Ejercicios en LaTeX
Variable Compleja

1. Conjugada de un número complejo

Sea $z = x + iy$ un número complejo. Se define el conjugado de z y se representa por $\overline{z}$ como el número complejo $x - iy$.

1.1. Propiedades (Demostrar)

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

Demostración:

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)} \\ &= \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} \\ &= (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) \\ &= (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) \\ &= \overline{z_1} + \overline{z_2} \end{aligned}$$

2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

Demostración:

$$\begin{aligned} \overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2)} \\ &= \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)} \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1) \\ &= (x_1 - iy_1) \cdot (x_2 - iy_2) \\ &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \end{aligned}$$

3. $z + \overline{z} = 2Re(z)$

Demostración:

$$z + \overline{z} = (x + iy) + (x - iy)$$

$$
\begin{aligned}
&= (x + x) + (y - y)i \\
&= 2x \\
&= 2Re(z)
\end{aligned}
$$

4. $z - \overline{z} = 2iIm(z)$

Demostración:

$$
\begin{aligned}
z - \overline{z} &= (x + iy) - (x - iy) \\
&= (x - x) + (y + y)i \\
&= 2yi \\
&= 2iIm(z)
\end{aligned}
$$

5. $\overline{z} = z$

Demostración:

$$
\begin{aligned}
\overline{z} &= \overline{x + iy} \\
&= x - iy \\
&= z
\end{aligned}
$$

6. $z \cdot \overline{z} = (Re(z))^2 + (Im(z))^2$. Por ello si $z \neq 0$, entonces $z \cdot \overline{z} > 0$

Demostración:

$$
\begin{aligned}
z \cdot \overline{z} &= (x + iy) \cdot (x - iy) \\
&= (x^2 + y^2) + i(-xy + xy) \\
&= (x^2 + y^2) \\
&= (Re(z))^2 + (Im(z))^2
\end{aligned}
$$

2. Módulo de un número complejo

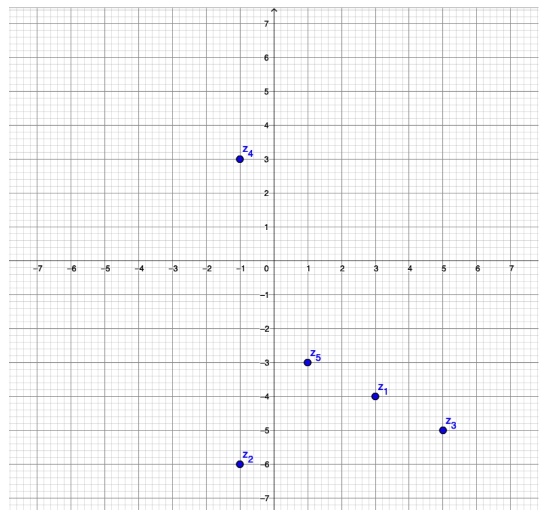
Se define el módulo de un número complejo $z = x + iy$ y se representa por $|z|$ como el número real $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2.1. Propiedades (Demostrar)

1. $|z| = |\overline{z}|$
2. Revisar por que los ejercicios estan mal escritos, liena 196

3. Ejercicios

1. Escribe los siguientes complejos en forma de par ordenado y representa gráficamente.



   a) $z_1 = 3 - 4i$ $z_1 = (3, -4)$

   b) $z_2 = -1 - 6i$ $z_2 = (-1, -6)$

   c) $z_3 = 5 - 5i$ $z_3 = (5, -5)$

   d) $z_4 = -1 + 3i$ $z_4 = (-1, 3)$

   e) $z_5 = 1 - 3i$ $z_5 = (1, -3)$

2. Encuentre el valor de x y de y en los siguientes casos:

   a) $(3, x) = (3, 5)$

   Solución:

   $$x = 5$$

   b) $(x + 3, 2y) = (y, 2 + x)$

   Solución:

$$\begin{aligned} x+3 &= y \\ 2y &= 2+x \\ 2y-x &= 2 \\ 2y-(y-3) &= 2 \\ 2y-y+3 &= 2 \\ y+3 &= 2 \\ y &= \boxed{-1} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+3 &= -1 \\ x &= \boxed{-4} \end{aligned}$$

c) $(x^2-5x+6, 6) = (0, 6)$

Solución:

