

ELECTROTECNIA I

TEÓRICA

Capítulo I

Conteúdo

I	Electrostática	2
1	Introdução	2
1.1	Carga eléctrica	3
1.1.1	Definição	3
1.1.2	Força entre cargas eléctricas	3
1.2	Princípio da sobreposição	4
1.3	Lei de Coulomb	4
1.3.1	Distribuição discreta de cargas	4
1.3.2	Exemplos de cálculo da força electrostática	5
2	Campo eléctrico	5
2.1	Definição	5
2.2	Campo eléctrico devido a cargas pontuais	6
2.3	Linhas de força do campo eléctrico	7
2.3.1	Cálculo do número de linhas de força associadas a uma carga eléctrica Q	7
2.4	Cálculo de campos eléctricos	8
2.4.1	Campo eléctrico num ponto devido a duas cargas pontuais	8
2.5	Distribuição das cargas nos condutores	9
3	Lei de Gauss	10
3.1	Fluxo eléctrico	10
3.2	Lei de Gauss	11
3.2.1	Cálculo de campos eléctricos utilizando a lei de Gauss	11
4	Potencial Eléctrico	12
4.1	Trabalho e Energia Potencial	12
4.1.1	Exemplo	15
4.2	Energia Potencial e Diferença de Potencial	15
4.3	Cálculo de alguns potenciais	16
4.3.1	Diferença de potencial entre dois pontos numa região em que existe uma carga pontual	16
4.3.2	Potencial num ponto devido a duas cargas pontuais	17
5	Condensadores e dieléctricos	18
5.1	Condensadores	18
5.2	Energia dum condensador	19
5.3	Cálculo de capacidades	20
5.3.1	Condensador de placas paralelas	20
5.4	Associação de condensadores	21
5.4.1	Associação de condensadores em paralelo	21
5.4.2	Associação de condensadores em série	22
5.5	Dieléctricos	23

Parte I

Electrostática

1 Introdução

A presença de cargas eléctricas é constatada através da existência de forças entre as mesmas que podem ser de atracção ou de repulsão.

Uma forma de introduzir a noção de carga eléctrica pode ser através de uma experiência de electrização por fricção.

Na natureza existem materiais que apresentam tendência para receber electrões, enquanto que outros têm tendência para ceder electrões.

Quando se fricciona uma vareta de vidro com um pano de seda, o vidro tem tendência em ceder electrões e a seda tem tendência para receber electrões. Desta forma haverá um certo número de electrões que passam da vareta de vidro para a seda, pelo que a vareta de vidro ficará carregada positivamente (maior número de protões) e a seda carregada negativamente (excesso de electrões).

Chama-se a atenção para o facto de que a carga eléctrica não é criada nem destruída, o que acontece é que os corpos se carregam electricamente devido a uma alteração no equilíbrio eléctrico dos seus átomos que à partida são electricamente neutros. No caso da experiência relatada o vidro carrega positivamente com uma carga equivalente à carga negativa da seda.

A transferência de electrões de um corpo para outro que conduz à electrização positiva do corpo que os cede, ficando alguns dos seus átomos com mais protões que electrões, enquanto que no outro se verifica excesso de electrões que constituem cargas negativas.

Uma outra forma de electrizar um corpo é por contacto com um outro corpo carregado.

Este fenómeno é explicado pela Física do Estado Sólido com recurso ao modelo atómico de Rutherford-Bohr.

De acordo com o modelo atómico de Rutherford-Bohr as órbitas em que gravitam os electrões em volta do núcleo correspondem a níveis de energia. Os materiais bons condutores têm 1 a 2 electrões na órbita exterior ou banda de valência. Estes electrões chamam-se *electrões livres* e os restantes chamam-se *electrões ligados*.

Como informação refere-se que um electrão possui uma massa de $\approx 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, enquanto o protão tem uma massa cerca de 1840 vezes superior.

A unidade da carga eléctrica é o Coulomb que se pode definir do seguinte modo: *"Duas partículas pequenas, com carga do mesmo tipo, que se encontrem no vácuo separadas de 1 m e que exerçam entre si uma força de repulsão de $10^{-7} \text{ C}^2 \text{ N}$, possuem uma carga idêntica de mais ou menos um Coulomb"*.

Onde $c \simeq 3 \times 10^8 \text{ m/s}$.

Para se ficar com uma ideia do valor da carga correspondente a 1C, esta corresponde a $\approx 5 \times 10^{18} \text{ electrões}$, considerando a carga do *electrão* como a carga fundamental, igual a $\approx 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$.

A carga eléctrica pode ser simbolizada por Q (quando se tratar de uma carga invariável no tempo, ou seja, constante), ou por $q(t)$ designando o valor instantâneo da carga.

As cargas eléctricas podem ser de dois tipos: *cargas positivas e cargas negativas*.

Experimentalmente verifica-se que as forças electroestáticas entre as cargas têm o seu sentido dependente da natureza das cargas em presença. Assim:

- Quando as cargas são da mesma natureza (ambas positivas ou negativas) a força que se estabelece entre elas é de *repulsão*.

- Quando acontece o contrário ou seja, as cargas de natureza diferente, a força que se estabelece será de *atração*.

1.1 Carga eléctrica

1.1.1 Definição

A presença de cargas eléctricas é constatada através da existência de forças (atractivas e repulsivas) entre as mesmas.

A força entre cargas iguais é repulsiva (figura 1) e entre cargas diferentes é atractiva (figura 2). Esta força actua segundo a linha que une as cargas.

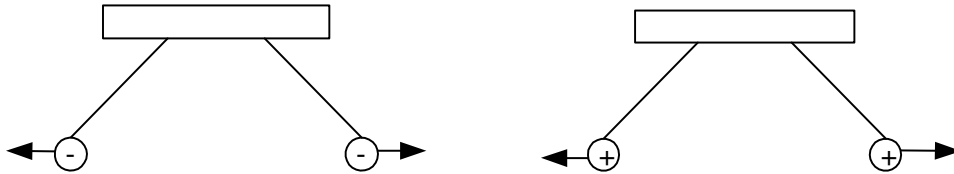


Figura 1: Forças entre cargas iguais

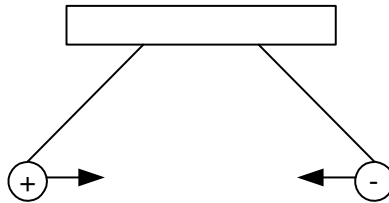


Figura 2: Forças entre cargas diferentes

1.1.2 Força entre cargas eléctricas

A força entre duas cargas eléctricas é inversamente proporcional ao quadrado da distância que as separa. admitindo esferas de massas iguais e tipos de cargas também iguais e fios de seda desprezáveis.

$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

r - distância entre os centros das duas esferas.

A força entre duas cargas eléctricas é proporcional ao produto das suas quantidades. (figura 3)

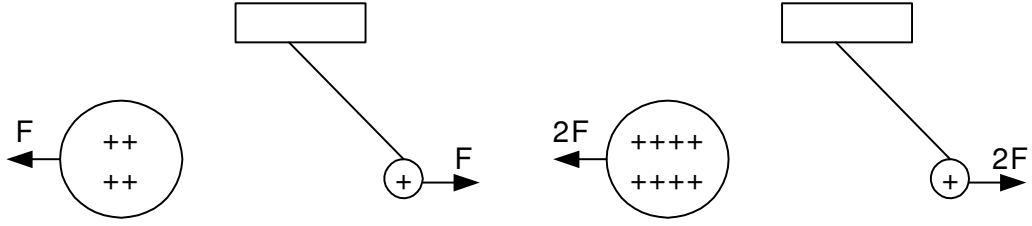


Figura 3: Forças proporcionais ao produto das cargas

$$F \propto q_1 \cdot q_2$$

Combinando as duas expressões anteriores,

$$F \propto \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

1.2 Princípio da sobreposição

Considerando várias cargas do mesmo tipo (todas positivas ou negativas). Sendo F_{ij} a força que actua na carga q_i devido à carga q_j , e \vec{e}_{ij} o vector unitário segundo r_{ij} .

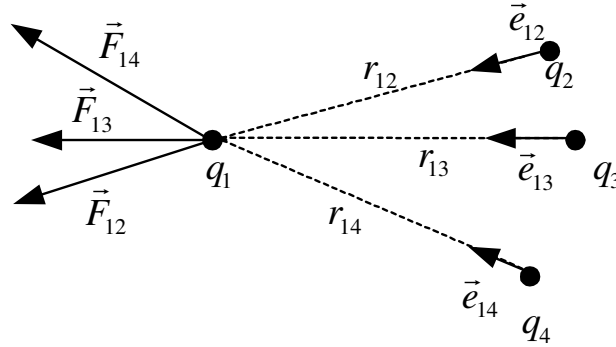


Figura 4: Forças exercidas sobre uma carga devido a uma distribuição de cargas

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14}$$

$$\vec{F}_1 \propto \frac{q_1 * q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{12} + \frac{q_1 * q_3}{r_{13}^2} \vec{e}_{13} + \frac{q_1 * q_4}{r_{14}^2} \vec{e}_{14}$$

\vec{F}_1 é a força total em q_1 devido às restantes cargas q_2, q_3, q_4 .

1.3 Lei de Coulomb

1.3.1 Distribuição discreta de cargas

A força electrostática entre duas cargas pontuais é proporcional às cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância.

$$\vec{F}_{12} = K * \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{12}$$

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{12}$$

ϵ_0 permissividade eléctrica, ou constante dieléctrica do vácuo $\left(\approx 8,85 * 10^{-12} \frac{C^2}{N * m^2}\right)$

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 * 10^9 \left(\frac{N * m^2}{C^2}\right)$$

Se considerarmos várias cargas pontuais a força que se exerce sobre uma delas é a soma vectorial das forças que cada uma das cargas de per si exerce sobre ela. Lei de Coulomb para n cargas pontuais:

$$\vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}^2} \vec{e}_{ij}$$

1.3.2 Exemplos de cálculo da força electrostática

Força electrostática entre duas cargas pontuais Consideremos a força electrostática entre duas cargas pontuais.

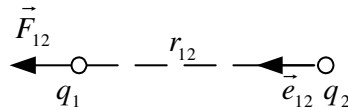


Figura 5: Força exercida sobre uma carga devido a outra carga pontual

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{12}$$

onde \vec{e}_{12} é versor que dá o sentido e direcção da força \vec{F}_{12} .

O módulo da força é:

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}$$

Em termos de sentido: Para cargas do mesmo sinal a força terá o sentido de $q_2 \rightarrow q_1$, para cargas de sinal contrário a força terá o sentido inverso, ou seja, de $q_1 \rightarrow q_2$.

2 Campo eléctrico

2.1 Definição

Definição de campo eléctrico: É uma região do espaço onde existe uma ou mais cargas eléctricas e na qual se exerce uma força electrostática de atracção ou repulsão sobre outra qualquer carga.

Designa-se q_0 como carga de teste. Esta carga deve ter um valor bastante inferior a qualquer das cargas que criam o campo eléctrico.

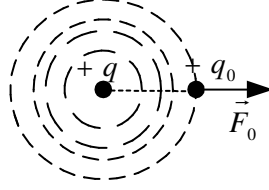


Figura 6:

Em termos quantitativos define-se vector campo eléctrico \vec{E} , como sendo o quociente entre a força electrostática \vec{F}_0 que se exerce sobre a carga de teste q_0 e a própria carga.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0} = \frac{[N]}{[C]}$$

2.2 Campo eléctrico devido a cargas pontuais

O campo eléctrico criado num ponto P devido a uma distribuição discreta de cargas pontuais corresponde à soma dos vectores que representam os campos eléctricos criados por cada uma das cargas de per si.

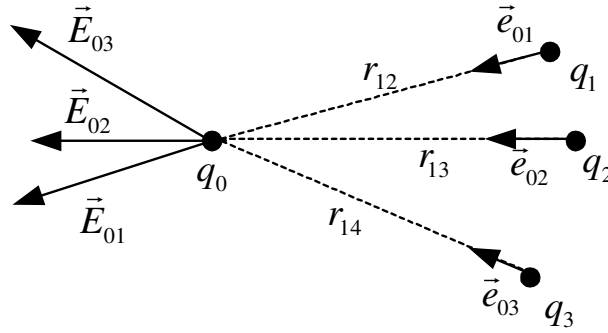


Figura 7:

Se colocarmos uma carga de teste q_0 numa região do espaço onde existem outras cargas q_1 , q_2 , q_3 , sobre a carga q_0 vai-se exercer uma força \vec{F}_0 que corresponde à soma vectorial das forças que cada carga exerce sobre q_0 .

$$\vec{F}_0 = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_{01}^2} \vec{e}_{01} + \frac{q_2}{r_{02}^2} \vec{e}_{02} + \frac{q_3}{r_{03}^2} \vec{e}_{03} \right)$$

De forma que o campo eléctrico no ponto P onde se encontra a carga de teste é dado pela seguinte expressão:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_{01}^2} \vec{e}_{01} + \frac{q_2}{r_{02}^2} \vec{e}_{02} + \frac{q_3}{r_{03}^2} \vec{e}_{03} \right) \frac{[N]}{[C]}$$

Generalizando para n cargas pontuais:

$$\vec{F}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_0 \cdot q_i}{r_{0i}^2} \vec{e}_{0i}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_{0i}^2} \vec{e}_{0i} \frac{[N]}{[C]}$$

2.3 Linhas de força do campo eléctrico

As linhas de força de um qualquer campo são as linhas segundo as quais o campo actua. No caso do campo eléctrico as linhas de força têm as seguintes características:

1. As linhas de força têm origem nas cargas positivas e terminam nas cargas negativas.
2. As linhas de força são linhas contínuas excepto nas fontes (cargas positivas) e nos pontos em que terminam (cargas negativas).
3. O número de linhas de força é proporcional ao valor absoluto das cargas, isto é o número de linhas de força é tanto maior quanto maior forem as cargas que criam o campo eléctrico, e inversamente.
4. O sentido das linhas de força é em todos os pontos o mesmo do campo eléctrico, isto é, o campo eléctrico actua segundo as linhas de força.
5. A densidade das linhas de força é a medida do campo eléctrico.

Nas figuras seguintes podemos ver o traçado das linhas de força para determinadas situações de carga.

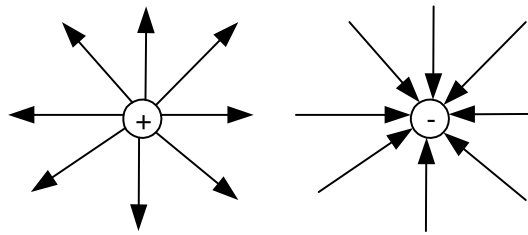


Figura 8: Linhas de força para cargas pontuais isoladas

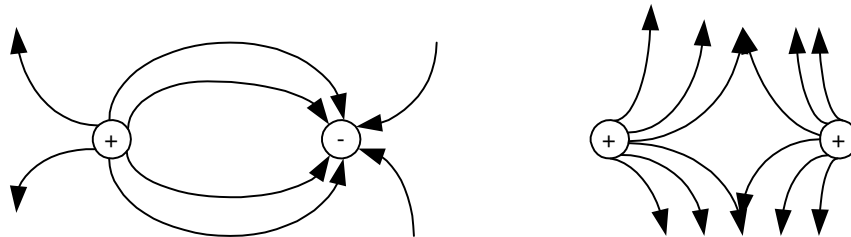


Figura 9: Linhas de força em associações de cargas

2.3.1 Cálculo do número de linhas de força associadas a uma carga eléctrica Q

A intensidade do campo eléctrico é igual à densidade das linhas de força. A densidade das linhas de força corresponde ao número de linhas de força por unidade de área perpendicular às linhas de força.

Podemos, a partir destes conceitos, calcular o número de linhas de força originadas pela unidade de carga.

Consideremos o campo eléctrico devido à carga $+q$ num ponto P a uma distância r dessa carga (Figura 10).

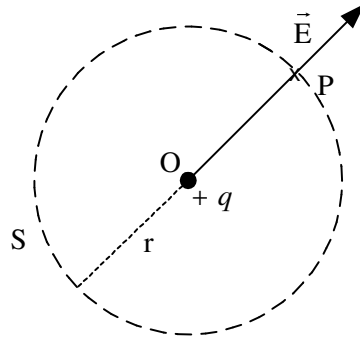


Figura 10: Campo eléctrico num ponto P devido a uma carga pontual

O campo eléctrico em P é:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

Admitindo que $r = 1$, então,

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q$$

A densidade das linhas de força é igual ao campo eléctrico. Como o número total N de linhas de força que sai de $+q$ corresponde ao número de linhas de força que atravessam a superfície que contém a carga e que passa por P .

$$N = \text{densidade de linhas de força} \times \text{área total}$$

A área total corresponde à área duma superfície esférica de raio igual à unidade.

$$N = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

O número de linhas de força gerados por uma carga $+q$ é igual ao quociente entre a carga e permitividade dieléctrica do vácuo.

Se consideramos a carga unitária o número de linhas de força é igual ao inverso da permitividade dieléctrica do vácuo. Ou seja, o número de linhas de força que saem ou entram numa carga de 1C é igual a $1/\epsilon_0$.

2.4 Cálculo de campos eléctricos

2.4.1 Campo eléctrico num ponto devido a duas cargas pontuais

Considere a distribuição de carga ilustrada na figura seguinte.

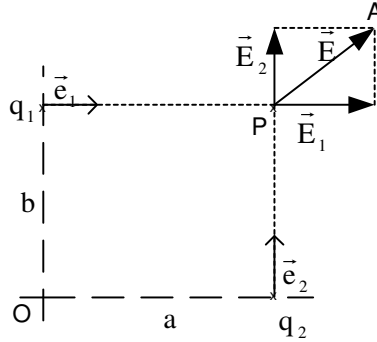


Figura 11: Campo eléctrico no ponto P

O campo eléctrico no ponto P será :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{a^2} \vec{e}_1 + \frac{q_2}{b^2} \vec{e}_2 \right)$$

Onde \vec{e}_1 e \vec{e}_2 , são os vectores unitários que indicam a direcção e o sentido dos campos eléctricos E_1 e E_2 . Em módulo temos que:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\left(\frac{q_1}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{q_2}{b^2}\right)^2}$$

A direcção do vector campor eléctrico \vec{E} é dada pelo ângulo θ .

$$\text{tg}\theta = \frac{E_2}{E_1} = \frac{q_2 \cdot a^2}{q_1 \cdot b^2}$$

O sentido do vector \vec{E} é o da diagonal do paralelogramo formado pelos campos eléctricos parciais.

2.5 Distribuição das cargas nos condutores

Os materiais podem dividir-se em duas classes: *condutores* e *dieléctricos*. Os condutores apresentam grande facilidade de transferência de carga no seu interior. Exemplo os metais. Nestes os electrões das duas últimas órbitas são facilmente removíveis e movimentam-se livremente no interior do condutor. São os chamados electrões livres. Os dieléctricos não possuem electrões livres.

Quanto à electrização e à consequente distribuição de cargas nos condutores podemos atestar a seguinte conclusão: "Nos materiais condutores as cargas eléctricas ocupam as posições mais exteriores, ou seja, distribuem-se à periferia". Este fenómeno resulta das repulsões mútuas entre as próprias cargas eléctricas que se afastam umas das outras até atingirem uma distribuição de equilíbrio.

Isto pode ser verificado através de uma pequena experiência. Se tivermos uma esfera oca, carregada electricamente e a atravessarmos com uma barra de material condutor sem carga, ao retirarmos a barra verificamos que a mesma permanece descarregada. Se tocarmos com a barra

no exterior da esfera esta electrizar-se-á. Esta electrização dá-se por contacto, para além de verificar não haver cargas no interior da esfera para se transferirem para a barra metálica.

Outra forma de electrização é por indução.

Tomemos um corpo carregado com uma carga positiva e aproximem-mo-lo de um condutor neutro. Neste condutor aparecerão as chamadas cargas induzidas sendo as cargas negativas mais próximas do corpo carregado positivamente. As cargas positivas neste corpo ficarão na extremidade oposta. Ligando esta extremidade do condutor à terra as cargas atrairão da terra electrões até neutralizarem esta zona. Interrompendo a ligação à terra e afastando o condutor carregado, o condutor que inicialmente estava descarregado ficará com cargas negativas em excesso, ou seja, fica carregado negativamente.

3 Lei de Gauss

3.1 Fluxo eléctrico

Considere-se uma superfície S numa região em que existe um campo eléctrico \vec{E} . Seleccionemos um elemento de área dS e \vec{n} o vector unitário à superfície no ponto P como se indica na figura 12, que forma um ângulo θ com a direcção do campo no mesmo ponto.

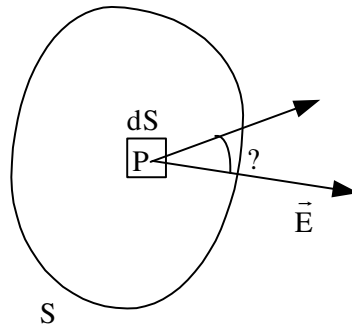


Figura 12: Campo eléctrico num ponto P de um elemento de superfície dS

Se se associar o vector \vec{n} com o elemento de superfície dS definimos o vector $d\vec{S} = dS\vec{n}$. O sentido deste vector será o da normal à superfície apontando para fora.

$$d\vec{S} = dS\vec{n}$$

Define-se fluxo do vector \vec{E} através de dS como sendo:

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Como o módulo do vector campo eléctrico \vec{E} dá a densidade das linhas de força o produto $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ dará o total de linhas de força que atravessam o elemento de superfície dS .

O fluxo total do vector campo eléctrico através da superfície S é:

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

tratando-se de uma superfície fechada:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Este fluxo dá-nos o total de linhas de força através da superfície S . Convenciona-se que o fluxo é positivo se as linhas de força *saem*, ou seja, quando o fluxo tiver o sentido positivo de \vec{n} . Ao contrário o fluxo será negativo.

3.2 Lei de Gauss

É uma lei que é válida para campos de força vectoriais. A sua expressão matemática para conjuntos discretos de cargas pontuais é:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\epsilon_0}$$

Como já se disse atrás o fluxo eléctrico corresponde ao número total de linhas de força que emergem de S . Por outro lado como vimos quando da definição das linhas de força duma carga $+q$ sai um total de linhas de força igual $\frac{q}{\epsilon_0}$, os dois membros têm o mesmo significado físico.

Podemos enunciar a lei de Gauss do seguinte modo: "O fluxo do campo eléctrico através duma superfície fechada é igual ao somatório das cargas envolvidas por essa superfície a dividir por ϵ_0 ."

Se a carga for exterior à superfície o fluxo correspondente será zero. As linhas de força criadas por essas cargas atravessam a superfície duas vezes, entram e saem segundo o mesmo ângulo sólido, pelo que temos dois fluxos iguais e de sinais contrários.

Se a carga no interior da superfície tiver uma distribuição contínua, apresentando numa situação genérica uma densidade volumétrica ρ a expressão passa a ser a seguinte:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

onde V é o volume limitado pela superfície S .

3.2.1 Cálculo de campos eléctricos utilizando a lei de Gauss

Quando calculamos o campo eléctrico com a aplicação da lei de Gauss a principal dificuldade é definir uma superfície que envolva as cargas. Esta superfície deverá ser simétrica relativamente às cargas e deverá conter o ponto onde se quer calcular o campo eléctrico. Estas superfícies simétricas são chamadas *superfícies gaussianas*. O cálculo do campo eléctrico nestas condições é bastante mais simples do que se se utilizar a definição de campo eléctrico.

Campo eléctrico de uma carga pontual Considere a figura 13.

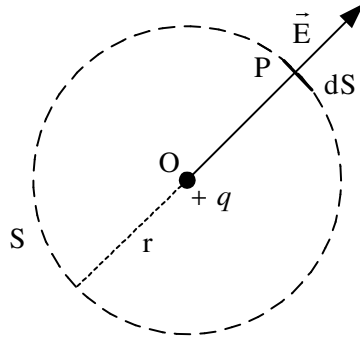


Figura 13: Campo eléctrico num ponto de uma superfície a uma distância r da carga

Esta situação é feita só como forma de ilustração, uma vez que o valor do campo eléctrico resulta directamente da aplicação da fórmula.

A superfície que contém o ponto P e é simétrica relativamente à carga, é uma superfície esférica de raio r . Na expressão da lei de Gauss,

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

os vectores \vec{E} e $d\vec{S}$ são vectores com a mesma direcção e sentido pelo que o ângulo por eles formado é igual a zero, e portanto o $\cos\theta = 1$, assim:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E \cdot dS$$

Por outro lado, o módulo do campo eléctrico é o mesmo em todos os pontos, devido à simetria.

$$\oint_S E \cdot dS = E \oint_S dS = E(4\pi r^2)$$

Igualando os dois membros,

$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

ou seja,

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

4 Potencial Eléctrico

4.1 Trabalho e Energia Potencial

Consideremos uma partícula que é deslocada a partir da posição A até uma outra posição B , através da solicitação de uma força \vec{F} .

Define-se o trabalho elementar efectuado por \vec{F} para deslocar a partícula de uma distância elementar dl , através da seguinte expressão:

$$dW = F \cdot dl \cos \alpha$$

sendo α o ângulo entre a direcção da força e a direcção do deslocamento. O trabalho total para deslocar a partícula de A para B é:

$$W_{AB} = \int_A^B F \cdot dl \cdot \cos \alpha$$

ou seja:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Quanto ao conceito de energia potencial no campo gravitacional da terra, temos que se transportarmos um corpo de massa m duma posição A para outra posição B , caracterizando-se cada uma delas por uma distância à superfície da terra, então haverá uma diferença de energia potencial. Assumindo-se que a distância de B à superfície é dada por h_B e a distância de A à superfície é dada por h_A , o trabalho realizado contra o campo gravitacional é:

$$W_{AB} = m \cdot g(h_B - h_A) = mgh$$

Este trabalho corresponde ao ganho de energia potencial do corpo de massa m .

Podemos ainda definir diferença de potencial gravitacional entre A e B , como sendo o trabalho necessário para transportar a unidade de massa de A para B .

$$P_{AB} = g(h_B - h_A) = gh$$

Em termos do campo eléctrico podemos definir os mesmos conceitos. Se considerarmos um campo eléctrico criado por uma carga Q localizada num ponto, o trabalho realizado por esse campo para transportar uma carga q duma posição A para outra posição B (figura seguinte) é:

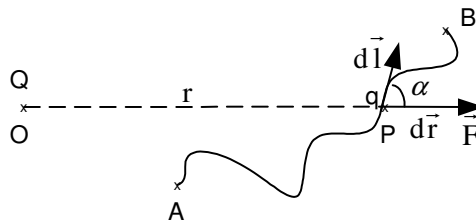


Figura 14: Trabalho realizado pelo campo para transportar uma carga do ponto A para o ponto B

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Como,

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

temos,

$$W_{AB} = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

ou seja,

$$W_{AB} = q \int_A^B E \cdot dl \cdot \cos \alpha$$

onde,

$$dr = dl \cdot \cos \alpha$$
$$W_{AB} = q \int_A^B E \cdot dr$$

O campo eléctrico associado à carga Q é por definição:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Substituindo,

$$W_{AB} = \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{dr}{r^2}$$

Fazendo a integração

$$W_{AB} = \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

as distâncias r_A e r_B são as distâncias da origem do campo até A e B respectivamente. Podemos concluir daqui que o trabalho realizado pelo campo para transportar a carga q de A para B, não depende do caminho e só depende das posições inicial e final. Um campo de forças em que isto acontece diz-se **conservativo**.

Se calcularmos o trabalho a realizar por uma fonte externa para deslocar a carga desde o ponto B até ao ponto A é assumido que este trabalho é feito contra o campo eléctrico pelo que a força terá sentido contrário. Assim a expressão desse trabalho é:

$$W_{BA} = - \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{l}$$
$$W_{BA} = -q \int_B^A E \cdot dl \cdot \cos \alpha$$

Sendo que $d\vec{r}$ aponta no sentido oposto,

$$-dr = dl \cdot \cos \alpha$$
$$W_{BA} = q \int_B^A E \cdot dr$$

Fazendo o desenvolvimento,

$$W_{BA} = \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \int_B^A \frac{dr}{r^2}$$

então,

$$W_{BA} = \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

Desta forma verifica-se que

$$W = W_{AB} + W_{BA} = 0$$

ou seja o trabalho total para realizar um percurso fechado é igual a zero. Por outras palavras, se se deslocar uma carga dum ponto até outro e depois se regressar ao primeiro o trabalho realizado pelo campo ao longo de um percurso fechado é nulo. Num campo conservativo o trabalho realizado num percurso fechado é zero.

