Universidade de São Paulo

Escola Politécnica

PMR3401 - Mecânica Computacional para Mecatrônica

Relatório: Exercício Programa Extra

Henrique Yda Yamamoto - 9349502
João Pedro do Patrocinio Ceccarelli - 8932154

SÃO PAULO - SP

Conteúdo

1 Introdução

Neste exercício programa são estudadas as variáveis eletromagnéticas (potencial elétrico, potencial vetor magnético, intensidade de campo elétrico, intensidade de campo magnético e densidade de fluxo magnético) geradas nos arredores de uma torre de transmissão. A modelagem é feita utilizando as medidas da figura 1.

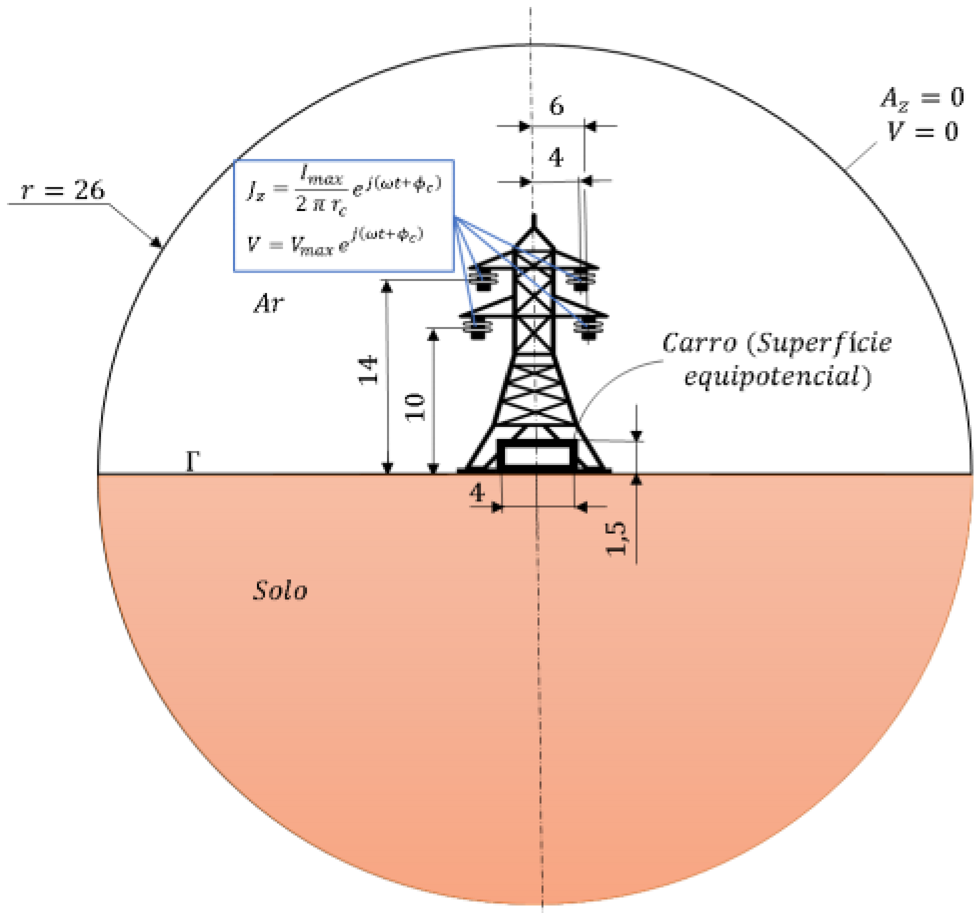

Figura 1: Esquema da torre de transmissão.

São dadas equações (especificadas no enunciado e explicadas na seção abaixo) que descrevem a física do sistema. Todas essas equações serão resolvidas utilizando um programa, no MATLAB, que implementa o método dos elementos finitos (MEF) com elementos triangulares.

2 Equacionamento analítico

2.1 Discretização do domínio

Primeiramente a origem do domínio foi modelada como no canto inferior esquerdo, tal qual:

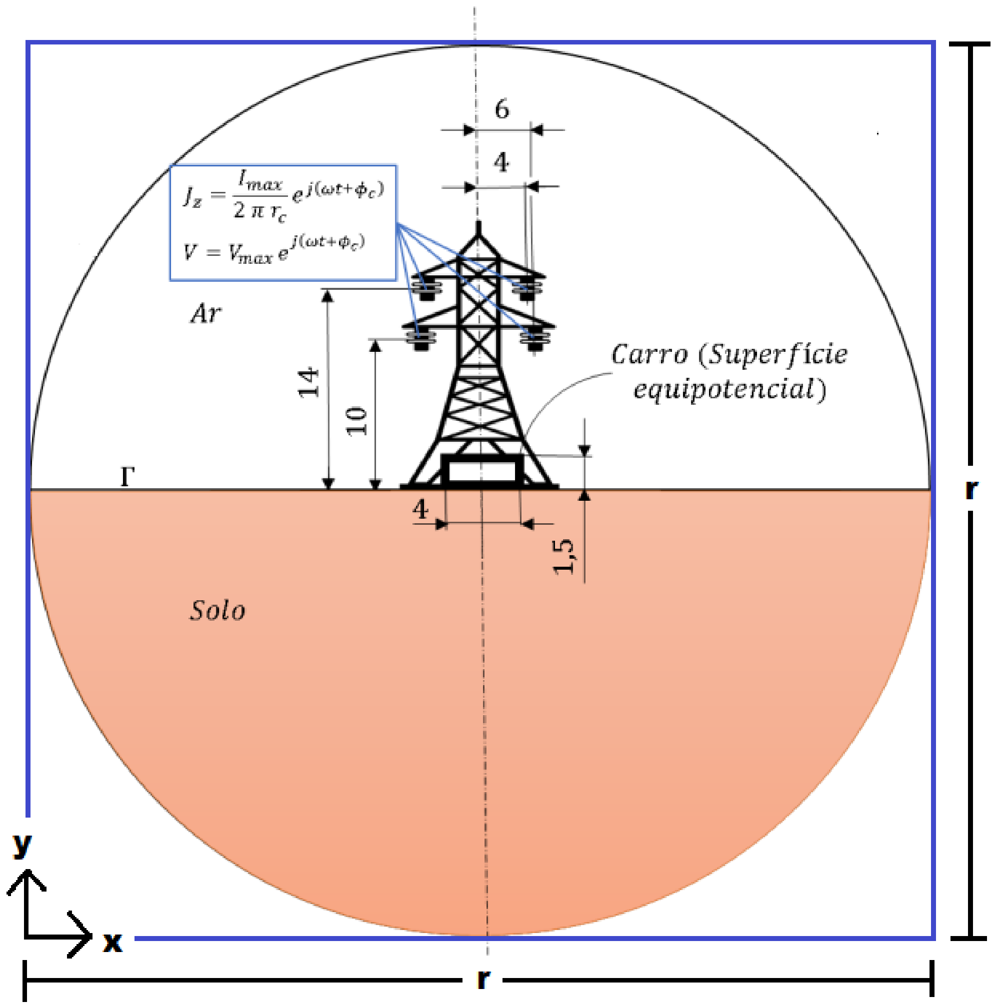

Figura 2: Domínio do sistema

Como pode-se ver pela imagem 1, o sistema principal é dado por um domínio interno a uma circunferência de raio $r = 26$. No entanto, para implementar o sistema no MATLAB foi também considerado o domínio externo a essa circunfêrencia, delimitado pelo quadrado r x r de borda azul escura.

Dessa forma, utilizando o método dos elementos finitos com elementos triangulares, para uma discretização h do sistema teremos então:

- Raio da circunfêrencia: $r' = 26/h$

- Quantidade de nós: $n_{nós} = (2r' - 1) \cdot (2r' - 1)$ (todas as linhas e colunas são contadas, incluindo a primeira e a última)
- Quantidade de elementos triangulares: $n_e = 4r' \cdot 4r'$ (pois há triangulos com maior face voltada para cima e outros com maior face voltada para baixo)

A discretização do sistema numa matriz quadrada de altura e comprimento $n_{nós}$, a partir da origem, torna-se:

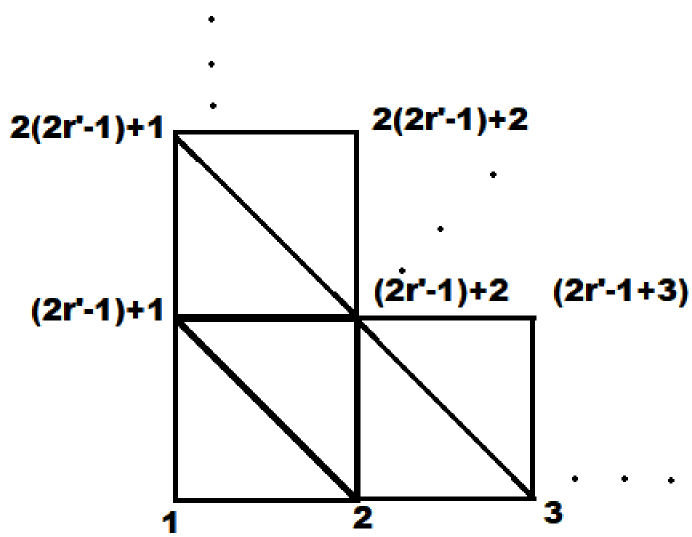

Figura 3: Discretização global - triângulos com altura e largura h (obs: como dito anteriormente, são $2r' - 1$ linhas e colunas)