$$\begin{aligned} x^2-5x+6 &= 0 \\ (x-2)(x-3) &= 0 \\ x &= \boxed{2, 3} \end{aligned}$$

d) $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}yi = 1-2i$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}yi &= 1-2i \\ \frac{1}{2}x &= 1 \\ x &= \boxed{-3} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{2}{3}yi &= -2i \\ \frac{2}{3}y &= -2 \\ y &= \boxed{-3} \end{aligned}$$

e) $\frac{3x+7yi}{4} = \frac{2x+1+(8y-12)i}{5}$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{3x+7yi}{4} &= \frac{2x+1+(8y-12)i}{5} \\ 5(3x+7yi) &= 4(2x+1+(8y-12)i) \\ 15x+35yi &= 8x+4+32yi-48i \\ 15x-8x+35yi-32yi &= 4-48i \\ 7x+3yi &= 4-48i \end{aligned}$$

Un conjunto de números complejos solo pueden ser iguales si sus partes reales e imaginarias son iguales, por lo tanto:

$$7x = 4 \qquad\qquad 3y = -48$$
$$x = \boxed{\frac{4}{7}} \qquad\qquad y = \boxed{-16}$$

3. Efectúa las siguientes operaciones:

   a) $(-6, 5) + (-3, 4) =$

   Solución:

$$\begin{aligned}(-6, 5) + (-3, 4) &= (-6 - 3, 5 + 4)\\ &= \boxed{(-9, 9)}\end{aligned}$$

   b) $(-1, 3) - (5, 7)$

   Solución:

$$\begin{aligned}(-1, 3) - (5, 7) &= (-1 - 5, 3 - 7)\\ &= \boxed{(-6, -4)}\end{aligned}$$

   c) $(-4, -5) + (-3, -9)$

   Solución:

$$\begin{aligned}(-4, -5) + (-3, -9) &= (-4 - 3, -5 - 9)\\ &= \boxed{(-7, -14)}\end{aligned}$$

   d) $(-4, -5) - (-12, 1)$

   Solución:

$$\begin{aligned}(-4, -5) - (-12, 1) &= (-4 + 12, -5 - 1)\\ &= \boxed{(8, -6)}\end{aligned}$$

   e) $(-7, -8) + (-5, 6) - (-2, -1)$

   Solución:

$$\begin{aligned}(-7, -8) + (-5, 6) - (-2, -1) &= (-7 - 5 + 2, -8 + 6 + 1)\\ &= \boxed{(-10, -1)}\end{aligned}$$

f) $(5,-3)-(7,-1)+(10,8)$

Solución:

$$\begin{aligned}(5,-3)-(7,-1)+(10,8) &= (5-7+10,-3+1+8)\\ &= \boxed{(8,6)}\end{aligned}$$

g) $(7,-3)\cdot(-2,5)$

Solución:

$$\begin{aligned}(7,-3)\cdot(-2,5) &= (7\cdot -2-(-3)\cdot 5, 7\cdot 5+(-3)\cdot -2)\\ &= \boxed{(-4,29)}\end{aligned}$$

h) $(-9,-5)\cdot(-8,-9)$

Solución:

$$\begin{aligned}(-9,-5)\cdot(-8,-9) &= (-9\cdot -8-(-5)\cdot -9, -9\cdot -9+(-5)\cdot -8)\\ &= \boxed{(47,-81)}\end{aligned}$$

i) $(12,-5)\cdot(12,-5)-(13,3)\cdot(13,-8)$

Solución:

$$\begin{aligned}(12,-5)\cdot(12,-5)-(13,3)\cdot(13,-8) &= (12\cdot 12-(-5)\cdot(-5)-(13\cdot 13-3\cdot(-8))\\ &= \boxed{(169,169)}\end{aligned}$$

j) $(3,-8):(2,-3)$

Solución:

$$\begin{aligned}(3,-8):(2,-3) &= \frac{(3,-8)}{(2,-3)}\\ &= \frac{(3,-8)\cdot(2,3)}{(2,-3)\cdot(2,3)}\\ &= \frac{(3\cdot 2-(-8)\cdot 3, 3\cdot 3+(-8)\cdot 2)}{(2\cdot 2-(-3)\cdot 3)}\\ &= \frac{(30,-1)}{(13,13)}\\ &= \boxed{\left(\frac{30}{13},\frac{-1}{13}\right)}\end{aligned}$$