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

4.1.1 Exemplo

Se o campo eléctrico numa região é igual a

$$\vec{E} = y\vec{x} + x\vec{y}$$

Calcular:

a) O trabalho necessário para levar uma carga positiva de 1C ao longo de uma recta desde a origem até ao ponto P(1,1,0) com as coordenadas em metros.

b) O trabalho sendo a trajectória dada pela equação $y = x^2$.

Resolução:

a)

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Como $q = 1C$ e $d\vec{l} = dx\vec{x} + dy\vec{y}$

$$W = \int_A^B (y\vec{x} + x\vec{y}) \cdot (dx\vec{x} + dy\vec{y}) = \int_0^1 ydx + \int_0^1 xdy$$

Como o percurso é a recta $y = x$

$$W = \int_0^1 xdx + \int_0^1 xdx = 2 \int_0^1 xdx = 2 \left[\frac{1}{2} \right] = 1J$$

b) Se o percurso for $y = x^2$ e $dy = 2xdx$

$$W = \int_0^1 ydx + \int_0^1 xdy$$

$$W = \int_0^1 x^2dx + \int_0^1 x2xdx = 3 \int_0^1 x^2dx$$

$$W = 3 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 1J$$

Destes resultados concluímos que o trabalho realizado para transportar a unidade de carga de um ponto para outro é independente do percurso escolhido.

4.2 Energia Potencial e Diferença de Potencial

A energia potencial de um qualquer sistema é a energia que o sistema possui devido à sua posição. Tal como vimos atrás o trabalho realizado pelo campo para transportar uma carga eléctrica q desde a posição A até à posição B é:

$$W_{AB} = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

A diferença entre a energia potencial entre dois pontos quaisquer é o trabalho realizado pelas forças exteriores ao campo para transportar uma carga dum ponto para outro.

$$W_{BA} = E_{PB} - E_{PA} = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

onde $E_{PB} \rightarrow$ é a energia potencial em B, e $E_{PA} \rightarrow$ é a energia potencial em A.

Define-se diferença de potencial entre dois pontos A e B, através da expressão,

$$\frac{E_{PB} - E_{PA}}{q} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

”A diferença de potencial entre dois pontos A e B é igual ao trabalho das forças externas, realizado contra o campo, para transportar a unidade de carga de A para B.”

$$\frac{E_{PB}}{q} - \frac{E_{PA}}{q} = V_B - V_A = V_{BA}$$

$$V_{BA} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

A escolha de potencial de referência é arbitrário. Em termos de um potencial de referência considera-se que o potencial do infinito é zero. Em termos práticos considera-se a terra como tendo um potencial zero. Sempre que a terra aparece como elemento de um problema associa-se-lhe o potencial de referência igual a zero. Se não estiver explícito o potencial zero será no infinito. Assim se $A \rightarrow \infty$ $V_A = 0$, deste modo o potencial num qualquer ponto P é:

$$V_B = - \int_{\infty}^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

O potencial eléctrico exprime-se em volts, que corresponde a Joules/Coulomb.

4.3 Cálculo de alguns potenciais

4.3.1 Diferença de potencial entre dois pontos numa região em que existe uma carga pontual

A carga Q está localizada num ponto O e pretende-se calcular a diferença de potencial entre os pontos A e B (ver figura).

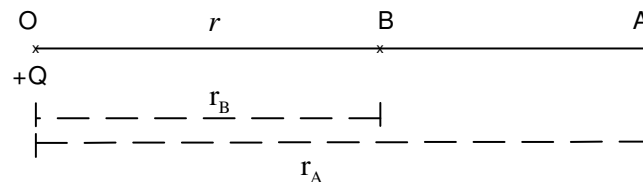


Figura 15:

$$V_{BA} = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Neste caso $d\vec{l} \equiv d\vec{r}$

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_A^B E \cdot dr$$

O vector campo eléctrico está alinhado com o deslocamento. Como,

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

$$V_{BA} = V_B - V_A = - \int_A^B \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot dr = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_A^B$$

$$V_{BA} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

Se $r_A \rightarrow \infty$ então $\frac{1}{r_A} \rightarrow 0$

$$V_B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_B}$$

Duma forma geral

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

A variação do potencial com a distância à carga que cria o campo eléctrico é mostrada na figura seguinte.

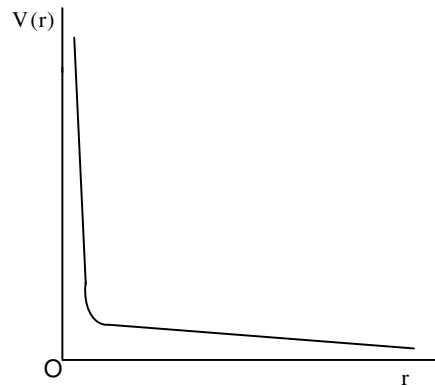


Figura 16: Variação do potencial com a distância

4.3.2 Potencial num ponto devido a duas cargas pontuais

Considere-se o sistema da figura seguinte.

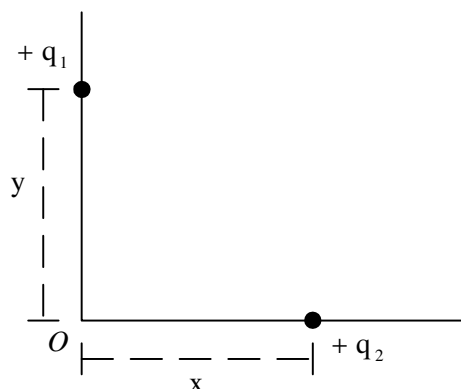


Figura 17:

Para calcular o potencial em O, uma vez que os potenciais são grandezas escalares podem ser somados algebricamente. Calculam-se os potenciais devido a cada uma das cargas e depois somam-se.

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{y}$$

$$V_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{y} + \frac{q_2}{x} \right)$$

Generalizando para n cargas pontuais:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}$$

5 Condensadores e dielétricos

5.1 Condensadores

Considere-se um dispositivo constituído por dois condutores planos próximos um do outro e isolados entre si. É possível transferir uma certa quantidade de carga de um para o outro se forem ligados aos terminais de uma pilha. Um dos condutores ficará carregado com uma carga $-q$ e o outro com uma carga $+q$, pelo que se estabelece entre eles uma diferença de potencial proporcional à carga. Este dispositivo é designado como condensador.

Este dispositivo prova que dois condutores em presença um do outro permite a transferência de grandes quantidades de carga com pequenas diferenças de potencial.

Assim, para carregarmos um condensador devemos ligar aos seus terminais uma fonte de tensão. A fonte realiza o trabalho de transportar de uma placa para a outra a carga $-q$ ficando a placa donde esta carga foi retirada carregada com uma carga igual e de sinal contrário $+q$. Durante o período que demora esta operação, que é geralmente de pequena duração, há uma corrente eléctrica de uma placa para a outra através da fonte, visto que o meio entre as placas é isolante. Esta corrente conhecida como corrente de carga cessa quando a diferença de potencial entre os condutores for igual à da fonte (ver figura).

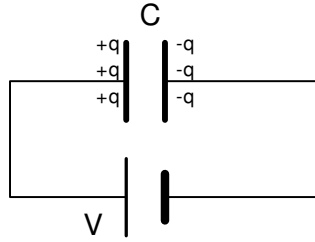


Figura 18: Condensador carregado

A diferença de potencial entre os dois condutores é proporcional à carga transferida.

$$V \propto q$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{C}q \\ C &= qV \end{aligned}$$

A constante de proporcionalidade C é designada por *capacidade*. A capacidade que corresponde à possibilidade de armazenar cargas eléctricas. Para a mesma diferença de potencial quanto maior for a capacidade maior será a carga. Em termos formais chama-se carga de um condensador à carga de uma das placas em valor absoluto, pois a carga total é zero. No sistema internacional a capacidade exprime-se em *Farad*.

$$C = \frac{[C]}{[V]} = [F] \text{ Farad}$$

O Farad é uma quantidade muito grande pelo que se usam normalmente submúltiplos.

$$\begin{aligned} 1 \text{ microfarad} &= 1\mu F \\ 1 \text{ picofarad} &= 1pF \end{aligned}$$

5.2 Energia dum condensador

Ao transportar carga de uma placa condutora que está a um potencial mais baixo para outra placa que está a um potencial mais alto, carrega-se o condensador. Este trabalho é realizado pela fonte, que para este efeito consome energia. Consideremos o processo de carga dum condensador em que há uma transferência de uma carga q' duma placa para outra durante um instante. A capacidade do condensador realciona-se com a carga q' através da seguinte expressão:

$$C = \frac{q'}{V_{BA}}$$

Num instante posterior será necessária a realização de um trabalho dW para a transferência da carga dq' .

$$\begin{aligned} dW &= dq' \cdot V_{BA} \\ dW &= \frac{q' \cdot dq'}{C} \end{aligned}$$

O trabalho total realizado na transferência da carga q , é:

$$W = \frac{1}{C} \int_0^q q' dq'$$

$$W = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

Se escrevermos a expressão em função de V , temos:

$$W = \frac{1}{2} CV^2$$

Assim, o trabalho efectuado pela fonte corresponde à energia armazenada no condensador, energia essa que mais tarde pode ser utilizada quando se liga o condensador a um circuito.

5.3 Cálculo de capacidades

5.3.1 Condensador de placas paralelas

Na figura seguinte é ilustrado um condensador formado por duas placas paralelas com a mesma área S e separadas por ar a uma distância d .

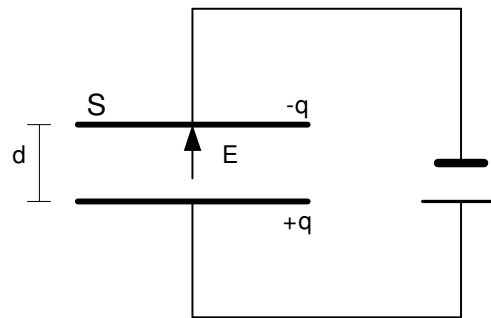


Figura 19: Condensador de placas paralelas

Admite-se que uma vez que a distância entre placas é pequena que o campo eléctrico na região entre as placas é constante.

$$C = \frac{q}{V_{AB}}$$

O campo eléctrico calculado pela lei de Gauss é:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

onde σ representa a densidade superficial de carga das placas. Como as cargas estão distribuídas de um modo uniforme temos que:

$$\sigma = \frac{q}{S}$$

$$q = \varepsilon_0 ES$$

Por outro lado por definição de potencial,

$$V_{AB} = V_A - V_B = - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = -E \int_B^A dl$$

dado que o campo eléctrico \vec{E} e o deslocamento $d\vec{l}$ estão alinhados.

$$V_{AB} = -E [l]_B^A = -E [l_A - l_B] = E [l_B - l_A] = E \cdot d$$

Assim:

$$C = \frac{\varepsilon_0 E S}{E \cdot d} = \frac{\varepsilon_0 \cdot S}{d}$$

"A capacidade de um condensador de placas paralelas quando existe ar entre as placas é directamente proporcional à área das placas e inversamente proporcional à distância entre elas".

5.4 Associação de condensadores

5.4.1 Associação de condensadores em paralelo

Na figura seguinte é apresentada a associação de três condensadores em paralelo.

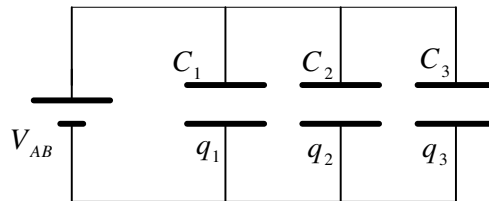


Figura 20: Associação de condensadores em paralelo

A diferença de potencial é a mesma em todos eles. A capacidade equivalente de uma associação de três condensadores em paralelo, obtém-se do seguinte modo:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{q_1}{V_{AB}} \\ C_2 &= \frac{q_2}{V_{AB}} \\ C_3 &= \frac{q_3}{V_{AB}} \end{aligned}$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = V_{AB}(C_1 + C_2 + C_3)$$

$$Q = q_1 + q_2 + q_3$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3$$

$$Q = V_{AB} \cdot C_{eq}$$

Para n condensadores têm-se que:

$$Q = \sum_{i=1}^n q_i$$

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^n C_i$$

Numa associação de condensadores em paralelo a carga do condensador equivalente é igual ao somatório das cargas dos condensadores associados. Da mesma forma a capacidade equivalente é igual ao somatório das capacidades associadas.

5.4.2 Associação de condensadores em série

Na figura seguinte é apresentada a associação de três condensadores em série.

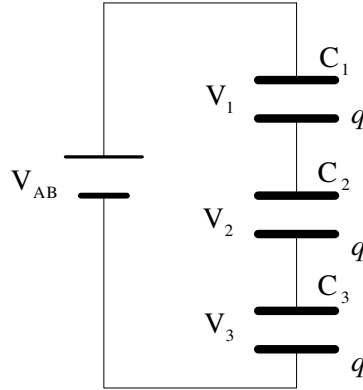


Figura 21: Associação de condensadores em série

A característica fundamental da associação em série é que a diferença de potencial em cada um dos condensadores é diferente, mas a carga é igual.

$$C_1 = \frac{q}{V_1}$$

$$C_2 = \frac{q}{V_2}$$

$$C_3 = \frac{q}{V_3}$$

$$V_1 + V_2 + V_3 = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)$$

$$V_{AB} = V_1 + V_2 + V_3$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

$$V_{AB} = q \cdot \frac{1}{C_{eq}}$$

Generalizando,

$$V_{AB} = \sum_{i=1}^n V_i$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

Numa associação série de condensadores a tensão aos terminais do condensador equivalente é igual ao somatório das tensões aos terminais dos condensadores associados. Do mesmo modo o inverso da capacidade equivalente é igual ao somatório dos inversos das capacidades associadas.

5.5 Dieléctricos

São materiais que não deixam passar a corrente eléctrica, porque para além de terem poucos electrões livres estes não se conseguem deslocar no interior do dieléctrico.

Quando estudámos o condensador de placas paralelas considerámos que entre as suas placas existe ar ou vácuo. Se medirmos com um voltímetro a tensão entre placas de um condensador carregado, o valor lido V_0 está relacionado com a carga do condensador q e com a sua capacidade C_0 através da seguinte expressão:

$$C_0 = \frac{q}{V_0}$$

Consideremos agora que entre as placas do condensador se coloca um qualquer material dieléctrico que não o ar ou o vácuo, de modo a que a carga permaneça a mesma. Designando por C_d e V_d respectivamente a capacidade do condensador e a tensão entre placas nesta nova situação, então:

$$C_0 \cdot V_0 = C_d \cdot V_d$$

No entanto, a leitura no voltímetro mostra que $V_0 > V_d$ por isso concluiu-se que:

$$C_d > C_0$$

ou seja: a capacidade de um condensador contendo um determinado material dieléctrico entre as placas é maior do que a capacidade do mesmo condensador se em vez do material dieléctrico estiver o ar. Pode-se escrever:

$$\begin{aligned} V_0 &= KV_d \\ C_d &= KC_0 \end{aligned}$$

Assim, a capacidade de um determinado condensador é aumentada de um factor K quando é colocado um material dieléctrico entre placas. Este factor é não dimensional e designa-se por *constante dieléctrica*.

Já vimos atrás que a capacidade de um condensador de placas paralelas em função das suas dimensões é dada pela expressão:

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 \cdot S}{d}$$

quando o dieléctrico é o ar. Se o dieléctrico for outro qualquer material, tem-se:

$$C_d = \frac{K \cdot \varepsilon_0 \cdot S}{d}$$

Podemos ver uma tabela com a constante dieléctrica de alguns materiais.

<i>Ar</i>	=	1,00054
<i>Vácuo</i>	=	1,00000
<i>Papel</i>	=	3,5
<i>Porcelana</i>	=	6,5
<i>Polietileno</i>	=	2,3

Capítulo II

Conteúdo

I	CORRENTE CONTÍNUA	3
1	Sistemas de Unidades	3
1.1	Sistema Internacional de Unidades (SI)	3
1.1.1	Notação científica	3
1.1.2	Prefixos (Unidades)	4
2	Corrente eléctrica	4
2.1	Introdução	4
2.2	Tensão eléctrica	7
2.2.1	Baterias	8
2.3	Potência eléctrica	8
2.4	Energia eléctrica	9
2.5	Resistência eléctrica	9
2.5.1	Resistência em função da geometria do condutor	10
2.5.2	Condutância	10
2.5.3	Efeito da temperatura	10
2.6	Lei de Ohm	11
2.7	Efeito térmico da corrente	12
2.8	Resistências práticas	13
2.9	Associação de resistências	14
2.9.1	Associação série	14
2.9.2	Associação paralelo	15
2.10	Força-electromotriz	17
2.11	Fontes de energia eléctrica	17
2.11.1	Fonte de tensão ideal	17
2.11.2	Fonte de tensão prática	18
2.11.3	Fonte de corrente ideal	19
2.11.4	Fonte de corrente prática	19
2.11.5	Associação de fontes em série	20
2.11.6	Associação de fontes em paralelo	22
2.11.7	Associação mista de fontes	22
2.11.8	Fontes independentes e fontes dependentes	23
2.11.9	Fontes dependentes	23
3	Análise de circuitos em corrente contínua	24
3.1	Constituição de um circuito	24
3.1.1	Rede eléctrica	24
3.1.2	Circuito eléctrico	24
3.2	Circuitos equivalentes Δ/\times e \times/Δ	25
3.2.1	Transformação Δ/\times	25
3.2.2	Transformação \times/Δ	26
3.3	Circuitos em ponte	27
3.3.1	Ponte de wheatstone	28
3.4	Leis de Kichhoff	29
3.4.1	1ª Lei de Kirchhoff	29
3.4.2	2ª Lei de Kirchhoff	29

3.4.3	Exemplos	30
3.5	Divisores de tensão	31
3.5.1	Potencial da terra	34
3.6	Divisores de corrente	35
3.7	Análise nodal	37
3.8	Análise de Malhas	40
3.9	Circuitos equivalentes em corrente contínua	41
3.9.1	Teorema da sobreposição	41
3.10	Teorema de Thèvenin	44
3.10.1	Cálculo da resistência de Thèvenin	46
3.11	Teorema de Norton	50
3.12	Conversão de fontes	53
3.13	Teorema de Millman	55
3.14	Transferência de potência máxima	55
3.15	Sistemas de potência	55
3.16	Sistemas de comunicação e instrumentação	55
3.17	Balanco de potências	57

Parte I

CORRENTE CONTÍNUA

1 Sistemas de Unidades

1.1 Sistema Internacional de Unidades (SI)

Um Sistema Standard de Unidades é de importância primordial para fabricantes, comerciantes e utilizadores.

As unidades descrevem a magnitude duma determinada grandeza, seja eléctrica ou não.

O Sistema Internacional de Unidades (SI) foi baseado no *MKS* (Sistema decimal). As unidades fundamentais são: Metro, Kilograma e Segundo. Enquanto o sistema *cgs* é um sistema onde as unidades fundamentais são: centímetro, grama e segundo. O sistema Inglês tem como unidades: foot, pound e second.

No sistema MKS as três unidades referidas juntamente com o Coulomb (unidade básica de carga eléctrica) e o °K (grau Kelvin) ou °C (grau Celsius) para a temperatura, constituem as unidades principais a partir das quais se podem derivar as restantes.

Como existem quantidades que variam imenso em dimensão têm de ser usados múltiplos e submúltiplos das diferentes unidades. Para representar os múltiplos e submúltiplos utilizam-se potências de 10, as quais podem ser substituídas por nomes.

1.1.1 Notação científica

$$2.300.500 = 2,3005 * 10^6$$

$$0,0000307 = 3,07 * 10^{-5}$$

Adição e subtracção Utiliza a mesma potência de 10.

Exemplo:

$$\begin{aligned} 0,007 + 0,00035 - 0,0101 &= 7,0 * 10^{-3} + 0,35 * 10^{-3} - 10,1 * 10^{-3} \\ &= -2,75 * 10^{-3} \end{aligned}$$

Multiplicação Os expoentes das diferentes potências de 10 são adicionados algebricamente.

Exemplo:

$$\begin{aligned} (2,2 * 10^5) * (3,0 * 10^{-2}) * (1,9 * 10^3) &= (2,2 * 3,0 * 1,9) * 10^{5-2+3} \\ &= 1,254 * 10^7 \end{aligned}$$

Divisão Os expoentes são subtraídos

Exemplo:

$$\frac{6,8 * 10^3 * 7,5 * 10^{-6}}{1,5 * 10^{-2} * 8,0 * 10^4} = \frac{6,8 * 7,5}{1,5 * 8,0} * 10^{-5} = 4,25 * 10^{-5}$$

1.1.2 Prefixos (Unidades)

$$\begin{aligned}10^{12} &= \text{Tera} = T \\10^9 &= \text{Giga} = G \\10^6 &= \text{Mega} = M \\10^3 &= \text{Kilo} = K \\10^{-2} &= \text{centi} = c \\10^{-3} &= \text{mili} = m \\10^{-6} &= \text{micro} = \mu \\10^{-9} &= \text{nano} = n \\10^{-12} &= \text{pico} = p\end{aligned}$$

Exemplos:

Converter os prefixos para notação científica e valores numéricos e inversamente.

$$\begin{aligned}10,5MW &= 10,5 * 10^6W = 10.500.000W \\5,7\mu s &= 5,7 * 10^{-6} = 0,0000057s \\0,00025s &= 0,25 * 10^{-3} = 0,25ms \\500.000V &= 500 * 10^3V = 500kV\end{aligned}$$

2 Corrente eléctrica

2.1 Introdução

A corrente eléctrica corresponde ao movimento das cargas eléctricas.

Podem-se distinguir vários tipos de corrente eléctrica correspondentes a movimentos de cargas distintos. Assim têm-se:

Corrente de convecção: Deslocamento das cargas eléctricas em bloco (electrões ou iões). Pode-se também imaginar como sendo o conjunto das cargas estáticas de um corpo que esteja em movimento. Este tipo de corrente ocorre por exemplo nos tubos de raios catódicos.

Corrente de deslocamento: É provocada pelo movimento de cargas eléctricas, ligadas entre si numa forma elástica, de forma a alinharem com a direcção de um campo eléctrico externo. Corresponde ao fenómeno da polarização.

Corrente de condução: Esta forma de corrente é assegurada pelo deslocamento dos electrões de valência num material condutor, enquanto que os iões positivos ocupam na rede constituinte do material posições fixas. Este tipo de corrente é o que irá ser estudado mais profundamente.

Para que num condutor apareça e se mantenha uma corrente é necessário que seja aplicado ao condutor, numa forma continuada, um campo eléctrico, o que equivale a manter uma diferença de potencial no condutor.

Se o campo eléctrico tiver sempre o mesmo sentido obter-se-á uma *corrente contínua* (ver figura seguinte). No caso de o campo eléctrico variar periodicamente de sentido, aparecerá uma *corrente alternada*.

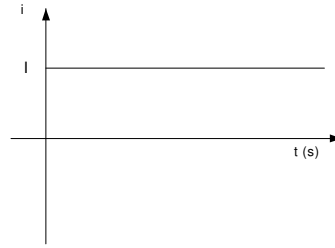


Figura 1: Corrente contínua

A corrente num condutor pode ser definida como sendo a medida da taxa de transferência da carga num condutor, determinada numa qualquer secção desse condutor. À corrente eléctrica está associada uma amplitude e um sentido.

Tomando como referência um qualquer ponto de um condutor, pode-se definir como $q(t)$, como sendo a carga total que passou por esse ponto desde um instante inicial $t = 0$.

Considerando ainda que num intervalo de tempo variando de t a $(t + \Delta t)$, a quantidade de carga transferida no ponto de referência variou de q para $(q + \Delta q)$.

A taxa de transferência de carga através do ponto de referência, para um tempo t , é aproximadamente igual a $\Delta q / \Delta t$ à medida que o intervalo decresce o valor exacto da taxa é dado pela derivada,

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

Assim a corrente instantânea é dada por:

$$i = \frac{dq}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

enquanto que a corrente média é dada por:

$$\langle i \rangle = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

A unidade de medida da corrente é o *ampere* [A]. Esta designação está associada ao nome do físico André Ampère.

$$1A = \frac{1C}{1s} = 1 [C/s]$$

A unidade de medida *ampere* corresponde ao valor da corrente quando a carga de 1C atravessa a secção de um condutor num segundo.

Por outro lado, a carga transferida entre o tempo t_0 e t pode ser representada por:

$$q_{t_0}^t = \int_{t_0}^t i dt$$

Sendo a carga total transferida:

$$q(t) = \int_{t_0}^t i dt + q(t_0)$$

onde $q(t_0)$ é a carga transferida até ao instante $t = t_0$.

Define-se como se disse atrás um *sentido* para a corrente, embora esta seja uma grandeza escalar. Convenciona-se que o sentido positivo da corrente é o do movimento das cargas positivas. Deste modo o sentido da corrente ocorre das regiões de potencial mais elevado para as de potencial mais baixo (ver figura).

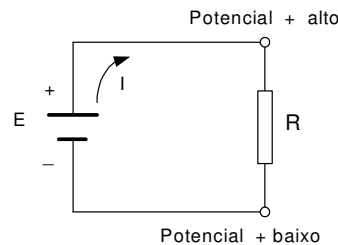


Figura 2: Sentido positivo convencional da corrente num circuito

No caso da corrente em condutores metálicos, onde esta é devida ao movimento de electrões, o seu sentido é o oposto ao sentido convencional.

Nos electrólitos a corrente que resulta do movimento dos iões positivos tem o sentido real coincidente com o sentido convencional.

Considerando que em muitos casos as cargas eléctricas que atravessam uma secção de um condutor não o fazem com uma razão constante, é conveniente introduzir o conceito de *densidade de corrente*, que corresponde à corrente por unidade de área. No Sistema Internacional a unidade de densidade de corrente é o ampere por metro quadrado (A/m^2).

A densidade de corrente é indicada pelo vector \mathbf{j} e definida pela expressão:

$$i = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

se \mathbf{j} é constante,então:

$$i = \mathbf{j} \cdot \mathbf{S}$$

Como se disse atrás a corrente num condutor pode assumir várias formas

- Corrente contínua
- Corrente alternada sinusoidal
- Corrente exponencial
- Corrente sinusoidal amortecida

A movimentação da carga corresponde à transferência de energia.

Exemplos:

Se a carga de $7,5C$ flue num condutor durante $0,5$ minutos, qual o valor da corrente?

$$I = \frac{7,5C}{30s} = 0,25A$$

Sendo a corrente de $5A$, calcular o tempo no qual a carga de $4mC$ flue no condutor.

$$5 = \frac{4 * 10^{-1}}{t}$$

$$t = \frac{4}{5} * 10^{-3} = 0,8ms$$

2.2 Tensão eléctrica

Se se considerar um determinado elemento de um circuito, a corrente pode percorrer esse elemento em dois sentidos opostos. Assume-se que em qualquer dos casos é necessário dispendir energia.

Para movimentar a carga entre dois pontos A e B é necessário a acção de uma força, ou seja, é necessário realizar trabalho.

A realização do trabalho corresponde ao dispêndio de energia por parte das fontes de energia eléctrica. A energia eléctrica resulta da conversão de outra forma de energia, conforme o tipo de fonte. Assim:

Transformação de energia química	Baterias
Transformação de energia mecânica	Geradores
Transformação de energia luminosa	Células fotovoltaicas
Transformação de energia térmica	Células termopares

Define-se diferença de potencial entre dois pontos como o trabalho por unidade de carga necessário para mover a carga entre os dois pontos.

$$V_{AB} = \frac{dW_{AB}}{dq} = \frac{1 [J]}{1 [C]} = 1 [V]$$

A tensão exprime-se em *volts* que corresponde a *Joule/Coulomb*. Em termos de simbologia a tensão é representada por $[v]$ ou $[V]$.

Quando o trabalho realizado para transportar a carga de $1C$ entre dois pontos é igual a $1J$, a diferença de potencial é de $1V$.

