期权价格条件（以无套利市场中无分红的资产的期权为例）

1. $0 \le C_E \le C_A \le S, 0 \le P_E \le P_A \le K$，即欧式小于美式，看涨小于标的资产价格，看跌小于执行价；
2. $C_E \ge \max(S_0 - Ke^{-rt}, 0), P_E \ge \max(Ke^{-rt} - S_0, 0)$
3. 其他条件相同，执行不同的期权有，若 $K_1 \le K_2$，则$C_E(K_1) \ge C_E(K_2)$, $P_E(K_1) \ge P_E(K_2)$；
4. 其他条件相同，到期日不同的美式期权，若 $t_1 \le t_2$，则 $C_A(t_1) \le C_A(t_2), P_A(t_1) \le P_A(t_2)$，欧式期权不适用；
5. 欧式期权看涨看跌平价关系，$C_E + Ke^{-rt} = P_E + S_0$，推广到美式期权，$C_A + Ke^{-rt} \le P_A + S_0 \le C_A + K$
6. 其他条件相同，执行价不同的欧式看涨期权，若 $K_1 < K_2$，则

$$\begin{aligned} C_E(K_1) - C_E(K_2) &\le (K_2 - K_1)e^{-rt} \\ P_E(K_1) - P_E(K_2) &\le (K_2 - K_1)e^{-rt} \\ C_E(K_1) - C_E(K_2) + P_E(K_1) - P_E(K_2) &= (K_2 - K_1)e^{-rt} \end{aligned} \tag{1}$$

7. 其他条件相同，执行价不同的欧式期权，若 $K_1 < K_2 < K_3$，令 $\lambda = \frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1}$，则

$$\begin{aligned} C_E(K_2) &\le \lambda C_E(K_1) + (1-\lambda)C_E(K_3) \\ P_E(K_2) &\le \lambda P_E(K_1) + (1-\lambda)P_E(K_3) \end{aligned} \tag{2}$$

期权模型，单步二叉树模型

$$C = e^{-rt}[pC_u + (1-p)C_u] \tag{3}$$

其中，p 也称为风险中性概率，计算方法如下：

$$p = \frac{e^{rt} - d}{u - d}$$

期权模型，B-S-M模型无红利标的的资产欧式看涨期权 C(看跌期权 P)的定价公式为：

$$\begin{aligned} C &= SN(d_1) - Ke^{-rt}N(d_2) \\ P &= Ke^{-rt}N(-d_2) - SN(-d_1) \end{aligned} \tag{4}$$

其中，

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \frac{\ln(S/k) + [r + (\sigma^2/2)]T}{\sigma\sqrt{T}} \\
d_2 &= \frac{\ln(S/k) + [r - (\sigma^2/2)]T}{\sigma\sqrt{T}}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

注意事项：

1. 从公式可以看出，在风险中性的前提下，投资者的预期收益率 μ 用无风险收益率 r 替代
2. $N(d_2)$ 表示在无风险中性市场中 S_T（标的资产在时刻的价格）大于 K 的概率，或者说是欧式看涨期权被执行的概率
3. $N(d_1)$ 是看涨期权价格对资产价格的导数，它反映了很短时间内期权价格变动预期标的资产价格变动的比率
4. 资产的价格波动率用于度量资产所提供收益的不确定性，人们经常采用历史数据和隐含波动率来估计

期权模型：希腊字母

Δ 是用来衡量标的资产价格变动对期权理论价格的影响程度，可以理解为期权对标的资产价格变动的敏感性

看涨期权：

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1)$$

看跌期权：

$$\Delta = \frac{\partial P}{\partial S} = N(d_1) - 1$$

性质：随着到期日临近，看涨期权和看跌期权的 Δ 收敛情况如下：

- 看涨期权
  - 实值期权（标的价格大于行权价），收敛于1
  - 平值期权（标的价格等于行权价），收敛于.5
  - 虚值期权（标的价格小于行权价），收敛于0
- 看跌期权
  - 实值期权（标的价格小于行权价），收敛于-1
  - 平值期权（标的价格等于行权价），收敛于-.5

– 虚值期权（标的价格大于行权价），收敛于0

Δ 策略

- Δ 对冲策略：利用期权价格对标的资产价格变动的敏感度为 Δ，按照 1 单位资产和 Δ 单位期权做反向头寸来规避资产价格中价格波动风险；
- Δ 中性策略：如果 Δ 对冲策略能完全规避组合的价格波动风险，称该策略为 Δ 中性策略；
- 当标的资产价格大幅波动时，Δ 值也随之变化，静态的 Δ 对冲并不能完全规避风险，需要投资者不断依据市场变化调整对冲头寸

Γ 值衡量 Δ 值对标的资产的敏感度。Γ 值较小时，Δ 对资产价格变动不敏感，投资者不必频繁调整头寸对冲资产价格变动风险。反之，投资者就需要频繁调整头寸。

看涨期权：

$$\Gamma_c = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{N(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}}$$

