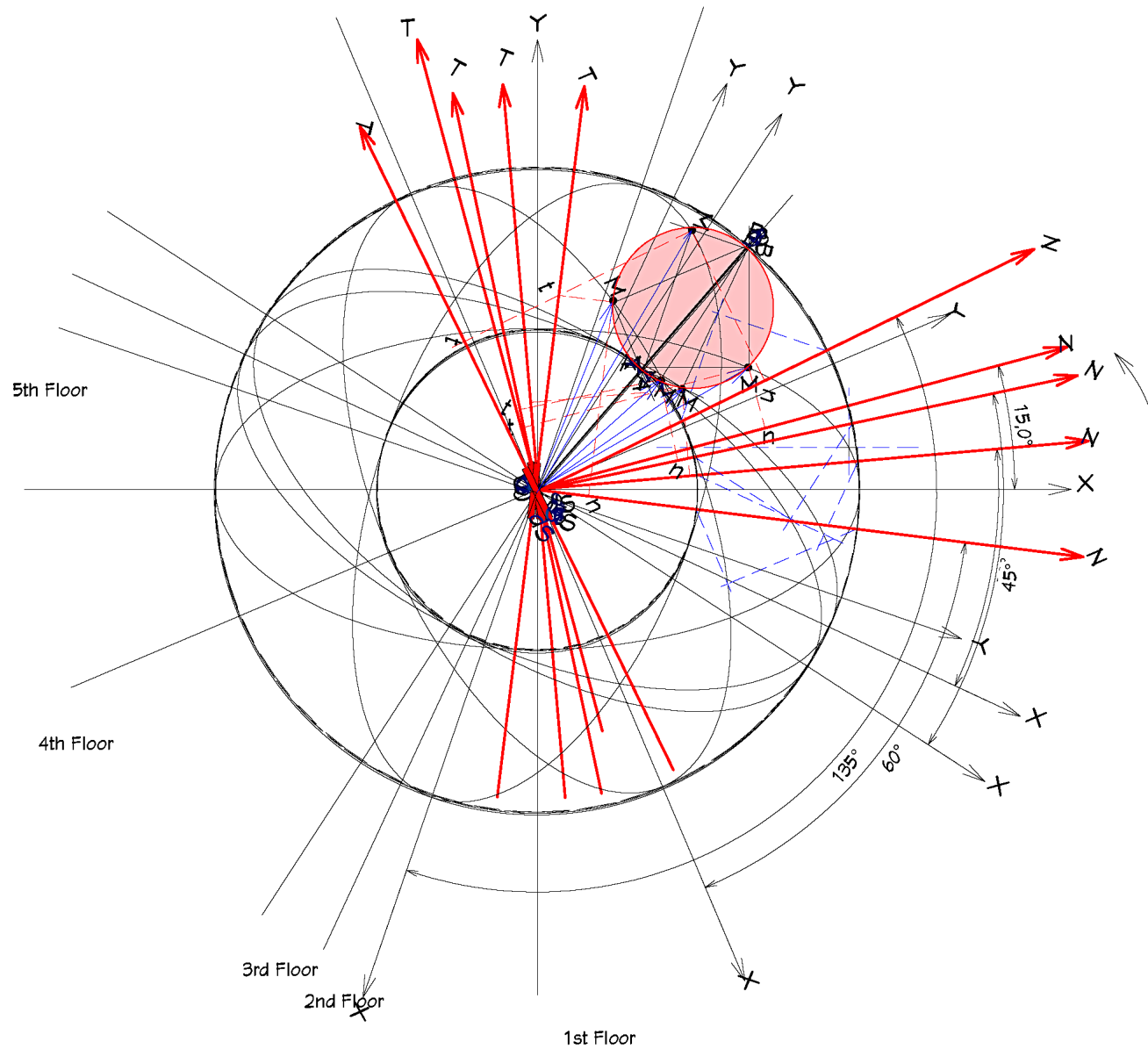




Superposons les cinq positions occupées successivement par la facette dS de manière à ce que les segments **AB** de toutes les positions se superposent.

Relions ensuite les points M (extrémités des vecteurs contraintes associés à chaque position occupée par dS).

Le lieu géométrique ainsi obtenu est un **cercle**



Considérons une facette quelconque dS d'un état des contraintes, orientée suivant l'angle θ et dont l'extrémité du vecteur contrainte est le point M.

Dans le repère OXY, lorsque l'angle θ varie, le point M se déplace le long de l'ellipse de Lamé, suivant le même sens que celui de l'angle θ .

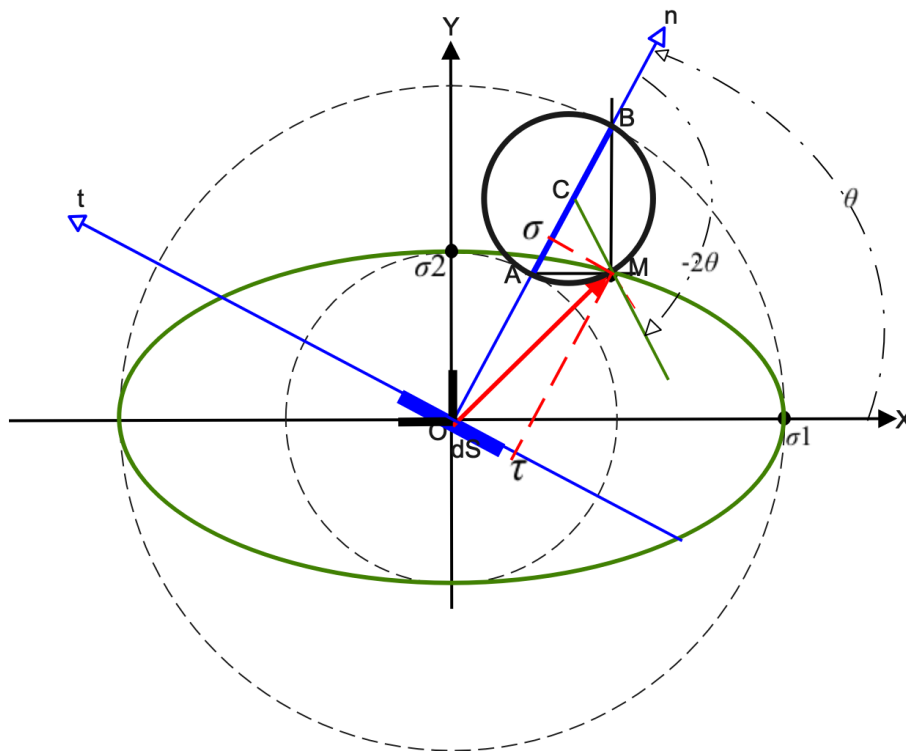
Dans le repère $O\sigma\tau$, lorsque l'angle θ varie, le point M se déplace le long d'un cercle appelé « **Cercle de Mohr** », dans un sens contraire à celui de l'angle θ et pour une ouverture double (2θ), soit (-2θ) .