Mais especificamente pode-se definir diferença de potencial (tensão eléctrica) aos terminais dum elemento de circuito, como sendo o trabalho necessário para mover uma carga positiva de $1C$ de um terminal para outro.

E – Diferença de energia potencial que também é referido como sendo a "diferença de potencial" ou ainda "tensão".

Recorremos novamente à figura anterior para recordar que o sentido positivo convencional da corrente é do terminal de potencial mais alto para o terminal de potencial mais baixo. A energia potencial fornecida pela fonte perde-se ao atravessar o elemento resistivo da carga. Na prática a corrente entra na resistência no ponto de potencial mais alto e sai no ponto de potencial mais baixo (a queda de tensão faz-se no sentido da corrente), isso corresponde a uma perda de energia potencial através da carga que se converte em calor dissipado no elemento resistivo.

Assim, a energia química da bateria transforma-se em energia eléctrica e esta transforma-se em energia térmica no elemento da carga.

A energia eléctrica fornecida pela fonte corresponde ao transporte das cargas do ponto de potencial mais baixo para o ponto de potencial mais alto.

Há um acréscimo de energia potencial de $-$ para $+$.

Há perda de energia potencial de $+$ para $-$.

Importa estabelecer uma convenção a partir da qual seja possível distinguir quando um elemento activo fornece energia eléctrica ao circuito. Sempre que a corrente sai do terminal positivo da fonte esta fornece energia ao circuito.

Exemplos:

O trabalho necessário para transportar a carga de $50C$ é de $55J$. Qual a tensão que se estabelece?

$$V = \frac{55J}{50C} = 1,1V$$

A corrente de 0,3 A flue num filamento e liberta 9,45J de energia térmica em 5 s. Qual o valor da tensão?

$$I = \frac{Q}{t}$$

$$Q = 0,3 * 5 = 1,5C$$

$$V = \frac{9,45}{1,5} = 6,3V$$

2.2.1 Baterias

A bateria é uma fonte de energia química, armazena uma determinada quantidade de energia.

A carga da bateria e a sua energia estão linearmente relacionadas.

A capacidade de carga mede-se em [A.h]

$$Q = I * t [A.h]$$

O tempo útil de vida é o número de [A.h] (capacidade) a dividir pela corrente que é fornecida.

$$\text{Tempo útil de vida } [h] = \frac{[A.h]}{[A]}$$

Exemplo:

Energia armazenada numa bateria: 1,2MJ

Tensão aos seus terminais: 6V

Corrente que fornece: 4A

Calcular o tempo útil de vida:

$$V = \frac{W}{Q} \rightarrow 6 = \frac{1,2 * 10^6}{Q} \Rightarrow Q = 0,2 * 10^6 C$$

$$1C = 1 [A] * [s] = \frac{1}{3.600} [A.h]$$

$$Q = \frac{200.000}{3.600} = 55,56 [A.h]$$

$$\text{Tempo útil} = \frac{55,56}{4} = 13,89h$$

2.3 Potência eléctrica

A potência eléctrica é a taxa de dispêndio da energia eléctrica, ou seja, é a taxa de variação da energia no tempo.

$$P = \frac{W}{t} = \frac{1 [J]}{1 [s]} = 1 [J/s]$$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{W * Q}{t * Q} = \frac{W}{Q} * \frac{Q}{t} = V * I [W]$$

A unidade em que se exprime a potência é o [W] Watt.

$$1 [W] = 1 [V] * 1 [A] = 1 [V.A] = 1 [J/s]$$

No sistema Britânico utiliza-se como unidade de potência eléctrica 1hp (1 horse power) que vale 736W.

O múltiplo do $[W]$ mais utilizado é o $[kW] = 1000W$.

Exemplos:

Qual a potência fornecida por uma fonte de 30V, que debita uma corrente de 2A?

$$P = 30 * 2 = 60W$$

Qual a corrente que flue numa lâmpada, com uma potência eléctrica de 60W e com uma tensão de 120V?

$$I = \frac{60W}{120V} = 0,5A$$

2.4 Energia eléctrica

A energia eléctrica é consumida a uma taxa que é a potência eléctrica.

As fontes fornecem energia eléctrica para produzir a diferença de potencial necessária para estabelecer a corrente eléctrica.

$$W = P * t = [J/s] * [s] = [J]$$

$$W = V * I * t = V * Q [J]$$

$$1 [J] = 1 [W.s]$$

$$1 [kWh] = 1.000 * 3.600 = 3,6 * 10^6 [J]$$

Exemplo:

Considerando que a energia de 1kWh custa 10 centimos, qual o custo da energia consumida por uma lâmpada de 60W em 5 dias?

$$60W * 5 \text{ dias} = 60 * 5 * 24 = 7,2 \text{ kWh}$$

$$\text{Custo} : 7,2 kWh * 10 = 0,72 \text{ Euros}$$

2.5 Resistência eléctrica

Define-se resistência eléctrica como a oposição que qualquer condutor apresenta à passagem da corrente eléctrica.

As colisões dos electrões com os átomos estacionários que formam a estrutura cristalina do condutor explica a "oposição à passagem da corrente" que se chama "resistência eléctrica" e cujo símbolo é R e se expressa em $[\Omega]$.

Cada material condutor opõe-se à passagem da corrente de forma diferente. A esta característica chama-se ρ e exprime-se $[\Omega.mm^2/m]$.

Através da resistividade é possível agrupar os materiais em termos da sua maior ou menor aptidão para conduzir a corrente eléctrica, ou ainda na óptica da sua real oposição à passagem da corrente. Deste modo temos:

$$\text{Condutores } \rho_{Cu} = 1,6 * 10^{-4} [\Omega.mm^2/m]$$

$$\text{Condutores } \rho_{Al} = 2,8 * 10^{-4} [\Omega.mm^2/m]$$

$$\text{Semicondutores } \rho \simeq 4 * 10^{-1} \text{ a } 4 * 10^3 [\Omega.mm^2/m]$$

$$\text{Isolantes } \rho \simeq 10^{14} \text{ a } 10^{16} [\Omega.mm^2/m]$$

2.5.1 Resistência em função da geometria do condutor

Se se considerar um condutor de comprimento l e secção S , a resistência eléctrica desse condutor é obtida pela seguinte expressão:

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

onde ρ é a resistividade do material do condutor.

Como se disse atrás a resistividade exprime-se em $[\Omega \cdot mm^2/m]$, enquanto a resistência eléctrica se exprime em $[\Omega]$ - Ohms.

Exemplo:

Calcular a resistência a 20°C de um fio de cobre de 1 m com 2 mm de diâmetro.

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = 3,14 mm^2$$

$$R = 1,6 * 10^{-4} * \frac{1}{3,14} = 5,4 * 10^{-3} \Omega$$

2.5.2 Condutância

É a capacidade de conduzir a corrente eléctrica. Corresponde ao inverso da resistência. Exprime-se em $[S]$ Siemens, ou Ω^{-1} , ou ainda \mathcal{U} .

$$G = \frac{1}{\rho} \frac{S}{l} = \sigma \frac{S}{l} [\text{Siemens}]$$

$\sigma = \frac{1}{\rho}$ é chamada a condutividade específica e exprime-se em $[S/m]$

2.5.3 Efeito da temperatura

Nos condutores metálicos a resistência eléctrica aumenta com a temperatura. Nalguns condutores como o carvão passa-se o inverso, e esta característica é aproveitada na utilização específica que se faz do carvão para fins electrotécnicos.

Nos semicondutores também têm uma redução da resistência eléctrica com a temperatura.

No entanto, nos condutores metálicos há um acréscimo da resistência quando a temperatura aumenta. A expressão matemática é a seguinte:

$$R_2 = R_1 [1 + \alpha(T_2 - T_1)]$$

onde:

$R_2 \rightarrow$ é a resistência à temperatura T_2 ;

$R_1 \rightarrow$ é a resistência à temperatura T_1 ;

$\alpha = \frac{1}{T_1 - T_0} ^\circ\text{C}^{-1} > 0 \rightarrow$ é o coeficiente de termoresistividade;

No caso do cobre $\alpha = 0,00393 ^\circ\text{C}^{-1}$

Exemplo:

Calcular a resistência de um filamento de tungsténio à temperatura de 200°C , sendo a sua resistência de 10Ω à temperatura de 20°C .

$\alpha = 0,005 ^\circ\text{C}^{-1}$

$$R_{20^\circ} = 10 [1 + 0,005(200 - 20)] = 19 \Omega$$

2.6 Lei de Ohm

"A tensão aos terminais de uma resistência é igual ao produto do valor da resistência pela corrente que a atravessa".

$V \propto R \rightarrow$ O trabalho realizado para vencer a resistência é tanto maior quanto maior for a resistência.

$V \propto I \rightarrow$ A corrente que corresponde ao fluxo de cargas é tanto maior quanto maior for o trabalho realizado, supondo que a resistência é constante.

Assim:

$$V \propto RI$$

ou seja:

$$V = RI$$

$$R = \frac{V}{I}$$

$$I = \frac{V}{R}$$

Estas expressões correspondem à chamada *Lei de Ohm*.

Dois casos particulares ocorrem quando:

$R = 0$ então $V = IR = 0$ V. Esta situação identifica um curto-circuito.

$R = \infty$ então $I = \frac{V}{R} = 0$ A. Esta situação configura um circuito aberto.

Se pretendermos calcular o valor de uma resistência através da medição da corrente e da tensão deveremos utilizar a montagem da figura

O amperímetro e o voltímetro são instrumentos polarizados, de forma que a sua ligação não é indiferente, sendo necessário respeitar as polaridades dos referidos aparelhos (ver figura).

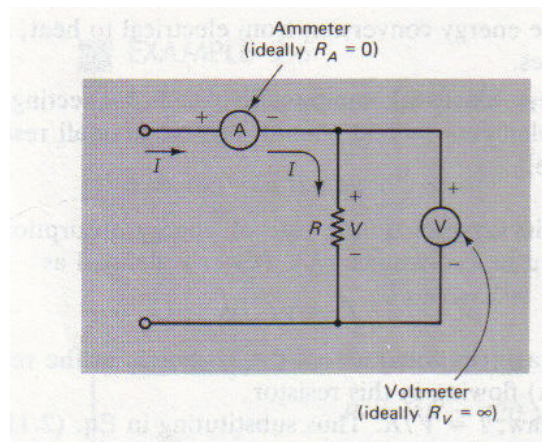


Figura 3: Ligação dos aparelhos de medida

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\text{Leitura do voltímetro}}{\text{Leitura do amperímetro}}$$

Exemplo:

Qual a resistência de 1 lâmpada se com a tensão de 6 V, a corrente for de 100 mA.

$$R = \frac{6}{0,1} = 60\Omega$$

2.7 Efeito térmico da corrente

Num condutor sujeito a uma diferença de potencial entre os seus terminais é gasta uma determinada energia a transportar uma determinada quantidade de carga de um ponto para outro.

$$W_{AB} = qV_{AB}$$

se a carga é Δq ter-se-á:

$$\Delta W = \Delta q \cdot V$$

onde V é diferença de potencial aplicada.

Supondo que para transportar a carga é necessário um tempo Δt , tem-se:

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\Delta q}{\Delta t} \cdot V$$

onde

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = \langle P \rangle$$

corresponde à *potência média*.

Como,

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = \langle i \rangle$$

que é *corrente média*, logo:

A potência média necessária é dada pela expressão:

$$\langle P \rangle = \langle i \rangle \cdot V$$

Aplicando a lei de Ohm, que relaciona a tensão com a corrente num elemento linear:

$$V = R \cdot i$$

então,

$$\langle P \rangle = R \cdot \langle i^2 \rangle$$

ou ainda:

$$\langle P \rangle = \frac{V^2}{R}$$

que corresponde à *potência dissipada* numa resistência R quando atravessada pela corrente i quando é aplicada uma tensão V aos seus terminais.

Pelo princípio da *conservação da energia* sabe-se que o trabalho realizado deve aparecer sob outra forma de energia. Experimentalmente verifica-se que aparece sob a forma de calor.

Esta transformação pode ser explicada pela Física do Estado Sólido, onde se demonstra que o calor resulta da colisão dos electrões em movimento com as partículas fixas.

Sempre que um condutor é atravessado por uma corrente eléctrica é gerado calor que representa a energia consumida na manutenção da referida corrente. Diz-se que a energia é dissipada sob a forma de calor.

As resistências classificam-se pela máxima taxa de potência que conseguem dissipar $P_{máx}$. Se a potência dissipada exceder esse valor a resistência queima.

Conhecendo o valor da resistência e a sua taxa de potência pode-se deduzir a máxima tensão que pode ser aplicada aos seus terminais e consequentemente a a máxima corrente que a pode atravessar.

$$V_{máx} = \sqrt{P_{máx} \cdot R}$$

$$I_{m\acute{a}x} = \sqrt{\frac{P_{m\acute{a}x}}{R}}$$

Exemplo:

Uma resist\encia \a qual \e aplicada a tens\ao m\axima de 6 V, \e atravessada pela corrente de 100 mA. Calcular a pot\encia m\axima que pode dissipada nessa resist\encia.

$$P = V * I = 0,6W$$

Exemplo:

A pot\encia m\axima admiss\ivel numa resist\encia de 5 k Ω , \e de 2W. Calcular $V_{m\acute{a}x}$ e $I_{m\acute{a}x}$.

$$V_{m\acute{a}x} = \sqrt{2 * 5 * 1000} = 100V$$

$$I_{m\acute{a}x} = \sqrt{\frac{2}{5 * 1000}} = \sqrt{\frac{4}{10000}} = 20mA$$

2.8 Resist\encias pr\aticas

H\a muitos tipos, tamanhos e formas de resist\encias pr\aticas. S\ao basicamente especificadas por:

Valor \rightarrow Impresso ou identificado por c\odigo de cores pintado no corpo da resist\encia. H\a resist\encias com valores desde frac\c\oes de Ω at\e muitos $M\Omega$.

Pot\encia \rightarrow \E usualmente pintada no corpo da resist\encia ou identificada pelo tamanho standard da resist\encia. As gamas de pot\encias v\ao da frac\c\ao de W a muitas dezenas de W .

As resist\encias podem ser fixas ou vari\aveis.

As resist\encias fixas podem ser de carbono, de filme de carbono ou de filme met\alico com revestimento cer\amico, e de fio enrolado.

As resist\encias vari\aveis s\ao contru\idas de maneira similar ao das resist\encias de fio enrolado, que neste caso n\ao ser\a isolado.

Na identifica\c\ao das resist\encias pelo c\odigo de cores utilizam-se 3 ou 4 faixas de cores pintadas no corpo da resist\encia.

1^a faixa - 1^o d\igit

2^a faixa - 2^o d\igit

3^a faixa - n\umero de zeros ou factor multiplicador

4^a faixa - toler\ancia

Na 4^a faixa da toler\ancia - Prateada 10%

Dourada 5%

Aus\encia 20%

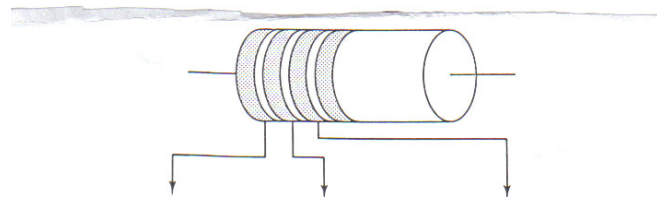
Na 3^a faixa

Prateada 10^{-2}

Dourada 10^{-3}

Restantes n\umero de zeros

A leitura faz-se da esquerda para a direita. (figura 4)



Color	First-band digit	Second-band digit	Third-band multiplier
Black	0	0	$10^0 = 1$
Brown	1	1	$10^1 = 10$
Red	2	2	$10^2 = 100$
Orange	3	3	$10^3 = 1000$
Yellow	4	4	$10^4 = 10,000$
Green	5	5	$10^5 = 100,000$
Blue	6	6	$10^6 = 1,000,000$
Violet	7	7	$10^7 = 10,000,000$
Gray	8	8	$10^8 = 100,000,000$
White	9	9	$10^9 = 1,000,000,000$
Gold			0.1
Silver			0.01

Figura 4: Identificação das resistências práticas

2.9 Associação de resistências

As resistências podem ser associadas em série e em paralelo, e ainda em associações mistas.

2.9.1 Associação série

A associação série é caracterizada por a corrente ser a mesma em todas as resistências, sendo a tensão diferente de resistência para resistência, dependendo do valor de cada resistência. (figura 5)

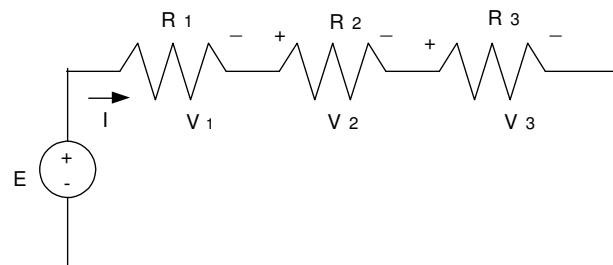


Figura 5: Associação série de resistências

Aplicando a lei de Ohm a cada resistência tem-se:

$$V_1 = I * R_1$$

$$V_2 = I * R_2$$

$$V_3 = I * R_3$$

Somando membro a membro as três equações:

$$V_1 + V_2 + V_3 = I * R_1 + I * R_2 + I * R_3$$

Aplicando a KVL tem-se que:

$$E = V_1 + V_2 + V_3$$

Então

$$E = I * (R_1 + R_2 + R_3)$$

Se consideramos que o circuito da figura é equivalente a um circuito só com uma resistência (figura 6)

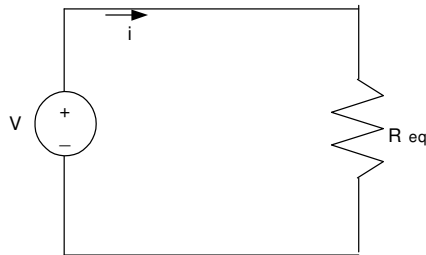


Figura 6: Circuito equivalente

A equação deste circuito é:

$$E = I * R_{eq}$$

Para os que os dois circuitos sejam equivalentes é necessário que sejam equivalentes as suas equações. Desta forma, tem de se verificar a seguinte igualdade:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

Podemos enunciar que: "A resistência equivalente da associação série de três resistências é uma resistência cujo valor é igual à soma das três resistências".

Pode-se generalizar para n resistências:

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i$$

2.9.2 Associação paralelo

A associação paralelo é caracterizada por a tensão ser a mesma em todas as resistências, sendo a corrente diferente de resistência para resistência, dependendo do valor de cada resistência. (figura 7)

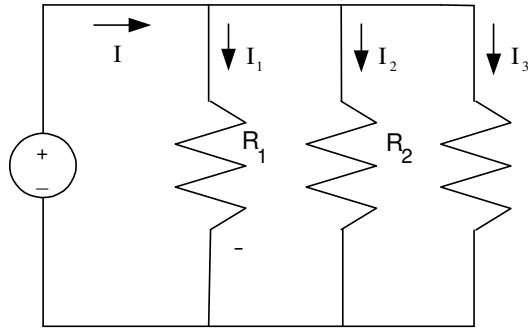


Figura 7: Associação paralelo de resistências

Aplicando a lei de Ohm a cada resistência tem-se:

$$E = I_1 * R_1 \Rightarrow I_1 = \frac{E}{R_1}$$

$$E = I_2 * R_2 \Rightarrow I_2 = \frac{E}{R_2}$$

$$E = I_3 * R_3 \Rightarrow I_3 = \frac{E}{R_3}$$

Somando membro a membro as três equações:

$$I_1 + I_2 + I_3 = \frac{E}{R_1} + \frac{E}{R_2} + \frac{E}{R_3}$$

Aplicando a KCL tem-se que:

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

Então

$$I = E * \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

Se consideramos que o circuito da figura é equivalente a um circuito só com uma resistência (figura 8)

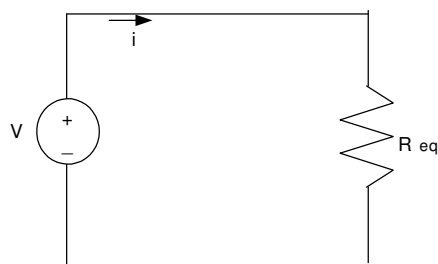


Figura 8: Circuito equivalente

A equação deste circuito é:

$$E = I * R_{eq} \Rightarrow I = \frac{E}{R_{eq}}$$

Para os que os dois circuitos sejam equivalentes é necessário que sejam equivalentes as suas equações. Desta forma, tem de se verificar a seguinte igualdade:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Podemos enunciar que: "O inverso da resistência equivalente da associação paralelo de três resistências é igual à soma dos inversos das três resistências".

Pode-se generalizar para n resistências:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

2.10 Força-electromotriz

Força electromotriz é o trabalho realizado por unidade de carga pelas forças da fonte na transformação de uma qualquer forma de energia em energia eléctrica.

$$\varepsilon = \frac{dw}{dq}$$

$$P = \frac{dw}{dt} = \varepsilon i$$

$$\varepsilon = i(R + r)$$

$$V_1 = iR \quad \text{e} \quad V_2 = ir$$

$$\sum_{p=1}^n \varepsilon_p = \sum_{j=1}^m i_j R_j$$

2.11 Fontes de energia eléctrica

2.11.1 Fonte de tensão ideal

A fonte de tensão ideal proporciona uma tensão constante aos seus terminais qualquer que seja a corrente fornecida. (figura 9)

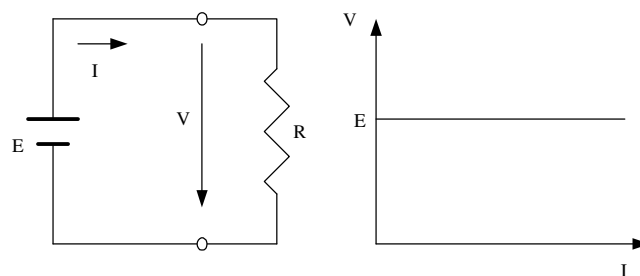


Figura 9: Fonte de tensão ideal

2.11.2 Fonte de tensão prática

Numa fonte de tensão prática ou real quando a corrente aumenta (diminuição da resistência de carga) a tensão na carga diminui. A queda de tensão dá-se no interior da fonte.

Representação modelar (figura 10)

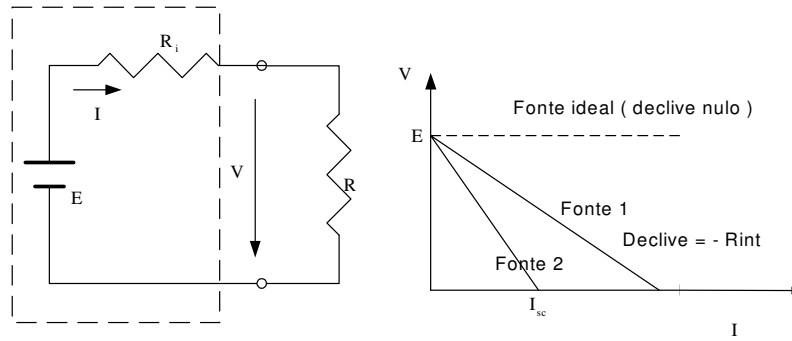


Figura 10: Fonte de tensão prática

R_i representa no modelo a resistência interna da fonte cujos terminais não são acessíveis. Verifica-se aplicando a lei de Ohm ao circuito que:

$$E = R_i * I + V$$

onde

$$V = R * I$$

deste modo

$$I = \frac{E}{R_i + R}$$

Por outro lado a expressão

$$V = E - R_i * I$$

que se retira da equação do circuito, corresponde à equação de uma recta.

$$y = a - mx$$

onde

$$y = V \quad e \quad x = I$$

para

$$\begin{aligned} I = 0 & \quad V = E \\ V = 0 & \quad I = \frac{E}{R_i} \end{aligned}$$

R_i é o declive da recta.

E corresponde à tensão da fonte em circuito aberto, ou seja $R = \infty$. Esta tensão pode ser medida com um voltímetro.

Em circuito aberto $I = 0$, e assim,

$$V = E - R_i * 0$$

$$E = V_{oc}$$

V_{oc} é a tensão aos terminais do circuito quando está aberto.

A situação inversa ocorre quando $V = 0$, nesta situação a equação do circuito é,

$$0 = E - R_i * I_{sc}$$

onde I_{sc} é a corrente de curto-circuito, ou seja a corrente quando $R = 0$, e que pode ser medida com um amperímetro.

Nesta situação a corrente só é limitada pela resistência interna da fonte R_i ,

$$R_i = \frac{E}{I_{sc}}$$

Desta forma podemos ver que a resistência interna da fonte, que não tem os terminais acessíveis, pode ser calculada dividindo a tensão em circuito aberto (leitura do voltímetro), pela corrente de curto-circuito (leitura do amperímetro).

2.11.3 Fonte de corrente ideal

A fonte de corrente ideal proporciona uma corrente constante aos seus terminais qualquer que seja a resistência de carga (isto é, independentemente da tensão aos seus terminais). (figura 11)

$$I = I_s \quad \nabla R \text{ e } V$$

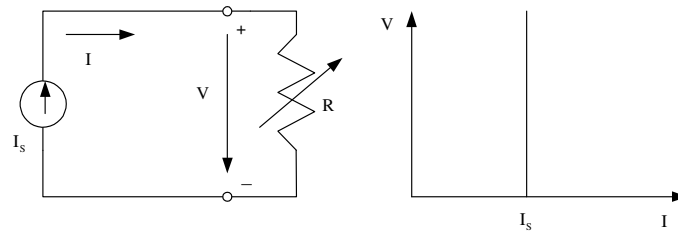


Figura 11: Fonte de corrente ideal

Quando I_s é constante, então: se $R >$, $V >$ e $R <$, $V <$

2.11.4 Fonte de corrente prática

Numa fonte de corrente prática ou real observa-se que a corrente de saída diminui quando a tensão aumenta através do aumento da resistência R . Esta situação pode ser modelada através de uma resistência em paralelo com a fonte de corrente.

Representação modelar (figura 12)

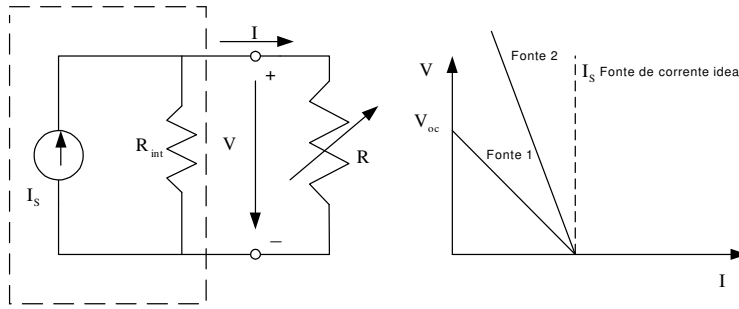


Figura 12: Fonte de corrente prática

Deste circuito podemos extrair a seguinte equação:

$$I = I_s - I' = I_s - \frac{V}{R_i}$$

Numa fonte de tensão ideal $I = I_s$, o que corresponde a $R_i = \infty$ e $I' = 0$.

$$V = I_s * R_i - I * R_i$$

Quando $R = \infty \Rightarrow I = 0$, ou seja, circuito aberto. Neste caso:

$$V = V_{oc} = I_s * R_i$$

que é tensão de circuito aberto do circuito.

Quer dizer quando o circuito está aberto a corrente flue através de R_i , criando V_{oc} aos seus terminais

A equação do circuito pode-se escrever do seguinte modo:

$$V = V_{oc} - R_i * I$$

Quando $R = 0 \Rightarrow V = 0$, ou seja, curto-circuito. Neste caso:

$$I = \frac{V_{oc}}{R_i} = I_s$$

Observa-se também que quanto maior é resistência interna maior é o declive.

$$R_{int2} > R_{int1}$$

2.11.5 Associação de fontes em série

Como vimos atrás um fonte de tensão real ou prática é uma fonte que apresenta um determinada resistência interna (figura 13).

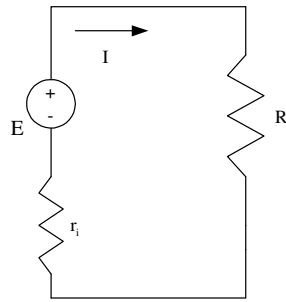


Figura 13: Fonte de tensão prática

A equação do circuito é a seguinte:

$$E = I * (R + R_i)$$

Estas fontes podem ser associadas entre si. Na montagem em série das fontes representada na figura 14 a corrente é a mesma em todas elas.