E cada elemento individualmente será percorrido desta forma (1→2→3 →1):

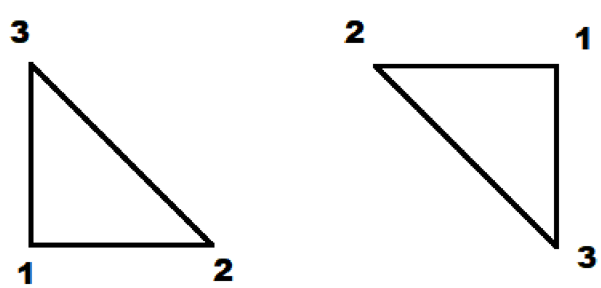

Figura 4: Discretização local - triângulos com altura e largura h

2.2 Método dos elementos finitos e aplicações no problema

Um fenômeno descrito por uma equação de Poisson é dado por:

$$\nabla^2 U + f(x,y) = 0 \tag{1}$$

Sabemos, pelas aulas e pelo material disponível no curso, que a equação de MEF para cada elemento triangular (pós-dedução), para o fenômeno acima, é:

$$[K_e]\{U_e\} = \oint\limits_C N_i k \frac{\partial Ue}{\partial n}\,\mathrm{d}\ell + \frac{fAe}{3}\{1\} \tag{2}$$

$[K_e]$ é a matriz de rigidez do elemento, dada por:

$$K_e = \frac{1}{4A_e}\begin{bmatrix} b_1b_1 + c_1c_1 & b_1b_2 + c_1c_2 & b_1b_3 + c_1c_3 \\ b_1b_2 + c_1c_2 & b_2b_2 + c_2c_2 & b_2b_3 + c_2c_3 \\ b_1b_3 + c_1c_3 & b_2b_3 + c_2c_3 & b_3b_3 + c_3c_3 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Sendo $b_1 = y_2 - y_3$, $b_2 = y_3 - y_1$, $b_3 = y_1 - y_2$, $c_1 = x_3 - x_2$, $c_2 = x_1 - x_3$, $c_1 = x_2 - x_1$ (coordenadas x e y respectivas aos nós 1, 2 e 3) e $A_e = (b_1c_2 - b_2c_1)/2$ (A_e é a área do elemento).

$\{U_e\}$ é o vetor de variáveis locais do elemento (o valor de cada variável em cada nó, e essa variáveis são o potencial elétrico V e o potencial vetor magnético A_z).

$$U_e = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$\oint\limits_C N_i k \frac{\partial U_e}{\partial n}\,\mathrm{d}\ell$ são as condições de contorno naturais no elemento. É a integral de linha em cada lado ℓ do elemento, multiplicada pela constante k e pelo fator de forma de cada nó N_i (função que varia linearmente em x e y de forma que valha 1 no nó i e 0 nos outros nós, com $i = 1, 2, 3$). Obs: as condições de contorno naturais são um vetor 3x1, pois a integral de linha é aplicada em cada lado do triângulo para cada fator de forma N_1, N_2, N_3.

$$\oint\limits_C N_i k \frac{\partial U_e}{\partial n}\,\mathrm{d}\ell = \begin{pmatrix} \int\limits_{L_{12}} N_1 k \frac{\partial U}{\partial n} d\ell + \int\limits_{L_{23}} N_1 k \frac{\partial U}{\partial n} d\ell + \int\limits_{L_{31}} N_1 k \frac{\partial U}{\partial n} d\ell \\ \int\limits_{L_{12}} N_2 k \frac{\partial U}{\partial n} d\ell + \int\limits_{L_{23}} N_2 k \frac{\partial U}{\partial n} d\ell + \int\limits_{L_{31}} N_2 k \frac{\partial U}{\partial n} d\ell \\ \int\limits_{L_{12}} N_3 k \frac{\partial U}{\partial n} d\ell + \int\limits_{L_{23}} N_3 k \frac{\partial U}{\partial n} d\ell + \int\limits_{L_{31}} N_3 k \frac{\partial U}{\partial n} d\ell \end{pmatrix} \tag{5}$$

$\frac{fAe}{3}\{1\}$ é o vetor de carregamento, em que $f(x,y)$ que descreve a equação de Poisson e o vetor $\{1\}$ é um vetor 3x1.

$$\frac{fAe}{3}\{1\} = \frac{fAe}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Dessa forma, aplicando o MEF em cada elemento e adicionando cada $[K_e]$ a uma matriz global [K], nas linhas correspondentes às posições globais dos nós e nas colunas correspondentes à variável U de multiplicação (ou seja, no nosso caso, de acordo com a imagem 3, tomemos como exemplos o elemento formado pelos nós 1, 2 e (2r'-1)+1. Teremos então a adição de Ke(1,1) na primeira linha e na primeira coluna de [K], de Ke(1,2) na primeira linha na segunda coluna de [K], de Ke(1,3) na primeira linha e na coluna (2r'-1)+1 de [K], de Ke(2,1) na segunda linha e na primeira coluna de [K] etc, até chegar a Ke(3,3) na linha (2r'-1)+1 e na coluna (2r'-1)+1. Depois, faz-se o análogo para o elemento com o maior lado voltado para baixo: adiciona-se Ke(1,1) na linha (2r'-1)+2 e na coluna (2r'-1)+2 de [K], Ke(1,2) na mesma linha e na coluna (2r'-1)+1 de [K] etc, até chegar ao fim aonde adiciona-se Ke(3,3) na linha 2 e coluna 2). A matriz de variáveis {U} torna-se um vetor de $n_{nós}$ linhas e 1 coluna (contendo todas as variáveis U_i de cada nó i).

Enfim, o que é interessante no sistema global é que, para o vetor de condições de contorno naturais e externas, como iremos percorrendo cada elemento no sentido anti-horário e devido ao sentido em que cada lado dos triângulos é percorrido, cada lado de um triângulo que é o lado de outro triângulo vizinho (e está dentro da circunferência de raio r em 1) terá sua condição de contorno natural e externa anulada pois as integrais de linha para o mesmo lado (mas em sentidos diferentes) terão o mesmo valor em módulo, mas sinal oposto e assim na construção do vetor global tais integrais somadas darão 0. Dessa forma, apenas triângulos com borda na circunferência terão condições de contorno naturais diferentes que apenas teremos tais condições de contorno naturais na borda da circunferência. No entanto, já que no enunciado é dada a condição de contorno externa em que o potencial elétrico V e o potencial vetor magnético A_z são 0 nessa borda e fora dela, o vetor de condições naturais e externas para qualquer elemento do domínio será nulo!

Dessa forma, prosseguindo para as equações do problema, o potencial elétrico V é descrito pela equação de Laplace:

$$\nabla^2 V = 0 \tag{7}$$

Que é uma equação diferencial parcial de duas variáveis. Para resolver esta equação por meio do MEF, calcula-se primeiramente a matriz de rigidez de cada elemento triangular e constrói-se a matriz de rigidez global [K] tal como descrita anteriormente. Como a equação de Laplace possui $f(x, y) = 0$, o vetor de carregamentos é nulo e o sistema global então torna-se:

$$[K]\{V\} = 0 \tag{8}$$

De acordo com a figura 1, conhecemos tais potenciais em alguns pontos, que são $V = 0$ para qualquer ponto na borda da circuferência e fora dela, e $V = V_{max}e^{j(\omega t+\phi_c)}$ para os fios das linhas de transmissão. Como o problema pode ser considerado como estático, vamos assumir o tempo $t = 0$. Portanto, como $phi_c = 0$ (do enunciado), nos fios temos $V = V_{max}$. Para outros pontos no domínio a tensão é uma incógnita.

Para obter as tensões em cada nó foi utilizada a equação 8. No entanto, da forma em que se encontra ela não é possível de ser resolvida pelo MATLAB (pois temos um vetor inteiro nulo). Em (BAQER, 2010) é descrito um algoritmo de elminação gaussiana para contornar esse problema (o qual utilizamos em nosso código). O algoritmo funciona da seguinte forma:

- Percorrendo a matriz $K_{N\times N}$ e a matriz $V_{N\times 1}$, com um contador m para linhas e n para colunas, se valor em V(n) não for uma incógnita (ou seja, for 0 ou 500 kV, no caso) e também se $m = n$, então:

- Percorre a $F_{n\times1}$ (a matriz nula da direita da equação) inteira com um contador k. Cada F(k) é subtraído por K(k, n)(n).
- Na matriz K, as colunas da linha m tornam-se 0 e as linhas da coluna n tornam-se 0 também. Depois disso $K(m, n) = 1$.
- Enfim, torna o valor de F(n) = V(n).