看跌期权：

$$\Gamma = \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} = \frac{N(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}}$$

性质：

- 看涨期权和看跌期权的 Γ 值均为正值；
- 深度实值和深度虚值的期权 Γ 值均较小，只有当标的资产价格和执行价相近时，价格的波动都会导致 Δ 值的剧烈变动，因此平价期权的 Γ 最大；
- 期权到期日临近，平价期权的 Γ 值趋近无穷大；实值和虚值期权的 Γ 值先变大后变小，随着接近到期收敛值 0；
- 波动率和 Γ 最大值呈反比，波动率增加将使行权价附近的 Γ 减小，远离行权价的 Γ 增加；

$Vega$ 用来衡量期权价格对波动率的敏感性，该值越大，表明期权价格对波动率的变化越敏感。

看涨期权：

$$v_c = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = S \times \sqrt{T} \times N(d_1)$$

看跌期权：

$$v_p = \frac{\partial P}{\partial \sigma} = S \times \sqrt{T} \times N(d_1)$$

期权的波动率敏感度公式：

$$\Delta C = v \Delta \sigma$$

性质：

- 波动率与期权价格成正比；
- 平价期权对波动率变动最为敏感，深度实值和深度虚值期权中资产价格和执行价对 d_1 起到决定性作用，波动率的影响被弱化；

Θ 用来度量期权价格对到期日变动敏感度
看涨期权：

$$\Theta_c = \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\sigma S}{2\sqrt{T}} N(d_1) - Ke^{-rt} r N(d_2)$$

看跌期权：

$$\Theta_p = \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\sigma S}{2\sqrt{T}} N(d_1) - Ke^{-rt} r [N(d_2) - 1]$$

性质：

- 看涨期权和看跌期权的 Θ 值通常是负的，表明期权的价值会随着到期日的临近而降低；
- 在行权价附近，Θ 的绝对值最大，即在行权价附近，到期时间变化对期权价值的影响最大；
- 随着期权接近到期，平价期权受到的影响越来越大，而非平价期权收到的影响越来越小：平价期权的 Θ 是单调递减至负无穷大；非平价期权的 Θ 将先变小后变大，随着接近到期收敛至 0；

ρ 用来度量期权价格对利率变动敏感性
看涨期权

希腊字母	风险因素	量化公式
Δ	标的资产价格变化	权利金变动值/标的价格变动值
Γ	标的价格变动	Δ变动值/标的价格变动值
$Vega$	波动率变化	权利金变动值/波动率变动值
Θ	到期时间变化	权利金变动值/到期时间变动值
ρ	利率变动	权利金变动值/利率变动值

$$\rho_p = \frac{\partial C}{\partial r} = KTe^{-rt}N(d_2)$$

看跌期权

$$\rho_c = \frac{\partial C}{\partial r} = KTe^{-rt}[N(d_2) - 1]$$

性质：

1. 看涨期权的 ρ 是正的，看跌期权的 ρ 是负的；
2. 随标的价格的变化，ρ 随着标的证券价格单调递增
   - 对于看涨期权，标的价格越高，利率对期权价值的影响越大
   - 对于看跌期权，标的价格越低，利率对期权价值的影响越小
   - 越是实值的期权，利率变化对期权价值的影响越大
   - 越是虚值的期权，利率变化对期权价值的影响越小
3. ρ 随着期权到期，单调收敛到 0，即期权越接近到期，利率变化对期权价值的影响越小；

1 波动率

某个变量的波动率 σ 定义为这一变量在单位时间内连续复利回报率的标准差。当波动率被用于期权定价时，时间单位通常为一年，因此波动率就是一年连续复利回报率的标准差，但是当波动率用于风险控制时时间单位通常是一天，此时的波动率对应于每天连续复利回报率的标准差。

波动率分为两种：

- 回望型波动率（backward looking），用历史数据算出来的波动率，是已经发生了的历史价格的波动；
- 前瞻波动率（forward looking），根据现在的期权价格，用 B-M-S 期权定价模型反推出来的波动率，是未来一个价格的波动率的预测，未必准确；

1.1 回望型波动率

回望型波动率，就是我们所说的历史波动率，它是根据历史数据计算的，在这里，我们要区分日波动率和年波动率的概念。定义以下符号：$S_i, i = 0, 1, \cdots, n$ 为第 i 个时间区间结束时变量的价格，τ 为时间区间的长度，单位是年。

收益率 u_i 的计算公式为：

$$u_i = \ln \frac{S_i}{S_{i-1}} \tag{6}$$

u_i 的标准差 s 通常估计为：

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (u_i - \bar{u})}$$

或者

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} u_i^2 - \frac{1}{n(n-1)} (\sum_{i=1}^{n} u_i)^2}$$

1.2 隐含波动率

隐含波动率是通过 B-M-S 公式反解出来的波动率，一般认为是对未来波动率的预期。