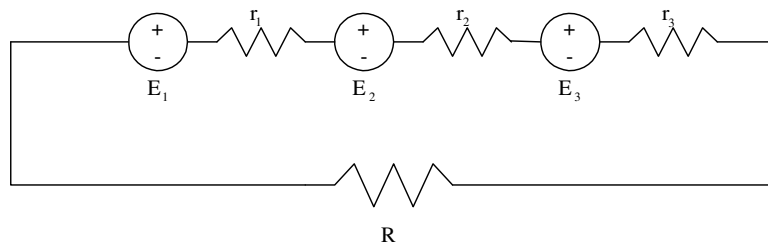


Figura 14: Associação em série de fontes de tensão

Para o conjunto das três fontes de tensão seja equivalente à fonte da figura anterior é necessário que:

$$E = E_1 + E_2 + E_3$$

e

$$r_i = r_1 + r_2 + r_3$$

Generalizando para n fontes:

$$\sum_{k=1}^n E_k = I \left(\sum_{k=1}^n r_k + R \right)$$

se as fontes forem todas iguais, isto é se:

$$E_1 = E_2 = E_3 = \dots = E_n = E$$

$$r_1 = r_2 = r_3 = \dots = r_n = r$$

então

$$I = \frac{nE}{nr + R}$$

”Numa associação série de n fontes iguais a tensão da fonte equivalente será n vezes a tensão de cada fonte e a resistência interna r será n vezes a resistência de cada uma das fontes”

2.11.6 Associação de fontes em paralelo

A montagem de fontes em paralelo é representada na figura 15.

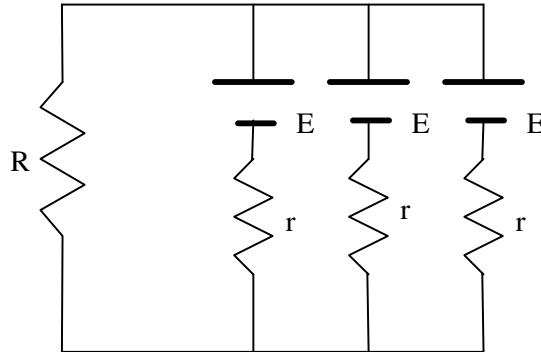


Figura 15: Associação paralelo de fontes de tensão

O circuito equivalente só com uma fonte terá uma tensão igual a E e uma resistência interna obtida através da resistência equivalente do paralelo das três resistências equivalentes,

$$\frac{1}{r_{eq}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{3}{r}$$

ou seja

$$r_{eq} = \frac{r}{3}$$

Generalizando a m fontes

$$r_{eq} = \frac{r}{m}$$

Assim a equação do circuito equivalente só uma fonte é

$$I = \frac{E}{\frac{r}{m} + R}$$

”Numa associação paralelo de m fontes iguais a tensão da fonte equivalente será a tensão de cada uma das fontes e a resistência interna será igual a quociente de r por m ”.

2.11.7 Associação mista de fontes

Se associarmos m grupos de n fontes iguais em série ligadas em paralelo, a equação do circuito equivalente só como uma fonte será:

$$I = \frac{nE}{(nr/m) + R}$$

2.11.8 Fontes independentes e fontes dependentes

Define-se como fonte independente uma fonte que pode ser de tensão ou de corrente cujo valor é constante.

As fontes independentes que iremos utilizar nos circuitos serão fontes ideais. tal como definimos atrás:

Fontes independentes Uma fonte de tensão ideal é uma fonte que consegue manter aos seus terminais uma dada tensão qualquer que seja a corrente fornecida ao circuito. A resistência interna duma fonte de tensão ideal é igual a zero ($r_i = 0$).

Uma fonte de corrente ideal é uma fonte que consegue manter uma dada corrente numa determinada carga independentemente da tensão aos terminais dessa carga. A resistência interna duma fonte de corrente ideal é igual a infinito ($r_i = \infty$). (figura 16)

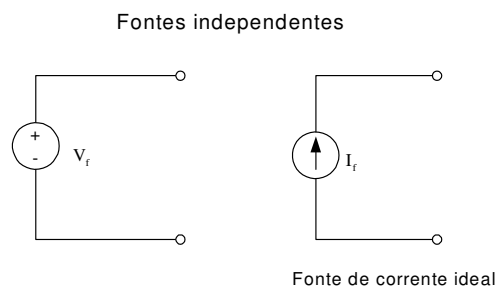


Figura 16: Fontes independentes

2.11.9 Fontes dependentes

Uma fonte de tensão dependente é uma fonte cuja tensão é determinada por uma qualquer tensão ou corrente no interior do circuito em que se encontra.

Da mesma forma uma fonte de corrente dependente é uma fonte cuja corrente é determinada por uma qualquer tensão ou corrente no interior do circuito em que se encontra. (figura 17)

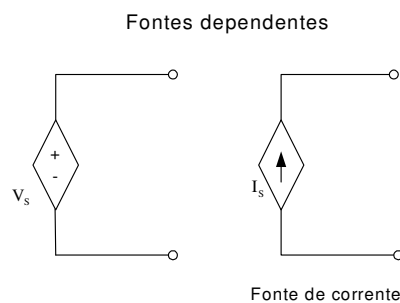


Figura 17: Fontes dependentes

Assim:

$$v_s = \alpha v_x \text{ ou } v_s = \beta i_x$$

e

$$i_s = \mu v_x \text{ ou } i_s = \rho i_x$$

As fontes dependentes são muito importantes na análise dos circuitos electrónicos.

Um transistor pode ser modelado por uma resistência e uma fonte de corrente dependente. (figura 18)

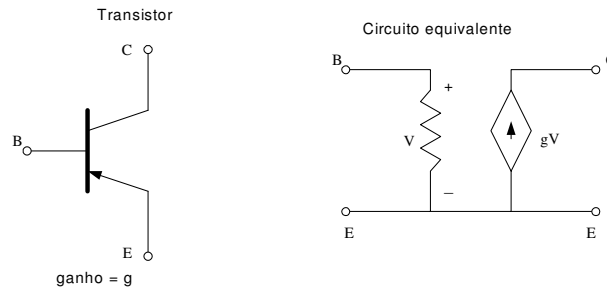


Figura 18: Modelo do transistor

3 Análise de circuitos em corrente contínua

3.1 Constituição de um circuito

Os circuitos em corrente contínua são constituídos por fontes de tensão e de corrente e por resistências.

As fontes constituem os elementos activos e as resistências constituem os elementos passivos.

Vamos dar um conjunto de definições que nos permitem caracterizar e identificar os circuitos eléctricos que iremos estudar.

3.1.1 Rede eléctrica

Corresponde à interligação de 2 ou mais elementos simples de um circuito.

3.1.2 Circuito eléctrico

Sempre que a rede eléctrica tiver pelo menos um percurso fechado designa-se por circuito.

Elemento activo São as fontes. Fornecem energia ao circuito.

Elemento passivo São as resistências. Absorvem energia do circuito.

Nó Ponto do circuito comum a dois ou mais elementos.

Junção Nó formado por 3 ou mais elementos.

Ramo Elemento ou série de elementos entre 2 nós.

Ramo activo Quando inclui uma ou mais fontes.

Ramo Passivo Quando não inclui fontes.

Malha Corresponde a qualquer caminho fechado num circuito eléctrico.

Os circuitos irão ser estudados em corrente contínua, ou seja as grandezas eléctricas corrente e tensão são invariáveis no tempo.

A identificação dos nós num determinado circuito faz-se da mesma forma que no circuito da figura 19.

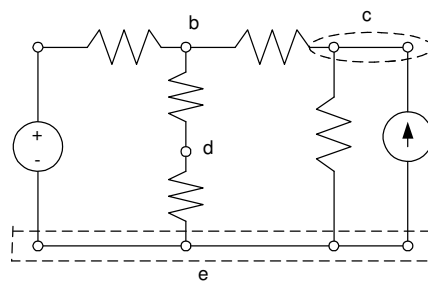


Figura 19: Circuito em corrente contínua com identificação dos nós

a, b, c, d, e são os pontos de ligação ou nós. A cada nó corresponde uma determinada energia potencial ou tensão.

Considerando que os fios de ligação tem resistência nula, os diferentes pontos interligados tem o mesmo potencial, o que em termos eléctricos significa constituírem o mesmo nó.

3.2 Circuitos equivalentes Δ/\angle e \angle/Δ

A ligação em estrela é uma ligação em que as três resistências têm um ponto comum.

A ligação em triângulo as três resistências são ligadas de forma que a extremidade de uma é ligado ao início da seguinte, de modo a formarem um triângulo.

No cálculo da resistência equivalente de um circuito pode ser necessário proceder às chamadas transformações de Δ/\angle e \angle/Δ .

3.2.1 Transformação Δ/\angle

A transformação triângulo/estrela é a representada na figura 20.

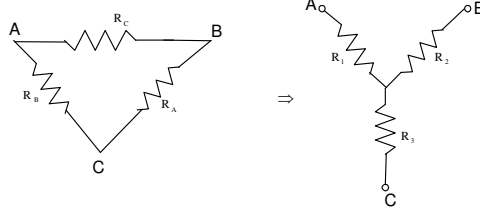


Figura 20: Transformação triângulo/estrela

Nesta transformação triângulo-estrela ($\Delta \rightarrow \vee$) a resistência ligada a um nó em \vee é igual ao quociente entre o produto das duas resistências adjacentes a esse nó na ligação em triângulo e a soma das 3 resistências associadas em Δ .

As expressões que permitem fazer a transformação são as seguintes:

$$R_1 = \frac{R_b * R_c}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_2 = \frac{R_a * R_c}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_3 = \frac{R_a * R_b}{R_a + R_b + R_c}$$

3.2.2 Transformação \vee/Δ

A transformação estrela/triângulo é a representada na figura 21.

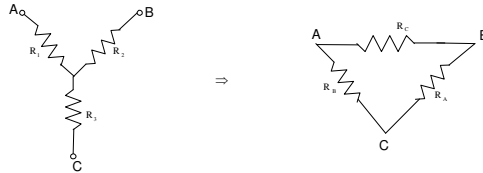


Figura 21: Transformação estrela/triângulo

Na passagem da associação em estrela para a associação em triângulo $\vee \rightarrow \Delta$, a resistência oposta a qualquer nó pode ser obtida a partir dos valores das resistências em estrela, dividindo a soma das resistências associadas duas a duas, pelo valor da resistência adjacente a esse nó.

As expressões que permitem fazer a transformação são as seguintes:

$$R_a = \frac{R_1 * R_2 + R_1 * R_3 + R_2 * R_3}{R_1}$$

$$R_b = \frac{R_1 * R_2 + R_1 * R_3 + R_2 * R_3}{R_2}$$

$$R_c = \frac{R_1 * R_2 + R_1 * R_3 + R_2 * R_3}{R_3}$$

Exemplos:

Transformação Δ/\triangleleft : $R_a = 20\Omega$, $R_b = 30\Omega$, $R_c = 50\Omega$

$$R_1 = \frac{R_b * R_c}{R_a + R_b + R_c} = \frac{1500}{100} = 15\Omega$$

$$R_2 = \frac{R_a * R_c}{R_a + R_b + R_c} = \frac{1000}{100} = 10\Omega$$

$$R_3 = \frac{R_a * R_b}{R_a + R_b + R_c} = \frac{600}{100} = 6\Omega$$

Caso particular:

$$R_\Delta = 30\Omega$$

$$R_{\triangleleft} = \frac{30 * 30}{30 + 30 + 30} = 10\Omega$$

No caso das três resistências em triângulo serem iguais as correspondentes resistências em estrela também são iguais entre si e valem um terço do valor das resistências em triângulo.

3.3 Circuitos em ponte

Correspondem a 2 Δ unidos, ou 2 \triangleleft com um ramo comum.(figura 22)

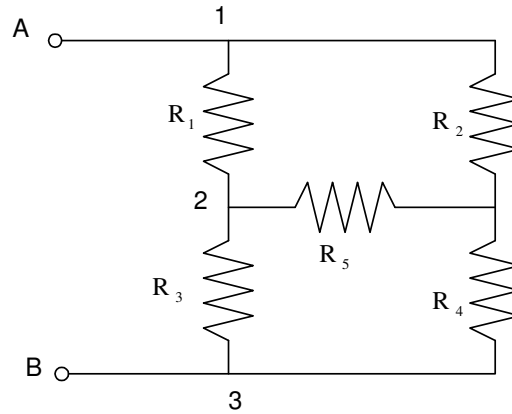


Figura 22: Circuito em ponte

Transformando uma parte do Δ em \triangleleft , ou uma parte da \triangleleft , em Δ o circuito torna-se série e paralelo.

Transformação no circuito em ponte de forma a ser simplificado, utilizando as transformações \triangleleft/Δ ou Δ/\triangleleft .

Utilizando a transformação de uma parte do Δ (R_1, R_2, R_5) na $\triangleleft(R'_1, R'_2, R'_3)$, obtêm-se as seguintes expressões.

$$R'_1 = \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2 + R_5}$$

$$R'_2 = \frac{R_1 * R_5}{R_1 + R_2 + R_5}$$

$$R'_3 = \frac{R_2 * R_5}{R_1 + R_2 + R_5}$$

Utilizando a transformação de uma parte de $\triangleleft (R_1, R_3, R_5)$ no $\triangle (R_a, R_b, R_c)$, obtém-se as seguintes expressões:

$$R_a = \frac{R_1 * R_5 + R_3 * R_5 + R_1 * R_3}{R_1}$$

$$R_b = \frac{R_1 * R_5 + R_3 * R_5 + R_1 * R_3}{R_5}$$

$$R_c = \frac{R_1 * R_5 + R_3 * R_5 + R_1 * R_3}{R_3}$$

3.3.1 Ponte de wheatstone

O circuito em ponte de wheatstone é utilizado para medição de resistências de precisão.(figura 23)

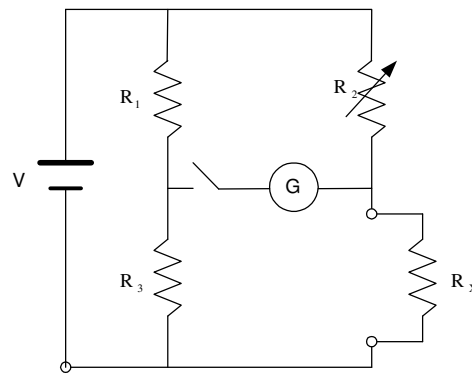


Figura 23: Ponte de Wheastone

O ramo central é um galvanómetro: Três ramos são resistências de precisão, sendo uma delas variável. O quarto ramo é uma resistência que se pretende medir, designada por R_x .

A resistência R_2 é ajustada até que o galvanómetro não acuse a passagem de corrente. Significa que a ponte está em equilíbrio, ou seja, mesmo com o interruptor aberto a tensão sobre R_1 é igual à tensão sobre R_2 , e a tensão sobre R_3 é igual à tensão sobre R_x .

$$\frac{V * R_1}{R_1 + R_3} = \frac{V * R_2}{R_2 + R_x}$$

e,

$$\frac{V * R_3}{R_1 + R_3} = \frac{V * R_x}{R_2 + R_x}$$

Dividindo membro a membro as duas equações:

$$\frac{R_x}{R_2} = \frac{R_3}{R_1}$$

que é a *equação do sistema, razão dos braços inferiores e superiores*.

Outras formas:

$$R_x = \frac{R_3 \cdot R_2}{R_1}$$

ou,

$$R_x.R_1 = R_3.R_2$$

oproduto dos braços opostos.

3.4 Leis de Kichhoff

3.4.1 1ª Lei de Kirchhoff

É a lei das correntes. Num determinado nó a soma das correntes que entram é igual à soma das correntes que saem. Ou a soma algébrica das correntes num nó é igual a zero.

A interpretação física é a seguinte: Correspondendo as correntes a fluxos de cargas, a soma das cargas que entram tem de ser igual à soma das cargas que saem, isto é, não são geradas nem absorvidas cargas no nó.

Nos textos em inglês aparece referida como KCL "Kirchhoff's Current Law".

A expressão matemática é a seguinte:

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0$$

A forma de aplicar esta expressão passa pela utilização de uma regra de sinais. Essa regra de sinais pode ser a seguinte: "Consideram-se positivas as correntes que entram e negativas as correntes que saem".

No caso de não se conhecer o sentido da corrente a calcular deve-se arbitrar um sentido para essa corrente. Se o valor calculado for positivo então o sentido arbitrado está correcto, inversamente se o valor for negativo.

3.4.2 2ª Lei de Kirchhoff

É a lei das tensões. A soma algébrica de todas as tensões numa malha fechada, é igual a zero. A soma das tensões nas fontes é igual à soma das tensões nas resistências.

$$\sum_{f=1}^{n_1} V_f = \sum_{k=1}^{n_2} V_k$$

n_1 - número de fontes e n_2 - número de resistências.

A expressão matemática pode apresentar a seguinte forma:

$$\sum_{k=1}^n v_k = 0$$

Aplicação: Numa determinada malha fechada escolhe-se um ponto de partida e um sentido de circulação (no sentido dos ponteiros do relógio ou inverso) e circula-se através de todos os elementos até voltar ao ponto de partida.

Regra de sinais: A queda de tensão nas resistências faz-se no sentido da corrente. Sempre que ao circular se encontra em 1º lugar o terminal positivo a tensão é considerada positiva, se se encontrar em 1º lugar o terminal negativo a tensão é considerada negativa.

Nota: A circulação deve terminar no mesmo ponto em que tem o seu início, mesmo que a malha esteja fisicamente aberta (circuito aberto).

A equação obtida em cada malha é independente do ponto de partida ou da direcção escolhida.

A KVL é plausível dado que sendo as tensões diferenças de energia potencial entre 2 pontos, se partirmos de um ponto somando e subtraindo as tensões positivas e negativas em toda a malha e voltarmos ao ponto de partida, significa que a diferença de potencial total só pode ser zero, uma vez que o ponto de partida e o de chegada é o mesmo.

3.4.3 Exemplos

Apresentam-se ainda mais alguns exemplos utilizando indistintamente as duas leis de Kirchhoff.

Exemplo 1:

Utilizar a KCL para calcular as correntes I_1 , I_2 e I_3 , do circuito da figura 24.

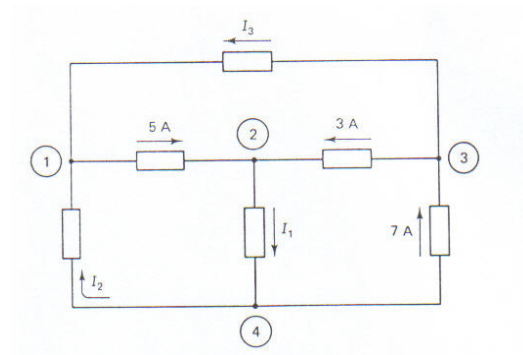


Figura 24: Circuito eléctrico - exemplo 1

Resultado: $I_1 = 8A$; $I_2 = 1A$; $I_3 = 4A$

Exemplo 2:

Considerando o circuito da figura 25 calcular R_1 , considerando que a potência total fornecida pela fonte é $75W$.

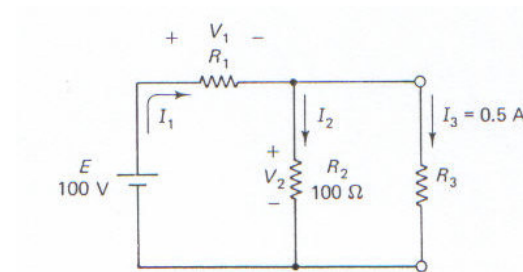


Figura 25: Circuito eléctrico - exemplo 2

Resultado: $R_1 = 100\Omega$.

Exemplo 3:

No circuito da figura 26, calcular R_1 .

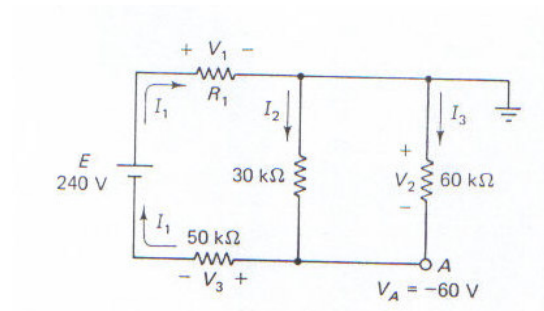


Figura 26: Circuito eléctrico - exemplo 3

Resultado: $R_1 = 10k\Omega$.

Exemplo 4:

No circuito da figura 27 calcule R e E , sabendo que $V_P = 16V$

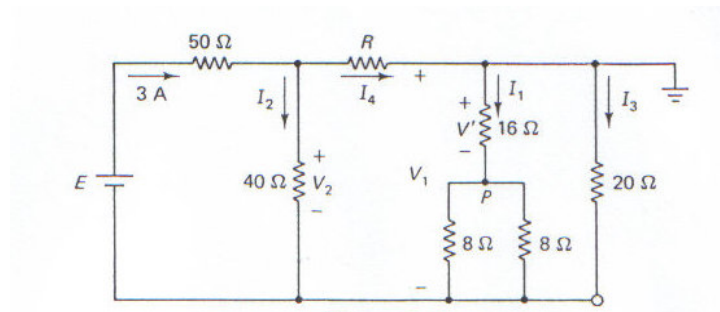


Figura 27: Circuito eléctrico - exemplo 4

Resultado: $R = 10\Omega$; $E = 190V$

3.5 Divisores de tensão

Considere-se o circuito da figura 28.

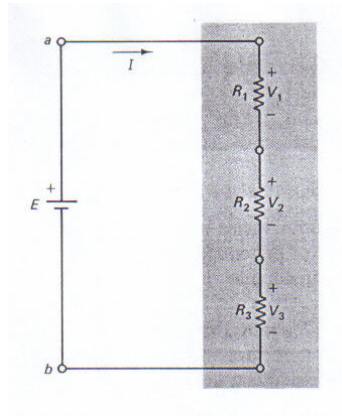


Figura 28: Circuito divisor de tensão

Trata-se de um circuito em que todos os elementos estão em série, pelo que a corrente através deles é a mesma.

Aplicando a lei de Ohm é possível obter uma equação para cada resistência.

$$V_1 = R_1 * I$$

$$V_2 = R_2 * I$$

$$V_3 = R_3 * I$$

Aplicando a 2ª lei de Kirchhoff obtém-se:

$$E = V_1 + V_2 + V_3$$

ou seja:

$$E = (R_1 + R_2 + R_3) * I$$

Dividindo qualquer das equações nas resistências por esta equação obtém-se:

$$\frac{V_1}{E} = \frac{R_1 * I}{(R_1 + R_2 + R_3) * I} = \frac{R_1}{(R_1 + R_2 + R_3)}$$

ou seja:

$$V_1 = E * \frac{R_1}{(R_1 + R_2 + R_3)}$$

A tensão aos terminais de uma qualquer resistência, numa associação série de resistências, é obtida pelo produto da tensão total aos terminais da série por uma fracção em que o numerador é a resistência referida, aos terminais da qual se está a calcular a tensão, e o denominador é a soma das resistências associadas.

Este resultado é válido para qualquer das resistências da série.

Com esta expressão é possível obter todas as tensões do circuito a partir da tensão total e dos valores das resistências, sem ser necessário calcular a corrente.

Se em vez de três resistências o circuito contenha n resistências em série a expressão do divisor de tensão é a seguinte:

$$V_i = E * \frac{R_i}{\sum_{k=1}^n R_k} = E * \frac{R_i}{R_{eq}}$$

Princípio do divisor de tensão: A tensão aplicada divide-se pelos elementos em série sendo que a maior tensão aparece aos terminais da resistência de valor mais elevado.

Exemplo 1:

No circuito da figura 29, calcular as tensões em cada uma das resistências e tensão V_{cb} , utilizando a expressão do divisor de tensão.

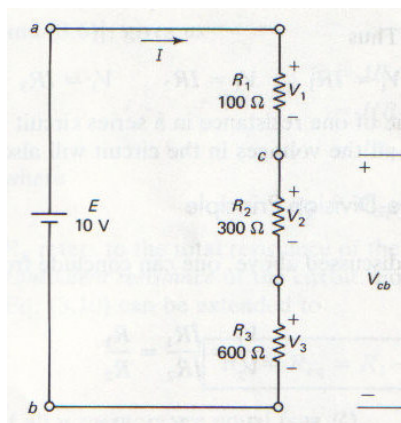


Figura 29: Circuito divisor de tensão

Resultado: $V_1 = 1V$; $V_2 = 3V$; $V_3 = 6V$; $V_{cb} = 9V$

Exemplo 2:

Determinar os valores das três resistências do circuito da figura 30, considerando que a $R_T = 50\Omega$.

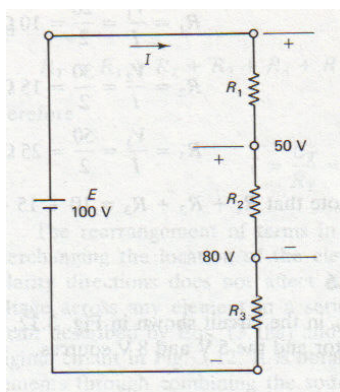


Figura 30: Circuito divisor de tensão

Resultado: $R_1 = 10\Omega$; $R_2 = 15\Omega$; $R_3 = 25\Omega$

Exemplo 3:

Calcular I e V_{ab} no circuito da figura 31. Determine também a potência na resistência de 5Ω e as potências da fontes de $5V$ e $8V$.

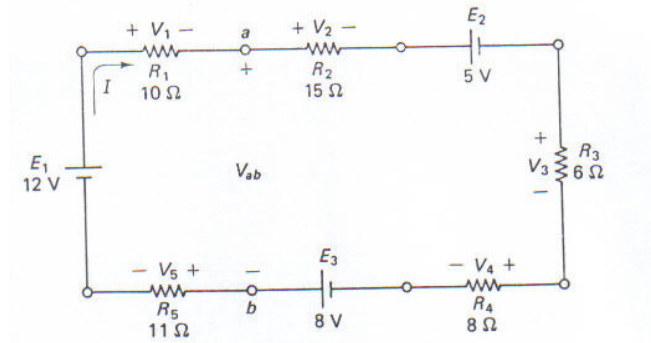


Figura 31: Circuito divisor de tensão

Resultado: $I = 0,3A$; $V_{ab} = 5,7V$; $P_{10\Omega} = 0,9W$ (*absorvida*); $P_{5V} = 1,5W$ (*absorvida*); $P_{8V} = 2,4W$ (*fornecida*)

3.5.1 Potencial da terra

As tensões reflectem diferenças de potencial entre dois pontos (V_{ab}).

Nalguns circuitos pode ser conveniente escolher um nó como referência para todas as tensões no circuito.

Se este nó está também associado a uma tensão de 0 volts, alguns dos restantes nós terão tensões acima (tensões positivas), e outros terão tensões abaixo (tensões negativas). Nestes casos o nó é referido usualmente como sendo a *terra* do circuito.

Qualquer ponto pode ser escolhido para ser nó de referência.

Num circuito só com uma fonte de tensão, se o terminal negativo fôr tomado como referência todos os outros nós terão tensões positivas com respeito a este, porque têm potencial mais alto.

"A corrente flue do potencial mais alto para o mais baixo".

As tensões nos nós serão referidas como sendo V_a ; V_b ;

Nas instalações eléctricas o nó de referência é efectivamente ligado à terra ($V = 0$).

Em circuitos de correntes e tensões de valores baixos esta ligação não é necessária.

É importante verificar que ao introduzir a ligação à terra num circuito só se estabelece o potencial de referência nesse ponto mas não afecta a aplicação das leis que se têm vindo a estudar.