Também não pode-se esquecer do carro tal qual a imagem 1, de superfície equipotencial. No código foram colocadas condições para equalizar o potencial elétrico na sua superfície.

O potencial vetor magnético, por sua vez, é calculado pela equação:

$$\nabla^2 A_z = -\mu J_z \tag{9}$$

As condições de contorno para o sistema são praticamente as mesmas. Fora da circunferência e em sua borda tem-se $A_z = 0$. Na região do solo temos: $\mu = \mu_{solo}$ e na região do ar temos $\mu = \mu_{ar}$. Nos fios a densidade de corrente vale:

$$J_z = \frac{I_{max}}{2\pi r_c} e^{j(\omega t+\phi_c)} \tag{10}$$

A equação aparenta ter um vetor de carregamento dado por μJ_z. No entanto, como a densidade de corrente é dada por:

$$J_z = \frac{I}{A_t} \tag{11}$$

Em que I é a corrente no meio e A_t é a área transversal do local em que a corrente passa (no caso, o fio). Assim, temos que a densidade de corrente no meio, fora do fio, é nula (a área é infinita) e portanto não há vetor de carregamentos novamente, sendo a equação global dada por:

$$[K]\{A_z\} = 0 \tag{12}$$

Dessa forma, utilizando mesmo algoritmo de eliminação gaussiana pode-se resolver encontrar os potenciais vetores magnéticos em cada ponto do domínio.

Agora vamos analisar as variáveis vetoriais densidade de fluxo magnético $\vec{B}$, intensidade de campo magnético $\vec{H}$ e intensidade de campo elétrico $\vec{E}$, dadas por:

$$\vec{E} = -\nabla V \tag{13}$$

$$\vec{B} = \nabla \times A_z \tag{14}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} \tag{15}$$

Na aula 21 do curso é descrito que para uma equação de Poisson (tal qual 1) pode-se encontrar o gradiente da aproximação dessa variável $\tilde{U}$, para o elemento triangular como um todo e com os três nós identificados por (1, 2, 3) (tais como em 4), utilizando a seguinte equação:

$$\nabla \tilde{U} = \frac{1}{2A_e}(U_1 \begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} + U_2 \begin{bmatrix} b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} + U_3 \begin{bmatrix} b_3 \\ c_3 \end{bmatrix}) \tag{16}$$

Com as constantes A_e, b_n e c_n tais como mostradas em 3. Segundo o raciocínio de 16 (sendo $\tilde{V}$ ao invés de), para o campo elétrico $\vec{E}$ temos então:

$$\vec{E_x} = -\frac{1}{2A_e}(V_1 b_1 + V_2 b_2 + V_3 b_3) \tag{17}$$

$$\vec{E_y} = -\frac{1}{2A_e}(V_1 c_1 + V_2 c_2 + V_3 c_3) \tag{18}$$

A densidade de fluxo magnético é dada por pelo rotacional de A_z. Como o domínio do problema apenas possui 2 dimensões, temos então que:

$$\vec{B} = (0, 0, \frac{\partial A z_x}{\partial y} - \frac{\partial A z_y}{\partial x}) \tag{19}$$

Dessa forma, o algoritmo implementado para calcular $\vec{B}$ segue o mesmo raciocínio de 16, porém plotando-se o gráfico de forma invertida (*quiver*(B_y, $-B_x$)).

$$\vec{B_x} = \frac{1}{2A_e}(Az_1 b_1 + Az_2 b_2 + Az_3 b_3) \tag{20}$$

$$\vec{B_y} = \frac{1}{2A_e}(Az_1 c_1 + Az_2 c_2 + Az_3 c_3) \tag{21}$$

A intensidade de campo magnético é calculada de forma simples: a partir do resultado da equação 15 e verificando a constante de permeabilidade magnética μ do meio em que o elemento se encontra.

Enfim, ainda temos as condições de contorno na fronteira do solo com o ar:

$$\vec{n} \times (\vec{E_1} - \vec{E_2}) = 0 \tag{22}$$

$$\vec{n} \cdot (\sigma_1 \vec{E_1} - \sigma_2 \vec{E_2}) = 0 \tag{23}$$

$$\vec{n} \times (\vec{H_1} - \vec{H_2}) = 0 \tag{24}$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B_1} - \vec{B_2}) = 0 \tag{25}$$

Como um todo, essas equações de condição de contorno, na fronteira apenas, foram implementadas como:

$$\vec{Ex}_{solo} = \vec{Ex}_{ar} \text{ (equação 22)}$$

$$\vec{Ey}_{solo} = \tfrac{\sigma_{ar}}{\sigma_{solo}} \vec{Ey}_{ar} \text{ (equação 23)}$$

$$\vec{H}x_{solo} = \vec{H}x_{ar} \text{ (equação 24)}$$

$$\vec{B}x_{solo} = \frac{\mu_{ar}}{\mu_{solo}}\vec{B}x_{ar} \text{ (equação 24)}$$

$$\vec{H}y_{solo} = \frac{\mu_{solo}}{\mu_{ar}}\vec{H}y_{ar} \text{ (equação 25)}$$

$$\vec{B}y_{solo} = \vec{B}y_{ar} \text{ (equação 25)}$$

3 Simulações

Plote a distribuição dos escalares $V(x, y)$ e $A_z(x, y)$ utilizando curvas de nível no domínio da figura

