Chapter 1

万花尺

1.1 参数方程

1.1.1 万花尺方程

Figure 1.1a 展示了类似万花尺运动的数学模型。

在 Figure 1.1a 中，C 是较小的圆的圆心，P 是笔尖。较大的圆半径为 R，较小的圆半径为 r。半径之比表示如下：

$$k = \frac{r}{R}$$

将线段 PC 与小圆半径 r 之比作为变量 l（$l = PC/r$），它决定了笔尖离小圆圆心有多远。然后，组合这些变量来表示 P 的运动，得到如下的参数方程：

$$\begin{aligned} x &= R\left((1-k)\cos(\theta) + lk\cos\left(\frac{1-k}{k}\theta\right)\right) \\ y &= R\left((1-k)\sin(\theta) + lk\sin\left(\frac{1-k}{k}\theta\right)\right) \end{aligned} \tag{1.1}$$

将曲线绘制为一系列点之间的线段。如果这些点足够接近，图看起来就像平滑的曲线。

要确定何时停止绘图，就要利用万花尺的周期性（即万花尺图案多久开始重复），研究内外圆的半径之比：

$$\frac{r}{R}$$

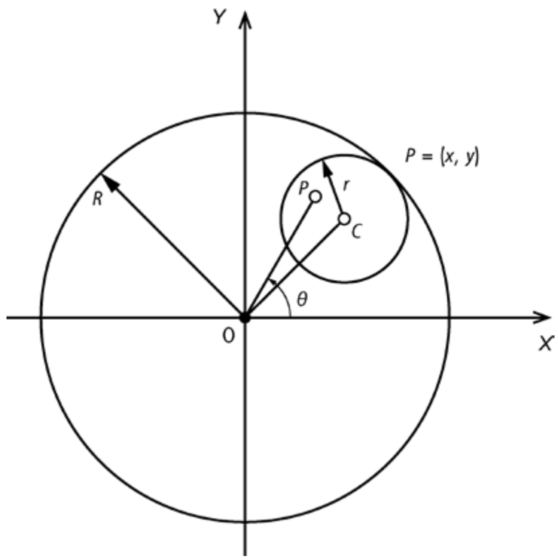
分子分母除以它们的最大公约数（GCD），化简该分数，分子就告诉我们需要多少圈才能完成曲线。例如，在 Figure 1.1b 中，(r, R) 的 GCD 是 5。

$$\frac{r}{R} = \frac{65}{220}$$

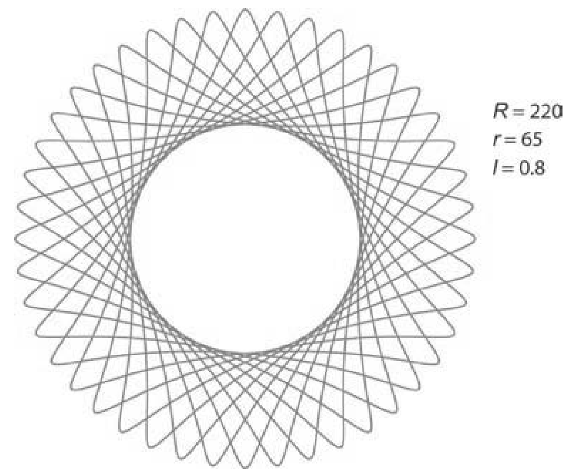
下面是该分数化简后的形式：

$$\frac{(65/5)}{(220/5)} = \frac{13}{44}$$

这告诉我们，13 圈后，曲线将开始重复。44 告诉我们小圆围绕其中心旋转的圈数，它提示了曲线的形状。在 Figure 1.1b 中数一下，会看到图形中花瓣或叶的数目恰好是 44！



(a) 万花尺数学模型



(b) 示例曲线，$R = 220$, $r = 65$, $l = 0.8$

Figure 1.1: 万花尺和某个示例

一旦用简化形式表示了半径比 r/R，画出螺线的参数 θ 范围就是 $[0, 2\pi r]$。这告诉我们何时停止绘制特定的螺线。不知道该角度的结束范围，就会循环不止，不必要地重复该曲线。