No exemplo seguinte verifica-se a aplicação da 2ª lei de Kirchhoff embora se tenha estabelecido o potencial de referência (figura 32)

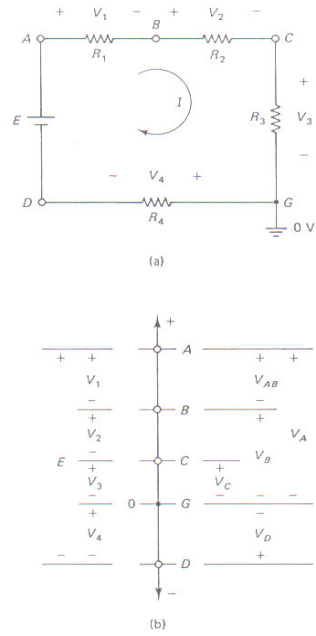


Figura 32: Circuito divisor de tensão com uma tensão de referência

3.6 Divisores de corrente

Um circuito divisor de tensão é tipicamente um circuito paralelo. (figura 33)

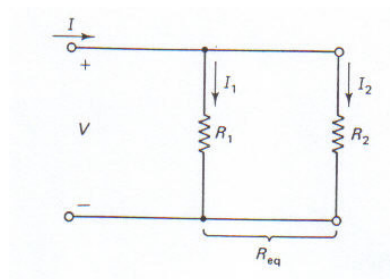


Figura 33: Circuito divisor de corrente

Da análise deste circuito verifica-se que:

$$V = R_1 * I_1$$

$$V = R_2 * I_2$$

e por outro lado,

$$V = I * R_{eq} = I * \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2}$$

Destas equações pode-se deduzir que:

$$R_1 * I_1 = I * \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2}$$

e, portanto,

$$I_1 = I * \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

”A corrente através da resistência de um qualquer ramo do paralelo é obtida através do produto da corrente total por uma fracção cujo numerador é a resistência do ramo oposto e cujo denominador é soma das resistências dos dois ramos.”

Propriedades do paralelo:

- a) Se todas as resistências forem iguais a resistência equivalente é igual ao valor das resistências dividido pelo número delas.
- b) Quando se liga um paralelo a uma fonte de tensão ideal, a variação da resistência de qualquer dos ramos só afecta a corrente e a potência nesse ramo.
- c) A adição de um ramo extra diminui a resistência total do circuito.
- d) Aumentando qualquer das resistências ligadas em paralelo aumenta a resistência total.
- e) A resistência total (resistência equivalente) é sempre menor do que a menor das resistências associadas.

$$R_{eq} = \frac{R_1}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \dots + \frac{R_1}{R_n}}$$

- f) No caso do paralelo de duas resistências, se uma delas é zero, a $R_{eq} = 0$

$$R_{eq} = \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2}$$

se $R_2 = 0$ então $R_{eq} = 0$

$$I_1 = I * \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0$$

e,

$$I_2 = I$$

Este resultado obtém-se para qualquer número de resistências.

Num curto-circuito a tensão é igual a zero, e a corrente só flue através do ramo em curto-circuito.

” O curto-circuito em qualquer ramo do paralelo efectivamente remove as resistências do resto do circuito em paralelo, dado que o valor destas não afecta a determinação das correntes e tensões no resto do circuito.”

- g) Num paralelo a corrente é maior no ramo de menor resistência.

Exemplo 1:

No circuito da figura 34, calcular R de forma que a resistência equivalente do circuito seja de $5k\Omega$. Aplique o princípio do divisor de corrente para calcular a corrente em R e a tensão V, considerando que a corrente total seja de 10 mA.

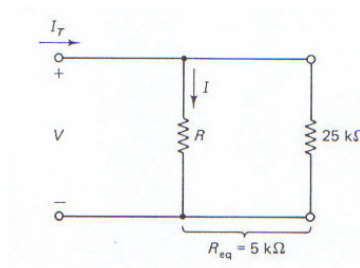


Figura 34: Circuito divisor de corrente

Resultado: $R = 6,25\text{k}\Omega$; $I = 8\text{mA}$; $V = 50\text{V}$.

Exemplo 2: Considere o circuito da figura 35. Calcular a tensão V_{ab} aos terminais dos ramos em paralelo e o valor das correntes I_1, I_2, I_3 .

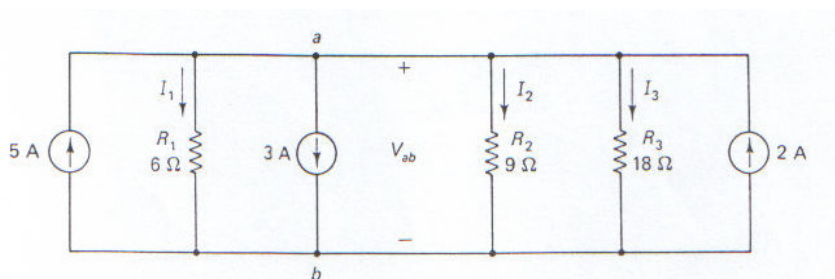


Figura 35: Circuito divisor de corrente

Resultado: $V_{ab} = 12\text{V}$; $I_1 = 2\text{A}$; $I_2 = 1,333\text{A}$; $I_3 = 0,667\text{A}$.

3.7 Análise nodal

A análise nodal é a análise de circuitos através do método das tensões nos nós.

Metodologia:

1º passo: Identificação dos nós

2º passo: Associar a cada nó uma tensão.

3º passo: Marcar as correntes nos ramos, convencionando os seus sentidos.

4º passo: Escrever as equações nos nós por aplicação da **1ª lei de Kirchhoff**.

5º passo: Substituir as correntes em função das tensões.

6º passo: Resolver o sistema de equações.

Na aplicação da 1ª lei de Kirchhoff utiliza-se a seguinte regra de sinais: As correntes que entram nos nós consideram-se positivas, as que saem são negativas.

Exemplo de aplicação:

Estudar o circuito da figura 36, através da análise nodal.

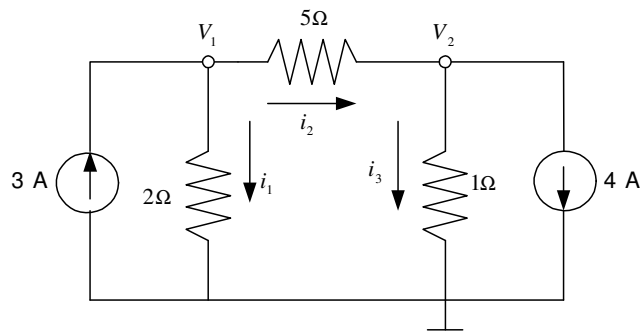


Figura 36:

Equação do nó 1:

$$3 - i_1 - i_2 = 0$$

Equação do nó 2:

$$i_2 - i_3 - 4 = 0$$

Correntes em função das tensões nos nós:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{V_1}{2} \\ i_2 &= \frac{V_1 - V_2}{5} \\ i_3 &= \frac{V_2}{1} \end{aligned}$$

Sistema de equações em que as variáveis são as tensões nos nós:

$$\begin{aligned} -7V_1 + 2V_2 &= -30 \\ V_1 - 6V_2 &= 20 \end{aligned}$$

Resolução dos sistema:

$$\begin{aligned} V_1 &= 3,5V \\ V_2 &= -2,75V \end{aligned}$$

Valores das correntes:

$$\begin{aligned} i_1 &= 1,75A \\ i_2 &= 1,25A \\ i_3 &= -2,75A \end{aligned}$$

Na análise nodal quando existe uma fonte de tensão entre os nós, utiliza-se uma variante da metodologia referida atrás.

Como não é possível calcular a corrente na fonte em função das tensões nos nós, escreve-se a equação correspondente aos dois nós associados à fonte de tensão.

Por outro lado é possível obter uma equação relacionando a tensão da fonte de tensão com as tensões dos dois nós adjacentes.

Exemplo de aplicação:

Considere o circuito da figura 37 e calcule através da análise nodal as correntes do circuito:

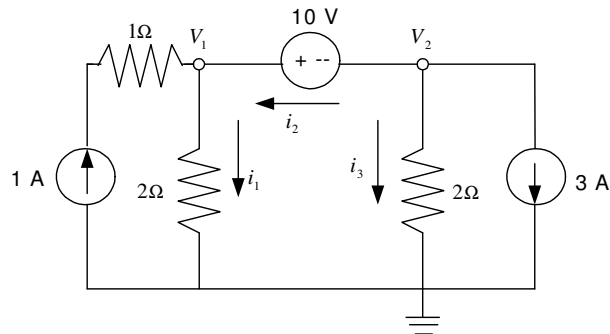


Figura 37:

Equação dos nós 1 e 2:

$$1 - 3 - i_1 - i_2 = 0$$

Equação do ramo onde está a fonte de tensão:

$$V_1 - V_2 = 10$$

Relações das correntes com as tensões nos nós:

$$i_1 = \frac{V_1}{2}$$

$$i_2 = \frac{V_2}{2}$$

Sistema de equações em que as variáveis são as tensões nos nós:

$$V_1 + V_2 = -4$$

$$V_1 - V_2 = 10$$

Resolução do sistema:

$$V_1 = 3V$$

$$V_2 = -7V$$

Valores das correntes:

$$i_1 = 1,5A$$

$$i_2 = -3,5A$$

$$i_3 = -0,5A$$

3.8 Análise de Malhas

A análise de malhas é a análise de circuitos através do método das correntes nas malhas.

Metodologia:

1º passo: Identificação das malhas.

2º passo: Associar a cada malha uma corrente arbitrando o seu sentido.

3º passo: Estabelecer os percursos de circulação, que devem tanto quanto possível coincidir com as malhas, e arbitrar o sentido de circulação.

4º passo: Escrever as equações nas malhas por aplicação da **2ª lei de Kirchhoff**.

5º passo: Resolver o sistema de equações e calcular as correntes nas malhas.

Na aplicação da 2ª lei de Kirchhoff utiliza-se a seguinte regras de sinais:

”Se uma resistência é percorrida no sentido da corrente a queda de tensão é positiva, ao contrário será negativa.”

”Se uma fonte de tensão for percorrida do terminal + para o terminal - a tensão será considerada positiva, ao contrário será negativa”

Exemplo de aplicação:

Estude o circuito da figura 38 através da análise de malhas.

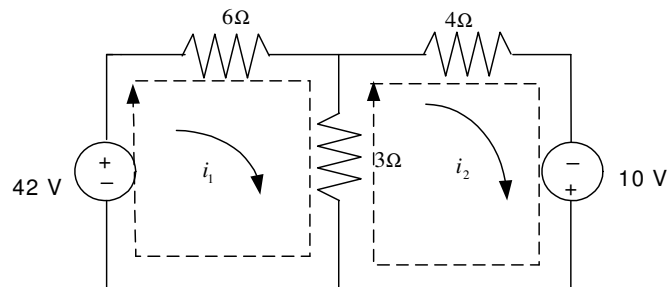


Figura 38:

Equação da malha 1:

$$6i_1 + 3i_1 - 3i_2 - 42 = 0$$

Equação da malha 2:

$$4i_2 - 10 + 3i_2 - 3i_1 = 0$$

Sistema de equações:

$$\begin{aligned} 9i_1 - 3i_2 &= 42 \\ -3i_1 + 7i_2 &= 10 \end{aligned}$$

Resultados das correntes:

$$\begin{aligned} i_1 &= 6A \\ i_2 &= 4A \end{aligned}$$

Na aplicação da análise de malhas quando existe uma fonte de corrente no percurso de circulação, utiliza-se uma variante da metodologia referida atrás.

Nas condições indicadas deve ser feita a circulação num percurso que não inclua a fonte de corrente, o que pode ser feito incorporando duas ou mais malhas na circulação. Desta forma obtém-se menos uma equação o que é compensado com uma nova equação que relaciona a corrente da fonte com as correntes das malhas adjacentes.

Exemplo de aplicação:

Estude o circuito da figura 39 pelo método das correntes nas malhas.

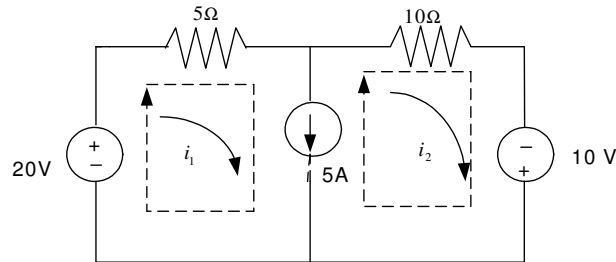


Figura 39:

Equação das malhas 1 e 2:

$$5i_1 + 10i_2 - 10 - 20 = 0$$

Equação do ramo da fonte de corrente:

$$i_1 - i_2 = 5$$

Sistema de equações:

$$5i_1 + 10i_2 = 30$$

$$i_1 - i_2 = 5$$

Resultados das correntes:

$$i_1 = 5A$$

$$i_2 = 10A$$

3.9 Circuitos equivalentes em corrente contínua

3.9.1 Teorema da sobreposição

Sempre que um sistema é alimentado por mais do que uma fonte de energia independente, é possível determinar a resposta total calculando separadamente a resposta para cada uma das fontes independentes e somando todas as contribuições.

Pode-se enunciar da seguinte forma:

”Num circuito activo, linear e bilateral, contendo várias fontes, a corrente num qualquer ramo pode ser obtida pela soma algébrica das correntes que cada fonte produz no ramo considerado tomando-se uma fonte de cada vez, e admitindo-se as outras desligadas e substituídas pelas suas resistências internas.

Este mesmo princípio se utiliza para calcular a tensão aos terminais de um qualquer elemento.

Assim consideremos a figura 40.

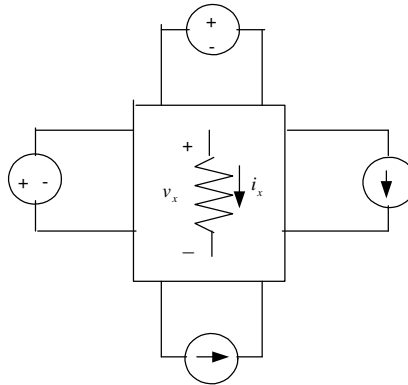


Figura 40:

Pela aplicação do teorema da sobreposição podemos calcular a corrente i_x ou a tensão v_x .

Nas correntes parciais ter-se-á de entrar em linha de conta com os respectivos sentidos, de forma que no somatório o valor parcial da corrente será positivo se tiver o sentido indicado na figura para i_x e será considerado negativo se tiver sentido contrário. O mesmo se passa para as polaridades das tensões parciais. Assim, as expressões resultantes serão as somas algébricas dos valores parciais:

$$\begin{aligned} i_x &= i' + i'' + i''' + i'''' \\ v_x &= v' + v'' + v''' + v'''' \end{aligned}$$

A potência é uma grandeza quadrática não sendo por essa razão possível aplicar o teorema da sobreposição para calcular directamente a potência dissipada numa resistência. Calcula-se a corrente ou a tensão pelo método indicado e aplica-se a expressão da potência.

Metodologia:

a) Considerar uma fonte de cada vez substituindo as restantes pelas suas resistências internas. As fontes de tensão serão substituídas por um curto-circuito ($r_i = 0$), e as fontes de corrente serão substituídas por um circuito aberto ($r_i = \infty$).

b) Utilizar as expressões dos circuitos divisores de tensão e de corrente para calcular os valores parciais.

c) Fazer o mesmo para todas as fontes.

d) Somar algebricamente os valores parciais obtidos.

Exemplo de aplicação:

No circuito da figura 41 utilize o teorema da sobreposição para obter a corrente I e a potência dissipada na resistência de 10Ω .

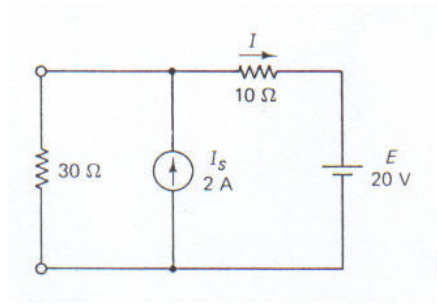


Figura 41:

Consideremos em primeiro a fonte de corrente, substituindo a fonte de tensão por um curto-circuito. O valor parcial I' na resistência de 10Ω , pode ser obtida usando o princípio do divisor de corrente.(figura 42)

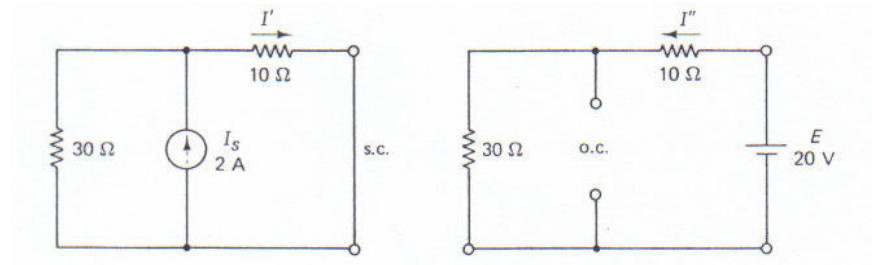


Figura 42:

$$I' = I_s * \frac{30}{10 + 30} = 2 * \frac{30}{40} = 1,5A$$

Considera-se de seguida a fonte de tensão sendo a fonte de corrente substituída por um circuito aberto. O valor parcial I' pode ser obtido facilmente utilizando a lei de Ohm.

$$I' = \frac{20}{10 + 30} = 0,5A$$

Como a corrente I' flue em sentido contrário à direcção de referência o valor desta corrente deve ser afectada pelo sinal menos. Assim:

$$I = I' - I' = 1,5 - 0,5 = 1A$$

A potência dissipada na resistência de 10Ω será:

$$P_{10\Omega} = I^2 * R = 1^2 * 10 = 10W$$

Para mostrar que a sobreposição da potência dará resultados errados, considere-se:

$$P_{10\Omega} = P'_{10\Omega} + P'_{10\Omega} = (I')^2 * R + (I')^2 * R = (1,5)^2 * 10 + (0,5)^2 * 10 = 25W$$

o que prova que conduz a valores errados.

3.10 Teorema de Thèvenin

Dois quaisquer terminais a e b de um circuito activo linear podem ser considerados como os terminais de um circuito constituído por uma fonte de tensão ideal V_{Th} , em série com uma resistência R_{Th} . Onde V_{Th} é a diferença de potencial existente entre os terminais a e b do circuito, quando em aberto, e R_{Th} é a resistência equivalente entre os terminais a e b do circuito, quando substituímos todas as fontes (de corrente e de tensão) pelas suas resistências internas. (figura 43).

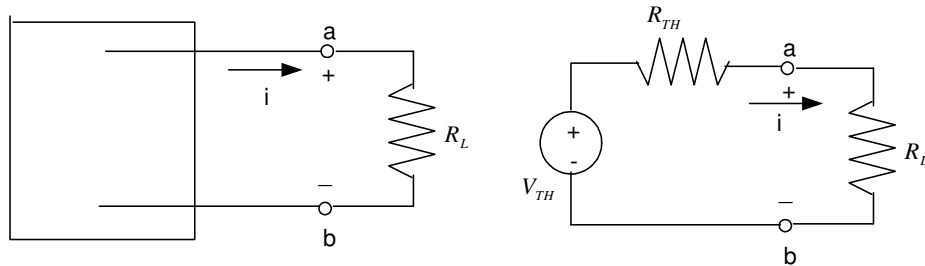


Figura 43:

Se se pretender calcular a corrente que passa numa resistência R colocada aos terminais a e b , procede-se da seguinte forma:

- 1- Desliga-se a resistência R do circuito ficando o circuito aberto em ab .
- 2- Calcula-se a diferença de potencial V_{ab} entre os terminais a e b . Esta diferença de potencial é a tensão de Thèvenin.

$$V_{Th} = V_{ab}$$

- 3- Substituem-se todas as fontes independentes pelas suas resistências internas e calcula-se a resistência equivalente entre os terminais a e b .

$$R_{eq} = R_{Th}$$

- 4- Calcula-se a corrente i em R através da seguinte equação:

$$i = \frac{V_{Th}}{R + R_{Th}}$$

Exemplo de aplicação:

Calcular o equivalente de Thèvenin aos terminais ab do circuito figura 44. Calcular a corrente e tensão na resistência R_L .

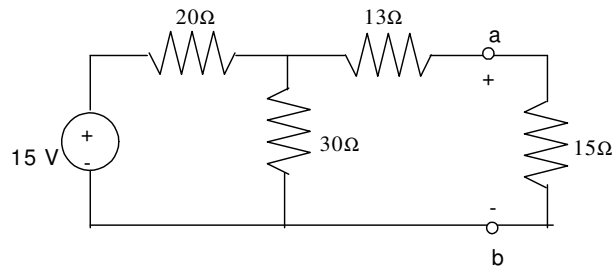


Figura 44:

Cálculo de V_{TH} :

Retirar a resistência R_L . Notar que nesta condição não há corrente na resistência de 13Ω e consequentemente não há queda de tensão. A tensão V_{ab} coincide com $V_{30\Omega}$ e esta pode ser obtida utilizando o princípio do circuito divisor de tensão.

$$V_{Th} = V_{ab} = V_{30\Omega} = 15 * \frac{30}{20 + 30} = 9V$$

Cálculo de R_{Th} :

Substitui-se a fonte de tensão por um curto-circuito, e calcula-se a resistência equivalente vista de ab .

$$R_{eq} = R_{Th} = 13 + \frac{20 * 30}{20 + 30} = 13 + 12 = 25\Omega$$

O circuito equivalente de Thèvenin aos terminais ab é o circuito da figura 45. Se colocarmos de novo a resistência R_L aos terminais ab , temos que o I e o V nessa resistência podem ser calculados pelas seguintes expressões:

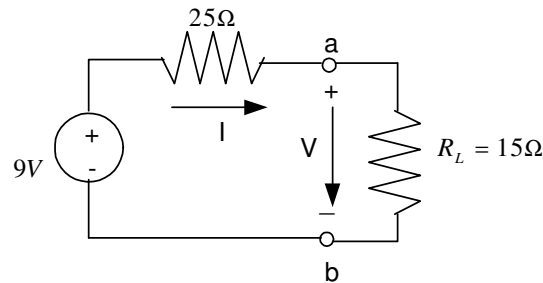


Figura 45:

$$I = \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L} = \frac{9}{25 + 15} = 0,225A$$

$$V = I * R_L = V_{Th} * \frac{R_L}{R_{Th} + R_L} = 9 * \frac{15}{25 + 15} = 3,375V$$

3.10.1 Cálculo da resistência de Thèvenin

Quando os circuitos contêm fontes dependentes a resistência de Thèvenin não pode ser calculada da forma indicada atrás, visto que não é possível determinar a resistência equivalente do circuito, dado que não se conhecem as resistências internas das fontes dependentes.

Para estes circuitos pode-se utilizar um dos dois seguintes métodos:

Método da fonte auxiliar de tensão Para calcular a resistência equivalente de Thèvenin procede-se da seguinte forma:

Passo 1: Substituem-se todas as fontes independentes pelas suas resistências internas, mantendo no circuito as fontes dependentes.

Passo 2: Aplica-se aos terminais a e b uma fonte de tensão de qualquer valor, embora para facilidade de cálculo se utilize normalmente uma fonte de $1V$.

Passo 3: Calcula-se a corrente debitada para o circuito por essa fonte (i_f).

Passo 4: A resistência de Thèvenin é igual ao quociente entre a tensão aplicada ($1V$) e a corrente calculada.

$$R_{Th} = \frac{1}{i_f} \Omega$$

Exemplo: Calcular o equivalente de Thèvenin aos terminais a e b do circuito da figura 46. Determinar o valor da corrente i .

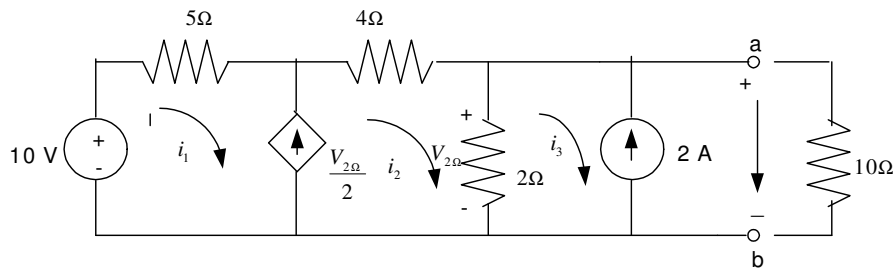


Figura 46:

Cálculo de V_{Th} :

$$V_{Th} = V_{ab} = V_{2\Omega} = 2 * (i_2 - i_3)$$

Equações do circuito,

$$\begin{aligned} 5i_1 + 4i_2 + 2i_2 - 2i_3 - 10 &= 0 \\ i_1 - i_2 &= \frac{V_{2\Omega}}{2} \\ i_3 &= -2 \end{aligned}$$

donde,

$$i_2 = -0,25A$$

e,

$$V_{Th} = (-0,25 + 2) * 2 = 3V$$

Cálculo de R_{Th} :

Substitue-se a fonte de tensão pela resistência interna ($r_i = 0$) e a fonte de corrente por um circuito aberto ($r_i = \infty$), e coloca-se uma fonte auxiliar de tensão aos terminais a e b . Circuito da figura 47.

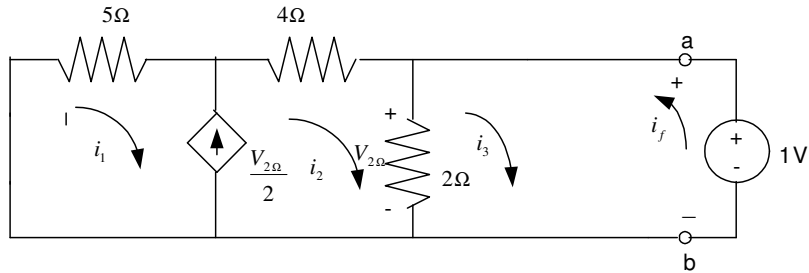


Figura 47:

Equações do circuito:

$$1 + 2i_3 - 2i_2 = 0$$

$$i_1 - i_2 = \frac{V_{2\Omega}}{2}$$

$$5i_1 + 4i_2 + 2i_2 - 2i_3 = 0$$

daqui tira-se o valor de i_3 ,

$$i_3 = -i_f = -0,615A$$

o que permite calcular R_{Th}

$$R_{Th} = \frac{1}{0,615} = 1,62\Omega$$

Cálculo da corrente i :

O circuito da figura 48, constituído pelo equivalente de Thèvenin tendo aos terminais a e b a resistência de carga, permite calcular a corrente i aplicando a lei de Ohm.

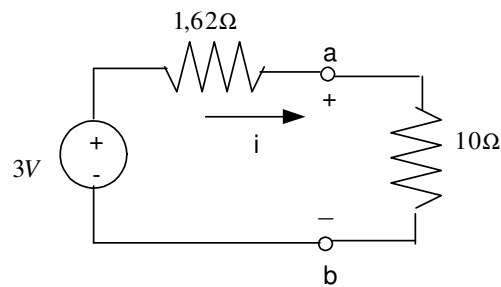


Figura 48:

$$i = \frac{V_{Th}}{R_{Th} + 10} = \frac{3}{11,62} = 0,26A$$

Método da fonte auxiliar de corrente Para calcular a resistência equivalente de Thèvenin procede-se da mesma forma:

Passo 1: Substituem-se todas as fontes independentes pelas suas resistências internas, mantendo no circuito as fontes dependentes.

Passo 2: Aplica-se aos terminais a e b uma fonte de corrente de qualquer valor. Para facilidade de cálculo utiliza-se normalmente uma fonte de $1A$.

Passo 3: Calcula-se a tensão aos terminais da fonte auxiliar (v_f).

Passo 4: A resistência de Thèvenin é igual ao quociente entre a tensão calculada e a corrente aplicada ($1A$).

$$R_{Th} = \frac{v_f}{1}$$

Exemplo:

Calcular o equivalente de Thèvenin do circuito da figura 49.

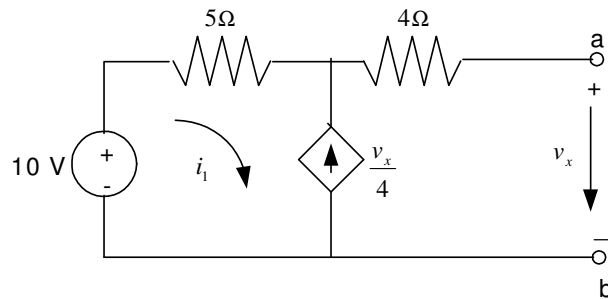


Figura 49:

V_{Th} :

$$V_{Th} = V_{ab} = v_x$$

Equações do circuito,

$$\begin{aligned} 5i_1 + v_x - 10 &= 0 \\ i_1 &= -\frac{v_x}{4} \end{aligned}$$

ou seja,

$$-5v_x + 4v_x = 10$$

donde,

$$V_{Th} = v_x = -40V$$

R_{Th} :

Retirando a fonte independente de tensão (substituída por $r_i = 0$), e colocando aos terminais a e b , uma fonte auxiliar de corrente, o circuito passa a ser constituído como o da figura 50.