En effet :

- ⊕ Quel que soit la position de la facette dS , du point M correspondant, l'on aperçoit toujours à angle droit un segment de droite AB dont la mesure algébrique ne change pas, ce qui est la caractéristique d'un point se déplaçant le long d'un cercle.

- ⊕ Le segment **AB** est donc le diamètre du cercle de Mohr ;
- ⊕ Le repère **$O\sigma\tau$** est dit « **repère indirect** » ou « **repère Lévogyre** ».

Compatibilité avec le calcul analytique



Suivant cette figure :

$$\sigma = \overline{OC} - \overline{CM} \cdot \cos(\pi - 2\theta)$$

$$\tau = -\overline{CM} \cdot \sin(\pi - 2\theta)$$

Soit :

$$\sigma = \overline{OC} + \overline{CM} \cdot \cos(2\theta)$$

$$\tau = -\overline{CM} \cdot \sin(2\theta)$$

Avec :

$$\overline{OC} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

$$\overline{CM} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

Dès lors :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \cos(2\theta) \\ \tau = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin(2\theta) \end{cases} \quad (a)$$

Avec :

- ⊕ Coordonnées du centre du cercle de Mohr dans le repère $\mathbf{O}\sigma\tau$, : $(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0)$
- ⊕ Rayon du cercle de Mohr : $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$

Constat :

Ces expressions (a) sont compatibles avec celles (iv bis) trouvées précédemment par le calcul analytique (voir point 1.7, cas particulier).

Toutefois, l'approche graphique a l'avantage de nous révéler l'existence du signe (-) devant l'expression de la composante tangentielle. En effet, en remplaçant dans les expressions (iv bis), l'angle θ par $(\theta + \frac{\pi}{2})$, nous trouvons les mêmes relations que celle (a), d'où la règle suivante :

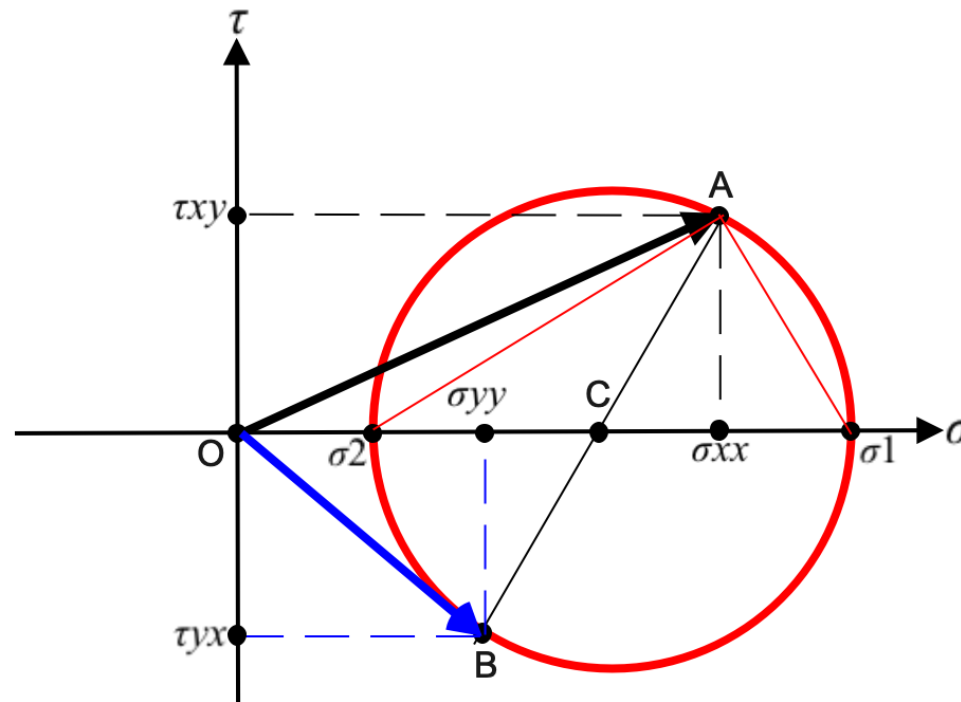
« Les contraintes tangentielles associées à deux facettes perpendiculaires sont égales et de signes opposés »

Il convient de tenir compte de cette règle dans la représentation graphique d'un état des contraintes.