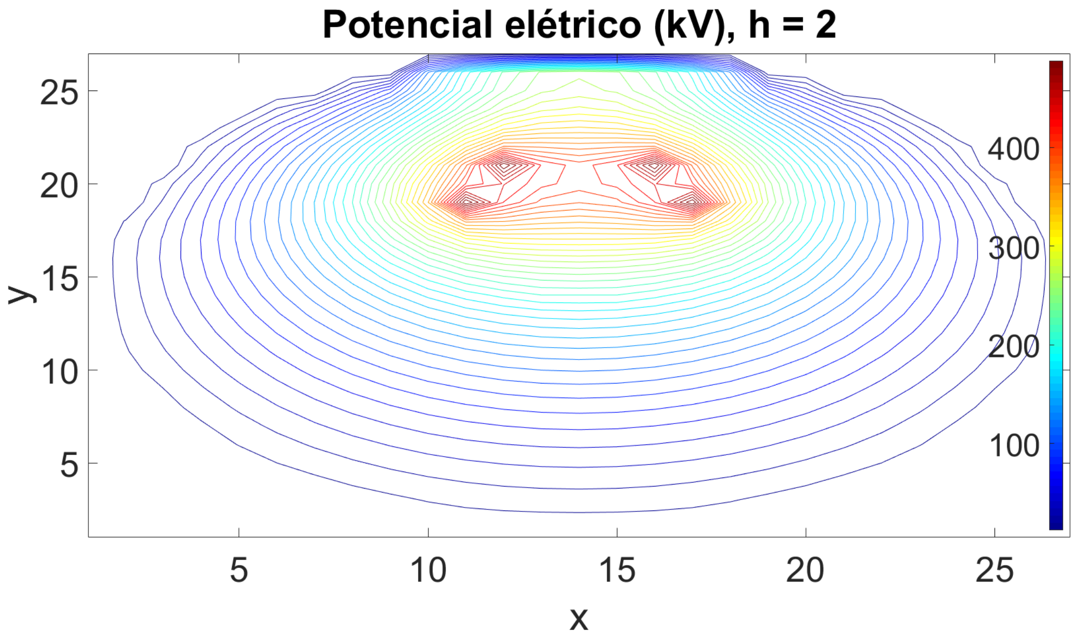

Figura 5: Distribuição de V(x,y) ao longo do domínio para h = 2

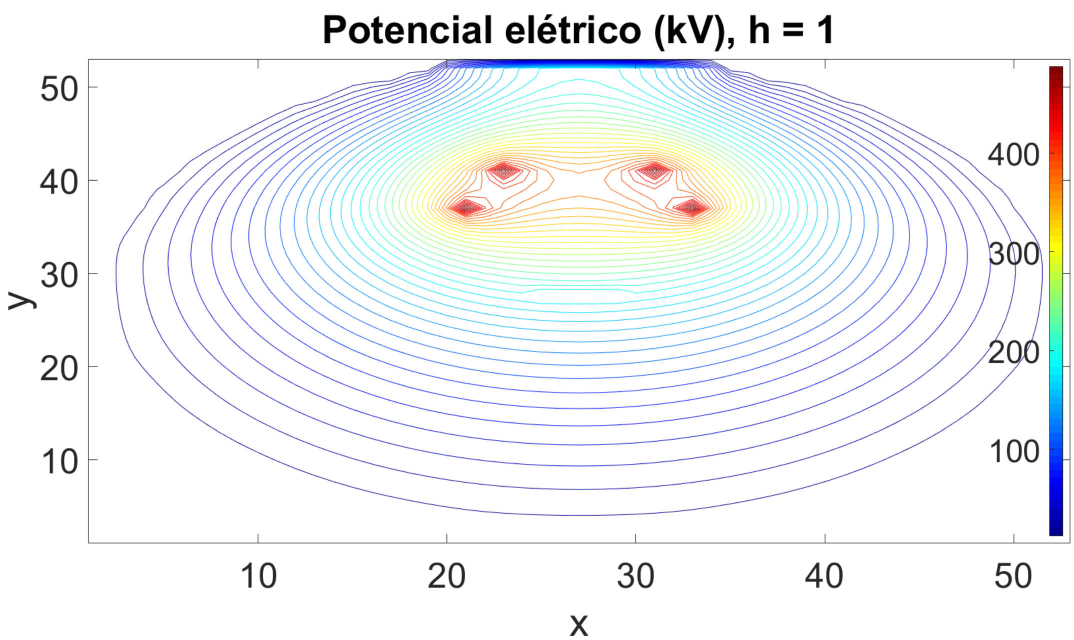

Figura 6: Distribuição de V(x,y) ao longo do domínio para h = 1

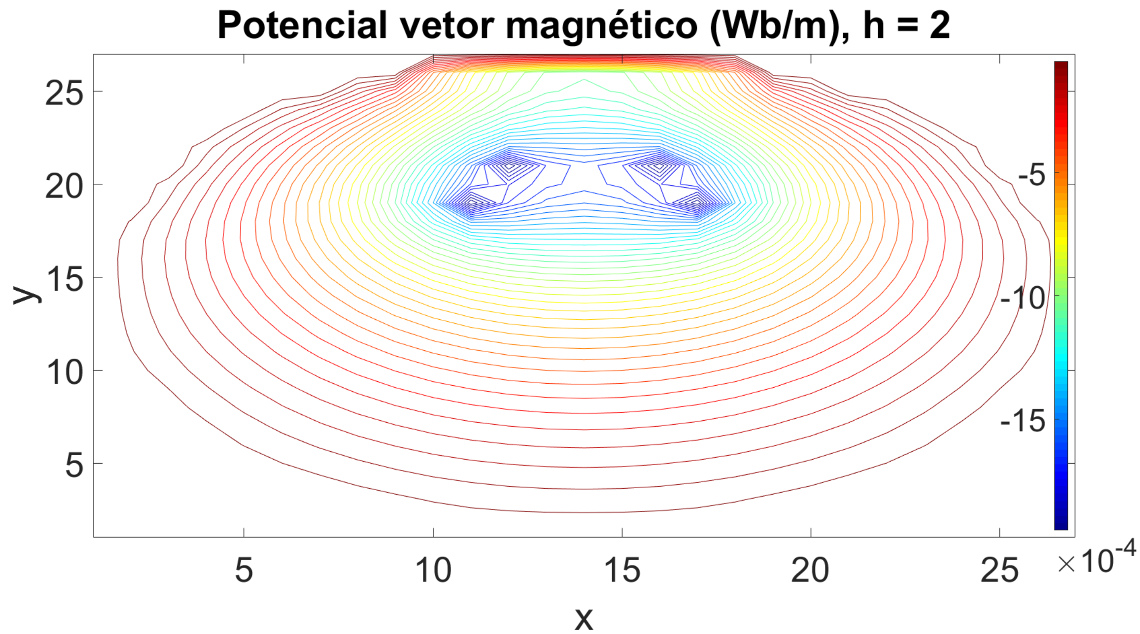

Figura 7: Distribuição de $A_z(x, y)$ ao longo do domínio para h = 2

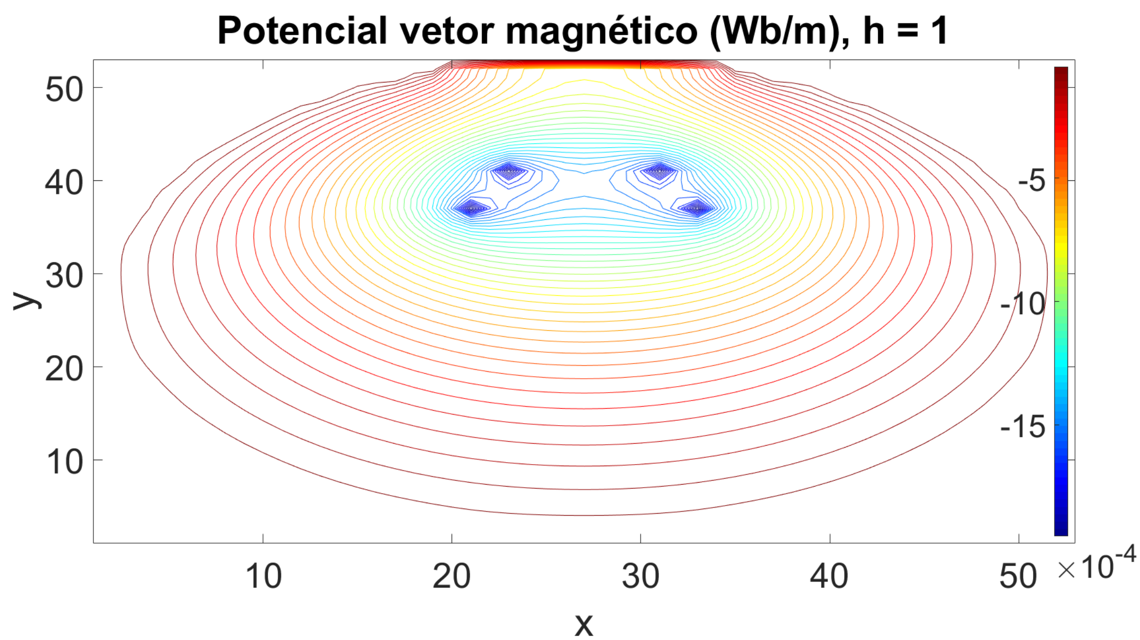

Figura 8: Distribuição de $A_z(x, y)$ ao longo do domínio para h = 1

Plote o vetor de densidade de fluxo magnético $\vec{B}(x,y)$, o vetor de intensidade de campo magnético $\vec{H}(x,y)$ e o vetor de intensidade de campo elétrico $\vec{E}(x,y)$

