CIN-Dic2017.pdf

VALANCE9

Cálculo Infinitesimal y Numérico

1º Grado en Ingeniería Informática - Tecnologías Informáticas

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática
Universidad de Sevilla

CÁLCULO INFINITESIMAL Y NUMÉRICO – 3ª Convocatoria oficial– 05/12/2017

Grado en I. I. – I. del Software, I. de los Computadores, Tecnologías Informáticas

EJERCICIO 1 (2,5 puntos)

Se quiere calcular la solución $\bar{x}$ de la ecuación $\text{sen}(x) = 1/4$. Sabiendo que $\bar{x} \in [0, \pi/2]$, se pide:

a) Comprobar que la ecuación $\text{sen}(x) = 1/4$ tiene una única solución en el intervalo $[0, \pi/2]$.

b) Verificar que dicha solución está en $[1/4, \pi/6]$.

c) Determinar el número mínimo de iteraciones que se deben ejecutar en el intervalo $[1/4, \pi/6]$ por el método de bisección para aproximar $\bar{x}$ con un error inferior a 10^{-2}.

d) Demostrar que el intervalo $[1/4, \pi/6]$ está garantizada la convergencia del método de Newton a la raíz $\bar{x}$ de la función $F(x) = \text{sen}(x) - 1/4$, siempre que el punto inicial x_0 se elija como el extremo adecuado del intervalo (indicar el extremo elegido).

e) Con el punto inicial x_0 del apartado anterior, ejecutar una iteración del método de Newton y obtener x_1, dando una cota ε_1 del error cometido.

EJERCICIO 2 (1,5 puntos)

De una cierta función $f(x)$ se conoce que: $f(-1) = 0$, $f(0) = 3$, $f(1) = 4$, $f(2) = 6$.

a) Hallar $P(x)$, el polinomio interpolador de $f(x)$ en el soporte $S = \{-1, 0, 1, 2\}$.

b) De otra función $g(x)$ se sabe que: $g(-1) = 3$, $g(0) = 6$, $g(1) = 12$, y $g(2) = 20$. Calcular las imágenes de la función $h(x) = \dfrac{g(x)}{x+2}$ en los puntos del soporte S.

c) Deducir $Q(x)$, el polinomio interpolador de $h(x)$ en el soporte S.

Continúa en la siguiente página ▶▶▶▶

EJERCICIO 3 (3 puntos)

a) Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n (x+2)^{2n}}{5^{n+1}}$, se pide:

a.1) Calcular el radio y el intervalo de convergencia de la serie de potencias.

a.2) En dicho intervalo de convergencia, calcular (si es posible) la función suma $S(x)$ de la serie de potencias.

b) Sea $f(x)$ la función definida en $[-1, 1)$ como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad -1 \leq x < -1/2, \\ x & \text{si} -1/2 \leq x < 1/2, \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad 1/2 \leq x < 1. \end{cases}$$

b.1) Representar gráficamente la extensión periódica de la función $f(x)$ en el intervalo $[-3, 4]$.

b.2) Hallar los coeficientes a_0, y a_n, $(n \geq 1)$, de la serie de Fourier $SF(f(x))$ de $f(x)$.

b.3) Calcular los valores de $SF(f(x))$ en los puntos $x = 1/2$, $x = 15/4$, $x = -7/4$, $x = -5$.

EJERCICIO 4 (3 puntos)

Sea la función $f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{x+y}$. Se pide

a) Obtener, y clasificar, los puntos críticos de $f(x, y)$.

b) Valores de $a \in \mathbb{R}$ para que la derivada direccional máxima de $f(x, y)$ en el punto $P(1, a)$ se alcance en la dirección del vector $\vec{v} = (1, 1)$.

c) Para $y = -1$, considérese la función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(x) = f(x, -1)$.

c.1) Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 de $g(x)$ centrado en $x_0 = 1$ para aproximar el valor de $g(0{,}8)$.

c.2) Sabiendo que $g'''(x)$ es estrictamente creciente en $[0, +\infty)$, acotar el error cometido con la anterior aproximación mediante el resto de Lagrange.