Ainsi, un état des contraintes en un point, défini par le tenseur des contraintes :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$$

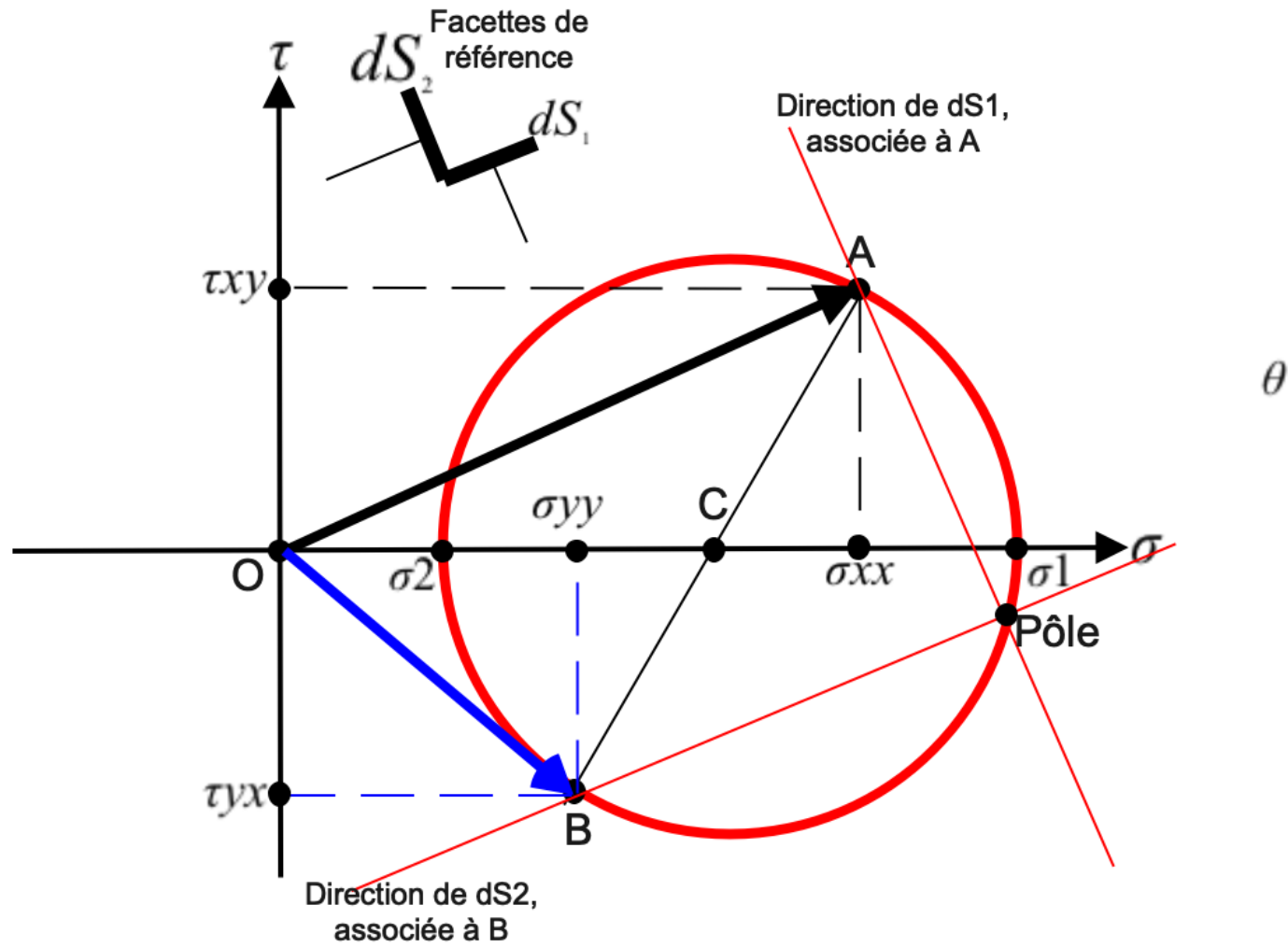
Sera représenté graphiquement dans le repère $O\sigma\tau$, par le **cercle de Mohr** suivant :



1.11. Pôle des facettes

On appelle Pole des facettes de l'état des contraintes en un point, le lieu de rencontre (point de rencontre), sur le cercle de Mohr, de toutes les directions desdites facettes, chacune passant par l'extrémité du vecteur contrainte y relatif.

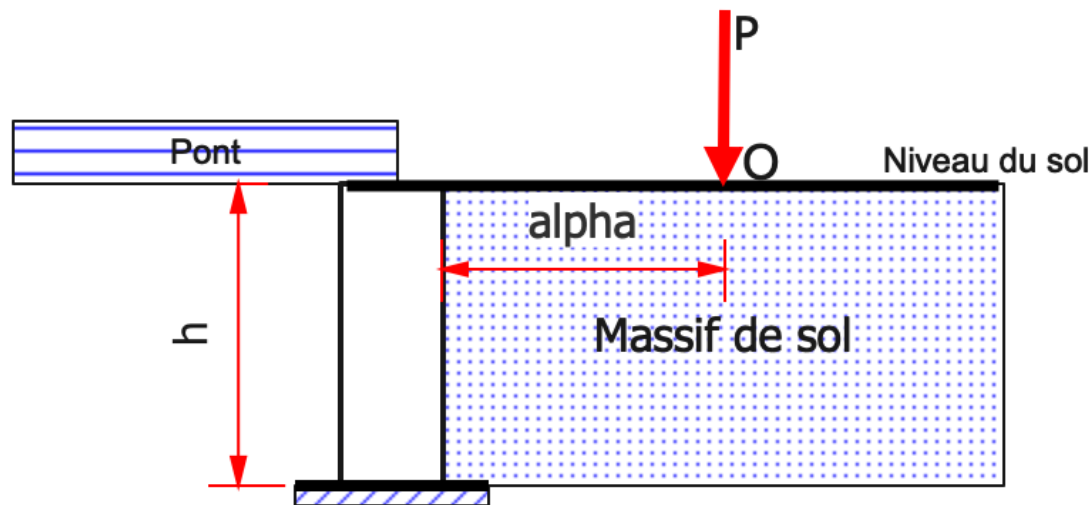
Pour déterminer la direction d'une facette quelconque dont on connaît le vecteur contrainte, on joint l'extrémité de celui-ci, sur le cercle de Mohr, au Pôle des facettes.