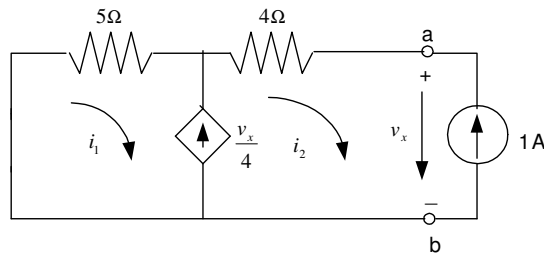


Figura 50:

Equações do circuito:

$$\begin{aligned}\frac{v_x}{4} &= i_1 - i_2 \\ i_2 &= -1\end{aligned}$$

donde se tira que,

$$v_x = 36V$$

assim,

$$R_{Th} = \frac{36}{1} = 36\Omega$$

A figura 51 mostra o equivalente de Thèvenin do circuito dado.

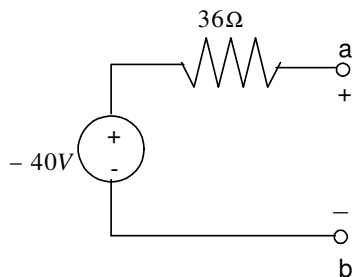


Figura 51:

Método da corrente de curto-circuito Para calcular a resistência equivalente de Thèvenin procede-se da seguinte forma:

Passo 1: Mantendo a topologia do circuito, estabelece-se aos terminais a e b um curto-circuito.

Passo 2: Calcula-se a corrente i_{cc} , que é a corrente de curto-circuito entre os terminais a e b .

Passo 3: A resistência de Thèvenin é obtida através da seguinte expressão:

$$R_{TH} = \frac{V_{TH} \equiv V_{ab}}{i_{cc}}$$

Exemplo:

Tomemos o circuito da figura 26 e calculemos o R_{Th} utilizando a corrente de curto-circuito.
Cálculo de R_{Th} :

Curto-circuitar os terminais a e b . O circuito resultante é o da figura 52.

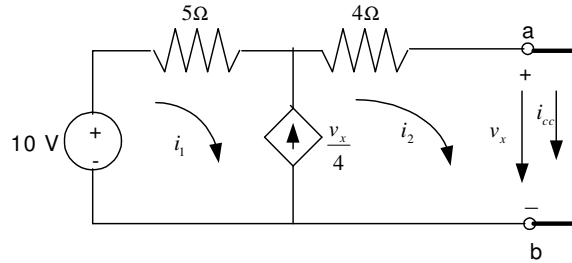


Figura 52:

As equações do circuito são as seguintes:

$$\begin{aligned} 5i_1 + 4i_2 - 10 &= 0 \\ \frac{V_x}{4} &= i_1 - i_2 \\ V_x &= 0 \end{aligned}$$

deste sistema tira-se o valor de $i_2 = i_{cc}$

$$i_{cc} = \frac{10}{9}$$

como,

$$V_{Th} = -40V$$

o valor de R_{Th} é,

$$R_{Th} = \frac{|V_{Th}|}{|i_{cc}|} = \frac{40}{\frac{10}{9}} = 36\Omega$$

3.11 Teorema de Norton

Os terminais a e b . de um circuito linear e activo podem ser considerados os terminais de circuito constituído por uma fonte de corrente ideal I_N , em paralelo com uma resistência R_N . (figura 53)

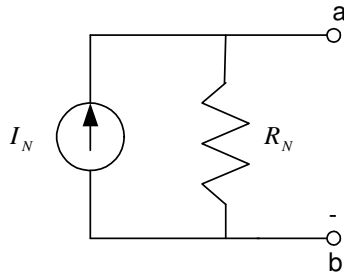


Figura 53:

A corrente I_N é a corrente de curto-circuito entre os terminais a e b , enquanto R_N é a resistência equivalente entre a e b quando se substituírem todas as fontes (de corrente e de tensão) pelas suas resistências internas.

Para se calcular o circuito equivalente de Norton procede-se do seguinte modo:

Passo 1: Desliga-se a resistência de carga do circuito.

Passo 2: Estabelece-se um curto-circuito aos terminais a e b e calcula-se a corrente $I_{cc} = I_N$.

Passo 3: Substituem-se todas as fontes pelas suas resistências internas e calcula-se a resistência equivalente R_N , aos terminais a e b .

Na figura representa-se o equivalente de Norton de um qualquer circuito aos terminais a e b .

Se se pretender calcular a corrente numa qualquer resistência de carga R , utiliza-se a expressão do circuito divisor de corrente.

$$i = I_N * \frac{R_N}{R_N + R}$$

Exemplo:

Calcular o equivalente de Norton do circuito da figura 54 já estudado anteriormente para a obtenção do circuito equivalente de Thèvenin.

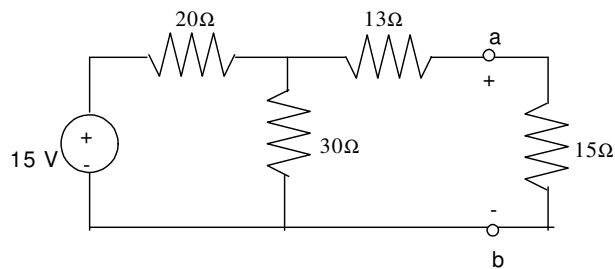


Figura 54:

Cálculo de I_N :

Estabelece-se um curto-circuito aos terminais a e b , e calcula-se a corrente nesse curto-circuito.(figura 55)

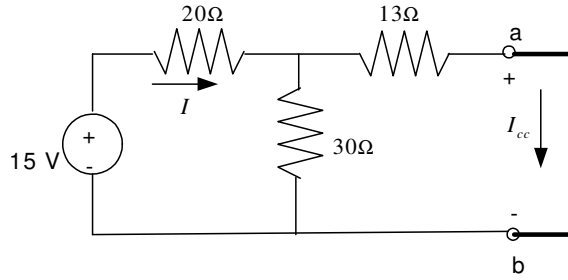


Figura 55:

Em primeiro lugar tem-se de calcular a corrente total, dividindo a tensão da fonte pela resistência equivalente do circuito.

$$I = \frac{15}{20 + \frac{13 \cdot 30}{13 + 30}} = 0,516 A$$

A corrente I_{cc} é obtida através da expressão do divisor de corrente,

$$I_N = I_{cc} = I * \frac{30}{30 + 13} = 0,516 * \frac{30}{43} = 0,36 A$$

Cálculo de R_N :

O cálculo de R_N é feito da mesma forma que o cálculo de R_{Th} , isto é, substituiu-se a fonte independente pela sua resistência interna ($r_i = 0$), e calcula-se a resistência equivalente aos terminais a e b .

$$R_N = R_{eq} = 13 + \frac{20 * 30}{20 + 30} = 13 + 12 = 25 \Omega$$

O circuito equivalente de Norton aos terminais a e b , é o circuito da figura 56.

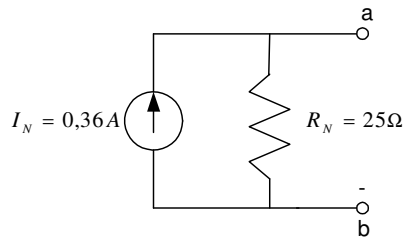


Figura 56:

Nas situações em que existem fontes dependentes no circuito calculam-se os parâmetros do equivalente de Norton, da seguinte forma:

Passo 1: Calcula-se a tensão aos terminais a e b , com o circuito aberto.

Passo 2: Estabelece-se um curto-circuito aos terminais a e b e calcula-se a corrente $I_{cc} = I_N$.

Passo 3: A resistência de Norton R_N é obtida pela expressão:

$$R_N = \frac{V_{ab}}{I_{cc}}$$

Este método é essencialmente o mesmo que o método da corrente de curto-circuito para calcular a R_{Th} , como facilmente se constata.

3.12 Conversão de fontes

Os teoremas de Thèvenin e Norton permitem obter dois circuitos equivalentes aos terminais a e b dum qualquer circuito linear e activo.

Estes circuitos são constituídos por uma fonte e uma resistência. No caso do teorema de Thèvenin a fonte é tensão e a resistência está em série, no caso do teorema de Norton a fonte é de corrente e a resistência está em paralelo.

Como os dois circuitos são equivalentes ao mesmo circuito têm de ser equivalentes entre si. Para além disso constata-se ainda que a resistência de Thèvenin é igual à resistência de Norton.

$$R_{Th} = R_N$$

Desta forma é possível passar de um para o outro através das expressões indicadas.(figura57)

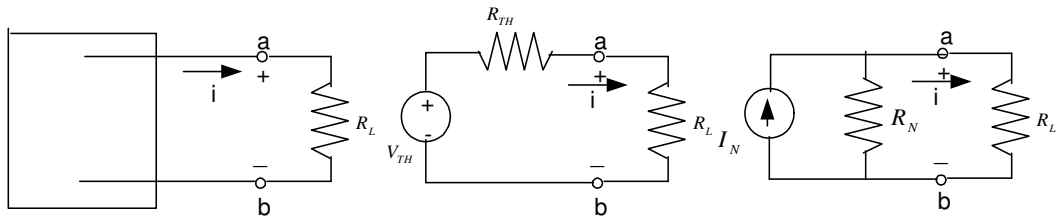


Figura 57: Circuitos equivalentes de Thèvenin e Norton

$$V_{Th} = I_N * R_N \Rightarrow I_N = \frac{V_{Th}}{R_{Th}}$$

$$R_{Th} = R_N$$

Esta transformação do circuito equivalente de Thèvenin no circuito equivalente corresponde na prática a uma conversão de fontes, que pode ser generalizada a quaisquer fontes independentes de tensão e de corrente.

Exemplo: Figura 58

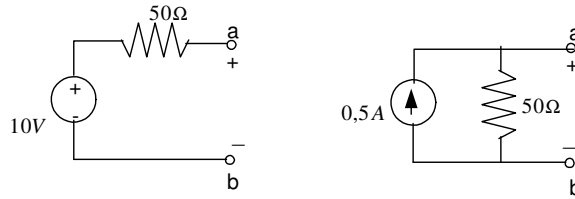


Figura 58: Conversão de fontes

A conversão ou transformação de fontes pode ser aplicada numa forma sistemática com o objectivo de simplificar um circuito.

Exemplo prático:

Calcular o equivalente de Thèvenin do circuito da figura 59, utilizando só conversão de fontes.

Podem ser utilizadas muitas técnicas para resolver este problema incluindo os equivalentes de Norton e Thèvenin, o teorema da sobreposição, ainda os métodos das malhas e dos nós.

Mostra-se neste exemplo uma outra forma de analisar o circuito e calcular a corrente I .

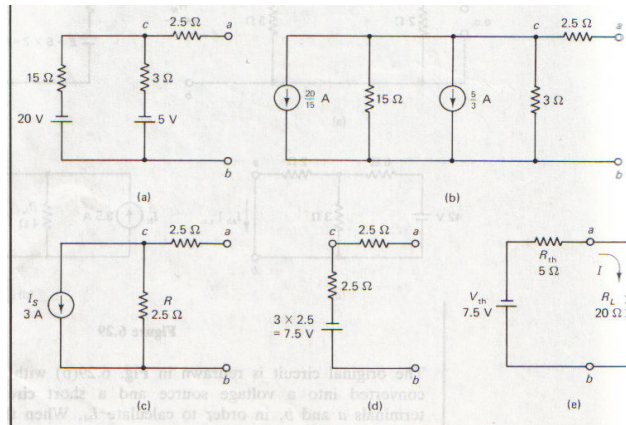


Figura 59: Análise de um circuito por conversão de fontes

A fonte de corrente de $2A$ é convertida numa fonte de tensão. Combinam-se as resistências em série 5Ω e 10Ω . Convertem-se as duas fontes de tensão em fontes de correntes. As duas fontes são combinadas e as resistências em paralelo convertidas na resistência equivalente.

$$I_s = \frac{20}{15} + \frac{5}{3} = 3A$$

$$R = \frac{3 * 15}{3 + 15} = 2,5\Omega$$

Finalmente converte-se a fonte de corrente em fonte de tensão e obtém-se o circuito equivalente de Thèvenin aos terminais a e b . somando as duas resistências de $2,5\Omega$ em série. A corrente I é obtida através de

$$I = -\frac{7,5}{5 + 20} = -0,3A$$

3.13 Teorema de Millman

O teorema de Millman é um corolário do teorema de Norton e aplica-se em situações em que se pretende passar de um conjunto de fontes de tensão em paralelo para uma simples fonte de tensão com uma resistência em série. (figura 60)

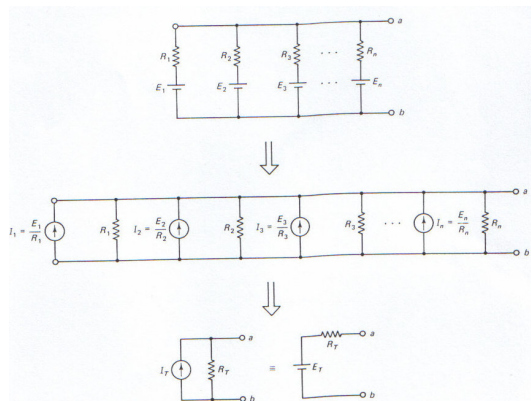


Figura 60: Circuito eléctrico - Teorema de Millman

As fontes de tensão são convertidas em fontes de corrente as quais são facilmente adicionadas.

$$R_{eq} = \frac{1}{G_{eq}} = \frac{1}{G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n}}$$

$$I_T = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3} + \dots + \frac{E_n}{R_n}$$

$$= E_1 * G_1 + E_2 * G_2 + E_3 * G_3 + \dots + E_n * G_n$$

A fonte de corrente resultante é convertida numa fonte de tensão.

$$E_T = I_T * R_{eq} = \frac{E_1 * G_1 + E_2 * G_2 + E_3 * G_3 + \dots + E_n * G_n}{G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n}$$

3.14 Transferência de potência máxima

A análise de circuitos é de primordial importância na caracterização de sistemas projectados para transferirem potência da fonte para a carga.

Podemos distinguir dois tipos de sistemas:

3.15 Sistemas de potência

Coloca-se ênfase na eficiência com que a potência é transmitida. Estão relacionados com a geração, transporte e distribuição de grandes quantidades de energia eléctrica.

3.16 Sistemas de comunicação e instrumentação

Transmitem informação através de impulsos eléctricos.

Nestes sistemas a potência disponível é normalmente muito pequena, pelo que é fundamental transmitir o máximo de potência para a carga.

Nestes casos a quantidade de energia é pequena pelo que a eficiência não tem primordial importância.

Vamos analisar o problema da máxima transferência de potência em sistemas que possam ser modelados por um circuito puramente resistivo.

Vamos considerar uma rede resistiva que contenha fontes independentes e dependentes e um par de terminais onde é ligada a carga R_L . (figura 61)

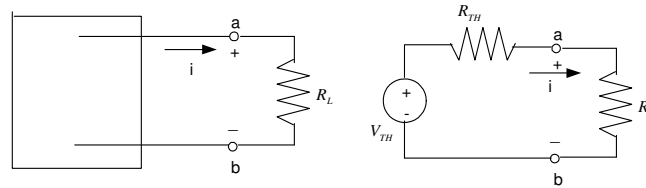


Figura 61: Circuito equivalente de Thèvenin

A potência dissipada na carga é,

$$P = R_L * I^2$$

onde,

$$I = \frac{V_{TH}}{R_{TH} + R_L}$$

por isso,

$$P = R_L * \left[\frac{V_{TH}}{R_{TH} + R_L} \right]^2$$

pelo que,

$$P = f(R_L)$$

a "potência dissipada é uma função de R_L ".

A função $P = f(R_L)$, tem um máximo quando a sua 1ª derivada é igual a zero. Assim:

$$\frac{dP}{dR_L} = V_{TH}^2 \cdot (R_{TH} + R_L)^{-2} - 2R_L * V_{TH}^2 \cdot (R_{TH} + R_L)^{-3} = 0$$

desenvolvendo,

$$1 = \frac{2R_L}{R_{TH} + R_L} \Rightarrow R_{TH} + R_L = 2R_L$$

ou seja,

$$R_L = R_{TH}$$

o que implica que:

$$P = \frac{V_{TH}^2}{4R_L}$$

"O máximo da transferência de potência para a carga ocorre quando a resistência de carga é igual à resistência de Thèvenin"

Exemplo:

Qual a potência máxima que pode ser absorvida de uma bateria de 12 V, que tem uma resistência interna de $0,25\Omega$?

$$P = \frac{V^2}{4 * r_i} = \frac{12^2}{4 * 0,25} = 144W$$

3.17 Balanço de potências

Num qualquer circuito o somatório das potências nas fontes é igual à soma das potências nas resistências.

$$\sum_{i=1}^n P_{f_i} = \sum_{k=1}^m P_{R_k}$$

Exemplo:

Considere-se o circuito da figura 62. Faça o balanço de potências.

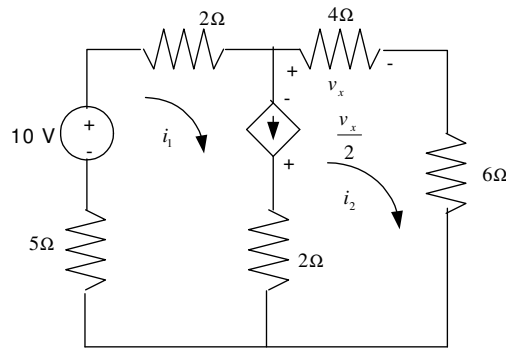


Figura 62: Circuito eléctrico - Balanço de potências

Análise do circuito:

Equações:

$$\begin{aligned} 2i_1 + 4i_2 + 6i_2 + 5i_1 - 10 &= 0 \\ i_1 - i_2 &= \frac{v_x}{2} \\ v_x &= 4i_2 \end{aligned}$$

Sistema de equações,

$$\begin{aligned} 7i_1 + 10i_2 &= 10 \\ i_1 - 3i_2 &= 0 \end{aligned}$$

Resolução dos sistema,

$$\begin{aligned} i_1 &= 0,32A \\ i_2 &= 0,96A \end{aligned}$$

Cálculo das potências das fontes:

P_{10V} :

$$P_{10V} = 10 * i_1 = 10 * 0,96 = 9,6W$$

$P_{\frac{V_x}{2}}$:

Cálculo de V_f recorrendo à equação da malha 1,

$$2i_1 + 2i_1 - 2i_2 - V_f + 5i_1 - 10 = 0$$

$$V_f = -2V$$

$$P_{\frac{V_x}{2}} = \frac{v_x}{2} * V_f = 2i_2 * V_f = 0,64 * (-2) = -1,28W$$

A potência total das fontes é:

$$P_f = 9,6 - 1,28 = 8,32W$$

Cálculo das potências das resistências:

$$P_{2\Omega} = 2 * 0,96^2 = 1,84W$$

$$P_{2\Omega} = 2 * 0,64^2 = 0,82W$$

$$P_{4\Omega} = 4 * 0,32^2 = 0,41W$$

$$P_{6\Omega} = 6 * 0,32^2 = 0,61W$$

$$P_{5\Omega} = 5 * 0,96^2 = 4,61W$$

$$P_R = 8,29W$$

Capítulo III

Conteúdo

I	ELECTROMAGNETISMO	2
1	Magnetostática	2
1.1	Força magnética	2
1.2	Equivalência entre um elemento de corrente e uma carga em movimento	4
1.3	Campo de indução magnética	4
1.4	Força de Lorentz	5
1.4.1	Indução magnética em pontos externos a um condutor rectilíneo muito longo	7
1.5	Lei de Ampère	8
1.5.1	Aplicações da lei de Ampère para cálculo do campo de indução magnética	9
2	Indução electromagnética - Lei de Faraday	10
2.1	Experiências de Faraday	10
2.2	Fluxo da indução magnética	11
2.3	Lei de Faraday	12
2.4	Lei de Lenz	14
2.5	Gerador de corrente alternada	15
3	Indutância e energia do campo magnético	16
3.1	Indutância mútua	16
3.2	Auto-indutância	17
3.2.1	Coeficiente de acoplamento	17
3.2.2	Bobinas	18
3.2.3	Associação de bobinas	18
4	Propriedades magnéticas da matéria	19
4.1	Interpretação de Ampère	20
4.1.1	Teoria electrónica do magnetismo à face da constituição da matéria	20
4.2	Materiais ferromagnéticos	21
4.2.1	Saturação e histerese dos materiais ferromagnéticos	21
5	Lei do circuito magnético.	23
5.1	Força magnetomotriz	23
5.2	Relutância magnética	24
5.3	Cálculo aproximado das relutâncias magnéticas	27
5.4	Circuitos magnéticos com derivações	28

Parte I

ELECTROMAGNETISMO

1 Magnetostática

Define-se como magnetostática o estudo dos campos eléctricos produzidos por correntes estacionárias.

1.1 Força magnética

A expressão para a força magnética será estabelecida através de factos experimentais envolvendo dois elementos de corrente, em analogia com o método seguido para o estabelecimento da expressão da força electrostática para as cargas eléctricas.

Num condutor filiforme percorrido por uma corrente i , selecciona-se um elemento de comprimento \vec{ds} . Chama-se elemento de corrente ao produto $i\vec{ds}$. Assim um elemento de corrente é um vector que tem módulo ids e direcção e sentido igual ao da corrente que percorre o condutor.

Através de experimentação verificou-se que:

- Quando dois elementos de corrente são colocados muito próximos exercem forças entre si.
- Se os elementos forem paralelos (a mesma direcção e correntes no mesmo sentido) a força será atractiva. Se forem antiparalelos (a mesma direcção e correntes em sentido contrário) a força será repulsiva. (figura 1)

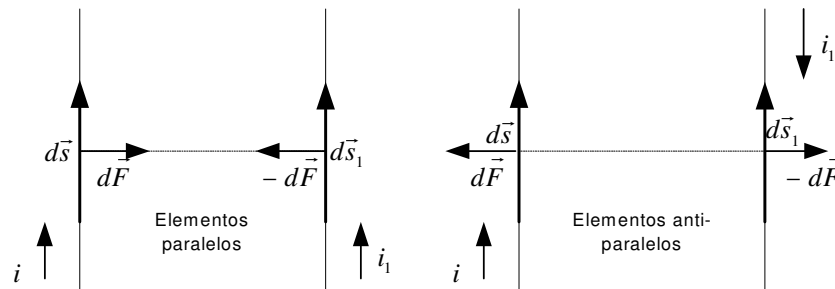


Figura 1: Forças resultantes da proximidade entre elementos de corrente

- A força elementar \vec{dF} entre dois elementos de corrente é proporcional ao produto das intensidades das correntes que percorrem os condutores.

$$\vec{dF} \propto i.i_1$$

- A força entre os dois elementos depende das posições relativas bem como da orientação de \vec{ds} e \vec{ds}_1 (figura 2)

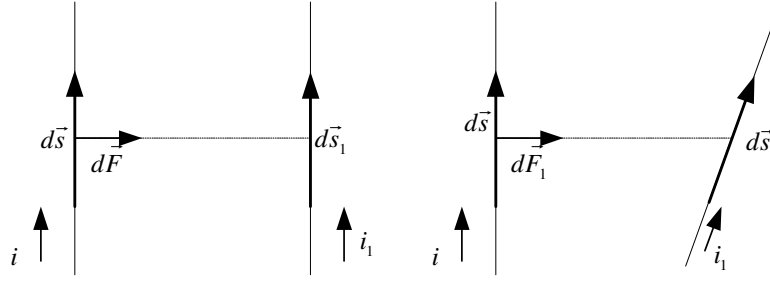


Figura 2: Força entre elementos de corrente com direcções não paralelas

e) A força elementar entre os dois elementos é inversamente proporcional ao quadrado da distância que separa os elementos de corrente.

A partir destes resultados experimentais a expressão da força entre os dois elementos de corrente é:(figura 3)

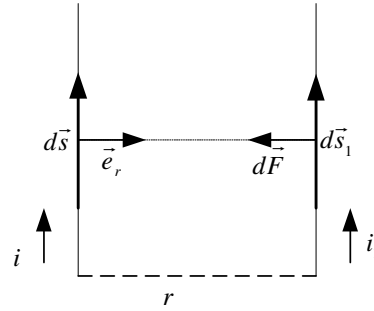


Figura 3: Força entre elementos de corrente separados de uma distância r

$$\vec{dF} \propto i.i_1 \frac{d\vec{s}_1 \times (d\vec{s} \times \vec{e}_r)}{r^2}$$

A expressão é a da força magnética. A constante de proporcionalidade é $\frac{\mu_0}{4\pi}$ onde μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo.

$$\mu_0 = 4\pi.10^{-7} \left[\frac{N}{A^2} \right]$$

Assim:

$$\vec{dF} = \frac{\mu_0}{4\pi} . i . i_1 \frac{d\vec{s}_1 \times (d\vec{s} \times \vec{e}_r)}{r^2}$$

ou,

$$\vec{dF} = \frac{\mu_0}{4\pi} . i . i_1 \frac{d\vec{s}_1 \times (d\vec{s} \times \vec{r})}{r^3}$$

Na electrostática obteve-se empiricamente a expressão da força electrostática entre duas cargas pontuais a qual constitui a lei de Coulomb.

No caso da força electrostática introduziu-se a constante permitividade eléctrica do vácuo (ϵ_0) e na força magnética a constante (μ_0) que é a permeabilidade magnética do vácuo. Vamos obter a relação entre elas:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}}{\frac{\mu_0}{4\pi}} &= \frac{1}{\mu_0 \cdot \epsilon_0} = \frac{1}{8,85 * 10^{-12} * 10^{-7}} \left[\frac{1}{(C^2 N) / (Nm^2 A^2)} \right] \\ \frac{1}{\mu_0 \cdot \epsilon_0} &= 9 * 10^{16} [m^2 A^2 / C^2] = 9 * 10^{16} \left[\frac{m^2}{s^2} \right] \\ \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \cdot \epsilon_0}} &= 3 * 10^8 \left[\frac{m}{s} \right]\end{aligned}$$

1.2 Equivalência entre um elemento de corrente e uma carga em movimento

Consideremos um elemento de corrente $i' d\vec{s}'$.

$$\begin{aligned}i' d\vec{s}' &= \frac{dq'}{dt} d\vec{s}' \\ &= \frac{ds_1}{dt} dq' = dq' \vec{v}'\end{aligned}$$

Utilizando a expressão da força magnética entre dois elementos de corrente,

$$\begin{aligned}d^2 \vec{F} &= \frac{\mu_0}{4\pi} i.i' \frac{d\vec{s}' \times (d\vec{s} \times e_r)}{r^2} \\ d^2 \vec{F} &= \frac{\mu_0}{4\pi} i.dq' \frac{\vec{v} \times (d\vec{s} \times e_r)}{r^2}\end{aligned}$$

Numa carga finita q'

$$d\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} i.q' \frac{\vec{v} \times (d\vec{s} \times e_r)}{r^2}$$

Desta expressão podemos concluir que a força magnética no elemento de corrente $i' d\vec{s}'$ devido à presença de um outro elemento de corrente $i d\vec{s}$ é mesma que a força magnética numa carga elementar dq_1 dotada de velocidade \vec{v}' no local do elemento de corrente $i' d\vec{s}'$. Se a carga estiver em repouso $\vec{v}' = 0$ e a força magnética será zero.

1.3 Campo de indução magnética

Na linha desenvolvida no estudo da electrostática na qual se associa a uma carga eléctrica em repouso, numa determinada região do espaço, um campo eléctrico ou electrostático, também na magnetostática é possível associar a uma corrente ou elemento de corrente um campo magnético.

A vantagem da definição do campo eléctrico é que, sendo conhecida uma determinada configuração de carga e consequentemente o campo eléctrico criado, então a força eléctrica dessa configuração de carga sobre qualquer outra pode ser obtida pelo produto do campo por esta outra carga, isto é, $\vec{F} = q\vec{E}$.