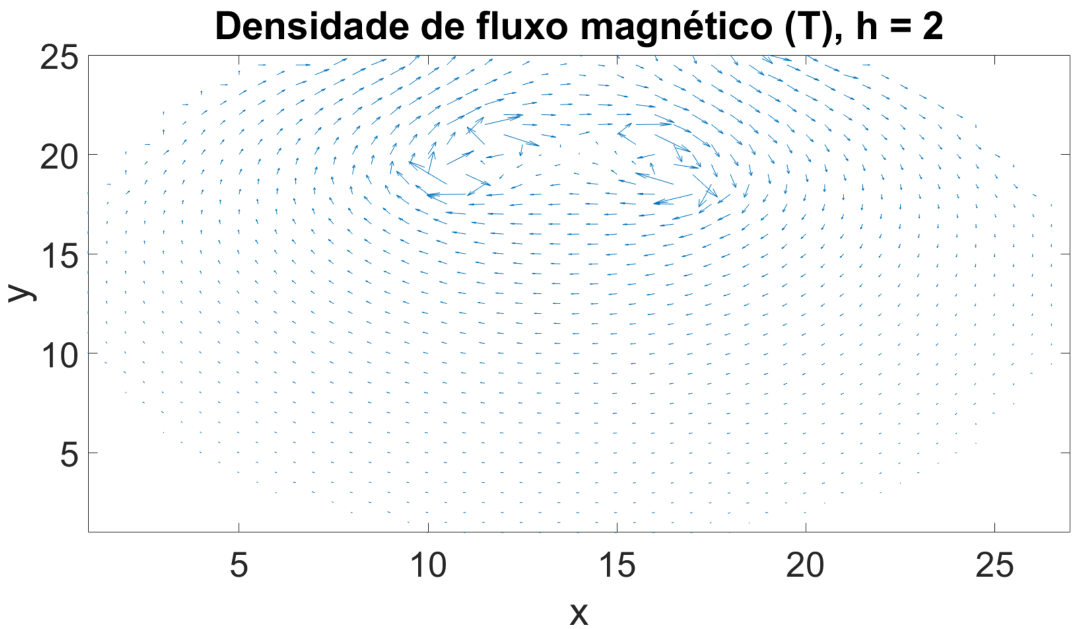

Figura 9: Distribuição de $\vec{B}(x,y)$ ao longo do domínio para h = 2

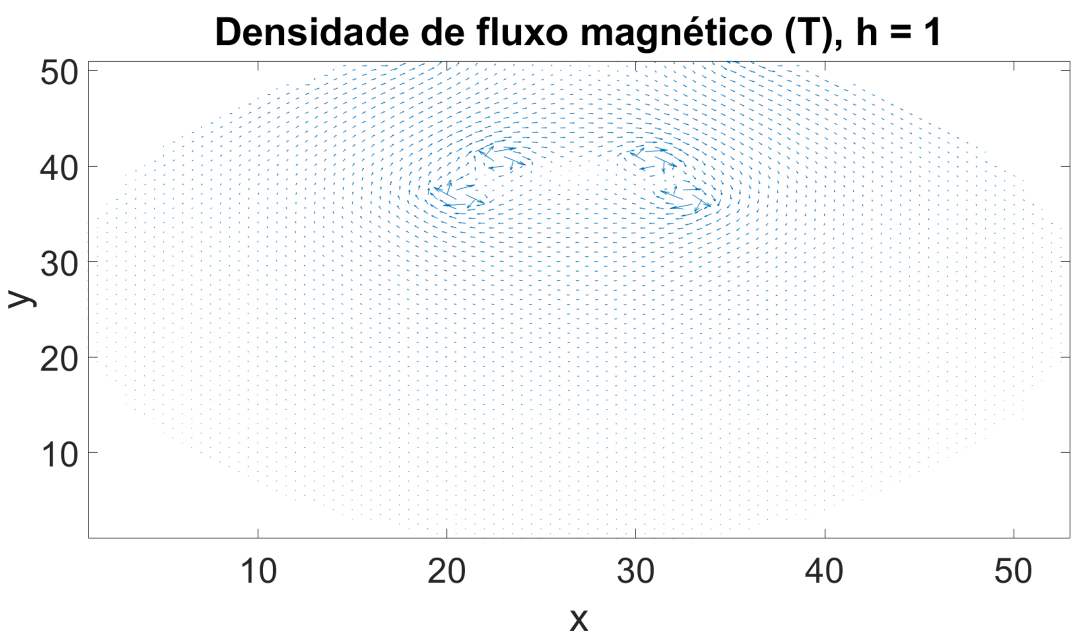

Figura 10: Distribuição de $\vec{B}(x,y)$ ao longo do domínio para h = 1

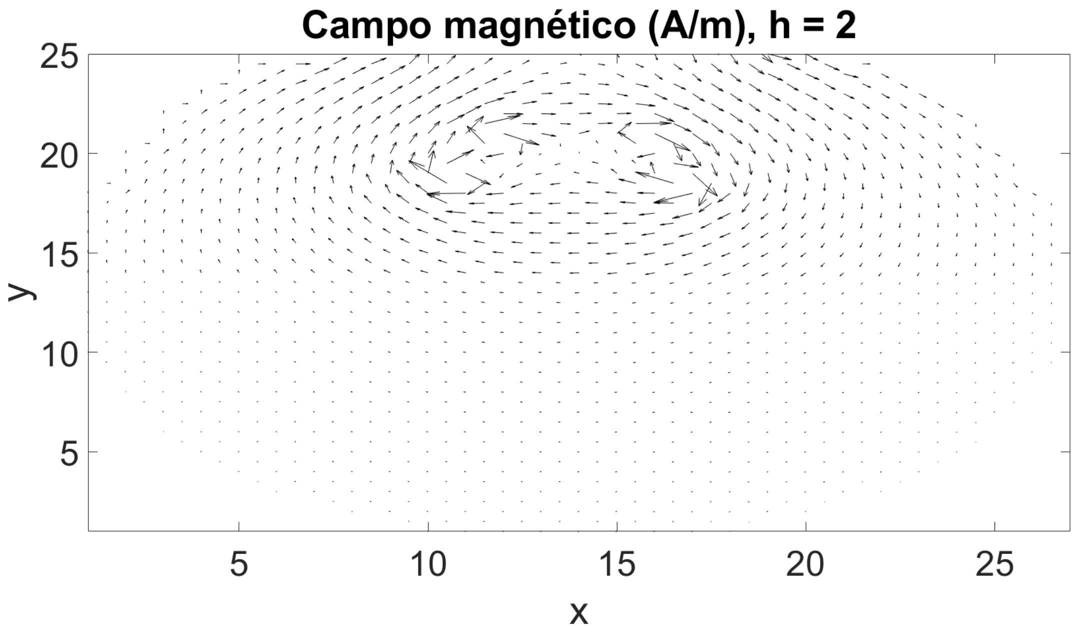

Figura 11: Distribuição de $\vec{H}(x, y)$ ao longo do domínio para h = 2

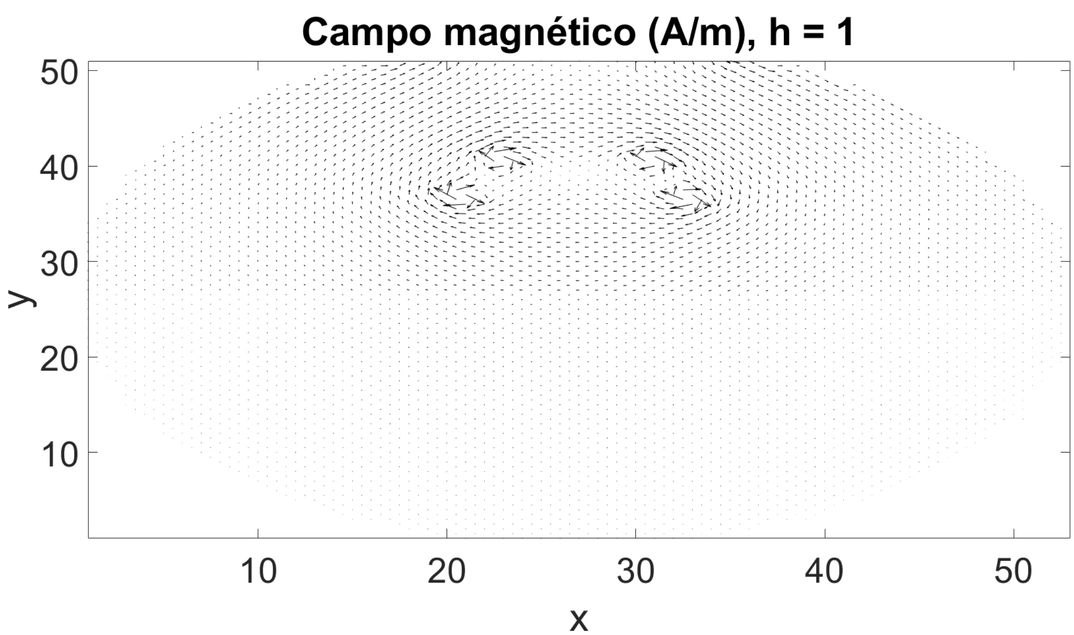

Figura 12: Distribuição de $\vec{H}(x, y)$ ao longo do domínio para h = 1

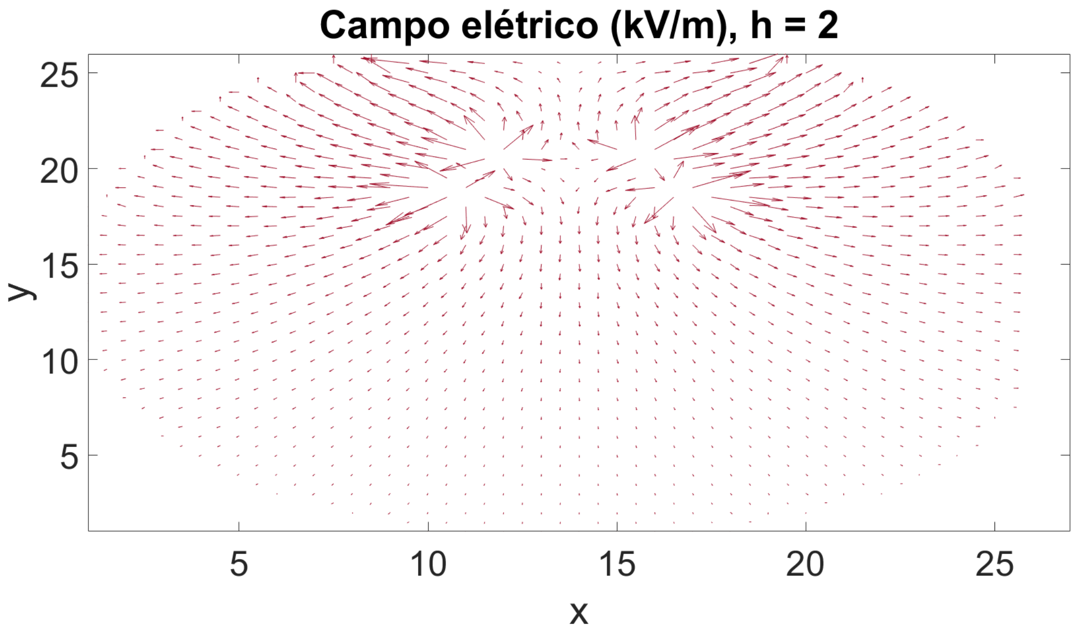

Figura 13: Distribuição de $\vec{E}(x, y)$ ao longo do domínio para h = 2

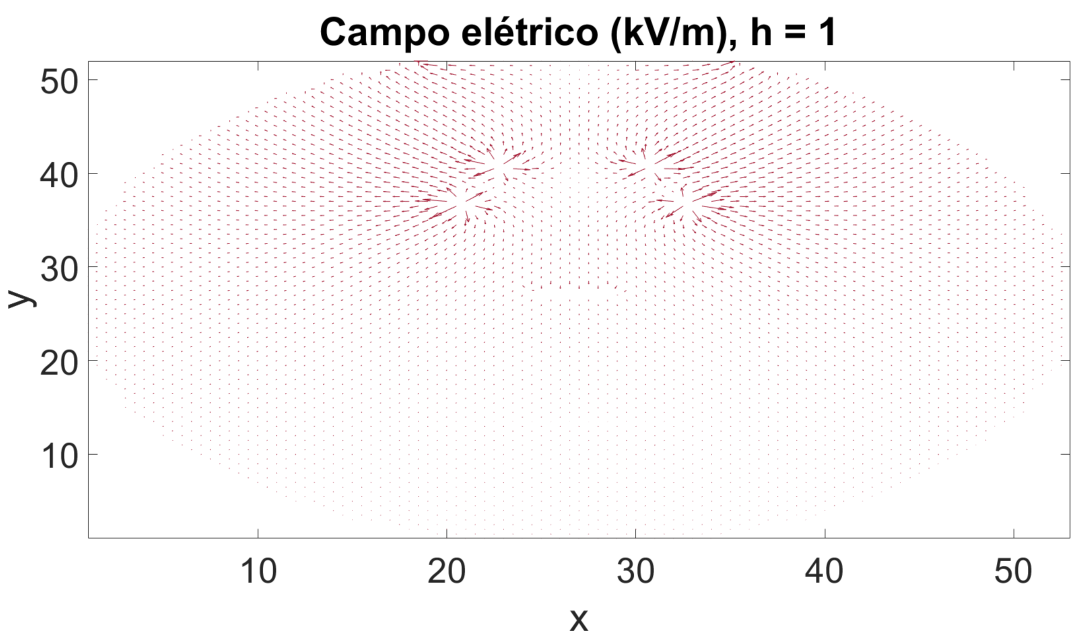

Figura 14: Distribuição de $\vec{E}(x, y)$ ao longo do domínio para h = 1

3.1 Discussões

Como era de se esperar, os maiores valores, em módulo, para o potencial elétrico e para o potencial vetor magnético, são encontrados nos fios. Conforme vamos nos afastando radialmente dos fios vemos que, em módulo, os valores destas variáveis vão diminuindo. As imagens plotadas 5, 6, 7 e 8 comprovam que o código conseguiu simular bem a distribuição dos potenciais elétrico e vetor magnético no espaço em questão, alterando o valor proporcionalmente às distancia aos fios e também mantendo os maiores valores modulares nas regiões próximas aos fios (principalmente dentro da região delimitada pelos 4 fios).

A densidade de fluxo magnética, o campo magnético e o campo elétrico também conseguiram ser bem representadas pelo modelo em questão, de forma que as duas primeira variáveis tenha a orientação de seus vetores no sentido horário (devido ao valor negativo do potencial vetor magnético no domínio) com centro nos fios. Também percebemos que o módulo dos maiores vetores concentra-se ao redor dos fios e vai decrescendo de acordo com a distância até eles. Também notamos que devido a relação de proporcionalidade entre o campo magnético e a densidade de fluxo magnético no mesmo meio, tais variáveis devem ter representações gráficas similares, o que de fato acontece (9, 10, 11 e 12). O campo elétrico, naturalmente, também é maior forte nas proximidades dos fios, decrescendo de acordo com o aumento da distância até eles (o que em tese deve ocorrer). Aliás, devido ao potencial ser máximo nos fios e mínimo na borda da circunferência, os vetores que representam os campos elétricos devem, teoricamente, "sair dos fios e entrar na borda da circunferência", o que realmente ocorre tal qual as imagens 13 e 14. Também é notável que esses 6 gráficos não são simétricos em relação à horizontal: os vetores do topo do domínio e dentro da circunferência possuem maior módulo que os do fundo, porém isso ocorre devido ao calculo do gradiente com a imposição da condição de contorno de potencial nulo na borda.