1.12.Applications

(1)Cas d'un mur de soutènement

Considérons un mur de soutènement soumis à l'action d'un massif de sol sur lequel (massif) est appliquée une charge ponctuelle P située à une certaine distance de ce mur comme le montre la figure suivante :



Déterminer :

1. L'effort tranchant au droit de l'encastrement
2. Le moment d'encastrement
3. La position du point d'application de la poussée du massif sur le mur

Hypothèses :

- ⊕ La surface du sol sera considérée comme niveau de référence ;
- ⊕ Nous utiliserons un repère polaire dont le pôle est le point O ;
- ⊕ Nous considérerons un point M courant sur le mur de coordonnées polaires (r, θ) autour duquel nous définirons une facette à étudier ;
- ⊕ Nous supposerons connu l'état des contraintes autour du point M, défini grâce à deux facettes de référence portées respectivement par le rayon r et la perpendiculaire à r .

- [illegible]

Soit :

$Q = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \tau_{sr} \\ \tau_{rs} & \sigma_{ss} \end{pmatrix}$, le tenseur des contraintes défini autour du point M,

D'après la théorie de l'élasticité, dans le sol :

$$\sigma_{rr} = \frac{2P}{\pi r} \cos(\theta) ; \sigma_{ss} = 0 ; \tau_{rs} = \tau_{sr} = 0 ; \text{d'où :}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2P}{\pi r} \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Dès lors le repère d'axes MR et MS étant un repère principal, les expressions (a) vues précédemment nous permettent d'écrire que :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{ss}}{2} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{ss}}{2} \cdot \cos(2\phi) \\ \tau = -\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{ss}}{2} \cdot \sin(2\phi) \end{cases}, \text{ soit}$$

$$\begin{cases} \sigma = \frac{\sigma_{rr}}{2} + \frac{\sigma_{rr}}{2} \cdot \cos(\pi + 2\theta) \\ \tau = -\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{ss}}{2} \cdot \sin(\pi + 2\theta) \end{cases} \quad d'o\grave{u} \quad \begin{cases} \sigma = \sigma_{rr} \cdot \sin^2(\theta) \\ \tau = -\frac{\sigma_{rr}}{2} \cdot \sin(2\theta) \end{cases}$$

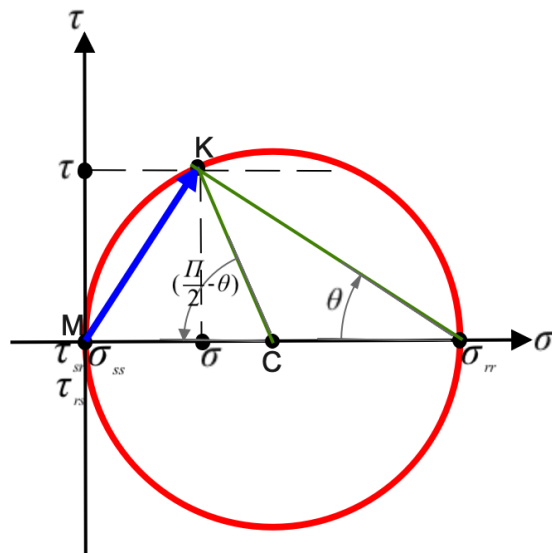
Sachant que :

$r = \sqrt{\alpha^2 + z^2}$; $\cos(\theta) = \frac{z}{\sqrt{\alpha^2 + z^2}}$; $\sin(\theta) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + z^2}}$ et $\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$; les expressions des contraintes σ et τ deviennent :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{2P}{\pi} \cdot \frac{z\alpha^2}{(\alpha^2 + z^2)^2} \\ \tau = -\frac{2P}{\pi} \cdot \frac{\alpha z^2}{(\alpha^2 + z^2)^2} \end{cases}$$

Ces formules sont appelées
Formules de Boussinesq (1)

Graphiquement, nous aurons :



K étant l'extrémité du vecteur contrainte associé à la facette du mur :

$$MK = \sigma_{rr} \cdot \sin(\theta)$$

$$\sigma = MK \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = MK \sin(\theta)$$

D'où :

$$\sigma = \sigma_{rr} \cdot \sin^2 (\theta)$$

$$\tau = MK \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = MK \cos (\theta)$$

D'où :

$$\tau = \frac{\sigma_{rr}}{2} \cdot \sin (2\theta)$$

Dès lors :

(a) En considérant connu l'abscisse α , l'effort tranchant T agissant au droit de l'encastrement, pour une tranche unitaire du mur de soutènement, sera :

$$T = \int_0^h \sigma \cdot dz = \int_0^h \frac{2P}{\pi} \cdot \frac{z\alpha^2}{(\alpha^2+z^2)^2} \cdot dz = \frac{2P\alpha^2}{\pi} \int_0^h \frac{z}{(\alpha^2+z^2)^2} \cdot dz$$

En résolvant cette intégrale (poser que $\alpha^2 + z^2 = a$; $2zdz = da$) et en simplifiant, nous aurons :

$$T = \frac{P}{\pi} \cdot \frac{h^2}{(\alpha^2 + h^2)}$$

(b) De même, le moment d'encastrement M agissant au droit de l'encastrement, pour une tranche unitaire du mur de soutènement, sera :

$$M = \int_0^h \sigma \cdot z \cdot dz = \int_0^h \frac{2P}{\pi} \cdot \frac{z^2 \alpha^2}{(\alpha^2 + z^2)^2} \cdot dz = \frac{2P\alpha^2}{\pi} \int_0^h \frac{z^2}{(\alpha^2 + z^2)^2} \cdot dz$$

En résolvant cette intégrale :

$$(\text{Poser que } u = z ; du = dz \text{ et } v = -\frac{1}{2(\alpha^2 + z^2)} ; dv = \frac{z \cdot dz}{(\alpha^2 + z^2)^2}),$$

$$\text{Avec } M = \frac{2P\alpha^2}{\pi} \left[uv \right]_0^h - \int_0^h v \cdot du$$

