2 次元有限要素法

伊東秀晃

2024 年 3 月 12 日

1　8 メッシュ分割

次の様なメッシュ分割により、2 次元有限要素法を実装した。
要素 [0],[2],[4],[6] は次の要素係数行列 $\boldsymbol{A_e}$ と要素定数項ベクトル $\boldsymbol{f_e}$ を有する。

$$\mathbf{A_e} = \begin{pmatrix} 0.50 & 0.00 & -0.50 \\ 0.00 & 0.50 & -0.50 \\ -0.50 & -0.50 & 1.00 \end{pmatrix} \tag{1}$$

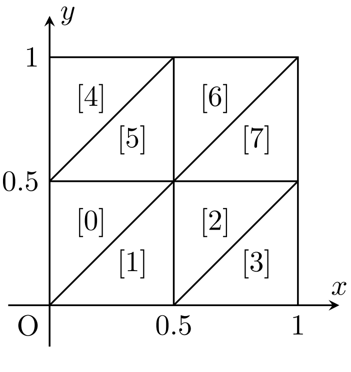


図 1: メッシュ分割と要素番号

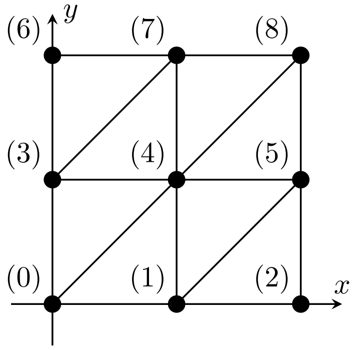


図 2: メッシュ分割と節点番号

$$\mathbf{f_e} = \begin{pmatrix} -0.167 \\ -0.167 \\ -0.167 \end{pmatrix} \tag{2}$$

要素 [1],[3],[5],[7] は次の要素係数行列 $\boldsymbol{A_e}$ と要素定数項ベクトル $\boldsymbol{f_e}$ を有する。

$$\mathbf{A_e} = \begin{pmatrix} 0.500 & -0.500 & 0.00 \\ -0.500 & 1.00 & -0.500 \\ 0.000 & -0.500 & 0.500 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\mathbf{f_e} = \begin{pmatrix} -0.167 \\ -0.167 \\ -0.167 \end{pmatrix} \tag{4}$$

図に示された節点番号と要素番号の関係に従ってこれらを全体係数行列 $\boldsymbol{A}$ と全体定数項ベクトル $\boldsymbol{f}$ に組み込む。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1.000 & -0.500 & 0.000 & -0.500 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.500 & 2.000 & -0.500 & 0.000 & -1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -0.500 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & -0.500 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.500 & 0.000 & 0.000 & 2.000 & -1.000 & 0.000 & -0.500 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -1.000 & 0.000 & -1.000 & 4.000 & -1.000 & 0.000 & -1.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -0.500 & 0.000 & -1.000 & 2.000 & 0.000 & 0.000 & -0.500 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.500 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & -0.500 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -1.000 & 0.000 & -0.500 & 2.000 & -0.500 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.500 & 0.000 & -0.500 & 1.000 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} -0.333 \\ -0.500 \\ -0.167 \\ -0.500 \\ -1.000 \\ -0.500 \\ -0.167 \\ -0.500 \\ -0.333 \end{pmatrix} \tag{6}$$

ここで、節点 (0),(1),(2),(3),(5),(6),(7),(8) は Dirichlet 境界条件によって規定されるので、これを考慮すると節点 (4) における $u = u(x)$ の近似値 $\hat{u}$ は次の様に与えられる。

$$A^* \hat{u} = f^* \tag{7}$$

ただし、

$$A^* = \boldsymbol{A_{5,5}}, \tag{8}$$

$$f^* = \boldsymbol{f}[5] - \sum_{i \neq 5} \boldsymbol{A_{i,5}} \boldsymbol{u}[5]. \tag{9}$$

これを計算すると、$A^* = 4.000$ と $f^* = 2.000$ より、$\hat{u} = 0.500$ となる。推定誤差は 0.000000e+00 である。

表 1: 18 メッシュ分割における各節点の近似誤差

$y = 2/3$	1.110223e-16	-1.110223e-16
$y = 1/3$	0.000000e+00	0.000000e+00
	$x = 1/3$	$x = 2/3$

表 2: 32 メッシュ分割における各節点の近似誤差

$y = 3/4$	0.000000e+00	-1.110223e-16	0.000000e+00
$y = 2/4$	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00
$y = 1/4$	0.000000e+00	0.000000e+00	1.110223e-16
	$x = 1/4$	$x = 2/4$	$x = 3/4$