Por analogia com o campo eléctrico introduz-se a noção de campo magnético. Dado um elemento de corrente este produzirá um campo elementar de indução magnética identificado por

$d\vec{B}$ e assim a força magnética elementar $d^2\vec{F}$ será dada pelo produto externo do campo elementar pelo elemento de corrente referido.

$$d^2\vec{F} = i' d\vec{s}' \times d\vec{B}$$

Assim um elemento de corrente $i d\vec{s}$ produzirá um campo magnético elementar que exercerá uma força magnética elementar sobre qualquer outro elemento de corrente naquela região do espaço. Por comparação das expressões da força magnética tira-se que:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{s} \times \vec{e}_r}{r^2}$$

que é a expressão do campo de indução magnética num ponto P a uma distância r dum elemento de corrente $i d\vec{s}$.

Sendo o campo magnético um campo de forças definimos da mesma força que para o campo eléctrico as linhas de força do campo que designaremos por linhas de indução. As linhas de força são tangentes ao vector indução magnética. As linhas de força são linhas concêntricas tendo o elemento de corrente como eixo (figura 4).

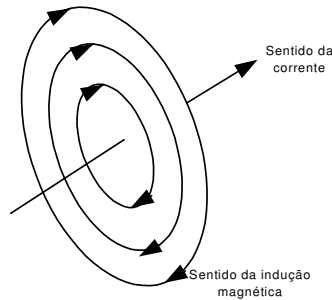


Figura 4: Linhas de força do campo magnético criado por um elemento de corrente

Para definir o sentido das linhas de força do campo de indução utiliza-se uma regra prática conhecida pela *regra da mão direita*. Segurando o condutor com a mão direita de forma que o sentido da corrente seja o do polegar então os outros dedos da mão darão o sentido das linhas de indução.

No sistema internacional a unidade do campo de indução é a *Tesla*.

Tesla é a indução de um campo magnético uniforme e invariável, que sobre um condutor rectilíneo normal à direcção do campo e conduzindo uma corrente invariável de 1 Ampère, exerce uma força igual a um Newton por metro de comprimento do referido condutor.

1.4 Força de Lorentz

A partir da expressão da indução magnética elementar (figura seguinte)

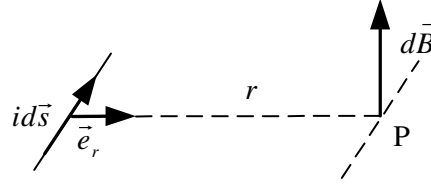


Figura 5: Indução magnética elementar

é possível obter por integração a um circuito completo a indução magnética total (figura seguinte)

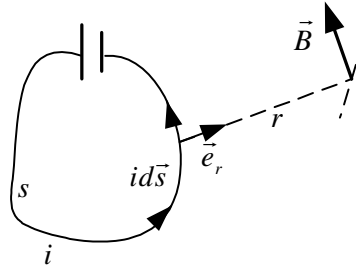


Figura 6: Indução magnética total

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint_S \frac{d\vec{s} \times \vec{e}_r}{r^2}$$

Corresponde à indução magnética num ponto P a uma distância r de um circuito fechado s percorrido por uma corrente i .

Se no ponto P tivermos uma carga q' dotada de velocidade v' a força magnética será:

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} i q' \vec{v}' \times \oint_S \frac{d\vec{s} \times \vec{e}_r}{r^2}$$

$$\vec{F} = q' \left(\vec{v}' \times \vec{B} \right)$$

Esta expressão dá-nos a força magnética numa carga q' com uma velocidade \vec{v}' devido à presença do campo \vec{B} .

Devido à presença da carga existe um campo eléctrico que coexistirá com um campo magnético sempre que a carga estiver em movimento. A força total que agirá sobre a carga q' em movimento terá as contribuições do campo eléctrico e do campo magnético. Assim:

$$\vec{F} = q' \left[\vec{E} + \left(\vec{v}' \times \vec{B} \right) \right]$$

Expressão da *força de Lorentz*.

1.4.1 Indução magnética em pontos externos a um condutor rectilíneo muito longo

Consideremos um condutor rectilíneo muito longo atravessado por uma corrente eléctrica i . Calcular a indução magnética produzida pela corrente num ponto P a uma distância l do condutor. (figura 7).

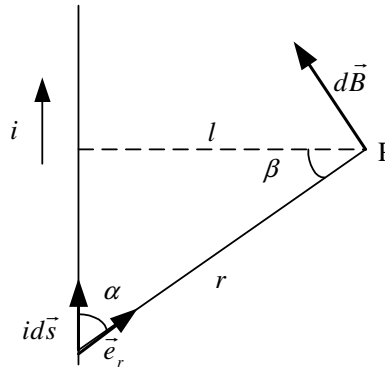


Figura 7: Indução magnética produzida pela corrente, num ponto P a uma distância l

Indução magnética produzida por um elemento de corrente $id\vec{s}$ é:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{s} \times \vec{e}_r}{r^2}$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{ds \cdot \sin \alpha}{r^2}$$

Procedendo a mudança de variáveis. Chamando β ao ângulo entre l e r :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \frac{s}{l} \\ s &= l \cdot \operatorname{tg} \beta \\ ds &= l \cdot \sec^2 \beta \cdot d\beta \end{aligned}$$

como:

$$\sin \alpha = \cos \beta$$

e:

$$r^2 = \frac{l^2}{\cos^2 \beta}$$

Procedendo às substituições e efectuando as simplificações possíveis:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi l} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \beta \cdot d\beta$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi l} [\sin \beta]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi l}$$

Indução magnética num ponto qualquer a uma distância l de um condutor rectilíneo muito longo, percorrido por uma corrente i . Lei de *Biot-Savart*.

1.5 Lei de Ampère

Consideremos um condutor rectilíneo muito longo percorrido por uma corrente eléctrica i . A indução magnética produzida a uma distância l do condutor é dada por:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi l}$$

A direcção e o sentido do vector indução magnética \vec{B} são dados pela regra da mão direita, que indica ser a indução magnética perpendicular tanto a i como a l . Significa que os vectores \vec{B} são tangentes a um círculo que tem como eixo a corrente i sendo esta perpendicular ao plano do círculo (figura 8).

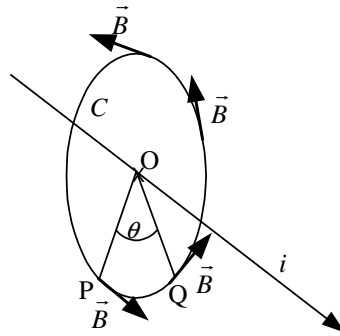


Figura 8: Ilustração da aplicação da Lei de Ampère

Consideremos o integral de linha do vector \vec{B} de P a Q:

$$I = \int_P^Q \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

onde $d\vec{s}$ é um elemento de arco ao longo da trajectória, pelo o integral referido dá-nos o trabalho realizado pelo campo entre P e Q. Se estendermos este resultado a todo o círculo temos a circulação do vector ao longo de uma linha fechada.

$$I = \oint_c \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Resolvendo:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint_c B \cdot ds = \oint_c \left[\frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi l} \right] ds$$

como a quantidade dentro do parentesis é constante:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi l} \oint_c ds = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi l} \cdot 2\pi l = \mu_0 \cdot i$$

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot i$$

É a expressão da lei de Ampère. É uma lei absolutamente geral, e aplica-se a caminhos não circulares, desde que envolvam a corrente. Se o caminho envolver mais correntes, então a lei de Ampère escreve-se da seguinte forma:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum_{k=1}^n i_k$$

Se não envolver nenhuma corrente temos:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

1.5.1 Aplicações da lei de Ampère para cálculo do campo de indução magnética

Campo magnético criado por um fio rectilíneo muito comprido percorrido por uma corrente i . Considere a figura 9.

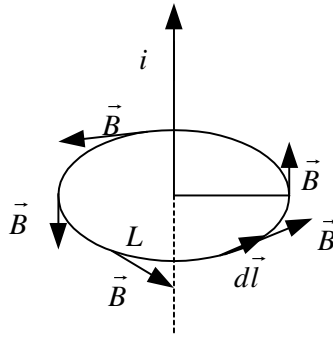


Figura 9: Aplicação da Lei de Ampère

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_c B \cdot dl$$

dado que $\vec{B} // d\vec{l}$. Por outro lado B é constante sobre c , pelo que podemos escrever:

$$\oint_c B \cdot dl = B \oint_c dl = B \cdot 2\pi r$$

pela lei de Ampère temos que:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot i$$

logo:

$$\begin{aligned} B \cdot 2\pi r &= \mu_0 \cdot i \\ B &= \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi r} [Tesla] \end{aligned}$$

Campo magnético no interior de um solenóide com N espiras, supondo o solenóide muito longo Considere a figura 10.

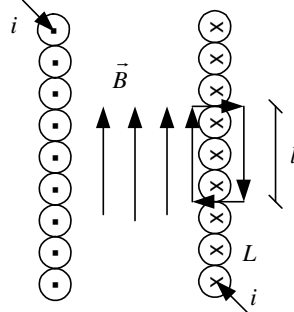


Figura 10: Aplicação da Lei de Ampère a um solenoide

O campo magnético no exterior do solenóide é nulo e no interior é uniforme.

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_c B \cdot dl$$

dado que \vec{B}/dl e B é uniforme.

$$\begin{aligned} B \cdot l &= \mu_0 \cdot N \cdot i \\ B &= \frac{\mu_0 \cdot N \cdot i}{l} \end{aligned}$$

2 Indução electromagnética - Lei de Faraday

Estivemos até esta altura a estudar os campos magnéticos admitindo implicitamente que estes campos não variam no tempo, ou seja, são campos estacionários. Os assuntos tratados correspondem à chamada magnetostática. Vamos de seguida supor que os campos magnéticos variam com o decorrer do tempo e vamos estudar as consequências.

2.1 Experiências de Faraday

Uma corrente eléctrica pode produzir um campo magnético. Faraday provou, baseando em trabalhos de Oersted e Ampère, que os campos magnéticos podem produzir correntes. Faraday provou que um campo magnético estacionário próximo a uma espira também estacionária ligada a um galvanómetro, não acusa a passagem da corrente eléctrica.

Se o campo magnético sofrer qualquer variação o galvanómetro acusa a passagem de uma corrente eléctrica.

O fenómeno da produção de uma corrente eléctrica num circuito provocada pela presença de um campo magnético variável é chamado de *indução electromagnética*, e a corrente é designada por *corrente induzida*. Este fenómeno é ilustrado pela figura 11.

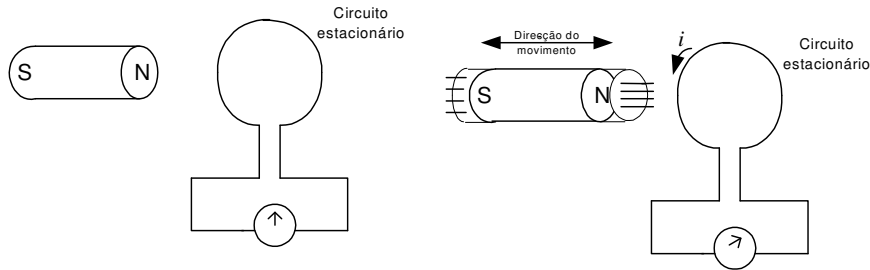


Figura 11: Indução electromagnética

A lei da indução electromagnética é a chamada lei de Faraday.

As correntes induzidas num circuito podem ser obtidas por:

a) O circuito rígido e mover-se como um todo no campo magnético, de modo que o fluxo do campo de indução magnética através da área do circuito varie ao longo do tempo.

b) Sendo o campo de indução magnética estacionário, o circuito pode ser deformável, de modo que o fluxo de \vec{B} através do circuito varie no tempo.

c) O circuito pode ser estacionário e indeformável, mas o vector indução magnética através da superfície limitada pelo circuito variar no tempo.

Duma forma geral pode-se dizer que há indução electromagnética sempre que houver movimento do circuito o de parte dele, ou então, quando há variação de \vec{B} obrigando a uma variação do fluxo de \vec{B} através da superfície do circuito.

O fenómeno da indução electromagnética permitiu o desenvolvimento das máquinas eléctricas: geradores, transformadores, etc.

2.2 Fluxo da indução magnética

Consideremos um campo magnético numa determinada região do espaço e, nessa região, uma superfície qualquer S . Seleccionemos um elemento dessa superfície e o versor normal a essa superfície \vec{n} .

$$\vec{n}dS = d\vec{S}$$

Sendo \vec{B} o vector indução magnética na região indicada, chama-se fluxo elementar do campo magnético através do elemento de superfície $d\vec{S}$ ao escalar $d\Phi$, definido por:

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Se quisermos o fluxo do campo magnético total através de toda a superfície, este será:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Fisicamente dá-nos o número de linhas de força através da superfície S . Se as direcções do elemento de superfície e o vector indução magnética coincidirem, tem-se:

$$\Phi = B \cdot S$$

2.3 Lei de Faraday

Dos exemplos atrás vimos que é possível obter uma corrente num circuito por indução electro-magnética. Por outro lado, sempre se disse que para obter uma corrente eléctrica num circuito é necessário que seja aplicada uma força electromotriz a esse circuito. Pelas experiências de Faraday verifica-se que só existe corrente se houver uma variação de fluxo através da área do circuito. Assim o que causa a corrente no circuito é a força electromotriz aplicada ou uma variação temporal do fluxo do campo de indução magnética através da área do circuito.

Expressão da lei de Faraday:

$$\xi = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

onde ξ é força electromotriz induzida que é o negativo da taxa de variação temporal do fluxo magnético através da área do circuito.

” A unidade de fluxo magnético é o weber (Wb) que é o fluxo da indução magnética que atravessa uma determinada superfície plana de área igual a um metro quadrado, normal à direcção de um campo magnético uniforme e invariável igual a um Tesla”

Verifica-se que a lei de Faraday é correcta qualquer que seja a origem da variação do fluxo. Pode variar o campo de indução magnética ou pode variar a área do circuito.

Vamos considerar que numa região onde existe um campo magnético o fluxo varia devido ao deslocamento de uma parte do circuito. Tem os um circuito que consiste num fio condutor em forma de U que é fixo e uma barra condutora móvel (figura 12).

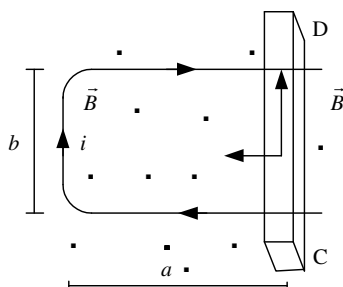


Figura 12: Movimento de uma barra condutora sobre um fio condutor em forma de U

Sendo o campo magnético estacionário e se o circuito é mantido imóvel, nenhuma corrente pode ser detectada.

Supomos que o campo aponta para fora da folha e é perpendicular a esta. O fluxo de \vec{B} através do circuito é:

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ \Phi &= B \cdot S \\ \Phi &= B \cdot ab\end{aligned}$$

Se movimentarmos a barra CD com uma velocidade v :

$$v = \frac{da}{dt}$$

O fluxo de \vec{B} através do circuito passa a variar no decorrer do tempo.

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ \frac{d\Phi}{dt} &= -Bb \frac{da}{dt}\end{aligned}$$

onde o sinal menos se deve ao facto de haver uma diminuição das linhas de força de indução:

$$-\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = Bbv$$

Existe um campo magnético na região e a barra condutora possui cargas livres que se movem com velocidade v , pelo que aparecerá sobre elas uma força de Lorentz que é uma força magnética. Assim todas as cargas magnéticas da barra sofrem a acção da força magnética dada por:

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

Como \vec{v} e \vec{B} são perpendiculares entre si, não se alterando q , \vec{F} será constante ao longo de toda a barra e nula no restante circuito.

Assim a f.e.m. que movimenta as cargas para o aparecimento de uma corrente eléctrica será:

$$\xi = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

como vimos anteriormente:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

$$\begin{aligned}\xi &= \oint_C \frac{\vec{F}}{q} \cdot d\vec{l} \\ &= \frac{1}{q} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ &= \frac{1}{q} \oint_C q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}\end{aligned}$$

Ao longo da barra:

$$\xi = \int_0^b vBdl = Bvb$$

Comparando com o resultado obtido anteriormente:

$$\xi = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

“ A força electromotriz é induzida por uma força magnética que age sobre as cargas dotadas de velocidade v ”.

Recapitulando um circuito em movimento num campo magnético estacionário induz no circuito uma fem induzida que produz uma corrente induzida cujo sentido é o mostrado na figura 12, como sendo o das cargas positivas, ou seja, o mesmo sentido de \vec{F} .

2.4 Lei de Lenz

É sempre possível saber-se o sentido da corrente induzida num circuito, através de estudos feitos sobre a força que actua sobre as cargas no circuito.

Há uma regra prática para determinar o sentido da corrente induzida que é a chamada *lei de Lenz*.

"O sentido da corrente induzida é tal que se opõe à causa que lhe deu origem"

A lei de Lenz justifica o aparecimento do sinal (-) na expressão da lei de Faraday. A variação do fluxo do campo magnético através da área de um circuito produz uma corrente induzida. Por sua vez uma qualquer corrente cria um campo magnético. Se o sinal da lei de Faraday fosse (+) significaria que a corrente induzida teria um sentido de forma a somar o campo externo com o campo criado pela corrente induzida. Este campo composto faria com que houvesse um aumento de fluxo através do circuito e consequentemente teríamos uma corrente induzida maior, que por sua vez criaria um campo magnético maior, e assim sucessivamente. Esta evolução contraria o princípio da conservação de energia. Para haver compatibilidade com este princípio tem de ser:

$$\xi = -\frac{d\Phi}{dt}$$

O sentido da corrente induzida deve opôr-se à causa que lhe deu origem. A corrente induzida produzirá um campo magnético em sentido contrário ao campo original. As figuras 13 e 14 ilustram a lei de Lenz.

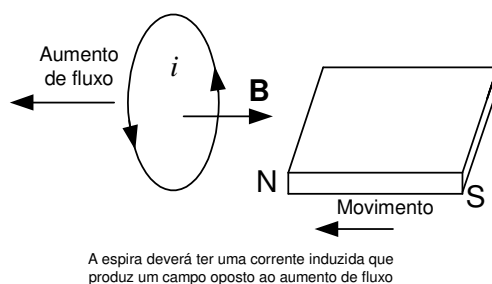


Figura 13: Ilustração da Lei de Lenz (a)

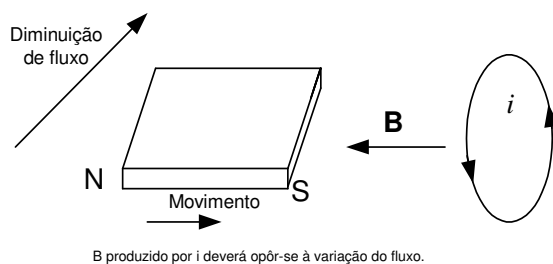


Figura 14: Ilustração da Lei de Lenz (b)

Para determinação do sentido da corrente induzida utilizar-se-á a *regra da mão direita*. "O sentido da corrente induzida por um fluxo magnético variável é dado pelos dedos da mão direita, quando o polegar aponta na direcção oposta à variação do fluxo

2.5 Gerador de corrente alternada

O gerador consiste essencialmente numa bobina que é capaz de girar numa região do campo magnético uniforme. Consideremos uma bobina circular e a girar em torno de um dos seus diâmetros, na região de um campo magnético uniforme é perpendicular ao seu eixo de rotação.

Devido à rotação da bobina o fluxo que atravessa a área variará sendo induzida uma *fem* no circuito. Se S é a área da bobina e θ o ângulo formado entre \vec{B} e a normal ao plano da bobina, o fluxo magnético através da área da bobina será:

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = BS \cos \theta$$

Se a bobina gira com uma velocidade angular ω onde:

$$\theta = \omega t$$

a *fem* na bobina será:

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ \xi &= -\frac{d}{dt} (BS \cos \theta) \\ \xi &= BS\omega \sin \omega t \end{aligned}$$

Se levamos os fios da bobina a um ponto afastado da bobina girante, onde o campo magnético é nulo, podemos aplicar a um circuito a diferença de potencial V que corresponde à *fem* da bobina girante: figura 15.

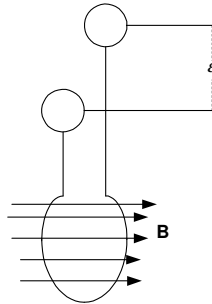


Figura 15:

$$V = \xi = BS\omega \sin \omega t = V_0 \sin \omega t$$

onde,

$$V_0 = BS\omega = cte.$$

A diferença de potencial aos terminais do circuito varia com a função seno. Esta diferença de potencial ou tensão é alternada sinusoidal.

Se o gerador é ligado a um circuito de resistência total R , a corrente que percorre o circuito será proporcional à fem do gerador e inversamente proporcional a R .

$$i = \frac{V}{R} = \frac{V_0}{R} \sin \omega t$$

Se olharmos novamente para a montagem anterior, se em vez de fazermos girar a bobina com uma força externa, fizermos passar uma corrente pela bobina. Como a bobina se encontra num campo magnético haverá um binário que actua sobre a mesma com forças de Lorentz e a bobina gira. O gerador tornou-se um motor. O sistema pode ser um motor ou um gerador. A equivalência está relacionada com o princípio da conservação da energia.

3 Indutância e energia do campo magnético

Consideremos dois circuitos próximos um do outro designados por circuito 1 e 2.

Se no circuito 1 houver um aumento de corrente haverá um aumento do campo magnético na região que envolve esse circuito e consequentemente haverá um aumento de fluxo magnético através do circuito 2. Esse aumento de fluxo produz um aumento de fem induzida no circuito 2. Quanto mais próximos estiverem os dois circuitos maior será o fluxo através do circuito 2 e portanto maior será a fem induzida. Os mesmos efeitos se podem reportar com o circuito 1 relativamente ao circuito 2. A geometria dos circuitos também terá influência.

3.1 Indutância mútua

O acoplamento magnético de um circuito relativamente a outro designa-se por *indutância mútua*. A indutância mútua do circuito 2 relativamente ao circuito 1 é indicada por M_{21} e definida por:

$$M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{i_1}$$

onde N_2 é o número de espiras do circuito 2, Φ_{21} é fluxo através do circuito 2 produzido pelo circuito 1 e que passa através das espiras do circuito 2 e i_1 é a corrente que percorre o circuito 1.

A unidade de medida da indutância mútua é o *Henry*: "é a indutância mútua de um elemento passivo de um circuito entre cujos terminais se induz uma tensão constante e igual a um volt, quando percorrido por uma corrente cuja intensidade varia uniformemente à razão de um ampère por segundo: $1H = 1 \frac{W_b}{A}$."

A designação é uma homenagem a Joseph Henry.

A indutância mútua não é mais do que o fluxo que a travessa uma bobina por unidade de corrente produzida por outra bobina próxima dela. A indutância mútua só depende da permeabilidade magnética do meio, da geometria dos circuitos e da separação entre eles.

Outra propriedade da indutância mútua é a que envolve a sua relação com a força electromotriz induzida ξ_{21} no circuito 2 devido à corrente no circuito 1, i_1 .

Através da lei de Faraday têm-se que:

$$\xi_{21} = -N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt}$$

como,

$$\begin{aligned} N_2 \Phi_{21} &= M_{21} i_1 \\ N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt} &= M_{21} \frac{di_1}{dt} \end{aligned}$$

logo:

$$\xi_{21} = -M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

Assim, a força electromotriz induzida é igual à taxa de variação da corrente i_1 a menos da constante M_{21} .

É possível demonstrar que as indutâncias mútuas num sentido e noutro são iguais:

$$M_{12} = M_{21} = M$$

ou seja: a indutância mútua do circuito 1 relativa ao circuito 2 é igual à indutância mútua do circuito 2 relativa à indutância mútua do circuito 1.

3.2 Auto-indutância

Até esta altura considerámos sempre duas bobinas ou dois circuitos e as forças electromotrizes induzidas nessas bobinas ou circuitos e considerámos só o caso em que existe corrente numa bobina ou na outra. Se existirem correntes nas duas bobinas, simultaneamente, o fluxo magnético que passa através de cada uma será a soma dos dois fluxos que existiriam separadamente visto que o princípio da sobreposição também se aplica aos campos magnéticos. A fem induzida num circuito será proporcional não só à variação temporal da corrente no outro circuito mas também à variação temporal da sua própria corrente.

$$\xi_2 = -M_{21} \frac{di_1}{dt} - M_{22} \frac{di_2}{dt}$$

Analogamente:

$$\xi_1 = -M_{12} \frac{di_2}{dt} - M_{11} \frac{di_1}{dt}$$

Os coeficientes M_{11} e M_{22} são identificados por:

$$\begin{aligned} L_1 &= M_{11} \\ L_2 &= M_{22} \end{aligned}$$

Estes coeficientes apresentam características das geometrias dos circuitos 1 e 2. São designados por *coeficientes de auto-indução* das bobinas. A unidade de medida é o *henry*. Recorrendo às expressões anteriores temos que:

$$M_{11} = \frac{N_1 \Phi_{11}}{i_1} = L_1$$

O coeficiente de auto-indução de uma bobina dá-nos o fluxo através dessa bobina por unidade de corrente que percorre a própria bobina. Haverá sempre uma força electromotriz auto-induzida mesmo que haja só uma bobina, que é proporcional à taxa de variação da corrente na bobina. Para uma única bobina convencionamos que a fem e a corrente serão positivas se tiverem o mesmo sentido.

$$\xi = -L \frac{di}{dt}$$

o sinal negativo indica que a fem induzida se opõe à variação da corrente segundo a lei de Lenz. Por esta razão a fem chama-se força contra-electromotriz.

3.2.1 Coeficiente de acoplamento

Há uma relação entre as indutâncias mútuas e os coeficientes de auto-indução.

$$M = \pm k \sqrt{L_1 L_2}$$

k é denominado *coeficiente de acoplamento* entre dois circuitos. O valor absoluto do coeficiente é um factor que varia entre 0 e 1. Se a maior parte do fluxo de uma bobina atravessa a outra, o coeficiente de acoplamento é quase igual a 1, os circuitos estão acoplados muito próximos um do outro. Se os circuitos estão afastados um do outro, de tal modo que pouco fluxo atravessa os circuitos, o acoplamento é quase zero.

3.2.2 Bobinas

As bobinas são dispositivos construídos para armazenarem, num circuito, energia magnética. Consideram-se as bobinas sem resistência.

Energia armazenada numa bobina A energia armazenada numa bobina é de natureza magnética. Consideremos um circuito que consta duma fonte de força electromotriz ξ , uma resistência R e uma bobina com um coeficiente de auto-indução L . Em termos energéticos a energia fornecida pela fonte uma parte é dissipada na resistência e a outra armazenada na bobina.

$$\xi = iR + L \frac{di}{dt}$$

$$\xi i = Ri^2 + Li \frac{di}{dt}$$

O 1º membro representa a potência fornecida pela fonte, o 1º termo do segundo membro representa a potência dissipada por efeito de joule na resistência e o 2º termo do segundo membro representa a potência armazenada na bobina. Ou seja, $Li \frac{di}{dt}$, representa a taxa de armazenamento da energia na bobina.

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= Li \frac{di}{dt} \\ dW &= Lidi \end{aligned}$$

Integrando esta equação, considerando como limites de integração $i = 0$ $W = 0$, e W quando a corrente é i .

$$\begin{aligned} \int_0^W dW &= \int_0^i Lidi \\ W &= \frac{1}{2} Li^2 \end{aligned}$$

3.2.3 Associação de bobinas

Associação em série Supomos três bobinas ligadas em série cujas coeficientes de auto-indução são respectivamente L_1, L_2, L_3 .

Não consideramos os efeitos da indução mútua. A equação do circuito é:

$$\xi = -L_1 \frac{di}{dt} - L_2 \frac{di}{dt} - L_3 \frac{di}{dt}$$

como circuito equivalente com uma só bobina temos:

$$\xi = -L_{eq} \frac{di}{dt}$$

Esta expressão mostra que um conjunto de bobinas em série pode ser substituída por uma bobina cujo coeficiente de auto-indução seja igual à soma dos coeficientes de auto-indução das bobinas associadas.