Et en simplifiant, nous aurons :

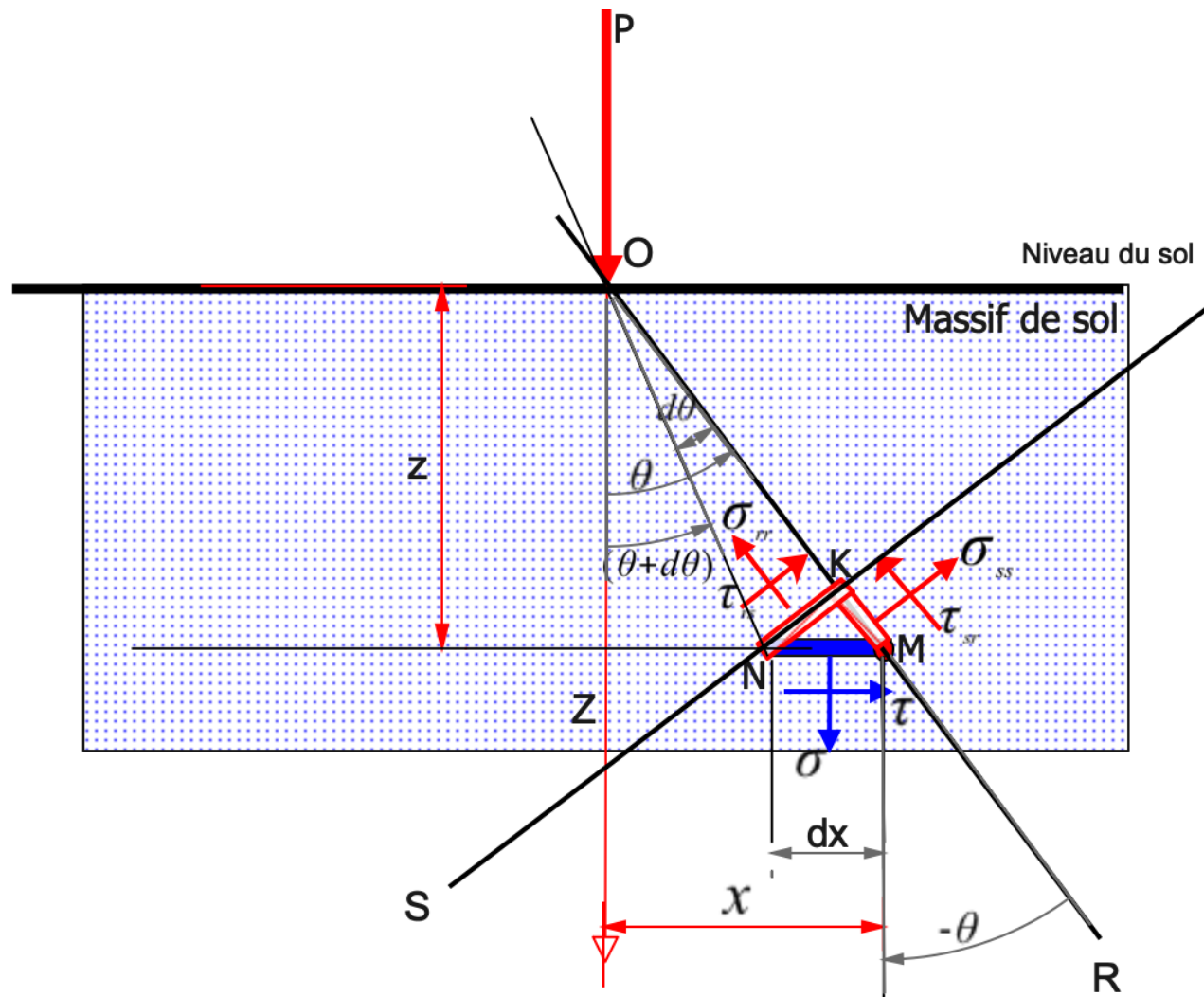
$$M = \frac{P\alpha}{\pi} \left[\operatorname{artg}\left(\frac{h}{\alpha}\right) - \frac{h \cdot \alpha}{(h^2 + \alpha^2)} \right]$$

(c) La position du point d'application de la poussée du massif sur le mur sera :

$$a = \frac{M}{T} = \frac{(h^2 + \alpha^2)}{h^2} \left[\operatorname{artg}\left(\frac{h}{\alpha}\right) - \frac{h \cdot \alpha}{(\alpha^2 + z^2)} \right] \alpha$$

(2) Cas d'un massif de sol

Considérons un massif de sol soumis à l'action d'une charge ponctuelle P appliquée au point O comme le montre la figure suivante :



Déterminer :

1. Les composantes du vecteur contrainte associé à une facette située sur un plan horizontal à une profondeur z sous un angle θ
2. Évaluer la répartition de cette charge P sous un angle de 45° de part et d'autre cette charge, à la profondeur z .

Hypothèses :

- ⊕ La surface du sol sera considérée comme niveau de référence ;
- ⊕ Nous utiliserons un repère polaire dont le pôle est le point O ;
- ⊕ Nous considérerons un point M courant, dans un plan horizontal situé à une profondeur z , de coordonnées polaires (r, θ) autour duquel nous définirons une facette à étudier ;

- ⊕ Nous supposerons connu l'état des contraintes autour du point M, défini grâce à deux facettes de référence portées respectivement par le rayon r et la perpendiculaire à r .