A influência da discretização é nítida: os gráficos com discretização $h = 2$ são menos suaves que os gráficos com discretização $h = 1$ devido ao menor número de elementos. Dessa forma, os gráficos plotados com discretização $h = 2$ possuem contornos mais pontudos (como podemos comparar os níveis mais extremos das curvas de nível 5, 6, 7 e 8), maior diferença de valor entre nós e elementos próximos (comparemos as posições acima dos fios em 7 e 8) e também maior diferença de valores para o vetores próximos em 9, 10, 11, 12, 13 e 14. Aliás, para $h = 1$ é possível verificar a influência do carro tal qual a imagem 6, porem ela é difícil de ser visualizada em 5.

Enfim, as condições de contorno na fronteira entre solo e ar foram implementadas, porém são difíceis de serem visualizadas devido ao pequeno tamanho dessas flechas. No entanto, ainda assim são possíveis de serem visualizadas nos respectivos gráficos.

4 Conclusões

Neste exercício programa foi possível estudar e verificar o comportamento dos campos elétricos e magnéticos gerados nos arredores de uma torre de transmissão. Para isto, foi utilizado o método dos elementos finitos com elementos triangulares para modelar o sistema, resolver as equações constituintes do sistema e obter a distribuição de grandezas eletromagnéticas no domínio. Foi criado um código no MATLAB que permitiu realizar simulações das equações que descrevem o sistema com dois tamanhos de elementos. Observou-se maior intensidade, em módulo, destas grandezas nas regiões próximas aos fios de transmissão propagando-se pelo e alcançando o contorno da circunferência, cujos valores são nulos devido a condição de contorno imposta. O programa criado conseguiu simular e plotar adequadamente a distribuição dos potenciais elétrico e vetor magnético em curvas de nível, assim como também a distribuição da densidade de fluxo magnético, a intensidade de campo magnético e a intensidade de campo elétrico. Foi possível verificar a influência da discretização para todos os tipos de gráfico e também a influência do carro na distribuição do potencial elétrico. Enfim, acreditamos que a execução do exercício programa foi um sucesso porque foi possível atender a todos os itens requeridos de forma adequada e condizente com o fenômeno real.