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3$$

Se, para o caso em que temos duas bobinas, admitirmos que haverá uma indução mútua, temos:

$$\xi = -L_1 \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} \pm 2M \frac{di}{dt}$$

é fácil de notar que a indução mútua ocorre duas vezes. O sinal (\pm) leva em conta o facto de haver possibilidade de uma interecção mútua de duas bobinas dar um aumento no fluxo total, ou que ocorra um fluxo em sentido contrário àquele devido à auto-indução. Este sinal depende da disposição geométrica das bobinas.

$$L_{eq} = L_1 + L_2 \pm 2M$$

Associação em paralelo Consideremos duas bobinas em paralelo.

$$\begin{aligned}\xi_1 &= -L_1 \frac{di_1}{dt} \\ \xi_2 &= -L_2 \frac{di_2}{dt}\end{aligned}$$

dado que a ligação é em paralelo:

$$\xi = \xi_1 = \xi_2$$

donde:

$$\begin{aligned}-\frac{\xi}{L_1} &= \frac{di_1}{dt} \\ -\frac{\xi}{L_2} &= \frac{di_2}{dt}\end{aligned}$$

somando membro a membro:

$$-\xi \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} = \frac{d}{dt}(i_1 + i_2)$$

como $i = i_1 + i_2$, temos:

$$-\xi \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) = \frac{di}{dt}$$

daqui podemos concluir que:

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

4 Propriedades magnéticas da matéria

Os campos magnéticos são estabelecidos por cargas eléctricas em movimento ou por correntes eléctricas. Quando se estudaram os dieléctricos as equações do campo eléctrico sofreram algumas alterações em virtude dos fenómenos ocorrerem num meio diferente do ar ou do vácuo.

Nas leis dos fenómenos magnéticos também ocorrerão modificações quando estes ocorrerem não no ar ou vácuo mas num meio magnético qualquer.

Quanto às características magnéticas os materiais dividem-se em:

- Materiais ferromagnéticos, que são os materiais que apresentam propriedades magnéticas importantes. Ex.: ferro e cobalto.
- Materiais paramagnéticos, materiais sob certas condições apresentam efeitos magnéticos embora não da mesma intensidade que os ferromagnéticos. Ex: alumínio.
- Materiais diamagnéticos, os materiais cujas características magnéticas são muito incipientes. Ex: bismuto.

4.1 Interpretação de Ampère

O primeiro contacto que o homem teve com os fenómenos magnéticos foi através de determinados materiais que se encontram na natureza chamados *iman* que apresentam propriedades de atracção ou repulsão quando em contacto com pequenos pedaços de ferro. Ampère sugeriu que esses materiais tinham propriedades magnéticas e que eram constituídos por um número muito grande de minúsculas correntes eléctricas, denominadas *correntes amperianas*.

Sabe-se actualmente que nos materiais magnetizados essas correntes estão alinhadas, dando-se ao processo de alinhamento o nome de *magnetização*. O processo de magnetização consiste no alinhamento das pequenas correntes após a aplicação de um campo magnético externo ou não, com os planos das minúsculas correntes paralelos entre si e todas na mesma direcção.

Atribui-se a existência destas pequenas correntes ao movimento dos electrões no interior dos átomos, movimento esse de revolução em torno do núcleo e torno de si mesmo (*spin*).

Estas correntes subsistem indefinidamente e em virtude de não haver resistência não há produção de calor. A corrente macroscópica resultante do alinhamento no interior do material faz-se sentir na periferia do material.

4.1.1 Teoria electrónica do magnetismo à face da constituição da matéria

A teoria electrónica do magnetismo à face da constituição da matéria explica a razão das diferenças entre as propriedades magnéticas dos diferentes materiais.

Os átomos são constituídos por um núcleo de carga eléctrica positiva à volta do qual gravitam electrões de carga eléctrica negativa.

O movimento dos electrões constitui correntes eléctricas que produzem efeitos magnéticos. Três situações se podem distinguir:

- Substâncias diamagnéticas cujas características magnéticas são muito incipientes (ex: ouro, cobre, metalóides, substâncias orgânicas);
- Substâncias paramagnéticas que, em determinadas condições, apresentam características magnéticas (ex: platina, sódio, alumínio, ligas, oxigénio).
- Substâncias ferromagnéticas que apresentam características magnéticas importantes (ex: ferro, níquel e cobalto e respectivas ligas) (fortemente magnéticas)

As substâncias diamagnéticas são constituídas por átomos magneticamente neutros, isto é, os movimentos dos electrões dentro de cada átomo dão lugar a campos magnéticos que se compensam. Será o caso de um átomo com dois electrões que giram em sentido contrário. São caracterizados por uma susceptibilidade magnética negativa $\chi_m < 0$. Não têm um momento magnético permanente.

Quando se submete um átomo deste tipo a um excitação \vec{H} crescente vai haver um pequeno crescimento do campo e através duma variação deste aparecem forças electromotrizes que tendem a opôr-se à variação que as produziu conforme a lei de Lenz. O efeito das forças electromotrizes consiste em contrariar o movimento dos electrões que se movem num sentido e favorecer o movimento de outros que se movem em sentido contrário.

Tudo se passa como se ao movimento de translação dos electrões se sobrepõe outro conhecido por "*precessão de Larmor*", que veremos posteriormente.

O que é um facto é que a velocidade dos dois electrões deixou de ser igual pelo que o átomo deixou de ser magneticamente neutro, tendo o efeito magnético a opôr-se ao crescimento de \vec{B} , o qual deixa de crescer na mesma proporção de \vec{H} o que aconteceria se meio fosse o vácuo. Resulta que a permeabilidade destas substâncias é menor que do que a do vácuo ($\mu < 1$).

As substâncias paramagnéticas supõem-se constituídas por átomos com um certo poder magnético, isto é, cujos electrões têm um movimento predominante num dado sentido. Os átomos

têm um momento magnético permanente e apresentam uma susceptibilidade positiva $\chi_m > 0$.

As suas trajectórias não são orientadas pelo que os seus efeitos magnéticos se neutralizam não tendo a substância no seu conjunto qualquer efeito magnético.

Se forem sujeitos a uma excitação \vec{H} dão-se dois fenómenos:

- a) A orientação das trajectórias dos electrões cujo efeito se vai somar ao da excitação;
- b) Uma precessão de Larmor tendente à sua diminuição.

Se a polarização tiver efeitos dominantes sobre os da precessão, o campo resultante \vec{B} será superior ao que seria se o meio fosse o vácuo pelo que a permeabilidade será superior à do vácuo ($\mu > 1$).

As substâncias ferromagnéticas supõem-se constituídas por grupos de átomos (microcristais) cada um dos quais se encontra sempre polarizados, isto é, os átomos estão orientados.

O conjunto dos grupos de átomos é que não está orientado na ausência de excitação exterior \vec{H} .

À medida que a excitação cresce cada um dos grupos vai-se orientando por forma a somar os seus efeitos ao de \vec{H} .

Deste modo o campo magnético \vec{B} vai crescendo por degraus, correspondentes à orientação de cada grupo de microcristais, até ao momento que estejam todos orientados. Depois disso o campo magnético \vec{B} passará a crescer proporcionalmente à excitação \vec{H} como aconteceria se o meio fosse o vácuo, é a chamada fase da *saturação*.

4.2 Materiais ferromagnéticos

As substâncias ferromagnéticas são caracterizadas pelo facto da magnetização não ser proporcional ao campo magnético aplicado. As susceptibilidades magnéticas podem atingir valores da ordem de 10^3 .

Os materiais ferromagnéticos podem existir em estado de não-magnetização que se explica pela tendência do material se dividir em *domínios*. Os domínios são regiões nas quais os dipolos estão alinhados no mesmo sentido. O resultado macroscópico é uma magnetização nula. Vamos explicar a existência desses domínios no ponto de vista da energia. Na figura mostra-se uma ideia do campo nos pontos externos da amostra. O campo magnético nesses pontos externos armazena uma energia dada por:

$$\frac{B^2}{2\mu_0}$$

Quanto mais aumenta o número de domínios mais fraco se torna o campo exterior e, portanto, menor a energia. Esta energia perdida pelo exterior serve para construir muros dos domínios, ou seja, fazer girar os dipolos. O estado de equilíbrio é o estado para o qual a energia é um mínimo.

4.2.1 Saturação e histerese dos materiais ferromagnéticos

A características $B(H)$ dos materiais ferromagnéticos apresentam tipicamente a forma representada na figura 16, com uma região de crescimento rápido a que se segue uma região de crescimento lento designada por *região de saturação*. Este comportamento deve-se ao facto da magnetização possível do material ter um valor máximo bem definido M_s designado *magnetização de saturação*. Quando a saturação é atingida:

$$B = \mu_0 H + \mu_0 M_s = \mu_0 H + B_s$$

onde $B_s = \mu_0 M_s$ é a indução magnética da saturação. A assíntota da curva $B(H)$ é ligeiramente crescente com H devido ao primeiro termo. Porém se $B_s \gg \mu_0 H$ o crescimento de B na região

de saturação é quase insensível à escala. Uma curva como a da figura 16 é a chamada *curva de 1ª magnetização*.

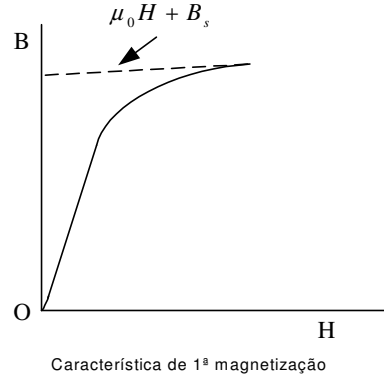


Figura 16: Primeira curva de magnetização

Se se fizer variar H ciclicamente entre valores extremos positivos e negativos que conduzem o material alternadamente à saturação num sentido e noutro (figura 17) obtém-se um ciclo no plano $B(H)$ com ramos ascendentes e descendentes distintos designado por *ciclo de histerese máximo*.

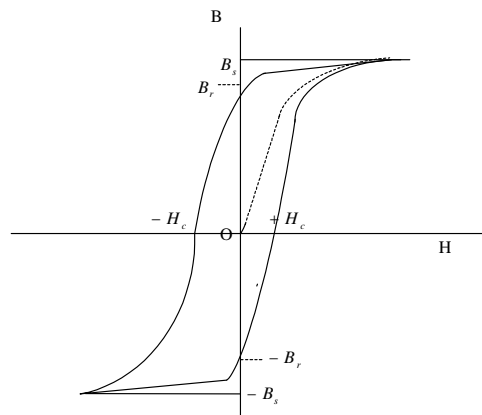


Figura 17: Ciclo de histerese

Este comportamento deve-se ao facto da magnetização que o material exibe não depende somente do valor da corrente de H mas depende também da memória que o material conserva dos estados de magnetização porque passou anteriormente.

Para caracterizar o ciclo de histerese máximo costuma citar-se os seguintes valores:

- B_s Indução magnética de saturação
- B_r Indução magnética remanescente
- H_c Campo magnético coercivo

A indução magnética remanescente B_r é o valor que se obtém para o campo \vec{B} levando o material à saturação e reduzindo posteriormente a excitação H a zero. O campo magnético

coercitivo H_c é a intensidade do campo H necessária para reduzir o campo B a zero, quando aplicada em sentido contrário ao do campo remanescente.

Nos circuitos magnéticos em que o fluxo e correspondente excitação são alternados utilizam-se materiais de baixa coercividade que podem ser facilmente magnetizados num e noutro sentido. Estes materiais designam-se por magneticamente *macios*.

Pelo contrário os materiais com elevada coercividade encontram aplicação como *ímãs permanentes* permitindo manter um fluxo remanescente elevado num circuito magnético sem qualquer corrente de excitação ($H = 0$). A alta coercividade permite manter este fluxo a despeito da presença de campos magnéticos desmagnetizantes elevados. Designam-se estes materiais como sendo magneticamente *duros*.

Na figura 18 comparam-se os ciclos de histerese máximos dum material macio e duro.

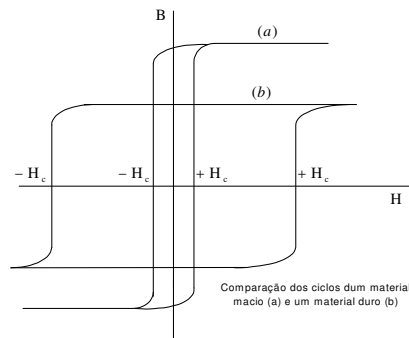


Figura 18: Ciclos de histerese de dois materiais com dureza diferente

Os materiais duros estão também na base da técnicas de registos magnéticos de som, imagem e de informação digitalizada.

Do ponto de vista energético o ciclo de histerese revela a presença de irreversibilidade no processo de magnetização dum material ferromagnético. Com efeito a área do ciclo representa a energia dissipada ao descrever o ciclo, energia essa que é convertida em calor, designando-se este efeito por *perdas de histerese*. Deste modo nas aplicações em que os campos são alternados procura-se utilizar materiais cujo ciclo tenha pequena área, isto é, sejam muito macios, para reduzir aquelas perdas.

5 Lei do circuito magnético.

5.1 Força magnetomotriz

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = I_C$$

A circulação do campo magnético \vec{H} ao longo de um caminho fechado designa-se por força magneto-motriz, designação análoga à que se usou quando da circulação do campo eléctrico. No segundo membro designa simplesmente a corrente I_C através da superfície S que é envolvida pela circulação C .

Esta equação é conhecida pela lei do *circuito magnético*. Nas aplicações é comum a corrente \vec{I}_C pode ser devida à existência de um ou mais enrolamentos percorridos por correntes cujas espiras perfuram repetidamente a superfície.

Sendo n_j o número de vezes que a corrente \vec{I}_j perfura a superfície a corrente \vec{I}_C será dada por:

$$\vec{I}_C = \sum_j n_j \vec{I}_j$$

As parcelas $n_j \vec{I}_j$ designam-se por produtos *ampere-espira* dos enrolamentos e a corrente \vec{I}_C pelo total dos ampère-espiras abraçados pelo caminho C .

No somatório os n_j são dotados de sinal sendo positivos quando o sentido de referência da corrente \vec{I}_j concorda com o da normal \vec{n}_C e negativos quando discorda. No exemplo da figura 19.

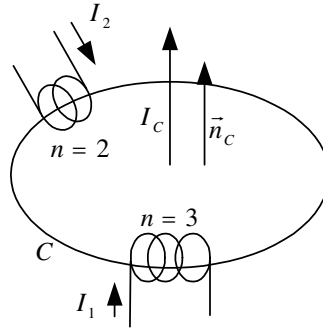


Figura 19:

seria:

$$\vec{I}_C = 3I_1 - 2I_2$$

5.2 Relutância magnética

A noção de circuito magnético é análoga à do circuito eléctrico e o seu interesse deriva da possibilidade de construir um tubo fechado sobre si próprio feito de material de elevada permeabilidade por onde se fecham as linhas de força do campo de indução magnética \vec{B} (figura 20) analogamente às linhas de \vec{J} num circuito eléctrico.

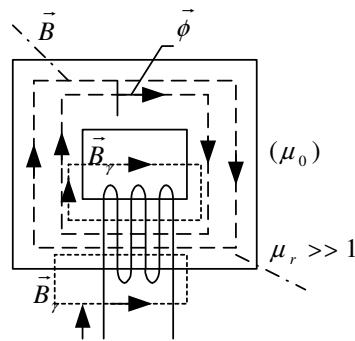


Figura 20:

Na medida em que a permeabilidade magnética do meio envolvente, por exemplo o ar, se pode considerar desprezável face à permeabilidade do meio interno, será possível definir um fluxo Φ de indução magnética na secção transversal do circuito magnético que, tal como a intensidade da corrente I num circuito eléctrico é o mesmo em qualquer secção do circuito.

A definição de circuito magnético não pode ser feita com o mesmo rigor do circuito eléctrico, porque as permeabilidades magnéticas relativas não atingem valores comparáveis aos valores relativos da condutividade entre bons condutores e dieléctricos. As paredes laterais do circuito magnético não são impermeáveis ao fluxo da indução magnética existindo em maior ou menor grau, linhas de fluxo que se fecham pelo meio envolvente e que constituem o *fluxo de dispersão*. (figura 20)

A aplicação do conceito de circuito magnético faz-se desprezando o fluxo de dispersão.

Exemplifica-se a aplicação destes conceitos no caso do circuito magnético do electro-íman da figura 18, constituído por um núcleo em forma de U, em torno do qual está enrolado o fio duma bobina de excitação, e uma armadura separada do núcleo por entreferros de ar de pequena espessura δ .

Embora os entreferros sejam ar, e portanto de baixa permeabilidade, podem ser tratados como troços do circuito magnético desde que a sua espessura seja muito menor do que as dimensões transversais, permitindo desprezar o alastramento lateral do fluxo que se verifica ao longo da periferia dando continuidade ao tubo através do qual passa o fluxo.

A análise faz-se pela aplicação da lei do circuito magnético numa linha de fluxo média como C , calculando-se a *f.m.m.* pelos troços que por exemplo podem consistir no núcleo, armaduras e entreferros como se indica nas figuras 21 e 22.

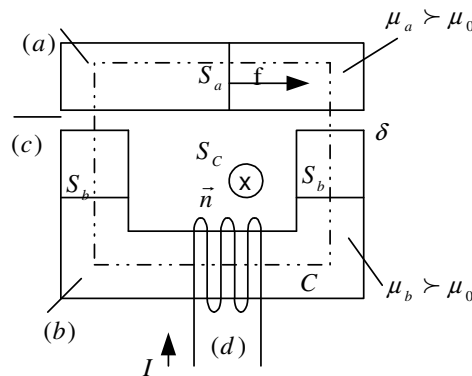


Figura 21:

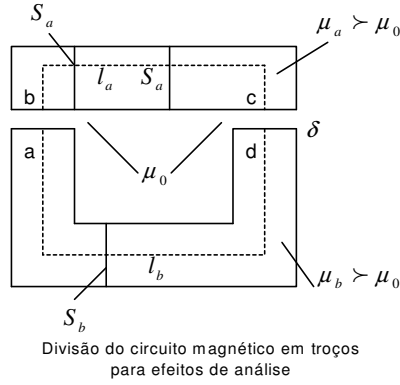


Figura 22:

Têm-se então que:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_{ab} + \int_{bc} + \int_{cd} + \int_{da}$$

Por norma fazem-se corresponder os troços a regiões com secção transversal e permeabilidade homogéneas.

As circulações de \vec{H} nos diferentes troços ao longo do caminho correspondem às tensões magnéticas por analogia com as tensões eléctricas.

$$U_{m1} = \int_{ab} \vec{H} \cdot d\vec{s}$$

A *f.m.m.* é assim em geral expressa pela soma das tensões magnéticas relativas aos diferentes troços do circuito.

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum_k (U_m)_k$$

As tensões magnéticas exprimem-se directamente em termos dos valores de \vec{H} para cada troço. Fazendo intervir as propriedades magnéticas dos troços $\vec{B}(\vec{H})$ podem ser expressas em termos dos valores de \vec{B} em cada troço e consequentemente do fluxo Φ comum a todos os troços do mesmo circuito:

$$(U_m)_k = f_k(\Phi)$$

No caso de se poder considerar o comportamento dos meios como lineares a dependência de Φ reduz-se a uma proporcionalidade.

$$(U_m)_k = (R_m)_k \Phi$$

A constante de proporcionalidade designa-se por *relutância magnética* do troço k . Este conceito é análogo ao da resistência eléctrica para os circuitos eléctricos.

A circulação pode então no caso linear exprimir-se da seguinte forma:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \left(\sum_k (R_m)_k \right) \cdot \Phi$$

Considerando o caminho C uma superfície S_C , a corrente I_C do segundo membro da lei do circuito magnético será o produto ampère-espira da bobina, pelo que:

$$\left(\sum_k (R_m)_k \right) \cdot \Phi = nI$$

$$\Phi = \frac{nI}{\sum_k (R_m)_k}$$

A relação $\Phi(I)$ assim obtida designa-se por *característica magnética* do circuito e é neste caso uma simples proporcionalidade entre Φ e I uma vez que se assumiu a linearidade dos materiais.

No caso geral dos meios não-lineares a lei do circuito magnético permite concluir que:

$$\sum_K f_K(\Phi) = nI$$

A característica magnética $\Phi(I)$ pode assim ser constituída a partir das características dos diferentes troços

$$(U_m)_k = f_k(\Phi)$$

por via gráfica ou numérica e reflectirá a não linearidade destas últimas.

5.3 Cálculo aproximado das relutâncias magnéticas

O cálculo aproximado da relutância dos troços homogêneos de secção uniforme é feito assumindo assim que o campo é uniforme. Nesta hipótese (figura 23) tem-se para a intensidade do campo \vec{B} em cada troço:

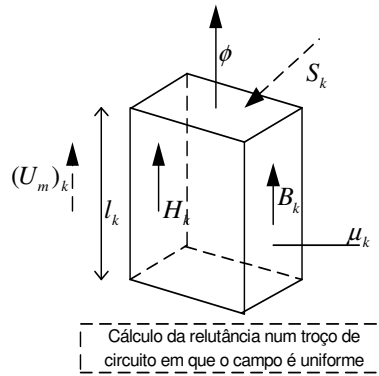


Figura 23:

$$B_k = \frac{\Phi}{S_k}$$

e para a intensidade do campo H , sendo μ_k a permeabilidade:

$$H_k = \frac{B_k}{\mu_k} = \frac{\Phi}{\mu_k \cdot S_k}$$

Na hipótese do campo uniforme a tensão magnética no troço l_k será:

$$(U_m)_k = H_k \cdot l_k = \frac{l_k}{\mu_k \cdot S_k} \cdot \Phi$$

Assim a relutância dum troço onde o campo é uniforme será dada por:

$$(R_m)_k = \frac{l_k}{\mu_k \cdot S_k}$$

Aplicando este resultado ao cálculo das relutâncias dos troços tal como definidos na figura 19 seria:

$$\begin{aligned} (R_m)_b &= \frac{l_b}{\mu_b \cdot S_b} \rightarrow \text{núcleo} \\ (R_m)_a &= \frac{l_a}{\mu_a \cdot S_a} \rightarrow \text{armadura} \\ (R_m)_{ar} &= \frac{\delta}{\mu_0 \cdot S_b} \rightarrow \text{entreferros} \end{aligned}$$

onde se tomou para secção dos entreferros a mesma do núcleo desprezando o efeito de dispersão. O carácter aproximado deste cálculo resulta de não ser rigoroso considerar o campo uniforme na vizinhança dos cantos e nos entreferros. Desprezando os erros resultantes teríamos:

$$[(R_m)_b + (R_m)_a + 2 * (R_m)_{ar}] \cdot \Phi = nI$$

Desta forma interpreta-se o resultado observando que para conseguir o fluxo desejado Φ estão disponíveis $n \cdot I$ ampère-espiras de excitação que são utilizados pelos diferentes troços na proporção das correspondentes parcelas do 1º membro, isto é, proporcionalmente às suas relutâncias.

Quando existem entreferros, mesmo de pequena espessura, dado que a sua permeabilidade é a do ar, muito menor portanto do que a dos restantes troços, é frequente serem eles que utilizam a maior parte dos ampère-espiras disponíveis.

5.4 Circuitos magnéticos com derivações

Considere-se a estrutura da figura 24 constituída por três colunas verticais e duas barras horizontais por onde se podem fechar os fluxos das colunas.

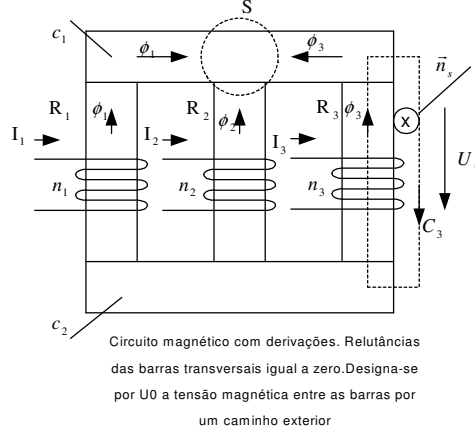


Figura 24:

Se considerarmos que existe *f.m.m.* só uma corrente na coluna 1, o fluxo ir-se-á fechar em parte pela coluna 2 e em parte através da coluna 3. existe portanto mais de um caminho para as linhas de \vec{B} se fecharem e neste sentido pode-se falar de derivações.

A noção adicional que é necessário introduzir para tratar estruturas mais complexas que um simples circuito, decorre da propriedade do campo de indução magnética que aplicada a uma superfície fechada S , envolvendo ramificações, permite relacionar os fluxos dos diferentes troços de modo a garantir que o fluxo total de \vec{B} através de qualquer superfície fechada seja nulo.

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Na estrutura da figura 21 tem-se portanto que:

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0$$

Relacionando os fluxos com as excitações determinam-se os coeficientes a_{kj} da expressão assumindo que o problema é linear.

$$\Phi_k = \sum_{j=1}^3 a_{kj} \cdot I_j$$

Para descrever o sistema introduzem-se as relutâncias R_j das colunas e despreza-se para simplificar a relutâncias das barras horizontais.

Designando por U_0 a tensão magnética entre as barras horizontais passando através de qualquer caminho passando pelo ar, pode-se aplicar a lei do circuito magnético a cada uma das colunas usando um caminho como se exemplifica na figura para a coluna 3 com s_3 . Obtém-se:

$$\oint_{s_j} \vec{H} \cdot d\vec{s} = R_j \cdot \Phi_j + U_0 = n_j \cdot I_j$$

Retirando o valor de Φ_j e considerando que o somatório dos fluxos é zero:

$$\sum_{j=1}^3 \frac{n_j \cdot I_j}{R_j} = U_0 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{R_j}$$

donde se pode obter U_0 na forma:

$$U_0 = R_0 \sum_{j=1}^3 \frac{n_j \cdot I_j}{R_j}$$

onde:

$$R_0 = \frac{1}{\sum_{j=1}^3 \frac{1}{R_j}}$$

Escrevendo a equação:

$$\oint_{s_j} \vec{H} \cdot d\vec{s} = R_j \cdot \Phi_j + U_0 = n_j \cdot I_j$$

para o índice k e substituindo este valor de U_0 , obtém-se da mesma forma:

$$\Phi_k = \frac{1}{R_k} (n_k \cdot I_k - U_0) = \frac{1}{R_k} \left(n_k \cdot I_k - R_0 \sum_{j=1}^3 \frac{n_j \cdot I_j}{R_j} \right)$$

Deste modo os coeficientes a_{kj} são:

$$a_{kk} = \frac{n_k}{R_k} \left(1 - \frac{R_0}{R_k} \right)$$

$$a_{kj} = -\frac{n_j \cdot R_0}{R_j \cdot R_k} \rightarrow (k \neq j)$$

Analisando o caso de haver simetria na estrutura:

$$\begin{aligned} R_1 &= R_2 = R_3 = R \\ n_1 &= n_2 = n_3 = n \end{aligned}$$

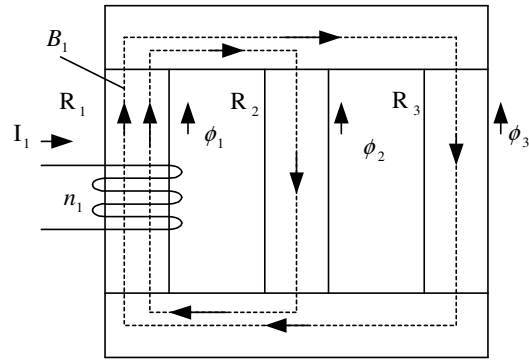
que corresponde nas aplicações ao circuito magnético dum transformador trifásico de três colunas. Neste caso tem-se:

$$R_0 = \frac{R}{3}$$

e, os coeficientes serão dados por:

$$\begin{aligned} a_{kk} &= \frac{2}{3} \frac{n}{R} \\ a_{kj} &= -\frac{1}{3} \frac{n}{R} \end{aligned}$$

Para interpretar o significado dos coeficientes considere-se a figura 25 em que só há uma corrente no enrolamento da coluna 1. Calculando os coeficientes a_{11} , a_{21} , a_{31} , usando as expressões anteriores obtém-se os fluxos:



Fluxo produzido pela corrente I1

Figura 25:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \frac{2}{3R} \cdot n \cdot I_1 \\ \Phi_2 &= \Phi_3 = -\frac{\Phi_1}{2}\end{aligned}$$

Estes valores exprimem simplesmente o facto do fluxo Φ_1 se dividir ao meio fechando-se cada metade por cada uma das restantes colunas que têm relutâncias iguais e ainda que a relutância total do circuito formado pela coluna 1 e as outras duas colunas em paralelo é como se poderia prevêr:

$$R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2} = \frac{n \cdot I_1}{\Phi_1}$$