Problème à résoudre :

- ⊕ Déterminer les composantes du vecteur associées à la facette définie autour du point M se trouvant un plan horizontal situé à une profondeur z , connaissant les vecteurs contraintes associées aux facettes de référence :

Soit :

$Q = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \tau_{sr} \\ \tau_{rs} & \sigma_{ss} \end{pmatrix}$, le tenseur des contraintes défini autour du point M,

avec :

$$\sigma_{rr} = \frac{2P}{\pi r} \cos(\theta) ; \sigma_{ss} = 0 ; \tau_{rs} = \tau_{sr} = 0 ; \text{d'où :}$$

$Q = \begin{pmatrix} \frac{2P}{\pi r} \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, dès lors le repère d'axes MR et MS étant un repère principal, Nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{ss}}{2} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{ss}}{2} \cdot \cos(-2\theta) \\ \tau = -\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{ss}}{2} \cdot \sin(-2\theta) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \sigma = \frac{\sigma_{rr}}{2} + \frac{\sigma_{rr}}{2} \cdot \cos(2\theta) \\ \tau = \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{ss}}{2} \cdot \sin(2\theta) \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_{rr} \cdot \cos^2(\theta) \\ \tau = \frac{\sigma_{rr}}{2} \cdot \sin(2\theta) \end{cases} \quad \text{Et sachant que :}$$

$$r = \sqrt{x^2 + z^2}; \cos(\theta) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}; \sin(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}, \sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta) ;$$

Les expressions des contraintes σ et τ deviennent :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{2P}{\pi} \cdot \frac{z^3}{(x^2 + z^2)^2} \\ \tau = \frac{2P}{\pi} \cdot \frac{xz^2}{(x^2 + z^2)^2} \end{cases}$$

Ces formules sont appelées
Formules de Boussinesq (2)

Remarque :

En comparant les formules (1) et (2) de Boussinesq, nous constatons effectivement que les contraintes tangentielles sont égales et de signe opposé, ce qui confirme le fait que les deux facettes successivement étudiées sont perpendiculaires.

Dès lors, partant des expressions (2) :

La charge totale s'exerçant sur le plan horizontal, à une profondeur z , sous un angle de 45° de part et d'autre de la verticale de P sera :

$$T = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sigma \cdot dx$$

Sachant que : $\frac{\overline{NK}}{\overline{MN}} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta)$; $\overline{NK} = r d\theta$ et $\overline{MN} = dx$;

d'où on aura : $dx = \frac{r d\theta}{\cos(\theta)}$

D'où :

$$T = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sigma \cdot dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sigma \frac{r}{\cos(\theta)} \cdot d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sigma_{rr} \cdot \cos^2(\theta) \frac{r}{\cos(\theta)} \cdot d\theta$$

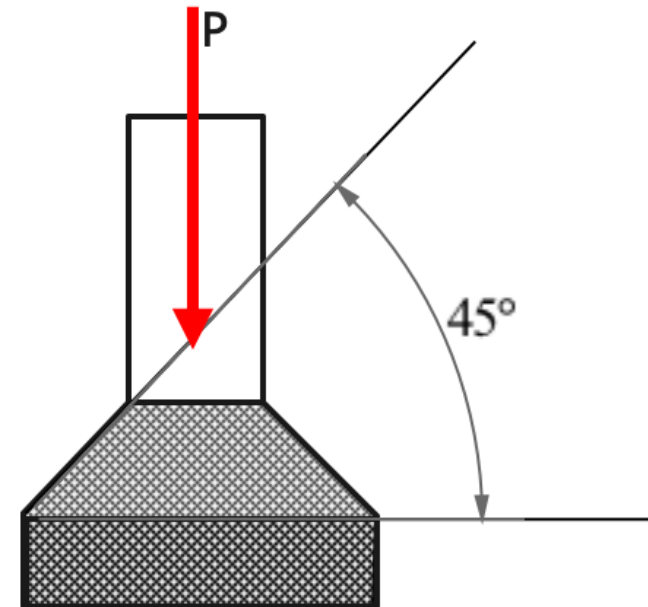
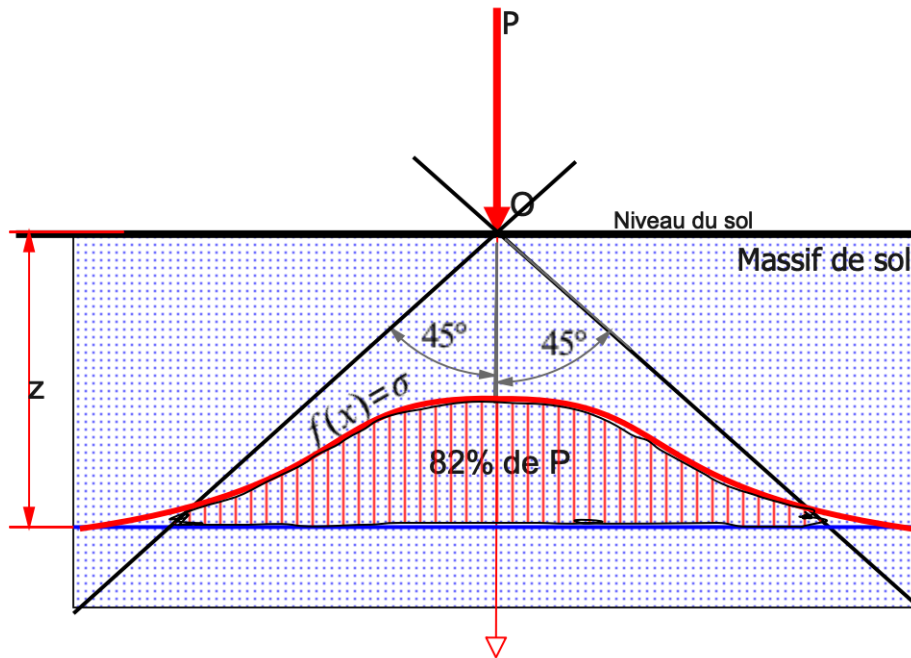
$$T = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2P}{\pi r} \cos(\theta) \cdot \cos^2(\theta) \frac{r}{\cos(\theta)} \cdot d\theta = \frac{2P}{\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(\theta) \cdot d\theta$$

$$T = \frac{(\pi + 2)}{2\pi} P \approx 0,82 \cdot P = 82\% \text{ de } P$$

Conséquence :

Quelle que soit la profondeur considérée, 82% de la charge considérée se répartisse sous un angle de 45° de part et d'autre de la verticale de ladite charge.