5 Código

```
1 %Exercicio programa extra
2 %Autor: Joao P P Ceccarelli / Henrique Yamamoto
3 %Para alterar a discretizacao basta mudar h na linha 17
4 
5 clear all;
6 
7 %dados do enunciado
8 vmax = 500;
9 imax = 200;
10 rc = 0.02;
11 mu_ar = 1.2566*10^(-6);
12 mu_solo = 2*1.2567*10^(-6);
13 sigma_ar = 10^-10;
14 sigma_solo = 10^-2;
15 
16 %discretizacao (mudar aqui caso quiser comparar)
17 h = 1;
18 
19 %raio e tamanho das matrizes
20 tam = 52/h+1;
21 r = 26/h;
22 
23 %matrizes para guardar nohs dos elementos
24 %elementos1 = triangulos com maior face virada para cima
25 %elementos2 = triangulos com maior face virada para baixo
26 elementos1 = zeros(tam^2);
27 elementos2 = zeros(tam^2);
28 
29 %Montagem da matriz de rigidez
30 K = zeros(tam^2);
31 Ke = [];
32 cnt = 1;
33 for m = 1:tam-1
34     for n = 1:tam-1
35             %aloca posicoes dos nos
36             elementos1(m, n, 1) = n;
37             elementos1(m, n, 2) = m;
38             elementos1(m, n, 3) = n+h;
39             elementos1(m, n, 4) = m;
40             elementos1(m, n, 5) = n;
41             elementos1(m, n, 6) = m+h;
42 
43             elementos2(m, n, 1) = n+h;
```

```
            elementos2(m, n, 2) = m+h;
            elementos2(m, n, 3) = n;
            elementos2(m, n, 4) = m+h;
            elementos2(m, n, 5) = n+h;
            elementos2(m, n, 6) = m;

            %constantes
            b11 = elementos1(m, n, 4) - elementos1(m, n, 6);
            b21 = elementos1(m, n, 6) - elementos1(m, n, 2);
            b31 = elementos1(m, n, 2) - elementos1(m, n, 4);
            c11 = elementos1(m, n, 5) - elementos1(m, n, 3);
            c21 = elementos1(m, n, 1) - elementos1(m, n, 5);
            c31 = elementos1(m, n, 3) - elementos1(m, n, 1);
            b12 = elementos2(m, n, 4) - elementos2(m, n, 6);
            b22 = elementos2(m, n, 6) - elementos2(m, n, 2);
            b32 = elementos2(m, n, 2) - elementos2(m, n, 4);
            c12 = elementos2(m, n, 5) - elementos2(m, n, 3);
            c22 = elementos2(m, n, 1) - elementos2(m, n, 5);
            c32 = elementos2(m, n, 3) - elementos2(m, n, 1);

            Ae = (b11*c21 - b21*c11)/2;

            Ke = 1/(4*Ae)*[b11*b11+c11*c11 b21*b11+c21*c11 b31*b11+...
    c31*c11;
            b21*b11+c21*c11 b21*b21+c21*c21 b31*b21+c31*c21;
            b31*b11+c31*c11 b21*b31+c21*c31 b31*b31+c31*c31];

            K(cnt,cnt) = K(cnt,cnt)+Ke(1,1);
            K(cnt,cnt+1) = K(cnt,cnt+1)+Ke(1,2);
            K(cnt,cnt+tam) = K(cnt,cnt+tam)+Ke(1,3);
            K(cnt+1,cnt) = K(cnt+1,cnt)+Ke(2,1);
            K(cnt+1,cnt+1) = K(cnt+1,cnt+1)+Ke(2,2);
            K(cnt+1,cnt+tam) = K(cnt+1,cnt+tam)+Ke(2,3);
            K(cnt+tam,cnt) = K(cnt+tam,cnt)+Ke(3,1);
            K(cnt+tam,cnt+1) =  K(cnt+tam,cnt+1)+Ke(3,2);
            K(cnt+tam,cnt+tam) = K(cnt+tam,cnt+tam)+Ke(3,3);

            Ae = (b12*c22 - b22*c12)/2;

            Ke = 1/(4*Ae)*[b12*b12+c12*c12 b22*b12+c22*c12 b32*b12+...
    c32*c12;
            b22*b12+c22*c12 b22*b22+c22*c22 b32*b22+c32*c22;
            b32*b12+c32*c12 b22*b32+c22*c32 b32*b32+c32*c32];

            K(cnt+tam+1,cnt+tam+1) = K(cnt+tam+1,cnt+tam+1)+Ke(1,1)...
    ;
            K(cnt+tam+1,cnt+tam) = K(cnt+tam+1,cnt+tam)+Ke(1,2);
```

```
            K(cnt+tam+1,cnt+1) = K(cnt+tam+1,cnt+1)+Ke(1,3);
            K(cnt+tam,cnt+tam+1) = K(cnt+tam,cnt+tam+1)+Ke(2,1);
            K(cnt+tam,cnt+tam) = K(cnt+tam,cnt+tam)+Ke(2,2);
            K(cnt+tam,cnt+1) = K(cnt+tam,cnt+1)+Ke(2,3);
            K(cnt+1,cnt+tam+1) = K(cnt+1,cnt+tam+1)+Ke(3,1);
            K(cnt+1,cnt+tam) = K(cnt+1,cnt+tam)+Ke(3,2);
            K(cnt+1,cnt+1) = K(cnt+1,cnt+1)+Ke(3,3);

            cnt = cnt+1;
    end
end

%Condicoes de contorno para potencial eletrico nos pontos ...
   conhecidos
%res eh a matriz de carregamentos + CC
%pot_aux armazena a potencia dos nohs num array (tam^2, 1)
%cnt = contador para percorrer tal array
res = zeros(tam^2,1);
pot_aux = ones(tam^2,1);
cnt = 1;
for m = 1:tam
    for n = 1:tam
        if ((m-(tam+1)/2)^2+(n-(tam+1)/2)^2 ≥ r^2)
            pot_aux(cnt) = 0;
        elseif(m==(ceil(tam/2)+10/h)&&(n==(ceil(tam/2)-6/h)||(n==(...
   ceil(tam/2)+6/h))))||...
                (m==(ceil(tam/2)+14/h)&&(n==(ceil(tam/2)-4/h)||(n...
   ==(ceil(tam/2)+4/h))))
            pot_aux(cnt) = vmax;
        end
        cnt = cnt + 1;
    end
end

%Usa algoritmo de eliminacao gaussiana para ir alterando res
%e a matriz de rigidez
for m = 1:tam^2
    for n = 1:tam^2
        %1 eh o valor default da matriz, eh como se nao existisse ...
   noh caso
        %o valor seja 1
        if (pot_aux(n) ≠ 1)&& m == n
            for k = 1:tam^2
                res(k) = res(k) - K(k,n)*pot_aux(n);
            end
            K(m,:) = 0;
            K(:,n) = 0;
```

```
            K(m,n) = 1;
            res(m) = pot_aux(m);
        end
    end
end

%encontra o potencial eletrico (vetor (tam^2, 1))
potencial = linsolve(K,res);

%passa o potencial para o dominio 2D
cnt = 1;
V = zeros(tam);
for m = 1:tam
    for n = 1:tam
        V(m,n) = potencial(cnt);
        cnt = cnt + 1;
    end
end

%condicoes de contorno para o carro
for m = ceil(tam/2):(ceil(tam/2)+2/h)
    for n = (ceil(tam/2)-2/h):(ceil(tam/2)+2/h)
        if(m ≥ ceil(tam/2) && m ≤ ceil(tam/2)+1.5/h)&&(n ≤ ceil(tam...
   /2)+2/h && n≥ceil(tam/2)-2/h)
            V(m,n) = V(ceil(tam/2), ceil(tam/2));
        end
    end
end

cnt = 1;
%matriz de rigidez para variaveis magneticas
%reseta matriz de rigidez antiga
K = zeros(tam^2);
for m = 1:tam-1
    for n = 1:tam-1
            b11 = elementos1(m, n, 4) - elementos1(m, n, 6);
            b21 = elementos1(m, n, 6) - elementos1(m, n, 2);
            b31 = elementos1(m, n, 2) - elementos1(m, n, 4);
            c11 = elementos1(m, n, 5) - elementos1(m, n, 3);
            c21 = elementos1(m, n, 1) - elementos1(m, n, 5);
            c31 = elementos1(m, n, 3) - elementos1(m, n, 1);
            b12 = elementos2(m, n, 4) - elementos2(m, n, 6);
            b22 = elementos2(m, n, 6) - elementos2(m, n, 2);
            b32 = elementos2(m, n, 2) - elementos2(m, n, 4);
            c12 = elementos2(m, n, 5) - elementos2(m, n, 3);
            c22 = elementos2(m, n, 1) - elementos2(m, n, 5);
            c32 = elementos2(m, n, 3) - elementos2(m, n, 1);
```

```
            Ae = (b11*c21 - b21*c11)/2;

            Ke = 1/(4*Ae)*[b11*b11+c11*c11 b21*b11+c21*c11 b31*b11+...
    c31*c11;
            b21*b11+c21*c11 b21*b21+c21*c21 b31*b21+c31*c21;
            b31*b11+c31*c11 b21*b31+c21*c31 b31*b31+c31*c31];