表 3: 50 メッシュ分割における各節点の近似誤差

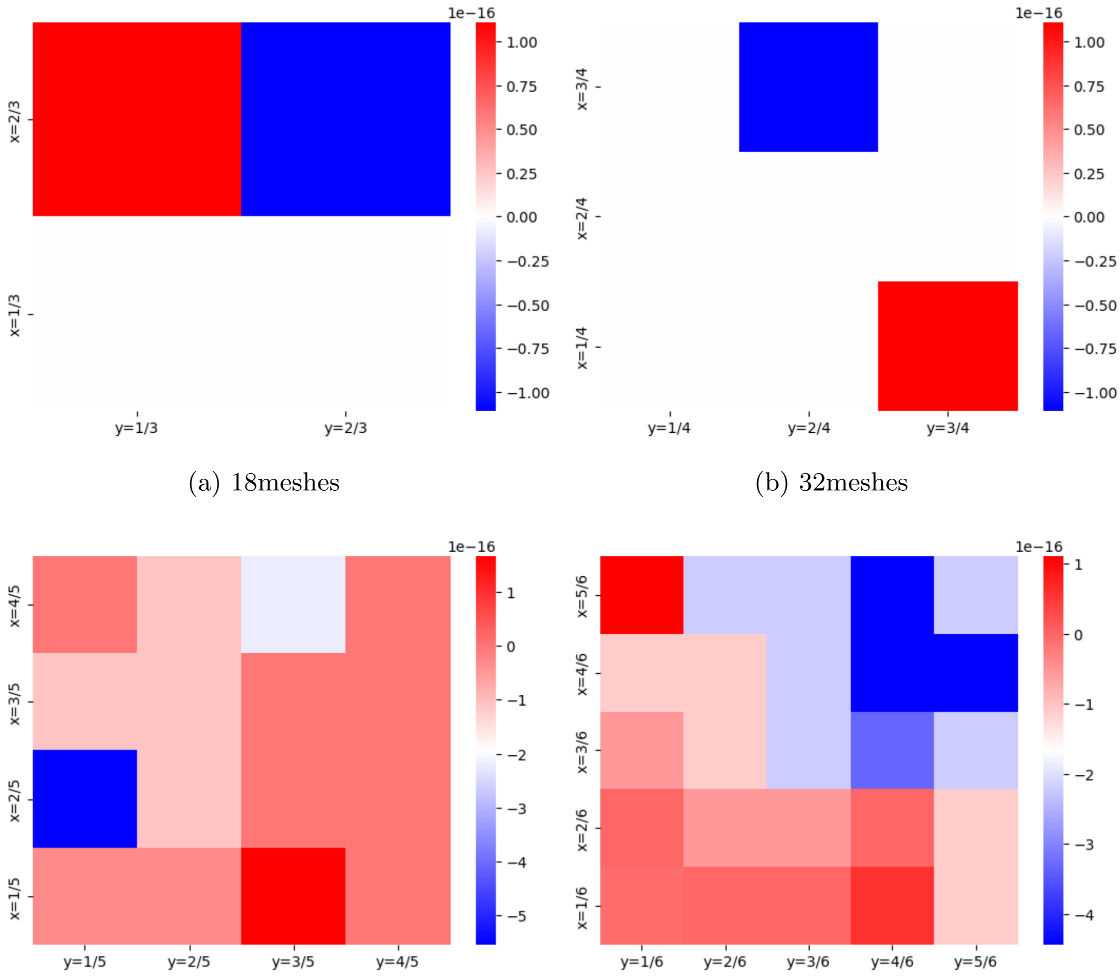
$y = 4/5$	0.000000e+00	-1.110223e-16	-2.220446e-16	0.000000e+00
$y = 3/5$	-1.110223e-16	-1.110223e-16	0.000000e+00	0.000000e+00
$y = 2/5$	-5.551115e-17	-1.110223e-16	0.000000e+00	0.000000e+00
$y = 1/5$	-2.775558e-17	-2.775558e-17	1.665335e-16	0.000000e+00
	$x = 1/5$	$x = 2/5$	$x = 3/5$	$x = 4/5$

表 4: 72 メッシュ分割における各節点の近似誤差

$y = 5/6$	1.110223e-16	-2.220446e-16	-2.220446e-16	-4.440892e-16	-2.220446e-16
$y = 4/6$	-1.110223e-16	-1.110223e-16	-2.220446e-16	-4.440892e-16	-4.440892e-16
$y = 3/6$	-5.551115e-17	-1.110223e-16	-2.220446e-16	-3.330669e-16	-2.220446e-16
$y = 2/6$	0.000000e+00	-5.551115e-17	-5.551115e-17	0.000000e+00	-1.110223e-16
$y = 1/6$	-6.938894e-18	0.000000e+00	0.000000e+00	5.551115e-17	-1.110223e-16
	$x = 1/6$	$x = 2/6$	$x = 3/6$	$x = 4/6$	$x = 5/6$

2　メッシュ分割と近似精度について

前節と同様の分割の仕方で、分割数を増やしていくことを考える。各節点での誤差 $\mathrm{err}_i = \boldsymbol{u}_i - \hat{\boldsymbol{u}}_i$ の値の分布は表 1 から 4 の様になる。誤差分布を可視化すると図 3 のようになる。



(a) 18meshes

(b) 32meshes

(c) 50meshes

(d) 72meshes

図 3: 近似誤差の分布

表 5: まとめ

節点数	要素数	(0.5,0.5) の近似値	(0.5,0.5) の解析解との差
9	8	0.500	0.000
16	18	0.556	-0.0556
25	32	0.500	0.000
36	50	0.520	-0.0200
49	72	0.500	-2.22e-16