Cas d'application : Semelles de fondation



1.13. Exercices

1. Soit un état des contraintes représenté par le tenseur K . Déterminer les composantes normale et tangentielle du vecteur contrainte associé à la facette orientée suivant \vec{n} .

$$K = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{n} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}$$

Réponses :

$$\sigma = \frac{7}{4} + \sqrt{3} \text{ et } \tau = -\left(\frac{3\sqrt{3}}{4} + 1\right)$$

2. Soit un état des contraintes représenté par le tenseur K . Déterminer les contraintes principales ainsi que leurs directions.

$$K = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Réponses :

$$\sigma_1 = 4 + \sqrt{5} \ ; \ \sigma_2 = 4 - \sqrt{5} \text{ et } \theta \approx 32^\circ$$

3. Un élément plan est soumis aux contraintes $\sigma_{xx} = 50$ MPa et $\sigma_{yy} = 50$ MPa. Déterminer la contrainte de cisaillement existante dans cet élément. Quelle forme prend le cercle de Mohr ?

Réponses :

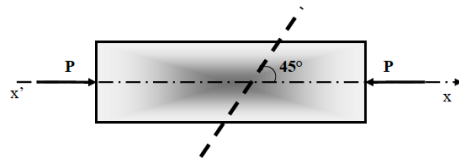
$$\forall \alpha, \ \sigma_{\alpha\alpha} = 50 \text{ MPa} \ ; \ \tau = 0$$

4. Tracer le cercle de Mohr pour un élément plan soumis aux contraintes $\sigma_{xx} = 50 \text{ MPa}$ et $\sigma_{yy} = -50 \text{ MPa}$. Déduire du cercle de Mohr l'état de contraintes sur un plan incliné faisant un angle $\theta = 20^\circ$ avec l'axe OX .

Réponses :

$$\sigma_\theta = 38,3 \text{ MPa} ; \tau_\theta = 32,1 \text{ MPa}$$

5. Une barre courte en béton de section droite $20 \times 20 \text{ cm}$ est comprimée par une force P . Quelle est la valeur de cette force, si la contrainte normale sur une facette, inclinée d'un angle de 45° par rapport à l'axe des x , est égale à -15 kg/cm^2 ?



CHAPITRE 2

ACTIONS SUR LES STRUCTURES

2.1. Définition

On appelle action, toute cause sollicitant une construction, c'est à dire produisant des forces dans la structure : poids des éléments, charges d'exploitation, vent, température intérieure ou extérieure, explosion, choc :

Une charge est une action qui peut être représentée par une force. Certaines actions ne sont pas représentées par des forces : tassement d'appui, vibrations...

La détermination des actions est la première étape dans l'acte de concevoir et de construire une structure. Elle comprend l'identification de l'action, la

détermination de son intensité, et le choix des combinaisons de ces actions qui traduisent leur simultanéité.

La normalisation permet de définir les actions courantes. Elle est propre à chaque pays. A défaut de prescriptions précises, c'est à l'ingénieur de définir, dès l'origine du projet, les hypothèses de chargement.

2.2. Charges permanentes

Ces charges comprennent les charges de poids propre ou « charges mortes » et les charges d'équipement. Elles sont souvent très importantes au regard de toutes les charges agissant sur les constructions traditionnelles : béton et maçonneries. Elles peuvent être allégées selon le matériau utilisé et le concept retenu : acier, aluminium ou éventuellement métaux spécifiques, toiles ou structures en câbles tendus.

Le poids peut cependant être un élément favorable de la stabilité : murs de soutènements, barrages, contreforts, construction immergée. Le tableau ci-dessous donne le poids volumique des principaux matériaux de construction :

Matériaux / Structures	Poids unitaire
Béton	2500 Kg/m ³
Acier	7850 Kg/m ³
Bois	500 à 800 Kg/m ³
Aluminium	2700 à 2800 Kg/m ³
Maçonneries	2400 à 3000 Kg/m ³
Dallages de pierre	3000 Kg/m ³
Parquet	800 Kg/m ³
Asphalte	2400 Kg/m ³

Matériaux / Structures	Poids unitaire
Mortier	2200 Kg/m ³
Plâtre	1200 Kg/m ³
Charpente porteuse en acier de 25 m de portée, selon le type de structure retenue	50 à 60 Kg/m ²
Charpente de couverture de hangar en acier de 80 m de portée	150 Kg/m ²
Matériaux de couverture :	
Isolant et étanchéité	15 Kg/m ²
Couverture en bac acier sans ou avec étanchéité	20 à 50 Kg/m ²
Verre (selon les épaisseurs et nature de vitrage)	25 à 60 Kg/m ²

Matériaux / Structures	Poids unitaire
Toiles tendues en PVC	1 à 3 Kg/m ²
Revêtement de sol :	
Plancher bois	25 Kg/m ²
Carrelage collé	50 Kg/m ²
Sol en pierre scellée	150 à 200 Kg/m ²
Faux plafonds	15 à 20 kg/m ²
Charges d'équipement : éclairage, doublage, écrans acoustiques, chauffage, protection incendie, passerelles d'entretien.	20 à 100 kg/m ²

2.3.Charges permanentes

2.3.1. Les actions directes

Sont fonctions de la destination des ouvrages. Il s'agit principalement des charges d'exploitation : personnes, mobilier, stockage, foule, véhicules, machines... Ces charges sont définies par les normes en fonction de la destination des locaux ou directement par les utilisateurs. Ces actions peuvent être également fonctions des agents extérieurs : forces dynamiques dues aux machines tournantes, forces de freinages, crues, prise en glace.