            K(cnt,cnt) = K(cnt,cnt)+Ke(1,1);
            K(cnt,cnt+1) = K(cnt,cnt+1)+Ke(1,2);
            K(cnt,cnt+tam) = K(cnt,cnt+tam)+Ke(1,3);
            K(cnt+1,cnt) = K(cnt+1,cnt)+Ke(2,1);
            K(cnt+1,cnt+1) = K(cnt+1,cnt+1)+Ke(2,2);
            K(cnt+1,cnt+tam) = K(cnt+1,cnt+tam)+Ke(2,3);
            K(cnt+tam,cnt) = K(cnt+tam,cnt)+Ke(3,1);
            K(cnt+tam,cnt+1) =  K(cnt+tam,cnt+1)+Ke(3,2);
            K(cnt+tam,cnt+tam) = K(cnt+tam,cnt+tam)+Ke(3,3);

            Ae = (b12*c22 - b22*c12)/2;

            Ke = 1/(4*Ae)*[b12*b12+c12*c12 b22*b12+c22*c12 b32*b12+...
    c32*c12;
            b22*b12+c22*c12 b22*b22+c22*c22 b32*b22+c32*c22;
            b32*b12+c32*c12 b22*b32+c22*c32 b32*b32+c32*c32];

            K(cnt+tam+1,cnt+tam+1) = K(cnt+tam+1,cnt+tam+1)+Ke(1,1)...
    ;
            K(cnt+tam+1,cnt+tam) = K(cnt+tam+1,cnt+tam)+Ke(1,2);
            K(cnt+tam+1,cnt+1) = K(cnt+tam+1,cnt+1)+Ke(1,3);
            K(cnt+tam,cnt+tam+1) = K(cnt+tam,cnt+tam+1)+Ke(2,1);
            K(cnt+tam,cnt+tam) = K(cnt+tam,cnt+tam)+Ke(2,2);
            K(cnt+tam,cnt+1) = K(cnt+tam,cnt+1)+Ke(2,3);
            K(cnt+1,cnt+tam+1) = K(cnt+1,cnt+tam+1)+Ke(3,1);
            K(cnt+1,cnt+tam) = K(cnt+1,cnt+tam)+Ke(3,2);
            K(cnt+1,cnt+1) = K(cnt+1,cnt+1)+Ke(3,3);

            cnt = cnt+1;
    end
end

%condicoes de contorno para o potencial magnetico (valores ...
    conhecidos)
res_b = zeros(tam^2,1);
vpm = ones(tam^2,1);
cnt = 1;
for m = 1:tam
    for n = 1:tam
```

```
        if ((m-(tam+1)/2)^2+(n-(tam+1)/2)^2 ≥ r^2)
            vpm(cnt) = 0;
        elseif(m==(ceil(tam/2)+10/h)&&(n==(ceil(tam/2)-6/h)||(n==(...
    ceil(tam/2)+6/h))))||...
                (m==(ceil(tam/2)+14/h)&&(n==(ceil(tam/2)-4/h)||(n...
    ==(ceil(tam/2)+4/h))))
            vpm(cnt) = -mu_ar*imax/(2*pi*rc);
        end
        cnt = cnt + 1;
    end
end

%res_b e a matriz de carregamentos para o vetor potencial magnetico
%mesma ideia do algoritmo anterior
for m = 1:tam^2
    for n = 1:tam^2
        if (vpm(n) ≠ 1)&& m == n
            for k = 1:tam^2
                res_b(k) = res_b(k) - K(k,n)*vpm(n);
            end
            K(m,:) = 0;
            K(:,n) = 0;
            K(m,n) = 1;
            res_b(m) = vpm(m);
        end
    end
end

%encontra o potencial magnetico na forma de array (tam^2, 1)
vpm_aux = linsolve(K, res_b);

%passa o potencial magnetico para o dominio 2D
cnt = 1;
Az = zeros(tam);
for m = 1:tam
    for n = 1:tam
        Az(m,n) = vpm_aux(cnt);
        cnt = cnt + 1;
    end
end

%campo eletrico, densidade de fluxo e campo magnetico
%calcula tais variaveis para cada elemento triangular (interpolacao...
     dos
%nohs)
cnt = 1;
Ex = zeros(2*(tam-1));
```

```
Ey = Ex;
Bx = Ex;
By = Ex;
Hx = Ex;
Hy = Ex;
for m = 1:tam-1
     for n = 1:tam-1
            b11 = elementos1(m, n, 4) - elementos1(m, n, 6);
            b21 = elementos1(m, n, 6) - elementos1(m, n, 2);
            b31 = elementos1(m, n, 2) - elementos1(m, n, 4);
            c11 = elementos1(m, n, 5) - elementos1(m, n, 3);
            c21 = elementos1(m, n, 1) - elementos1(m, n, 5);
            c31 = elementos1(m, n, 3) - elementos1(m, n, 1);

            Ae = (b11*c21 - b21*c11)/2;

            Ex(2*m-1,2*n-1) = -1/(2*Ae)*(V(m,n)*b11+V(m,n+1)*b21+V(...
   m+1,n)*b31);
            Ey(2*m-1,2*n-1) = -1/(2*Ae)*(V(m,n)*c11+V(m,n+1)*c21+V(...
   m+1,n)*c31);
            By(2*m-1,2*n-1) = 1/(2*Ae)*(Az(m,n)*b11+Az(m,n+1)*b21+...
   Az(m+1,n)*b31);
            Bx(2*m-1,2*n-1) = 1/(2*Ae)*(Az(m,n)*c11+Az(m,n+1)*c21+...
   Az(m+1,n)*c31);

            if(m ≥ ceil(tam/2))
                mu = mu_ar;
            else
                mu = mu_solo;
            end
            Hx(2*m-1,2*n-1) = Bx(2*m-1,2*n-1)/mu;
            Hy(2*m-1,2*n-1) = By(2*m-1,2*n-1)/mu;

            b12 = elementos2(m, n, 4) - elementos2(m, n, 6);
            b22 = elementos2(m, n, 6) - elementos2(m, n, 2);
            b32 = elementos2(m, n, 2) - elementos2(m, n, 4);
            c12 = elementos2(m, n, 5) - elementos2(m, n, 3);
            c22 = elementos2(m, n, 1) - elementos2(m, n, 5);
            c32 = elementos2(m, n, 3) - elementos2(m, n, 1);

            Ae = (b12*c22 - b22*c12)/2;

            Ex(2*m,2*n) = -1/(2*Ae)*(V(m+1,n+1)*b12+V(m+1,n)*b22+V(...
   m,n+1)*b32);
            Ey(2*m,2*n) = -1/(2*Ae)*(V(m+1,n+1)*c12+V(m+1,n)*c22+V(...
   m,n+1)*c32);
```

```
            By(2*m,2*n) = 1/(2*Ae)*(Az(m+1,n+1)*b12+Az(m+1,n)*b22+...
    Az(m,n+1)*b32);
            Bx(2*m,2*n) = 1/(2*Ae)*(Az(m+1,n+1)*c12+Az(m+1,n+1)*c22...
    +Az(m,n+1)*c32);

            Hx(2*m,2*n) = Bx(2*m,2*n)/mu;
            Hy(2*m,2*n) = By(2*m,2*n)/mu;
     end
end

%aplica condicoes de contorno na fronteira
for n = 1:2:2*(tam-1)
    m = floor(tam/2);
    Ex(m, n+1) = Ex(m+1, n);
    Ey(m, n+1) = sigma_ar*Ey(m+1, n)/sigma_solo;
    By(m, n+1) = By(m+1, n);
    Bx(m, n+1) = mu_ar*Bx(m+1,n)/mu_solo;
    Hx(m, n+1) = Hx(m+1, n);
    Hy(m, n+1) = mu_solo*Hy(m+1,n)/mu_ar;
end

%plota os graficos para V, Az, E, B e H, nessa ordem
close all;
figure(1);
contour(V, 40);
hTitle = title(['Potencial el trico (kV), h = ', num2str(h)]);
set(hTitle,'FontSize',40);
xlabel('x');
ylabel('y');
set(gca,'FontSize',40);
colormap jet;
colorbar('east');

figure(2);
contour(Az, 40);
hTitle = title(['Potencial vetor magn tico (Wb/m), h = ', num2str(...
    h)]);
set(hTitle,'FontSize',40);
xlabel('x');
ylabel('y');
set(gca,'FontSize',40);
colormap jet;
colorbar('east');

figure(3);
x = 1:0.5:tam-0.5;
y = 1:0.5:tam-0.5;
```

```
H = quiver(x, y, Ex, Ey, 3);
H.Color = [0.6350 0.0780 0.1840];
hTitle = title(['Campo el trico (kV/m), h = ', num2str(h)]);
set(hTitle,'FontSize',40);
xlabel('x');
ylabel('y');
set(gca,'FontSize',40);
xlim([1 tam]);
ylim([1 tam-1]);


figure(4);
x = 1:0.5:tam-0.5;
y = 1:0.5:tam-0.5;
quiver(x, y, Bx, -By, 3);
hTitle = title(['Densidade de fluxo magn tico (T), h = ', num2str(...
    h)]);
set(hTitle,'FontSize',40);
xlabel('x');
ylabel('y');
set(gca,'FontSize',40);
xlim([1 tam]);
ylim([1 tam-2]);


figure(5);
x = 1:0.5:tam-0.5;
y = 1:0.5:tam-0.5;
H = quiver(x, y, Hx, -Hy, 3);
H.Color = 'black';
hTitle = title(['Campo magn tico (A/m), h = ', num2str(h)]);
set(hTitle,'FontSize',40);
xlabel('x');
ylabel('y');
set(gca,'FontSize',40);
xlim([1 tam]);
ylim([1 tam-2]);
```

6 Bibliografia

Baqer, Z. (2010). Finite Element Based Solution of Laplace's Equation Applied to Electrical Activity of the Human Body. Al-Khwarizmi Engineering Journal, 6(4), 37-51. Disponível em http://alkej.uobaghdad.edu.iq/index.php/alkej/article/view/511. Acesso em 13 de julho de 2020.