2.3.2. Les actions indirectes

Sont les actions dont on ne peut définir, dès l'origine du projet, le jeu de forces qui les caractérisent. Elles font apparaître un jeu de forces internes dans les

structures et dépendent donc du schéma statique retenu. On peut citer en particulier les actions suivantes :

- ⊕ Température,
- ⊕ Tassement du sol,
- ⊕ Fluage et retrait du matériau,
- ⊕ Contraintes internes résultant du mode de fabrication des ouvrages : phases de construction, soudage, frottements.

2.4.Actions dynamiques

Dans certains ouvrages on est obligé d'analyser les actions dynamiques, parce qu'elles entrent en interaction avec les oscillations de la structure : vent, séismes, machines tournantes, chocs, marche des piétons.

Le phénomène de résonance est le plus dangereux car il se traduit par une augmentation des amplitudes des oscillations lorsque la cadence de l'excitation coïncide avec celle de la structure (fréquence propre de vibration). C'est le cas des structures des passerelles légères pour piétons, des structures à câbles (ponts suspendus et haubanés) ou des planchers pour l'industrie : Salles blanches pour l'électronique, laboratoires de recherche exigeant des matériels de précisions, blocs opératoires de micro chirurgie ou planchers supportant de fortes machines tournantes.

2.5.Actions exceptionnelles

Il s'agit des chocs (véhicules ou navires), déraillements des trains, chutes de rochers, avalanches, incendies, séismes, crues exceptionnelles.

Il convient de définir ces risques et les valeurs à prendre en compte avec le Maître d'ouvrage et les organismes chargés des contrôles de sécurité : ministère public, pompiers, bureau de contrôle

2.6.Charges climatiques

2.6.1. Vent

La vitesse du vent agissant sur une construction dépend de nombreux facteurs :

- ⊕ Localisation du projet
- ⊕ Topographie du site et exposition (mer, vallée, plaine)
- ⊕ Rugosité du sol (urbain ou naturel)
- ⊕ Altitude du lieu
- ⊕ Hauteur de la construction

La vitesse du vent est le paramètre le plus important dans la détermination de l'action. Elle varie de façon considérable selon le lieu et les conditions particulières du site.

Cette vitesse étant difficile à prévoir, les règlements de calcul fixent la valeur de la vitesse du vent en fonction du lieu et de la période de retour de l'évènement. Cette période est prise égale à 50 ans.

A défaut de couverture réglementaire, il est souhaitable d'exploiter les enregistrements d'aéroports. La vitesse du vent augmente avec la distance au sol, car l'influence de la rugosité du sol s'atténue avec l'altitude. Les valeurs couramment obtenues varient entre 24 et 32 m/s.

La pression agissant sur la construction est calculée à partir de cette vitesse. Elle varie comme le carré de la vitesse. Cette pression dépend également de

la forme du bâtiment, de sa position dans le site, des constructions alentours, de la perméabilité des surfaces frappées par le vent et de la dimension des éléments étudiés.

2.6.2. Neige

Pour les sites concernés, les charges de neige varient de 35 kg/m^2 à 60 kg/m^2 . Ces valeurs peuvent être beaucoup plus importantes en haute montagne (jusqu'à une tonne par mètre carré par des altitudes supérieures à 2 000 m). Ces valeurs de base sont majorées par un coefficient de sécurité pour le calcul de la résistance des structures. Les charges d'avalanche sont des actions accidentelles.

2.7.Séismes

Un tremblement de terre correspond à une vibration du sol provoquée par une libération soudaine d'énergie de déformation accumulée dans la croûte terrestre. Une secousse sismique se propage sous forme d'ondes :

- ⊕ De volume : compression, dilatation alternées et cisaillement perpendiculaire à la direction de l'onde.
- ⊕ De surface : analogue à la houle provoquant compression et cisaillement

Les mouvements du sol dans les trois directions sont indépendants : il faut donc connaître, pour étudier une construction, trois accélérogrammes (x, y, et z).

D'une façon générale, la prise en compte de l'action sismique se traduit par la prise en compte de charges horizontales et verticales supplémentaires, liées à la réponse dynamique de l'ouvrage étudié.

2.8.Charges thermiques

Les variations de température Δt deviennent gênantes lorsque la longueur des structures est importante.

L'allongement ΔL d'une pièce de longueur L sous l'effet d'une variation de température est égal à :

$$\Delta L = \alpha . \Delta t . L$$

Le coefficient de dilatation thermique α de l'acier ou du béton est égal à 10^{-5} .

Si l'ouvrage peut se dilater librement, il ne subit aucune contrainte. Mais si la dilatation est gênée, il subit des forces internes extrêmement importantes, égales à celles qu'il faudrait appliquer sur la structure pour la ramener à ses dimensions initiales.

2.9.Tassement d'appui

Le tassement du sol de fondation est une des causes principales des désordres dans les constructions. Ces déformations imposées à la structure créent, quand celles-ci ne sont pas libres de se déformer, des sollicitations importantes entraînant la rupture des éléments les plus fragiles.

Il est possible de s'en prémunir par des études sérieuses des sols de fondations, et en cas de terrains très compressibles ou de risque d'effondrement.

2.10. Normes Eurocodes

Le programme des Eurocodes Structuraux comprend les normes suivantes, chacune étant en général, constituée d'un certain nombre de parties :

- ⊕ Eurocode 1 : Base de calcul et Actions sur les structures ;
- ⊕ Eurocode 2 : Structures en béton ;
- ⊕ Eurocode 3 : Structures en acier ;
- ⊕ Eurocode 4 : Structures mixtes acier-béton ;
- ⊕ Eurocode 5 : Structures en bois ;
- ⊕ Eurocode 6 : Ouvrages en maçonnerie ;
- ⊕ Eurocode 7 : Géotechniques ;
- ⊕ Eurocode 8 : Résistance aux séismes ;
- ⊕ Eurocode 9 : Alliages d'aluminium.